Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
II даваа, I өдөр: 2019 оны 3 сарын 28

Бодлого VII-1. Аль ч мөр, аль ч багана ба хоёр диагоналийн дагуух тоонуудын нийлбэр ижил байхаар нүд бүрт нь натурал тоо бичигдсэн 3×3 хэмжээтэй квадратыг шидэт квадрат гэдэг. Шидэт квадратын хоёр тоо зурагт дүрсэлсэн байдлаар өгөгджээ. Хаа нэгтээ 9 бичигдэхээр шидэт квадратыг гүйцээж бөглө (бүх боломжит байдлаар).

	11	
		5

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодолт. Хариу:

9	11	16
19	12	5
8	13	15

4	11	6
9	7	5
8	3	10

6	11	10
13	9	5
8	7	12

7	11	12
15	10	5
8	9	13

3	11	4
7	6	5
8	1	9

Одоо үлдсэн 2 нүдэнд байрлах үед шидэт квадрат байхаар бөглөж чадахгүй гэж баталъя. Зүүн доод буланд 9 байх үед баталъя. Нөгөө тохиолдол нь яг адлаар батлагдана. Голын нүдэнд a тоо байсан гэе. Мөр, багана ба диагоналын элементүүдийн нийлбэр тэнцүү S байг. Тэгээд мөр баганы нийлбэрээс хоосон нүднүүдийг олвол

$a-4$	11	$S-a-7$
$S-a-5$	a	5
9	$S-11-a$	$2+a$

болох ба диагоналын элементийн нийлбэрийг бодоход $9+a+S-a-7 = S-16 = S$ болж зөрчил гарна.

Нэг шидэт квадратыг зөв байгуулахад 1 оноо, шидэт квадрат байхаар бөглөж чадахгүй байх 2 тохиолдолд тус бүр 1 оноо

Бодлого VII-2. Натурал n тооны цифрүүдийн нийлбэрийг $s(n)$ гэж тэмдэглэе.

$s(n^2) + 2s(n-1) = 2019$ байх n тоо олдох уу?

(Дэвшүүлсэн: Э. Азжаргал)

Бодолт. $n - s(n)$ тоо 9-д хуваагддаг гэдгийг тэмдэглэе. $s(n^2) + 2s(n-1) - 2019 = 0$ тоо 9-д хуваагдах тул $(s(n^2) - n^2) + 2(s(n-1) - (n-1)) - 2019 + n^2 + 2(n-1)$ тоо 9-д хуваагдана. Эндээс $n^2 + 2n - 2021 = (n+1)^2 - 2016 - 6$ тоо 9-д хуваагдах болно. $2016 = 9 \cdot 224$ тул $(n+1)^2 - 6$ тоо 9-д хуваагдах ёстой. Нөгөө талаас натурал тооны квадрат 9-д хуваахад $0, 1, 4, 7$ үлдэгдэл өгөхийг хялбархан шалгах тул $(n+1)^2 - 6$ тоо 9-д хуваагдахгүй болж зөрчил үүснэ.

$n^2 + 2n - 2021$ тоо 9-д хуваагдах гэж баталсан бол 3 оноо
$(n+1)^2 - 6$ тоо 9-д хуваагдах гэж гаргасан бол 1 оноо
тооны квадрат 9-д хуваахад $0, 1, 4, 7$ үлдэгдэл өгөхийг баталсан бол 3 оноо

Бодлого VII-3. $a+b+c=d$ байх ямар ч a,b,c,d дөрвөл (заавал ялгаатай байх албагүй) бүгд ижил өнгөөр будагдаагүй байхаар 1, 2, 3, 4, ... тоонуудыг улаан эсвэл хөх өнгөөр будаж болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Ц. Галмандах)

Бодолт. Хариу: болохгүй.

Тийм будалт байхгүй гэж харуулъя. Эсрэгээс нь тийм будалт олддог гэе. Энэ будалтанд 1 улаанаар будагдсан гэж үзье. Тэгээд цаашид n тоо улаанаар будагдсан бол n^R, хөх бол n^B гэнэ. $a+b+c=d$ ижил өнгөөр будагдаагүй гэдгээс

$$1^R+1^R+1^R=3\Rightarrow 3-\text{хөх},\quad 3^B+3^B+3^B=9\Rightarrow 9-\text{улаан},\quad 1^R+4+4=9^R\Rightarrow 4-\text{хөх}$$

Эндээс харахад $1^R+1^R+9^R=11\Rightarrow$ 11-хөх, $3^B+4^B+4^B=11\Rightarrow$ 11-улаан. Зөрчил.

1, 3 ялгаатай өнгөтэй гэж харуулсан бол 1 оноо
3, 9 ялгаатай өнгөтэй гэж харуулсан бол 1 оноо
3, 4 ижил өнгөтэй ба гэж харуулсан бол 2 оноо
11 дээр зөрчил гаргавал 3 оноо

