

БҮЛЭГ 1

Улсын Математикийн 51-р Олимпиадын 3-р даваа

1.1 Бодлогууд

VII анги

A-1. (Б. Батцэнгэл) $1, 2, \dots, 2014, 2015$ тоонуудын заримыг нь улаан өнгөөр, үлдсэнг нь хөх өнгөөр буджээ. Хөх өнгөтэй хамгийн их тоо нь хөх өнгөөр будагдсан тоонуудын тоотой тэнцүү. Улаан өнгөтэй хамгийн бага тоо нь улаан өнгөөр будагдсан тоонуудын тооноос 2 дахин бага байв. Хэдэн тоог улаан өнгөөр будсан бэ?

A-2. (Б. Сандагдорж) 20150326 гэсэн тооны цифрүүдийн байрыг сольж 11-д хуваагддаг хэдэн ялгаатай найман оронтой тоо бичиж болох вэ?

A-3. (А. Ганбат) 1-ээс их натурал a, b тоонууд өгөгджээ. $a + 1$ ба $ab + 1$ тоонуудын хамгийн их ерөнхий хуваагч m бол $2m \leq a + b$ гэж батал.

A-4. (Б. Батцэнгэл) Тус бүр 1 см, 2 см, $\dots$, 199 см, 200 см урттай 200 савхыг 50 ширхэг уутанд хувааж хийжээ. Аль нэг уутанд орсон 3 савхаар гурвалжин байгуулж болохыг батал.

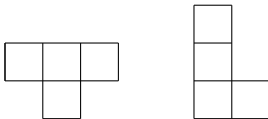
VIII анги

A-1. (А. Ганбат) Бат $\overline{abcab}$ хэлбэртэй 11-д хуваагддаг 5 оронтой тоонуудыг тоолжээ. Цэцэг $\overline{abcba}$ хэлбэртэй 11-д хуваагддаг 5 оронтой тоонуудыг тоолжээ. Хэний тоолсон тоо хэдээр олон бэ?

A-2. (Б. Батцэнгэл) ABC гурвалжны BC тал дээр D цэг өгөгджээ. $BC = 2 \cdot AB = 4 \cdot BD$ бол $AC = 2 \cdot AD$ гэж батал.

A-3. (А. Ганбат) Нэгээс их ялгаатай натурал a, b, c, d тоонууд өгөгджээ. $a + 1, ab + 1, abc + 1, abcd + 1$ тоонуудын хамгийн их ерөнхий хуваагч m бол $7m + 2 \leq a + b + c + d$ гэж батал.

A-4. (Б. Батцэнгэл) 10×10 хэмжээтэй квадратыг 4 нүдтэй зурагт үзүүлсэн "Т" ба "L" хэлбэртэй дүрсүүдэд хуваав (дүрсүүдийг яаж ч эргүүлж болно). "L" хэлбэртэй дүрсийн тоо хамгийн олондоо хэд байж болох вэ?



IX анги

A-1. (Н. Аргилсан) $ABCD$ тэгш өнцөгт дотор P цэгийг $\angle DAP + \angle BCP = 90^\circ$ байхаар сонгож авав. $\angle DPA + \angle BPC = 180^\circ$ гэдгийг батал.

A-2. (Т. Гансүх) Натурал $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ тоонуудын хувьд $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2015} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2015}$ бол эдгээр тоонуудын хамгийн их нь хамгийн ихдээ хэд байж болох бэ?

A-3. (Т. Гансүх) Тойрог хэлбэрээр байрлуулсан 10 ижилхэн сандлыг 4 өнгийн будгаар будах болжээ. Ижил өнгөтэй зэрэгцээ байрлах хос сандлын тоо яг 2 байхаар хичнээн ялгаатай байдлаар будаж болох вэ?

B-1. (Б. Батцэнгэл) Дараалж бичигдсэн ямар ч хоёр тооны нийлбэр бүтэн квадрат тоо байхаар ялгаатай 51 ширхэг анхны тоог нэг тойрог дээр бичиж болох уу?

B-2. (М. Итгэл) $\frac{a^2 + b}{b^2 - a}$ ба $\frac{b^2 + a}{a^2 - b}$ тоонууд бүхэл тоо байх бүх натурал a, b тоонуудыг ол.

B-3. (Б. Батцэнгэл) Адил хажуут биш ABC гурвалжны BC тал дээр D цэгийг, AC тал дээр E цэгийг $AE = BD$ байхаар сонгон авчээ. AB, DE хэрчмүүдийн дундаж перпендикуляр шулуунуудын огтлолцлын цэг ABC гурвалжныг багтаасан тойрог дээр оршихыг батал. (Хэрчмийн дундаж цэгийг дайрсан уг хэрчимд перпендикуляр шулууныг уг хэрчмийн дундаж перпендикуляр шулуун гэж нэрлэнэ.)

Х анги

А-1. (Б. Батцэнгэл) Сонгогдсон тоонуудаар коэффициентээ хийсэн ямар ч квадрат гурван гишүүнт нь бодит язгуургүй байхаар 1, 2, ..., 2014, 2015 тоонуудаас хамгийн олондоо хэдэн ширхэг тоог сонгож болох вэ?

А-2. (Б. Баяржаргал) $ABCD$ тэгш өнцөгтийн AD тал дээр $DM = 2 \cdot AM$ байх M цэг авчээ. CM шулуун тэгш өнцөгтийг багтаасан тойрогийг K цэгээр огтолно. BK шулуун нь AD талыг P цэгт огтолдог бөгөөд $DP = 4 \cdot AP$ бол $AD : AB$ харьцааг ол.

А-3. (Б. Баяржаргал) $n^{14} + n^4 + 1$ тоо нь анхны тооны ямар нэгэн зэрэг байх бүх натурал n тоог ол.

Б-1. (Б. Батцэнгэл) Дараалж бичигдсэн ямар ч хоёр тооны нийлбэр бүтэн квадрат тоо байхаар ялгаатай 51 ширхэг анхны тоог нэг тойрог дээр бичиж болох уу?

Б-2. (Б. Батцэнгэл) ABC гурвалжны дотор P цэгийг $\angle ABP = \angle ACP$ байхаар сонгон авчээ. $PBQC$ нь параллелограмм байхаар Q цэг сонгон авахад $\angle BAQ = \angle CAP$ байхыг батал.

Б-3. (В. Адъяасүрэн) $b > a > 0$ бодит тоонуудын хувьд $1 + ab \leq \sqrt{3}(b - a)$ бол

$$(1 + a^2)(1 + b^2) \geq 4a(a + b)$$

болохыг батал.

ХІ анги

А-1. $(x + 2)(x + 1)P(x) - x(x - 1)P(x + 2)$ ялгавар нь тогтмол тоо байх бодит коэффициенттэй бүх $P(x)$ олон гишүүнтийг ол.

А-2. AD диаметртай тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн AC , BD диагоналиуд E цэгт огтлолцоно. E цэгт төвтэй BC шулууныг шүргэдэг тойрогт B , C цэгүүдээс шүргэгч татав. Энэ шүргэгчүүдийн огтлолцлын цэг AD шулуун дээр оршихыг батал.

А-3. Хавтгайд бүгд нэг шулуун дээр үл орших 2015 цэгүүдээс бүрдэх M олонлог өгөгдөв. M олонлогийн дор хаяж хоёр цэгийг дайрсан дурын шулуун дээр орших M олонлогийн цэгүүд дээр бичигдсэн тоонуудын нийлбэр 0 байхаар M олонлогийн цэг бүр дээр бодит тоо тэмдэглэв. Тэгвэл M олонлогийн цэг бүр дээр 0 тэмдэглэгдсэн гэж батал.

Б-1. Сөрөг биш бүхэл тоонуудын олонлогийг $\mathbb{N}_0$ гэж тэмдэглэе. Дурын $n, m \in \mathbb{N}_0$ тоонуудын хувьд $nf(m) + mf(n) = (n + m)f(n^2m^2)$ байх бүх $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ буулгалтыг ол.

Б-2. Зөв 2015-өнцөгтийн оройнууд дээр бүхэл тоонууд бичсэн байв. Нэг удаагийн үйлдлээр олон өнцөгтийн аль нэг талыг сонгон авч, уг талын нэг орой дээр бичигдсэн тоог 1-ээр ихэсгэж, нөгөө орой дээр бичигдсэн тоог 1-ээр хорогдуулж болно. Сурагч энэ үйлдлийн тусламжтайгаар бүх орой дээр бичигдсэн тоог ижил болгож чадсан бөгөөд ингэхдээ хамгийн цөөн тооны үйлдэл хийжээ. Сурагч олон өнцөгтийн аль нэг тал дээр ганц ч удаа үйлдэл хийгээгүй гэдгийг батал.

Б-3. $b > a > 0$ бодит тоонуудын хувьд $1 + ab \leq \sqrt{3}(b - a)$ бол

$$(1 + a^2)(1 + b^2) \geq 4a(a + b)$$

болохыг батал.

XII анги

A-1. $(x + 2)(x + 1)P(x) - x(x - 1)P(x + 2)$ ялгавар нь тогтмол тоо байх бодит коэффициенттэй бүх $P(x)$ олон гишүүнтийг ол.

A-2. $AD > BC$ суурьтай $ABCD$ трапецын AB , CD хажуу талуудын үргэлжлэл K цэгт огтлолцоно. ABD , BCD гурвалжнуудыг багтаасан тойргийн төвүүд O_1 , O_2 бол $\angle AKO_1 = \angle DKO_2$ болохыг батал.

A-3. Ямар ч натурал n тооны хувьд өөрийн цифрүүдийн нийлбэрт хуваагддаг, зөвхөн 1, 2, 3 цифрүүдээр бичигдэх n оронтой тоо олдохыг батал.

Б-1. Натурал n тоог хуваадаг ялгаатай бүх анхны тоонуудын тоог $p(n)$ гэж тэмдэглэе. Өгөгдсөн ямар ч натурал тоог $p(m) = p(k)$ байх натурал m, k тоонуудын ялгавар байдалтай бичиж болохыг батал.

Б-2. Зөв 2015-өнцөгтийн оройнууд дээр бүхэл тоонууд бичсэн байв. Нэг удаагийн үйлдлээр олон өнцөгтийн аль нэг талыг сонгон авч, уг талын нэг орой дээр бичигдсэн тоог 1-ээр ихэсгэж, нөгөө орой дээр бичигдсэн тоог 1-ээр хорогдуулж болно. Сурагч энэ үйлдлийн тусламжтайгаар бүх орой дээр бичигдсэн тоог ижил болгож чадсан бөгөөд ингэхдээ хамгийн цөөн тооны үйлдэл хийжээ. Сурагч олон өнцөгтийн аль нэг тал дээр ганц ч удаа үйлдэл хийгээгүй гэдгийг батал.

Б-3. ABC гурвалжинд багтсан γ тойрог гурвалжны BC , CA , AB талуудыг харгалзан D , E , F цэгүүдэд шүргэнэ. AD хэрчим нь γ тойргийг D цэгээс ялгаатай K цэгт огтолно. EK шулуун BC талтай параллель бол B, F, K, C цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал.

Бага ангийн багш

А-1. (М. Итгэл) Бат, Болд хоёрт хэдэн алим байв. Бат - "Болд надад 3 алим өгвөл би Болдоос n дахин олон алимтай болно" гэжээ. Харин Болд - "Бат надад n алим өгвөл би Батаас 3 дахин олон алимтай болно" гэжээ. Ийм байх n -ийн боломжит бүх утгыг ол.

А-2. (М. Итгэл) Дор хаяж 3 ширхэг натурал тоон хуваагчтай бөгөөд хамгийн их 2 хуваагчийн нийлбэр нь хамгийн бага 3 хуваагчийн нийлбэрээс 30 дахин их байдаг бүх натурал тоог ол. (1 ба өөрийг нь натурал тооны хуваагч гэж тооцно.)

А-3. (М. Итгэл) ABC гурвалжны AC, BC талууд дээр харгалзан B_1, A_1 цэгүүд тэмдэглэв. AA_1 ба BB_1 хэрчмүүд X цэгт огтлолцоно. B_1CA_1, B_1XA_1, AXB гурвалжнуудын талбай харгалзан x, y, z бол ABC гурвалжны талбайг ол.

Б-1. (М. Итгэл) $\frac{a^2 + b}{b^2 - a}$ ба $\frac{b^2 + a}{a^2 - b}$ тоонууд бүхэл тоо байх бүх натурал a, b тоонуудыг ол.

Б-2. (М. Итгэл) Өгсөн кубийн оройн бүх цэгийг тэмдэглэжээ. Мөн кубийн ирмэг тус бүр дээр оройнуудаас ялгаатай 5 ширхэг цэг тэмдэглэв. Ядаж 2 тэмдэглэсэн цэгийг дайрсан ялгаатай бүх шулууны тоог ол.

Б-3. (М. Итгэл) 4×4 хэмжээтэй хүснэгтийн нүднүүдэд бүхэл тоонуудыг бичихэд, 2×2 хэмжээтэй квадратад бичигдсэн 4 тооны нийлбэрүүд нь бүгд ялгаатай байв (ижил тоонууд бичиж болно). Хүснэгтэд бичигдсэн хамгийн их ба хамгийн бага тооны ялгавар нь хамгийн багадаа хэд байж болох вэ?

Дунд ангийн багш

А-1. (Ц. Дашдорж) n зэргийн $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ олон гишүүнт, $a < c < b$ байх a, b, c тоонууд өгөгдөв. $f(x) = a$ ба $f(x) = b$ тэгшитгэлүүд тус бүрдээ n ширхэг ялгаатай бодит шийдтэй бол $f(x) = c$ тэгшитгэл n ширхэг ялгаатай бодит шийдтэй гэж батал.

А-2. (В. Адъяасүрэн) ABC гурвалжны хүндийн төвөөс талууд хүртэлх зай x, y, z бол

$$\sqrt{3xy} + \sqrt{3yz} + \sqrt{3zx} \leq p$$

гэдгийг батал. Энд p нь гурвалжны хагас периметр.

A-3. (Б. Батцэнгэл) Ямар ч натурал n тооны хувьд өөрийн цифрүүдийн нийлбэрт хуваагддаг, зөвхөн 1, 2, 3 цифрүүдээр бичигдэх n оронтой тоо олдохыг батал.

B-1. (В. Адъяасүрэн) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функц суръектив буюу дурын бодит y тооны хувьд $y = f(x)$ байх x тоо олддог байв. Дурын x -ийн хувьд

$$f(f(x)) = (x - 1)f(x) + 2$$

байх f функц оршин байх уу?

B-2. (Д. Пүрэвсүрэн) Тойрог багтаасан $ABCD$ дөрвөн өнцөгт өгөгджээ. Дөрвөн өнцөгтөд багтсан тойрог түүний AB, BC, CD, DA талуудыг харгалзан K, L, M, N цэгүүдэд шүргэнэ. KN, MN шулуунууд BC талын үргэлжлэлийг харгалзан P, Q цэгт огтолдог бол AQ, DP шулуунуудын огтлолцлын цэг LN шулуун дээр оршихыг батал.

B-3. (Ц. Дашдорж) p нь анхны тоо бол $x^p + px + 2p + 2$ олон гишүүнт $\mathbb{Z}[x]$ дээр ямагт үл задрах байх уу?

1.2 Бодолтууд

7-р анги

A-1. Хариу: 1344. Хөх өнгөтэй хамгийн их тоо нь x бол хөх өнгийн тоонуудын тоо x байхын тул зөвхөн 1, 2, ..., x тоонууд хөх өнгөтэй байх ёстой. Иймд $x + 1, x + 2, \dots, 2015$ гэсэн 2015 - x ширхэг тоо улаан өнгөтэй. $2015 - x = 2(x + 1)$ гэдгээс $x = 671$ гэж олдох ба улаан өнгөтэй тоонуудын тоо $2015 - x = 1344$ байна.

A-2. Хариу: 432. Өгсөн тооны цифрүүдийг сэлгэж, үүсэх тоог $A = \overline{abcdefgh}$ гэж тэмдэглэе. 11-д хуваагдах тооны шинж ёсоор A тоо 11-д хуваагдах нь $-a + b - c + d - e + f - g + h$ тоо 11-д хуваагдахтай адил юм. Иймд бодлого $a + c + e + g, b + d + f + h$ нийлбэрүүд 11-д хуваахад ижил үлдэгдэл өгдөг байх A тоонуудын тоог олохтой адил.

A тооны цифрүүдийн нийлбэр 19 гэдгээс $a + c + e + g$ ба $b + d + f + h$ нийлбэр харгалзан 15 ба 4 эсвэл 4 ба 15 байх л боломжтой. Эдгээр нөхцөлүүд биелэх бүх боломж нь

$$\{a, c, e, g\} = \{1, 3, 5, 6\}, \{b, d, f, h\} = \{0, 0, 2, 2\}$$

$$\{a, c, e, g\} = \{0, 0, 2, 2\}, \{b, d, f, h\} = \{1, 3, 5, 6\}$$

$$\{a, c, e, g\} = \{2, 2, 5, 6\}, \{b, d, f, h\} = \{0, 0, 1, 3\}$$

$$\{a, c, e, g\} = \{0, 0, 1, 3\}, \{b, d, f, h\} = \{2, 2, 5, 6\}.$$

Иймд A тоог үүсгэх боломжийн тоо харгалзан 144, 72, 144 ба 72 гэж гарах бөгөөд эдгээрийн нийлбэр нь 432 болно.

A-3. $b - 1 = b(a + 1) - (ab + 1)$ байх учир өгөгдсөн нөхцлөөс $b - 1$ нь m -д хуваагдана гэж гарна. $a + 1$ ба $b - 1$ нь m -д хуваагдах натурал тоонууд тул $m \leq a + 1, m \leq b - 1$ байна. Иймд $2m \leq (a + 1) + (b - 1) = a + b$ болно.

A-4. $100 + 101 > 200$ тул 100 см, 101 см, ..., 199 см, 200 см урттай 101 ширхэг савхны аль ч гурваар гурвалжин хийж болно. $101 > 2 \times 50$ тул Дирихлейн зарчмаар энэ 101 савхыг 50 уутанд хийхэд аль нэг уутанд 3 савх орох ба өмнөх дүгнэлтээр тэр савхнуудаар гурвалжин хийж болно.

