

Гарчиг

Өмнөх үг	iii
Монголын Математикийн 60-р Олимпиадын I Даваа	1
Сургуулийн Олимпиад	1
Бэлтгэл давааны бодлогууд	3
I давааны бодлогууд	7
Монголын Математикийн 60-р Олимпиадын II Давааны I шат	11
Аймаг/дүүргийн Олимпиад	11
Бодлогууд	12
Бодолтууд	16
Монголын Математикийн 60-р Олимпиадын II Давааны II шат	29
Хот/бүсийн Олимпиад	29
Бодлогууд	30
Бодолтууд	35
Монголын Математикийн 60-р Олимпиадын III Даваа	49
Улсын Олимпиад	49
Олимпиадын дүн	50
Бодлогууд	53
Бодолтууд	56
Олон Улсын Мэдээ	65
Европын Охидын Математикийн 13-р Олимпиад	65
Олон Улсын Математикийн 64-р Олимпиад	65
Олон Улсын Математикийн 1-р Зуны Сургалт	67
STAR хөтөлбөр	68

Өмнөх үг

Монголын Математикийн 60-р Олимпиад I даваа, II давааны I шат, II давааны II шат, III даваа гэсэн бүтэцтэй, C (5-6), D (7-8), E (10-11), F(11-12), S (Бага ангийн багш), T (Багш) ангилалтай зохион байгуулагдлаа. Мөн I давааны бэлтгэл болгож Бэлтгэл давааг зохион байгуулсан.

Энэхүү цувралаар Бэлтгэл болон I давааны бодлогуудыг, бусад давааны бодлогуудыг бодолтын хамт толилуулж байна.

ММОХ-ны ерөнхийлөгч Н. Мөнхнасангийн Улсын Математикийн 60-р Олимпиадын нээлт дээр хэлсэн үг

Юуны өмнө энд хуран цугласан багш, сурагчид, эцэг эхчүүд, мөн эрдэмтэн судлаачдаа энэ сайхан өдрийн мэндийг дэвшүүлье! Монгол Улсын Математикийн 60 дугаар Олимпиад энэ жил Өмнөговь аймгийн Даланзадгад хотноо зохион байгуулагдаж байна. Улсын Олимпиадыг өнөөдөр аймагтаа хүлээн авч зохион байгуулж байгаа Өмнөговьчууддаа, аймгийн боловсролын газар болон удирдлагуудад баяр хүргэе.

Монголын эдийн засгийн тулгуур бүс болсон Өмнөговь аймагт маань өнөөдөр дэлхийн хэмжээний ордууд ашиглалтад орж, уул уурхайн олон улсын компаниуд томоохон хэмжээний үйл ажиллагаа явуулж байна. Бид дан байгалийн баялагтаа найдахаас илүүтэй аль болох хүнээ хөгжүүлсэн, шинжлэх ухааныг дээдэлж шинэ технологийг бий болгож чаддаг улс болж хөгжих нь чухал юм аа. Энэ цаг үеэ ойлгон мэдэрч Улсын Олимпиадыг энэхүү чухал бүс нутагт зохион байгуулж байгаа Өмнөговь аймгийн ажлын хэсэг, Монголын Математикийн олимпиадын хороо, боловсролын байгууллагууд, багш нарт талархал илэрхийлье. Та бүхний энэ их хичээл зүтгэл ирээдүйн залуучуудыг дэлхийн түвшинд өрсөлдөхүйц чадвартай болгох, Монголын боловсролын чанарыг улам бүр дээшлүүлэхэд чухал үүрэг гүйцэтгэж байна.

Математикийн шинжлэх ухаан нь бүхий л салбарын суурь мэдлэг, инновац, технологийн хөгжлийн үндэс билээ. Өнөөгийн дэлхийн хурдацтай өөрчлөгдөж буй нийгэм, эдийн засагт математикийн шинжлэх ухааны ач холбогдол нь хэмжээлшгүй. Үүний тод жишээ нь бидний хамгийн их ярьдаг болсон AI буюу хиймэл оюун нь өнөөдөр бидний арваадхан жилийн өмнө төсөөлж байгаагүй зүйлсийг хийх чадвартай болж бидний өдөр тутмын амьдралын хэв маягт өөрчлөлт оруулсаар байгаагаар харж болно. Хиймэл оюун нь бидэнд гар утас, ухаалаг цагны аппликейшнууд ашиглан цусны даралт, зүрхний цохилт зэрэг эрүүл мэндийн үзүүлэлтүүдээ хэмжиж, анхан шатны эрүүл мэндийн онош өгөхөөс эхлээд бүх төрлийн өвчний онош тогтоож, эрүүл мэндийн зөвлөгөө өгдөг болж. Жолоочгүй машин аль эрт томоохон хотуудаар яваад эхэлсэн бол ярианы синхрон орчуулга олон орны хэл рүү хүний тусламжгүйгээр хийгдэж байна. Бидний танил болсон ChatGPT систем нь хүний ямар ч асуултад хариулж, харилцан ярилцах чадвартайгаас гадна энгийн математикийн бодлогуудыг бодож, код бичиж, оюутнуудын олон хичээлийн шалгалтыг өгөх хэмжээний төвшинд очиж ээ. Харин хиймэл оюуны үндэс нь математик болон компьютерын шинжлэх ухаан юм. Математикийн олимпиадад оролцож байсан манай олон залуучууд өнөөдөр хиймэл оюуны чиглэлээр дэлхийн томоохон компани, шинжлэх ухааны байгууллагуудад амжилттай ажиллаж байна.

Мөн сансарт иргэнээ амжилттай нисгэсэн дэлхийн 10 дахь орон болж байсан Монгол Улс 2017 онд анхны хиймэл дагуул “Мазаалай”-г хөөргөж байсан бол энэ оны 3 сарын 5-ны өдөр анхны хувийн арилжааны хиймэл дагуулыг хөөргөлөө. Анхны хиймэл дагуул “Мазаалай”-г бүтээхэд оролцсон монгол инженерүүд “Ондо Спэйс” компанийн энэхүү сансрын аппаратыг бүтээж АНУ-ын Калифорни мужаас “Space X” компанийн сансрын хөлгийн тусламжтайгаар хөөргөж, сансрын тойрог замд оруулсан байна. Цаашид манай улс сансрын технологийг ашиглан дэлхийн аль ч өнцгөөс богино хэмжээний мэдээлэл дамжуулах, газрын харилцаа холбооны дэд бүтэцтэй уялдан ажиллаж уул уурхай, газар тариалан, мал аж ахуй, онцгой байдал болон батлан хамгаалах, машин хооронд харилцах, интернэт салбарт технологийн томоохон дэвшил, шинэ боломжуудыг нээх юм. Энэ зорилгод хүрэхийн тулд бил математик суурьтай өндөр түвшний инженерүүдийг бэлдэх чухал байна.

Математикийн олимпиад нь зөвхөн ирээдүйн инженер, математикчид, эрдэмтдийг бэлтгэх зорилготой бус харин хүүхэд залуучуудыг ирээдүйд ямар ч мэдлэг мэргэжилтэй болсон бай асуудлыг логик сэтгэлгээгээр шийдвэрлэхэд дадлагажуулах, тэдний сэтгэлгээ, оюуны хөгжлийг дэмжих зорилготой юм.

Ингээд Монгол Улсын Математикийн 60 дугаар олимпиад нээснийг мэдэгдэж байна. Олимпиадад оролцож буй бүх багш, сурагчдадаа амжилт хүсье.

ММОХ-ны гүйцэтгэх захирал Б. Батбаясгалангийн Улсын Математикийн 60-р Олимпиадын нээлт дээр хэлсэн үг

Юуны өмнө Улсын Математикийн 60-р олимпиадыг нутагтаа хүлээн авч маш сайхан зохион байгуулж байгаа Өмнөговьчууддаа нийт оролцогчдынхоо нэрийн өмнөөс талархал илэрхийлье. Үүний дотроос энэ ажлыг анхаас нь санаачилсан тухайн үед УИХ-ын гишүүн байсан Н. Амарзаяа болон энэ ажлыг одоо гардан гүйцэтгэж байгаа Өмнөговь аймгийн засаг дарга Р. Сэддорж, БШУГ-ын дарга Д. Баасанхүү нарт онцгойлон талархал илэрхийлж байна.

Улсын Математикийн 60-р олимпиадын бэлтгэлээ Өмнөговьчууд маш сайн базаасан байна. Өмнөговь аймгийн сурагчид бүс, улсын хэмжээний томоохон олимпиадуудад медалийн төлөөх өрсөлдөөнд ордог болсон тухай сайхан мэдээ сонсогддог болсон байна. Энэ нь цаашид олон сайхан амжилтыг Өмнөговийн сурагчид үзүүлэх юм байна гэсэн итгэл төрүүлж байна. Бэлтгэлээ тууштайгаар хангаж чадвал хүсэн хүлээсэн улсын олимпиадын медаль ч ойрхон болсон байгаа шүү гэдгийг хэлье.

Анхаарал тавьсанд баярлалаа.

Монголын Математикийн 60-р Олимпиадын I Даваа

Сургуулийн Олимпиад

Олимпиадын I давааг 2023 оны 12-р сарын 18-нд зохион байгууллаа. Олимпиадад 21 аймаг, 9 дүүргийн нийт 253 сургууль оролцлоо. Олимпиадын бүртгэл хийх, санал хүсэлт авах, дүнгийн нэгтгэл гаргах зэрэгт нийтдээ 1000 орчим имэйлийг mmo60official@gmail.com хаягаар хүлээн авч шийдвэрлэв. Энэ нь олимпиадыг зохион байгуулах ажлыг цаашид илүү оновчтой хялбар байдаар шийдэх шаардлагатайг харуулж байна.

Сурагчид C (5–6), D (7–8) ангилалд тус бүр 10 бодлогыг 2 цагийн хугацаанд, E (9–10), F (11–12) ангилалд тус бүр 12 бодлогыг 2 цаг 30 минутын хугацаанд бодож өрсөлдөв. C ангилалд 6083 сурагч, D ангилалд 4981 сурагч, E ангилалд 3783 сурагч, F ангилалд 2471 сурагч нийт 17318 сурагч оролцлоо.

Үүнээс 1 буюу түүнээс дээш оноо авч аймгийн жагсаалтын эхний 30 байрт, дүүргийн жагсаалтын эхний 50 байрт шалгарсан сурагчдад II давааны I шатанд оролцох эрх олгосон ба гүнзгийрүүлсэн сургалттай сургуулийн 5 хүртэлх, энгийн сургуулийн 3 хүртэлх тооны сурагчид II давааны I шат буюу аймаг, дүүргийн олимпиадад оролцох эрх нэмэлтээр олголоо.

Олимпиадын дүнг аймаг, дүүрэг тус бүрээр ММОХ-ын албан ёсны веб хуудас www.mmo.mn-ээс харж болно.

Дүрмийн тодруулага

Сурагчид хичээлийн жилийн туршид зөвхөн нэг ангилалд өрсөлдөх ёстой тул I даваанаас эхлэн өөрсдийн ангиллыг зөв сонгон оролцох шаардлагатай юм. Тухайлбал I даваанд C ангилалд өрсөлдсөн бол II давааны II шатанд оролцох боломжгүй, түүнчлэн олон улсын математикийн олимпиадын сорилгыг F ангилалын III давааны эрх авсан сурагчдын дунд зохион байгуулдаг тул ОУМО-д оролцохоор зорьж байгаа сурагч сургуулийн олимпиадын F ангилалд өрсөлдөнө.

Уг дүрмийг бүрэн эхээр нь 2023 оны 1-р сард нийтэлсэн ММОХ-ны мэдээллийн товхимолоос үзэж болно. ММОХ-ын зүгээс олимпиадын дүрэм журмыг нийтэд урьдчилан танилцуулж хичээлийн жилийн эхнээс мөрдөж байх, дүрэм журмаа тогтвортой мөрдөх бодлого баримталж байгаа юм. 2023-2024 оны хичээлийн жилд ашигласан дүрэм, журам холбогдох тайлбарыг www.mmo.mn хуудаснаас харж болно.

I даваа	C	D	E	F		
II давааны I шат	C	D	E	F	S	T
II давааны II шат		D	E	F	S	T
III даваа			E	F		T

Олимпиадын даваа бүрд зохион байгуулах ангиллууд:

Бэлтгэл даваа

Олимпиадын I давааг зохион байгуулах бэлтгэл ажлын хүрээнд бэлтгэл давааг 12-р сарын 8-ний өдөр зохион байгууллаа.