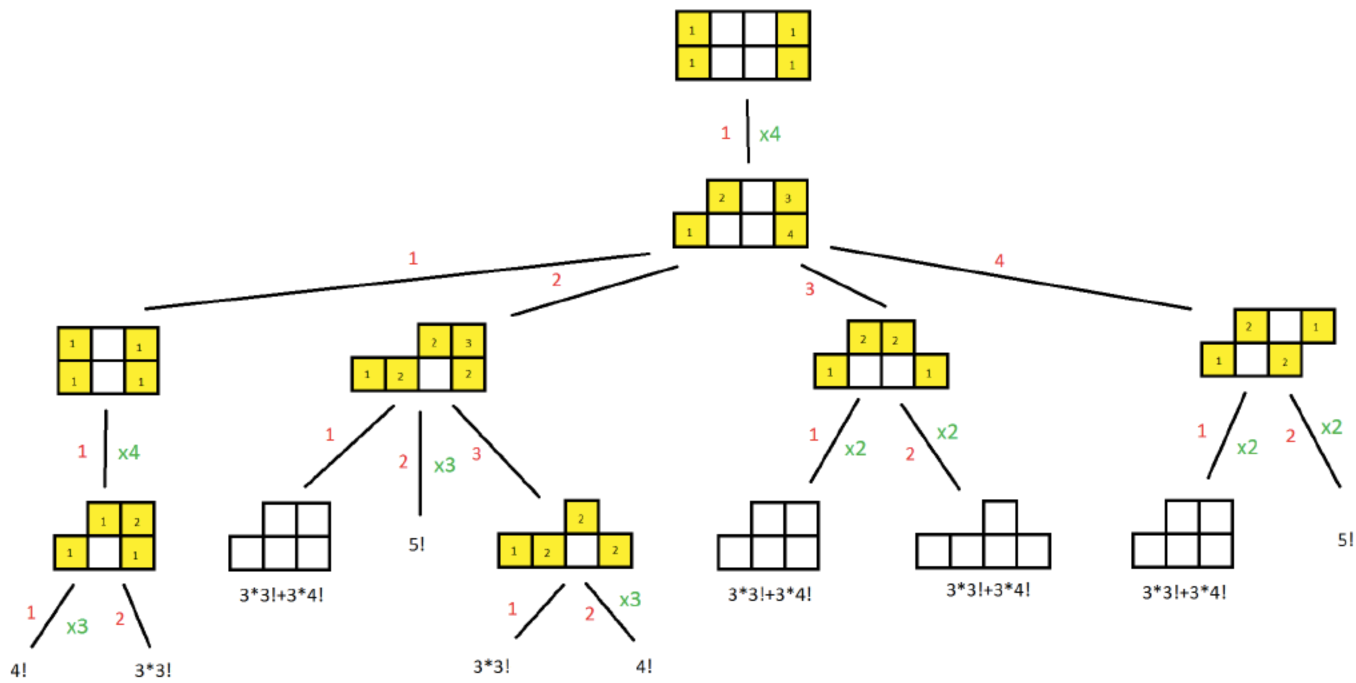
Бодлого VII-4. 2×4 хэмжээтэй шоколадны цуглуулгын нүд бүрд өөр өөр амттай шоколад байв. Бат хоёроос олонгүй хөрш нүдэндээ (ерөнхий талтай) шоколадтай аль нэг нүднээс шоколад авч иддэг. Бат хэдэн янзаар шоколадны цуглуулгаа идэж дуусгаж чадах вэ?

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодолт. Боломжуудаа дараах байдлаар тохиолдол салган бодож сүүлд нь нэгтгэвэл

$$4(4(3\cdot4!+3\cdot3!)+(3\cdot3!+3\cdot4!+3\cdot5!+3\cdot3!+3\cdot4!)+4(3\cdot3!+3\cdot4!)+2(3\cdot3!+3\cdot4!+5!)) = 6720$$

гарна.



Бодлого VIII-1. $n!$ нь k ширхэг 0 цифрээр төгсдөг натурал n too олддоггүй бол натурал k тоог *онцгой* гэе. Онцгой тоонуудыг багаас их рүү нь жагсааж бичихэд 55-д ямар тоо бичигдэх вэ?.

(Дэвшүүлсэн: Ш. Доржсэмбэ)

Бодолт. $5^k|n$, $5^{k+1} \nmid n$ ба $(n-1)!$ тоо m ширхэг 0-ээр төгсөх бол $n!$ тоо $m+k$ ширхэг 0-ээр төгсөнө. Иймд $k \geq 2$ үед $m+1$, $m+2$, ..., $m+k-1$ гэсэн $k-1$ ширхэг тоо онцгой тоотой болно. Жишээ нь 24! тоо 4 ширхэг 0-ээр, 25! тоо 6 ширхэг 0-ээр төгсөх учир эхний онцгой тоо 5 байна. $1\cdot5^2, 2\cdot5^2, 3\cdot5^2, \cdots, 45\cdot5^2$ тоо бүр дор хаяж 1 онцгой тоог үүсгэнэ. Иймд 46 онцгой тоо үүснэ. Мөн $1\cdot5^3, 2\cdot5^3, 3\cdot5^3, \cdots, 9\cdot5^3$ тоонууд дахин 9 онцгой тоо үүсгэнэ. 5^4 тоо дахин 1 онцгой тоо үүсгэнэ. Нийт 45+9+1=55 онцгой тоо үүссэн байна.

$(45\cdot5^2)!$ тоо $\frac{45\cdot5^2}{5} + \frac{45\cdot5^2}{5^2} + \frac{45\cdot5^2}{5^3} + \frac{45\cdot5^2}{5^4} = 225+45+9+1 = 280$ ширхэг тэгээр төгсөнө. Эндээс 55 дахь онцгой тоо 279 байна.

Бодлого VIII-2. 2, 3, ..., 2019 тоонууд бичигдсэн картууд байв. Бат, Цэцэг хоёр ээлж, ээлжээр нэг карт сонгох ба бүх карт сонгогдсоны дараа сонгосон картууд дээрх тоонуудын нийлбэрийг авахад аль сүүлийн цифр томтой тоглогч хожно. Бат карт сонгож эхлэх бол зөв тогловол хэн нь хожих вэ?

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодолт. $(2,1002)$, $(3,1003)$, ..., $(999,1999)$, $(1000,2000)$, $(2001,2011)$, ..., $(2009,2019)$, $(1001,2010)$ гэж хосуудад хуваая. Бат эхлээд 1001-ийг сонгоно. Үүнээс цааш Цэцэгийн сонгосон тоотой хос тоог сонгоно.

