A1. Энд эхлээд $x>0$ бол $x+a_i \ge a_i(x+1)^{\frac{1}{a_i}}$ гэж харуулъя. $a_i \ge 3$; $x>0$ үед

$$x+a_i \ge a_i(x+1)^{\frac{1}{a_i}} \Rightarrow (x+a_i)^{a_i} \ge a_i^{a_i}x + a_i^{a_i} \Rightarrow (x+a_i)^{a_i} = x^{a_i}+\dots+x\cdot a_i^{a_i-1}\cdot C_{a_i}^1 + a_i^{a_i} =$$

$$= x^{a_i}+\dots+x^2 a_i^{a_i-2} C_{a_i}^2 + x\cdot a_i^{a_i}+a_i^{a_i} > x a_i^{a_i}+a_i^{a_i}$$ болно.

$a_i=2$ үед $(x+a_i)^2 = x^2+4x+4 > 4x+4 = 2^2(x+1) \Rightarrow (x+2) > \sqrt{2^2(x+1)} = 2\sqrt{x+1}$ болно.

$a_i=1$ үед $x+1=x+1$ тул $a_i=1$ үед тэнцэлдээ хүрэн, бусад үед $x+a_i > a_i(x+1)^{\frac{1}{a_i}}$ байна.

($a_i\in\mathbb{Z}$ бөгөөд эерэг тул өөр тохиолдол байхгүй.)

1 – 7
2 – 4
3 – 0
Σ = 11

Иймээс $x+a_1 \ge a_1(x+1)^{\frac{1}{a_1}}$

⋮

$x+a_n \ge a_n(x+1)^{\frac{1}{a_n}}$ болох тул бүгдийг үржье. Тэгвэл,

$\prod_{i=1}^n (x+a_i) \ge a_1 a_2\cdots a_n (x+1)^{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}} = M\cdot(x+1)^k$ болно. $\Rightarrow$ $x>0$ үед $P(x)=M(x+1)^k-\prod_{i=1}^n(x+a_i)\le 0$ болно. Харин $\prod_{i=1}^n (x+a_i) \ge M(x+1)^k$ нь тэнцэлдээ хүрэх нөхцөл нь $a_1=a_2=\dots a_n=1$ үед болох ба (тус тусдаа тэнцэх ёстой тул $a_1=1$; $a_2=1 \dots a_n=1$ болж $a_1=\dots=a_n=1$ болно.) Энэ үед $M=a_1\cdots a_n=1$ болно. Бодлогын нөхцөл $M>1$ гэсэн тул $\prod_{i=1}^n (x+a_i)\ge M(x+1)^k$ нь тэнцэлдээ хүрэх нөхцөлгүй бөгөөд $\prod_{i=1}^n (x+a_i) > M(x+1)^k$ болж $x>0$ үед $P(x)<0$ болно.

Хэрэв $P(x)$ нь эерэг язгууртай бол $\exists\alpha\in\mathbb{R}$; $\alpha>0$ ба $P(\alpha)=0$ болно. Гэвч дээрхээс $\alpha>0$ үед $P(\alpha)<0$ тул $P(x)$-д эерэг язгуур байхгүй. ▲ √7

A2. Энд нэг хэлбэрээс нөгөө хэлбэрт шилжих хамгийн цөөн солилтыг авч үзье. Ийм солилт нь $a\Leftrightarrow b$; $b\Leftrightarrow c$; $c\Leftrightarrow a$ гэсэн 3л янз байж болно. Учир нь $a\Leftrightarrow a$, $b\Leftrightarrow b$; $c\Leftrightarrow c$ солилт нь $a; b; c$-н дараалалд өөрчлөлт гаргахгүй тул хамгийн цөөн солилт биш болно.