Бэлтгэл даваанд дараах сургуулиуд албан ёсоор оролцож олимпиадын хорооны үйл ажиллагааг дэмжлээ:

Баянзүрх дүүргийн 14, 44, 48, 92, 133, Олонлог Академи, Оюунлаг, Төгсдэлгэрэх, Шинэ Монгол сургууль; Сонгинохайрхан дүүргийн 12, 65, Номуун, Хөгжил цогцолбор сургууль; Сүхбаатар дүүргийн Шинэ үе сургууль; Хан-Уул дүүргийн 32-р сургууль, Nandin Creek, ТомьЁ, Шинэ Монгол Харумафүжи, Шинэ-Өнөөдөр сургууль; Чингэлтэй дүүргийн 5-р сургууль, Оргил сургууль, Налайх дүүргийн 109, 119-р сургууль; Баянхонгор аймгийн Төгс Алгоритм сургууль; Дархан-Уул аймгийн Оюуны-Ирээдүй цогцолбор сургууль; Дорноговь аймгийн Сайншанд 1-р сургууль; Өмнөговь аймгийн Цогтцэций 2-р сургууль; Хэнтий аймгийн Бэрх ОУС.

Олимпиадын хураамж 10 сая 560 мянган төгрөгийн цугласнаас 1,885,000 төгрөгийг бэлтгэл давааг зохион байгуулалтад зарцуулсан бөгөөд үлдсэн орлогыг олон улсын олимпиадад оролцох сурагчдын зуны сургалтад зарцуулахаар боллоо.

Багийн дүнг сургууль бүрийн хамгийн өндөр оноо авсан 10 сурагчийн нийлбэр оноогоор тооцож байр эзлүүлэхэд

1. Чингэлтэй дүүргийн 5-р сургууль 670 оноо,
2. Баянзүрх дүүргийн Шинэ Монгол сургууль 640 оноо,
3. СХД-ын 65-р сургууль 550 оноо

оноо авч эхний 3 байр эзлэв.

Бэлтгэл даваанд 9 хүртэлх тооны сурагчтай багуудыг ямар нэг хураамжгүйгээр оролцуулсан бөгөөд багийн дүн тооцоход оролцуулаагүй.

Цаашид анхаарах зүйлс

ММОХ-ны зүгээс олимпиадын бүхий л үе шатыг нээлттэй, ил тод байдлаар зохион байгуулахыг зорьж байна. Харамсалтай нь зарим нэр бүхий сургуулиудын талаар сошиал платформуудад шүүмжлэл гарч байсныг дурдах нь зүйтэй юм. Энэ тал дээр зохион байгуулагч нар болон багш нар маш өндөр ёс зүйтэй хандах шаардлагатай байна. Түүнчлэн олимпиадын үйл ажиллагааг хөндлөнгийн хяналтаар хангах, үүнд эцэг эх, сайн дурынхныг өргөнөөр ашиглах зайлшгүй шаардлагатай байна.

Мөн сургуулийн олимпиадыг зохион байгуулагчид удирдамжаа бүрэн гүйцэд уншаагүйгээс сурагчдын дүнг системд оруулах зэрэг ажилд хүндрэл гарч байсныг дурдах нь зүйтэй юм. Олимпиадын хорооны цахим хуудсыг шинээр хөгжүүлж байгаатай холбогдуудан удирдамж, зааварчилгааг зайлшгүй өөрчлөх шаардлага гарч байгааг та бүхэн ойлгон хүлээн авна гэж найдаж байна.

Бэлтгэл давааны бодлогууд

С ангилал (5-6 анги)

Бодлого С1. 2024 тоо хэдэн натурал хуваагчтай вэ?

Бодлого С2. Нийлбэр нь 100-тай тэнцүү хоёр анхны тооны үржвэр хамгийн ихдээ хэдтэй тэнцүү байж болох вэ?

Бодлого С3. Бүх цифрүүдийнх нь үржвэр 16000-тай тэнцүү байх хамгийн бага натурал тоог ол.

Бодлого С4. 20% чихэр агуулсан хэдэн литр жимсний шүүс дээр 50% чихэр агуулсан 4 литр өтгөн шүүс нэмж хийвэл 30% чихэр агуулсан шүүс үүсэх вэ?

Бодлого С5. Хэрэв номын санд нүдний шилтэй 1 сурагч орж ирвэл нийт сурагчдын $\frac{1}{4}$ нь нүдний шилтэй болно. Харин номын сангаас нүдний шилтэй 1 сурагч гарч явбал үлдсэн сурагчдын $\frac{1}{5}$ нь нүдний шилтэй болно. Тэгвэл номын санд хэдэн хүүхэд байгаа вэ?

Бодлого С6. Натурал тоонуудыг дараах байдлаар цувуулан бичив.

1
 2 3
 4 5 6
 7 8 9 10

1000 дахь тоо дээрээсээ хэд дэх мөрөнд бичигдэх вэ?

Бодлого С7. Нэг өрөөнд байгаа 10 хүнээс энэ өрөөнд хэдэн худалч байна вэ гэж асуухад эхний хүн ядаж нэг худалч, хоёр дахь хүн ядаж хоёр худалч, гурав дахь хүн ядаж гурван худалч гэх мэтчилэн хариулсаар 10 дахь хүн ядаж 10 худалч гэж хариулав. Хэрвээ уг өрөөнд байгаа хүн бүр үргэлж үнэн хариулдаг үнэнч, эсвэл үргэлж худал хэлдэг худалч хүний аль нэг нь байсан бол өрөөнд хэдэн худалч байсан бэ?

Бодлого С8. 2023 тооны цифрүүдийн нийлбэр 7-той тэнцүү. 2023-ийг оруулаад нийт хэдэн дөрвөн оронтой тооны цифрүүдийн нийлбэр 7-той тэнцүү байх вэ?

Бодлого С9. Тогтмол хурдтай явж байгаа галт тэрэг 300 метр урт хонгилоор 25 секунд, харин гэрлэн дохионы хажуугаар 5 секундын хугацаанд явж өнгөрөв. Галт тэрэг хэдэн метр урттай вэ?

Бодлого С10. Тэгш өнцөгтийг зурагт үзүүлсний дагуу жижиг тэгш өнцөгтүүдэд хуваажээ. 5 жижиг тэгш өнцөгтийн талбай мэдэгдэж байгаа боловч 4-ийнх нь мэдэгдэхгүй байна. Голын тэгш өнцөгтийн талбай хэдтэй тэнцүү вэ? (зураг бодит хэмжээгээр зурагдаагүй.)

20		36
30		
	8	24

D ангилал (7-8 анги)

Бодлого D1. 2024-ийн бүх натурал тоон хуваагчдын нийлбэрийг ол.

Бодлого D2. Математикийн олимпиадад оролцсон хөвгүүдийн тоо өмнөх жилийнхээс 20%-аар, охидын тоо 30%-аар өсч, улмаар олимпиадад оролцсон нийт хүүхдийн тоо 22%-аар өссөн дүнтэй байв. Энэ жил олимпиадад оролцсон нийт хүүхдүүдийн $\frac{p}{q}$ хэсэг нь охид байсан гэвэл $p + q$ нь хэдтэй тэнцүү вэ? Энд p, q нь $(p, q) = 1$ байх натурал тоонууд юм.

Бодлого D3. Натурал тоонуудыг дараах байдлаар цувуулан бичив.

1
 2 3
 4 5 6
 7 8 9 10

2024 дахь тоо дээрээсээ хэд дэх мөрөнд бичигдэх вэ?

Бодлого D4. 2024 тооны цифрүүдийн нийлбэр 8-тай тэнцүү. 2024-ийг оруулаад нийт хэдэн дөрвөн оронтой тооны цифрүүдийн нийлбэр 8-тай тэнцүү байх вэ?

Бодлого D5. Цифрүүдийн нийлбэр нь 7-той тэнцүү натурал тоонуудыг багаас нь их рүү жагсаан бичив. Уг жагсаалтын n -р тоог a_n гэж тэмдэглэе. Жишээлбэл $a_1 = 7, a_2 = 16, a_3 = 25$. Хэрвээ $a_n = 1006$ бол a_{9n} хэдтэй тэнцүү вэ?

Бодлого D6. a, b, c натурал тоонууд болог.

$$\left[\frac{a+b}{c} \right] + \left[\frac{b+c}{a} \right] + \left[\frac{c+a}{b} \right]$$

нийлбэрийн авч болох хамгийн бага утгыг ол.

Бодлого D7. 7-д хуваахад 3 үлдэгдэл өгдөг, 9-д хуваахад 6 үлдэгдэл өгдөг хамгийн бага гурван оронтой тоог ол.

Бодлого D8. Дараалсан хэдэн ширхэг натурал тооны нийлбэр 2023 байжээ. Хамгийн олондоо хэдэн нэмэгдэхүүн байж болох вэ?

Бодлого D9. $58! + 59! + 60!$ тоо хэдэн тэгээр төгсөх вэ?

Бодлого D10. $ABCD$ адил хажуут трапецийн AC ба BD диагоналиуд перпендикуляр байв. Хэрэв $AC = 26$ байсан бол трапецийн талбайг ол.

E ангилал (9-10 анги)

Бодлого E1. $989 \cdot 1001 \cdot 1007 + 320$ гэсэн тоог хуваадаг хамгийн их анхны тоог ол.

Бодлого E2. $a_{n+1} = a_n + n^2, a_1 = 2023$ гэж өгөгдсөн дарааллын a_{50} хэдтэй тэнцүү вэ?

Бодлого E3. x, y бодит тоонууд бөгөөд $x^2 + y^2 = 10x + 24y + 27$ тэнцэтгэл биелэх бол $x^2 + y^2$ нийлбэрийн авч болох хамгийн бага утгыг ол.

Бодлого E4. 10000-аас 99999 хүртэлх бүхэл тоонууд дотор нэгжийн орны цифр нь бусад цифрүүдийнхээ нийлбэртэй тэнцүү байдаг, цифрүүд нь харилцан ялгаатай хэдэн тоо байх вэ?

Бодлого Е5. УЛААНБААТАР гэдэг үгэнд орсон үсгүүдийг бүх боломжит хувилбараар сэлгэхэд үүсэх 11 үсэгтэй үгүүдийг цагаан толгойн дарааллаар жагсааж бичив. УЛААНБААТАР уг дарааллын хэддүгээр гишүүн болох вэ?

Бодлого Е6. Өгөгдсөн 4 оронтой тоон дээр дараах хоёр үйлдлийг хийж болно.

- 1) Цифрүүдийн байрыг дураар сэлгэж болно.
- 2) Эхний хоёр, эсвэл эцсийн хоёр цифрийг нэгэн зэрэг 1, 1-ээр ихэсгэж болно.

Хамгийн цөөндөө хэдэн үйлдэл хийгээд 2024 тооноос 7654 тоог гаргаж авах боломжтой вэ?

Бодлого Е7. $N = 56^4 - 20^4$ тоо хэдэн натурал хуваагчтай вэ?

Бодлого Е8. $[x]$ -ээр x бодит тооноос ихгүй, хамгийн их бүхэл тоог тэмдэглэж x тооны бүхэл хэсэг гэнэ. $[n^2/5]$ нь анхны тоо байх бүх n натурал тоонуудын нийлбэр хэдтэй тэнцүү вэ?

Бодлого Е9. $59x + 60y = 2023$ тэгшитгэлийн натурал шийд (x_0, y_0) бол $x_0 + y_0$ утгыг ол.

Бодлого Е10. $\angle A = 90^\circ$ байх ABC тэгш өнцөгт гурвалжны AB катет дээр $AD = 7$, $DB = 8$ урттай байх D цэг авав. Хэрэв $\angle ACD = \angle BCD$ байсан бол CD хэрчмийн уртыг ол.

Бодлого Е11. $AB = 4$, $AC = 6$ урттай байх ABC гурвалжны BC тал дээр $BD : DC = 1 : 3$ байх D цэг авав. $AD = 3$ урттай байсан ба ABC гурвалжны талбай S бол S^2 -ын утгыг ол.

Бодлого Е12. ABC гурвалжны периметр 25-тай тэнцүү. Энэ гурвалжинд багтсан тойргийг шүргэдэг, AB талтай параллел шулуун AC ба BC талыг харгалзан A_1 ба B_1 цэгт огтолно. Хэрэв $A_1B_1 = 2$ бол AB талын боломжит хамгийн их уртыг ол.

F ангилал (11-12 анги)

Бодлого F1. $\log_4(x + 2y) + \log_4(x - 2y) = 1$ бол $(x - y)^2$ -ын авах хамгийн бага утгыг ол.

Бодлого F2. Ямар нэг m натурал тооны хувьд

$$\left(m + \frac{1}{2023}\right)^2 < N < \left(m + \frac{1}{2022}\right)^2$$

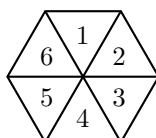
тэнцэтгэл биш биелдэг байх хамгийн бага бүхэл тоо N -ийг ол.

