Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
II даваа, II өдөр: 2019 оны 3 сарын 29

Бодлого IX-Б1. Аль ч таван тооных нь нийлбэр үлдсэн хоёр тоондоо хуваагддаг 7 натурал тоо өгөгдсөн бол эдгээр тоонууд дотор хамгийн олондоо хэдэн ялгаатай тоо байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. Хариу: 2.

1, 1, 1, 1, 1, 1, 5 тоонууд бодлогын нөхцөл хангах тул 2 ялгаатай тоотой жишээ олдоно. Одоо 2-оос хэтрэхгүй гэж харуулъя. Тоонуудаа $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_7$ гэе.

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ ба $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ нийлбэрүүд a_7-д хуваагдах тул $a_6 - a_1$ ялгавар a_7-д хуваагдана. $a_6 - a_1 < a_7$ гэдгээс $a_1 = a_6$ болно. Иймд $a_1 = \cdots = a_6$ байна.

Бодлого IX-Б2. $AC = CB$ байх ABC адил хажуут гурвалжны AB суурь дээр M, N цэгүүдийг $2\measuredangle MCN = \measuredangle ACB$ байхаар сонгов. AM, MN, NB хэрчмүүд ямар нэг гурвалжны талууд болно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. ACB гурвалжны гадна A' цэгийг $MA = A'B$, $MC = A'C$, $\angle AMC = \angle BA'C$ байхаар авъя. ТӨТ шинжээр $\triangle AMC = \triangle BA'C$ болно. Өгсөн нөхцөлөөс $\angle NCA' = \angle NCB + \angle BCA' = \angle NCB + \angle ACM = \angle ACB - \angle MNC = \angle MNC$ болно. Эндээс $MC = CA'$, $\angle MCN = \angle BCA'$, $MC = CA'$ тул ТӨТ шинжээр $MN = BA'$ болно. AM, MN, NM хэрчмүүдээр гурвалжин байгуулж болох нь батлагдав.

Бодлого IX-Б3. 2019-с хэтэрдэггүй 1515 ширхэг ялгаатай натурал тоо өгөгдөв. 3 оронтой ямар ч тоог хоёр өгөгдсөн тооны ялгавар хэлбэртэй бичиж чадахыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. $100 \le N < 1000$ нь гурван оронтой тоо болог. Үлдэгдэлтэй хуваах дүрмээр $2019 = 2Np + r, \quad 0 \le r < 2N$ гэж бичье. $2N < 2000$ тул $p \ge 1$ байна. Иймд $2019 < 2Np + 2N \le 4Np$ байх ба эндээс $Np > 504$ буюу

$$Np + r = 2019 - Np < 1515 \qquad (\diamond)$$

байна. Одоо $A = \{1, 2, \ldots, 2Np\}$, $B = \{2Np + 1, \ldots, 2019\}$ гээд A олонлогийг Np ширхэг олонлогт дараах байдлаар хуваая. $1 \le i \le N$ ба $0 \le j \le p - 1$ хувьд

$$A_{ij} = \{2jN + i, (2j + 1)N + i\}$$

гэвэл A нь A_{ij} олонлогуудын үл огтлолцох нэгдэл болно.

$\{1, 2, \ldots, 2019\} = A \cup B$ ба B олонлог r элементтэй тул өгөгдсөн 1515 тооноос ядаж $1515 - r$ нь A олонлогт агуулагдана. (**??**)-с $Np < 1515 - r$ тул Дирихлейн зарчмаар ямар нэг A_{ij} олонлог 2 өгөгдсөн тоо агуулах ба энэ 2 тооны ялгавар N байна.

$A_k = \{k, N + k\}, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2019 - N$ олонлогуудыг ажиглах замаар $N \ge 504$ тохиолдлыг бодсон бол 4 оноо.

Бодлого X-Б1. O_1 төвтэй ω_1 тойрог нь O_2 төвтэй ω_2 тойргтой P ба Q цэгүүдэд огтлолцоно. O_1P шулуун ω_2 тойргийг N цэгт, O_2P шулуун ω_1 тойргийг M цэгт тус тус дахин огтлох бол M, O_1, Q, O_2, N цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодолт. $O_1P = O_1Q$ ба $O_2P = O_2Q$ гэдгээс $\triangle O_1PO_2 \cong \triangle O_1QO_2$ тул $\angle O_1PO_2 = \angle O_1QO_2$ байна. Мөн $\angle O_1NO_2 = \angle NPO_2 = 180^\circ - \angle O_1PO_2 = 180^\circ - \angle O_1QO_2$ тул O_1, Q, O_2, N цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Яг адил M, O_1, Q, O_2 цэгүүд нэг тойрог дээр орших батлагдана.