Бодлого VIII-3. n тооны бүх хуваагчдыг өсөх эрэмбээр нь $1 < d_1 < d_2 < \cdots < d_k < n$ гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $1 < d_1+1 < d_2+1 < \cdots < d_k+1 < m$ тоонууд m тооны бүх хуваагчид болдог байх бүх (n,m) хосыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодолт. Хариу: $(n,m) = (4,9)$, $(8,15)$.

1. $k = 1$ бол $n = p^2$ хэлбэртэй байх бөгөөд $m = (p+1)^2$ болох ба p, $p+1$ хоёул анхны тоо байх тул $p = 2$ болно. Иймд энэ тохиолдолд $(n,m) = (4,9)$ байна.
2. $k \geq 2$ бологч. $n = d_1 d_k = d_2 d_{k-1}$ ба $m = (d_1+1)(d_k+1) = (d_2+1)(d_{k-1}+1)$ тул $d_1 + d_k = d_2 + d_{k-1}$ болно. Эндээс $d_1 + \dfrac{n}{d_1} = d_2 + \dfrac{n}{d_2}$ болох бөгөөд тэнцүүгийн тэмдгийн нэг талд гаргаад эмхтгэвэл $(d_1 - d_2)\left(1 - \dfrac{n}{d_1 d_2}\right) = 0$ болно. Иймд $n = d_1 d_2$ буюу $k = 2$ байна.

   d_1 ба $d_1 + 1$ хоёул анхны тул $d_1 = 2$ байна. Эндээс $d_2 = 4$ эсвэл $d_2 \geq 3$ анхны тоо. Мөн ижлээр $d_2 + 1 = 9$ эсвэл $d_2 + 1 \geq 5$ анхны тоо. Ганц боломж нь $d_2 = 4$. Иймд $(n,m) = (8,15)$ болно.

Бодлого VIII-4. $n \times n$ хэмжээтэй хүснэгтийн зүүн дээд булангаас баруун доод булан хүртэлх диагональ дээр орших нүд бүрийн хувьд уг нүдийг агуулах мөр баганад ижил тоо байдаггүй байхаар а) $n = 7$, б) $n = 8$ үед $1, 2, \ldots, 2n-1$ тоонуудыг байрлуулж болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодолт. Хариу: а) болохгүй б) болно.

а) Хүснэгтийн багануудаа зүүнээс баруун $1, 2, \ldots, 7$, мөрнүүдээ дээрээс доош $1, 2, \ldots, 7$ гэж дугаарлая. Мөн i-р мөр, j-р баганы огтлолцолд бичигдсэн тоог a_{ij} гэе. Мөн $1 \le i \le 7$ үед $S_i = a_{1i} + a_{2i} + \cdots + a_{7i} + a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{i7} - a_{ii}$ нийлбэрийг тэмдэглэе. Энэ нийлбэрт a_{ii} тоо нэг л удаа нэмэгдэнэ. S_i бүр $1, 2, \ldots, 15$ гэсэн тоонуудыг нэг удаа агуулах бөгөөд $S_1, S_2, \ldots, S_7$ гэсэн 7 ширхэг нийлбэр байх тул $S_1+S_2+\cdots+S_7$ нийлбэрт тоо бүр сондгой удаа байна. Нөгөө талаас $i \ne j$ байх i, j-ийн хувьд a_{ij} элемент S_i, S_j хоёуланд нь нэмэгдэнэ. Диагонал дээр бичигдэхгүй тоо $1, 2, \ldots, 15$ дундаас олдох бөгөөд тэр тоо нийт нэмэгдэхүүнд тэгш удаа орох болж зөрчил үүснэ. Иймд болохгүй.

б) Эхлээд 4×4 дээр байгуулъя.

1	2	3	4
5	1	7	3
6	4	1	2
7	6	5	1

Одоо 8×8-ийг байгуулахдаа 4 ширхэг 4×4-д хувааж байгаад дээрх санааг ашиглая.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	1	11	3	13	5	15	7
10	4	1	2	14	8	5	6
11	10	9	1	15	14	13	5
12	6	7	8	1	2	3	4
13	12	15	7	9	1	11	3
14	8	12	6	10	4	1	2
15	14	13	12	11	10	9	1

Бодлого IX-A1. Зарим натурал тоог *сайн* тоо гэх ба сайн тоонууд дараах чанаруудтай гэе. Үүнд:

а) 55 сайн тоо.

б) n сайн тоо бол n тооны бүх хуваагч сайн тоо.

в) $n > m > 1$ сайн тоонууд бол $nm + 1$ сайн тоо.

2019 сайн тоо гэж батал.

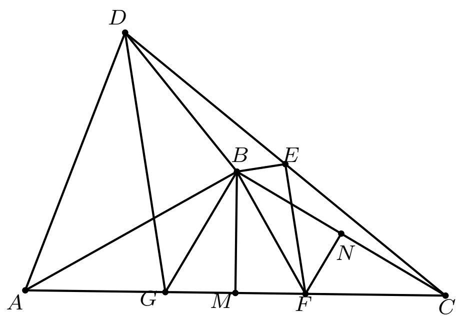
(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодолт. 55 сайн тоо тул 5, 11 сайн тоо болно. Иймд $56 = 5 \cdot 11 + 1$ сайн тоо болох тул 2, 4, 7, 8 сайн тоо болно. $36 = 5 \cdot 7 + 1$ сайн тоо тул 6 сайн тоо болно. Иймд $25 = 4 \cdot 6 + 1$, $126 = 5 \cdot 25 + 1$ сайн тоо болох бөгөөд $1009 = 8 \cdot 126 + 1$ сайн гэдгээс $2019 = 2 \cdot 1009 + 1$ тул 2019 сайн тоо болов.