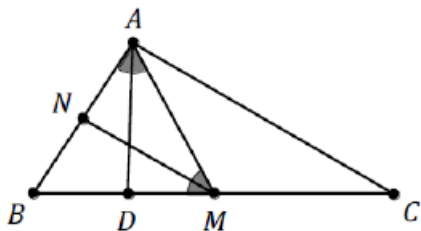
8-р анги

A-1. $\overline{abcab}$ нь 11-д хуваагдах ёстой гэдгээс $a - b + c - a + b = c$ нь 11-д хуваагдах ёстой болно. c нь цифр тул 0 байхаас өөр аргагүй юм. Энэ үед a, b нь дурын байж болох тул Батын тоолсон тоо $9 \cdot 10 = 90$ болно.

$\overline{abcba}$ нь 11-д хуваагдах ёстой гэдгээс $a - b + c - b + a = 2(a - b) + c$ нь 11-д хуваагдах ёстой болно. $2(a - b)$ нь 11-д хуваахад 1 үлддэггүй байх дурын a, b -ийн сонголтонд c цифр нь нэг утгатай олдох тул $2(a - b)$ нь 11-д хуваахад 1 үлддэг байх a, b -ийн боломжийн тоог олоод нийт боломжоос хасахад Цэцэгийн тоолсон тоо гарна. a, b нь цифрүүд учраас $-17 < 2(a - b) < 19$ байх тул $2(a - b) = 12$ эсвэл $2(a - b) = -10$ байх боломжтой юм. Эхний тохиолдолд $(a, b) = (6, 0), (7, 1), (8, 2), (9, 3)$ гэсэн 4 боломжтой ба дараагийн тохиолдолд $(a, b) = (1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9)$ гэсэн 4 боломжтой юм. Нийт (a, b) хосын боломжийн тоо $9 \cdot 10 = 90$ тул Цэцэгийн тоолсон тоо $90 - 4 - 4 = 82$ болно. Иймд Батын тоолсон тоо 8-аар олон.

A-2. Гурвалжны ВС талын дундаж цэгийг М гэж, АВ талын дундаж цэгийг N гэж тэмдэглэе (зураг). өгсөн нөхцөл ёсоор $AB = \frac{BC}{2} = BM$ тул ABC гурвалжин адил хажуут гурвалжин юм. Энэ адил хажуут гурвалжны хажуу талууд руу татсан AD, MN медианууд ижил урттай байна. MN хэрчим нь ABC гурвалжны AC талтай параллель дундаж шугам тул $MN = \frac{AC}{2}$ байх ба эндээс $AC' = 2 \times MN = 2 \times AD$ гэж гарна. Энэ бодлогыг

медианы уртыг олдог томъёог ашиглан бодож бас болно.



A-3. a, b, c, d нь нэгээс их, ялгаатай натурал тоонууд тул

$$(a + 1) \cdot b - (ab + 1) = b - 1,$$

$$(ab + 1) \cdot c - (abc + 1) = c - 1,$$

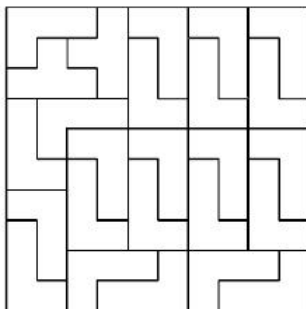
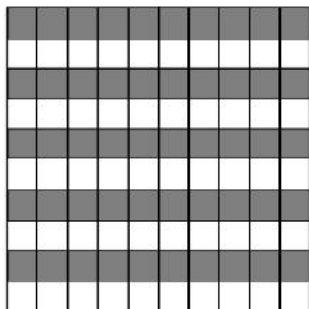
$$(abc + 1) \cdot d - (abcd + 1) = d - 1$$

адилтгалууд болон өгөгдсөн нөхцөлөөс $b - 1, c - 1, d - 1$ нь ялгаатай m -д хуваагддаг натурал тоонууд гэж гарна. $a + 1$ нь эдгээр тоонуудын зөвхөн нэгэнтэй нь л тэнцэж болох тул

$$(a + 1) + (b - 1) + (c - 1) + (d - 1) \geq m + m + 2m + 3m = 7m$$

буюу $a + b + c + d \geq 7m + 2$ болж батлах зүйл батлагдав.

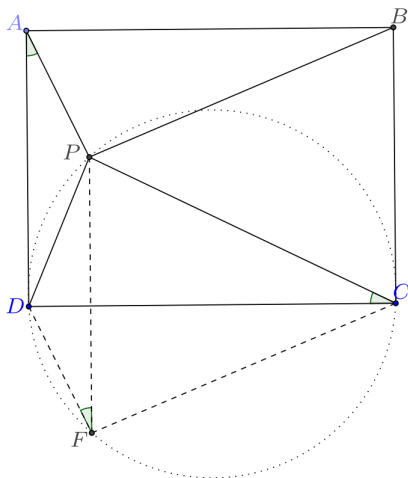
A-4. Хариу: 23 ширхэг. Квадратын нүднүүдийг шатрын хөлөг шиг хар, цагаан өнгөөр ялган будвал, "L" хэлбэртэй дүрсэд ямагт 2 хар, 2 цагаан, харин "T" хэлбэртэй дүрсэд 1 хар, 3 цагаан эсвэл 3 хар 1 цагаан нүд байна. Хар нүдний нийт тоо 50 нь тэгш тоо тул сондгой тооны хар нүд агуулсан "T" хэлбэртэй дүрсийн тоо заавал тэгш байна.



Одоо квадратыг дан "L" хэлбэрийн дүрсэд хувааж болохгүй гэдгийг харуулая. Эсрэгээс нь квадратыг 25 ширхэг "L" хэлбэрийн дүрсэд хувааж болдог гэж үзье. Квадратын мөрүүдийг зурагт үзүүлснээр хар, цагаан өнгөөр алаглуулан будая. Тэгвэл "L" хэлбэртэй дүрсэд 1 хар, 3 цагаан, эсвэл 3 хар 1 цагаан нүд байна. Тэгэхээр квадратыг 25 ширхэг "L" хэлбэрийн дүрсэд хувааж болдог бол квадратын хар нүдний тоо сондгой байх ёстой. Энэ нь квадратын хар нүдний тоо 50 нь тэгш гэдэгт зөрчинө. Үүгээр "Т" хэлбэрийн дүрсийн тоо 2 -оос цөөнгүй буюу "L" хэлбэртэй дүрсийн тоо 23-аас хэтрэхгүй гэдэг нь батлагдав. Квадратыг 2 ширхэг "Т" хэлбэртэй, 23 ширхэг "L" хэлбэртэй дүрсүүдэд хэрхэн хуваахыг зурагт үзүүлэв.

9-р анги

А-1. $DAPF$ параллеограм байхаар F цэгийг авъя. Тэгвэл $\angle DAP = \angle DFP$ байх ба өгсөн нөхцлөөс $\angle DAP = \angle DCP$ тул $DPCF$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. Иймд $\angle DPC + \angle DFC = 180^\circ$ байна. FP ба BC талууд тэнцүү бөгөөд параллел тул $FPBC$ параллеограм болно. Иймд $\triangle APB = \triangle DFC$ буюу $\angle DPC + \angle APB = 180^\circ$ болно.



А-2. $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ тоонууд тэгш эрхтэй тул $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{2015}$ гэж үзэхэд явцуурахгүй. Эдгээр 2015 ширхэг тоонуудын үржвэрийг P -ээр тэмдэглэж өгсөн адилтгалыг

$$1 = \frac{a_1}{P} + \frac{a_2}{P} + \dots + \frac{a_{2015}}{P}$$

хэлбэрт бичье. Баруун гар талын бутархайнуудын a_1, a_2 -оос бусад бүх тоонуудыг 1-ээр солиход илэрхийлэл ихэснэ. Өөрөөр хэлбэл

$$1 \leq \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \cdots + \frac{1}{a_1 \cdot a_2} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1} + \frac{2013}{a_1 \cdot a_2}$$

Эндээс $a_1 \cdot a_2 - a_1 - a_2 \leq 2014$ буюу $(a_1 - 1)(a_2 - 1) \leq 2014$ болно. Хэрэв $a_2 - 1 = 0$ бол $a_2 = a_3 = \cdots = a_{2015} = 1$ болж $a_1 = 2014 + a_1$ гэж зөрчилд орно. Иймд $a_2 - 1 = 1$ үед л a_1 -ийн хамгийн их утга гарна. $a_1 - 1 \leq 2014 \Rightarrow a_1 \leq 2015$ боллоо. $a_1 = 2015$ үед $\{2015, 2, 1, \dots, 1\}$ тоонууд бодлогын нөхцлийг хангана гэдгийг шууд шалгаж болно.

A-3. Эхлээд аль ч зэргэлдээ 2 нь ижил өнгөөр будагдаагүй байх 8 сандлыг байрлуулах боломжийн тоог олъё. Уг тоог a_8 гэж тэмдэглэе. Нэг цэг дээрх сандлыг 4 өнгийн альнаар нь ч будаж болно. Цааш нь 2,3 гэх мэтчилэн цэгүүд дээр өмнөх өнгөөс ялгаатай байхаар будья. Тэгвэл боломжийн тоо нь $4 \cdot 3^7$ байна. Энд зөвхөн 1, 8 цэгүүд дээрх сандлууд л ижил өнгөтэй байх боломжтой. Энэ боломжийг хасвал бидний олох тоо гарна. Харин энэ тоо нь a_7 буюу 7 сандлыг аль ч зэргэлдээ 2 нь ялгаатай өнгөтэй байхаар будах тоотой тэнцүү. Эндээс тооцвол

$$a_8 = 4 \cdot 3^7 - a_7$$

гэсэн рекуррент харьцаа гарна. Яг үүнтэй адилаар

$$a_7 = 4 \cdot 3^6 - a_6$$

$$a_6 = 4 \cdot 3^5 - a_5$$

$$a_5 = 4 \cdot 3^4 - a_4$$

$$a_4 = 4 \cdot 3^3 - a_3$$

$$a_3 = 4 \cdot 3^2 - a_2$$

болно. $a_2 = 12$ гэдэг нь хялбархан тооцогдоно. Бидний олох боломжийг дараах 2 тохиолдолд хуваая.

а) Ижил өнгийн дараалсан 3 сандал

б) Ижил өнгийн зэрэгцээ 2 сандал 2 байх

Эхнийх нь $8 \cdot a_8$, дараачийнх нь $C_8^2 \cdot a_8$ тул бодлогын хариу нь $36 \cdot a_8$ буюу 236304 гэж гарна.

B-1. Тооны квадрат 4-т хуваахад 1 эсвэл 0 гэсэн л үлдэгдэл өгдөг учир зэрэгцээ сондгой 2 тоо $4k + 1, 4n + 3$ хэлбэртэй байна. Хэрэв бүгд сондгой

анхны тоонууд бол аль ч хоёр зэрэгцээ тоо нь $4k + 1, 4n + 3$ хэлбэртэй байх ба сөөлжиж байрлах хэрэгтэй. Гэтэл нийт 51 тоо байгаа учир сөөлжиж явсаар хоёр ижил үлдэгдэл өгдөг тоонууд нь зэрэгцэх хэрэгтэй болж зөрчил үүснэ. Иймд нэг тоо нь 2 байх хэрэгтэй. Тэгвэл тэрний 2 тал нь $4k + 3$ хэлбэрийн анхны тоо байх хэрэгтэй бөгөөд тэрний хөрш нь $4k + 1$ хэлбэрийн байх хэрэгтэй гэх мэтээр $4k + 1, 4n + 3$ хэлбэрийн тоонууд мөн сөөлжиж байрших ёстой. Гэтэл ийм байдлаар явбал $4k + 3$ хэлбэрийн хоёр тоо зэрэгцэж нийлбэр нь бүтэн квадрат биш болно. Иймд дээрх байдлаар тоонууд бичиж болохгүй.

Б-2. Хариу: (1, 2); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (3, 2); (3, 3).

a ба b нь тэгш эрхтэй тул $b \geq a$ гэж үзэж болно. $b^2 - a$ нь $a^2 + b$ -ийг хуваах тул $a^2 + b \geq b^2 - a$ буюу $(a + b)(1 + a - b) \geq 0$ болно. $a + b \geq 0$ тул $1 + a - b \geq 0$ буюу $1 + a \geq b$. Иймд $b = a$ эсвэл $b = a + 1$ гэсэн 2 боломжтой.

1. $b = a$ үед

$$\frac{a^2 + b}{b^2 - a} = \frac{a^2 + a}{a^2 - a} = \frac{a + 1}{a - 1} = 1 + \frac{2}{a - 1}.$$

a натурал тоо гэдгийг анхаарвал $a = \{2, 3\}$ болно.

2. $b = a + 1$ үед

$$\frac{b^2 + a}{a^2 - b} = \frac{a^2 + 3a + 1}{a^2 - a - 1} = 1 + \frac{4a + 2}{a^2 - a - 1}.$$

Иймд $a^2 - a - 1 \leq 4a + 2$ буюу $a^2 - 5a - 3 \leq 0$ болно. Энэ тэнцэл бишийг биелүүлэх a ийн утга 1, 2, 3, 4, 5 болно. Эндээс 1, 2 шийд болно.

Б-3. $x = \sqrt{3}a, y = \sqrt{3}b$ гэе. Тэгвэл өгөгдсөн нөхцөл $0 < x < y$ ба $3 + xy \leq 3(y - x)$ болно. Эндээс $(3 - x)y \geq 3 + 3x$ буюу $3 - x \geq 0$ болно. Иймд

$$\frac{1 + x}{3 - x} \geq x$$

тул $y \geq 3x$. Орлуулгаар батлах зүйл $(3 + x^2)(3 + y^2) \geq 12x(x + y)$ болох буюу

$$x^2y^2 + 3y^2 + 9 - (9x^2 + 12xy) = (xy - 3)^2 + 3(y + 1)(y - 3x) \geq 0$$

гэдгээс мөрдөнө. Тэнцэлдээ хүрэх нөхцөл нь $y = 3x = 3$ буюу $(a, b) = (1/\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

10-р анги

A-1. $\{1008, 1009, \dots, 2015\}$ гэсэн 1008 тоо авахад аль ч 3-аар нь коэффициентээ хийсэн ямар ч квадрат гурван гишүүнт нь бодит язгуургүй гэж харуулья. Энэ олонлогоос a, b, c гэсэн гурван тоог авч $ax^2 + bx + c$ гэсэн квадрат тэгшитгэл зохиосон гээ. Тэгвэл дискриминант нь

$$b^2 - 4ac \leq 2015^2 - 4 \cdot 1008 \cdot 1009 < 0$$

болж бодит язгуургүй болно. Одоо ямар нэгэн 1009 ширхэг тоо авахад аль нэг гурван тоогоор нь бодит язгууртай квадрат гурван гишүүнт бичиж болохыг харуулья. Авсан тоонуудын хамгийн багыг c , хоёр дахь бага тоог b , хамгийн их тоог a гэвэл

$$c \leq 1007 \quad (1.1)$$

$$a - b \geq 1007 \quad (1.2)$$

байна. Иймд

$$a^2 \geq (b + 1007)^2 = (b - 1007)^2 + 4 \cdot 1007 \cdot b \geq (b - 1007)^2 + 4bc \geq 4bc$$

болж $bx^2 + ax + c = 0$ тэгшитгэл бодит шийдтэй байна.

A-2. $\triangle ABP \sim \triangle ACK$ ба $\triangle AKM \sim \triangle MCD$ гэдгээс харгалзан

$$\frac{AP}{AK} = \frac{BP}{AC} \text{ ба } \frac{AK}{CD} = \frac{AM}{MC}$$

гэж гарна. Эндээс AK -г олж тэнцүүлвэл $AP \cdot AC : BP = AM \cdot CD : MC$ Өгөгдөл ёсоор $AM = \frac{AD}{3}$, $AP = \frac{AD}{5}$. Үүнийг ашиглавал $\frac{5}{3} \cdot \frac{CD}{MC} = \frac{AC}{BP}$ (*)

болно. Пифагорын теорем ёсоор $MC = \sqrt{MD^2 + CD^2} = CD \cdot \sqrt{(\frac{MD}{CD})^2 + 1}$

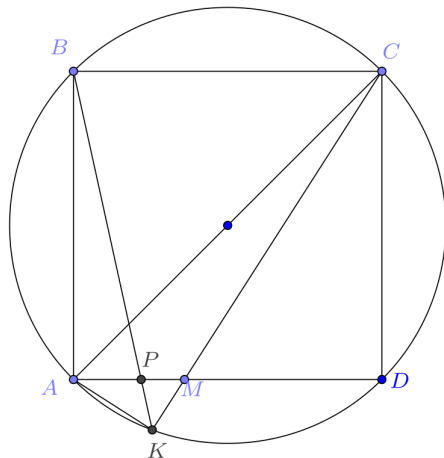
$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = CD \cdot \sqrt{(\frac{AD}{CD})^2 + 1}$$

$$BP = \sqrt{AB^2 + AP^2} = AB \cdot \sqrt{1 + (\frac{AP}{AB})^2}$$

Одоо $CD = AB$, $MD = \frac{2}{3}AD$, $AP = \frac{AD}{5}$ гэдгийг ашиглаад (*)-д орлуулахад

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{9}(\frac{AD}{CD})^2 + 1}} = \frac{\sqrt{(\frac{AD}{CD})^2 + 1}}{\sqrt{1 + \frac{1}{25}(\frac{AD}{CD})^2}}$$

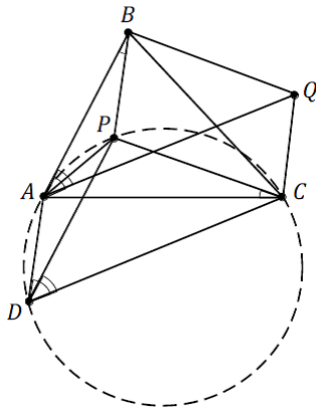
Эндээс $(AD : CD)^2 = 1$ гэж гарна.



A-3. $n^{14} + n^4 + 1 = n^{14} - n^2 + n^4 + n^2 + 1 = n^2(n^6 + 1)(n^2 - 1)(n^4 + n^2 + 1) + (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1) = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)(n^2(n^6 + 1)(n^2 - 1) + 1)$ гэсэн үржигдхүүнд задарна. $n^2 + n + 1$ ба $n^2 - n + 1$ гэсэн тоонууд нь n гэсэн натурал тоо бүрийн хувьд сондгой тоонууд ба $(n^2 + n + 1, n^2 - n + 1) = (2n, n^2 - n + 1) = (n, n^2 - n + 1) = (n, 1) = 1$ буюу харилцан анхны тоонууд болно. Анх өгсөн тоо маань анхны тооны зэрэг тул $n^2 - n + 1 = 1$ байхаас өөр боломжгүй. Иймд $n = 1$ гэсэн цор ганц боломжтой.