Одоо $(b; c)$-н харилцан дарааллыг харъя. (abbaacbcc-ын хувьд bbcbcc болно. a-уудыг хаяад харахтай ижил.) Энд $a\Leftrightarrow b$; $a\Leftrightarrow c$ үйлдэл нь $(b; c)$-н харилцан дараалалд өөрчлөлт оруулж чадахгүй. Учир нь $\underbrace{\dots}_{s_1}\underbrace{ab}_{s_2}\underbrace{\dots}_{s_3}$ гэсэн үгэнд $s_2$ дээр $a\Leftrightarrow b$-г хийе. Анхны байрлалын $(b; c)$-н дараалал нь $\overline{s_{1,b,c}\, s_{2,b,c}\, s_{3,b,c}} = \overline{s_{1,b,c}\, b\, s_{3,b,c}}$ байсан. Дээрх солилтыг хийхэд $s_1$; $s_3$-д өөрчлөлтгүй ба $s_2'=ba \Rightarrow s'_{2,b,c} = b = s_{2,b,c}$ болох тул $a\Leftrightarrow b$ солилт нь $(b; c)$ дараалалд нөлөөгүй. Мөн адилаар $a\Leftrightarrow c$ нь бас нөлөөгүй. Иймд 2 хэлбэрийн тоон $(b; c)$ дараалал ялгаатай $s_{1,b,c}$; $s_{2;b;c}$ бол $s_{1;b;c}\to s_{2;b;c}$ үйлдлийг хийхэд шаардлагатай тоо $b\Leftrightarrow c$ солилт хийнэ. Ө.х $s_1\to s_2$ үйлдлийн хамгийн бага солилтыг $\min(s_1\to s_2)$ гэвэл $\min(s_1\to s_2)\ge\min(s_{1,b;c}\to s_{2,b;c})$ болно. (Учир нь $s_{1,b,c}\to s_{2;b,c}$ үйлдэлд зөвхөн $b\Leftrightarrow c$ үйлдэл хийгдэнэ. Иймд нэг талаар, $\min(b\Leftrightarrow c)(s_1\to s_2)\ge\min(s_{1,b,c}\to s_{2,b,c})$)

$(a; c)$; $(a; b)$ дарааллын хувьд мөн адил зөвхөн $a\Leftrightarrow c$; $a\Leftrightarrow b$ (харгалзан) солилт л нөлөөлнө. $\min(s_{1;b,c}\to s_{2,b;c})$; $\min(s_{1;a;c}\to s_{2;a;c})$; $\min(s_{1,a,b}\to s_{2,a,b})$ үйлдлүүд тус бүр ялгаатай ($b\Leftrightarrow c$; $a\Leftrightarrow c$; $a\Leftrightarrow b$) төрлийн солилтууд хийх тул

$$\min(s_1\to s_2)\ge \min(s_{1;b;c}\to s_{2;b;c})+\min(s_{1,a,c}\to s_{2,a,c})+\min(s_{1,a,b}\to s_{2;a,b})$$ байна.

(Ард үргэлжилнэ)

Учир нь $\min(a\leftrightarrow b)(S_1\to S_2)$-р $S_1\to S_2$ шаардагдах $a\leftrightarrow b$ солилтын тоог илэрхийлнэ

$\min(a\leftrightarrow b)(S_1\to S_2)\geq \min(S_{1,a,b}\to S_{2,a,b})$

$\min(b\leftrightarrow c)(S_1\to S_2)\geq \min(S_{1,b,c}\to S_{2,b,c})$

$\min(c\leftrightarrow a)(S_1\to S_2)\geq \min(S_{1,a,c}\to S_{2,a,c})$ болно. (Аль баталсан $\min(S_1\to S_2)\geq \min(S_{1,b,c}\to S_{2,b,c})$-с гарууна.)

$\Rightarrow \min(S_1\to S_2)=\sum_{цикл}\min(a\leftrightarrow b)(S_1\to S_2)\geq \sum_{цикл}\min(S_{1,a,b}\to S_{2,a,b})$ болно.

Чухал 1 (a;b)-н дарааллыг авъя (n; n ш). Тэгвэл I a-н байрлах тоог $a_1$; … n-р a-н байрлах тоог $a_n$ гэж b-г бас гэж дугаарлая. ($\overline{12\cdots 2n}$. Энд эхний a нь 2 дээр байвал $a_1=2$). $\sum a_i\geq\sum b_i$ бол үүний $\overline{aa\cdots ab\cdots b}$ болох min үйлдлийг олъё. Энэ нь $\overline{aa\cdots ab\cdots b}$-ээс энэ рүү солихтой адил юм. ($\overline{aa\cdots ab\cdots b}$-ийн) хувьд $a_1=1;\cdots a_n=n;\ b_1=n+1;\cdots b_n=n$ байна.

Солих үйлдэл ХБ байхын тулд n-р a нь $a_n$ байр руу … эхний a нь $a_1$-руу явах юм. Эдгээр үйлдэл тус бүр нь $|a_i-i|$ болох ба, $a_i\geq i$ байх тул min үйлдэл нь $\sum a_i-\sum_{i=1}^{n} i=\sum a_i-\frac{n(n+1)}{2}$ байна. $\sum a_i+\sum b_i=\frac{2n(2n+1)}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum a_i\geq\sum b_i$ тул $\sum a_i\geq\frac{n(2n+1)}{2}\Rightarrow \sum a_i-\frac{n(n+1)}{2}\geq\frac{2n^2+n-n^2-n}{2}=\frac{n^2}{2}$ болно.

Иймд $A_{ab}$-р (a,b)-н хувьд a-н байрлалын $\Sigma$; $B_{ab}$-р (a,b)-н хувьд b-н байрлалын $\Sigma$-г тэмдэглэе.