Бодлого IX-A2. $\measuredangle ABC = 120^\circ$ байх адил хажуут гурвалжин өгөгдөв. Хавтгай дээр $\measuredangle ADB = 60^\circ$ байх D цэг, AC тал дээр $AF = 2FC$ байхаар F цэг авав. Хэрэв DC хэрчмийн дундаж цэг E бол $\measuredangle BEF$ өнцгийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодолт. AF хэрчмийн дундаж цэгийг G, AC хэрчмийн дундаж цэгийг M, F цэгээс BC руу буулгасан перпендикулярын суурийг N гэе. ABC адил хажуут гурвалжин тул $BM \perp AC$ байна. $\angle FCN = 30^\circ$ тул $FN = \dfrac{FC}{2} = \dfrac{GF}{2} = MF$ болно. $\angle BMF = \angle BNF = 90^\circ$ тул $\triangle MBF = \triangle NBF$ болно. Иймд $\angle MBF = \angle FBN = 30^\circ$ болох GBF адил хажуут гурвалжин гэдгийг ашиглавал $\angle GBM = \angle MBF = 30^\circ$ болох бөгөөд эндээс GBF зөв гурвалжин болно. $\angle AGB = 120^\circ$ тул $AGBD$ багтсан дөрвөн өнцөгт болох тул $\angle GDB = \angle BAG = 30^\circ = \angle ADG$ болно. EF нь GCD гурвалжны дундаж шугам, ME нь ADC гурвалжны дундаж шугам гэдгээс $GD \parallel EF$, $AD \parallel ME$ болох тул $\angle ADG = \angle MEF = 30^\circ$ болно. Эндээс $MBEF$ багтсан дөрвөн өнцөгт болох тул $\angle BEF = 90^\circ$ болно.



Бодлого IX-A3. $0 \le a \le b \le c$ тоонуудын хувьд

$$(a^2 + c^2)(b^2 + 1) \ge (ac + b)^2$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. $0 \le a \le 1$ үед

$$(a^2+c^2)(b^2+1)-(ac+b)^2=(c^2-b^2)(1-a^2)+(bc-a)^2 \ge 0$$

тул үнэн. $a > 1$ үед $c \ge 1$ гэдгээс

$$(a^2+c^2)(b^2+1)-(ac+b)^2=(b^2-a^2)(c^2-1)+(ab-c)^2 \ge 0$$

тул үнэн. Тэнцэтгэл $0 \le x \le 1 \le y$ хувьд (x^2, x, x) ба (y, y, y^2) дээр биелнэ.

$a \le 1$ эсвэл $c \ge 1$ тохиолдлын аль нэгийг батлахад 3 оноо.
Тэнцэтгэл биелэх нөхцлийг олоогүй бол -1 оноо.

Бодлого X-A1. Дурын натурал n тооны хувьд $a^n + b^n + 2n$ тоо d тоонд хуваагддаг байх бүх натурал тоон (a, b, d) гурвалыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Эрдэнэбаяр)

Бодолт. Хариу: (a, b, d) = (дурын, дурын, 1), (тэгш, тэгш, 2), (сондгой, сондгой, 2)

Дээрх гурвалууд шийд болох нь илт тул өөр шийдгүй гэж харуулъя. $d \geq 2$ гээд d тооны анхны p хуваагчийг авъя. $n = 1$ үед $a + b + 2 \equiv 0 \pmod{p}$ болох ба $n = p$ үед Фермагийн бага теоремоос $a+b \equiv a^p + b^p + 2p \equiv 0 \pmod{p}$ болно. Эндээс $p = 2$ байна.

$4 \mid d$ гэвэл $a + b + 2 \equiv 0 \pmod{4}$ ба

Бодлого X-A2. ω тойрог ABC гурвалжны AB ба BC талыг харгалзан E ба C цэгт шүргэдэг байв. E цэгийг дайрах AC шулуунтай параллель шулуун BC талыг D цэгт огтолно. ED ба AC шулууны ω тойргийг огтлох шинэ цэгүүд нь харгалзан K ба H байг. BK шулуун AC шулуунтай G цэгт огтлолцох бол $AH = CG$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодолт. $EK \parallel HC$ гэдгээс $\angle ECH = \angle KEC$ буюу $CK = EH$ ба $\frac{CG}{CA} = \frac{DK}{DE}$ байна. DC нь шүргэгч гэдгээс $\angle DCK = \angle DEC$ буюу $DKC \sim DCE$ байна. Эндээс

$$\left(\frac{CK}{CE}\right)^2 = \frac{DC}{DE} \cdot \frac{DK}{DC} = \frac{DK}{DE}$$

Яг адил $AEH \sim ACE$ болох ба эндээс $(\frac{EH}{EC})^2 = \frac{AE}{AC} \cdot \frac{AH}{AE} = \frac{AH}{AC}$ байна. Иймд

$$\frac{CG}{AC} = \frac{DK}{DE} = \frac{CK^2}{CE^2} = \frac{EH^2}{EC^2} = \frac{AH}{AC}$$

буюу $AH = CG$ болж батлагдана.

$CK = EH$ тэнцэлд 1 оноо.

$\frac{CG}{CA} = \frac{DK}{DE}$ тэнцэлд 1 оноо.

$\frac{DK}{DE} = \frac{CK^2}{CE^2}$ тэнцэлд 2 оноо.

$\frac{EH^2}{EC^2} = \frac{AH}{AC}$ тэнцэлд 2 оноо.