B-1. Тооны квадрат 4-т хуваахад 1 эсвэл 0 гэсэн л үлдэгдэл өгдөг учир зэрэгцээ сондгой 2 тоо $4k + 1, 4n + 3$ хэлбэртэй байна. Хэрэв бүгд сондгой анхны тоонууд бол аль ч хоёр зэрэгцээ тоо нь $4k + 1, 4n + 3$ хэлбэртэй байх ба сөөлжиж байрлах хэрэгтэй. Гэтэл нийт 51 тоо байгаа учир сөөлжиж явсаар хоёр ижил үлдэгдэл өгдөг тоонууд нь зэрэгцэх хэрэгтэй болж зөрчил үүснэ. Иймд нэг тоо нь 2 байх хэрэгтэй. Тэгвэл тэрний 2 тал нь $4k + 3$ хэлбэрийн анхны тоо байх хэрэгтэй бөгөөд тэрний хөрш нь $4k + 1$ хэлбэрийн байх хэрэгтэй гэх мэтээр $4k + 1, 4n + 3$ хэлбэрийн тоонууд мөн сөөлжиж байрших ёстой. Гэтэл ийм байдлаар явбал $4k + 3$ хэлбэрийн хоёр тоо зэрэгцэж нийлбэр нь бүтэн квадрат биш болно. Иймд дээрх байдлаар тоонууд бичиж болохгүй.

Б-2. $BADP$ нь параллелограмм байхаар D цэгийг сонгон авъя.



Тэгвэл $AD = BP = QC$ ба $AD \parallel BP \parallel QC$ тул $ADCQ$ нь бас параллелограмм юм. $AB \parallel DP$ ба $AQ \parallel DC$ тул $\angle BAQ = \angle PDC$ байна. Параллелограммын эсрэг оройн өнцгүүд тэнцүү тул $\angle ADP = \angle ABP$ байх ба өгсөн нөхцөлөөр $\angle ABP = \angle ACP$ тул $\angle ADP = \angle ACP$ болж A, D, C, P цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Иймд $\angle PDC = \angle PAC$ байна.

Б-3. $x = \sqrt{3}a, y = \sqrt{3}b$ гээ. Тэгвэл өгөгдсөн нөхцөл $0 < x < y$ ба $3 + xy \leq 3(y - x)$ болно. Эндээс $(3 - x)y \geq 3 + 3x$ буюу $3 - x \geq 0$ болно. Иймд

$$\frac{1 + x}{3 - x} \geq x$$

тул $y \geq 3x$. Орлуулгаар батлах зүйл $(3 + x^2)(3 + y^2) \geq 12x(x + y)$ болох буюу

$$x^2y^2 + 3y^2 + 9 - (9x^2 + 12xy) = (xy - 3)^2 + 3(y + 1)(y - 3x) \geq 0$$

гэдгээс мөрдөнө. Тэнцэлдээ хүрэх нөхцөл нь $y = 3x = 3$ буюу $(a, b) = (1/\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

11-р анги

А-1. Хариу: Бүх тогтмол $f(x) = \text{const}$ буулгалт.

Эсрэгээс нь $f(a) > f(b)$ байх $a, b \in \mathbb{N}_0$ олддог гэж үзье. Тэгвэл a, b -г $f(a) - f(b)$ нь хамгийн бага байхаар сонгож чадна. Иймд

$$(a + b)f(b) < af(b) + bf(a) < (a + b)f(a)$$

байна. Өгсөн нөхцөл ёсоор $af(b) + bf(a) = (a + b)f(a^2b^2)$ учир

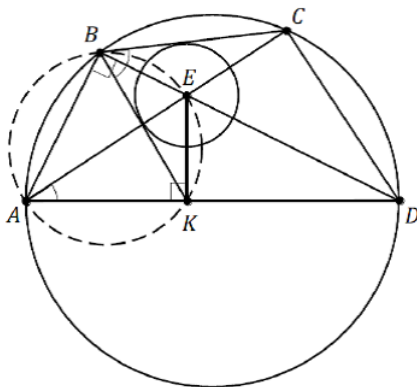
$$(a + b)f(b) < (a + b)f(a^2b^2) < (a + b)f(a)$$

болох бөгөөд $a + b \neq 0$ учир $f(b) < f(a^2b^2) < f(a)$ болно. Эндээс

$$f(a^2b^2) - f(b) < f(a) - f(b)$$

болж $f(a) - f(b)$ нь хамгийн бага гэсэн сонголтод зөрчинө. Иймд $f(a)$ ба $f(b)$ тоонууд ялгаатай байх $a, b \in \mathbb{N}_0$ тоонууд олдохгүй.

A-2. E цэгт төвтэй BC талыг шүргэдэг тойргийг γ гэж, B цэгээс γ тойрогт татсан шүргэгчийн AD талыг огтлох цэгийг K гэж тэмдэглэе. B цэгээс татсан BC , BK шүргэгчүүдийн хоорондох өнцөг нь тойргийн төвийг дайрсан BE шулуунаар хагаслан хуваагдана. Иймд $\angle KEB = \angle CBE$ юм. Нөгөө талаас CD хөвчид тулсан өнцгүүд тэнцүү $\angle CBE = \angle CBD = \angle CAD = \angle EAK$ бөгөөд эндээс $\angle KBE = \angle KAE$ гэж гарна.



Тэгэхээр A, E, B, K цэгүүд нэг тойрог дээр орших ба $\angle ABE = 90^\circ$ тул $\angle AKE = 90^\circ$ байна. Үүгээр K цэг нь E цэгээс AD тал дээр буулгасан перпендикулярын суурь гэдэг нь батлагдав. Үүнтэй нэгэн адилаар C цэгээс тойрогт татсан шүргэгчийн AD талыг огтлох цэг нь E цэгээс AD талд буулгасан перпендикулярын суурь гэдгийг харуулна.

A-3. x_i -ээр i -р цэг дээр бичигдсэн тоог, тэдгээрийн нийлбэрийг S -ээр тэмдэглэе. i цэгийг дайрсан, M олонлогийн ядаж 2 цэгийг агуулсан шулууны тоо n_i болог (бүх цэгүүд 1 шулуун дээр оршихгүй тул $n_i > 1$ юм). i -р цэгийг дайрсан n_i ширхэг шулуун дээрхи тоонуудын нийлбэрүүдийн нийлбэрийг сонирхвол

$$0 = n_i x_i + x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_{2015} = (n_i - 1)x_i + S$$

болно. Эндээс ялгаатай i, j бүрийн хувьд $(n_i - 1)x_i = (n_j - 1)x_j$ гэж гарна. Энэ нь бүх x_i тоонууд ижил тэмдэгтэй гэдгийг үзүүлнэ. Тэгэхлээр бүх $x_i = 0$ юм.

Б-1. Хариу: Бүх тогтмол $f(x) = \text{const}$ буулгалт.

Эсрэгээс нь $f(a) > f(b)$ байх $a, b \in \mathbb{N}_0$ олддог гэж үзье. Тэгвэл a, b -г $f(a) - f(b)$ нь хамгийн бага байхаар сонгож чадна. Иймд

$$(a + b)f(b) < af(b) + bf(a) < (a + b)f(a)$$

байна. Өгсөн нөхцөл ёсоор $af(b) + bf(a) = (a + b)f(a^2b^2)$ учир

$$(a + b)f(b) < (a + b)f(a^2b^2) < (a + b)f(a)$$

болох бөгөөд $a + b \neq 0$ учир $f(b) < f(a^2b^2) < f(a)$ болно. Эндээс

$$f(a^2b^2) - f(b) < f(a) - f(b)$$

болж $f(a) - f(b)$ нь хамгийн бага гэсэн сонголтод зөрчинө. Иймд $f(a)$ ба $f(b)$ тоонууд ялгаатай байх $a, b \in \mathbb{N}_0$ тоонууд олдохгүй.

Б-2. тал дээр хийж байгаа үйлдлийг, цагийн зүүний дагуу эхний оройн тоог 1-ээр ихэсгэж, дараагийн оройн тоог 1-ээр багасгаж байвал "+1" үйлдэл, харин эхний тоог 1-ээр багасгаж, дараагийн тоог 1-ээр ихэсгэж байвал "-1" үйлдэл гэж тооцоё. Нэг тал дээр "+1" үйлдэл хийгээд, дараа нь "-1" үйлдлийг хийвэл үр дүн нь уг тал дээр огт үйлдэл хийгээгүйтэй адилхан. Тэгэхээр нэгэнт сурагч хамгийн цөөн үйлдэл хийсэн тул тэрээр тал тус бүр дээр ямагт "+1" үйлдэл, эсвэл ямагт "-1" үйлдэл хийсэн байх ёстой. Цаашид нэг тал дээр k удаа "+1" үйлдэл хийхийг k - үйлдэл, харин k удаа "-1" үйлдэл хийхийг $-k$ - үйлдэл хийсэн гэж тооцоё. Олон өнцөгтийн талуудыг цагийн зүүний дагуу дугаарлаад, сурагч эдгээр талууд дээр $k_1, k_2, \dots, k_{2015}$ үйлдэл хийсэн гэж үзье. Мөн эсрэгээс нь энэ тоонууд бүгд тэгээс ялгаатай гэж үзье. $k_1, k_2, \dots, k_{2015}$ тоонуудаас m ширхэг нь эерэг, n ширхэг нь сөрөг болог. 2015 нь сондгой тоо тул $m > n$ эсвэл $m < n$ байна. $m > n$ үед сурагч олон өнцөгтийн талууд дээр $k_1, k_2, \dots, k_{2015}$ биш харин $k_1 - 1, k_2 - 1, \dots, k_{2015} - 1$ үйлдэл хийвэл, олон өнцөгтийн оройнууд дээр бичигдсэн тоонууд ижил хэвээр байна. Харин тийм үйлдлийн тоо

$$\begin{aligned} & |k_1 - 1| + |k_2 - 1| + \dots + |k_{2015} - 1| = \\ & = |k_1| + |k_2| + \dots + |k_{2015}| - m + n < \\ & < |k_1| + |k_2| + \dots + |k_{2015}| \end{aligned}$$

болж зөрчилд хүрнэ.

$n > m$ үед сурагч олон өнцөгтийн талууд дээр $k_1, k_2, \dots, k_{2015}$ биш харин $k_1+1, k_2+1, \dots, k_{2015}+1$ үйлдэл хийвэл нийт үйлдлийн тоо $|k_1+1| + |k_2+1| + \dots + |k_{2015}+1| = |k_1| + |k_2| + \dots + |k_{2015}| + m - n < |k_1| + |k_2| + \dots + |k_{2015}|$ болж зөрчилд хүрнэ.

Б-3. $x = \sqrt{3}a, y = \sqrt{3}b$ гээ. Тэгвэл өгөгдсөн нөхцөл $0 < x < y$ ба $3 + xy \leq 3(y - x)$ болно. Эндээс $(3 - x)y \geq 3 + 3x$ буюу $3 - x \geq 0$ болно. Иймд

$$\frac{1+x}{3-x} \geq x$$

тул $y \geq 3x$. Орлуулгаар батлах зүйл $(3 + x^2)(3 + y^2) \geq 12x(x + y)$ болох буюу

$$x^2y^2 + 3y^2 + 9 - (9x^2 + 12xy) = (xy - 3)^2 + 3(y + 1)(y - 3x) \geq 0$$

гэдгээс мөрдөнө. Тэнцэлдээ хүрэх нөхцөл нь $y = 3x = 3$ буюу $(a, b) = (1/\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

12-р анги

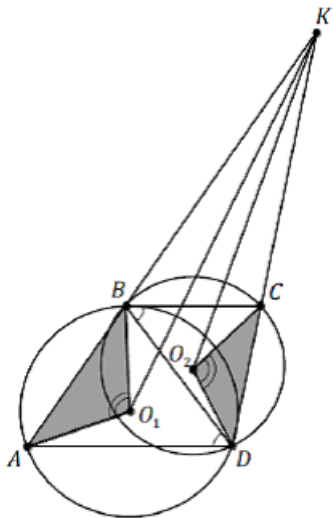
А-1. Хариу: бодит a тооны хувьд $P(x) = a(x^2 - x)$ олон гишүүнтүүд, $P(x)$ нь тогтмол олон гишүүнт бол зөвхөн 0 гэдгийг хялбархан харуулж болно. Одоо $n \geq 1$ үед $P(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots$ бөгөөд $a \neq 0$ гэж үзье. Тэгвэл $P(x+2) = a(x+2)^n + b(x+2)^{n-1} + \dots = ax^n + (2na + b)x^{n-1} + \dots$ болох бөгөөд эндээс $(x+1)(x+2)P(x) - x(x-1)P(x+2) = (4a - 2na)x^{n+1} + \dots$ гэж гарна. Тэгэхээр энэ ялгавар нь тогтмол тоо гарахын тулд $4a - 2na = 0$ буюу $n = 2$ байх ёстой. Одоо $P(x) = ax^2 + bx + c$ гэж үзье. Тэгвэл $(x+1)(x+2)P(x) - x(x-1)P(x+2) = (2a + 2b)x^2 + 4(a + b + c)x + 2c$ болох бөгөөд энэ ялгавар нь тогтмол тоо гарахын тулд $a + b = 0$ ба $c = 0$ байх ёстой. Энэ нь $P(x) = a(x^2 - x)$ гэдгийг харуулж байна.

А-2. $\angle ABD = \angle CBD$ тул тэдгээрт тулсан төв өнцгүүд тэнцүү $\angle AO_1B = \angle CO_2D$ байна. Иймд адил хажуут AO_1B, CO_2D гурвалжнууд төсөөтэй. Энэ төсөөгөөр

$$\frac{BA}{CD} = \frac{AO_1}{DO_2}$$

болно. $BC \parallel AD$ тул Фалесын теоремоор

$$\frac{BA}{CD} = \frac{KA}{KD}$$



Иймд

$$\frac{KA}{KD} = \frac{AO_1}{DO_2}$$

байх бөгөөд $\angle KAO_1 = \angle BAO_1 = \angle CDO_2 = \angle KDO_2$ тул KAO_1 ба $\angle DKO_2$ гурвалжнууд төсөөтэй байна. Эндээс

$\angle AKO_1 = \angle DKO_2$ гэж гарна.

А-3.

Б-1. n тэгш бол $p(2n) = p(n)$ байх ба энэ үед $n = 2n - n$ гэж бичиж болно. n сондгой тоо болог. n нь 3-т хуваагдахгүй бол $p(3n) = p(2n) = p(n) + 1$ байх ба $n = 3n - 2n$ гэж бичиж болно. Одоо n нь 3-т хуваагддаг гэж үзье. n нь q -ээс бага бүх сондгой анхны тоонд хуваагддаг, харин q -д хуваагдахгүй байх анхны q тоо олдоно. Тэгвэл $p(q \cdot n) = p(2 \cdot \frac{q-1}{2} \cdot n) = p(n) + 1$ байна. Учир нь $\frac{q-1}{2}$ тооны бүх анхны тоон хуваагч q -ээс бага бөгөөд тэр анхны тоонууд нь $p(2n)$ -д тоологдсон байгаа. Тэгэхээр $n = q \cdot n - 2 \cdot \frac{q-1}{2} \cdot n$ гэж бичиж болно.

Б-2. Тал дээр хийж байгаа үйлдлийг, цагийн зүүний дагуу эхний оройн тоог 1-ээр ихэсгэж, дараагийн оройн тоог 1-ээр багасгаж байвал "+1" үйлдэл, харин эхний тоог 1-ээр багасгаж, дараагийн тоог 1-ээр ихэсгэж байвал "-1" үйлдэл гэж тооцоё. Нэг тал дээр "+1" үйлдэл хийгээд, дараа нь "-1" үйлдлийг хийвэл үр дүн нь уг тал дээр огт үйлдэл хийгээгүйтэй адилхан. Тэгэхээр нэгэнт сурагч хамгийн цөөн үйлдэл хийсэн тул тэрээр тал тус бүр дээр ямагт "+1" үйлдэл, эсвэл ямагт "-1" үйлдэл хийсэн байх ёстой. Цаашид нэг тал дээр k удаа "+1" үйлдэл хийхийг k - үйлдэл, харин k

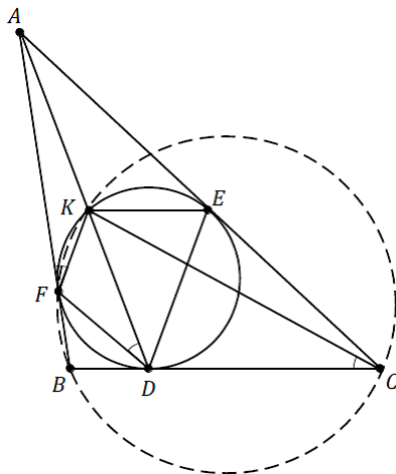
удаа "-1" үйлдэл хийхийг $-k$ - үйлдэл хийсэн гэж тооцоё. Олон өнцөгтийн талуудыг цагийн зүүний дагуу дугаарлаад, сурагч эдгээр талууд дээр $k_1, k_2, \dots, k_{2015}$ үйлдэл хийсэн гэж үзье. Мөн эсрэгээс нь энэ тоонууд бүгд тэгээс ялгаатай гэж үзье. $k_1, k_2, \dots, k_{2015}$ тоонуудаас m ширхэг нь эерэг, n ширхэг нь сөрөг болог. 2015 нь сондгой тоо тул $m > n$ эсвэл $m < n$ байна. $m > n$ үед сурагч олон өнцөгтийн талууд дээр $k_1, k_2, \dots, k_{2015}$ биш харин $k_1 - 1, k_2 - 1, \dots, k_{2015} - 1$ үйлдэл хийвэл, олон өнцөгтийн оройнууд дээр бичигдсэн тоонууд ижил хэвээр байна. Харин тийм үйлдлийн тоо

$$\begin{aligned} & |k_1 - 1| + |k_2 - 1| + \dots + |k_{2015} - 1| = \\ & = |k_1| + |k_2| + \dots + |k_{2015}| - m + n < \\ & < |k_1| + |k_2| + \dots + |k_{2015}| \end{aligned}$$

болж зөрчилд хүрнэ.

$n > m$ үед сурагч олон өнцөгтийн талууд дээр $k_1, k_2, \dots, k_{2015}$ биш харин $k_1 + 1, k_2 + 1, \dots, k_{2015} + 1$ үйлдэл хийвэл нийт үйлдлийн тоо $|k_1 + 1| + |k_2 + 1| + \dots + |k_{2015} + 1| = |k_1| + |k_2| + \dots + |k_{2015}| + m - n < |k_1| + |k_2| + \dots + |k_{2015}|$ болж зөрчилд хүрнэ.

Б-3.



