Хөвсгөл ДМЦ. Х. Сантаахүү

A1. $a_1, \dots a_n$ -үүд бүгд ~~1-ээс их~~ 1-тэй тэнцүү биш $M>1$ үчир ~~...~~ $a_1, a_2, \dots a_m$ бүгд 1-ээс ялгаатай үлдсэн нь 1-тэй тэнцүү гэе!

$M = a_1 a_2 a_3 \dots a_m$ болно. $\Rightarrow$ ~~$P(x) = M(x+1)$~~

$$\Rightarrow P(x) = (x+1)^{n-m}\left(M(x+1)^{\frac{1}{a_1}+\dots\frac{1}{a_m}} - (x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_m)\right)$$ болно.

Одоо Эсрэгээс нь. $P(x_0)=0$ байх $(x_0>0)$ эерэг язгуур олддог гэе!

Тэгвэл. $M(x_0+1)^{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots\frac{1}{a_m}} - (x_0+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_m) = 0$ болно!

Одоо $a_i(x_0+1)^{\frac{1}{a_i}} < (x_0+a_i)$ гэж батлая! (1)

$\Rightarrow$ $a_i^{a_i}(x_0+1) < (x_0+a_i)^{a_i}$ ($i=1,\dots m$ хувьд бүгдэд хувьд) $x_0+1>0$; $x_0+a_i>0$; $a_i>0$ учир

ба. $(x_0+a_i)^{a_i}$ -ийг задлаxад хамгийн ~~ба язгуур $Q(x_0)>0$ учир биш~~ $\Rightarrow$ ~~$Q(x_0)+x_0 \cdot a_i^{a_i}+a_i^{a_i}$ хэлбэрийн~~

$$\Rightarrow (x_0+a_i)^{a_i} = \sum_{k=0}^{a_i} x_0^k \cdot C_{a_i}^k \cdot a_i^{a_i-k} \geq \left(a_i^{a_i} x_0 \cdot C_{a_i}^1 \cdot a_i^{a_i-1} + a_i^{a_i}\right)$$ $(x_0>0$ учир$)$

$\geq a_i^{a_i}(x_0+1)$ учир батлагдав!

Тэгэхээр $(x_0+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_m)$

$= M(x_0+1)^{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}} > a_1(x_0+1)^{\frac{1}{a_1}} \cdot a_2(x_0+1)^{\frac{1}{a_2}} \dots a_n(x+1)^{\frac{1}{a_n}}$

язгууртай болох нь батлагдав! Энэ (1)-ийг зөрчиж! Тэгэхээр эерэг

Жич: бүгд 1-тэй тэнцүү үед $P(x)=(x+1)^n(M-1)$ болох ба энэ олон гишүүнт ~~эерэг~~ $M>1$ учир эерэг ~~...~~ язгууртай байхгүй!

7

$\boxed{\text{Х Санжаахүү}}$

$\boxed{A_2}$. Эхлээд бид санх үйлдлийг ижил үсгэн дээр хийхгүй. ~~б~~ $\frac{3n^2}{2}$ -оос үзээн сонголтоор гаргаж авч болдоггүй хамгийн нь

$(\underbrace{aa\ldots a}_{n}\underbrace{b\ldots b}_{n}\underbrace{ccccc}_{n})$; $(\underbrace{aaa\ldots a}_{n}\underbrace{cc\ldots c}_{n}\underbrace{b\ldots b}_{n})$; $(\underbrace{b\ldots b}_{n}\underbrace{c\ldots c}_{n}\underbrace{a\ldots a}_{n})$; $(\underbrace{b\ldots b}_{n}\underbrace{a\ldots a}_{n}\underbrace{c\ldots c}_{n})$;

$(\underbrace{c\ldots c}_{n}\underbrace{b\ldots b}_{n}\underbrace{a\ldots a}_{n})$; $(\underbrace{c\ldots c}_{n}\underbrace{a\ldots a}_{n}\underbrace{b\ldots b}_{n})$ жишээрийн 6 хамгийгаас аль нэг нь