Claim. $A_{ab}\geq B_{ab}$; $B_{bc}\geq C_{bc}$; $C_{ca}\geq A_{ca}$ буюу циклик эрэмбэ болохгүй.

Claim үнэн бол $A_{ab}\geq B_{ab}\Rightarrow$ (a;b)-н хувьд a-г урд бичих гэж үйлдлээр $A_{ab}\ ?\ B_{ab}$; $B_{bc}\ ?\ C_{bc}$; $C_{ca}\ ?\ A_{ca}$ -аас a; b; c-н дарааллыг гаргаж болно.

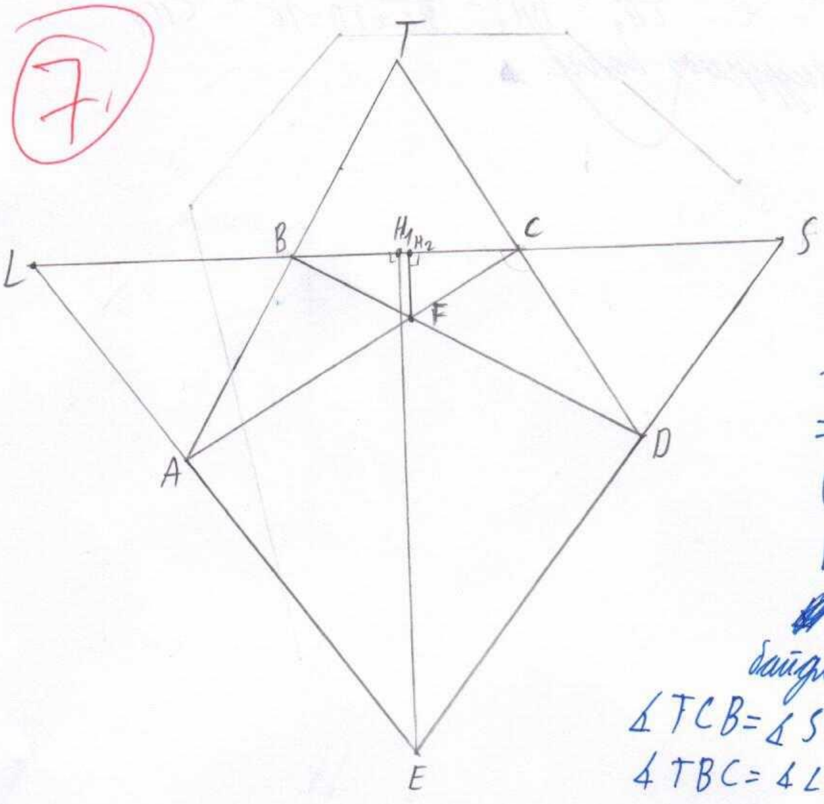
Жишээ нь $A_{ab}\geq B_{ab}$; $B_{bc}\geq C_{bc}$; $C_{ca}\leq A_{ca}$ бол a-г b-н урд; b-г c-н урд; a-г c-н урд буюу $\overline{\underbrace{aa\cdots a}_{n}\underbrace{b\cdots b}_{n}\underbrace{c\cdots c}_{n}}$ үг рүү солих min үйлдлийг тоолно. $\overline{a\cdots ab\cdots bc\cdots c}=S_2$ гэвэл $\min(S_1\to S_2)\geq\sum_{цикл}\min(S_{1,a,b}\to S_{2,a,b})\geq$

$\geq$ (дээр баталснаар) $\frac{n^2}{2}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^2}{2}=\frac{3n^2}{2}$ болж $S_1\to S_2$-д $\frac{3n^2}{2}$-с бага үйлдлээр хүрч болохгүй. ▲

О. Ишдэл Шийд Монгол.

В 1. О.Мишээл Шинэ Монгол.

7




$AB \cap CD = T$; $BC \cap ED = S$;
$BC \cap AE = T$ гэе.

Энд $\angle ABC = \angle CDE = \beta$; $\angle BAE = \angle BCD = \alpha$ гэвэл $2(\alpha+\beta) + \angle AED = 540°$ болно. $\Rightarrow$ $\alpha+\beta = 270° - \frac{\angle AED}{2}$ болно. $\angle AED < 180°$ тул (гүдгэр учир). $\alpha+\beta = 270° - \frac{\angle AED}{2} > 270° - \frac{180°}{2} =$ $= 270° - 90° = 180° \Rightarrow \alpha+\beta > 180° \Rightarrow$ $\Rightarrow (180°-\alpha)+(180°-\beta) = (180°-\angle ABC) +$ $(180° - \angle DCB) < 180°$ болно. Иймд $[AB) \cap [DC) = T$ байна (зурагт үзүүлснээр). Мөн адилаар $L$; $S$ нь зурагт үзүүлсэн байдлаар огтлолцоно.