Бодлого F3. $f(n) = \begin{cases} n - 2, & n > 2200 \\ f(f(n + 5)), & n \leq 2200 \end{cases}$ гэж тодорхойлогдсон $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ функц өгөгдөв. $f(2023) = ?$

Бодлого F4. УЛААНБААТАР гэдэг үгэнд орсон үсгүүдийг бүх боломжит хувилбараар сэлгэхэд үүсэх 11 үсэгтэй үгүүдийг цагаан толгойн дарааллаар жагсааж бичив. Аль ч хоёр A үсэг зэрэгцэж ороогүй хамгийн эхний үгийн дугаарыг ол.

Бодлого F5. $A \cup B \cup C = \{1, 2, \dots, 8\}$ ба $A \cap B \cap C = \emptyset$ байх (A, B, C) гуравтын тоог ол.

Бодлого F6. Зөв зургаан өнцөгтийн эсрэг оройнуудыг диагоналуудаар нь холбож зургаан зөв гурвалжинд хуваажээ. Гурвалжин бүрийг улаан, ногоон, хөх өнгийн аль нэгээр, аль ч хөрш хоёр гурвалжин ялгаатай өнгөтэй байхаар хэчнээн аргаар будаж болох вэ?



Бодлого F7. Ямар нэг a, b натурал тоонуудын хувьд $n = a^2 + 2b^2$ хэлбэрт бичигддэг ба $2023 \leq n$ байх хамгийн бага n тоог ол.

Бодлого F8. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{24}$ тэгшитгэлийн бүхэл шийдийн тоог ол.

Бодлого F9. $a_1 = 2, a_{n+1} = 2^{a_n}$ дараалал өгөгдөв. a_{60} -ийг 2023-д хуваахад гарах үлдэгдлийг ол.

Бодлого F10. $ABCD$ квадратын дотор орших P цэгээс A, B, C орой хүртлэх зай харгалзан 5, $2\sqrt{2}$, 3 бол квадратын талбайг ол.

Бодлого F11. O цэгт дотоод байдлаар шүргэлцдэг хоёр тойргийн их радиустай тойрог нь l шулуунтай A, B цэгүүдэд огтлолцоно. Мөн l шулуун бага радиустай тойрогтой C, D цэгүүдэд огтлолцох ба C цэг A болон D цэгүүдийн хооронд байрлаж байв. Хэрэв $AC = 4, CD = 6, DB = 8$ урттай байсан бол $\left(10 \cdot \frac{OC}{OD}\right)^2$ -ын утгыг ол.

Бодлого F12. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны B оройгоос буусан өндрийн суурийг D, C оройгоос буусан өндрийн суурийг E гэе. BD, EC хэрчмүүд H цэгт огтлолцоно. DE диаметртэй тойрог AB талыг хоёр дахиа F цэгт, AC талыг хоёр дахиа G цэгт огтолно. FG, BD шулуунууд K цэгт огтлолцоно. $BC = 25, BD = 20, BE = 7$ байсан ба DK -г $DK = \frac{a}{b}$ ба $\text{ХИЕХ}(a, b) = 1$ байхаар a, b натурал тоонуудаар илэрхийлэв. $a + b$ -ын утгыг ол.

I давааны бодлогууд

C ангилал (5–6 анги)

Бодлого C1. Эерэг, үл хураагдах, 1000 хуваарьтай бүх зөв бутархайнуудын нийлбэрийг ол.

Бодлого C2. Ангийн охидын дундаж өндөр 158 см, хөвгүүдийн дундаж өндөр 170 см байв. Хэрвээ ангийн нийт сурагчдын дундаж өндөр 161 см байсан бол ангийн сурагчдын хэдэн хувь нь охид байсан бэ?

Бодлого C3. Сондгой натурал тоонуудыг $(1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19), \dots$ гэх мэтчилэн бүлэглэн бичив. 45 дахь хаалтны голын тоо хэдтэй тэнцүү вэ?

Бодлого C4. Жолооч замын хагаст хүрээд хурдаа 20% нэмэгдүүлснээр очих газартаа төлөвлөсөн хугацаанаас нэг цагийн өмнө хүрчээ. Жолооч нийт замаа хэдэн цагт туулсан бэ?

Бодлого C5. Цифрүүд нь ялгаатай, аль ч дараалсан хоёр цифрийнх нь нийлбэр 3-д хуваагддаг, 6 оронтой тоо хэдэн ширхэг байх вэ?

Бодлого C6. Анги 8 сурагчтай. Тэднийг нэг эгнээнд жагсаах болжээ. Амар, Батын зүүн гар талд, Цэцэг Батын баруун гар талд зогссон байхаар хэчнээн янзаар жагсаж болох вэ? (Амар, Цэцэг нар Баттай зэрэгцэж зогсох албагүй).

Бодлого C7. Хайрцагт 5 улаан, 8 ногоон, 10 хөх бөмбөг байв. Хамгийн цөөндөө хэдэн бөмбөг хайрцагнаас гаргавал тэдгээр дотор улаан бөмбөг дор хаяж 2, ногоон бөмбөг дор хаяж 6, хөх бөмбөг дор хаяж 3 ширхэг ямагт гарч ирсэн байх вэ?

Бодлого C8. 5-д хуваахад 2 үлдэгдэл өгдөг, 7-д хуваахад 3 үлдэгдэл өгдөг, 9-д хуваахад 4 үлдэгдэл өгдөг хамгийн бага натурал тоог ол.

Бодлого C9. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9 \cdot 10 = a$ гэе. a тооны бүх натурал тоон хуваагчдын үржвэрийг b гэе. Тэгвэл b нь a -ийн хэдэн зэрэгт болох вэ?

Бодлого C10. 10 шулуун хавтгайг хамгийн олондоо хэдэн хэсэгт хуваах вэ?

D ангилал (7–8 анги)

Бодлого D1. Самбарт дэс дараалсан, хэдэн ширхэг натурал тоо бичсэн байжээ. Эдгээрийн яг 52% нь тэгш тоонууд байсан бол нийт хэдэн сондгой тоо бичигдсэн байсан бэ?

Бодлого D2. Эерэг, үл хураагдах, 2023 хуваарьтай бүх зөв бутархайнуудын нийлбэрийг ол.

Бодлого D3. Сондгой натурал тоонуудыг $(1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19), \dots$ гэх мэтчилэн бүлэглэн бичив. Хэрвээ m дэх хаалтны n дэх тоо 2023 байсан бол $m + n$ хэдтэй тэнцүү вэ?

Бодлого D4. 100×100 хүснэгтийн зарим нүдийг будсан байв. Аль ч будагдсан нүд нь өөрийнхөө байгаа мөр эсвэл баганын цорын ганц будагдсан нүд байсан бол хамгийн олондоо хэдэн нүд будагдсан байж болох вэ?

Бодлого D5. Квадратын оройнуудыг хар ба цагаан өнгөөр хэчнээн янзаар будаж болох вэ? (Эргүүлэлт болон тэгш хэмээр давхцах будалтыг ижил гэж үзнэ)

Бодлого D6. Аль ч дараалсан хоёр цифрийнх нь нийлбэр 3-д хуваагддаг 6 оронтой тоо хэдэн ширхэг байх вэ?

Бодлого D7. $4n^2 - 37n + 92$ тоо бүхэл тооны квадрат байх n натурал тоог ол.

Бодлого D8. $2023! - 2022! + 2021! - \dots + 3! - 2! + 1!$ тооны аравтын орны цифр ба нэгжийн орны цифрийн нийлбэр хэдтэй тэнцүү вэ?

Бодлого D9. 5-д хуваахад 2 үлдэгдэл өгдөг, 7-д хуваахад 3 үлдэгдэл өгдөг, 9-д хуваахад 4 үлдэгдэл өгдөг, 11-д хуваахад 5 үлдэгдэл өгдөг хамгийн бага натурал тоог ол.

Бодлого D10. $ABCD$ трапецийн BC, AD сууриудын хувьд $BC + AD = 13$ байв. Мөн $AC = 5$, $BD = 12$ байсан бол трапецийн талбайг ол.

Е ангилал (9–10 анги)

Бодлого E1. Хэрвээ $x - y = 3$ бол $2x^2 - 6y^2$ илэрхийллийн хамгийн их утгыг ол.

Бодлого E2. Периметр нь 2023-тай тэнцүү, бүхэл тоон талуудтай, адил хажуут гурвалжны талбай хамгийн их байхын тулд хажуу талын урт хэд байх вэ?

Бодлого E3. $f(n) = \sum_{i=1}^n [\sqrt{i}]$ бол $f(100) = ?$ (Энд $[x]$ тооны бүхэл хэсгийг тэмдэглэв.)

Бодлого E4. 2023-аас хэтрэхгүй 3-д хуваагддаг боловч 4 ба 5-д хуваагддаггүй хэчнээн натурал тоо байх вэ?

Бодлого E5. Аль ч хоёр дараалсан цифр нь ялгаатай, эхний ба сүүлийн цифр нь хоорондоо тэнцүү, 5 оронтой тоо хэдэн ширхэг байх вэ?

Бодлого E6. Нэр заасан хоёр сурагч хамт нэг бүлэгт орохгүй гэвэл 9 сурагчийг 3, 3-аар нь гурван бүлэгт хэчнээн янзаар хувааж болох вэ? Бүлгүүд зөвхөн хүнээрээ л ялгагдана.

Бодлого E7. $99! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 99$ гэсэн үржвэрээс хамгийн цөөндөө хэдэн үржигдэхүүн дарахад үлдсэн тоонуудын үржвэр 2-оор төгссөн тоо гарах вэ?

Бодлого E8.
$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{90} \\ y^{x+y} = x^{10} \end{cases}$$
 системийн натурал тоон шийд нь (x_i, y_i) бол $\sum \frac{x_i}{y_i}$ -г ол.

Бодлого E9. Нэгэн натурал тоо яг 60 ширхэг натурал хуваагчтай. Тэгвэл энэ тооны квадрат хамгийн олондоо хэдэн натурал хуваагчтай байж болох вэ?

Бодлого E10. $ABCDE$ гүдгэр 5-өнцөгтийн AB тал EC шулуунтай параллел, CD тал BE шулуунтай параллел, ED тал AC шулуунтай параллел байв. Хэрэв $2AB = EC$ ба BCD гурвалжны талбай 16 байсан бол $ABCDE$ 5-өнцөгтийн талбайг ол.

Бодлого E11. ABC гурвалжны AB талын дундаж D цэг, BC талын дундаж E цэг байв. Хэрэв $AB = 16$, $CD = 18$, $AE = 15$ урттай байсан бол ABC гурвалжны талбайг ол.

Бодлого E12. ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн төвийг O гэе. O цэгийг дайрсан шулуун AB талтай D цэгт, AC талтай E цэгт огтлолцдог ба $BDEC$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтаж байв. Хэрэв $\angle DOB = 2\angle COE$ ба $\angle B = 53^\circ$ байсан бол $\angle C$ өнцгийг ол.

Г ангилал (11–12 анги)

Бодлого F1. $x^2 + (1 - y)^2 + (x - y)^2 = \frac{1}{3}$ бол $3x + 21y$ илэрхийллийн утгыг ол.

Бодлого F2. $\frac{48}{\pi}(\arctan \frac{4}{3} + \arctan 2 - \arctan 3)$ илэрхийллийн утгыг ол.

Бодлого F3. $x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0$ тэгшитгэл гурван бодит шийдтэй байх m параметрийн хамгийн их ба хамгийн бага утгуудын нийлбэрийг ол.

Бодлого F4. Хэрэв эргүүлэлт болон тэгш хэмээр давхцах будалтыг ижил гэж үзвэл квадратын оройнуудыг 4 өнгөөр хэдэн янзаар будаж болох вэ?

Бодлого F5. $1, 2, 3, \dots, 4n$ тоонуудыг тус бүр 4 тоо бүхий n хэсэгт хуваасан бөгөөд хэсэг бүрийн аль нэг тоо нь бусад гурван тооныхоо арифметик дундажтай тэнцүү байв. Ийм чанартай, 2023-аас ихгүй хамгийн их натурал тоо n -ийг ол.

Бодлого F6. Аль ч хоёр дараалсан цифр нь ялгаатай, эхний ба сүүлийн цифр нь хоорондоо тэнцүү, 6 оронтой тоо хэдэн ширхэг байх вэ?

Бодлого F7. Хэрвээ $x^4 - x^3 - ax^2 + bx - 6$ олон гишүүнт $(x - 1)^2$ -д хуваагддаг бол $a + 2b$ нийлбэрийг ол.

Бодлого F8. $2023^{2023} - 2023$ тооны анхны тоон каноник задаргаа $2^a 3^b p_3^{\alpha_3} \dots p_s^{\alpha_s}$ бол $a + b$ тоог ол.