байна гэж батлах! Хамгийн баруун захад ~~аль нэг~~ ү үсэг бүрийн хувьд

авагчих боломжийн; $a_1; a_2; \ldots a_n; b_1; b_2, \ldots b_n; c_1; \ldots c_n$ гэе!

a_1+a_2+ $\sum_{k=1}^{n}(a_1+b_1+c_1) = 1+2+\ldots 3n-1 = \frac{3n(3n-1)}{2}$ байна!

Зүүн захад авагчих

гэвэл

боломжуудын мөн адил $a_1', c_2', \ldots a_n', b_1', b_2', \ldots b_n', c_1', c_2', \ldots, c_n'$

$\sum_{k=1}^{n}(a_1'+b_1'+c_1') = 1+2+\ldots 3n-1 = \frac{3n(3n-1)}{2}$

Эндээс d-гийн хувьд (dнь $a; b; c$ үсгийн аль нэг нь)

$d_1+d_2+\ldots d_n + d_1'+d_2'+\ldots d_n' \geq \frac{2n^2}{3}$ ~~байна~~ $n(3n-1)$ байна!

Эндээс $d_1+d_2+\ldots d_n \geq \frac{(3n-1)\cdot n}{2}$ гэж үзэж болно!

~~Тиймээс~~ Тиймээс бид d-үүдийг баруун захад авагчих боломжийг

$A = d_1+d_2+\ldots+d_n-1-2-\ldots-(n-1)$ гэж тооцоолж болох ба эндээс $\Rightarrow A \geq n^2$

~~нэг~~ үг болохоос n^2 -аас үзээгүй байна! шилжих үйлдлийн хувьд шууд баруун захын ~~н~~ ил -ийг ижил очтой

болох нь хамгийн бага үйлдэл хийхэд нэмэгдэхгүй! Хатгах хамгийгүү

~~нэгэ~~ ~~очсон~~ $\Rightarrow$ үлдсэн ~~2 очсон~~ ~~аль нэг очоос~~ ~~очоо~~ ~~очи~~ очууд хоорондоо

солигдохгүй учир! Одоо шууд d-г a гэж үзэхэд явцуурахгүй тэвэл

цэдэн очгийн $(\underbrace{b\ldots b}_{n}\underbrace{ccc}_{n}) \Rightarrow (\underbrace{c\ldots c}_{n}; \underbrace{b\ldots b}_{n})$ болохоос боломжийн хамгийн үзэн

үйлдлийг олох!