$\angle O_1PO_2 = \angle O_1QO_2$ тэнцэлд 2 оноо.

$\angle O_1NO_2 = \angle NPO_2$ тэнцэлд 2 оноо.

O_1, Q, O_2, N цэгүүд нэг тойрог гэдэг дээр 2 оноо.

Сүүлийн хэсэгт 1 оноо.

Бодлого X-Б2. 1, 2 цифрээр бичигдэх 15 оронтой 999-д хуваагдах too хэд байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. Хариу: 125.

999-д хуваагдах 15 оронтой тоог $A = \overline{a_{15}a_{14}\dots a_1}$ гэж тэмдэглэе. Ямар ч эерэг бүхэл n тооны хувьд $10^{3n} - 1 : 10^3 - 1 = 999$

$$A \equiv \overline{a_{15}a_{14}a_{13}} + \overline{a_{12}a_{11}a_{10}} + \overline{a_9a_8a_7} + \overline{a_6a_5a_4} + \overline{a_3a_2a_1} \pmod{999} \qquad (*)$$

Сүүлийн гурван оронтой 5-н тооны нийлбэр 1110-аас бага, 555-аас их бөгөөд 999-д хуваагдах учраас уг нийлбэр 999 болно. Иймд

$$a_{15} + a_{12} + a_9 + a_6 + a_3 = a_{14} + a_{11} + +a_8 + a_5 + a_2 = a_{13} + a_{10} + a_7 + a_4 + a_1 = 9$$

болох тул дээрх 3 нийлбэр тус бүрт нэг ширхэг 1, 4 ширхэг 2 цифр орно. Ингэж бичигдэх 15 оронтой тоо бүр 999-д хуваагдах нь (**??**)-ээс тодорхой юм. 3-т хуваагдах (мөн 1 үлдэгдэл, 2 үлдэгдэл өгөх) дугаартай аль нэг цифрийг 1 гэж сонгох боломж 5 учраас нийт 1, 2 цифрээр бичигдэх 15 оронтой 999-д хуваагдах тоонуудын тоо 125 болно.

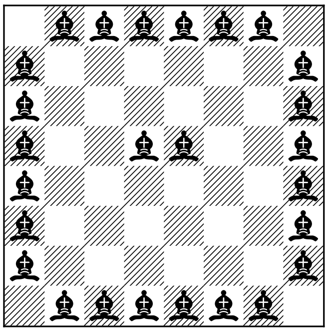
Бодлого X-Б3. Шатрын хөлөг дээр тэмээ бүр яг хоёр тэмээ идэж чаддаг байхаар хамгийн олондоо хэдэн тэмээ байрлуулж болох вэ?

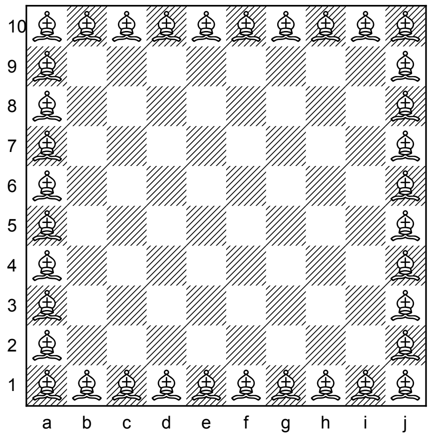
(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Хариу: 26.

26 тэмээ нөхцөл хангахаар байрлуулж болно. Одоо энэ нь дээд зааг болохыг харуулъя. Шатрын хөлгөө 10×10 болгож томруулж ирмэгээр нь 36 цагаан тэмээ байрлуулъя. $b2$-$i9$-д байрлах 8×8 хөлөг дотор хар тэмээнүүд нөхцөл хангахаар байрлуулсан гэе. Хар тэмээ болгон яг 2 цагаан тэмээ идэж чадна. Нөгөө талаас $a1$, $b1$, $c1$, $h1$, $i1$, $j1$ дээрх цагаан тэмээг хамгийн олондоо 1 хар тэмээ, $d1$, ..., $g1$ дээрх цагаан тэмээг хамгийн

олондоо 2 хар тэмээ идэж чадна. Бусад цагаан тэмээний хувьд мөн ижил. Иймд хамгийн олондоо $(5 \cdot 1 + 4 \cdot 2) \cdot 4/2 = 26$ хар тэмээ байна.