Бодлого F9. $\{a_n\}$ дараалал $a_1 = 8$ ба $a_{n+1} = 8^{a_n}$, $n \geq 1$ гэж тодорхойлогдов. a_{2023} тоог 2023-д хуваахад гарах үлдэгдэл хэдтэй тэнцүү вэ?

Бодлого F10. $ABCD$ трапецийн бага суурь $BC = 2$, хажуу талууд $AB = 4$, $CD = 5$ урттай байв. $\angle ADC$ өнцгийн биссектрис AB талтай E цэгт огтлолцох ба $BE : EA = 3 : 5$ байв. $ABCD$ трапецийн талбайг ол.

Бодлого F11. ABC гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын цэгийг H гэе. H цэгийг дайрсан шулуун AB талтай D цэгт, AC талтай E цэгт огтлолцдог ба $BDEC$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтаж байв. Хэрэв $\angle DHB = 2\angle CHE$ ба $\angle C = 71^\circ$ байсан бол $\angle A$ өнцгийг ол.

Бодлого F12. ABC гурвалжинд багтсан тойргийг шүргэх BC шулуунтай параллел (BC -ээс ялгаатай) шулуун AB талтай K цэгт, AC талтай L цэгт огтлолцоно. Хэрэв $BC = 12$, $KL = 4$ бол ABC гурвалжны периметрийг ол.

Монголын Математикийн 60-р Олимпиадын II Давааны I шат

Аймаг/дүүргийн Олимпиад

Монголын математикийн 60-р олимпиадын II давааны I шатыг 2024 оны 1-р сарын 26-ны өдөр ММОХ аймаг, дүүргүүдийн боловсролын газруудтай хамтран зохион байгууллаа. Олимпиадад сурагчдын С, D, E, F багш нарын S, T ангилалд нийт 7313 оролцогч оролцож тус бүр 4 бодлого бодож уралдлаа.

Олимпиадад I даваанаас шалгарсан сурагчид оролцсон бол багш нарын ангилалд төр болон хувийн хэвшлийн сургуульд ажиллаж байгаа үндсэн багш нар оролцлоо. (Багш нарын T ангилалд удирдамжийн дагуу математикийн багш эсвэл математикч мэргэжилтэй сургуулийн үндсэн ажилтад ямар нэг тооны хязгаарлалтгүйгээр оролцож болно.)

Олимпиадын сэдэв, дүгнэх аргачлалыг ММОХ-ноос томилогдсон бодлогын комисс бэлтгэн аймаг, дүүргийн зохион байгуулах комиссын ахлагч нарын имэйл хаягаар хүргүүлэв.

Бодолт дуусахаас өмнө олимпиадын сэдвийг олон нийтийн сүлжээнд байршуулах, бодолт асуух зэрэг зөрчлийг багш нар, ялангуяа бага ангийн багш нар гаргаж байгаад олимпиад зохион байгуулагчид болон багш нар анхаарч цаашид зөрчлийг давтахгүй байхад анхаарна уу! Сурагчдын зүгээс ямар нэг зөрчил ажиглагдаагүй.

Энэ жилийн хувьд олимпиадад оролцсон нийт багш, сурагчдын материалыг нийтэд ил байршуулах цаашилбал олимпиадын хорооны цахим хуудаст байршуулах зорилго тавьсан боловч бүрэн дүүрэн биелүүлж чадсангүй. Хэдий тийм боловч дараагийн шатны олимпиадын буюу бүс, хот, улсын эрх авсан нийт багш сурагчдын материалыг нийтэд ил байршуулах ажлыг хийж гүйцэтгэлээ. Олимпиадын материалыг ил байршуулах нь багш сурагчид бусад сурагчдын бодолттой танилцах, сурагчид алдаанаасаа суралцах, олимпиадын үеэр гардаг элдэв үл ойлголцолыг арилгах, засалттай холбоотой элдэв маргааныг шийдэх зэрэг олон талын ач холбогдолтой юм.

Бодлогууд**С ангилал (5-6 анги)**

Бодлого С1. $\overline{ABBA}$ дөрвөн оронтой тоо $\overline{BB}$ хоёр оронтой тоонд хуваагддаг бол $\overline{ABBA}$ тоог сайн тоо гэе. Энд A, B цифрүүд ижил байж болох бол сайн тоо нийт хэд байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого С2. a, b, c бүхэл тоонуудын хувьд $A = ab + 7b + 49$ ба $B = bc + 7c + 49$ тоонууд 61-д хуваагддаг бол $C = ca + 7a + 49$ тоо 61-д хуваагдана гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого С3. 5×5 хүснэгтийн нүднүүдэд 1, 2, ..., 25 гэсэн тоонууд дараах байдлаар бичигдсэн байв.

1	2	4	7	11
3	5	8	12	16
6	9	13	17	20
10	14	18	21	23
15	19	22	24	25

Хүснэгтийн аль нэг мөрийг сонгож аваад уг мөрийн бүх тоог 1-ээр ихэсгэх, эсвэл аль нэг баганыг сонгож аваад уг баганын бүх тоог 1-ээр ихэсгэх гэсэн хоёр төрлийн үйлдлийн тусламжтайгаар хүснэгтэд бичигдсэн бүх тоог тэнцүү болгож болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодлого С4. Цифрүүд нь өсөж байгаад буурдаг тоог уул хэлбэрийн тоо гэе. 1310 уул хэлбэртэй бол 1331, 1234, 4321, 3412 тоонууд уул хэлбэртэй биш. Дөрвөн оронтой уул хэлбэрийн тоо нийт хэдэн ширхэг байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Д ангилал (7-8 анги)

Бодлого D1. Эмээд чихэр хийсэн уут 21 ширхэг байв. Бат эмээгээс асуугаад дурын хоёр ууганд байгаа чихрийн нийлбэр тоог мэдэж болно. Тэгвэл Бат яг 12 удаа асуугаад эмээд нийт хэдэн чихэр байгааг мэдэж болох уу?

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого D2. Натурал n тоо бүтэн квадрат бөгөөд 2024-ийг n -д хуваахад $188 - \frac{5}{4}n$ үлдэгдэл өгдөг байв. Ийм чанартай бүх n тоог ол.

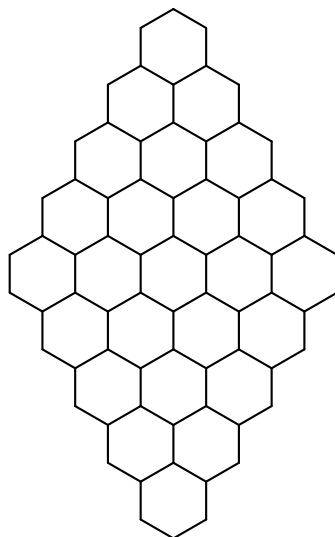
(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого D3. $\angle A > 90^\circ$ байх ABC гурвалжны $\angle B$ өнцгийн дотоод биссектрис AC талтай D цэгт огтлолцоно. BC тал дээр $AB = A'B$ байх A' цэг ба $\angle AFB = 2\angle ADB$ байх F цэг авав. Мөн BC шулуун дээр $AD = DE$ байх A' цэгээс ялгаатай E цэг ба $EF = FG$ байх E цэгээс ялгаатай G цэг авав. DF, AG шулуунууд параллел гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого D4. Зурагт үзүүлсэн байдлаар нэгж талтай зургаан өнцөгтүүдийн оройн цэгүүдийг холбосон замууд байв. Хоёр оройг нэгж урттай замаар холбогдсон бол зэргэлдээ гээ.

Оройн цэгүүд дээр аль ч хоёр нь зэргэлдээ биш байхаар хотууд байгуулна. Дахин хот нэмж байгуулах боломжгүй байхаар хамгийн цөөндөө хэдэн хот байгуулж болох вэ?



(Дэвшүүлсэн: Э. Оргил-Эрдэнэ)

Е ангилал (9–10 анги)

Бодлого E1. Квадратуудын нийлбэр нь $x^2 + y^2 + z^2 = 99 \dots 9$ хэлбэртэй бичигдэх бүх натурал тоон $x \leq y \leq z$ эрэмбэлэгдсэн гурвалыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

Бодлого E2. $f(x)$ ба $g(x)$ квадрат гурван гишүүнтүүдийн хувьд

$$\frac{f(-2)}{g(-2)} = \frac{f(3)}{g(3)} = 4$$

байв. Хэрэв $g(5) = 2$, $f(7) = 8$, $g(7) = 6$ бол $f(5)$ утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого E3. 60×60 хэмжээтэй хүснэгтийн зарим нүдийг хараар, үлдсэн нүднүүдийг цагаанаар буджээ. Бат, Цэцэг хоёр ээлжлэн дараах үйлдлийг хийж тоглоно: хамгийн зүүн дээд буланг зүүн дээд булангаа болгодог, ямар нэг хар нүдийг баруун доод булангаа болгодог тэгш өнцөгт доторх бүх нүдний өнгийг солино. Хэрэв үйлдэл хийх боломжгүй, өөрөөр хэлбэл түүний үйлдэх хийх ээлжинд хар өнгийн нүд байхгүй байвал тэр тоглогч хожигдоно. Эхний үйлдлийг Бат хийнэ.

Хүснэгтийн ямар будалтад Бат яаж тоглохоос үл хамааран Цэцэг хожиж чадах вэ?

(Дэвшүүлсэн: А. Нямдаваа)

Бодлого E4. AD диаметртай Ω хагас тойрог өгөгджээ. AD хэрчмийн дундаж цэгийг O гээ. Ω хагас тойрог дээр B цэгийг авсан ба OA хэрчим дээр M цэгийг $2AM = BM$ байхаар авав. BM хэрчмийн дундаж цэгийг N гээд BN хэрчмийн дундаж цэгийг K гээ. Ω хагас тойрог дээр C цэгийг OC шулуун MB шулуунтай параллел байхаар авав. $ON = KC$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

F ангилал (11-12 анги)

Бодлого F1. 0, 1, 2 цифрүүдээр бичигдсэн, 1-ийн цифр дөрвөөс олонгүй, 2-ын цифр гурваас олонгүй орсон долоон оронтой тоо нийт хэд байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого F2. Хурц өнцөгт ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн төвийг O , C оройгоос буусан өндрийн суурийг D гэе. CD хэрчим дээр M цэг авсан ба M цэгээс BC талд буулгасан перпендикулярын суурийг E , AC талд буулгасан перпендикулярын суурийг F гэе. C цэгийн EF шулууны хувьд тэгш хэмтэй цэгийг G гэе. M , O , G , D цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого F3. $n \geq 1$ хувьд $a_n = 1^1 + 2^2 + \dots + n^n$ гэе. $\{a_n\}$ дараалалд 2024-д хуваахад 32 үлдэгдэл өгдөг гишүүн төгсгөлгүй олон бий гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодлого F4. a, b, c бодит тоонуудын нийлбэр $a + b + c = 6$ бол

$$\frac{a^4 + 1}{b^2 + 1} + \frac{b^4 + 1}{c^2 + 1} + \frac{c^4 + 1}{a^2 + 1} \geq \frac{51}{5}$$

гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

S ангилал (Бага ангийн багш)

Бодлого S1. Муурын гэр бүлд 35 муур байдаг. Мау муурын жин гэр бүлийн бүх муурын дундаж жингээс 250 граммаар бага байжээ. Мау ганцаараа гадагш гарч хоол хүнс олж идсээр гэртээ буцаж ирэхэд түүний жин гэр бүлийн бүх муурын дундаж жингээс 600 грамм илүү байв. Маугаас бусад муурын жин өөрчлөгдөөгүй. Тэгвэл Маугийн жин хэдэн граммаар нэмэгдсэн бэ?

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

Бодлого S2. $a^2 + c$, $b^2 + b$, $c^2 + a$ дараалал геометр прогресс болдог байх бүх эрс өсдөг $a < b < c$ натурал тоон арифметик прогрессийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого S3. 5×5 хүснэгтийн нүднүүдэд 1, 2, ..., 25 гэсэн тоонууд дараах байдлаар бичигдсэн байв.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Хүснэгтийн аль нэг 3×1 эсвэл 1×3 дэд хүснэгтийг сонгон аваад сонгосон хүснэгтийн тоо бүрийг 1-ээр ихэсгэх гэсэн хоёр төрлийн үйлдлийн тусламжтайгаар хүснэгтэд бичигдсэн бүх тоог тэнцүү болгож болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодлого S4. $AB = AC$ байх ABC адил хажуут гурвалжны A оройн өнцөг 36° байв. ABC гурвалжны дотор D цэгийг $\angle BAD = 24^\circ$ ба $AD = BC$ байхаар авав.