~~захаа~~ ~~хамгийн~~ ~~Очихоосой адилаар тооцвол b-үүд эсвэл c-үүд баруун~~

~~баруун захад очих боломжийг тооцвол~~ ~~$3n-2n-1 \geq n^2$ болох б~~

~~$b_1, b_2, \dots, b_{2n}$ хэлбэртэй гэж үзвэл $b_1 + b_{2n}$~~

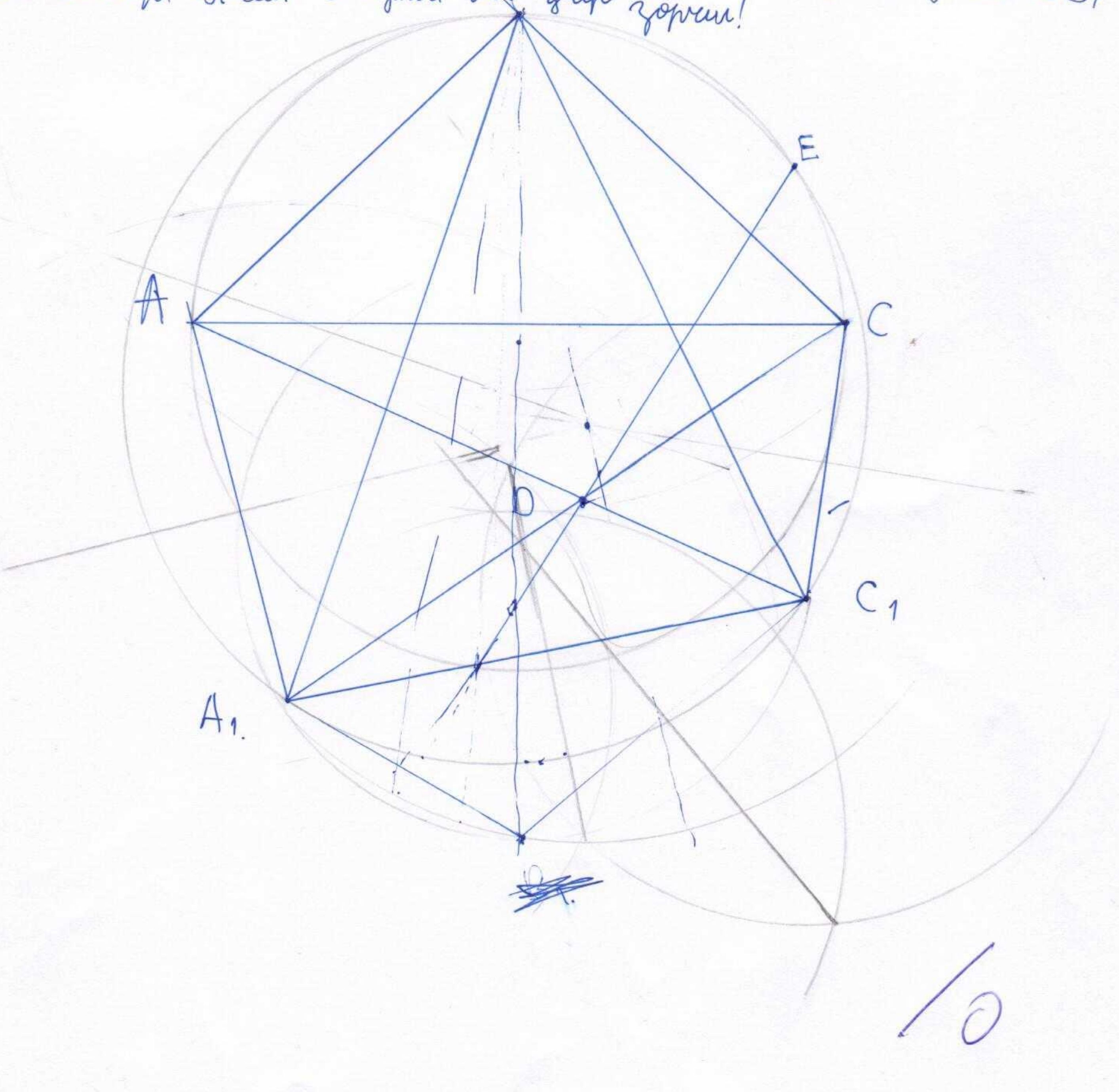
=> үүсгэх 2n тоо $b_1 b_2, \dots, b_{2n}$ хэлбэртэй гэж үзвэл эндээс n-ийг нь сонгоход. тэр n-ий ~~бүрийн~~-ийг бүрдийн баруун захруу ~~эсвэл~~ бас зүүн захруу авачих үйлдлийн тоог нийлүүлэхэд ~~үсэг бүрийн хувьд 2n-1~~ тооцвол (1) үсэг бүрийн хувьд ~~2n-1 учир => (2n-1)n~~ хамгийн захад очих боломж нь 2n-1 учир $(2n-1)\cdot n - 2(1+\dots+(n-1))$ $= (2n-1)\cdot n - n(n-1) = n^2$ болно! бүрдсэн баруун захад эсвэл зүүн захад авачих боломж нь Тэйлбэл энэ 2n-ий тооноос $\frac{n^2}{2}$ ~~байна~~-аас цөөнгүй байна. Тэйлбэл $\left(n^2 + \frac{n^2}{2} = \frac{3n^2}{2}\right)$ ~~ю~~-с гоор сонголтоор гаргах болохгүй хамгийн олдох нь батлагдав!

