Б. Батишэнд 1-р сургууль. Цаас 1

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}=k$ ба $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = M$ байна

Нэгэнт $M>1$-гэж өгсөн тул $a_1=a_2=\dots=a_n=1$ байж болохгүй $\Rightarrow$ аль нэг нь 1-ээс ялгаатай $\Rightarrow \exists s\in\mathbb{N}: a_s\neq 1$ $(s\leq n)$.

Энд $a_1; a_2; \dots; a_n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_1; a_2; \dots; a_n \geq 1 \Rightarrow$ ~~$\exists s \in\{1;2;\dots;n\}: a_s \geq 1$~~.

$\Rightarrow a_s \geq 1$

$a_s \neq 1$-тул $\boxed{a_s>1}$-байна.

Хэрэв бид ~~дурын эерэг x-ийн хувьд~~ $(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n) > M(x+1)^k$-гэж баталвал ~~$P(x)<0$~~ Дурын эерэг x-ийн хувьд $P(x)<0$-болж P-нь эерэг язгуургүй болох нь батлагдана.

~~$\prod_{i=1}^{n}(x+a_i) \Rightarrow$~~ $a_1; a_2; \dots; a_n \in \mathbb{N}$; $x>0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n}(x+a_i)=\prod_{i=1}^{n}\left(a_i\left(\frac{x}{a_i}+1\right)\right)=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x}{a_i}+1\right)\right)= \cancel{M\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}\left(\frac{x}{a_i}\right)^{n-j}C\right)}$$

$$=M\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x}{a_i}+1\right)^{a_i\cdot\frac{1}{a_i}}=M\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{x}{a_i}+1\right)^{a_i}\right)^{\frac{1}{a_i}}=M\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{a_i}\left(\left(\frac{x}{a_i}\right)^{a_i-j}\cdot C_{a_i}^{j}\right)\right)^{\frac{1}{a_i}}>$$

$$>M\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=a_i-1}^{a_i}\left(\left(\frac{x}{a_i}\right)^{a_i-j}\cdot C_{a_i}^{j}\right)\right)^{\frac{1}{a_i}}=M\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x}{a_i}\cdot C_{a_i}^{a_i-1}+1\right)^{\frac{1}{a_i}}=M\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x}{a_i}\cdot a_i+1\right)^{\frac{1}{a_i}}=$$

$$=M\prod_{i=1}^{n}(x+1)^{\frac{1}{a_i}}=M(x+1)^{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}=M(x+1)^k \Rightarrow \prod_{i=1}^{n}(x+a_i)>M(x+1)^k$$ -болж батлагдав.

~~Жич. Энд $\forall i\in\mathbb{N}$; $i\leq n$ бол $a_i\in\mathbb{N}$~~

Жич. • $a_1; a_2; \dots; a_n \in \mathbb{N} \Rightarrow M\prod_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{x}{a_i}+1\right)^{a_i}\right)^{\frac{1}{a_i}}=M\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{a_i}\left(\left(\frac{x}{a_i}\right)^{a_i-j}\cdot C_{a_i}^{j}\right)\right)^{\frac{1}{a_i}}$ -байна.

• Энд ~~$x>0; a_i$~~ $x, a_1; \dots; a_n>0 \Rightarrow \frac{x}{a_1}; \frac{x}{a_2}; \dots; \frac{x}{a_n}>0$ байна.

Мөн $\forall i\in\mathbb{N}$: $a_i\geq 1 \Rightarrow a_i-1\geq 0 \Rightarrow \sum_{j=0}^{a_i}\left(\left(\frac{x}{a_i}\right)^{a_i-j}\cdot C_{a_i}^{j}\right)^{\frac{1}{a_i}} \geq \sum_{j=a_i-1}^{a_i}\left(\left(\frac{x}{a_i}\right)^{a_i-j}\cdot C_{a_i}^{j}\right)^{\frac{1}{a_i}}$

1-7
2
3-0
Σ=

Гэхэн $\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{a_i}\left(\left(\frac{x}{a_i}\right)^{a_i-j} C_{a_i}^{j}\right)\right)^{\frac{1}{a_i}}$ -үржвэрт

$\left(\sum_{j=0}^{a_s}\left(\left(\frac{x}{a_s}\right)^{a_s-j} C_{a_s}^{j}\right)\right)^{\frac{1}{a_s}}$ -гэсэн үржигдэхүүн байх ба.