$\angle BDC$ өнцгийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Э. Азжаргал)

Т ангилал (Дунд ангийн багш)

Бодлого Т1. $\{a_n\}_{n \geq 1}$ эерэг тоон дарааллын хувьд $a_1 = 1$ ба $n \geq 1$ үед

$$a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n + a_{n+1}}$$

байв. $n \geq 1$ хувьд $b_n = a_{n+1} - a_n$ гэе.

- (i) $b_n \geq 1$ гэж харуул.
- (ii) $a_n = b_n(b_n - 1)/2$ гэж харуул.
- (iii) a_n гишүүнийг n -ээр илэрхийл.
- (iv) $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{60}$ нийлбэрийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

Бодлого Т2. Ω тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн диагоналиуд N цэгт огтлолцоно. B оройг дайрсан CD талтай параллел шулуун AC шулуунтай E цэгт огтлолцоно. D оройг дайрсан BC талтай параллел шулуун AC шулуунтай F цэгт огтлолцоно. BD шулуун дээр $\angle DMF = \angle MEF$ байх M цэг авав. CM шулуун Ω тойрогтой L цэгт огтлолцох ба $BL = CD$ байв. Тэгвэл L, F, D цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого Т3. Дурын бүхэл N тооны хувьд $(m+n)^2 + mn + 1 = N(m+n)$ тэгшитгэл төгсгөлгүй олон бүхэл (m, n) шийдтэй гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого Т4. 2024×2024 хүснэгтийн i -р мөр j -р баганад a_{ij} тоо бичигджээ. Мөр бүрийн хувьд $\sum_{k=1}^{2024} a_{ik}^2 = 1$ байсан ба ялгаатай хоёр $i \neq j$ мөр бүрийн хувьд $\sum_{k=1}^{2024} a_{ik} a_{jk} = \alpha$ байв.

α тоо хамгийн багадаа ямар утга авч болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: А. Нямдаваа)

Бодолтууд**С ангилал (5-6 анги)**

Бодлого С1. $\overline{ABBA}$ дөрвөн оронтой тоо $\overline{BB}$ хоёр оронтой тоонд хуваагддаг бол $\overline{ABBA}$ тоог сайн тоо гэе. Энд A, B цифрүүд ижил байж болох бол сайн тоо нийт хэд байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. **Хариу: 31.**

n тоо m тоонд хуваагдана гэхийг $m \mid n$ гэж тэмдэглэе.

A, B цифрүүд тул $1 \leq A, B \leq 9$ байна.

$\overline{BB} \mid \overline{ABBA}$ гэдгээс $\overline{BB} \mid \overline{A00A}$ буюу $11B \mid 1001A = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot A$ байна. Энд 13 анхны тоо ба $B \leq 9$ тул $B \mid 7A$ байх хэрэгтэй.

$B = 1, 7$ үед $A = 1, 2, \dots, 9$ тул $2 \cdot 9 = 18$ боломжтой.

$B = 2$ үед $A = 2, 4, 6, 8$ тул 4 боломжтой.

$B = 3$ үед $A = 3, 6, 9$ тул 3 боломжтой.

$B = 4$ үед $A = 4, 8$ тул 2 боломжтой.

$B = 5, 6, 8, 9$ үед $A = B$ тул $4 \cdot 1 = 4$ боломжтой.

Ингээд нийт боломжийн тоо: 31.

Бодлого С2. a, b, c бүхэл тоонуудын хувьд $A = ab + 7b + 49$ ба $B = bc + 7c + 49$ тоонууд 61-д хуваагддаг бол $C = ca + 7a + 49$ тоо 61-д хуваагдана гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. n тоо m тоонд хуваагдана гэхийг $m \mid n$ гэж тэмдэглэе.

$$cA - 7B = abc + 7bc + 49c - 7bc - 49c - 343 = abc - 343$$

ба $61 \mid A, 61 \mid B$ тул $61 \mid abc - 343$ болно. Нөгөө талаас, $61 \mid aB - 7C = abc - 343$ ба $61 \mid B, 61 \nmid 7$ тул $61 \mid C$ байна.

Бодлого С3. 5×5 хүснэгтийн нүднүүдэд 1, 2, ..., 25 гэсэн тоонууд дараах байдлаар бичигдсэн байв.

1	2	4	7	11
3	5	8	12	16
6	9	13	17	20
10	14	18	21	23
15	19	22	24	25

Хүснэгтийн аль нэг мөрийг сонгож аваад уг мөрийн бүх тоог 1-ээр ихэсгэх, эсвэл аль нэг баганыг сонгож аваад уг баганын бүх тоог 1-ээр ихэсгэх гэсэн хоёр төрлийн үйлдлийн тусламжтайгаар хүснэгтэд бичигдсэн бүх тоог тэнцүү болгож болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодолт. **Хариу:** Болохгүй.

Хүснэгтийн 1-р мөрд бичигдсэн тоонуудын нийлбэрийг a_1 , 2-р мөрд бичигдсэн тоонуудын нийлбэрийг a_2 гэе. Тэгвэл $a_2 - a_1$ тоог 5-д хуваахад гарах үлдэгдэл өгөгдсөн үйлдлүүдээр өөрчлөгдөхгүй инвариант байна. Анх $a_2 - a_1 = 3 + 5 + 8 + 12 + 16 - 1 - 2 - 4 - 7 - 11 = 19$ буюу 4 үлдэгдэл өгч байна. Хэрвээ хүснэгтийн бүх тоонуудыг тэнцүү болгож болдог бол уг үлдэгдэл 0 болох тул зөрчил үүсч байна. Иймд хүснэгтийн бүх тоог тэнцүү болгох боломжгүй.

Бодлого С4. Цифрүүд нь өсөж байгаад буурдаг тоог уул хэлбэрийн тоо гэе. 1310 уул хэлбэртэй бол 1331, 1234, 4321, 3412 тоонууд уул хэлбэртэй биш. Дөрвөн оронтой уул хэлбэрийн тоо нийт хэдэн ширхэг байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодолт. Уул хэлбэрийн тоонд нэг цифр 2-оос олон удаа орж болохгүй ба хамгийн их цифр (орой) нь зөвхөн 1 ширхэг байна. Мөн 0 цифр 1-ээс олон удаа орохгүй бөгөөд орвол хамгийн сүүлийн цифр байна. Эндээс 4 оронтой уул хэлбэрийн тоо дор хаяж 3 ялгаатай цифртэй болно. (*)

- 1) 3 ялгаатай цифрээс бүрдэх уул хэлбэрийн тоонд 0 цифр орсон гэе. Үлдэх 2 цифрийг $C_9^2 = 36$ янзаар сонгох ба $a < b$ гэвэл $\overline{aba0}$ гэсэн 1 боломжтой.
- 2) 3 ялгаатай цифрээс бүрдэх уул хэлбэрийн тоонд 0 цифр ороогүй байг. Тэгвэл цифрүүдийг C_9^3 янзаар сонгож болох ба хамгийн их цифр M нь орой болно. Үлдэх цифрүүдийг $a < b$ гэвэл $\overline{abMb}$, $\overline{bMba}$, $\overline{abMa}$, $\overline{aMba}$ гэсэн 4 боломжтой тул ийм тоо $4 \cdot C_9^3 = 336$ ширхэг байна.
- 3) 4 ялгаатай цифрээс бүрдэх уул хэлбэрийн тоонд 0 цифр орсон байг. Тэгвэл үлдэх 3 цифрийг C_9^3 янзаар сонгож болох ба хамгийн их цифр M нь орой болно. Үлдэх цифрүүдийг $0 < a < b$ гэвэл a , b цифрүүд нэгэн зэрэг M -ийн ард орж болохгүй тул эдгээр цифрүүдээр нийт 3 ширхэг уул хэлбэрийн тоо зохиож болно. Иймд ийм тоо $3 \cdot C_9^3 = 252$ ширхэг байна.
- 4) 4 ялгаатай цифрээс бүрдэх уул хэлбэрийн тоонд 0 цифр ороогүй байг. Тэгвэл цифрүүдээ C_9^4 янзаар сонгоно. Оройг M ба үлдэх цифрүүдийг $a < b < c$ гэвэл бүгд M -ийн урд эсвэл бүгд M -ийн ард орж болохгүй тул $2^3 - 2 = 6$ боломжтой. Иймд ийм тоо $6 \cdot C_9^4 = 756$ ширхэг байна.

Тохиолдлуудаа нэгтгэвэл

$$36 + 336 + 252 + 756 = 1380$$

ширхэг 4 оронтой, уул хэлбэрийн тоо байна.

D ангилал (7-8 анги)

Бодлого D1. Эмээд чихэр хийсэн уут 21 ширхэг байв. Бат эмээгээс асуугаад дурын хоёр уутанд байгаа чихрийн нийлбэр тоог мэдэж болно. Тэгвэл Бат яг 12 удаа асуугаад эмээд нийт хэдэн чихэр байгааг мэдэж болох уу?

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. **Хариу: Болно.**

Ууттай чихрүүдийг 1, 2, ..., 21 гэж дугаарлая. Бат эхлээд (1, 2); (3, 4); (5, 6); (7, 8); (9, 10); (11, 12); (13, 14); (15, 16); (17, 18) гэж хоёр хоёроор нь 9 удаа асуугаад эдгээр уутнуудад байгаа нийт чихрийн тоог мэдэж чадна. Дараа нь (19, 20); (20, 21); (21, 19) гэж гурван удаа асуугаад нийлбэрийг нь 2-т хувааж 19, 20, 21-р ууттай чихрийн нийлбэр тоог мэдэж чадна. Ингээд нийт 12 удаа асууж болно.

Бодлого D2. Натурал n тоо бүтэн квадрат бөгөөд 2024-ийг n -д хуваахад $188 - \frac{5}{4}n$ үлдэгдэл өгдөг байв. Ийм чанартай бүх n тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. **Хариу: 144.**

2024-ийг n -д хуваахад q ноогддог байг. Тэгвэл

$$2024 = nq + 188 - \frac{5}{4}n$$

байна. Эндээс $7344 = n(4q - 5)$ болно. Үлдэгдэлтэй хуваах теорем ёсоор, $0 \leq 188 - \frac{5}{4}n < n$ байх ёстой. Иймд

$$83\frac{5}{9} < n \leq 150\frac{2}{5}.$$

Нөгөө талаас, n бүтэн квадрат тул $n = 100, 121, 144$ байх боломжтой. Эндээс зөвхөн $n = 144$ байх боломжтой гэдгийг шууд шалгачихана.

Бодлого D3. $\angle A > 90^\circ$ байх ABC гурвалжны $\angle B$ өнцгийн дотоод биссектрис AC талтай D цэгт огтлолцоно. BC тал дээр $AB = A'B$ байх A' цэг ба $\angle AFB = 2\angle ADB$ байх F цэг авав. Мөн BC шулуун дээр $AD = DE$ байх A' цэгээс ялгаатай E цэг ба $EF = FG$ байх E цэгээс ялгаатай G цэг авав. DF, AG шулуунууд параллел гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

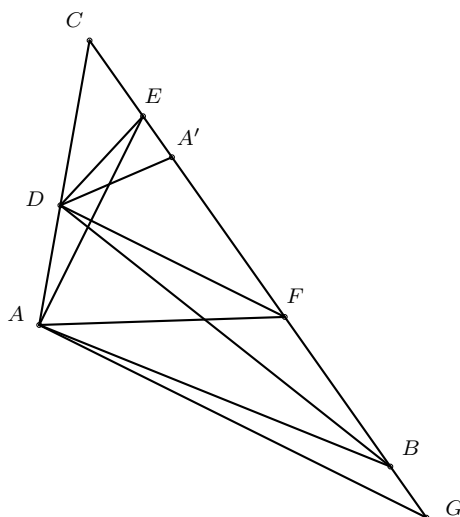
Бодолт.

$\angle DEB = \angle EA'D = 180^\circ - \angle DA'B = 180^\circ - \angle DAB$ тул $ADEB$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана.

$\angle AEB = \angle ADB$, $\angle AEF + \angle EAF = \angle AFB = 2\angle ADB$ гэдгээс $\angle EAF = \angle AEF$ болох ба $EF = AF$ гэж гарна.

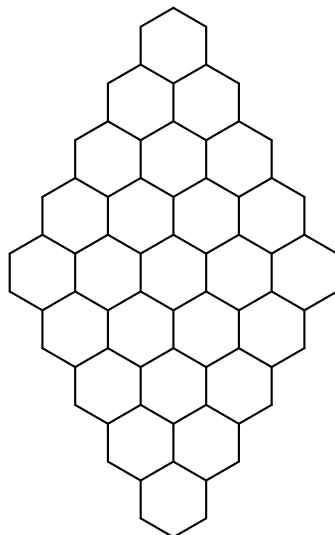
$EF = AF = FG$ учир $\angle EAG = 90^\circ$ болно.

$AD = DE$, $AF = EF$ учир $DF \perp AE$ болно. Иймд DF, AG шулуунууд параллел болно.