Огтлогч ба шүргэгчийн чанар ёсоор AKF , AFD гурвалжнууд төсөөтэй гэдгээс

$$\frac{KF}{FD} = \frac{AK}{AF}$$

гэж гарна. Мөн AKE , AED гурвалжнууд төсөөтэй тул

$$\frac{AD}{AE} = \frac{ED}{KE}$$

байна. Энд гэдгийг анхаарвал энэ 2 тэнцлээс

$$\frac{KF}{FD} = \frac{AK}{AE} = \frac{AK}{AD} \cdot \frac{ED}{KE}$$

гэж гарна. Нэгэнт $KE \parallel DC$ тул

$$\frac{AK}{AD} = \frac{KE}{DC}$$

байна. Иймд

$$\frac{KF}{FD} = \frac{AK}{AD} \cdot \frac{ED}{KE} = \frac{ED}{DC}$$

юм. γ тойргийн KE хөвч түүний D цэгт татсан шүргэгчтэй параллель тул $KD = ED$ байх ёстой. Иймд дээрх тэнцлийг

$$\frac{KF}{FD} = \frac{KD}{DC}$$

гэж бичиж болно. Шүргэгч ба огтлогчийн хоорондох өнцгийн чанараар $\angle KFD = \angle KDC$ тул сүүлийн тэнцэл нь KFD , KDC гурвалжнууд төсөөтэй гэдгийг үзүүлж болно. Иймд $\angle KDF = \angle KCD$ байна. Шүргэгч ба огтлогчийн хоорондох өнцгийн чанараар $\angle KDF = \angle AFK$ байх бөгөөд $\angle AFK = \angle KCD = \angle KCB$ тэнцэл нь B, F, K, C цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг харуулна.

Бага ангийн багш

A-1. Хариу: $n = \{1, 2, 3, 7\}$. Батын алимны тоог x , Болдын алимны тоог y гэе. Тэгвэл бодлогын нөхцөл ёсоор:

$$\begin{cases} x + 3 = n \cdot (y - 3) \\ y + n = 3 \cdot (x - n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = n \cdot (y - 3) - 3 \\ y + n = 3 \cdot (n \cdot (y - 3) - 3 - n) \end{cases} \quad \text{буюу } y + n = 3ny - 12n - 9 \text{ болно. Эндээс } n\text{-ийг } y\text{-ээр}$$

$$3n = \frac{3y + 27}{3y - 13} = \frac{3y - 13 + 40}{3y - 13} = 3 + \frac{40}{3y - 13}$$

гэж илэрхийлвэл $3y - 13 = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$ болно.

$3y - 13$	1	2	4	5	8	10	20	40
y	$\times$	5	$\times$	6	7	$\times$	11	$\times$
$n = \frac{y+9}{3y-13}$		7		3	2		1	
x		11		16	5		5	

A-2. Хариу: 120, 140, 775. n -ийн хамгийн бага анхны тоон хуваагчийг p гэе. Тэгвэл n -ийн хамгийн их хоёр хаваагчийн нийлбэр нь $n + \frac{n}{p}$. Түүнчлэн n -ийн хамгийн бага 3 хуваагч дараах 2 боломжоор сонгогдоно.

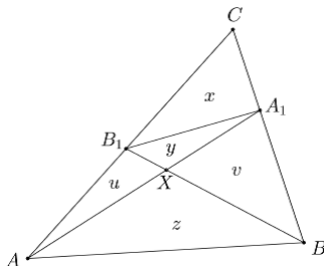
а) 1, p , p^2 байх тохиолдол. Тэгвэл бодлогын нөхцөл ёсоор $\frac{n}{p}(p+1) = 30(1+p+p^2)$ буюу $p(p+1) \cdot \frac{n}{p^2} = 30+30(p+p^2)$ болно. Эндээс $p+p^2$ нь 30-ын хуваагч гэж гарах бөгөөд p анхны тоо тул 2 эсвэл 5 байна. Иймд $p=2$ үед $n=140$, $p=5$ үед $n=775$ болно.

б) 1, p , q ($p < q$) нь n -ийн хамгийн бага анхны тоон хуваагчид байх тохиолдолд $\frac{n}{p}(p+1) = 30(1+p+q)$ буюу $q(p+1)\frac{n}{pq} = 30(p+1) + 30q$. Эндээс

$$(*) \quad 30q \vdots (p+1) \quad \text{ба} \quad 30(p+1) \vdots q \quad (**)$$

болно. Хэрэв p нь сондгой анхны тоо бол $q > p+1$ болох буюу $(q, p+1) = 1$ байна. $(**)$ -оос q нь 30-ийн хуваагч гэж гарах бөгөөд $q \geq 5$ тул $q=5$ ба $p=3$ болно. Энэ үед $30 \vdots (3+1)$ болж $(*)$ -д зөрчил үүснэ. Иймд $p=2$ байна. $q < p^2$ тул $q=3$. Эндээс $n=120$ болж бодлогын нөхцлийг хангах нь харагдаж байна.

A-3. Хариу: $\frac{xz}{y}$.



AB_1X ба A_1BX гурвалжнуудын талбайг харгалзан u, v гэе.

$$(1) \quad \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{S_{\triangle CB_1A_1}}{S_{\triangle BB_1A_1}} = \frac{S_{\triangle ACA_1}}{S_{\triangle ABA_1}} \Rightarrow \frac{x}{y+v} = \frac{x+y+u}{z+v}$$

$$(2) \quad \frac{B_1X}{XB} = \frac{S_{\triangle B_1A_1X}}{S_{\triangle XA_1B}} = \frac{S_{\triangle AB_1X}}{S_{\triangle AXB}} \Rightarrow \frac{y}{v} = \frac{u}{z} \Rightarrow yz = uv$$

(1)-ийг хувиргавал $xz = xy + y^2 + yu + yv + uv$ (3) болно. (3)-д (2)-ийг орлуулбал

$$xz = y \underbrace{(x+y+u+v+z)}_{S_{\triangle ABC}} \quad \text{буюу} \quad S_{\triangle ABC} = \frac{xz}{y} \quad \text{болно.}$$

B-1. Хариу: (1, 2); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (3, 2); (3, 3).

a ба b нь тэгш эрхтэй тул $b \geq a$ гэж үзэж болно. $b^2 - a$ нь $a^2 + b$ -ийг хуваах тул $a^2 + b \geq b^2 - a$ буюу $(a+b)(1+a-b) \geq 0$ болно. $a+b \geq 0$ тул $1+a-b \geq 0$ буюу $1+a \geq b$. Иймд $b = a$ эсвэл $b = a+1$ гэсэн 2 боломжтой.

1. $b = a$ үед

$$\frac{a^2 + b}{b^2 - a} = \frac{a^2 + a}{a^2 - a} = \frac{a+1}{a-1} = 1 + \frac{2}{a-1}.$$

a натурал тоо гэдгийг анхаарвал $a = \{2, 3\}$ болно.

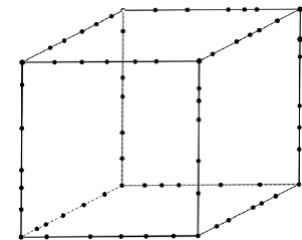
2. $b = a+1$ үед

$$\frac{b^2 + a}{a^2 - b} = \frac{a^2 + 3a + 1}{a^2 - a - 1} = 1 + \frac{4a+2}{a^2 - a - 1}.$$

Иймд $a^2 - a - 1 \leq 4a + 2$ буюу $a^2 - 5a - 3 \leq 0$ болно. Энэ тэнцэл бишийг биелүүлэх a ийн утга 1, 2, 3, 4, 5 болно. Эндээс 1, 2 шийд болно.

Б-2. Хариу: 2038. Эхлээд кубын ирмэгийг дайрсан 12 шулууныг орхиж тооцё. Тэгвэл

а) Кубын оройн цэг бүрийг түүнийг агуулсан 3 ирмэгээс ялгаатай 9 ирмэг дээр орших цэгүүдтэй холбосон шулуун татъя. Энэ нь $9 \cdot 5 + 4 = 49$ шулуун болно.



б) Кубын оройн биш цэгийн хувьд түүнийг агуулсан ирмэг дээр оршихгүй цэгүүдтэй холбосон шулуун татъя. Энэ нь $11 \cdot 5 + 6 = 61$ шулуун болно. Ингэж тоолоход шулуун бүр 2 удаа тоологдох учраас

$$\frac{1}{2}(8 \cdot 49 + 60 \cdot 61) = 2026$$

шулуун гарна. Үүн дээр кубын ирмэгийг дайрсан 12 шулууныг нэмэхэд 2038 болно.

Б-3. Хариу: 2. Хоёроос бага байж болохгүйг харуулъя. Эсрэгээс нь 2-оос бага байна гэж үзвэл уг ялгавар зөвхөн 1 байх боломжтой. Тэгвэл хүснэгтэнд бичигдсэн хамгийн их дөрвөн тооны нийлбэр ба хамгийн бага дөрвөн тооны нийлбэрийн ялгавар нь 4-өөс ихгүй байна. 4×4 квадратад

2×2 квадрат 9 ширхэг байна. Иймд 9 ширхгийн ядаж 2 -ын нийлбэр тэнцүү болж зөрчилд оров. 2 үед дараах жишээг гаргаж болно.

2	2	2	2
2	2	1	0
2	0	0	0
0	2	0	0

Дунд ангийн багш

A-1. $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$ нь $f'(x)$ -ийн язгуурууд гэвэл Роллийн теоремоор тэд бүгд бодитой ба $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ нь $f(x) - b$ -ийн, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ нь $f(x) - a$ -ийн язгуурууд гэвэл

$$\beta_1 < \gamma_1 < \beta_2 < \gamma_2 < \dots < \beta_{n-1} < \gamma_n < \beta_n,$$

$$\alpha_1 < \gamma_1 < \alpha_2 < \gamma_2 < \dots < \alpha_{n-1} < \gamma_n < \alpha_n$$

байна. Иймд $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n)$ интервалууд үл огтлолцох ба $f(\alpha_i) = a$, $f(\beta_i) = b$ тул $\exists(\alpha_i, \beta_i) : f(x_i) = \lambda, i = 1, \dots, n$.

A-2. Өгөгдсөн гурвалжны талбайг S , мөн x, y, z зайнуудад харгалзах талуудын уртийг тус тус a, b, c гэе. Тэгвэл $xa = yb = zc = 2S/3$ буюу

$$\sqrt{3xy} + \sqrt{3yz} + \sqrt{3zx} = \frac{2S}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \right)$$

байна. Коши-Шварцийн тэнцэтгэл биш ашиглан

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \right) &\leq \sqrt{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{a+b+c}{abc}} \end{aligned}$$

гэж бичиж болно. Бид өгөгдсөн гурвалжинг багтаасан тойргийн радиусийг R гэе. Тэгвэл $abc = 4SR$ ба $S = pr$ учраас

$$\sqrt{\frac{a+b+c}{abc}} = \sqrt{\frac{2p}{4prR}} = \sqrt{\frac{1}{2rR}}$$

болно. Эйлерийн тэнцэтгэл бишээр $2r \leq R$ тул дээрхээс

$$\sqrt{3xy} + \sqrt{3yz} + \sqrt{3zx} \leq 2pr \sqrt{\frac{1}{2rR}} = p \sqrt{\frac{2r}{R}} \leq p$$

болж бодлого бодогдэв.

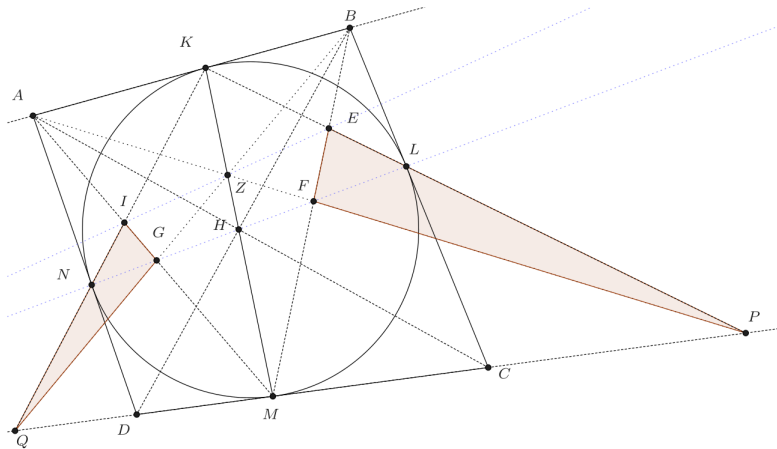
Б-1. Хариу: Оршин байхгүй. Эсрэгээс нь $\forall x \in \mathbb{R} : f(f(x)) = (x-1)f(x) + 2$ (1) байх сүрьеэктив функц оршин байна гэж үзье. Тэгвэл (1)-ээс

$$\begin{aligned} f((x-1)f(x) + 2) &= f(f(f(x))) = (f(x) - 1)f(f(x)) + 2 \\ &= (f(x) - 1)((x-1)f(x) + 2) + 2 \\ &= f(x)((x-1)(f(x) - 1) + 2) \quad (2) \end{aligned}$$

гэж үзье. f нь сүрьеэктив тул $\exists a \in \mathbb{R} : f(a) = 0$. $x = a$ гэж авбал (1)-ээс $f(0) = 2$, (2)-оос $f(2) = 0$ гэж гарна.

(2)-т $x = 1$ гэж авбал $2f(1) = f(2) = 0$ буюу $f(1) = 0$. f нь сүрьеэктив тул $\exists b \in \mathbb{R} : f(b) = 1$. (1)-д $x = b$ гэж авбал $f(f(b)) = (b-1)f(b) + 2$ буюу $f(1) = b + 1$. Иймд $f(1) = 0$ учир $f(-1) = 1$. f нь сүрьеэктив тул $\exists c \in \mathbb{R} : f(c) = -1$. (1)-д $x = c$ гэж авбал $f(f(c)) = (c-1)f(c) + 2 = -c + 3$ буюу $c = 2$ болно. Эндээс $0 = f(2) = -1$ болж зөрчил гарна.

Б-2.



$AP \cap BQ = Z, AM \cap BQ = G, AM \cap KQ = I, BM \cap AP = F, BM \cap KP = F$ гэж тэмдэглэе. $ABCD$ тойрог багтаасан дөрвөн өнцөгтийн хувьд талуудыг шүргэсэн цэгүүдийг холбосон шулуунууд диагоналиуд дээр огтлолцдог тул KL, BD, ML шулуунууд H цэгт огтлолцоно.

A, K, B цэгүүд ба Q, D, M цэгүүдийн хувьд Паппын теорем хэрэглэвэл $AD \cap QK = N, AM \cap QD = G, DB \cap KL = H$ цэгүүд нэг шулуун дээр оршино. Яг адилхнаар A, K, B цэгүүд ба M, C, P цэгүүдийн хувьд Паппын

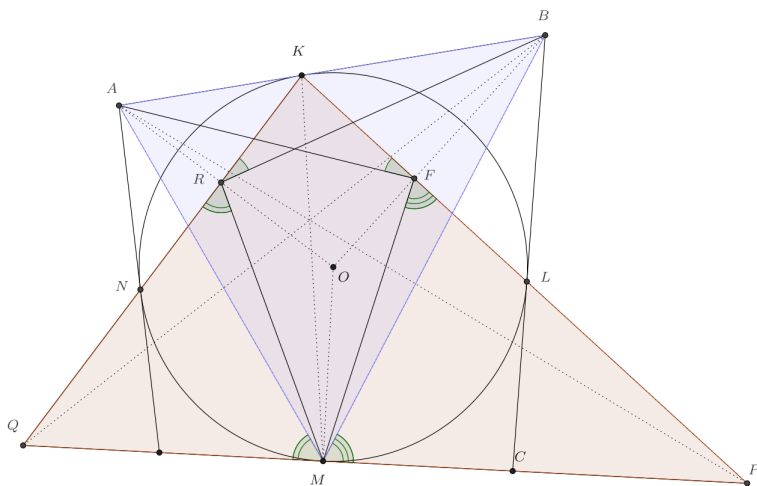
теорем хэрэглэвэл H, F, L цэгүүд нэг шулуун дээр орших тул N, C, H, F, L цэгүүд нэг шулуун дээр оршино.

Тойргийн хувь дахь A цэгийн туйлын шулуун $\ell_A = NK \ni Q$ тул $\ell_Q \ni A$, мөн M цэгийн туйлын шулуун $\ell_M = DC \ni Q$ тул $\ell_Q \ni M$ гэдгээс $\ell_Q = AQ$ болно. Q цэгээс татсан огтлогчын түүний туйлын шулууныг огтолсон I цэг тул $(QNIK)$ гармоник ба адилхнаар $\ell_P = MB$ гэдгээс $(PLFK)$ гармоник болно. Гэтэл $(QNIK)$ ба $(PLFK)$ гармоник дөрвөлүүд ба K цэг ерөнхий тул гармоник харьцааны чанар ёсоор QP, NL, IE шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно.

$\triangle QIG, \triangle PEF$ гурвалжнуудын харгалдах оройнуудыг дайрсан шулуунууд нэг цэгт огтлолцох тул Дезаргын теорем ёсоор харгалзах талуудын огтлолцол K, Z, M цэгүүд цэг шулуун дээр орших болж батлагдав.

Бодолт II. Өгсөн тойргийн төвийг O , радиус нь r байг. $AB \cap KP = F, AO \cap QK = R$ байг. Тэгвэл $OA \cdot OR = r^2 = OB \cdot OF$ тул A, R, F, B цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Эндээс $90^\circ + \angle AFK = \angle ARB = \angle BFA = 90^\circ + \angle AFK$ буюу $\angle AFK = \angle AFK = \alpha$ болно.

Нөгөө талаас $OA \cdot OR = r^2$ гэдгээс $\triangle AMO, \triangle MRO$ хувьд $\frac{AO}{r} = \frac{r}{OR}$ ба $\angle AOM$ ерөнхий гэдгээс төсөөтэй буюу $90^\circ - \angle QRM = \angle ORM = \angle OMA = 90^\circ - \angle QMA \Rightarrow \angle QRM = \angle QMA = \beta$. Үүнтэй адилхнаар $r^2 = OB \cdot OF$ гэдгээс $\angle PFM = \angle BMP = \gamma$.



QB, AP, MK шулуунууд нэг цэгт огтолно гэдгийг $\triangle QKP$ гурвалжны хувьд

Чевийн теоремийг тригонометрийн хэлбэрт бичээд баталъя.

$$s = \frac{\sin \angle PQB}{\sin \angle BQK} \cdot \frac{\sin \angle QKM}{\sin \angle MKP} \cdot \frac{\sin \angle KPA}{\sin \angle APQ} = 1$$

гэж батлах ёстой.