$a_s>1 \Rightarrow a_s-1>0 \Rightarrow \left(\sum_{j=0}^{a_s}\left(\left(\frac{x}{a_s}\right)^{a_s-j} C_{a_s}^{j}\right)\right)^{\frac{1}{a_s}} > \left(\sum_{j=a_s-1}^{a_s}\left(\left(\frac{x}{a_s}\right)^{a_s-j} C_{a_s}^{j}\right)\right)^{\frac{1}{a_s}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{a_i}\left(\left(\frac{x}{a_i}\right)^{a_i-j} C_{a_i}^{j}\right)\right)^{\frac{1}{a_i}} > \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=a_i-1}^{a_i}\left(\left(\frac{x}{a_i}\right)^{a_i-j} C_{a_i}^{j}\right)\right)^{\frac{1}{a_i}}$ байна.

7

1 - 7
2 - 6
3 - 0

Нийт 13

~~Б. Б~~атмэнд 1-р сургууль. Цаас 2

P-2 | Хамилтоны "x"-гэж товчлоё.

Дурын A "x"-ыг авья. (A-нь 3n-урттай)
A-нь $a_1 a_2 \dots a_{3n}$-гэж хэлбэртэй байг.
Ямар нэгэн 3n-урттай B-хамилтоны хувьд
B-г $b_1 b_2 \dots b_{3n}$-гэж хэлбэртэй байг.

A-г B болгодог дурын ~~тоог~~ "солилтын"-дарааллын хувьд дараах ~~хосын~~ хосуудыг самбарт бичье.

Эхлээд A-ын a_i-тоог "i"-онгоор будъя. ($i=\overline{1,3n}$).
Хэрэв i-р солилтонд ~~зүүн~~ талд x-онготэй, ~~баруун~~ ~~тал~~ y-онготэй тоонууд байсан ~~бол~~ бол тэдгээрийг сольсон бол самбарын ~~самбарын~~ ~~эхний~~ мөрөнд ~~эхлээд x~~ ~~алд нь y-тоонуудын бичнэ~~ i-р ~~мөрөнд~~ {x, y} хосыг бичнэ.

~~Одоо хамгийн урт үйлдлийн хув~~
~~Одоо самбарт бичигдсэн тоонуудыг ашиглан хамгийн урт үйлдэл хийдэг солилтын дарааллыг~~

Одоо нэгэн солилтын дарааллыг сонгоё.

① ~~B-гын~~ ~~Эхлээд~~ b_{3n}-нь y_{3n}-гэж тоон утгатай байг
1 гэхээн тэгвэл A-ийн хамгийн хойд талын y_{3n}-тоог авья. (y_i тоо p-р байг гэвэл)
y_{3n}-тоог хойд талынх нь тоотой сольсоор ~~A-ын~~ хамгийн хойд талд авч ирж A_1 "x"-г үүсгэнэ. Энд ял (3n-p)ш үйлдэл хийнэ

② b_{3n-1}-нь y_{3n-1}-гэж тоон утгатай байг.
1 гэхээн тэгвэл A_1-ийн ~~y_{3n}~~ ~~хамгийн~~ хойноосоо 1-дэх тоог үл тооцон хамгийн хойд талын y_{3n-1}-утгатай (q-р байгийн) тоог хойд талынх нь тоотой сольсоор хойноосоо 2-р байранд авч ирж A_2 "x"-г үүсгэнэ.
Гэх мэтчилэн үргэлжилнэ. Энд ял (3n-1-p ш үйлдэл хийнэ)

Ерөнхийдөө нь. (i)-р алхамд b_{3n-i+1}-нь y_{3n-i+1}-гэж тоон утгатай бай. тэгвэл A_{i-1}-ийн хойд талаасаа 1-ээс $(i-1)$-р...

дүг ул тоонуудаас хамгийн хойд талын y_{3n-i+1}-ут

тай тоог i-р байрандаа бай хойд талынх нь тоотой сольсоор хойд

талаасаа (i)-р байранд аваачих, A_i "x"-ийг

үүсгэнэ. (Энд яг $3n+1-i$-р ш үйлдэл хийгдэнэ).

- Энд $(3n)$-р эхэн дууссан A_{3n} - "x"-үүсэхэд

A_{3n} -нь B-тэй адилхан байна. Учир нь

i-р эхний дараа халмоны хойноос

i-р дах b_{3n-i+1}-тэй адилхан утгатай болох ба

үүнээс хойш дахиж солигдохгүй.

Энд $1,2,\dots,3n$-р эхний дараалсан хийх үйлдлийг T-гэж нэрлэе.

- Одоо бидний үзүүлсэн үйлдэл хамгийн бага солилт хийнэ гэдгийг ~~харуулъя~~ самбарт бичигдсэн тоонуудыг ашиглан харуулъя.