$\angle TCB = \angle SCD = 180° - \angle BCD = 180° - \angle BAE = \angle LAB$
$\angle TBC = \angle LBA = 180° - \angle ABC = 180° - \angle CDE = \angle SDC$ болно

$\Rightarrow \begin{cases} \angle TCB = \angle SCD = \angle LAB \\ \angle TBC = \angle LBA = \angle SDC \end{cases} \Rightarrow \triangle LBA \sim \triangle TBC \sim \triangle SDC$ болно (ӨӨ шинжээр).

$BA = BC = CD$ тул $\triangle LBA = \triangle TBC = \triangle SDC$ болно. $\Rightarrow \angle BLA = \angle CSD = \angle SLE = \angle LSE \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle LSE$ нь адил хажуут; $LE = SE$.

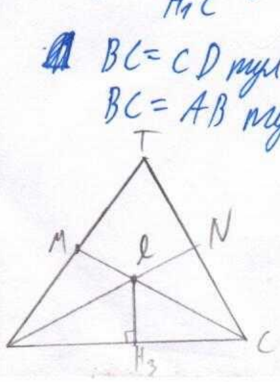
$E$-с $BC$-руу буулгасан өндрийг $EH_1$ гэе. $BD \cap AC = F$ гэе. $F$-с $BC$-руу буулгасан өндрийг $FH_2$ гэе. $\frac{BH_1}{H_1C} = \frac{BH_2}{H_2C}$ гэж батлавал $H_1 = H_2$ болж $BC$-с $H_1$ дээр $\perp$ шулуун нь $F$; $E$-г дайрах буюу $F \in EH_1$ болно. $F \in BD$; $F \in CA$ тул $BD$; $CA$; $EH_1$ нь конкуррент болно. (*).

Одоо $\frac{BH_1}{H_1C} = \frac{BH_2}{H_2C}$ гэж баталъя.

$EH_1$ нь $BC \perp EH_1 \Rightarrow LS \perp EH_1$ ба $SE = LE$ тул $\triangle LES$-н өндөр, медиан, биссектрис болно. $\Rightarrow LH_1 = SH_1$ болно. $\triangle LBA = \triangle SDC$ тул $LB = SD$; $LA = SC$ байна. Мөн $\triangle TBC = \triangle SDC$ тул $TB = SD$; $TC = SC$ байна. $\Rightarrow$ $BH_1 = LH_1 - LB = \frac{LS}{2} - LB = \frac{LB+BC+CS}{2} - LB =$
$= \frac{TB+BC+TC-2TB}{2} = \frac{BC+TC-TB}{2}$; $CH_1 = SH_1 - SC = \frac{LS}{2} - TC = \frac{TB+BC+TC}{2} - TC = \frac{BC+TB-TC}{2}$

болно. $\Rightarrow \frac{BH_1}{H_1C} = \frac{\frac{BC+TC-TB}{2}}{\frac{BC+TB-TC}{2}} = \frac{BC+TC-TB}{BC+TB-TC}$ болно.

$BC = CD$ тул $\angle CBF = \frac{180° - \angle BCD}{2} = \frac{\angle TCB}{2}$ болно.
$BC = AB$ тул $\angle BCF = \frac{180° - \angle ABC}{2} = \frac{\angle TBC}{2}$ болно. Иймд $\triangle TBC$-н хувьд




$BN$; $CM$ биссектрис авахад $\angle lBC = \angle BCF$; $\angle lCB = \angle CBF$;
$BC = BC \Rightarrow \triangle BlC = \triangle CFB$ болно (ӨӨ шинжээр).
$lH_3 \perp BC$ гэвэл $\frac{CH_3}{BH_3} = \frac{BH_2}{CH_2}$ болно. (Учир нь $lH_3$; $FH_2$ нь тэнцүү $\triangle$-ын өндрүүд).

(ард үргэлжилнэ).

$l$ нь багтсан тойргийн төв ба $H_3$ нь ~~[illegible]~~) $BC$-г шүргэх цэг болох тул ($\triangle TBC$-н)
$BH_3 = \dfrac{BC+TB-TC}{2}$ ; $CH_3 = \dfrac{BC+TC-TB}{2}$ болно. $\Rightarrow \dfrac{BH_2}{CH_2} = \dfrac{CH_3}{BH_3} = \dfrac{BC+TC-TB}{BC+TB-TC} = \dfrac{BH_1}{CH_1}$ болно.
Иймд (*)-р $EH_1$; $BD$; $AC$ нь конкуррент болно. ▲

B2. О.Мишээл Шинэ Монгол

A-н хожих стратегийг үзүүлье. p-н утгуудаар тохиолдол салгая.