Нэмэлт: n-ий ~~аль~~ ~~үсгийг~~ үсгийг бүрдийн захад авачих боломжийг тооцох-доо бүрдсэн ~~тэр~~ захын хамгийн үзэлэ авачих боломжоос бүрд дараагийн байрлал бас бүрдэх очих чадахгүй учир ~~хасах~~ $1+2+\dots+n-1$ гэсэн боломжийг хасаж өгч байгаа билээ!

A3 Худлаа бодлого!

Х. Санжаахүү

AA_1 ба CC_1-ийн дундажаар цэг татсан $\angle$ медиануудын огтлолцол цэг B хүртэх зайтай тэнцүү байх ба $ABCC_1B_1A_1$ нь гүдгэр байх B_1 цэг тогтоогдохгүй алсан ~~фиксжих~~ ба. B_1 нь D ба E-тэй ~~хамааралгүй~~ хамаарал-гүй цэг ба BAC ω-тэй хамааралгүй учир $\omega \cap DE$ байх цэг нь BB_1 дээр байх албагүй B_1-ийн ∞-ийн бас учир зөрчил!



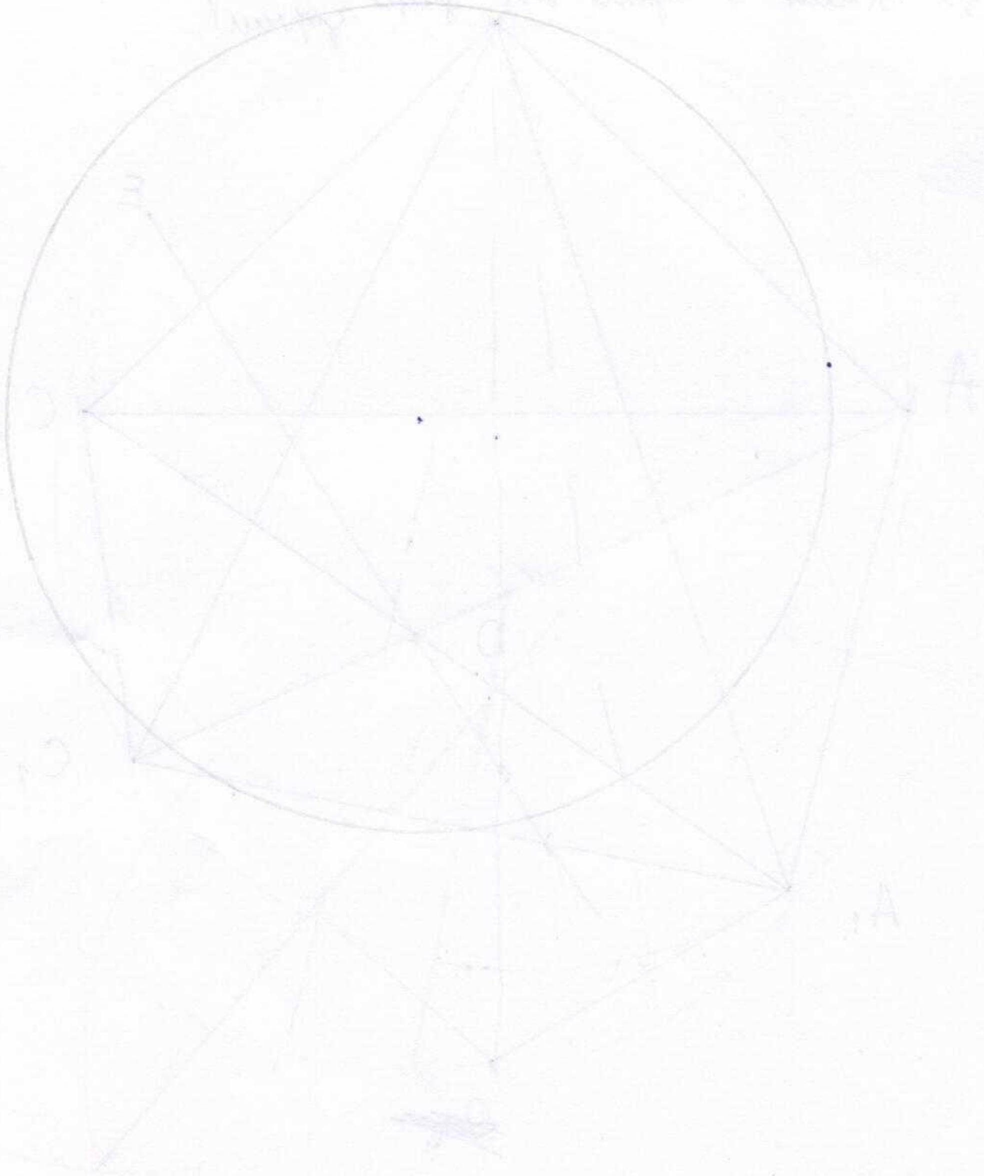
/0

1 - 7

2 - 6

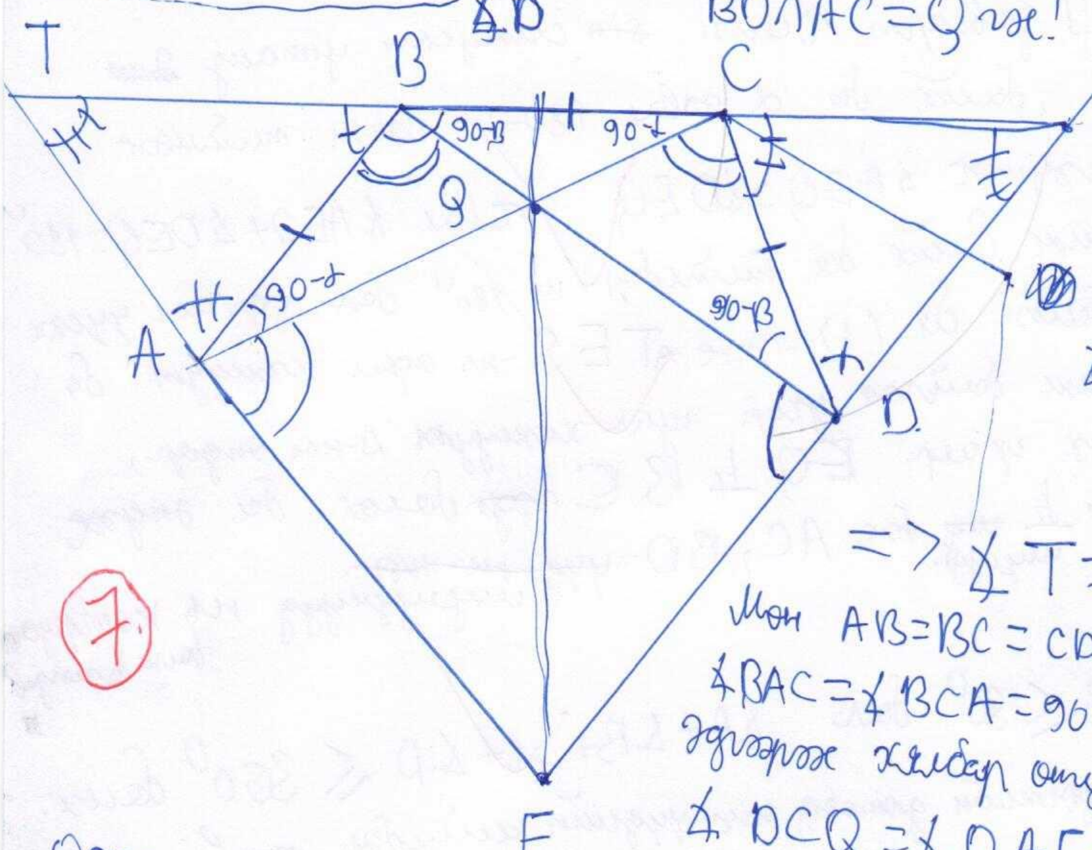
3 - 0

Жиынт 13



B1 | Х. Сонжаахүү
Ховсгол аймаг ДМИ Сургууль

$\angle B = 2\alpha = \angle D$ $\quad \angle C = 2\beta = \angle A$ гэе! $\quad AE \cap BC = T$;
$BD \cap AC = Q$ гэе! $\quad BC \cap ED = S$ гэе!



$\angle EAB = \angle BCD$;
$\angle EDC = \angle CBA$ гэдгээс
$\angle CDS = \angle ABT$;