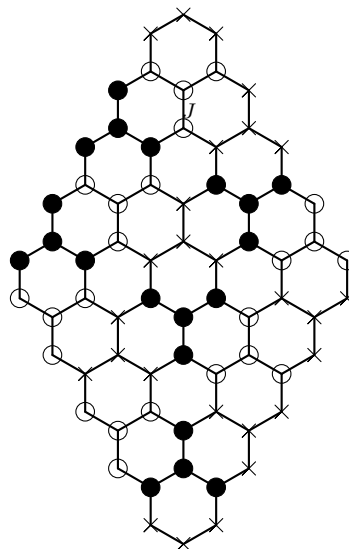
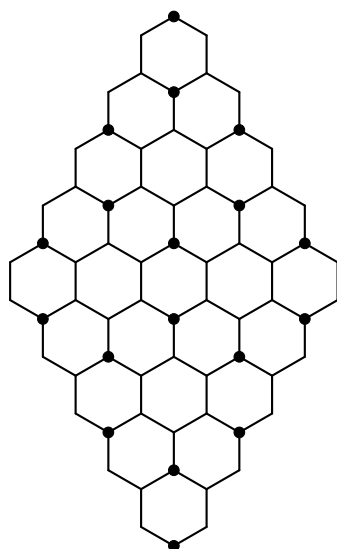
Бодлого D4. Зурагт үзүүлсэн байдлаар нэгж талтай зургаан өнцөгтүүдийн оройн цэгүүдийг холбосон замууд байв. Хоёр оройг нэгж урттай замаар холбогдсон бол зэргэлдээ гэе.

Оройн цэгүүд дээр аль ч хоёр нь зэргэлдээ биш байхаар хотууд байгуулна. Дахин хот нэмж байгуулах боломжгүй байхаар хамгийн цөөндөө хэдэн хот байгуулж болох вэ?



(Дэвшүүлсэн: Э. Оргил-Эрдэнэ)

Бодолт. **Хариу:** Хамгийн цөөндөө 18 хот байгуулахад болно.



Эхний зурагт 18 хоттой жишээ байгуулав. Нэмж хот барьж болохгүйг шалгах амархан.

Дараагийн зурагт оройнуудыг 18 бүлэгт хуваав. 17-оос олонгүй хот байгуулсан бол хоосон бүлэг олох ба ийм бүлэгт хот нэмж барьж болно. Иймд 18-аас цөөн байж болохгүй.

Е ангилал (9-10 анги)

Бодлого Е1. Квадратуудын нийлбэр нь $x^2 + y^2 + z^2 = 99 \dots 9$ хэлбэртэй бичигдэх бүх натурал тоон $x \leq y \leq z$ эрэмбэлэгдсэн гурвалыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

Бодолт. **Хариу:** $(1, 2, 2), (1, 7, 7), (3, 3, 9), (5, 5, 7)$.

$x^2 + y^2 + z^2 = 99 \dots 9$ (n ширхэг 9) ба $n \geq 3$ байг. $1000 \equiv 0 \pmod{8}$ ба $999 \equiv 7 \pmod{8}$, $x^2 + y^2 + z^2 \equiv \{0, 1, 4\} + \{0, 1, 4\} + \{0, 1, 4\} \not\equiv 7 \pmod{8}$ гэдгээс $n \geq 3$ байхад натурал шийдгүй. Иймд одоо бид $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ба $x^2 + y^2 + z^2 = 99$ тэгшитгэлүүдийн эрэмбэлэгдсэн натурал $x \leq y \leq z$ шийдийг олоход хангалттай. Тэдгээр нь $(1, 2, 2), (1, 7, 7), (3, 3, 9), (5, 5, 7)$ гэдгийг төвөггүй олж болно.

Бодлого Е2. $f(x)$ ба $g(x)$ квадрат гурван гишүүнтүүдийн хувьд

$$\frac{f(-2)}{g(-2)} = \frac{f(3)}{g(3)} = 4$$

байв. Хэрэв $g(5) = 2$, $f(7) = 8$, $g(7) = 6$ бол $f(5)$ утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. **Хариу:** $\frac{16}{9}$.

$h(x) = 4g(x) - f(x)$ квадрат гурван гишүүнтийг авч үзье. Өгсөн нөхцлөөс $h(-2) = h(3) = 0$ тул $h(x) = a(x+2)(x-3)$ болно. Энд $x = 7$ гэж орлуулбал

$$h(7) = 4g(7) - f(7) = 4 \cdot 6 - 8 = a(7+2)(7-3).$$

Иймд $a = \frac{4}{9}$ болно. Одоо $x = 5$ гэвэл

$$h(5) = 4g(5) - f(5) = 4 \cdot 2 - f(5) = \frac{4}{9}(5+2)(5-3).$$

Эндээс, $f(5) = 8 - \frac{56}{9} = \frac{16}{9}$.

Бодлого Е3. 60×60 хэмжээтэй хүснэгтийн зарим нүдийг хараар, үлдсэн нүднүүдийг цагаанаар буджээ. Бат, Цэцэг хоёр ээлжлэн дараах үйлдлийг хийж тоглоно: хамгийн зүүн дээд буланг зүүн дээд булангаа болгодог, ямар нэг хар нүдийг баруун доод булангаа болгодог тэгш өнцөгт доторх бүх нүдний өнгийг солино. Хэрэв үйлдэл хийх боломжгүй, өөрөөр хэлбэл түүний үйлдэх хийх ээлжинд хар өнгийн нүд байхгүй байвал тэр тоглогч хожигдоно. Эхний үйлдлийг Бат хийнэ.

Хүснэгтийн ямар будалтад Бат яаж тоглохоос үл хамааран Цэцэг хожиж чадах вэ?

(Дэвшүүлсэн: А. Нямдаваа)

Бодолт. **Хариу:** Хүснэгтийн зүүн дээд булан цагаан бол Цэцэг хожиж чадна, хар бол чадахгүй.

Зүүн дээд булангийн өнгө үйлдэл болгоноор солигдох тул тэгш тоотой үйлдлийн дараа анх байсантайгаа ижил байна. Иймд зүүн дээд булан анх хар байсан бол Батад хар нүд заавал олдох тул Цэцэг хожиж чадахгүй.

Одоо зүүн дээд булан анх цагаан байвал Цэцэг хожиж чадна гэж харуулъя. Хүснэгтийн нүднүүдээ эхлээд мөрийн дугаараар эрэмбэлээд, мөрийн дугаар ижил нүднүүдийг баганын дугаараар эрэмбэлэе. Цэцэг ээлжиндээ хамгийн өндөр эрэмбэтэй хар нүдэн дээр үйлдэл хийнэ. Ингэвэл хамгийн

өндөр эрэмбэтэй хар нүдний эрэмбэ эрс буурах ба Батын үйлдлээр ихсэхгүй тул төгсгөлөг алхмын дараа тоглоом дуусна. Тэгш сондгойгоос Бат хожих боломжгүй тул Цэцэг хожино.

Бодлого Е4. AD диаметртэй Ω хагас тойрог өгөгджээ. AD хэрчмийн дундаж цэгийг O гэе. Ω хагас тойрог дээр B цэгийг авсан ба OA хэрчим дээр M цэгийг $2AM = BM$ байхаар авав. BM хэрчмийн дундаж цэгийг N гээд BN хэрчмийн дундаж цэгийг K гэе. Ω хагас тойрог дээр C цэгийг OC шулуун MB шулуунтай параллел байхаар авав. $ON = KC$ гэж батал.

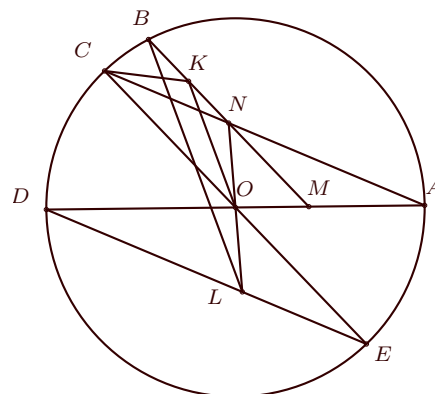
(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. $\angle AMN = \angle AOC$ ба $AM = MN$, $AO = OC$ учир $\triangle MAN \sim \triangle OAC$ болно. Иймээс $\angle MAN \sim \angle OAC$ болох тул A, N, C цэгүүд нэг шулуун дээр оршино.

O цэгийн хувьд C -тэй тэгш хэмтэй цэгийг E , N -тэй тэгш хэмтэй цэгийг L гэе.

$\angle AEB = \angle ACB = \angle NCB$, $\angle BNC = \angle NCE = \angle ACE = \angle ABE$ учир $\triangle ABE \sim \triangle BNC$ болно. Эндээс $\frac{AB}{EB} = \frac{BN}{NC} = \frac{AM}{EL}$ гэж гарна. Мөн $\angle BED = \angle BAD$ гэдгийг тооцвол $\triangle ABM \sim \triangle EBL$ болно.

Эндээс $2AM = MB$ тул $2EL = BL$ биелнэ. $NC = EL = BL/2 = OK$ (K нь NB -ийн дундаж тул) болж $ONKC$ адил хажуут трапец болох тул $ON = KC$ байна.



F ангилал (11-12 анги)

Бодлого F1. 0, 1, 2 цифрүүдээр бичигдсэн, 1-ийн цифр дөрвөөс олонгүй, 2-ын цифр гурваас олонгүй орсон долоон оронтой тоо нийт хэд байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. **Хариу: 1066.**

а) 2-ын цифр 3 удаа агуулсан байг.

- 1) 2-ын цифр 3 удаа, 1-ын цифр 4 удаа агуулсан долоон оронтой тоонуудын тоо: $\frac{7!}{3!4!} = 35$.
- 2) 2-ын цифр 3 удаа, 1-ын цифр 3 удаа, нэг ширхэг 0 агуулсан долоон оронтой тоонуудын тоо: $\frac{7!}{3!} - \frac{6!}{3!3!} = 140 - 20 = 120$.
- 3) 2-ын цифр 3 удаа, 1-ын цифр 2 удаа, хоёр ширхэг 0 агуулсан долоон оронтой тоонуудын тоо: $\frac{7!}{3!2!2!} - \frac{6!}{3!2!} = 210 - 60 = 150$.
- 4) 2-ын цифр 3 удаа, 1-ын цифр 1 удаа, гурван ширхэг 0 агуулсан долоон оронтой тоонуудын тоо: $\frac{7!}{3!3!} - \frac{6!}{3!2!} = 140 - 60 = 80$.
- 5) 2-ын цифр 3 удаа, дөрвөн ширхэг 0 агуулсан долоон оронтой тоонуудын тоо: $\frac{7!}{3!4!} - \frac{6!}{3!3!} = 35 - 20 = 15$.

Энэ тохиолдолд нийт боломжийн тоо $35 + 120 + 150 + 80 + 15 = 400$ байна. Дээрх санааг давтан үлдсэн боломжуудыг тооцоолбол:

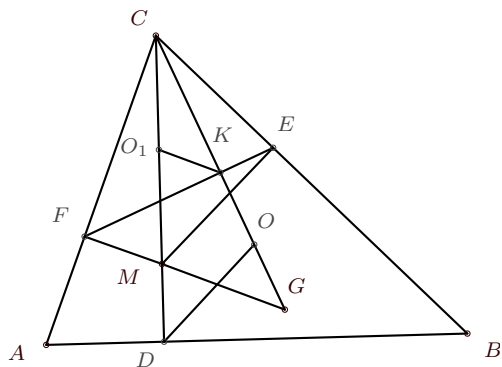
- б) 2-ын цифр 2 удаа агуулсан байх нийт боломжийн тоо 411.
- в) 2-ын цифр 1 удаа агуулсан байх нийт боломжийн тоо 213.
- г) 2-ын цифр огт агуулаагүй байх нийт боломжийн тоо 42.

Ингээд нийт боломжийн тоо: $400 + 411 + 213 + 42 = 1066$.

Бодлого F2. Хурц өнцөгт ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн төвийг O , C оройгоос буусан өндрийн суурийг D гэе. CD хэрчим дээр M цэг авсан ба M цэгээс BC талд буулгасан перпендикулярын суурийг E , AC талд буулгасан перпендикулярын суурийг F гэе. C цэгийн EF шулууны хувьд тэгш хэмтэй цэгийг G гэе. M , O , G , D цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. $MECF$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтах тул $\angle CEF = \angle CMF = \angle CAM$ болох ба эндээс $\triangle CEF \sim \triangle CAB$ байна.



Одоо $CG \cap EF = K$ гэвэл $\angle OCB = 90^\circ - \angle BAC$ ба $\angle KCE = 90^\circ - \angle CEF = 90^\circ - \angle BAC$ болж O цэг CG шулуун дээр оршино.