$p=2$ бол A нь $a_0=0$ гэж үйлдэл хийнэ. Дараагийн $A_i$ B-н үйлдлээс үл хамааран

$M = 0+10\cdot a_1+\cdots+10^{p-1}\cdot a_{p-1} \equiv 0+10\cdot a_1 \equiv 0 \pmod 2$ болно. Иймд A ялна.

$p=5$ бол A нь $a_0=0$ гэж үйлдэл хийнэ. Дараагийн $A_i$ B-н үйлдлээс үл хамааран

$M = 0+10\cdot a_1+\cdots+10^4\cdot a_4 \equiv 0+10(a_1+\cdots+10^3\cdot a_4) \equiv 0 \pmod 5$ болно. Иймд A ялна.

$p\neq 2$; $p\neq 5$ байг. Тэгвэл $(p;10)=1$ болох тул $ord_p(10)$ нь тодорхойлогдоно. $ord_p(10)=k$ гэе. $p\neq 2$ тул p нь сондгой анхны тоо болно. Иймд $p-1$ нь тэгш болно. $ord_p(10)=k$ тул $k|p-1$ байх ба $p-1$ нь тэгш тул $2|k$ эсвэл $2|\frac{p-1}{k}$ байна. (Хоёул байж ч болно.)

Одоо дахин тохиолдол салгая. i) $2|k$ болон $2|\frac{p-1}{k}$ гэж салгая. ii)

i) $2|k$ үед $10^k \equiv 1 \pmod p$ болох ба $10^x \equiv 1 \pmod p$ байх хамгийн бага x нь k байна. (1)

$(10^{\frac{k}{2}})^2 \equiv 1 \pmod p$ тул $10^{\frac{k}{2}} \equiv 1 \vee -1 \pmod p$ болно. $10^{\frac{k}{2}} \equiv 1 \pmod p$ бол (1)-г зөрчих тул $10^{\frac{k}{2}} \equiv -1 \pmod p$ (2) байна. A-н эхний үйлдэл $a_0=0$ гэж авна.

$M = a_0+10\cdot a_1+\cdots+10^{p-1}\cdot a_{p-1} \equiv a_0+10\cdot a_1+\cdots+10^{k-1}a_{k-1}+1\cdot a_k+\cdots+10^{2k-1}a_{2k-1}+1\cdot a_{2k}+\cdots$
$+1\cdot a_{p-1} \equiv (a_0+a_k+\cdots+a_{p-1})+10(a_1+a_{k+1}+\cdots+a_{p-k})+10^2(a_2+a_{k+2}+\cdots+a_{p-k+1})+\cdots+10^{k-1}(a_{k-1}+a_{2k-1}+\cdots$
$\cdots+a_{p-2}) \pmod p$ болно. Үүнийг дахин хуваалбал, ($a_0=0$ учир).

$M \equiv \left((a_k+\cdots+a_{p-1})+10^{\frac{k}{2}}(a_{\frac{k}{2}}+\cdots)\right)+10\left((a_1+\cdots+a_{p-k})+10^{\frac{k}{2}}(a_{\frac{k}{2}+1}+\cdots+a_{p-\frac{k}{2}})\right)+\cdots$
$+10^{\frac{k}{2}-1}\left((a_{\frac{k}{2}-1}+\cdots)+10^{\frac{k}{2}}(a_{k-1}+a_{2k-1}+\cdots+a_{p-2})\right) \pmod p$ болно. (3) ~~Одоо B нь $a_i$ s~~

~~$s\in\{0;1,\cdots 9\}$ гэсэн үйлдэл хийсэн гэе. Тэгвэл A нь $i=p-1$ бол A~~

Одоо $a_1,\cdots a_{p-1}$-г 2:2-р бүлэглэе. ($2|p-1$ тул болно.)

$(a_1; a_{\frac{k}{2}+1})$; $(a_{k+1}; a_{\frac{k}{2}+k+1})$; ... $(a_{p-k}; a_{p-\frac{k}{2}})$ (*) гэж бүлэглэе.