~~Дараах A-г B болгох үйлдлийн хувьд~~

~~Санам~~ T-үйлдлийн хувьд $\forall i,j \in \mathbb{N}$ ба $i<j\leq n$ байх i,j-ийн хувьд i ба j-онгийн тоонуудыг хооронд нь үсрэхэд л ганцхан удаа сольсон байна. ~~Эрхэж нь 2-оо~~

Баталгаа. Эсрэгээр нь 2 удаа солигдсон гэж.

~~a_i — нь A_{3n}-ийн урдаасаа i-р байранд~~
i, ба j-онготой тоонууд нь A_{3n}-ийн урд талаасаа хэрэглэсэн i' ба j'-р байранд очсон бай.

~~Хэрэв $j'>i'$-ба T-ээс j-онготой тоо нь T-ийн $(3n+1-j')$-р~~
Алгоритмаас харахад хэрэв j'
$j'>i'$-ба ~~T-ээс~~

Алгоритмын s-р эхэнд хийсэн солилт бүр нь A_s-ын хойноос s-р байранд байх тооны онгийн [illegible] тоог ялгуулна $\Rightarrow$

Б. Батзэнд
4-р сургууль
даалгавар 3.

...эв i-ба j-ончийн тоонууд (хадгалагдаж) солигддог бол
$(3n+1-i')$-эхвэл $(3n+1-j')$-р хэсгүүдэд л солигдоно.
Энд i ба j-ончийн тоонууд нь ижил хэсэгт (дор хаяж) 2 удаа со-
лигддог бол. Үр хэсгийн ~~тоо~~ солилт бүр j-ончийн тоог агуу-
дог гэе. i ба j-ийн эхний солилтын дараа i-ончийн тоо
j-ончийн тооны ~~а~~ урд орох ба. 2-р солилт хүртэл урд нь
байна. Тэгэх 2-р солилт болох үед i-р ончийн тоо нь
j-р ончийн тооны хойно байх ёстой => зөрчил =>
=> i ба j-ончийн тоонууд нь ижил хэсэгт солигдохгүй
ба дор хаяж 2 удаа солигдоно. =>
$(3n+1-i')$ ба $(3n+1-j')$ хэсгүүдэд тус бүрт (i ба j-ончийн
тоог сольсон солилт байна.
~~Т~~ Тэгэх $j'>i'$-бол $(3n+1-j')$-хэсгийн
тоо дахиж солигдохгүй => $(3n+1-i')$-р хэсэгт дараагаас j'-ончийн
j'-солигдохгүй => зөрчил.
$i'<j'$-бол яг адилаар зөрчил.

Санаа
A-г B болгох дүрын K. үйлдлийн хувьд ~~сэн хосууд~~ T-ийн хувь дахь самбарт ~~бичигд-~~
~~хосууд нь~~ хос бүр нь K. үйлдлийн самбарт бичигдсэн
гэж баталъя. самбарт бичигдэнэ.

Эсрэгээр нь T-д ийн самбарт бичигдсэн ч K-ийн самбарт бичигдэхгүй аль нэг хос
хэлбэртэй байг. $(x>y)$ гэе. => үр хос нь $\{x, y\}$.
Энд T-нь x, y-хоёрыг ганц л удаа сольсон.
x, y-хоёрын урд, хойд талын харьцаа солигдох гар-
цаагүй ~~бол~~ хүрэлцээтэй нөхцөл нь. анх A-ын хувьд $\Longrightarrow$ x, y-хоёрыг солих
=> эхэх y-~~т~~ онгтэй тоо x-онгтэй тооны урд байсан ба T-эр
$\{x, y\}$-ыг яг 1 удаа ~~солигдсон солиг~~ солигдсон => ~~x-онгтэй~~
B-ын хувьд x онгтэй тоо нь y-онгтэй тооны ...

Гэтэл k-ын хувьд анх y эхлэтэй тоо x-ийн
байсан ба $\{y;x\}$ ~~-дээр үйлдэл хийгээ~~ самбарт бичигд-
үй ($(x;y)$-дээр үйлдэл хийгээгүй) $\Rightarrow$ B-ын хувьд x-эхлэт
тоо y-эхлэтэй тооны хувьд хойно нь байна $\Rightarrow$ зөрчил

T ба k-ын самбарт бичигдэх хосын олонлогийг харгалзан T' ба k'-гэвэл

$T' \in K'$ ба T'-ийн бүх гишүүд ялгаатай $\Rightarrow$

$|K'| \geq |T'|$ $\Rightarrow$ ~~k-н~~ T-нь k-аас олонгүй үйлдэл хийнэ.