Бодлого XI-Б1. O төвтэй ω тойргийн EF диаметр авъя. ω тойргийн A ба B цэгүүд EF шулууны нэг талд оршдог ба EF диаметр дээр орших P цэгийн хувьд $\measuredangle APE = \measuredangle BPF$ бол A, O, P, B цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодолт. AP шулууны ω тойргийг огтлох шинэ цэгийг C гэе. Тэгвэл $\angle BPF = \angle APE = \angle CPF$ гэдгээс B ба C цэгүүд нь EF шулууны хувьд тэгш хэмтэй цэгүүд байна. Иймд $\triangle BPO \cong \triangle CPO$ болох ба $OA = OC$ гэдгээс $\angle OBP = \angle OCP = \angle OAP$ тул A, O, P, B цэгүүд нэг тойрог дээр оршино.

$\angle OCP = \angle OAP$ тэнцэлд 2 оноо.

$\angle OBP = \angle OCP$ тэнцэлд 4 оноо.

Сүүлийн хэсэгт 1 оноо.

Бодлого XI-Б2. Сөрөг биш a, b, $c \geq 0$ тоонуудын хувьд

$$a + b + c = a^3 + b^3 + c^3 = 2$$

бол $\max\{a, b, c\}$ тооны авч болох хамгийн их утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Хариу: $\sqrt{5} - 1$.

$M = \max\{a, b, c\}$ гэе. Эхлээд $M \leq \sqrt{5} - 1$ гэж харуулъя.

$$\frac{2-c}{2} = \frac{a+b}{2} \leq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2-c^3}{2}}$$

тул $4(2 - c^3) - (2 - c)^3 \geq 0$ байна. Эндээс $3c(c^2 + 2c - 4) \leq 0$ буюу $c \leq \sqrt{5} - 1$ болно. Мөн ижлээр a, $b \leq \sqrt{5} - 1$ тул $M \leq \sqrt{5} - 1$ байна.

Эцэст нь $(a,b,c) = \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \sqrt{5}-1\right)$ гурвал бодлогын нөхцөл хангах тул $M = \sqrt{5}-1$ утга авна.

Бодлого XI-Б3. 1, 2 цифрүүдээр бичигдэх $\underbrace{9\ldots9}_{2019}$ тоонд хуваагдах хамгийн бага натурал тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. Хариу: $\underbrace{1\ldots1}_{2019}\underbrace{2\ldots2}_{2019}\underbrace{2\ldots2}_{2019}\underbrace{2\ldots2}_{2019}\underbrace{2\ldots2}_{2019}$.

$n = 2019$ ба $B = \underbrace{1\ldots1}_{n}$ гэж тэмдэглэе. Эхлээд $9B$-д хуваагдах тооны цифрүүдийн нийлбэр $9n$-с багагүй гэдгийг үзүүлье. A нь 1 ба 2 цифрээр бичигдэх $9B$-д хуваагдах тоо болог. A тооны n-д хуваахад k $(0 \le k < n)$ үлдэгдэл өгөх дугаартай цифрүүдийн нийлбэрийг S_k гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $A \equiv \sum_{k=0}^{n-1} 10^k S_k \pmod{9B}$. Иймээс

$$A \equiv \sum_{k=0}^{n-2} \big(S_k - S_{n-1}\big)10^k \equiv 0 \pmod{B}.$$

A тооны оронгийн тоог m гэвэл S_k нь $[m/n]+1$-ээс ихгүй, $[m/n]$-ээс багагүй тооны цифрүүдийн нийлбэр болно. Хэрэв A тооны цифрүүдийн нийлбэр $9n$-с ихгүй гэвэл түүний оронгийн тоо $9n$-ээс бага байна. Иймд $m < 9n$ буюу $[m/n] < 9$ болох тул ямар ч k дугаарын хувьд

$$|S_k - S_{n-1}| \le 2([m/n]+1) - [m/n] \le 10$$

биелнэ. Иймд

$$\sum_{k=0}^{n-2} |S_k - S_{n-1}| 10^k \le 10 \sum_{k=0}^{n-2} 10^k < B$$

болох учраас (1)-ээс $S_{n-1} = S_k$ $(\forall k)$ болно. A тооны цифрүүдийн нийлбэр nS_0 болох ба улмаар

$$\sum_{k=0}^{n-1} 10^k S_k = S_0 B \le 9B$$

болох тул $A \equiv 0 \pmod{9B}$ гэдгээс $S_0 = 9$ болно. Бид хамгийн бага тоог хайж буй тул $S_0 = 1+2+2+2+2$ гэж үзэхэд явцуурахгүй. Иймд $m = 5n$ болох тул хариунд буй тоо хамгийн бага нь байна.