Гэтэл B цэгээс QK тал хүртэлх зайг хоёр янзаар бичээд тэнцүүлбэл $BQ \cdot \sin \angle PQB = BM \cdot \sin \gamma$ ба B цэгээс PK тал хүртэлх зайг хоёр янзаар бичээд тэнцүүлбэл $BQ \cdot \sin \angle BQK = BR \cdot \sin \alpha$ гэдгээс $\frac{\sin \angle PQB}{\sin \angle BQK} = \frac{BM \cdot \sin \gamma}{BR \cdot \sin \alpha}$ болно.

Үүнтэй адилаар $\frac{\sin \angle QKM}{\sin \angle MKP} = \frac{MR \cdot \sin \beta}{MF \cdot \sin \gamma}$ ба $\frac{\sin \angle KPA}{\sin \angle APQ} = \frac{AF \cdot \sin \alpha}{AM \cdot \sin \beta}$ тул эндээс

$$\begin{aligned} s &= \frac{\sin \angle PQB}{\sin \angle BQK} \cdot \frac{\sin \angle QKM}{\sin \angle MKP} \cdot \frac{\sin \angle KPA}{\sin \angle APQ} \\ &= \frac{BM \cdot \sin \gamma}{BR \cdot \sin \alpha} \cdot \frac{MR \cdot \sin \beta}{MF \cdot \sin \gamma} \cdot \frac{AF \cdot \sin \alpha}{AM \cdot \sin \beta} \end{aligned}$$

болно. $ARFB$ тойрогт багтсан дөрвөн өнцөгт гэдгээс $\frac{AF}{BR} = \frac{\sin \angle ABO}{\sin \angle BAO}$. $\triangle MFB$ -с синусын теорем ёсоор $\frac{BM}{MF} = \frac{\cos \gamma}{\sin \angle OBM}$. Үүнтэй адилаар $\triangle MPB$ -с синусын теорем ёсоор $\frac{MR}{AM} = \frac{\sin \angle OAM}{\cos \beta}$. Мөн $\gamma = 90^\circ - \angle OMB$, $\beta = 90^\circ - \angle OMA$ тул

$$s = \frac{\sin \angle ABO}{\sin \angle BAO} \cdot \frac{\sin \angle OMB}{\sin \angle OBM} \cdot \frac{\sin \angle OAM}{\sin \angle OMA}$$

болно .

Гэтэл $\triangle ABM$ -н хувьд OA, OB, OM нэг цэгт огтлолцоно гэдгийг өнцгийн хэлбэрээр бичвэл $s = 1$ болж батлагдав.

Б-3. $x \rightarrow x - 2$ гэвэл $f(x - 2) = x^p + pg(x)x + (-2)^p + 2$ болно. Хэрэв $p^2 \nmid 2^p - 2$ бол Эйзэнштэйний шинжүүрээр энэ олон гишүүнт үл задарна. Гэтэл $p^2 \mid 2^p - 2$ байх анхны тоо p оршин байдаг ($p = 1093, 3511$ нь $p \leq 4 \cdot 10^{22}$ байх утга юм). Энэ үед алгебрийн өргөтгөлийн онол ашиглан үл задарна гэдгийг баталж болно. Харин элементар аргыг нь мэдэхгүй байна.

БҮЛЭГ 2

Улсын Математикийн 51-р Олимпиадын 4-р даваа

2.1 Бодлогууд

2.1.1 Эхний өдөр–2015.05.02

Монголын Математикийн 51-р Олимпиад, IV Даваа, IX анги
Эхний өдөр 2015.05.02

Бодох хугацаа 4 цаг 30 минут, бодлого бүр 7 оноо.

A.1

$$(x^2 - 1)^2(y^2 - 1)^2 + 16x^2y^2 = z^2$$

байх бүх натурал x, y, z тоог ол.

A.2 $abc = 1$ байх эерэг a, b, c тоонуудын хувьд

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{9}{3+a^2+b^2+c^2}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

A.3 ABC гурвалжны A, B, C оройгоос татсан биссектриссийн үргэлжлэлүүд гурвалжныг багтаасан тойргийг харгалзан M, N, K цэгт огтолно. AB, MK хэрчмүүд P цэгт, AC, MN хэрчмүүд Q цэгт тус тус огтлолцдог бол PQ шулуун BC талтай параллель гэдгийг батал.

Монголын Математикийн 51-р Олимпиад, IV Даваа, X анги
Эхний өдөр 2015.05.02

Бодох хугацаа 4 цаг 30 минут, бодлого бүр 7 оноо.

A.1 a, b, c, d нь эерэг тоонууд бол

$$\frac{(a+b)^2 + (c+d)^2}{(a^2 + c^2)(b+d) + (a+c)(b^2 + d^2)} \leq \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+d}$$

болохыг батал.

A.2 Хурц өнцөгт ABC гурвалжны AD, BE өндрүүд H цэгт огтлолцоно. ABC гурвалжныг багтаасан тойрог CH диаметртэй тойрогтой C оройгоос ялгаатай K цэгт огтлолцдог бол $\frac{DK}{KE} = \frac{DH}{HE}$ гэдгийг батал.

A.3 Аль ч хоёр мөр нь хоорондоо ялгаатай, мөн аль ч хоёр багана нь хоорондоо ялгаатай будагдсан байхаар 4×4 хэмжээтэй хүснэгтийн нүднүүдийг улаан хөх хоёр өнгөөр хэдэн ялгаатай аргаар будаж болох вэ?

Монголын Математикийн 51-р Олимпиад, IV Даваа, XI анги
Эхний өдөр 2015.05.02

Бодох хугацаа 4 цаг 30 минут, бодлого бүр 7 оноо.

A.1 Самбарт тус бүр n -ээс бага n ширхэг натурал тоог бичсэн байв. Нийлбэр нь n -д хуваагддаг хэдэн тоог самбараас цор ганц аргаар сонгож болдог бол самбарт бичигдсэн бүх тоо ижил гэдгийг батал.

A.2 Тойрог багтаасан $ABCDEF$ зургаан өнцөгтийн AB, CD талуудын үргэлжлэл K цэгт, CD, EF талуудын үргэлжлэл L цэгт, DE, AF талуудын үргэлжлэл M цэгт, AF, BC талуудын үргэлжлэл N цэгт тус тус огтлолцоно. KM, LN шулуунуудын огтлолцлын цэг BE шулуун дээр оршихыг батал.

A.3 Дурын натурал a, b тоонуудын хувьд

$$af(a)^2 + bf(b)^2 + 3ab(f(a) + f(b))$$

нь бүтэн куб байх бүх $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ буулгалтыг ол (энд $\mathbb{N}$ -ээр натурал тоон олонлогийг тэмдэглэв).

Монголын Математикийн 51-р Олимпиад, IV Даваа, XII анги
Эхний өдөр 2015.05.02

Бодох хугацаа 4 цаг 30 минут, бодлого бүр 7 оноо.

A.1 Самбарт тус бүр n -ээс бага n ширхэг натурал тоог бичсэн байв. Нийлбэр нь n -д хуваагддаг хэдэн тоог самбараас цор ганц аргаар сонгож болдог бол самбарт бичигдсэн бүх тоо ижил гэдгийг батал.

A.2 Хурц өнцөгт ABC гурвалжны AD , CE өндрүүд H цэгт огтлолцдог байв. Гурвалжны AB , BC талуудын дундаж цэгүүд харгалзан M , N бөгөөд MH , NH цацрагууд ABC гурвалжныг багтаасан ω тойргийг харгалзан K , L цэгүүдээр огтолно. DHK , EHL гурвалжныг багтаасан тойргууд ω тойргийг дахин P , Q цэгт огтолдог бол D , E , P , Q цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал.

A.3 $n \times n$ хэмжээтэй хүснэгтийн зарим нүдийг хар өнгөөр, үлдсэн нүднүүдийг цагаан өнгөөр будсан бөгөөд хар нүд бүрийн хөрш цагаан өнгийн нүдний тоо тэгш байв. Хар нүд бүрийн хөрш улаан өнгийн нүдний тоо хөрш хөх өнгийн нүдний тоотой тэнцүү байхаар хүснэгтийн бүх цагаан нүдийг улаан, хөх өнгөөр будаж болохыг батал. (Ерөнхий талтай нүднүүдийг хөрш гэж тооцно.)

Монголын Математикийн 51-р Олимпиад, IV Даваа, Бага Ангийн Багш
Эхний өдөр 2015.05.02

Бодох хугацаа 4 цаг 30 минут, бодлого бүр 7 оноо.

A.1 $x^3 = y^3 + y^2 - y + 7$ тэгшитгэлийн бүх бүхэл x , y шийдийг ол.

A.2 Хавтгай дээр 19 ялгаатай цэг тэмдэглээд, тэмдэглэгдсэн хос цэг бүрийн хоорондох зайг олжээ. Олсон зайнууд нь найман ялгаатай утгатай байж болох уу?

A.3 n талтай зөв гурвалжныг талуудтай нь параллель шулуунууд татаж, нэгж талтай n^2 ширхэг жижиг зөв гурвалжинд хуваав. Аль ч жижиг гурвалжны гурван тал нь өөр өнгөтэй байхаар бүх жижиг гурвалжны талуудыг улаан, хөх, ногоон өнгөөр хэдэн ялгаатай аргаар будаж болох вэ?

Монголын Математикийн 51-р Олимпиад, IV Даваа, Дунд Ангийн Багш
Эхний өдөр 2015.05.02

Бодох хугацаа 4 цаг 30 минут, бодлого бцр 7 оноо.

A.1 Дараах чанартай бүх натурал тоон $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ дарааллыг ол:

- (1) Ямар ч натурал k -ийн хувьд $a_{2k+1} = 2 \cdot a_{2k}$ байна.
- (2) Ямар ч натурал k -ийн хувьд $a_1, a_2, \dots, a_k$ гишүүдийг k -д хуваахад ялгаатай үлдэгдлүүд өгнө.

байх бүх натурал тоон дарааллыг ол.

A.2 $a \geq 1$, $b \geq 2$ натурал тоонууд өгөгдөв. Натурал n тоо бүрийн хувьд $f(n^a)$ ба $f(b^n)$ утгууд нь харилцан анхны тоонууд байдаг бүхэл коэффициенттэй, тогтмол биш $f(x)$ олон гишүүнт олддох уу?

A.3 Сөрөг биш бүхэл n тооны хувьд $0 \leq x \leq y \leq z \leq x + y$ бөгөөд $x + y + z = n$ байх бүх бүхэл тоон (x, y, z) гурвалуудын тоог c_n гэж тэмдэглэе. $n \geq 2$ үед

$$n \cdot c_n \leq 9 \cdot (c_0 + c_1 + \dots + c_{n-2})$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

2.1.2 Хоёр дахь өдөр–2015.05.02

Монголын Математикийн 51-р Олимпиад, IV Даваа, IX анги
Хоёр дахь өдөр 2015.05.03

Бодох хугацаа 4 цаг 30 минут, бодлого бцр 7 оноо.

B.1 Тойрог дээр 51 ширхэг ялгаатай бүхэл тоо бичсэн бөгөөд тоо бүр нь цагийн зүүний дагуу түүний дараа бичигдсэн 3 тооны нийлбэрээс их байв. Бичигдсэн бүх тоонууд дотор хамгийн олондоо хэдэн натурал тоо байх вэ?

Б.2 Аль ч гурвынх нь нийлбэр нь ядаж нэг язгууртай, аль ч хоёрынх нь нийлбэр язгуургүй байх дөрвөн ширхэг квадрат гурван гишүүнт оршин байх уу?

Б.3 Гүдгэр $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн AC , BD диагоналиуд O цэгт огтлолцох бөгөөд AB , CD талуудын дундаж цэгүүд нь M , N байв. P цэгийг $MONP$ дөрвөн өнцөгт параллелограмм байхаар сонгон авсан бол APD , BPC гурвалжнуудын талбай тэнцүү гэдгийг батал.

Монголын Математикийн 51-р Олимпиад, IV Даваа, X анги
Хоёр дахь өдөр 2015.05.03

Бодох хугацаа 4 цаг 30 минут, бодлого бүр 7 оноо.

Б.1 Аль ч гурвынх нийлбэр нь ядаж нэг язгууртай, аль ч хоёрынх нь нийлбэр язгуургүй байх дөрвөн ширхэг квадрат гурван гишүүнт оршин байх уу?

Б.2 $m \geq 2$ натурал тоо бол $m^4 + 1$ тоо нь m^2 -аас их, $(m + 1)^2$ -аас бага натурал тоон хуваагчгүй гэдгийг батал.

Б.3 Элдэв талт ABC гурвалжны медиануудын огтлолцлын цэг M , багтаасан тойргийн төв O байв. OM шулуун дээр K цэгийг $\angle KAB = \angle ABC$ байхаар сонгож авсан бөгөөд K , C цэгүүд AB шулууны нэг талд оршиж байв. $\angle KCB = \angle ABC$ гэдгийг батал.

Монголын Математикийн 51-р Олимпиад, IV Даваа, XI анги
Хоёр дахь өдөр 2015.05.03

Бодох хугацаа 4 цаг 30 минут, бодлого бүр 7 оноо.

Б.1 $a + b + c + d = 2$ байдаг сөрөг биш a , b , c , d тоонуудын хувьд

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + d^2)(d^2 + a^2) \leq 1$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

Б.2 $2\angle A > \angle B$ байх элдэв талт ABC гурвалжны BC тал дээр D цэгийг $2\angle CAD = \angle ABC$ байхаар сонгон авчээ. ABC гурвалжны өндрүүд H цэгт огтлолцох бөгөөд AD шулуун нь AHC гурвалжныг багтаасан тойргийг A оройгоос ялгаатай K цэгт огтолно. BDK гурвалжныг багтаасан тойрог AB шулууныг B оройгоос ялгаатай E цэгт огтолдог бол $AE = CD$ гэдгийг батал.

Б.3 $n \geq 2$ тоо өгөгдөв. Аль ч баганад бичигдсэн хоёр тооны нийлбэр 1 байхаар 2 мөр, n баганатай хүснэгтийн нүднүүдэд эерэг тоонууд бичжээ. Хүснэгтэд тоонууд яаж бичигдсэнээс огт хамаарахгүйгээр, аль ч мөрөнд үлдсэн тоонуудын нийлбэр a -аас хэтрэхгүй байхаар хүснэгтийн багана бүрээс нэг, нийт n ширхэг тоог хүснэгтээс ямагт арчиж чаддаг байв. Ийм a тоо хамгийн багадаа хэд байж болох вэ?

Монголын Математикийн 51-р Олимпиад, IV Даваа, XII анги
Хоёр дахь өдөр 2015.05.03

Бодох хугацаа 4 цаг 30 минут, бодлого бчр 7 оноо.

Б.1 Анхны p тоог 4-т хуваахад 1 үлдэгдэл өгдөг байв. $2^n + n^2$ нийлбэр нь p -д хуваагддаг натурал n тоо төгсгөлгүй олон олдоно гэж батал.

Б.2 Хэрэв x, y, z нь $x + y + z + xyz = 4$ байдаг эерэг тоонууд бол

$$\frac{x}{\sqrt{2y+3z}} + \frac{y}{\sqrt{2z+3x}} + \frac{z}{\sqrt{2x+3y}} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}(x+y+z)$$

тэнцэтгэл биш биелнэ гэж батал.

Б.3 O цэгт төвтэй тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн AB, BC, CD, DA талуудын дундаж цэгүүд харгалзан K, L, M, N байг. KM, LN шулуунууд O цэгийг дайрдаггүй бөгөөд хоорондоо E цэгт огтлолцоно. KM хэрчим дээр P цэгийг $\angle KOE = \angle MOP$ байхаар, LN хэрчим дээр Q цэгийг $\angle LOE = \angle NOQ$ байхаар тус тус сонгон авчээ. O, P, Q цэгүүд нэг шулуун дээр оршихыг батал.

Монголын Математикийн 51-р Олимпиад, IV Даваа, Бага Ангийн Багш
Хоёр дахь өдөр 2015.05.03

Бодох хугацаа 4 цаг 30 минут, бодлого бүр 7 оноо.

Б.1 Байт харвааны тэмцээнд оролцсон харваачид 10, 5, 2, 1 оноотой байг тус бүр 30 сумаар онож нийлбэр оноогоороо уралджээ. Харваач бүр аль ч оноог 10-аас олонгүй удаа оносон бөгөөд тэмцээний дүн гарахад бүх харваачид ялгаатай оноо авсан байв. Тэмцээнд хамгийн олондоо хэдэн харваач оролцсон бэ?

Б.2 Сөрөг биш бодит a, b, c тоонуудын хувьд $a + b + c = 3$ бол

$$5a + 2ab + 2ac + 4abc \leq 16$$

гэж батал.

Б.3 Гүдгэр $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн AC, BD диагоналиуд O цэгт огтлолцох бөгөөд AB, CD талуудын дундаж цэгүүд нь M, N байв. P цэгийг $MONP$ дөрвөн өнцөгт параллелограмм байхаар сонгон авсан бол APD, BPC гурвалжнуудын талбай тэнцүү гэдгийг батал.

Монголын Математикийн 51-р Олимпиад, IV Даваа, Дунд Ангийн Багш
Хоёр дахь өдөр 2015.05.03

Бодох хугацаа 4 цаг 30 минут, бодлого бүр 7 оноо.

Б.1 n^2 ширхэг хуваагчтай натурал тоо байжээ. Тэр тооны бүх хуваагчдыг $n \times n$ хүснэгтэд аль ч м?р, баганы нийлбэр тэнцүү байхаар бичиж болдог бүх n -ийг ол.

Б.2 Сондгой анхны p тоо өгөгдөв. Натурал тоон A олонлогийн тоонуудыг p -д хуваахад гарах ялгаатай үлдэгдлүүдийн олонлогийг A_p гэж тэмдэглэе. Хамгийн бага ямар n тооны хувьд $|A| = n$ бөгөөд $|A_p| = p - 1$ байх ямар ч A олонлогт нийлбэр нь p -д хуваагддаг p ширхэг ялгаатай тоо заавал олдох вэ?