$\angle DCS = \angle BAT$.

$\Rightarrow \angle T = \angle S$. (1)

Мөн $AB = BC = CD$ гэдгээс $\angle CBD = \angle CDB = 90-\beta$
$\angle BAC = \angle BCA = 90-\alpha$.
Эдгээрээс хялбар олдог ховол. $\angle ABQ = \angle QDE$
$\angle DCQ = \angle QAE \Rightarrow$

7.

Одоо. $\triangle AQE$ ба $\triangle QDE$ дээр синусын теорем тус тус бичвэл:

~~$\frac{\sin\angle QAE}{QE} = \frac{\angle AEQ}{AQ}$~~ $\quad \frac{\sin\angle QAE}{QE} = \frac{\sin\angle AEQ}{AQ}$; $\quad \frac{\sin\angle QDE}{QE} = \frac{\sin\angle DEQ}{QD}$

$\Rightarrow \frac{\sin\angle AEQ}{\sin\angle DEQ} = \frac{\sin\angle QAE}{\cancel{\sin\angle}QD} \cdot \frac{AQ}{\sin\angle QDE}$ болно! (2)

$\triangle ABQ$ ба $\triangle QCD$ дээр синусын теорем тус тус бичвэл!

$\frac{\sin BQA}{AB} = \frac{\sin\angle ABQ}{AQ}$; $\quad \frac{\sin\angle CQD}{CD} = \frac{\sin DCQ}{QD}$.

$\angle BQA = \angle CQD \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\angle BQA = \sin\angle CQD$ бас $AB = CD$ гэдгээс $\Rightarrow \frac{\sin\angle ABQ}{AQ} = \frac{\sin DCQ}{QD}$.