Хариуг зөв олж хуваагдлыг баталсан тохиолдолд 1 оноо.

Бодлого XII-Б1. K цэгт гадаад байдлаар шүргэлцэх ω_1 ба ω_2 тойргуудын төвүүд O_1 ба O_2 байв. O_1O_2 шулуун ω_1 ба ω_2 тойргуудыг K цэгээс ялгаатай A ба B цэгүүдэд огтолно. AB хэрчмийн дундаж цэг дээр төвтэй тойрог ω_1 ба ω_2 тойргуудыг дөрвөн цэгээр огтлоно. Энэ дөрвөн цэгт оройтой дөрвөн өнцөгтийн диагоналиуд K цэгт огтлолцоно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодолт. Өгөгдсөн нөхцлүүдээс

$$JO_2 = \frac{AB}{2} - O_2B = O_1K + O_2K - O_2B = O_1K = O_1M$$

байна. Яг адилаар $O_1J = O_2N$ болно. Мөн $JM = JN$ тул $\triangle O_1MJ \cong \triangle O_2JN$ байна. Иймд $\angle MO_1K = \angle NO_2K$ гэдгээс $\angle O_1KM = \angle O_2KN$ буюу M, N, K цэгүүд нэг шулуун дээр оршино.

$JO_2 = O_1M$ ба $O_1J = O_2N$ тэнцэлд 4 оноо.

$\angle O_1KM = \angle O_2KN$ тэнцэлд 2 оноо.

Сүүлийн хэсэгт 1 оноо.

Бодлого XII-Б2. $n \geq 2$ гэе. n зэргийн бодит $P(x)$ олон гишүүнт ба $m \geq 1$ урттай тогтмол биш a_1, ..., a_m арифметик прогресс $P(a_1)$, ..., $P(a_m)$ дараалал мөн тогтмол биш арифметик прогресс болохоор олддог байх m тооны хамгийн их утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Хариу: $m = n$.

$P(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-n) + x$ олон гишүүнт ба $a_1 = 1$, ..., $a_n = n$ тогтмол биш арифметик прогрессын хувьд $P(1) = 1$, ..., $P(n) = n$ дараалал мөн тогтмол биш арифметик прогресс болно. Иймд $m = n$ байх жишээ олдоно.

Одоо $m \leq n$ гэж баталъя. n зэргийн $P(x)$ олон гишүүнт ба тогтмол биш a_1, ..., a_m арифметик прогресс бодлогын нөхцөл хангадаг гэе. Энд $d = a_2 - a_1 \neq 0$ ба $D = P(a_2) - P(a_1)$ гэвэл $1 \leq k \leq m$ хувьд $a_k = d(k-1) + a_1$ ба $P(a_k) = D(k-1) + P(a_1)$ байна.

Одоо $r = D/d$ гэж тэмдэглээд $Q(x) = P(x) - (x-a_1)r - P(a_1)$ олон гишүүнтийг авч үзье. $1 \leq k \leq m$ хувьд $Q(a_k) = P(a_k) - P(a_1) - (a_k - a_1)r = D(k-1) - d(k-1)r = 0$ болно. Иймд a_1, ..., a_m нь n зэргийн $Q(x)$ олон гишүүнтийн ялгаатай язгуурууд болох тул $m \leq n$ байна.

Бодлого XII-Б3. $n^m = m^n + m + n$ байх бүх натурал тоон (n, m) хосыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Хариу: $(n, m) = (2, 5)$.

$(n, m) = (2, 5)$ шийд болох нь илт тул өөр шийдгүй гэж харуулъя. Хоёр бодолт хийе.

Индукц ашигласан бодолт.

$n = 1$ үед $1^m < m^1 + m + 1$ тул шийдгүй.