Б.3 Дурын бодит $-1 < x, y, z < 1$ тоонуудын хувьд

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} + 2 \frac{1}{(1-xy)(1-yz)(1-zx)} \geq \frac{1}{(1-x^2)(1-yz)^2} + \frac{1}{(1-y^2)(1-zx)^2} + \frac{1}{(1-z^2)(1-xy)^2}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

2.2 Бодолтууд

9-р анги

A1. $x^2 - 1 = a, y^2 - 1 = b$ гээ. Тэгвэл өгөгдсөн тэгшитгэл

$$a^2b^2 + 16(a+1)(b+1) = z^2$$

болно. $a, b > 13$ үед

$$(ab+8)^2 < z^2 < (ab+9)^2$$

гэдгийг хялбархан харж болно. Иймд a, b -ийн ядаж нэг нь 13-аас хэтрэхгүй буюу x, y -ийн ядаж нэг нь 3-аас хэтрэхгүй. Энэ үед хялбархан шалгаад хариуг олно. Хариу: $(x, y, z) = \{(1, n, 4n), (n, 1, 4n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

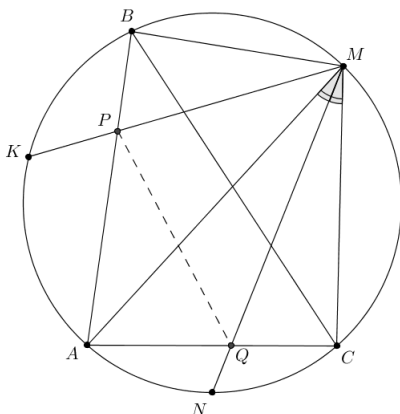
$$\mathbf{A2.} \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq$$

$$\geq 3 \cdot \frac{1}{\frac{(a+b) + (b+c) + (c+a)}{3}} =$$

$$= \frac{9}{2a+2b+2c} \geq \frac{9}{(a^2+1) + (b^2+1) + (c^2+1)} = \frac{9}{3+a^2+b^2+c^2}$$

$a = b = c = 1$ үед тэнцэлдээ хүрнэ.

A3. $AN = NC \Rightarrow MQ$ нь $\triangle AMC$ -ийн биссектрисс



Биссектрисийн тухай теорем ёсоор $\frac{AQ}{QC} = \frac{AM}{MC}$ (1) болно.

Мөн адилаар $\frac{AP}{PB} = \frac{AM}{MB}$ (2) болно.

$$\widetilde{BM} = \widetilde{MC} \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} \frac{AQ}{QC} = \frac{AP}{PB}$$

Эндээс Фалесийн теорем ёсоор $PQ \parallel BC$ болж батлагдана.

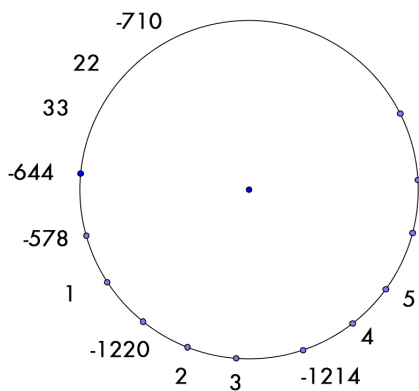
Б1. Хэрэв дараалсан 3 эерэг тоо a_i, a_{i+1}, a_{i+2} байдаг бол $a_{i-1} > 0$ болно. Эндээс бүх тоо эерэг гэж гарна. Гэтэл хамгийн бага тооны хувьд бодлогын нөхцөл биелэх боломжгүй болох учраас дурын дараалсан 3 тооны ядаж нэг нь сөрөг байна. Иймд дор хаяж $51 : 3 = 17$ ширхэг сөрөг тоо байна. Яг 17 ширхэг сөрөг тоо байдаг гээ. Тэгвэл дурын дараалсан 3 тооны яг нэг нь сөрөг байна. $a_i, a_{i+3}, a_{i+6}, (i = 1 \vee 2 \vee 3)$ сөрөг гээ.

$$a_j > a_{j+1} + a_{j+2} + a_{j+3} > a_{j+3}$$

гэж гарна. Эндээс $a_i > a_{i+3} > \dots > a_{i+48} > a_i$ болж зөрчил үүснэ. Иймд хамгийн ихдээ 33 ширхэг натурал тоо байж болно.

Жишээ байгуулъя. n -р бүлэг: $(2(n^2 - 1) - 1220, 2n, 2n + 1), n = \overline{1, 16}$.

17-р бүлэг: $(-644, -578, 1)$



Б2. Оршин байхгүй. Эсрэгээс нь f_1, f_2, f_3, f_4 гэсэн квадрат гурван гишүүнт оршин байдаг гээ.

Аливаа $f = f(x)$ квадрат гурван гишүүнт язгуургүй байна гэдэг нь $f > 0$ эсвэл $f < 0$ гэдэг нь ойлгомжтой.

Лемма: g_1, g_2, g_3 гурван ширхэг квадрат гурван гишүүнтийн аль ч хоёрынх нь нийлбэр язгуургүй, эдгээр гурвын нийлбэр нь ядаж нэг язгууртай

бол $g_1 + g_2$, $g_1 + g_3$, $g_2 + g_3$ хоёр нь ижил, нэг нь эсрэг тэмдэгтэй байна.

Баталгаа: Эсрэгээс нь $g_1 + g_2 > 0$, $g_1 + g_3 > 0$, $g_2 + g_3 > 0$ гэе. Эдгээрийг нэмбэл $2(g_1 + g_2 + g_3) > 0$ болж гурвын нийлбэр нь шийдгүй болж зөрчилд хүрнэ. Бүгд сөрөг тэмдэгтэй гэвэл мөн аналог юм. Иймд лемм батлагдав.

Тэгвэл f_1, f_2, f_3 -ийн хувьд хоёрынх нь нийлбэр эерэг, нөгөө нь сөрөг гэж үзье. (хоёр нь сөрөг, нэг нь эерэг бол аналог юм).

$$f_1 + f_2 > 0 \quad (1)$$

$$f_1 + f_3 > 0 \quad (2)$$

$$f_2 + f_3 < 0 \quad (3)$$

Одоо $f_2 + f_4$ -ийн тэмдгийг тооцёе.

А)

$$f_2 + f_4 > 0 \quad (4)$$

гэе. Эндээс f_1, f_2, f_4 -ийн хувьд Леммд (1), (4) тооцвол

$$f_1 + f_4 < 0 \text{ байх ёстой.} \quad (5)$$

Тэгвэл (2) + (4) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (f_1 + f_3) + (f_2 + f_4) > 0 \quad (*)$$

Мөн (3) + (5) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (f_2 + f_3) + (f_1 + f_4) > 0$$

болж (*)-д зөрчилд орно.

Б)

$$f_2 + f_4 < 0 \text{ гэе.} \quad (6)$$

Эндээс f_2, f_3, f_4 -ийн хувьд Леммд (3), (6) тооцвол

$$f_3 + f_4 > 0 \text{ байх ёстой.} \quad (7)$$

Мөн f_1, f_3, f_4 -ийн хувьд Леммд (2), (7) тооцвол

$$f_1 + f_4 < 0 \text{ байх ёстой.} \quad (8)$$

Тэгвэл (1) + (7) $\Rightarrow$

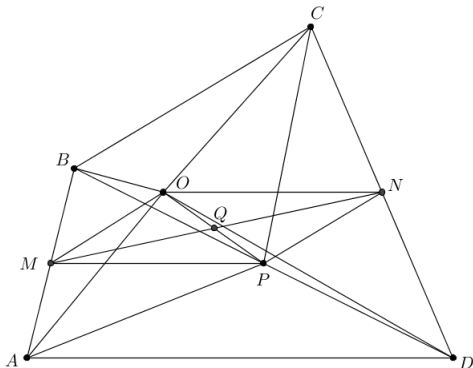
$$(f_1 + f_2) + (f_3 + f_4) > 0 \quad (**)$$

Мөн (3) + (8) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (f_2 + f_3) + (f_1 + f_4) < 0$$

болж (**)-д зөрчилд орно.

Б3. $OP \cap MN = Q$ байг. Тэгвэл



$$S_{BOC} + S_{BPC} = 2S_{BQC} = S_{BMC} + S_{CNB} \text{ гэдгээс } S_{BPC} = \frac{1}{2}S_{ABC} + \frac{1}{2}S_{BCD} - S_{BOC} = \frac{1}{2}(S_{AOB} + S_{COD} + S_{BOC} + S_{COD} - 2S_{BOC}) = \frac{1}{2}(S_{AOB} + S_{COD})$$

$$\text{Мөн адилаар } S_{APD} + S_{AOD} = 2S_{AQD} = S_{AMD} + S_{AND} = \frac{1}{2}(S_{ABD} + S_{ACD})$$

$$S_{APD} = \frac{1}{2}(S_{AOB} + S_{AOD} + S_{COD} + S_{AOD} - 2S_{AOD}) = \frac{1}{2}(S_{AOB} + S_{COD}) .$$

10-р анги

A1.

$$\frac{(a+b)^2 + (c+d)^2}{(a^2 + c^2)(b+d) + (a+c)(b^2 + d^2)} \leq \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+d} = \frac{a+b+c+d}{(a+c)(b+d)}$$

тэнцэтгэл бишийнхээ 2 талыг $\frac{(a^2 + c^2)(b+d) + (a+c)(a^2 + c^2)}{a+b+c+d}$ илэрхийл-
лээр үржүүлбэл $\frac{a^2 + c^2}{a+c} + \frac{b^2 + d^2}{b+d} \geq \frac{(a+b)^2 + (c+d)^2}{a+b+c+d}$ тэнцэтгэл бишийг
батлахтай адил болно.

$$x_1 = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{a + c}}; y_1 = \sqrt{a + c}$$

$x_2 = \sqrt{\frac{b^2 + d^2}{b + d}}; y_2 = \sqrt{b + d}$ гэж сонгоод Коши-Буянковскийн тэнцэтгэл биш хэрэглэвэл

$$\frac{a^2 + c^2}{a + c} + \frac{b^2 + d^2}{b + d} \geq \frac{(\sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + d^2})^2}{a + b + c + d} =$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)}}{a + b + c + d} \text{ боллоо. Одоо дахин}$$

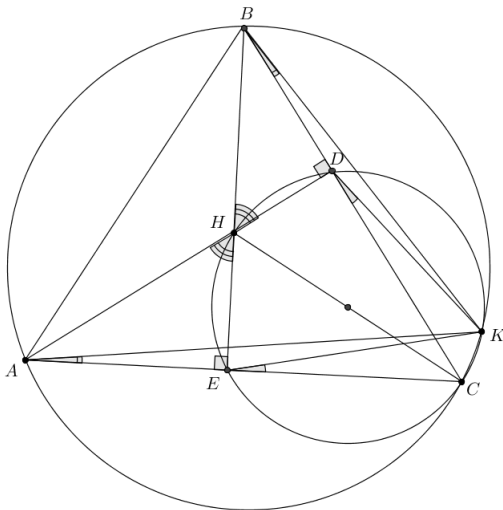
Коши-Буянковскийн тэнцэтгэл биш ашиглаж $\sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)} \geq ab + cd$ гэдгийг тооцвол $\frac{a^2 + c^2}{a + c} + \frac{b^2 + d^2}{b + d} \geq \frac{(a + b)^2 + (c + d)^2}{a + b + c + d}$ болж батлагдав.

Тэнцэлдээ хүрэх нөхцлийг тооцъё. 2 удаа Коши-Буянковскийн тэнцэтгэл биш хэрэглэсэн тул

$$\begin{cases} \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} & (*) \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} & (**) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{a + c} = \frac{\sqrt{b^2 + d^2}}{b + d} & (*) \\ ad = bc & (**) \end{cases} \text{ байхад тэнцэлдээ хүрнэ. Гэ-}$$

тэл $ad = bc$ нөхцөл биелдэг гэдгээс $(*)$ нөхцөл биелэхийг хялбархан шалгаж болно. Иймд тэнцэлдээ хүрэх нөхцөл нь $ad = bc$ байна. ◀

A2.



$$\angle BDH = \angle AEH, \angle BHD = \angle AHE \text{ тул } \Theta\Theta\text{-р } \triangle BHD \sim \triangle AHE \Rightarrow \frac{DH}{HE} =$$

$$\frac{BD}{AE} \quad (1)$$

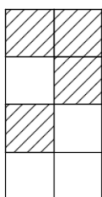
Ижил нумд тулсан учир $\angle CDK = \angle CEK \Rightarrow \angle BOK = \angle AEK, \angle KBD = \angle KAE$

$$\Theta\Theta\text{-р } \triangle BDK \sim \triangle AEK \Rightarrow \frac{BD}{AE} = \frac{DK}{KE} \quad (2)$$

Иймд (1) ба (2)-ээс $\frac{DH}{HE} = \frac{BD}{AE} = \frac{DK}{KE} \Rightarrow \frac{DH}{HE} = \frac{DK}{KE}$ гэж гарна.

А3. Нэг мөрний 4 нүдийг 2 өнгийн будгаар будах боломж нь $2^4 = 16$ байна. Иймд 4×4 хүснэгтийн бүх мөрүүд хоорондоо ялгаатай байхаар будах боломжийн тоо нь $4! \cdot C_{16}^4$ болно. Одоо энэ боломжоос 2 ижил багана олддог боломжийг хасвал бидний олох тоо гарна. 3 болон 4 ижил багана байх боломжгүй гэдэг нь бүх мөрүүд ялгаатай гэдгээс харагдана.

Яг 2 ижил багана ганц байх боломжийн үлдсэн 2 багана нь



гэсэн мөрүүдийг сэлгэхэд л үүснэ. Иймд энэ боломжийн тоо нь $C_4^2 \cdot 16 \cdot 4!$ болно. Харин 2 ижил багана 2 байх боломжийн тоо нь $\frac{16 \cdot 14}{2} \cdot C_4^2$ байна.

Эндээс бодлогын хариу нь $4!C_{16}^4 - C_4^2 \cdot 16 \cdot 4! - \frac{16 \cdot 14}{2} \cdot C_4^2 = 40704$ боллоо.

Б1. Оршин байхгүй. Эсрэгээс нь f_1, f_2, f_3, f_4 гэсэн квадрат гурван гишүүнт оршин байдаг гэе.

Аливаа $f = f(x)$ квадрат гурван гишүүнт язгуургүй байна гэдэг нь $f > 0$ эсвэл $f < 0$ гэдэг нь ойлгомжтой.

Лемм: g_1, g_2, g_3 гурван ширхэг квадрат гурван гишүүнтийн аль ч хоёрынх нь нийлбэр язгуургүй, эдгээр гурвын нийлбэр нь ядаж нэг язгууртай бол $g_1 + g_2, g_1 + g_3, g_2 + g_3$ хоёр нь ижил, нэг нь эсрэг тэмдэгтэй байна.

Баталгаа: Эсрэгээс нь $g_1 + g_2 > 0, g_1 + g_3 > 0, g_2 + g_3 > 0$ гэе. Эдгээрийг нэмбэл $2(g_1 + g_2 + g_3) > 0$ болж гурвын нийлбэр нь шийдгүй болж зөрчилд хүрнэ. Бүгд сөрөг тэмдэгтэй гэвэл мөн аналог юм. Иймд лемм батлагдав.

Тэгвэл f_1, f_2, f_3 -ийн хувьд хоёрынх нь нийлбэр эерэг, нөгөө нь сөрөг

гэж үзье. (хоёр нь сөрөг, нэг нь эерэг бол аналог юм).

$$f_1 + f_2 > 0 \quad (1)$$

$$f_1 + f_3 > 0 \quad (2)$$

$$f_2 + f_3 < 0 \quad (3)$$

Одоо $f_2 + f_4$ -ийн тэмдгийг тооцье.

А)

$$f_2 + f_4 > 0 \quad (4)$$

гэе. Эндээс f_1, f_2, f_4 -ийн хувьд Леммд (1), (4) тооцвол

$$f_1 + f_4 < 0 \text{ байх ёстой.} \quad (5)$$

Тэгвэл (2) + (4) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (f_1 + f_3) + (f_2 + f_4) > 0 \quad (*)$$

Мөн (3) + (5) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (f_2 + f_3) + (f_1 + f_4) > 0$$

болж (*)-д зөрчилд орно.

Б)

$$f_2 + f_4 < 0 \text{ гэе.} \quad (6)$$

Эндээс f_2, f_3, f_4 -ийн хувьд Леммд (3), (6) тооцвол

$$f_3 + f_4 > 0 \text{ байх ёстой.} \quad (7)$$

Мөн f_1, f_3, f_4 -ийн хувьд Леммд (2), (7) тооцвол

$$f_1 + f_4 < 0 \text{ байх ёстой.} \quad (8)$$

Тэгвэл (1) + (7) $\Rightarrow$

$$(f_1 + f_2) + (f_3 + f_4) > 0 \quad (**)$$

Мөн (3) + (8) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (f_2 + f_3) + (f_1 + f_4) < 0$$

болж (**) -д зөрчилд орно.

Б2. Эсрэгээс $m^2 < n < (m+1)^2$ байх $m^4 + 1$ -ийн хуваагч олддог гэе. Тэгвэл $n = m^2 + x$ байна. Иймд $m^4 + 1 = (m^2 + x)(m^2 - y)$ гэж бичиж чадна. $1 \leq x \leq 2m$ байх нь ойлгомжтой. Эндээс $1 + xy = m^2(x - y)$ тул $x \geq y \geq 1$ болов.

A1. Өгөгдсөн n тоог $a_1, a_2, \dots, a_n$ гэж тэмдэглэе. Нийлбэр нь n -д хуваагдах тоонуудын нэгийг нь a_1 гэж үзэхэд явцуурахгүй. $S(a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$ -ээр

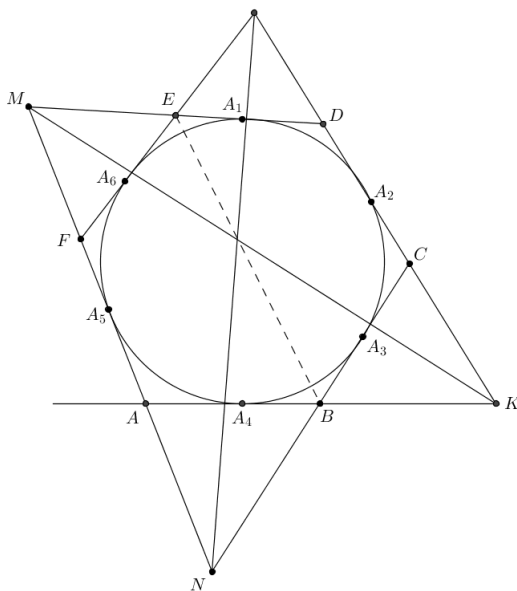
$$a_2 + (a_2 + a_3) + (a_2 + a_3) + \dots + (a_2 + \dots + a_n)$$

нийлбэрийг тэмдэглэе. Өгөгдсөн нөхцөл болон a_1 -ийн сонголтоос энэ нийлбэрийн $n-1$ ширхэг нэмэгдэхүүнүүд n -д хуваагдахад бүгд ялгаатай үлдэгдэл өгнө гэж дүгнэж болно. Иймд $S(a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \equiv n(n-1)/2 \pmod{n}$. a_n, a_{n-1} тоонууд n -ээс бага бөгөөд

$$a_n - a_{n-1} = S(a_2, \dots, a_n, a_{n-1}) - S(a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \equiv 0 \pmod{n}$$

тул эндээс $a_2, a_3, \dots, a_n$ тоонууд бүгд тэнцүү гэж мөрдөнө. Иймд нийлбэр нь n -д хуваагддаг хэсэг тоог цор ганц аргаар сонгож болох тул нийт тоонуудын нийлбэр n -д хуваагддаг болно. Иймээс бүх тоонууд тэнцүү байна.