$\vdots$

$(a_{\frac{k}{2}-1}; a_{k-1})$;

$(a_{\frac{k}{2}}; a_k)$; $(a_{k+\frac{k}{2}}; a_{2k})$; ... $(a_{p-\frac{k}{2}-1}; a_{p-1})$

Одоо B нь $a_i=s$; $s\in\{0;1,\cdots 9\}$ гэсэн үйлдэл хийвэл $a_i$-н хосыг ($a_i$-н хамт бүлгийн нөгөө тоо) A нь s гэж үйлдэл хийнэ. Иймэрхүү үйлдлээр M-г (3)-д орлуулбал

$M \equiv \left((a_k+\cdots+a_{p-1})(1+10^{\frac{k}{2}})\right)+10\left((a_1+\cdots+a_{p-k})(1+10^{\frac{k}{2}})\right)+\cdots+10^{\frac{k}{2}-1}\left((a_{\frac{k}{2}-1}+\cdots)(1+10^{\frac{k}{2}})\right) \stackrel{(2)}{\equiv}$

$\equiv \left((a_k+\cdots a_{p-1})(1+(-1))\right)+\cdots+10^{\frac{k}{2}-1}(a_{\frac{k}{2}-1}+\cdots)(1+(-1)) \equiv (1+(-1))(\cdots) \equiv$

$\equiv 0 \pmod p$ болно. Иймд A ялна. (Үйлдлийн тоо p сондгой тул B-н үйлдэл бүрийг хариулж чадна.)

ii)

(ард үргэлжилнэ)

2) $\frac{p-1}{k}$ үед.

$M = a_0 + a_1 10 + 10^2 a_2 + \dots + 10^{p-1} a_{p-1} \equiv (a_0 + a_k + \dots + a_{p-1}) + 10(a_1 + \dots + a_{p-k}) + \dots$

$+ 10^{k-1}(a_{k-1} + \dots + a_{p-2}) \pmod p$ болно. $a_1, \dots a_{p-1}$-г 2; 2-р баглъя.

$(a_1; a_{k+1})$, — — $(a_{p-2k}\ a_{p-k})$ гэж баглъя. ($\frac{p-1}{k}$ нь тэгш тул боломжтой.)

$(a_2; a_{k+2})$ ...... $(a_{p-2k+1}; a_{p-k+1})$

⋮

$(a_k; a_{2k})$, — — $(a_{p-1-k}; a_{p-1})$

$\forall s \in \{0; 1; \dots 9\}$-н хувьд $\bar{s}$-р $\bar{s} = 9 - s$ гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $\bar{s} \in \{0; 1 \dots 9\}$ байх ба $\bar{s} + s = 9$ байна.

Эхлээд A нь $a_0 = 0$ гэсэн үйлдэл хийнэ.

Одоо B нь $a_i = s$; $s \in \{0; 1; \dots 9\}$ гэж авахад $a_i$-н хосыг ($a_i$-н орсон багцын нөгөө тоо) A нь $\bar{s}$ гэж авна. Ийм үйлдлээр дуусвал M нь

$$M \equiv (a_0 + \dots + a_{p-1}) + 10(a_1 + \dots + a_{p-k}) + \dots + 10^{k-1}(a_{k-1} + \dots + a_{p-2}) =$$

$$= \left(0 + \frac{p-1}{2k} \cdot 9\right) + 10\left(\frac{p-1}{2k} \cdot 9\right) + \dots + 10^{k-1}\left(\frac{p-1}{2k} \cdot 9\right) = \frac{p-1}{2k} \cdot 9 \left(1 + 10 + \dots + 10^{k-1}\right) =$$

$$= \frac{p-1}{2k} \cdot 9 \cdot \frac{10^k - 1}{10 - 1} = \frac{p-1}{2k} \cdot 9 \cdot \frac{10^k - 1}{9} = \frac{(p-1)(10^k - 1)}{2k} \equiv \frac{(p-1)(1-1)}{2k} \pmod p$$ болно.

($ord_p(10) = k$ учир). $k \le p-1$ тул $2k \not\equiv 0 \pmod p \Rightarrow M \equiv \frac{(p-1)(1-1)}{2k} \equiv 0 \pmod p$ болно.

Иймд A ялна. (Үйлдлийн тоо p нь сондгой тул B-н үйлдэл бүрийг A хариулж чадна)

Энд i); ii)-д байгуулсан баглаалт ялгаатай болно. i)-д $\frac{k}{2}$ зөрүүтэй; ii)-д k зөрүүтэй байгуулсан ба i)-д нь $a_j + \dots a_{p-k-1+j} = a_{j+\frac{k}{2}} + \dots a_{p-\frac{k}{2}-1+j}$; ($1 \le j \le \frac{k}{2}$) байхаар авсан ба ii)-д нь $(a_j + a_{j+k} + \dots a_{p-1-k+j}) = (a_j + a_{j+k}) + \dots (a_{p-1-2k+j} + a_{p-1-k+j}) = \underbrace{9 + 9 + \dots 9}_{\frac{p-1}{2k}} = \frac{p-1}{2k} \cdot 9$; ($1 \le j \le k$) байхаар авсан болно.

Иймд p-н ямар ч утганд A-д ялах стратеги байгаа тул ▲

6.5 оноо + 0,5 = 7

B3. О.Мишээл Шинэ Монгол

Энд эсрэгээс нь баталъя.