Энд k-нь дурын $\Rightarrow$ T- хамгийн цөөн байх нь илт.

• T ~~эгэл~~

s-р хэсэгт b_s-нь y_s-гээр тоон утгатай байг

Тэгвэл. A_{s-1}-ын урдаасаа 1-ээс $(s-1)$-р тоог үл тооцон,
хамгийн урд талын y_s-утгатай тоог урд талынха нь тоотой олсоор урдаасаа s-р байрлан авчирч.
A_s "x"-г үүсгэдэг ба.

~~s~~n $(1;2;\dots;3n)$-р ~~с~~ хэсгийн дараалалтай хийгдсүүд мөн T''-гэвэл T''-нь хамгийн цөөн гэдэг нь яг адилаар гарна.

Одоо дурын ~~а~~ A-ын хувьд

1-үүдийгээс нь байрлалуудыг урт урд талаас нь тоогоож $1 \leq c_1 < c_2 < \dots < c_n \leq 3n$ -гэе.

Тэгвэл ~~Дурын~~
хамгийн хойд талын n ш тоо нь урд 1 ~~н~~-байхаар B "x"-г дурын авъя.

A-г B-болгох T-үйлдэл хийхэд (үүнд нь i-р хэсэгт c_{n+1-i}-дээр байсан 1-ийг хөдлөх ба бусад 1-ийг хөдлөхгүй $\Uparrow$ ард нь.)

1-р хэсэгт яг $3n - c_n$
2-р хэсэгт яг $3n-1-c_{n-1}$
$\vdots$
хэсэгт ба $2n+1-c_1$

ш үйлдэл хийгдэнэ.

$\Rightarrow$ 1-ээс n-хэсгүүдэд $\frac{n(5n+1)}{2} - \sum_{i=1}^{n} a_i$ -үйлдэл хийгдэнэ

Батмэнд 1-р сургууль. Цаас 4.

Эхний урд талын n ш тоо нь бүгд 1 байх дүрмийг "x"-г авъя

A-г B, B-г A болгох T'-үйлдэл хийхэд.

1-р хэсэгт эн c_1-1
2-р хэсэгт эн c_2-2
⋮
n-р хэсэгт эн. c_n-n
ш үйлдэл хийгдэнэ ⇒

⇒ 1-ээс n-хэсгүүдэд $\sum_{i=1}^{n} a_i - \frac{n(n+1)}{2}$ үйлдэл хийгдэнэ.

⇒. T-ийн эхний n ш хэсэг, T'-ийн эхний n-хэсэг дээр үйлдлүүдийн нийлбэр. $-\frac{n(5n+1)}{2} - \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} a_i - \frac{n(n+1)}{2} =$

$= \frac{n\cdot 4n}{2} = 2n^2 \Rightarrow$

A-аас B-г гаргах T-ийн эхний n ш хэсэг, $\overbrace{T'\text{-ийн эхний}}^{A\text{-аас } B'\text{-г гаргах}}$ n-хэсгийн аль нэгнийх нь үйлдэл-ээр хаяж $\boxed{n^2}$

• T-ийн эхний n ш хэсэг n^2-аас цөөнгүй үйлдэл хийдэг бол.

A_n-"x"-ний хувьд сүүлийн n ш тоо нь бүгд 1 ⇒ урд талын. 2n ш тоо аль нь ч 1-биш.

A_n-ын T-ын эхний n-хэсэг 2 ба 3-уудын байрлалаас огт хамааралгүй ⇒

⇒ B-г эхний n ш тоо нь 2 дараагийн n ш тоо нь 3, сүүлийн n ш тоо нь 1 байхаар авч болно. Үүнийг B_2 "x"-гэе.

B-г эхний n ш тоо нь 3 дараагийн n ш тоо нь 2, сүүлийн n ш тоо нь 1 байхаар авч болно. Үүнийг B_3 "x"-гэе.

~~Хэрэв~~ A_n-ын хувьд 2-уудын байрлалыг урдаас ~~эхлэн~~ нь тоолбол $1\le d_1<d_2<\dots<d_n\le 2n$-гэе. 3-уудынхыг $1\le e_1<e_2<\dots<e_n\le 2n$-гэе.