MC -ийн дундаж цэг O_1 нь $MECF$ -г багтаасан тойргийн төв болно. $\triangle CEF \sim \triangle CAB$ учраас $\angle CDO = \angle CKO_1$ байна.

Мөн CG -ийн дундаж K учир $\angle CKO_1 = \angle CGM$ байна. Эндээс $\angle CMO = \angle CGM$ болж $MOGD$ тойрогт багтана.

Бодлого F3. $n \geq 1$ хувьд $a_n = 1^1 + 2^2 + \dots + n^n$ гэе. $\{a_n\}$ дараалалд 2024-д хуваахад 32 үлдэгдэл өгдөг гишүүн төгсгөлгүй олон бий гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодолт. $a_3 = 32$ ба $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ байна.

Лемм. $r_n \equiv n^n \pmod{p^\alpha}$ гэвэл $r_\alpha, r_{\alpha+1}, \dots$ дараалал эхний гишүүнээсээ эхлэн үелэнэ.

Леммийн баталгаа. $(n, p) = p$ үед $r_n = 0$ байна. $(n, p) = 1$ бол $k = p^\alpha(p-1) = p \cdot \varphi(p^\alpha)$ тоо үе болно. Учир нь Эйлерийн теоремоор

$$(n+k)^{n+k} \equiv n^{n+p^\alpha(p-1)} \equiv n^n \cdot (n^{\varphi(p^\alpha)})^p \equiv n^n \pmod{p^\alpha}$$

Иймд r_n дараалал k үетэй болж лемм батлагдав.

$\alpha_n \equiv n^n \pmod{8}$, $\beta_n \equiv n^n \pmod{11}$, $\gamma_n \equiv n^n \pmod{23}$ гэвэл лемм ёсоор эдгээр нь тус бүрдээ 8, 110, 506 үетэй буюу $n \geq 3$ үед

$$\begin{aligned} \alpha_n &\equiv \alpha_{n+8k} \pmod{8} \\ \beta_n &\equiv \beta_{n+110k} \pmod{11} \\ \gamma_n &\equiv \gamma_{n+506k} \pmod{23} \end{aligned}$$

байна. Эндээс $[8, 110, 506] = 10120$ болохыг тооцвол

$$\begin{aligned} \alpha_n &\equiv \alpha_{n+10120k} \pmod{8} \\ \beta_n &\equiv \beta_{n+10120k} \pmod{11} \\ \gamma_n &\equiv \gamma_{n+10120k} \pmod{23} \end{aligned}$$

ба $n \geq 3$ үед $n^n \equiv (n + 10120k)^{n+10120k} \pmod{2024}$ болно. $A = \sum_{k=4}^{10117} a_k$ гэвэл

$$a_{10120k+3} \equiv a_3 + A \cdot k \pmod{2024}$$

болно. $2024 \mid k$ үед $a_{10120k+3} \equiv a_3 = 32 \pmod{2024}$ тул батлах зүйл батлагдав.

Бодлого F4. a, b, c бодит тоонуудын нийлбэр $a + b + c = 6$ бол

$$\frac{a^4 + 1}{b^2 + 1} + \frac{b^4 + 1}{c^2 + 1} + \frac{c^4 + 1}{a^2 + 1} \geq \frac{51}{5}$$

гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Эрэмбийн тэнцэтгэл бишээр

$$\frac{a^4 + 1}{b^2 + 1} + \frac{b^4 + 1}{c^2 + 1} + \frac{c^4 + 1}{a^2 + 1} \geq \frac{a^4 + 1}{a^2 + 1} + \frac{b^4 + 1}{b^2 + 1} + \frac{c^4 + 1}{c^2 + 1}$$

байна. Мөн $(x^4 + 1)25 - (x^2 + 1)(92x - 99) = (x - 2)^2(24x^2 + (x + 4)^2 + 15) \geq 0$ гэдгээс $\frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} \geq \frac{92x - 99}{25}$ байна. a, b, c хувьд нэмэхэд батлах зүйл гарах ба $a = b = c = 2$ үед тэнцэтгэл биелнэ.

S ангилал (Бага ангийн багш)

Бодлого S1. Муурын гэр бүлд 35 муур байдаг. Мау муурын жин гэр бүлийн бүх муурын дундаж жингээс 250 граммаар бага байжээ. Мау ганцаараа гадагш гарч хоол хүнс олж идсээр гэртээ буцаж ирэхэд түүний жин гэр бүлийн бүх муурын дундаж жингээс 600 грамм илүү байв. Маугаас бусад муурын жин өөрчлөгдөөгүй. Тэгвэл Маугийн жин хэдэн граммаар нэмэгдсэн бэ?

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

Бодолт. **Хариу: 875 грамм.**

Мау анх x грамм жинтэй байсан бөгөөд буцаж ирэхдээ y грамм жинтэй болсон гэе. Бусад бүх муурын жинг S гэе. Өгсөн нөхцөлөөс $x + 250 = \frac{x + S}{35}$ ба $y - 600 = \frac{y + S}{35}$ болно. Хооронд нь хасвал

$$y - x - 850 = \frac{y - x}{35}$$

болох тул Мау муурны жин $y - x = 875$ граммаар нэмэгджээ.

Бодлого S2. $a^2 + c$, $b^2 + b$, $c^2 + a$ дараалал геометр прогресс болдог байх бүх эрс өсдөг $a < b < c$ натурал тоон арифметик прогрессийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу: $(a, b, c) = (1, 4, 7)$ ба $(2, 3, 4)$.**

Харгалзах геометр прогресс $(8, 20, 50)$ ба $(8, 12, 18)$ байх тул шийд болно. Өөр шийдгүй гэж харуулъя. $d = c - b = b - a > 0$ ба $c = 2b - a$ гэвэл $a^2 + c$, $b^2 + b$, $c^2 + a$ геометр прогресс үүсгэх нөхцөл $(a^2 + c)(c^2 + a) - (b^2 + b)^2 = d^2(a^2 - 2ab - b^2 + 6b - 1) = 0$ байна.

Энд $-ac = a(a - 2b) = b(b - 6) + 1 \leq 0$ гэдгээс $b \leq 5$ байх ба $f(b) = 2b^2 - 6b + 1$ гэвэл $d^2 = (b - a)^2 = f(b)$ байна.

$b = 2$ үед $f(2) = -3 < 0$ тул боломжгүй.

$b = 3$ үед $d = 1$ ба $b = 4$ үед $d = 3$ болж дээрх шийдүүд гарна.

$b = 5$ үед $f(5) = 21$ бүтэн квадрат биш тул боломжгүй.

Бодлого S3. 5×5 хүснэгтийн нүднүүдэд 1, 2, ..., 25 гэсэн тоонууд дараах байдлаар бичигдсэн байв.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Хүснэгтийн аль нэг 3×1 эсвэл 1×3 дэд хүснэгтийг сонгон аваад сонгосон хүснэгтийн тоо бүрийг 1-ээр ихэсгэх гэсэн хоёр төрлийн үйлдлийн тусламжтайгаар хүснэгтэд бичигдсэн бүх тоог тэнцүү болгож болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодолт. **Хариу: Болохгүй.**

Хүснэгтийн нүднүүдийг дараах байдлаар 3 өнгөөр будъя. Тэгвэл өгөгдсөн үйлдлүүдээр шар нүдэнд бичигдсэн тоонуудын нийлбэр ба цэнхэр нүдэнд бичигдсэн тоонуудын нийлбэр тус бүрдээ 1-ээр нэмэгдэх тул ялгавар нь инвариант байна. Анх энэ ялгавар

$$(25+10+14+18+22+3+7+11)-(1+4+8+12+16+15+19+23) = 12$$

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

ба бүх тоонууд тэнцүү болно гэвэл 0 байх ёстой. Иймд хүснэгтийн бүх тоог тэнцүү болгох боломжгүй.

Бодлого S4. $AB = AC$ байх ABC адил хажуут гурвалжны A оройн өнцөг 36° байв. ABC гурвалжны дотор D цэгийг $\angle BAD = 24^\circ$ ба $AD = BC$ байхаар авав.

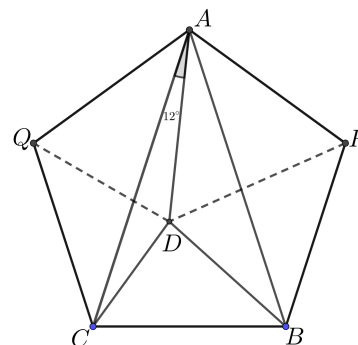
$\angle BDC$ өнцгийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Э. Азжаргал)

Бодолт. AB, AC суурьтай, орой дахь өнцөг нь 108° байх адил хажуут AQC, AQC гурвалжнуудыг байгуулъя (зураг).

Тэгвэл $APBCQ$ зөв таван өнцөгт болно. Иймд $AD = BC = AP$ байна. Мөн $\angle DAP = 60^\circ$ тул APD зөв гурвалжин болно.

$\triangle PBD$ нь $PB = PD$ ба $\angle DPB = 48^\circ$ байх адил хажуут гурвалжин болно. Мөн $\triangle QAD$ нь $AQ = AD$ ба $\angle QAD = 48^\circ$ байх адил хажуут гурвалжин болно. Хоёр гурвалжин тэнцүү байх $\Theta\Theta$ шинжээр $\triangle PBD = \triangle QAD$ болно. Иймд $QD = BD$. Хоёр гурвалжин тэнцүү байх ТТТ шинжээр $\triangle CQD = \triangle CBD$ гэж гарна. Иймд $\angle BDC = (360^\circ - 60^\circ - 2 \cdot 66^\circ)/2 = 84^\circ$ байна.



Т ангилал (Дунд ангийн багш)**Бодлого Т1.** $\{a_n\}_{n \geq 1}$ эерэг тоон дарааллын хувьд $a_1 = 1$ ба $n \geq 1$ үед

$$a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n + a_{n+1}}$$

байв. $n \geq 1$ хувьд $b_n = a_{n+1} - a_n$ гэе.

- (i) $b_n \geq 1$ гэж харуул.
- (ii) $a_n = b_n(b_n - 1)/2$ гэж харуул.
- (iii) a_n гишүүнийг n -ээр илэрхийл.
- (iv) $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{60}$ нийлбэрийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

Бодолт.

- (i) $a_{n+1} \geq a_n \geq 1$ тул $b_n = \sqrt{a_n + a_{n+1}} \geq 1$ байна.
- (ii) $a_n + a_{n+1} = b_n^2$ тул $b_n^2 + b_n = 2a_{n+1}$ ба $b_n^2 - b_n = 2a_n$ байна.
- (iii) $2 = 2a_1 = b_1(b_1 - 1)$ ба $b_1 \geq 0$ гэдгээс $b_1 = 2$ байна. Эндээс $a_2 = 3$ байна. $6 = 2a_2 = b_2(b_2 - 1)$ ба $b_2 \geq 0$ гэдгээс $b_2 = 3$ байна. Эндээс $a_3 = 6$ байна.

Индукцээр $b_{n-1} = n$ гэвэл $a_{n-1} = n(n-1)/2$ ба $a_n = a_{n-1} + b_{n-1} = n(n+1)/2$ байна. Одоо $n(n+1) = 2a_n = b_n(b_n - 1)$ ба $b_n \geq 0$ гэдгээс $b_n = n+1$ болно.

Тухайлбал нөхцөл хангах дараалал ганц $a_n = n(n+1)/2$ байна.

$$(iv) S = \sum_{n=1}^{60} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{60 \cdot 61 \cdot 62}{6} = 37820 \text{ байна.}$$

Бодлого Т2. Ω тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн диагоналиуд N цэгт огтлолцоно. B оройг дайрсан CD талтай параллел шулуун AC шулуунтай E цэгт огтлолцоно. D оройг дайрсан BC талтай параллел шулуун AC шулуунтай F цэгт огтлолцоно. BD шулуун дээр $\angle DMF = \angle MEF$ байх M цэг авав. CM шулуун Ω тойрогтой L цэгт огтлолцох ба $BL = CD$ байв. Тэгвэл L, F, D цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. M цэг байгуулагдаж байгаа тул L цэг AB жижиг нум дээр оршино. Иймд $BL = CD$ нөхцөлөөс L, F, D цэгүүд нэг шулуун дээр оршино.

Бодлого Т3. Дурын бүхэл N тооны хувьд $(m+n)^2 + mn + 1 = N(m+n)$ тэгшитгэл төгсгөлгүй олон бүхэл (m, n) шийдтэй гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. (m, n) бүхэл шийд гэе. $x^2 + (3n - N)x + (n^2 - Nn + 1) = 0$ тэгшитгэлийн нэг шийд m байна. Нөгөө шийдийг k гэвэл $m + k = N - 3n$ ба $mk = n^2 - Nn + 1$ байна. Эндээс k бүхэл ба (n, k) шийд болно.