$f(T)=T_1$ гэе. Мэдээж $|T|\geq|T_1|$ байна. $f(S)=T$ тул $S\setminus T$-д орох элемент $T_1$-д байхгүй. $\Rightarrow$ $T_1\subseteq T$ байна. $T\neq T_1$ гэж үзсэн тул $T_1\subset T$ болно.

$f(T_1)=T_2$; $f(T_2)=T_3$; ... гээд үргэлжлүүлээд $T_n=T_{n+1}$ болтол бууруулъя. ($n=1$ байж болно) $n\geq1$.

Claim 1. Энд $T_n=T_{n+1}$ байх $n$ оршино. ~~Учир нь $\forall n\in\mathbb{N}$-н хувьд $|T_n|\geq 1$ байна. Харин~~

Баталгаа. Учир нь $\forall i\in\mathbb{N}$-н хувьд $|T_i|\geq 1$ байна (дор хаяж 1 элемент байна.)

Харин эсрэгээс $T_n=T_{n+1}$ оршихгүй бол $T_1\supset T_2\supset T_3\supset\dots$ болох буюу $|T_1|>|T_2|>\dots$ болно. $T_1\subset T\subset S$ ба $S$ нь төгсгөлөг тул $T_1$ нь төгсгөлөг болно. $|T_1|=k$ гэвэл $k-1\geq|T_2|$; $k-2\geq|T_3|$; ... $0\geq|T_{k+1}|\geq 1$ $\Rightarrow$ төгсгөлгүй буурч болохгүй. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists n : T_n=T_{n+1}$ болно. ▲

Claim 1-с $f(T_n)=T_n$ болно. $\Rightarrow$ $f$ нь $T_n$-н хувьд сюрьектив $\Rightarrow$ $T_n$ нь төгсгөлөг тул $f$ нь $T_n$-н хувьд биектив болно.

Claim 2. $\forall t\in T_n$-н хувьд $\underbrace{f\circ f\circ\dots\circ f}_{s}(t)=t$ байх $s$ оршино.

Баталгаа. Ямар 1 $t_0\in T_n$-г авъя. $f(t_0)=t_0$ бол $s=1$ болж $s$ оршино. $f(t_0)=t_1$; $t_0\neq t_1$ гэе. Тэгвэл $f$ нь $T_n$-д биектив тул $T_n$-д $t_0$-с өөр $f(t)=t_1$ гарах $t$ олдохгүй. Иймд $f(t_1)=t_2$ гэвэл $t_1\neq t_2$ байна. $t_2=t_0$ бол $s=2$ болж оршино. $t_2\neq t_0$ бол $f(t_2)=t_3$ гэе. $t_3\neq t_1$; $t_3\neq t_2$ байна ($f$ нь $T_n$-д биектив тул). $t_3=t_0$ бол $s=3$ болж оршино. $t_3\neq t_0$ бол ... энэ үйлдлийг $|T_n|$ удаа хийгээд, $t_{|T_n|}=t_0$ бол $s$ оршино. $t_{|T_n|}\neq t_0$ бол $f$ нь $T_n$-д биектив тул $t_{|T_n|}\neq t_1$; $t_{|T_n|}\neq t_2$; ... $t_{|T_n|}\neq t_{|T_n|-1}$ болно.

~~$f(t_{|T_n|})=t_{|T_n|+1}$ гэвэл $f$ н биектив тул $t_{|T_n|+1}$~~ Тэгвэл $t_0; t_1; \dots t_{|T_n|}\in T_n$ ба бүгд ялгаатай тул $|T_n|=|T_n|+1$ болох ба $T_n$ нь төгсгөлөг тул зөрчил. $\Rightarrow \exists s$; $1\leq s\leq|T_n|$ болно. ▲

Үүгээр $T_n$ нь хэдэн бүлэгт хуваагдах ба $f$-г авах бүрд тэдгээрийн элементүүд нь цикл байгуулж гэсэн. Эдгээр бүлгийн уртуудыг $s_1;\dots s_k$ гээд $ХБЕХ(s_1;\dots s_k)=s_0$ (1) гэе. Тэгвэл $t\in T_n$-н хувьд $\underbrace{f\circ f\circ\dots\circ f}_{s_0}(t)=t$ байна.

Одоо $g(x)=\underbrace{f\circ f\circ\dots\circ f}_{2s_0n+1}(x)$ гэе. Товчлох үүднээс $\underbrace{f\circ f\dots\circ f}_{k}(x)=f^k(x)$ гэе.