~~B_3-ийн хувьд~~

B_3-ийн ~~эхний~~ хувьд T-ийн
n+1-р хэсэгт эн $2n-d_n$
n+2-р хэсэгт эн $2n-1-d_{n-1}$
⋮
2n-р хэсэгт эн $n+1-d_1$
ш үйлдэл хийнэ. ⇒

Нийт $\frac{n(3n+1)}{2} - \sum_{i=1}^{n}$ үйлдэл хийгдэнэ.

хувьд.

B_2-ийн T-ийн

$n+1$-р ~~үндэг~~ хэсэг $2n-e_n$
$n+2$-р ~~үндэг~~ хэсэг $2n-1-e_{n-1}$
$\vdots$
$2n$-р ~~үндэг~~ хэсэг $n+1-e_1$

-ы үндэг хийнэ ⇒

B_2-ийн T-ийн $n+1$-ээс $2n$-р хэсгүүд нийт.

$\frac{n(3n+1)}{2}-\sum_{i=1}^{n} e_i$ -ы үндэг хийнээ ⇒

B_2-ын T-ын $n+1$-ээс $2n$-р хэсэг ба B_3-ын T-ын $n+1$-ээс $2n$-р хэсгийн хийгдэх үндгүүдийн нийлбэр —

$$\frac{n(3n+1)}{2}-\sum_{i=1}^{n} e_i+\frac{n(3n+1)}{2}-\sum_{i=1}^{n} d_i=n(3n+1)-\left(\sum_{i=1}^{n} e_i+\sum_{i=1}^{n} d_i\right).$$

Энд $\{e_1; e_2; \dots; e_n; d_1; d_2; \dots; d_n\}=\{1; 2; \dots; 2n\}$ ⇒

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} e_i+\sum_{i=1}^{n} d_i=\frac{2n(2n+1)}{2}=n(2n+1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n(3n+1)}{2}-\sum_{i=1}^{n} e_i+\frac{n(3n+1)}{2}-\sum_{i=1}^{n} d_i=n(3n+1)-n(2n+1)=n^2.\Rightarrow$$

⇒ B_2-ын T-ын $n+1$-ээс $2n$-р хэсэг ба B_3-ын T-ын $n+1$-ээс $2n$-р ~~хэсгийн~~ хэсэгт хийгдэх үндгүүдийн ядаж нэг нь $\frac{n^2}{2}$-оос цөөнгүй ⇒ ~~B_2-ын T-ын~~ 1-ээс n-дэх хэсгүүдийн тоогоор.

B_2-ын T-ын үндэг ба B_3-ын T-ын үндгүүдийн ядаж нэг нь $n^2+\frac{n^2}{2}$-оос цөөнгүй. Энэ T-ны хамгийн бага үндэг ⇒ A-гаас B_2 ба B_3-ын ~~аа~~ аль нэгийг нь $\frac{3n^2}{2}$-оос цөөн салхмаар гаргаж авч чадахгүй ⇒ $\boxed{\text{батлагдав}}$

- A-гаас B'-г гаргах T'-ийн эхний n ш хэсэг яг n^2 үндэг хийгдэх үед яг адилаар батлагдана.

Нэмэлт: $\dots\overset{c_1}{1}\dots\overset{c_{n-2}}{1}\dots\overset{c_{n-1}}{1}\,1\dots\underbrace{\overset{c_n}{1}\dots}_{3n-c_n+1}0$ $3n$-р байр.

$\Downarrow$

$\dots\overset{c_1}{1}\dots\overset{c_{n-2}}{1}\dots\underbrace{\overset{c_{n-1}}{1}\dots 1\dots}_{3n-1-c_{n-1}+1}01$ $3n-1$-р байр.

$\Downarrow$

$\dots\overset{c_1}{1}\dots\underbrace{\overset{c_{n-2}}{1}\dots\dots\dots}_{3n-2+c_{n-2}+1}011$ $3n-2$-р байр.

...ӯтидийн жишээ.

133221

– 112233.