Сүүлийн тэнцэлд 1 оноо.

Бодлого X-A3. $0 \leq a \leq b \leq c$ тоонуудын хувьд

$$(a+c)^2(b+1)^2 \geq (a+b+c+1)(ab+bc+ca+abc)$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Хоёр бодолт хийе.

Адилтгал ашигласан бодолт. Хялбарчилбал

$$(a+c)^2(b^2+1) + (b+1)^2(a^2+c^2) \geq 2(a+c)(b+1)(ac+b)$$

гэж батлахтай ижил болно. Кошийн тэнцэтгэл бишээс

$$(a+c)^2(b^2+1) + (b+1)^2(a^2+c^2) \geq 2(a+c)(b+1)\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+1)}$$

болох тул

$$(a^2+c^2)(b^2+1) \geq (ac+b)^2$$

гэж батлахад хангалттай. Энэ нь $0 \leq a \leq 1$ үед

$$(a^2+c^2)(b^2+1) - (ac+b)^2 = (c^2-b^2)(1-a^2) + (bc-a)^2 \geq 0$$

тул үнэн ба $a > 1$ үед $c \geq 1$ гэдгээс

$$(a^2+c^2)(b^2+1) - (ac+b)^2 = (b^2-a^2)(c^2-1) + (ab-c)^2 \geq 0$$

тул үнэн. Тэнцэтгэл $0 \leq a \leq 1 \leq c$ хувьд (a^2, a, a) ба (c, c, c^2) дээр биелнэ.

Дискриминант ашигласан бодолт. $P(x) = (b+1)(x-a)(x-c) + (a+c)(x-b)(x-1) = (a+b+c+1)x^2 - 2(a+c)(b+1)x + (ab+bc+ca+abc)$ квадрат олон гишүүнтийг авч үзье.

$P(x)$-ийн ахлах гишүүний коеффициент эерэг ба $P(b) = (b+1)(b-a)(b-c) \leq 0$ байна. Иймд $P(x)$ бодит язгууртай ба эндээс $P(x)$-ийн дискриминант ≥ 0 байх болж бодлого бодогдоно. Тэнцэтгэл биелэх нөхцлийг $P(b) = P'(b) = 0$ гэж бичиж болох ба хялбарчилбал дээрх нөхцөл гарна.

> $a \leq 1$ эсвэл $c \geq 1$ тохиолдлын аль нэгийг батлахад 3 оноо.
> Тэнцэтгэл биелэх нөхцлийг олоогүй бол -1 оноо.

Бодлого XI-A1. $(a^2+c^2)(b^2+1)=(ac+b)^2+25$ байх бүх натурал тоон $a<b<c$ гурвалыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Хариу: $(1,2,3)$.

$(1,2,3)$ шийд болохыг хялбархан шалгаж болох тул өөр шийдгүй гэж харуулъя. $a\geq 1$, $b\geq a+1$, $c\geq b+1$ тул $c\leq 3$ гэж харуулахад хангалттай. $c\geq 4$ гэвэл

$$(a^2+c^2)(b^2+1)-(ac+b)^2=(b^2-a^2)(c^2-1)+(ab-c)^2\geq(2a+1)(c^2-1)\geq 3\cdot 15$$

болж зөрчил гарна.

Бодлого XI-A2. ω тойргийн гадна орших P цэгээс ω тойрогт PA ба PB шүргэгчүүд татав. P цэгийг дайрсан шулуун ω тойргийг C ба D цэгт огтолно. B цэгийг дайрсан PA шулуунтай параллель шулуун AC, AD шулуунуудтай харгалзан E, F цэгүүдэд огтлолцох бол $BE=BF$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодолт. PA шүргэгч ба $PA\parallel EF$ гэдгээс $\angle ABC=\angle PAC=\angle AEB$ буюу $ABC\sim AEB$ байна. Эндээс $\frac{BE}{BC}=\frac{AB}{AC}$ болно. Яг адил $\angle ABF=\angle PAB=\angle ADB$ буюу $ABF\sim ADB$ гэдгээс $\frac{BF}{BD}=\frac{AB}{AD}$ байна. Иймд $\frac{BC}{AC}=\frac{BD}{AD}$ гэж баталхад хангалттай.

PA ба PB шүргэгч гэдгээс $PCA\sim PAD$ ба $PBC\sim PDB$ байна. Эндээс $\frac{AC}{AD}=\frac{PC}{PA}$ ба $\frac{BC}{BD}=\frac{PC}{PB}$ болно. Нөгөө талаас $PA=PB$ тул $\frac{BC}{AC}=\frac{BD}{AD}$ болж батлагдана.

$\frac{BE}{BC}=\frac{AB}{AC}$ тэнцэлд 2 оноо.

$\frac{BF}{BD}=\frac{AB}{AD}$ тэнцэлд 2 оноо.

$\frac{BC}{BD}=\frac{PC}{PB}$ тэнцэлд 1 оноо.

$\frac{BC}{BD}=\frac{PC}{PB}$ тэнцэлд 1 оноо.

$PA=PB$ ашигласан сүүлийн тэнцэлд 1 оноо.

Бодлого XI-A3. $n \geq 2$ гэе. 1, 2, ..., n дугаартай n зогсоол дээр 1, 2, ..., n дугаартай n машиныг байрлуулав. Машин бүрийн дугаараас уг машин зогссон зогсоолын дугаарыг хасахад гарах n ялгавар бүгд ялгаатай байвал энэ байрлуулалтыг *зөв* гэж нэрлэе. Нийт зөв байрлуулалтын тоо сондгой гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. i дугаартай зогсоолыг $n+1-i$ гэж шинээр дугаарлахад зогсоолууд мөн л 1, 2, $\ldots$, n тоогоор дугаарлагдана. Зөв байрлуулалтын хувьд машин бүрийн дугаар дээр уг машин зогссон зогсоолын шинэ дугаарыг нэмэхэд гарах n нийлбэр бүгд ялгаатай байна. Учир нь k дугаартай i зогсоолд зогссон машины шинэ зогсоолын дугаар ба машины дугаарын нийлбэр $n+1+(k-i)$ юм.