$\angle ABQ = \angle QDE \Rightarrow \sin\angle ABQ = \sin\angle QDE$
$\angle DCQ = \angle QAE \Rightarrow \sin DCQ = \sin QAE$ $\Big\} \Rightarrow \frac{\sin\angle QAE}{QD} \cdot \frac{AQ}{\sin\angle QDE} = 1$

болох ба $\Rightarrow \sin\angle AEQ = \sin\angle DEQ$ болно! $\Rightarrow$

$\measuredangle E$ нь гүдгэр таван өнцөгтийн өнцөг учир 180^0 бага ба энэ ~~sin~~ функц $[0, 180]$ завсарт байх sin синусын утгаа 2 ~~удаа~~ 2 хэзээ л ~~авч~~ авна гэж үзвэл бай ба α эсвэл $180-\alpha$ гэсэн тийм байх
$\sin\measuredangle AEQ = \sin\measuredangle DEQ$ гэдгээс $\measuredangle AEQ = \measuredangle DEQ$ эсвэл $\measuredangle AEQ + \measuredangle DEQ = 180^0$
гэсэн л 2 янзаар болох байх ба нийлбэр нь 180^0 бол зөрчил үүсэх учир $\measuredangle AEQ = \measuredangle DEQ$ байх ба (1)-ээс $\triangle TES$-нь адил хажуут ба
EQ нь биссектрисс болж байгаа учир адил хажуут $\triangle$-ны өндөр, биссектрисс давхцах учир $EQ \perp BC$ болох ба эндээс
E-ээс BC-д буулгасан $\perp$ ~~нь~~ шулуун бас AC; BD-~~үүд нь нэг~~ шулуунууд нь конгруэнт болж батлагдав ∎