$n=2$ үед $m\le 4$ шийдгүй болохыг шалгахад төвөггүй. Индукцээр $m\ge 6$ хувьд

$$2^m > m^2+m+2 \tag{†}$$

гэж харуулъя. $m=6$ үед $2^6=64>44=6^2+2+6$ үнэн ба $m\ge 6$ хувьд үнэн гэвэл

$$\begin{aligned}2^{m+1} &\ge 2\cdot(m^2+m+2)\\ &= m^2+m^2+2m+4\\ &> m^2+3m+4\\ &=(m+1)^2+(m+1)+2\end{aligned}$$

тул $m+1$ хувьд үнэн. Иймд $n=2$, $m\ne 5$ шийдгүй.

$n\ge 3$ гээд ахиад тохиолдолд салгая.

$m=1$ үед $n^1<1^n+1+n$ тул шийдгүй.

$m=2$ үед дурын $n\ge 1$ хувьд $n^2<2^n+2+n$ байна. Үнэхээр, $n\le 5$ хувьд шалгахад төвөггүй ба $n\ge 6$ хувьд (**??**)-с

$$2^n+2+n>2^n>n^2+n+2>n^2$$

байна. Иймд $m=2$ үед шийдгүй.

$m\ge 3$ гэе. $m>n\ge 3$ хувьд

$$n^m>m^n+m+n. \tag{‡}$$

гэж харуулъя. Эхлээд $e=\sup_{n\ge 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2.72<\frac{74}{27}$ болохыг санаярай. $m=n+1$ үед

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^n}((n+1)^n+(n+1)+n) &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\frac{2}{n^{n-1}}+\frac{1}{n^n}\\ &\le e+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^3}\\ &<3\\ &\le n\end{aligned}$$

тул үнэн. Одоо $m>n$ хувьд үнэн гэээд $m+1$ тохиолдлыг авч үзье. Энд

$$n\ge 3\ge e\ge\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\ge\left(1+\frac{1}{m}\right)^n$$

болохыг анзаарвал

$$n^{m+1}>n(m^n+m+n)>(m+1)^n+n(m+n)>(m+1)^n+(m+1)+n$$

болно. Индукцээр дурын $m>n\ge 3$ хувьд үнэн.

Эцэст нь $n\ge m\ge 3$ гэе. $n=m$ үед илт шийдгүй ба $n>m\ge 3$ үед (**??**)-с

$$m^n+m+n>m^n>n^m+n+m>n^m$$

болох тул шийдгүй.

Илтгэгч функцийн чанар ашигласан бодолт. (??), (??) тэнцэтгэл бишүүдийг баталъя.

(??)-ийн баталгаа. $m \geq 6$ тул

$$2^m = (1+1)^m > 1 + m + \frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m-1)(5-2)}{6} + m + 1 = m^2 + m + 2$$

байна.

(??)-ийн баталгаа. $k = m - n \geq 1$ ба $r = \dfrac{k}{n} > 0$ гэвэл $e^r \geq 1 + r + \dfrac{r^2}{2}$ тул $e^k = e^{rn} \geq \left(1 + r + \dfrac{r^2}{2}\right)^n \geq (1+r)^n + n(1+r)^{n-1}\dfrac{r^2}{2}$ болох ба эндээс $e^k \geq (1+r)^n + n(1+r)^2\dfrac{r^2}{2}$ байна. Иймд

$$n^k \geq 3^k > e^k \geq \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n + \frac{(n+k)^2k^2}{2n^3}$$

болох ба $n^{n-3}(n+k)^2k^2 \geq (n+k)^2 \geq (n+k)n + nk \geq 4n + 3k > 2(2n+k)$ тул

$$n^{n+k} > (n+k)^n + (n+k) + n$$

байна.

$n = 1$ эсвэл $m = 1$ тохиолдлыг шийдэхэд оноо өгөхгүй, бас баталгаагүйгээр энэ үед шийдгүй гэж хэлэхэд оноо хасахгүй.
$n = 2$ тохиолдлыг шийдэхэд 2 оноо ($m = 2$ тохиолдлыг шийдэхэд 1 оноо).
$m > n \geq 3$ тохиолдлыг шийдэхэд 4 оноо. ($n > m \geq 3$ тохиолдлыг шийдэхэд 3 оноо).
Бүтэн бодолт 7 оноо.