Иймд машины болон зогсоолын дугаарын нийлбэрүүд бүгд ялгаатай байх байрлалын тоог сондгой гэж үзүүлэхтэй манай бодлого ижил юм. Энэ чанартай байрлалыг цаашид *зөв* гэе. i дугаартай зогсоолд x_i дугаартай машин зогссон байрлалыг $(x_1, \ldots, x_n)$ гэж тэмдэглэе. $(1, \ldots, n)$ байрлал зөв учраас ямар нэг i дугаарын хувьд $x_i \neq i$ байх зөв байрлалын тоог тэгш гэж үзүүлэхэд хангалттай.

$(x_1, \ldots, x_n)$ байрлал өгөгдсөн үед x_i дугаартай зогсоолд i дугаартай машиныг зогсоох замаар шинэ байрлал байгуулья. Хэрэв анхны байрлал зөв бол шинэ байрлал мөн зөв байна. Одоо энэ хоёр байрлал ялгаатай гэдгийг үзүүлье. $(x_1, \ldots, x_n)$ зөв учраас $x_i \neq i$ байх ямар нэг i дугаар олдоно. Энэ байрлалын i дугаартай машин y_i дугаартай зогсоолд зогссон гэвэл $x_i \neq y_i$ байна. Эсрэг тохиолдолд $i + x_i = y_i + i$ болж зөрчил гарна. Шинээр байгуулсан зөв байрлалын i дугаартай зогсоолд y_i дугаартай машин зогсох тул $(x_1, \ldots, x_n)$-с ялгаатай. Үүгээр бодлого бодогдов.

Зөв байрлуулалтын тоог сондгой гэж үзүүлэх боломжтой харгалзаа байгуулсан үед 3 оноо

Бодлого XII-A1. a, b, $c > 1$ ба a, b, c дараалал геометр прогресс, харин $\log_a b$, $\log_b c$, $\log_c a$ дараалал арифметик прогресс үүсгэдэг бол уг арифметик прогрессын ялгаврын авч болох утгуудыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. Хариу: 0, -3/2.

Геометр прогрессын ноогдворыг q гэвэл $b = aq$, $c = aq^2$ болно. $t = \log_a q$ гэж тэмдэглэвэл арифметик прогресс үүсгэх $\log_a b + \log_c a = 2\log_b c$ нөхцөлөөс

$$1 + t + \frac{1}{1+2t} = 2 + \frac{2}{1+\frac{1}{t}}$$

болно. Эндээс $t = 0$ эсвэл t нь $2t^2 - 3t - 3 = 0 \qquad (1)$ тэгшитгэлийн шийдээр тодорхойлогдоно. Арифметик прогрессын ялгавар

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+2t} - (1+t)\right) = -\frac{2t^2+3t}{2(1+2t)}$$

болно. $t = 0$ үед арифметик прогрессын ялгавар 0. $t \neq 0$ үед (1) тэгшийтгэлээс ялгавар

$$-\frac{2t^2+3t}{2(1+2t)} = -\frac{3+6t}{2(1+2t)} = -\frac{3}{2}$$

болно.

Бодлого XII-A2. O төвтэй ω тойргийн гадна орших P цэгээс ω тойрогт PA ба PB шүргэгч татав. P цэгийг дайрсан шулуун ω тойргийг C ба D цэгт огтолно. CE нь ω тойргийн диаметр байг. DE шулууны AO ба BO шулуунтай огтлолцох цэгүүдийг харгалзан X ба Y гэвэл $OP^2 = OX \cdot OY$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодолт. $\angle PDY = 90^\circ = \angle PBY$ гэдгээс Y, D, B, P цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Эндээс $\angle PYO = \angle PDB$ байна. Яг адил X, D, A, P цэгүүд нэг тойрог дээр орших ба $\angle PXO = \angle PDA$ болно. Иймд

$$\begin{aligned}\angle PYO + \angle YPO = \angle POB = \frac{\angle AOB}{2} &= \angle ADB\\ &= \angle ADP + \angle BDP = \angle PYO + \angle PXO\end{aligned}$$

тул $\angle PXO = \angle YPO$ байна. Мөн $\angle YOP = \angle POX$ тул $YOP \sim POX$ буюу $\frac{OX}{OP} = \frac{OP}{OY}$ болж батлагдана.

$\angle PYO = \angle PDB$ тэнцэлд 1 оноо.

$\angle PXO = \angle PDA$ тэнцэлд 1 оноо.

$\angle YOP = \angle POX$ тэнцэлд 1 оноо.

$\angle PXO = \angle YPO$ тэнцэлд 3 оноо.

Сүүлийн хэсэгт 1 оноо.