A – 133221

⇓

A_1 132213

⇓

A_2 122133

⇓

A_3 121233

⇓

A_4 112233

⇓

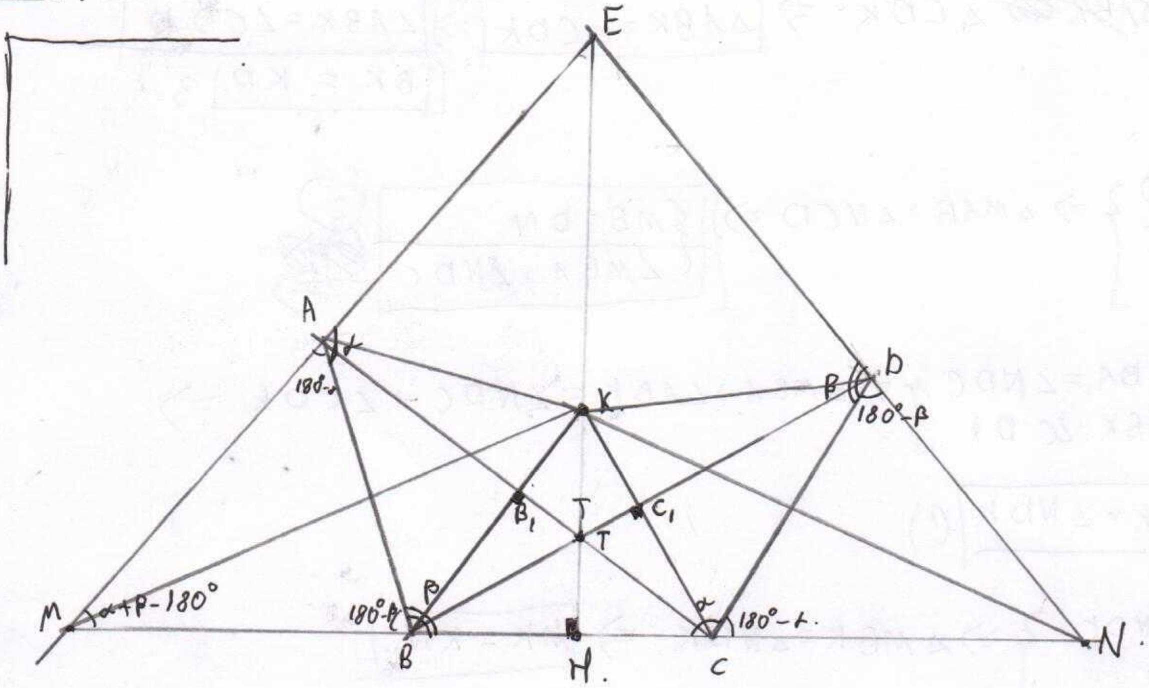
A_5 112233

⇓

A_6 112233.

Б. Батмэнд   1-р сургууль.   Цаас 1.

Р-1].



7

~~Бод~~ $[AC]\cap[BD]=T$-гэе
$(AE)\cap(BC)=M$-гэе
$(ED)\cap(BC)=N$-гэе

$\angle EAB=\angle BCD=\alpha$
$\angle ABC=\angle EDC=\beta$ гэе.

$\angle MAB=180°-\angle EAB=180°-\alpha$
$\angle MBA=180°-\angle ABC=180°-\beta$

$\angle NDC=180°-\angle EDC=180°-\beta$
$\angle NCD=180°-\angle BCD=180°-\alpha$

$\angle AMB=180°-\angle MAB-\angle MBA=\alpha+\beta-180°$
$\angle DNC=180°-\angle NDC-\angle NCD=\alpha+\beta-180°$ $\Rightarrow \angle EMN=\angle ENM \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{\Delta EMN\text{-адил хажуут}}$

E-ээс MN-рүү ~~EH~~ H-суурьтай өндөр татъя.
Хэрэв $T\in[EH]$-гэж баталбал бодлого бодогдоно.
Энд ΔEMN-нь адил хажуут ба EH-өндөр (дундажид босгосон перпендикуляр) $\Rightarrow$ T-нь.
~~MN-ын~~ тэд EH-ба MN-ий медиатрис $\Rightarrow T\in$(MN-ийн медиатрис)
гэж баталбал бодогдоно.

- B-ээс AC-рүү B_1-суурьтай
  C-ээс BD-рүү C_1-суурьтай өндөр татъя. $[BB_1]\cap[CC_1]=K$-гэе.

Энд ΔABC-адил хажуут $\Rightarrow BB_1$-нь медиан ба өндөр байна $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ ~~тэн ΔAKC-ын~~ хувьд $\angle KB_1C=90°$ ба $AB_1=B_1C$-байна $\Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta AKC$-ын хувьд ~~KB_1~~ өндөр ба медиан нь давхацна $\Rightarrow AK=KC$.