Бодлого ББ-Б1. Ах, дүү 2 гэрээсээ сургууль руугаа зэрэг гарч дүү нь ахаасаа 39 минутын дараа сургууль дээрээ очив. Ахын хурдыг 40 хувиар багасгаж, дүүгийн хурдыг 25 хувиар ихэсгэхэд тэд зэрэг сургууль дээрээ очиж чадах байв. Дүү сургууль руугаа хэдэн минут алхсан бэ?

Бодолт. Хариу: 75минут

Дүүгийн хурдыг x, ахын хурдыг y, сургууль болон гэр хоорондын замыг S гэе. $x < y$ бөгөөд өгсөн нөхцөлүүдийг систем тэгшитгэл болгон бичвэл:

$$\begin{cases} \dfrac{S}{y} + 39 = \dfrac{S}{x} \\ \dfrac{S}{0.6y} = \dfrac{S}{1.25x} \end{cases}$$

болно. $0.6y = 1.25x$ гэдгээс $12y = 25x$ болно. Эхний нөхцөлийг хувиргавал $39 = S\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right) = S\left(\dfrac{y-x}{yx}\right) = S \cdot \dfrac{12y - 12x}{12yx} = S \cdot \dfrac{13x}{25x^2} = \dfrac{13S}{25x}$ болно. Эндээс $\dfrac{S}{x} = 75$ минут болж дүүгийн гэр сургуулийн хооронд алхсан хугацаа нь гарч байна.

Систем тэгшитгэлээ зөв зохиосон бол 2 оноо.
$12y = 25x$ гэж гаргавал 2 оноо.

Бодлого ББ-Б2. 1, 2 цифрээр бичигдэх 10 оронтой 99-д хуваагдах тоо хэд байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. Хариу: 25.

99-д хуваагдах 10 оронтой тоог $\overline{a_{10}a_9 \dots a_1}$ гэж тэмдэглэе. Энэ тооны цифрүүдийн нийлбэр 10-аас их 20-с бага бөгөөд 9-д хуваагдах тул 18 байна. Иймд 2 ширхэг 1, 8 ширхэг 2 цифрээс бүтсэн тоо байх ёстой болно. 11-д хуваагдах тооны шинжээр

$$a_{10} + a_8 + a_6 + a_4 + a_2 - a_9 - a_7 - a_5 - a_3 - a_1$$

илэрхийлэл 11-д хуваагдна. Энэ илэрхийллийн утга 5-аас бага, -5-аас их байх учраас 0 байхаас өөрцгүй. Иймд сондгой (мөн тэгш) дугаартай цифрүүдийн аль нэг нь 1, бусад нь 2 болно. Ингэж бичигдэх 10 оронтой тоо бүр 9 ба 11 тоонууд харилцан анхны учир 99-д хуваагдана. Аль нэг сондгой (мөн тэгш) дугаартай цифрийг 1 гэж сонгох боломж 5 учраас нийт 1, 2 цифрээр бичигдэх 10 оронтой 99-д хуваагдах тоонуудын тоо 25 болно.

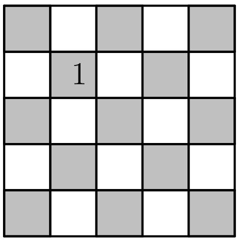
99-д хуваагдах 10 оронтой тооны цифрүүдийн нийлбэр 18 гэдгийг үзүүлэхэд: 1 оноо.
2 ширхэг 1, 8 ширхэг 2 цифрээс бүтсэн тоо гэдгийг үзүүлэхэд: +1 оноо.
Илэрхийллийг тэг гэж үзүүлэхэд: +2 оноо
Сондгой (мөн тэгш) дугаартай цифрүүдийн аль нэг нь 1, бусад нь 2 гэдгийг үзүүлэхэд: +1 оноо.

Бодлого ББ-Б3. Дараалсан 2 тоо хөрш нүдэнд байхаар 2, 3, 4, 5, 6 гэсэн таван тоог дараах хүснэгтэд хэдэн янзаар нэмж бичиж болох вэ? Нэг нүдэнд нэгээс олон тоо бичихгүй.

	1			

Бодолт. Хариу: 94.