Бодлого XII-A3. $2n \times 2n$ хүснэгтийн $n(2n+1)$ нүдэнд 1, бусад нүдэнд 0 гэж бичив. Ялгаатай хоёр мөр сонгон авч нэг мөрний i-р тоог нөгөө мөрний i-р тоонд үржүүлээд эдгээр $2n$ үржвэрийг нэмье. Ингэж олсон нийлбэр нь $\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor$-с багагүй байх ялгаатай хоёр мөр олдоно гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. k дугаар баганад байх нэгийн тооны тоог n_k, i ба j-р мөрний харгалзах тоонуудыг үржүүлж бүгдийг нь нэмэхэд гарах нийлбэрийг n_{ij} гэе. Эдгээр n_{ij} тоонуудын хамгийн ихийг N-ээр тэмдэглэж $N \geq \left[\frac{n+2}{2}\right]$ болохыг үзүүлье. Хүснэгтийн i-р мөр, k-р дугаар баганад бичигдсэн тоог A_{ik}-р тэмдэглэж

$$P = \{(A_{ik}, A_{jk}) : A_{ik}A_{jk} = 1, i < j, 1 \leq i, j, k \leq 2n\}$$

олонлогийн элементийн тоог 2 аргаар тооцъё.

a) k-р баганад байгаа нэгийн тоо n_k учраас 1 бичигдсэн i ба j мөрийг сонгох боломжийн тоо $\binom{n_k}{2}$ болно. Бүх n_k тооны нийлбэр нийт 1-ийн тоотой тэнцүү учраас

$$|P| = \sum_k \binom{n_k}{2} = \frac{1}{2}(\sum_k n_k^2 - (2n^2 + n)).$$

b) i ба j $(i < j)$ мөр бэхлэгдсэн үед энэ хоёр мөрөнд байх P олонлогийн элементийн тоо n_{ij}-тэй тэнцүү. Иймд $|P| = \sum_{i<j} n_{ij}$ болох тул $\binom{2n}{2}N \geq |P|$.

Кошийн тэнцэл бишээр

$$\sum_k n_k^2 \geq \frac{(\sum_k n_k)^2}{2n} = \frac{(2n+1)^2 n}{2}$$

байх учраас

$$\binom{2n}{2}N \geq |P| \geq \frac{1}{4}((2n+1)^2 n - 2(2n^2 + n)).$$

Иймд $4N \geq 2n + 1$ болох тул $4N \geq 2n + 2$. Үүгээр бодлого бодогдов.

2 аргаар тооцох олонлогийг зөв тодорхойлсон тохиолдолд 2 оноо.

a) үнэлгээ 2 оноо.

b) үнэлгээ 1 оноо

Бодлого ББ-А1. $\overline{ABCABCBBB}$ тоо нь 1-ээс 17 хүртэлх бүх тоонд хуваагддаг байх бүх ялгаатай A, B, C цифрүүдийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодолт. $n = \overline{ABCABCBBB}$ гэе. n тоо 5-д хуваагдах тул $B = 5$ эсвэл 0 байна. Мөн n тэгш тоо тул $B = 0$ болно. n тоо 9-д хуваагдах тул $2(A + C)$ тоо 9-д хуваагдана. Эндээс $A + C$ нь 9-д хуваагдана. n тоо 16-д хуваагдах тул $C000$ тоо 16-д хуваагдах ёстой. Эндээс C тэгш байх ёстой. Иймд $A = 7$, $C = 2$ эсвэл $A = 5$, $C = 4$ эсвэл $A = 3$, $C = 6$ эсвэл $A = 1$, $C = 8$ байх боломжуудтай. Эндээс 108108000, 306306000, 504504000, 702702000 гэсэн тоонуудаас 17-д хуваагдах нь 306306000 тоо л юм.

$B = 0$ гэж гаргавал 1 оноо
$A + C$ тоо 9-д хуваагдана гэж харуулбал 1 оноо
C тэгш харуулбал 1 оноо

Бодлого ББ-А2. Аль ч мөр, аль ч багана ба хоёр диагоналийн дагуух тоонуудын нийлбэр ижил байхаар нүд бүрт нь натурал тоо бичигдсэн 3×3 хэмжээтэй квадратыг шидэт квадрат гэдэг. Шидэт квадратын хоёр тоо зурагт дүрсэлсэн байдлаар өгөгджээ. Хаа нэгтээ 9 бичигдэхээр шидэт квадратыг гүйцээж бөглө (бүх боломжит байдлаар).

	11	
		5

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодолт. 7-р ангийн 1-р бодлоготой адил.

Бодлого ББ-А3. $n \times n$ хэмжээтэй хүснэгтийн зүүн дээд булангаас баруун доод булан хүртэлх диагональ дээр орших нүд бүрийн хувьд уг нүдийг агуулах мөр баганад ижил тоо байдаггүй байхаар а) $n = 15$, б) $n = 16$ үед $1, 2, \ldots, 2n - 1$ тоонуудыг байрлуулж болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодолт. Хариу: а) болохгүй б) болно.

а) Хүснэгтийн багануудаа зүүнээс баруун $1, 2, \ldots, 15$, мөрнүүдээ дээрээс доош $1, 2, \ldots, 15$ гэж дугаарлая. Мөн i-р мөр, j-р баганы огтлолцолд бичигдсэн тоог a_{ij} гэе. Мөн $1 \le i \le 15$ үед $S_i = a_{1i} + a_{2i} + \cdots + a_{15i} + a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{i15} - a_{ii}$ нийлбэрийг тэмдэглэе. Энэ нийлбэрт a_{ii} тоо нэг л удаа нэмэгдэнэ. S_i бүр $1, 2, \ldots, 29$ гэсэн тоонуудыг нэг удаа агуулах бөгөөд $S_1, S_2, \ldots, S_{15}$ гэсэн 15 ширхэг нийлбэр байх тул $S_1 + S_2 + \cdots + S_{15}$ нийлбэрт тоо бүр сондгой удаа байна. Нөгөө талаас $i \neq j$ байх i, j-ийн хувьд a_{ij} элемент S_i, S_j хоёуланд нь нэмэгдэнэ. Диагонал дээр бичигдэхгүй тоо $1, 2, \ldots, 29$ дундаас олдох бөгөөд тэр тоо нийт нэмэгдэхүүнд тэгш удаа орох болж зөрчил үүснэ. Иймд болохгүй.