Үүнтэй адилаар $BK = KD$ - болно.

$$\left.\begin{array}{l} AK = KC \\ BK = KD \\ AB = CD \end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{\triangle ABK} \; \triangle CDK \Rightarrow \boxed{\triangle ABK = \triangle CDK} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \angle ABK = \angle CDK \\ \boxed{BK = KD} \; 3 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle MAB = \angle NCD \\ \angle MBA = \angle NDC \\ AB = CD \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle MAB = \triangle NCD \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{MB = DN} \; 2 \\ \angle MBA = \angle NDC \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \angle MBA = \angle NDC \\ \angle ABK = \angle CDK \end{array}\right\} \Rightarrow \angle MBA + \angle ABK = \angle NDC + \angle CDK \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\angle MBK = \angle NDK} \; (1)$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \angle MBK = \angle NDK \\ (2) & MB = DN \\ (3) & BK = DK \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle MBK = \triangle NDK. \Rightarrow \boxed{MK = KN.}$$

Энд $\left.\begin{array}{l} BC_1 \perp KC \\ CB_1 \perp KB \end{array}\right\} \Rightarrow T$-нь $\triangle BKC$-ийн ортотов $\Rightarrow$

$\Rightarrow KT \perp MN. \Rightarrow T$-нь K-аас MN-руу татсан өндөр дээр оршино.

Энд $MK = KN \Rightarrow \triangle MKN$-адил хажуут. $\Rightarrow K$-аас татсан өндөр нь MN-ын медиатрис дээр оршино $\Rightarrow$

$\Rightarrow K$-нь MN-ын медиатрис дээр оршино гэж батлагдав

$\lrcorner$

Б. Батмэнд 1-р сургууль, Цаас 2.

P-2

~~6 оноо.~~

6,5 оноо +0,5 = 7.

1) Хэрэв $\gcd(p;10)\neq 1$ -бол.

$\gcd(p;10)=x$ -гэе. $\Rightarrow \left.\begin{matrix} x\mid p \\ x\neq 1\end{matrix}\right\} \Rightarrow x=p.$ $\gcd(p;10)=p \Rightarrow p\mid 10.$

~~Энд $x\mid 10$~~ $\Rightarrow \left[\begin{matrix} x=1 \\ x=2 \\ x=5 \\ x=10\end{matrix}\right.$ ~~$x=p$-гэдгийг анзаарвал~~

Иймд A-нь эхний үйлдээрээ a_0-г 0-гэж сонговол $a_1 a_2 \ldots a_{p-1}$-ийн сонголтоос үл хамаарч

$M=a_0+10a_1+\ldots+10^{p-1}\cdot a_{p-1}\equiv 0+0\cdot a_1+\ldots+0\cdot a_{p-1}=0 \pmod p \Rightarrow$

$\Rightarrow M\,\vdots\, p$ - ~~болно~~ болно $\Rightarrow$ A-ялна,

2) $\gcd(p;10)=1$ - байг.

A ~~a~~-нь эхний үйлдээрээ a_{p-1}-г 0-гэж сонгоно $\Rightarrow$.

$\Rightarrow M=\sum_{i=0}^{p-2} a_i\cdot 10^i$ болно.

$\gcd(p;10)=1 \Rightarrow 2\nmid p \Rightarrow p=2p_1+1$-гэе $(p_1\in\mathbb{N})$. $\Rightarrow p_1=\frac{p-1}{2}$ болно.

$M=\sum_{i=0}^{p-2} a_i 10^i=\sum_{i=0}^{2p_1-1} a_i 10^i=\sum_{i=0}^{p_1-1} a_i 10^i+\sum_{i=p_1}^{2p_1-1} a_i 10^i=\sum_{i=0}^{p_1-1} a_i 10^i+\sum_{i=0}^{p_1-1} a_{p_1+i}10^{p_1+i}=$

$=\sum_{i=0}^{p_1-1}\left(a_i 10^i+a_{p_1+i}10^{p_1+i}\right). \Rightarrow \boxed{M=\sum_{i=0}^{p_1-1}\left(a_i 10^i+a_{p_1+i}10^{p_1+i}\right)}.$

$\gcd(p;10)=1$ ба $p\in\mathbb{P}\Rightarrow$ Фермагийн бага теоремоор

$10^{p-1}\equiv 1 \pmod p) \Rightarrow 10^{2p_1}\equiv 1 \pmod p \Rightarrow 10^{2p_1}-1\,\vdots\, p \Rightarrow$

$\Rightarrow (10^{p_1}-1)(10^{p_1}+1)\,\vdots\, p \Rightarrow \left[\begin{matrix} 10^{p_1}-1\,\vdots\, p \\ 10^{p_1}+1\,\vdots\, p\end{matrix}\right.$

$p=3$?