Зүүн дээд булангаас хар, цагаанаар шатрын хөлөг шиг будсан гэе. Тэгвэл дараалсан тоонууд хөрш нүдэнд байх тул сондгой тоонууд ижил өнгөтэй нүдэнд, тэгш тоонууд ижил өнгөтэй нүдэнд байрлах болно. Эндээс 1 болон 6-ын тоо өөр өнгөтэй нүдэнд байрлах тул 6-ын тоо хар нүднүүдэд байрлаж чадахгүй бөгөөд зөвхөн цагаан нүдэнд байрлана.



Одоо диагоналаас доош байрлах 6 нүдэнд 6 байрлах үед боломжийг тоолоод 2-оор үржихэд бодлогын хариу гарна. Энэ боломжийг хялбархан

$$3 + 5 + 7 + 12 + 10 + 10 = 47$$

гэдгийг тоолж болох ба иймд нийт хариу 94 болно.

6-н цифрийн байрлаж болох нүднүүдийг зөв тодорхойлсон бол 4 оноо.

Бодлого ДБ-Б1. 2019-н тоог аль ч дараалсан таван a, b, c, d, e тooных нь хувьд $a - b + c - d + e = 55$ байхаар тойрог дээр байрлуулж болдог бол уг тоонуудыг ол.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. Тоонуудаа a_0, a_1, ..., a_{2018} гээд дурын $i \geq 0$ хувьд

$$x_i = a_{i \pmod{2019}} - 55$$

гэж тэмдэглэе. Өгсөн нөхцөлөөс дурын $i \geq 0$ хувьд $x_i - x_{i+1} + x_{i+2} - x_{i+3} + x_{i+4} = 0$ болно. Мөн ижлээр $x_{i+1} - x_{i+2} + x_{i+3} - x_{i+4} + x_{i+5} = 0$ тул $x_{i+5} = -x_i$ байна. Эндээс дурын $k \geq 0$ хувьд $x_{i+5k} = (-1)^k x_i$ болох ба $k = 404$ гэвэл $x_{i+2020} = x_i$ болно. Иймд $x_{i+1} = x_{i+2020} = x_i$ болох тул x_i тогтмол болох ба өгсөн нөхцөлөөс $x_i = 0$ болно. Энэ нь $_0 = a_1 = \cdots = a_{2018} = 55$ гэсэн үг.

Бодлого ДБ-Б2. $n \geq 2$ гэе. n зэргийн бодит $P(x)$ олон гишүүнт ба $m \geq 1$ урттай тогтмол биш a_1, ..., a_m арифметик прогресс $P(a_1)$, ..., $P(a_m)$ дараалал мөн тогтмол биш арифметик прогресс болохоор олддог байх m тооны хамгийн их утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Хариу: $m = n$.

$P(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-n) + x$ олон гишүүнт ба $a_1 = 1$, ..., $a_n = n$ тогтмол биш арифметик прогрессын хувьд $P(1) = 1$, ..., $P(n) = n$ дараалал мөн тогтмол биш арифметик прогресс болно. Иймд $m = n$ байх жишээ олдоно.

Одоо $m \leq n$ гэж баталъя. n зэргийн $P(x)$ олон гишүүнт ба тогтмол биш a_1, ..., a_m арифметик прогресс бодлогын нөхцөл хангадаг гэе. Энд $d = a_2 - a_1 \neq 0$ ба $D = P(a_2) - P(a_1)$ гэвэл $1 \leq k \leq m$ хувьд $a_k = d(k-1) + a_1$ ба $P(a_k) = D(k-1) + P(a_1)$ байна.

Одоо $r = D/d$ гэж тэмдэглээд $Q(x) = P(x) - (x - a_1)r - P(a_1)$ олон гишүүнтийг авч үзье. $1 \le k \le m$ хувьд $Q(a_k) = P(a_k) - P(a_1) - (a_k - a_1)r = D(k-1) - d(k-1)r = 0$ болно. Иймд a_1, ..., a_m нь n зэргийн $Q(x)$ олон гишүүнтийн ялгаатай язгуурууд болох тул $m \le n$ байна.

Бодлого ДБ-Б3. $n^m = m^n + m + n$ байх бүх натурал тоон (n, m) хосыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Хариу: $(n, m) = (2, 5)$.

$(n, m) = (2, 5)$ шийд болох нь илт тул өөр шийдгүй гэж харуулъя. Хоёр бодолт хийе.

Индукц ашигласан бодолт.

$n = 1$ үед $1^m < m^1 + m + 1$ тул шийдгүй.