б) 8-р ангийн 4-р бодлоготой төстэйгээр байгуулагдана.

Бодлого ДБ-А1. $n \ge 2$, $k \ge 2$ гэе. $a_1, \ldots, a_n \ge 0$ тоонуудын арифметик дунджийг A гэвэл

$$2^{k-1}\left(|a_1 - A|^k + \cdots + |a_n - A|^k\right) \le \left(|a_1 - A| + \cdots + |a_n - A|\right)^k$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. $y_1, \ldots, y_l \ge 0$ ба $z_1, \ldots, z_m \ge 0$ хувьд $y_1 + \cdots + y_l = z_1 + \cdots + z_m = B$ гэе. Энэ үед

$$(y_1^k + \cdots + y_l^k) + (z_1^k + \cdots + z_m^k) \le ((y_1 + \cdots + y_l)^k + (z_1 + \cdots + z_m)^k = 2B^k$$

болно. Эндээс бодлого хялбар мөрдөнө. Зөвхөн $(A + a, A - a, A, A, \ldots, A)$ хэлбэртэй дарааллын сэлгэмэл дээр тэнцэтгэл биелнэ.

Тэнцэтгэл биелэх нөхцөлийг олоогүй бол -1 оноо.

Бодлого ДБ-А2. $n \geq 2$ гэе. 1, 2, ..., n дугаартай n зогсоол дээр 1, 2, ..., n дугаартай n машиныг байрлуулав. Машин бүрийн дугаараас уг машин зогссон зогсоолын дугаарыг хасахад гарах n ялгавар бүгд ялгаатай байвал энэ байрлуулалтыг *зөв* гэж нэрлэе. Нийт зөв байрлуулалтын тоо сондгой гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. i дугаартай зогсоолыг $n+1-i$ гэж шинээр дугаарлахад зогсоолууд мөн л 1, $2, \ldots, n$ тоогоор дугаарлагдана. Зөв байрлуулалтын хувьд машин бүрийн дугаар дээр уг машин зогссон зогсоолын шинэ дугаарыг нэмэхэд гарах n нийлбэр бүгд ялгаатай байна. Учир нь k дугаартай i зогсоолд зогссон машины шинэ зогсоолын дугаар ба машины дугаарын нийлбэр $n+1+(k-i)$ юм.

Иймд машины болон зогсоолын дугаарын нийлбэрүүд бүгд ялгаатай байх байрлалын тоог сондгой гэж үзүүлэхтэй манай бодлого ижил юм. Энэ чанартай байрлалыг цаашид *зөв* гэе. i дугаартай зогсоолд x_i дугаартай машин зогссон байрлалыг $(x_1, \ldots, x_n)$ гэж тэмдэглэе. $(1, \ldots, n)$ байрлал зөв учраас ямар нэг i дугаарын хувьд $x_i \neq i$ байх зөв байрлалын тоог тэгш гэж үзүүлэхэд хангалттай.

$(x_1, \ldots, x_n)$ байрлал өгөгдсөн үед x_i дугаартай зогсоолд i дугаартай машиныг зогсоох замаар шинэ байрлал байгуулья. Хэрэв анхны байрлал зөв бол шинэ байрлал мөн зөв байна. Одоо энэ хоёр байрлал ялгаатай гэдгийг үзүүлье. $(x_1, \ldots, x_n)$ зөв учраас $x_i \neq i$ байх ямар нэг i дугаар олдоно. Энэ байрлалын i дугаартай машин y_i дугаартай зогсоолд зогссон гэвэл $x_i \neq y_i$ байна. Эсрэг тохиолдолд $i + x_i = y_i + i$ болж зөрчил гарна. Шинээр байгуулсан зөв байрлалын i дугаартай зогсоолд y_i дугаартай машин зогсох тул $(x_1, \ldots, x_n)$-с ялгаатай. Үүгээр бодлого бодогдов.

Бодлого ДБ-А3. ABC гурвалжныг багтаасан тойрог ω ба $\measuredangle B > \measuredangle C$ гэе. ω тойргийн A цэгийг агуулах BC нумын дундаж цэгийг T ба ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төвийг I гэе. ω тойрог дотор орших E цэгийн хувьд $AE \parallel BC$ ба $\measuredangle AEI = 90^\circ$ байг. TE шулууны ω тойргийг огтлох шинэ цэг нь P ба $\measuredangle B = \measuredangle IPB$ бол $\measuredangle A$ өнцгийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодолт. ω тойргийн төв нь O ба TM нь ω тойргийн диаметр байг. PI шулууны ω тойргийг огтлох шинэ цэгийг Q гэе. Тэгвэл M нь BC нумын дундаж цэг байх ба A, I, M нэг шулуун дээр оршино. $AE \parallel BC$ ба $\angle AEI = 90^\circ$ гэдгээс $IE \perp BC$ байна. Мөн $TM \perp BC$ тул $IE \parallel TM$ болно.

Иймд $\angle AIE = \angle AMT = \angle APT$ гэдгээс A, P, I, E нэг тойрог болно. Эндээс $\angle APQ = \angle API = 180^\circ - \angle AEI = 90^\circ$ буюу A, O, Q нэг шулуун дээр оршино. Иймд

$$\angle BPI = \angle BPQ = \angle BAQ = 90^\circ - \angle ACB$$

тул $\angle B = \angle BPI = 90^\circ - \angle ACB$ буюу $\angle B + \angle C = 90^\circ$ гэдгээс $\angle A = 90^\circ$ байна.