Жич: хэрвээ $2\alpha + 2\beta \leq 180^0$ бол $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D \leq 360^0$ болох
ба гүдгэр таван өнцөгтийн дотоод өнцгүүдийн нийлбэр 540^0 учир
$\measuredangle E \geq 180^0$ болж ~~зөрчил~~ гүдгэр гэдгийн зөрчил! Тиймээс
$2\alpha + 2\beta > 180^0$ ба эндээс {[BC) ба [ED) цацрагууд гадагшаа огтлолцоно;
([CB) ба [EA) цацрагууд гадагшаа огтлолцоно. ~~зураг~~

B2 | Х. Санжаахүү | Хөвсгөл аймаг ДМ ц. сургууль

$p=2$ үед A эхлээд a_0-ийг 2 гэж сонгоход хангалттай!

$p=3$ үед. ханийн сүүлийн тоог A тоглогч сонгохдоо $M \vdots 3$ байхаар сонгож чадна ялагаад гэвэл $\cancel{M\equiv}\ 10\equiv 1(3) \Rightarrow M\equiv a_0+a_1+a_2\ (3)$ болох учир.

$p=5$ үед a_0-ийг A эхлээд 5 гэж авахад $M\vdots 5$ нь үнэн юм.

Одоо бусад үед бодоё! $(10,p)=1$ учир ~~10~~ ~~Ферм~~ Фермагийн теорем ёсоор $10^{p-1}\equiv 1(p)$

$\Rightarrow 10^p-1\equiv 9\ (p)$; $10^p-1=(10-1)(1+10+\dots+10^{p-1})$

$\Rightarrow 9\equiv 9\cdot(1+10+\dots+10^{p-1})\ (p)$ $\equiv 9(1+10+\dots+10^{p-1})\ (p)$

$\Rightarrow 10+\dots+10^{p-1}\ \vdots\ p$ болно! $(9,p)=1 \Rightarrow 1+10+\dots+10^{p-1}\equiv 1\ (p) \Rightarrow$

~~10-ийн~~ ~~p модулиарх~~ $(10,p)$ учир 10-ийн p модулиарх эрэмбийг d гэе!

$d\vdots 2$ бол (тэгш) $10^d\equiv 1(p)$ гэсэн үг. (эрэмбийн үндсэн теоремоор $p-1\vdots d$ байна).

Эрэмбийн теорем ёсоор. $10^d-1=(10^{\frac d2}-1)(10^{\frac d2}+1)\vdots p$ болох ба $\frac d2<d$ учир $10^{\frac d2}\not\equiv 1(p) \Rightarrow$ $\cancel{a}\Rightarrow 10^{\frac d2}+1\vdots p$ болно!

$10^k\cdot a_k = b_k$ гэе! $p-1\geq k\geq 1$

b_k-уудыг $\frac{p-1}{d}$ ш хэсэгт доорх байдлаар хуваая!

$(b_1; b_2; \dots b_d); (b_{d+1}; b_{d+2}\dots b_{2d}); \dots (b_{p-d}; b_{p+1-d}\dots b_{p-1})$.

Хэсэг тус бүрийг хуваад $d\vdots 2$ учир ~~жанх~~ ~~шууд~~ ~~ба~~ хосуудад хуваая!