A2. $ABCDEF$ -д багтсан тойрог ω уг 6-өнцөгтийн AB, BC, CD, DE, EF, FA талуудыг харгалзан $A_4, A_3, A_2, A_1, A_6, A_5$ цэгүүдээр шүргэдэг байг.

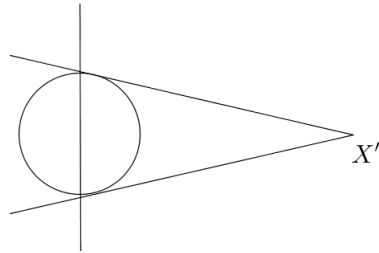


1. L -ийн поляр шулуун ω тойрог дахь A_6A_2

N -ийн поляр шулуун ω тойрог дахь A_3A_5 .

$A_6A_2 \cap A_3A_5 = X$ бол X цэгийн поляр шулуун $l_X = LN$ байна. ($X \in l_N$; $X \in l_L$)

(Поляр шулууны чанар: (теорем, тодорхойлолт)



X -ээс ω' тойрогт шүргэгч татаад шүргэлтийн цэгүүдийг холбосон шулуун нь X' -ийн поляр шулуун байна.

Үүнийг $l_{X'}$ гэнэ. Хэрэв $X \in l_{Y'}$ бол $Y \in l_{X'}$ байна.)

2. Өмнөхтэй адил: M -ийн поляр шулуун ω тойрог дахь A_5A_1

K -ийн поляр шулуун ω тойрог дахь A_4A_2

$A_5A_1 \cap A_4A_2 = Y$ гэвэл Y цэгийн поляр шулуун $l_Y = MK$.

3. B -ийн поляр шулуун A_4A_3

E -ийн поляр шулуун A_6A_1

$A_4A_3 \cap A_6A_1 = Z$ гэвэл $l_Z = BE$. ($Z \in l_B; Z \in l_E$)

Паскалын теоремоор тойрог дээрх $A_6, A_2, A_4, A_3, A_5, A_1$, цэгүүдийн хувьд $A_6A_2 \cap A_3A_5 = X$, $A_2A_4 \cap A_5A_1 = Y$, $A_4A_3 \cap A_1A_6 = Z$ гэвэл X, Y, Z цэгүүд 1 шулуун дээр оршино. $X, Y, Z \in l$ гэвэл l цэгийн поль (pole) нь l_X, l_Y, l_Z дээр байрлана. Эндээс l_X, l_Y, l_Z нэг цэгт огтлолцоно. Эндээс $LN; MK; BE$ шулуунууд 1 цэгт огтлолцоно. ★ Батлагдав.

(★ Проектив геометрээс $A_6A_2 \parallel A_3A_5$ бол $A_6A_2 \cap A_3A_5 = X_\infty$ гэж болно. Үүнтэй адил $A_5A_1 \parallel A_4A_2$ бол $A_5A_1 \cap A_4A_2 = Y_\infty$ гэж болно. $A_4A_3 \parallel A_6A_1$ бол $A_4A_3 \cap A_6A_1 = Z_\infty$ гэж болно. Энэ нь бодлогын бодолтонд саад учруулахгүй.)

A3. Дурын p анхны тооны хувьд $a = b = p$ гэвэл $2pf(p)(f(p) + p)$ нь бүтэн куб болох ба эндээс $p|f(p)$ болно. $f(p) = kp, k \in \mathbb{N}$ гээ. $a = p, b = 1, 2$ гэвэл

$$pf(p)^2 + f(1)^2 + 3p(f(p) + f(1)) = m^3$$

$$pf(p)^2 + 2f(2)^2 + 6p(f(p) + f(2)) = n^3$$

болно. Эндээс $m, n > \sqrt[3]{k^2}p$ болох ба

$$3\sqrt[3]{k^2}p(\sqrt[3]{k^2}p - 1) + 1 < n^3 - m^3 = 3kp^2 + 3p(2f(2) - f(1)) + 2f(2)^2 - f(1)^2$$

гэдгээс p нь хангалттай том анхны тоо үед $k = 1$ байна. Одоо дурын натурал c тоо ба хангалттай том p анхны тооны хувьд $a = c, b = p$ гэвэл

$$(c + p - 1)^3 < cf(c)^2 + p^3 + 3cp(f(c) + p) < (c + p + 1)^3$$

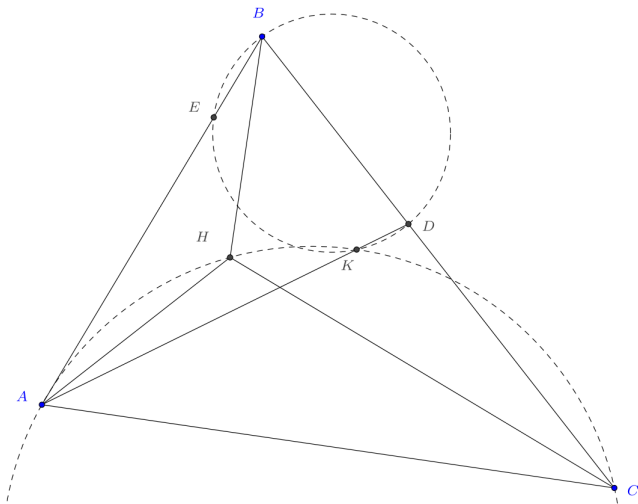
болох ба эндээс $cf(c)^2 + p^3 + 3cp(f(c) + p) = (c + p)^3$ болно. Эндээс $f(c) = c$ гэж гарна. Иймд f нь зөвхөн адилтгал буулгалт байна.

Б1. $a, b, c, d \geq 0$ учир $(a^2 + b^2) \geq a^2 + b^2$, $(b^2 + c^2) \geq b^2 + c^2$, $(c^2 + d^2) \geq c^2 + d^2$, $(d^2 + a^2) \geq d^2 + a^2$ байна. Иймд $(a + b)(b + c)(c + d)(d + a) \leq 1$ гэж батлахад хангалттай. Энэ нь 4-н тооны Кошийн тэнцэл бишээр

$$(a + b)(b + c)(c + d)(d + a) \leq \left(\frac{a + b + b + c + c + d + d + a}{4} \right)^4 = 1$$

болж батлагдав. Тэнцэх нөхцөл нь $a + b = b + c = c + d = d + a$ гэдгээс $a = c, b = d$ гэж гарах ба $ab = bc = cd = da = 0$ гэдгээс $a = c = 1, b = d = 0$ эсвэл $a = c = 0, b = d = 1$ үед тэнцэлдээ хүрнэ.

Б2. $2\angle A > \angle B$ байх элдэвт талт ABC гурвалжны BC тал дээр D цэгийг $2\angle CAD = \angle ABC$ байхаар сонгон авчээ. ABC гурвалжны өндрүүд H цэгт огтлолцох бөгөөд AD шулуун нь AHC гурвалжныг багтаасан тойргийг A оройгоос ялгаатай K цэгт огтолно. BDK гурвалжныг багтаасан тойрог AB шулууныг B оройгоос ялгаатай E цэгт огтолдог бол $AE = CD$ гэдгийг батал.



$\triangle ABC$ -ны B оройн өнцгийг β гэж тэмдэглэе. $AH KC$ тойрогт багтсан тул $\angle AKC = \angle AHC = 180^\circ - \beta$ болно.

Өгсөн ёсоор $\angle KAC = \frac{\beta}{2}$ тул $\triangle AKC$ -аас $\angle ACK = 180^\circ - \angle AKC - \angle KAC = \frac{\beta}{2}$ болно Иймд $\triangle AKC$ адил хажуут болно.

$EBDK$ тойрогт багтсан дөрвөн өнцөгт гэдгээс $\angle EKD = 180^\circ - \beta$ тул $\angle AKE = 180^\circ - \angle EKD = \beta$ болж $\angle AKE + \angle AKC = 180^\circ$ буюу E, K, C цэгүүд нэг шулуун дээр оршино.

$\triangle ADC$ -ны хувьд синусын теорем хэрэглэвэл $\frac{AC}{\sin \angle ADC} = \frac{DC}{\sin \beta/2}$ (*) юм.

Нөгөө талаас $EBDK$ тойрогт багтсан дөрвөн өнцөгт тул $\angle AEC = 180^\circ - \angle ADC$ гэдгээс $\triangle AEC$ -нд синусын теорем бичвэл $\frac{AE}{\sin \beta/2} = \frac{AC}{\sin \angle AEC} =$

$\frac{AC}{\sin \angle ADC}$ (**) болно.

(*) ба (**) - с $AY = SC$ болж батлагдав.

Б3. Хариу: a -ын хамгийн бага утга

$$c = \frac{\left[\frac{(n+1)^2}{4} \right]}{n+1} = \begin{cases} \frac{k+1}{2}, & n = 2k+1 \quad \text{үед} \\ \frac{k(k+1)}{2k+1}, & n = 2k \quad \text{үед} \end{cases}$$

$n = 2k$ үед

$n = 2k+1$ үед

$\frac{k}{2k+1}$	$\frac{k}{2k+1}$	$\dots$	$\frac{k}{2k+1}$
$\frac{k+1}{2k+1}$	$\frac{k+1}{2k+1}$	$\dots$	$\frac{k+1}{2k+1}$

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\dots$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\dots$	$\frac{1}{2}$

гэж бичигдсэн үед a нь c -ээс бага байж болохгүй нь харагдана.

Одоо тоонуудыг яаж ч бичсэн байхад нэг мөрөнд үлдсэн тоонуудын нийлбэр c -ээс хэтрэхгүй байхаар багана бүрд 1 тоо нийт n тоог дарж болохыг харуулъя. Эхний мөрөнд бичигдсэн тоонууд $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ бөгөөд нийлбэр нь S дараагийн мөрөнд бичигдсэн тоонууд $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ бөгөөд нийлбэр нь T болог.

Лемм: $\begin{cases} a_1 + \dots + a_{s+1} > c, \\ b_1 + \dots + b_{t+1} > c, \end{cases}$ бол $s+t \geq n$ байна.

Баталгаа: Эхний нөхцлөөс $\frac{a_1 + \dots + a_{s+1}}{s+1} > \frac{c}{s+1}$ гэж гарах ба

$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{a_1 + \dots + a_{s+1}}{s+1}$ тул $\frac{s}{n} > \frac{c}{s+1}$ гэж гарна. Үүнтэй нэгэн адилаар $\frac{T}{n} > \frac{c}{t+1}$ гэж гарна. $S+T = n$ тул энэ 2 тэнцлээс (*)

$\frac{1}{c} > \frac{1}{s+1} + \frac{1}{t+1}$ гэж гарах юм.

а) $n = 2k + 1$ болог. Эсрэгээс $s + t \leq 2k$ бол $s + 1 + t + 1 \leq 2k + 2$ гэж үзэх бөгөөд гармоник дундаж арифметик дундажаас бага тул $\frac{2}{\frac{1}{s+1} + \frac{1}{t+1}} \leq \frac{s+1+t+1}{2} \leq \frac{2k+2}{2}$ буюу $\frac{1}{s+1} + \frac{1}{t+1} \geq \frac{2}{k+1} = \frac{1}{c}$ болж (*)-д зөрчил үүснэ.

б) $n = 2k$ болог. Эсрэгээс $s + t \leq 2k - 1$ бол $s + 1 + t + 1 \leq 2k + 1$ гэж гарах бөгөөд энэ үед өмнөхтэй адил аргаар $\frac{1}{s+1} + \frac{1}{t+1} \geq \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} = \frac{2k+1}{(k+1)k} = \frac{1}{c}$ болж бас (*)-д зөрчинө.

Тэгэхээр $a_1 + \dots + a_{s+1} > c$ байх $\min s$ -ийг s_0 , $b_1 + \dots + b_{t+1} > c$ байх $\min t$ -ийг t_0 гэвэл Лемм ёсоор $s_0 + t_0 \geq n$ байна. s_0, t_0 -ийн сонголт ёсоор $a_1 + \dots + a_{s_0}, b_1 + \dots + b_{t_0} \leq c$ болох ба энэ нь 1-р мөрнөөс s_0 тоог, 2-р мөрнөөс t_0 тоог (эсвэл түүнээс цөөн тоог) үлдээж болохыг харуулж байна.

12-р анги

A1. Өгөгдсөн n тоог $a_1, a_2, \dots, a_n$ гэж тэмдэглэе. Нийлбэр нь n -д хуваагдах тоонуудын нэгийг нь a_1 гэж үзэхэд явцуурахгүй. $S(a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$ -ээр

$$a_2 + (a_2 + a_3) + (a_2 + a_3) + \dots + (a_2 + \dots + a_n)$$

нийлбэрийг тэмдэглэе. Өгөгдсөн нөхцөл болон a_1 -ийн сонголтоос энэ нийлбэрийн $n - 1$ ширхэг нэмэгдэхүүнүүд n -д хуваагдах бүгд ялгаатай үлдэгдэл өгнө гэж дүгнэж болно. Иймд $S(a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \equiv n(n-1)/2 \pmod{n}$. a_n, a_{n-1} тоонууд n -ээс бага бөгөөд

$$a_n - a_{n-1} = S(a_2, \dots, a_n, a_{n-1}) - S(a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \equiv 0 \pmod{n}$$

тул эндээс $a_2, a_3, \dots, a_n$ тоонууд бүгд тэнцүү гэж мөрдөнө. Иймд нийлбэр нь n -д хуваагддаг хэсэг тоог цор ганц аргаар сонгож болох тул нийт тоонуудын нийлбэр n -д хуваагддаг болно. Иймээс бүх тоонууд тэнцүү байна.

B1. $p \equiv 1 \pmod{n}$ учраас Вильсоны теоремоор

$$\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 + 1 \equiv 0(p) \quad (*)$$

байна. $n_k = (p-1)^{2k+1}(\frac{p-1}{2})!$ дүрмээр тодорхойлогдох тоон дараалал бодлогын нөхцлийг биелүүлнэ. Үнэндээ Фермагийн бага теоремоор $2^{n_k} \equiv 1(p)$ ба мөн $(*)$ -оос $n_k^2 \equiv ((-1)^k(\frac{p-1}{2})!)^2 \equiv -1(p)$ байх тул $2^{n_k} + n_k \equiv 0 \pmod{p}$ болж бодлого бодогдов.

Б2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ функц нь $(0, +\infty)$ интервал дээр хотгор функц болно.

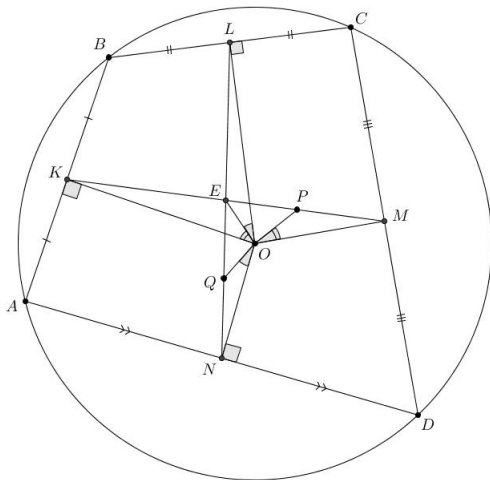
Иймд

$$\begin{aligned} & \frac{x}{\sqrt{2y+3z}} + \frac{y}{\sqrt{2z+3x}} + \frac{z}{\sqrt{2x+3y}} = \\ & = \frac{x}{x+y+z} f(2y+3z) + \frac{y}{x+y+z} f(2z+3x) + \frac{z}{x+y+z} f(2x+3y) \geq \\ & \geq f\left(\frac{x(2y+3z) + y(2z+3x) + z(2x+3y)}{x+y+z}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\frac{x+y+z}{xy+yz+zx}} \end{aligned}$$

Өгөгдсөн тэнцэтгэл бишийг батлахын тулд $x+y+z \geq xy+yz+zx$ гэж батлахад хангалттай.

Бид x, y, z -ийн x -ийг хамгийн бага, y -ийг хамгийн их гэж үзэхэд явцуурах зүйл байхгүй. $x+y+z+xyz = 4$ гэдгээс $x \leq 1, y \leq 1$ болно. Иймд $x+y+z \geq xy+yz+zx$ гэж батлах нь $x+y+\frac{4-x-y}{1+xy} \geq (x+y) \cdot \frac{4-x-y}{1+xy} + xy$ гэж батлахтай адил. Уг тэнцэтгэл бишийг хувиргавал $(x+y)(1+xy) + 4-x-y \geq (x+y)(4-x-y) + xy(1+xy) \Leftrightarrow x+y+x^2y+xy^2+4-x-y \geq 4x+4y-x^2-y^2-2xy+xy+x^2+y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-4y+2xy+4 \geq xy(xy+1-x-y) \Leftrightarrow (x+y-z)^2 \geq xy(x-1)(y-1)$ болно. Гэвч $xy(x-1)(y-1) \leq 0$ учир бодлого бодогдов. $x=y=z=1$ үед батлах тэнцэтгэл биш тэнцэлдээ хүрнэ.

Б3. Бид O, P, Q цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батлахын тулд $\angle POQ = 180^\circ$ гэж батлахад хангалттай.



$ABCD$ дөрвөн өнцөгт нь тойрогт багтсан тул $OA = OB = OC = OD$ байна. Ийм учраас $\triangle AOD$ -ийн хувьд N цэг нь өндөр, медиан, биссектрис болно. Үүнтэй нэгэн адил $K; L; M$ цэгүүд нь O цэгээс буусан талдаа перпендикуляр болно. Эндээс $MDNO$ дөрвөн өнцөгт нь тойрогт багтана. $MDNO$ болон $ABCD$ дөрвөн өнцөгтүүд нь $\angle D$ гэсэн ерөнхий өнцөгтэй тул $\angle D + \angle B = 180^\circ$ буюу $\angle D + \angle NOM = 180^\circ$ тул $\angle NOM = \angle B$ байна. Мөн $BLOK$ дөрвөн өнцөгт нь $ABCD$ -тэй $\angle B$ гэсэн ерөнхий өнцөгтэй тул дээрхийн адил $\angle D = \angle LOK$ болно.