- $10^{p_1}+1\,\vdots\, p$ - үед. $10^{p_1}\equiv -1 \pmod p. \Rightarrow$

$\Rightarrow M=\sum_{i=0}^{p_1-1}\left(a_i 10^i+a_{p_1+i}\cdot 10^{p_1+i}\right)\equiv\sum_{i=0}^{p_1-1}\left(a_i 10^i+a_{p_1+i}\cdot(-1)\cdot 10^i\right)=$

$=\sum_{i=0}^{p_1-1}\left(a_i 10^i-a_{p_1+i}10^i\right).$

$a_0; a_1; a_2; \dots; a_{2p_1-1}$ -үүдийг

$$\left.\begin{array}{l} 0\text{-р хос } (a_0; a_{p_1+0}) \\ 1\text{-р хос } (a_1; a_{p_1+1}) \\ 2\text{-р хос } (a_2; a_{p_1+2}) \\ \vdots \\ p_1-1\text{-р хос } (a_{p_1-1}; a_{p_1+p_1-1}) \end{array}\right\}$$ гэж. p_1-ш хосод хуваая.

Хэрэв B-нь аль нэг хосын нэгийг нь x-гэж сонговол A-нь үг хосын нөгөөг нь x-гэж сонгоно.

(*) [B-үйлдэл хийхэд аль ч хосын хувьд хэвэл аль нь ч сонгогдоогүй хэвэл хоёулаа сонгогдсон байх ба A-үйлдэл хийсний дараа мөн адил аль ч хосын хувьд хэвэл аль нь сонгогдсон хэвэл 2ш нь сонгогдсон байх тул уг үйлдэл хүчинтэй.

$\Rightarrow$ Бүх a_i-үүд сонгогдсоны дараа $\forall i \in \{0;1;\dots;p_1-1\}: a_i = a_{i+p_1}$ байна.

$$\Rightarrow M \equiv \sum_{i=0}^{p_1-1}(10^i a_i - 10^i a_{i+p_1}) = \sum_{i=0}^{p_1-1}(10^i \cdot a_i - 10^i a_i) = \sum_{i=0}^{p_1-1} 0 = 0 \pmod p \Rightarrow$$

$\Rightarrow M \vdots p \Rightarrow$ A-ялна.

- $10^{p_1}-1 \vdots p$-үед $10^{p_1} \equiv 1 \pmod p \Rightarrow$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=0}^{p_1-1}(a_i \cdot 10^i + a_{i+p_1} 10^{p_1+i}) \equiv \sum_{i=0}^{p_1-1}(a_i \cdot 10^i + a_{i+p_1} \cdot 1 \cdot 10^i) = \sum_{i=0}^{p_1-1}(10^i(a_i + a_{i+p_1})) \pmod p.$$

$a_0; a_1; \dots; a_{2p_1-1}$ -үүдийг.

$$\left.\begin{array}{l} 0\text{-р хос } (a_0; a_{p_1+0}) \\ 1\text{-р хос } (a_1; a_{p_1+1}) \\ \vdots \\ p_1-1\text{-р хос } (a_{p_1-1}; a_{p_1+p_1-1}) \end{array}\right\}$$ -гэж p_1 ш хосод хуваая.

Хэрэв B-нь аль нэг хосын нэгийг нь X-гэж сонговол. $\{0;1;\dots;9\} = \{9-0; 9-1; \dots; 9-9\} \Rightarrow$ A-нь уг хосын нөгөөг нь $(9-x)$-гэж сонгоно. Энд (*) өмнөхтэй адил бүтнэ. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Бүх a_i-үүд сонгогдсоны дараа $\forall i \in \{0;1;\dots;p_1-1\}: a_i + a_{i+p_1} = 9$ байна.

$$\Rightarrow M \equiv \sum_{i=0}^{p_1-1}(10^i(a_i + a_{i+p_1})) = \sum_{i=0}^{p_1-1}(10^i \cdot 9) = 9 \cdot \sum_{i=0}^{p_1-1} 10^i = 9 \cdot (10^0 + 10^1 + \dots + 10^{p_1-1}) =$$

$$= 9 \cdot \left(\frac{10^{p_1-1+1}-1}{10-1}\right) = 9 \cdot \frac{10^{p_1}-1}{9} = 10^{p_1}-1 \pmod p$$ энд $10^{p_1}-1 \vdots p$ -гэдгийг анзаарвал. $M \vdots p \Rightarrow$ A ялна. $\Rightarrow$ B-ээс үл хамааран A үргэлж ялна.

$\Rightarrow$ A Батлагдав.

Энд d-ноогдвартай b_1-эхний гишүүнтэй ÷-гийн хувьд $S_i = \frac{b_1(d^i-1)}{d-1}$ гэдгийг ашиглав. $(d \neq 1)$