$n = 2$ үед $m \le 4$ шийдгүй болохыг шалгахад төвөггүй. Индукцээр $m \ge 6$ хувьд

$$2^m > m^2 + m + 2 \tag{$\dagger$}$$

гэж харуулъя. $m = 6$ үед $2^6 = 64 > 44 = 6^2 + 2 + 6$ үнэн ба $m \ge 6$ хувьд үнэн гэвэл

$$\begin{aligned} 2^{m+1} &\ge 2 \cdot (m^2 + m + 2) \\ &= m^2 + m^2 + 2m + 4 \\ &> m^2 + 3m + 4 \\ &= (m+1)^2 + (m+1) + 2 \end{aligned}$$

тул $m + 1$ хувьд үнэн. Иймд $n = 2$, $m \ne 5$ шийдгүй.

$n \ge 3$ гээд ахиад тохиолдолд салгая.

$m = 1$ үед $n^1 < 1^n + 1 + n$ тул шийдгүй.

$m = 2$ үед дурын $n \ge 1$ хувьд $n^2 < 2^n + 2 + n$ байна. Үнэхээр, $n \le 5$ хувьд шалгахад төвөггүй ба $n \ge 6$ хувьд (**??**)-с

$$2^n + 2 + n > 2^n > n^2 + n + 2 > n^2$$

байна. Иймд $m = 2$ үед шийдгүй.

$m \ge 3$ гэе. $m > n \ge 3$ хувьд

$$n^m > m^n + m + n. \tag{$\ddagger$}$$

гэж харуулъя. Эхлээд $e = \sup_{n \ge 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2.72 < \frac{74}{27}$ болохыг саная.

$m = n + 1$ үед

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^n}((n+1)^n + (n+1) + n) &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{2}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^n} \\ &\le e + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} \\ &< 3 \\ &\le n \end{aligned}$$

тул үнэн. Одоо $m > n$ хувьд үнэн гээд $m+1$ тохиолдлыг авч үзье. Энд

$$n \geq 3 \geq e \geq \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \geq \left(1+\frac{1}{m}\right)^n$$

болохыг анзаарвал

$$n^{m+1} > n(m^n+m+n) > (m+1)^n + n(m+n) > (m+1)^n + (m+1) + n$$

болно. Индукцээр дурын $m > n \geq 3$ хувьд үнэн.

Эцэст нь $n \geq m \geq 3$ гэе. $n = m$ үед илт шийдгүй ба $n > m \geq 3$ үед (**??**)–с

$$m^n + m + n > m^n > n^m + n + m > n^m$$

болох тул шийдгүй.

Илтгэгч функцийн чанар ашигласан бодолт. (**??**), (**??**) тэнцэтгэл бишүүдийг баталъя.

(**??**)-ийн баталгаа. $m \geq 6$ тул

$$2^m = (1+1)^m > 1 + m + \frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m-1)(5-2)}{6} + m + 1 = m^2 + m + 2$$

байна.

(**??**)-ийн баталгаа. $k = m - n \geq 1$ ба $r = \dfrac{k}{n} > 0$ гэвэл $e^r \geq 1 + r + \dfrac{r^2}{2}$ тул $e^k = e^{rn} \geq \left(1 + r + \dfrac{r^2}{2}\right)^n \geq (1+r)^n + n(1+r)^{n-1}\dfrac{r^2}{2}$ болох ба эндээс $e^k \geq (1+r)^n + n(1+r)^2\dfrac{r^2}{2}$ байна. Иймд

$$n^k \geq 3^k > e^k \geq \left(1+\frac{k}{n}\right)^n + \frac{(n+k)^2k^2}{2n^3}$$

болох ба $n^{n-3}(n+k)^2k^2 \geq (n+k)^2 \geq (n+k)n + nk \geq 4n + 3k > 2(2n+k)$ тул

$$n^{n+k} > (n+k)^n + (n+k) + n$$

байна.

$n = 1$ эсвэл $m = 1$ тохиолдлыг шийдэхэд оноо өгөхгүй, бас баталгаагүйгээр энэ үед шийдгүй гэж хэлэхэд оноо хасахгүй.
$n = 2$ тохиолдлыг шийдэхэд 2 оноо ($m = 2$ тохиолдлыг шийдэхэд 1 оноо).
$m > n \geq 3$ тохиолдлыг шийдэхэд 4 оноо. ($n > m \geq 3$ тохиолдлыг шийдэхэд 3 оноо).
Бүтэн бодолт 7 оноо.