Энд $\angle D = \angle LOE + \angle EOK = \angle NOQ + \angle MOP$ байх бөгөөд $\angle NOQ + \angle MOP + \angle B = \angle D + \angle B = 180^\circ$ билээ. Бодлого бодогдов.

Бага ангийн багш

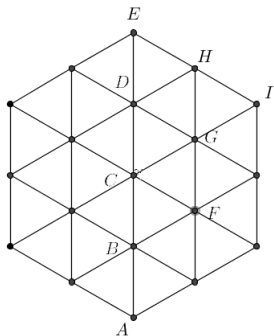
A1. (Н.Аргилсан)

$y^2 - y + 7 = (y - \frac{1}{2})^2 + 6\frac{3}{4} > 0$ тул $x^3 > y^3$ байх нь илэрхий. Одоо баруун талыг $(y + 1)^3$ хүртэл гүйцээе.

$(y + 1)^3 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 = (y^3 + y^2 - y + 7) + (2y^2 + 4y - 6)$ болно. Хэрэв $2y^2 + 4y - 6 > 0$ бол $x^3 < (y + 1)^3$ болох учир $y^3 < x^3 < (y + 1)^3$ болоход хүрч зөрчил үүснэ. (Ө.х дараалсан 2 бүхэл тооны кубуудын дунд бүхэл тооны куб оршин байхгүй.)

Иймд $2y^2 + 4y - 6 \leq 0$ байх ёстой. $2(y^2 + 2y - 3) = 2(y + 3)(y - 1)$ буюу $y = -3, -2, -1, 0, 1$ гэсэн 5 боломжтой. Эдгээрийг шалгавал $(x, y) = (-2, -3), (2, -1), (2, 1)$ гэсэн 3 шийдтэй болох нь харагдана.

A2.



Зурагт үзүүлснээр 19 цэг авахад AB , AC , AD , AE , AF , AG , AH , AI -уудаас өөр зай байхгүйг хялбар харж болно.

A3. Шивэлтийн алдааны улмаас ерөнхий тохиолдлыг бодлого болж хувирсанд нийт оролцогч багш нараасаасаа хүлцэл өчье. Жинхэнэ бодлого нь 4 тохиолдолд байсан ба шууд тоолох замаар 17136 боломжтойг тооцоолж болно.

B1.

10 оноог оносон тоо $-x$, 5 оноог оносон тоо $-y$, 2 оноог оносон тоо $-z$, 1 оноог оносон тоо $-t$ гэе.

Бодлогын нөхцлөөс $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 10$, $0 \leq z \leq 10$, $0 \leq t \leq 10$ ба эдгээр нь бүхэл тоо гэж гарах ба цаашид ийм байдлаар ойлгоно. Мөн $x + y + z + t = 10$ билээ.

Оноо	10	5	2	1	Нийт оноо
Оносон тоо	x	y	z	t	$A = 10x + 5y + 2z + t$
Боломжит хамгийн их оноо	10	10	10		170
Боломжит хамгийн бага оноо		10	10	10	80

Тэгвэл $80 \leq A \leq 170$ утгаас авах боломжтой. Ө.х. $170 - 79 = 91$ утга байна. Эдгээрээс хэдэн ялгаатай утга байна тэмцээнд хамгийн олондоо төчнөөн харваач оролцсон гэсэн үг юм. Түүний математик томъёоллыг бичвэл:

$$x + y + z + t = 30, \quad x, y, z, t \in \mathbb{Z}$$

$$0 \leq x \leq 10, \quad 0 \leq y \leq 10, \quad 0 \leq z \leq 10, \quad 0 \leq t \leq 10$$

нөхцлийг хангасан $A = 10x + 5y + 2z + t$ ялгаатай тоон утга хэд вэ? гэсэн үг юм.

Лемм: Хэрэв

$$0 \leq x \leq 9, 0 \leq y \leq 9, 0 \leq z \leq 9, 0 \leq t \leq 9 \quad (1)$$

нөхцөлд $A = 10x + 5y + 2z + t$ байг. Тэгвэл

$$A - 9, A - 8, A - 5, A - 4, A - 3, A - 1 \quad (2)$$

ба

$$A + 1, A + 3, A + 4, A + 5, A + 8, A + 9 \quad (3)$$

утгыг авч чадна.

Баталгаа: 1, 2, 5, 10 онооны харгалзах зөрөө нь $2 - 1 = 1$, $5 - 2 = 3$, $5 - 1 = 4$, $10 - 5 = 5$, $10 - 2 = 8$, $10 - 1 = 9$ байна. Өөрөөр хэлбэл, 1 онооны 1 онолтыг 2 онооны 1 онолт руу шилжүүлбэл 1 оноогоор нэмэгдэнэ. Эсрэг үйлдэл хийвэл 1 оноогоор хасагдана гэсэн үг. Иймд оноог оноо болгож чадаж байна. Бусдыг үүнтэй ижлээр гүйцэтгэж болно.

Мөрдөлгөө: (1) нөхцөл биелж байхад A ба $A + 2$ оноо авч чадаж байвал $[A - 9, A + 11]$ хоорондох бүх бүхэл утгыг авч чадна.

Баталгаа: Лемм A -ийн хувьд $\{A - 7, A - 6, A - 3, A - 2, A - 1, A + 1, A + 3, A + 5, A + 6, A + 7, A + 10, A + 11\}$, $A + 2$ дээр Лемм ашиглавал $\{A - 7, A - 6, A - 3, A - 2, A - 1, A + 1, A + 3, A + 5, A + 6, A + 7, A + 10, A + 11\}$ утгыг авч чадна. Эдгээрийг нэгтгэвэл мөрдөлгөө батлагдав. Одоо үндсэн бодолт хийе.

Яг нэг нь 10-тай тэнцүү байхад A -ийн боломжит хамгийн бага утга нь

$$A = 10x + 5y + 2z + t \geq 10 \cdot 2 + 5 \cdot 9 + 2 \cdot 9 + 1 \cdot 10 = 93$$

байна. Иймд $A - 9 = 93$ гэвэл $A = 102$ болно.

Оноо	10	5	2	1	Нийт оноо
Оносон тоо	3	9	9	9	102

102 оноо Леммийн нөхцөл хангаж байна. Иймд (2) нөхцөл ёсоор 93, 94, 97, 98, 99, 101 гэсэн оноо гарна. Мөн

Оноо	10	5	2	1	Нийт оноо
Оносон тоо	3	7	10	10	95
Оносон тоо	2	10	8	10	96
Оносон тоо	4	6	10	10	100

Энэ нь $93 - 103$ онож чадна гэсэн үг юм. Мөн

Оноо	10	5	2	1	Нийт оноо
Оносон тоо	4	9	8	9	110
Оносон тоо	5	7	9	9	112

Иймд Мөрдөлгөө ёсоор $[110 - 9, 110 + 11]$ буюу $[101, 121]$ хоорондох бүх бүхэл утгыг авна. Одоо $A - 9 = 122$ гэж сонговол $A = 131$ болно.

Оноо	10	5	2	1	Нийт оноо
Оносон тоо	7	8	6	9	131
Оносон тоо	7	8	8	7	133

Иймд Мөрдөлгөө ёсоор $[122, 144]$ хоорондох бүх бүхэл утгыг авна.

Оноо	10	5	2	1	Нийт оноо
Оносон тоо	9	9	7	5	154
Оносон тоо	9	9	9	3	156

Мөрдөлгөө ёсоор $[145, 165]$ хоорондох бүх бүхэл утгыг авна.

Оноо	10	5	2	1	Нийт оноо
Оносон тоо	10	10	6	4	166
Оносон тоо	10	10	7	3	167
Оносон тоо	10	10	8	2	168
Оносон тоо	10	10	9	1	169

Эндээс дүгнэхэд нийтдээ $[93, 170]$ хоорондох бүх утгыг авч чадна.

$x \geq 3$ үед $A = 10x + 5y + 2z + t \geq 10 \cdot 3 + 5 \cdot 7 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 90 = 95$ байна.

Иймд $x < 3$ буюу $x = \{0, 1, 2\}$ болно.

$x = 0$ үед

Оноо	10	5	2	1	Нийт оноо
Оносон тоо	0	10	10	10	80

$x = 1$ үед үлдсэн гурав нь $(9, 10, 10)$ сэлгэмэл байна. Энэ нь 3 боломжтой. Өөр боломж байхгүй.

Оносон тоо	1	9	10	10	85
Оносон тоо	1	10	9	10	88
Оносон тоо	1	10	10	9	89

$x = 2$ үед үлдсэн гурав нь $(8, 10, 10)$ ба $(9, 9, 10)$ сэлгэмэл байна. Энэ нь нийтдээ 6 боломжтой. Өөр боломж байхгүй.

Оносон тоо	2	10	10	8	98
Оносон тоо	2	10	8	10	96
Оносон тоо	2	8	10	10	90
Оносон тоо	2	10	9	9	97
Оносон тоо	2	9	10	9	94
Оносон тоо	2	9	9	10	93

Эндээс дүгнэхэд $\{81, 82, 83, 84, 86, 87, 91, 92\}$ нийтдээ 8 оноо авч чадахгүй байна. Иймд $91 - 8 = 83$. Хариу: Хамгийн ихдээ 83 хүн оролцоно.

Дунд ангийн багш

A1. $S(n)$ -ээр $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ олонлогийг тэмдэглэе. Энэ олонлогийн хамгийн их тоог a , хамгийн бага тоог b гье. (2)-оос $|S(n)| = n$ болох тул $a - b \geq n - 1$. Хэрэв $a - b \geq n$ бол $a, b \in S(a - b)$ болох ба $a \equiv b \pmod{a - b}$ гэдгээс (2) нөхцөл зөрчигдөнө. Иймд $a - b = n - 1$ буюу $S(n)$ олонлогийн тоонууд дэс дараалсан гэж гарна. $S(2^{n+1}) \ni a_{2^{n+1}}, a_2$ гэдгээс $2^{n+1} > a_{2^{n+1}} - a_2$. Дурын натурал тоо n -ын хувьд (1) ээс $a_{2^{n+1}} - a_2 = (2^n - 1)a_2$ гэж мөрдөх тул $2 \geq a_2$.

$a_2 = 1$ байг. $S(2)$ олонлог дэс дараалсан тоонуудаас тогтох тул $a_1 = 2$ болно. Энэ нь $a_4 = 2a_2 = 2$ гэдэгтэй зөрчилдөнө. $a_2 = 2$ бол $a_{2^n} = 2^n$ болно. Хэрэв $a_1 = 3$ бол $a_3 = 1$ байна. Улмаар $n \geq 5$ үед $a_n = n$ гэж мөрдөнө. Мөн адилаар $a_1 = 1$ бол $n \geq 3$ үед $a_n = n$ байх нь мөрдөнө.

A2. Бодолт-1 $(f(n^a), f(b^n)) = 1, x - y \mid f(x) - f(y)$ байна. $A = \{p \mid p \mid f(n), n \in \mathbb{Z}\}$ авч үзье. $|A| = \infty$ гэж баталъя.

Эсрэгээс нь $A = \{p_1, \dots, p_s\}$ болог. $f(0) = a_0$ гье. $f(a_0 \cdot p_1 \cdots p_s \cdot x) = a_0 \cdot (p_1, \dots, p_s \cdot x \cdot M + 1)$ хэлбэртэй болно. Эндээс $\exists p \mid p_1 \cdots p_s \cdot x \cdot M + 1, a_0 < p \in \mathbb{P}$ олдож зөрчилд хүрнэ.

Иймд $p \mid f(m)$ байх хангалттай том $p \in \mathbb{P}$ олдоно. Эндээс $(m, p) = 1, g$ нь $\pmod{p}$ -ээр анхны язгуур байг. Мөн $(b, p) = 1$ сонгож болно. $g^l \equiv m(p)$, $\exists l \in \{1, 2, \dots, p - 1\}$ олдоно. $b \equiv g^s(p) \exists s$. $\boxed{n = l \cdot g^l}$ гэж сонгоё.

$f(n^a) = f((l \cdot g^l)^a) \equiv f(l^a \cdot m^a) \equiv f(m) \equiv 0(p)$ болно. Энд $p \mid l^a \cdot m^a - m \mid f(l^a \cdot m^a) - f(m)$ ашиглав. $f(b^n) = f(b^{l \cdot g^l}) \equiv f(g^{sl \cdot g^l}) \equiv f(m^{s \cdot g^l}) \equiv f(m) \equiv 0(p)$ болж $p \mid (f(n^a), f(b^n))$ гэдгээс зөрчилд хүрнэ.

Бодолт-2: $f(b^a)$ ба $f(b^b)$ нь харилцан анхны тул $f(0)$ ба b нь бас харилцан анхны байна.

f нь тогтмол биш бөгөөд b^{am} нь төгсгөлгүй олон утга авах тул $p \mid f(b^{am})$ байдаг натурал тоо m ба анхны тоо p олдоно. Хэрэв $p \mid b$ бол $p \mid f(0)$ болж зөрчил гарах тул $p \nmid b$ байна. Иймээс $b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

$x \equiv am - b^m \pmod{p}$ байдаг натурал тоо x сонгон аваад $n = am + (p-1)x$ гээ. Тэгвэл

$$f(n^a) \equiv f((am - x)^a) \equiv f(b^{am}) \equiv 0 \equiv f(b^{am+(p-1)x}) \equiv f(b^n) \pmod{p}$$

болж зөрчилд хүрнэ.

А3. $X_n := \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq x \leq y \leq z \leq x + y \text{ \& } x + y + z = n\}$ гээ. Тэгвэл $c_n = |X_n|$.

$Y_n := \{(p, q, r) \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq p, q, r \text{ \& } 2p + 3q + 4r = n\}$ гэвэл $f: X_n \rightarrow Y_n$, $f(x, y, z) := (y - x, x + y - z, z - y)$ болон $g: Y_n \rightarrow X_n$, $g(p, q, r) := (q + r, p + q + r, p + q + 2r)$ буулгалтууд нь урвуу буулгалтууд болохыг хялбархан харж болно. Иймд $c_n = |Y_n|$ байна, өөрөөр хэлбэл, c_n нь n -ийг 2, 3, 4 тоонуудын нийлбэрт задлах боломжийн тоотой тэнцэнэ (нэмэгдэхүүний байр харгалзахгүй).

Одоо Y_n -д орж байгаа бүх $n = 2p + 3q + 4r$ задаргааг нэмье. Тэгвэл зүүн гар талд $n \cdot c_n$ гарна. Нөгөө талаас өгөгдсөн $m \geq 0$ хувьд $p \geq m$ байдаг задаргааний тоо c_{n-2m} байна. Иймд $p = m$ байдаг задаргааний тоо $c_{n-2m} - c_{n-2(m+1)}$ байна (энд $c_{-1} = c_{-2} = \dots = 0$ гэж тодорхойлно). Иймд 2 нь $\sum_{m \geq 0} m \cdot (c_{n-2m} - c_{n-2(m+1)}) = \sum_{m \geq 1} c_{n-2m}$ коэффициенттэй байна.

3, 4-ийн хувьд мөн адил аргаар тооцно. Иймд

$$\begin{aligned} n \cdot c_n &= \sum_{k=2}^4 \sum_{m=1}^{\lfloor n/k \rfloor} k c_{n-km} \\ &= \sum_{j=2}^n \left(\sum_{\substack{2 \leq k \leq 4 \\ k \mid j}} k \right) c_{n-j} \\ &\leq 9 \sum_{m=0}^{n-2} c_m \end{aligned}$$

болж бодлого бодогдов.

Мөн ялгаварыг нь $\frac{(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)(1-xy)^2(1-yz)^2(1-zx)^2}$ гэж харуулан баталж болно.

Б3. Эхлээд хэрэв бодит a, b, c, d, e, f тоонуудын хувьд дурын бодит λ, μ тоо авахад

$$a + b\lambda^2 + c\mu^2 + 2(d\lambda + e\lambda\mu + f\mu) \geq 0$$

байдаг бол

$$abc + 2def \geq ae^2 + bf^2 + cd^2$$

болохыг харуулъя. Нөхцөлийн илэрхийлэл нь λ -ийн хувьд байнга сөрөг биш байдаг (хамгийн ихдээ) хоёр зэргийн олон гишүүнт тул $b > 0$ бөгөөд дискриминант нь эерэг биш, өөрөөр хэлбэл, $(d + e\mu)^2 - b(a + 2f\mu + c\mu^2) \leq 0$ байна. Эмхэлээд $(bc - e^2)\mu^2 + 2(bf - de)\mu + (ab - d^2) \geq 0$ болно. Энэ нь μ -ийн хувьд байнга сөрөг биш байдаг (хамгийн ихдээ) хоёр зэргийн олон гишүүнт тул мөн дискриминант нь эерэг биш буюу $(bf - de)^2 - (bc - e^2)(ab - d^2) \leq 0$ байна. Эндээс d^2e^2 нь хураагдах бөгөөд үлдсэнийг нь b -д хуваавал бидний батлах тэнцэл биш гарна.

Иймд дурын бодит λ, μ тоонуудын хувьд

$$\frac{1}{1-x^2} + \frac{\lambda^2}{1-y^2} + \frac{\mu^2}{1-z^2} + 2\left(\frac{\lambda}{1-xy} + \frac{\lambda\mu}{1-yz} + \frac{\mu}{1-zx}\right) \geq 0$$

болохыг харуулахад хангалттай. Гэтэл энэ нь геометр прогрессийн нийл-бэрийн томъёогоор $\sum_{n=0}^{\infty} (x^n + \lambda y^n + \mu z^n)^2$ гэж бичигдэх тул илт юм.

Тэнцэл биелэхийн тулд λ, μ тоонууд дурын $n \geq 0$ хувьд $x^n + \lambda y^n + \mu z^n = 0$ байхаар олдох хэрэгтэй. Энд $n = 0, 1, 2$ гэж авбал

$$\begin{cases} 1 + \lambda + \mu = 0 \\ x + y\lambda + z\mu = 0 \\ x^2 + y^2\lambda + z^2\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y-x)\lambda + (z-x)\mu = 0 \\ (y^2-x^2)\lambda + (z^2-x^2)\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \mu(z-x)(z-y) = 0$$

болох бөгөөд $\mu = 0 \Rightarrow x = y$ тул $[x = y$ эсвэл $y = z$ эсвэл $z = x]$ гэж гарна. Нөгөө талаас энэ тохиолдолд тэнцэл биелэх нь илт.