$(b_1; b_{\frac d2+1}); (b_2; b_{\frac d2+2}); \dots (b_{\frac d2}; b_d)$

$(b_{d+1}; b_{d+\frac d2+1}); (b_{d+2}; b_{d+\frac d2+2}), \dots (b_{d+\frac d2}; b_{2d})$

$(b_{p-d}; b_{p-\frac d2}); \dots\dots (b_{p-1-\frac d2}, b_{p-1})$

Ингэж хуваагаад. эхлээд A тоглогч a_0-ийг 0 байхаар авлаад

Дараачаас нь B-ийн ~~авсан~~ сонгосон b_k бүрийн хосын ~~a_k-тоогнь~~

a-тоо бүрийг нь a_k-тай тэнцүү байхаар авбал; хос бүрийн нийлбэр ~~$a_i(10^{\ell}+10$~~ ~~$a_i\cdot 10^{d\cdot k}(10^{\ell}+10^{\ell+\frac d2})$~~ $a_i\cdot 10^{d\cdot k}(10^{\ell}+10^{\ell+\frac d2})$ хэлбэртэй болох ба

$10^{\ell}+10^{\ell+\frac d2}\equiv 10^{\ell}(1+10^{\frac d2})\equiv 0(p)$ болох ба энэ хос бүрийн нийлбэр. p-д хувааgдех боли $a_0=0$ учир $M\vdots p$ болно!

d хэрвээ сондгой бол b_k-уудийг дараах байдлаар d хэсэгт хуваая! $(b_1, b_{d+1}, \dots b_{p-d}); (b_2; b_{d+2}; \dots b_{p-d+1}); \dots (b_d, b_{2d}, \dots b_{p-1})$.

~~(Нь d-д ижил үлдэгдэл өгдөг байдгаасаар)~~ хэсэг бүрт. (индексүүд нь d-д ижил үлдэгдэл өгдөг) $\frac{p-1}{d}$ ш тоо байгаа ба $p-1\vdots 2$; $d\not\vdots 2 \Rightarrow \frac{p-1}{d}\vdots 2$ болно!

Түрүүлэл А тоглогч эхлэхд a_0-ийг 0-ээр сонгоод. ~~бас тэгээд~~ ар оор b_i-ийг $a_i+b_k=9$ байхаар авна. В-ийн авсан b_k-ийн хэсгэг ижил хэсэг бүр тэгш ширхэгтэй учир. индекс нь d-д үлдэгдэл өгдөг хэсгийн b-уудийн нийлбэрийг p-ээр хуваахад ~~авсан~~ үлдвэрт байгаа зэрэгтүүд нь бүгд p-д ижил үлдэгдэл өгөх учир. ~~ард~~ 10-ын тэр нийлбэр. $10^{e}(9\cdot\frac{p-1}{2d}$ ~~нийлбэртэй байх~~ ба ~~тэгээ~~ (Яагаад гэвэл $10^d\equiv 1(p)$ учир) үлдэгдэл p-д ~~өгөх учир~~ өгнө. $\Rightarrow$

$\Rightarrow M\equiv 9\cdot\frac{p-1}{2d}(10+10^2+\dots 10^d)\ (p)$ байна. бас $a_0=0$ учир $10^d\equiv 1(p)$ гэдгийг ашиглавал $10+10^2+\dots+10^{p-1}\equiv\frac{p-1}{d}(10+10^2+\dots 10^d)\equiv 0(p)\Rightarrow$

~~$\Rightarrow \frac{9}{2d}\cdot\frac{p-1}{d}(10+10^2+\dots+10^d)$~~ $(p-1;p)=1$ учир $10+10^2+\dots 10^d\vdots p$ болох $\Rightarrow$

$\Rightarrow 9\cdot\frac{p-1}{2d}(10+10^2+\dots+10^d)\vdots p \Rightarrow M\vdots p$ болж А хожно!

Тиймээс А-д хожих стратеги байна гэдэг батлагдав!

7.

B3 Х.Санжаахүү

0