$x\in S\setminus T$ бол $g(x)=f^{2s_0n+1}(x)=f^{(2s_0-1)n}(f^{n+1}(x))$ болно. $\forall a\in S\setminus T$-н хувьд $f(a)\in T$; $f^2(a)\in T_1$; ... $f^{n+1}(a)\in T_n$ байна. Учир нь $f(S)=T$; $f(T)=T_1$; $f(T_1)=T_2$; ... $f(T_{n-1})=T_n$ болно. $\Rightarrow f^{(2s_0-1)n}(f^{n+1}(x))\in T_n$ болно.

(ард үргэлжлэл).

Харин $f(S)=T$ тул $\exists S_1 \subset S$-н хувьд $f(S_1)=T\setminus T_1$ байна. Учир нь $T\supset T_1$ гэж үзсэн. $S_1\cap T=\emptyset$ болно. Учир нь $f(T)=T_1$ болох ба $T_1\cap T\setminus T_1=\emptyset$ тул $S_1\cap T=\emptyset$ болно. $s_1\in S_1$-г авъя. Тэгвэл $s_1\in S$ ба $s_1\notin T$ тул $s_1\in S\setminus T$ болно.

$g(s_1)$-г авахад дээр үзүүлснээр $g(s_1)=f^{(2s_0-1)n}(f^{n+1}(s_1))\in T_n$ болно.

Харин $f(s_1)\in T\setminus T_1$ ба $T_n\subset T_1$ тул $f(s_1)\neq g(s_1)$ байна. Иймд $n\geq 1$ үед $g, f$ нь ялгаатай ~~функц~~. бүрдэлт.

Тэгвэл $\forall x\in S$-н хувьд

$$f\circ g\circ f(x)=f(g(f(x)))=f(f^{2s_0n+1}(f(x)))=f^{2s_0n+3}(x)=f^{(2s_0-1)n+2}(f^{n+1}(x)) \text{ болно.}$$

$$g\circ f\circ g(x)=g(f(g(x)))=f^{2s_0n+1}(f(f^{2s_0n+1}(x)))=f^{4s_0n+3}(x)=f^{(4s_0-1)n+2}(f^{n+1}(x))=$$

$$=f^{2s_0n}(f^{(2s_0-1)n+2}(f^{n+1}(x)))=\underbrace{f^{s_0}(f^{s_0}\cdots(f^{s_0}}_{2n}(f^{(2s_0-1)n+2}(f^{n+1}(x))\cdots) \text{ болно.}$$

$f^{n+1}(x)\in T_n \Rightarrow f^{(2s_0-1)n+2}(f^{n+1}(x))\in T_n$ болно. $f^{(2s_0-1)n+2}(f^{n+1}(x))=h(x)$ гэвэл

$$h(x)\in T_n\Rightarrow f^{s_0}(h(x))=h(x)\Rightarrow \underbrace{f^{s_0}(\cdots f^{s_0}}_{k\in\mathbb{N}}(h(x)\cdots)=\underbrace{f^{s_0}(\cdots f^{s_0}}_{k-1}(h(x)\cdots)=\cdots=h(x) \text{ болно.}$$

$$\Rightarrow f^{s_0k}(h(x))=h(x)\Rightarrow f^{s_0\cdot 2n}(h(x))=f^{2s_0n}(f^{(2s_0-1)n+2}(f^{n+1}(x)))=g\circ f\circ g(x)=$$

$=h(x)=f^{(2s_0-1)n+2}(f^{n+1}(x))=f\circ g\circ f(x)$ болно $\Rightarrow \forall x\in S$-н хувьд $g\circ f\circ g(x)=f\circ g\circ f(x)$ болох тул $f\circ g\circ f=g\circ f\circ g$ болж бодлогын нөхцөл зөрчинө. Иймд $n\geq 1$ байж болохгүй буюу $f(T)=T$ болно.

$n=0$ буюу $f(T)=T$ үед мөн адил $g$-г байгуулж болох боловч $g\neq f$ гэж батлахад $T\setminus T_1\neq\emptyset$ гэх нөхцөл хэрэгтэй ба $f(T)=T=T_1$ үед $T\setminus T_1=\emptyset$ болох тул $f(T)=T$ үед зөрчил үүсэхгүй. $f(T)=T$ байх жишээ нь,

$S=\{0;1;2\}$, $f(x)=\begin{cases}0; & x=1\vee 2\\ 1; & x=0\end{cases}$ гэе. Энд $g$-н $f\neq g$ байх бүх 26 боломжийг шалгахад $f\circ g\circ f\neq g\circ f\circ g$ байна. Иймд $f(T)=T$ байгаа болох ба бүгд үед болохгүй.

▲

Энд ~~хэ~~ өмнөх нүүрэнд $x\in S\setminus T$ байх үед баталсан ба $x\in T$ үед тэр батлагдаагүй. $f^n(x)\in T_n$ байна. $\Rightarrow x\in S$ үед $f^{n+1}(x)\in T_n$