Иймд $a_0 = -1$, $a_1 = 1$ ба $i \geq 2$ үед $a_i = N - 3a_{i-1} - a_{i-2}$ гэвэл (a_{i-1}, a_i) шийд болно. Одоо $A = \{a_i \mid i \geq 0\}$ төгсгөлгүй гэж харуулъя. Эсрэгээс нь төгсгөлөг гээд $b_i = a_i - N/5$ гэе. Тэгвэл $b_i = -3b_{i-1} - b_{i-2}$ ба $B = \{b_i \mid i \geq 0\}$ төгсгөлөг байна. Тэгвэл b_i үелэх ба $j > 0$ хувьд $|b_j| = \max_{i \geq 0} |b_i|$ гэвэл $|b_{j+1}| \geq 3|b_j| - |b_{j-1}| > |b_j| \geq |b_{j+1}|$ болж зөрчил гарна.

Бодлого Т4. 2024×2024 хүснэгтийн i -р мөр j -р баганад a_{ij} тоо бичигджээ. Мөр бүрийн хувьд $\sum_{k=1}^{2024} a_{ik}^2 = 1$ байсан ба ялгаатай хоёр $i \neq j$ мөр бүрийн хувьд $\sum_{k=1}^{2024} a_{ik}a_{jk} = \alpha$ байв.

α тоо хамгийн багадаа ямар утга авч болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: А. Нямдаваа)

Бодолт. **Хариу:** $\min \alpha = -\frac{1}{2023}$.

$N = 2024$ гээд $1 \leq i \leq N$ хувьд $x_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iN})$ вектор гэе. Дотоод үржвэр ашиглан бичвэл $\langle x_1 + \dots + x_N, x_1 + \dots + x_N \rangle \geq 0$ гэдгээс $N + N(N-1)\alpha \geq 0$ болох тул $\alpha \geq -1/(N-1)$ байна.

Одоо ийм векторууд олдоно гэж индукцээр харуулъя. $n = 1$ үед $x_1 = (1)$ гэе.

n урттай $x_1, \dots, x_n$ векторууд $\langle x_i, x_i \rangle = 1$ ба $i \neq j$ бол $\langle x_i, x_j \rangle = -1/(n-1)$ нөхцөлийг хангадаг байг.

$n+1$ урттай $y_1, \dots, y_{n+1}$ векторуудыг $1 \leq i \leq n$ хувьд $y_i = (\sqrt{1-1/n^2}x_i, -1/n)$ ба $y_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$ гэж тодорхойлъя. Тэгвэл $1 \leq i \leq n$ хувьд $\langle y_i, y_i \rangle = (1-1/n^2) + 1/n^2 = 1$ ба $1 \leq i \neq j \leq n$ бол $\langle y_i, y_j \rangle = -(1-1/n^2)/(n-1) + 1/n^2 = -1/n$ байна. Мөн $\langle y_{n+1}, y_{n+1} \rangle = 1$ ба $1 \leq i \leq n$ хувьд $\langle y_i, y_{n+1} \rangle = -1/n$ тул $n+1$ урттай нөхцөл хангадаг векторууд байгуулж чадлаа.

Монголын Математикийн 60-р Олимпиадын II Давааны II шат

Хот/бүсийн Олимпиад

Энэ жилийн олимпиад БШУЯ, БЕГ-аас олон нийтээр хэлцүүлсэн олимпиад зохион байгуулах нийтлэг журмын дагуу зохион байгуулагдаж байна. Ингэснээр Монголын Математикийн Олимпиад

1. I даваа (сургууль),
2. II давааны I шат (аймаг, дүүрэг),
3. II давааны II шат (бүс, Улаанбаатар хот),
4. III даваа (УМО)

гэсэн албан ёсны 4 шатлалтай болж байна. Өөрөөр хэлбэл II давааны II шатанд бүсийн олимпиад албан ёсоор багтлаа. Ингэснээр бүсийн математикийн олимпиадад оролцох зардлыг цаашид БЕГ, аймгийн БШУГ хариуцах эрх зүйн үндэс бүрдэж байгаа юм.

Монголын Математикийн 60-р олимпиадын II давааны II шат буюу хот/бүсийн олимпиад 2024 оны 2-р сарын 24, 25-ны өдрүүдэд зохион байгуулагдлаа. Улаанбаатар хотын олимпиад уламжлал ёсоор МУГБ С. Цагааны нэрэмжит болон нийслэлийн 1-р сургууль дээр зохиогдов. Зүүн бүсийн олимпиад Хэнтий аймагт, төвийн бүсийн олимпиад Дархан-Уул аймагт зохион байгуулагдсан бол баруун болон говийн бүсийн олимпиад цаг агаарын таагүй нөхцөлийн улмаас цахимаар зохион байгуулагдлаа.

Өнгөрсөн жилээс эхлэн УБ хотын олимпиадыг II давааны II шатны эрх авсан бүх оролцогчийн хувьд нээлттэй болгосон бол энэ жил дүрмийн энэхүү заалтыг ашиглан орон нутгийн 2 ч сурагч УМО-ын эрх авлаа. Мөн төвийн болон баруун бүсийн Е ангилалын сурагчид УБ хотоос эрх авсан сурагчдаас өндөр оноо авсан боловч УМО-60-д оролцох эрх авч чадсангүй. ММОХ-ын зүгээс эдгээр тохиолдлуудыг нарийвчлан судлаж зохих шийдлийг олох болно.

Бодлогууд

D ангилал (7–8 анги)

Бодлого D1. $\underbrace{66 \dots 6}_{60} \times \underbrace{77 \dots 7}_{60}$ үржвэрийн цифрүүдийн нийлбэрийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодлого D2. A тоо дэс дараалсан гурван натурал тооны квадратуудын нийлбэрт бичигддэг, B тоо дэс дараалсан дөрвөн натурал тооны квадратуудын нийлбэрт бичигддэг бөгөөд $3A - B = 2025$ байх (A, B) хосуудын тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого D3. B цэг A болон C цэгүүдийн хооронд байхаар A, B, C цэгүүдийг l шулуун дээр авав. l шулууны нэг талд орших D, E цэгүүдийг $AD = BD, BC = EC$ бөгөөд $\triangle ADB, \triangle ECB$ гурвалжнууд төсөөтэй байхаар авав. AE, CD шулуунууд F цэгт огтлолцоно. CD шулуун $\angle BFE$ өнцгийн биссектрисс болно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого D4. 60-аас хэтэрдэггүй 11 ширхэг ялгаатай натурал тооноос тогтох олонлог өгөгдөв. Энэ олонлогоос элементүүдийн тоо болон элементүүдийн нийлбэр нь тэнцүү, ерөнхий элементгүй, хоосон биш хоёр дэд олонлог сонгон авч болно гэж батал.

Жишээлбэл $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ тоонууд өгөгдсөн бол $\{1, 4\}, \{2, 3\}$ олонлогууд бодлогын нөхцөл хангана, харин $\{1, 2\}, \{3\}$ олонлогууд элементүүдийн тоо нь зөрөх тул, $\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\}$ олонлогууд элементүүдийн нийлбэр нь зөрөх тул нөхцөл хангахгүй.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

E ангилал (9–10 анги)

Бодлого E1. a, b, c бодит тоонуудын хувьд

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ x + cy = a \\ cx + y = b \end{cases}$$

тэгшитгэл (x, y) бодит шийдтэй бол $a^2 + b^2 + c^2 = 2abc + 1$ байна гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого E2. 288-аас хэтэрдэггүй 13 ширхэг ялгаатай натурал тооноос тогтох олонлог өгөгдөв. Энэ олонлогоос элементүүдийн тоо болон элементүүдийн нийлбэр нь тэнцүү, ерөнхий элементгүй, хоосон биш хоёр дэд олонлог сонгон авч болно гэж батал.

Жишээлбэл $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ тоонууд өгөгдсөн бол $\{1, 4\}, \{2, 3\}$ олонлогууд бодлогын нөхцөл хангана, харин $\{1, 2\}, \{3\}$ олонлогууд элементүүдийн тоо нь зөрөх тул, $\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\}$ олонлогууд элементүүдийн нийлбэр нь зөрөх тул нөхцөл хангахгүй.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодлого E3. I төвтэй тойрог багтаасан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн $\angle BAD < 90^\circ$ байв. BI хэрчим дээр E цэгийг, DI хэрчим дээр F цэгийг $\angle EAF = \angle BAI$ байхаар авав. ABD гурвалжныг багтаасан тойргийн төвийг O гэе. O цэгийн BD шулууны хувьд тэгш хэмтэй цэгийг Q гэе. B, D, Q, C цэгүүд нэг тойрог дээр орших бол $\angle ECF = \angle BAD$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого Е4. Тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн AC , BD диагоналууд перпендикуляр бөгөөд P цэгт огтлолцоно. BC тал дээр X цэгийг авсан ба XP шулуун APD гурвалжныг багтаасан тойрогтой P цэгээс ялгаатай Y цэгт огтлолцоно.

$\angle AXD + \angle BYC = 90^\circ$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого Е5. $211 \cdot 9^k + 125^m = 2024^n$ тэгшитгэлийн бүх (k, m, n) сөрөг биш бүхэл тоон шийдийг ол.

(Дэвшүүлсэн: А. Ганбат)

Бодлого Е6. $0, 1$ цифрүүдээр бичигдсэн M, N тоонуудын хувьд N тооны эхлэлээс хэдэн цифр ба төгсгөлөөс хэдэн цифр дарахад M тоо үлддэг бол M тоог N тооны дэд тоо гэе.

$M = 10101$ тоо N тоонд хэдэн удаа дэд тоо болж агуулагдахыг $g(N)$ гэж тэмдэглэе. Энд давхардлыг зөвшөөрнө. Жишээлбэл $g(101101) = 0$, $g(10101101) = 1$, $g(1010101) = 2$ байна.

$n \geq 5$ гэе. N тоо $0, 1$ цифрүүдээр бичигдсэн бүх n -ээс хэтрэхгүй оронтой тоогоор гүйх үеийн $g(N)$ утгуудын нийлбэрийг ол.

(Дэвшүүлсэн: А. Нямдаваа)

Г ангилал (11-12 анги)

Бодлого Г1. Нүднүүдэд нь $1, 2, \dots, 120$ тоонуудыг нэг, нэгээр нь нүд бүрд нь ялгаатай тоо байхаар бичсэн 2×60 хэмжээтэй хүснэгтүүдийг авч үзье. Хүснэгтийн мөр, багана бүрийн хувьд тэнд бичигдсэн тоонуудын нийлбэр болох 62 тоо бүгдээрээ тэгш тоо байвал *тэгш хүснэгт*, харин бүгдээрээ сондгой тоо байвал *сондгой хүснэгт* гэж нэрлэе. Бүх боломжит тэгш хүснэгтийн тоо ба бүх боломжит сондгой хүснэгтийн тооны аль нь их вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

Бодлого Г2. ω_1, ω_2 тойргууд P, Q ялгаатай цэгүүдэд огтлолцоно. P цэгийг дайрсан шулуун ω_1 тойрогтой дахин A цэгт, ω_2 тойрогтой дахин B цэгт огтлолцоно. l шулуун ω_1 тойрогтой E, D цэгүүдэд, ω_2 тойрогтой C, F цэгүүдэд огтлолцох ба C, D цэгүүд E, F цэгүүдийн хооронд оршино. (A, B, C, D, E, F нь бүгд ялгаатай цэгүүд.) AE, BC шулуунууд H цэгт, AD, BF шулуунууд G цэгт огтлолцоно. C цэгийг дайрсан BF шулуунтай параллел шулуун, D цэгийг дайрсан AE шулуунтай параллел шулуунтай M цэгт огтлолцоно. H, M, G цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого Г3. $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ олон гишүүнтийн дарааллыг $P_0(x) = 0$ ба $n \geq 0$ үед

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x - P_n(x)^2}{2}$$

гэж тодорхойлъя. Дурын $m \geq n \geq 0$ ба $0 \leq x \leq 1$ тоонуудын хувьд

$$|P_m(x) - P_n(x)| < \frac{1}{n+1}$$

байна гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого F4. $f(x)$ квадрат гурван гишүүнтийг ямар нэг $g(x)$ квадрат гурван гишүүнт дурын бодит x тооны хувьд $g(f(x)) = f(x) \cdot g(x)$ байхаар олддог бол *сайн* гээ.

Ямар нэг сайн олон гишүүнтийн язгуур болж чадах 2025-аас хэтрэхгүй натурал тоо хэд байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого F5. $211 \cdot 3^k + 5^m = 2024^n$ тэгшитгэлийн бүх (k, m, n) сөрөг биш бүхэл тоон шийдийг ол.

(Дэвшүүлсэн: А. Ганбат)

Бодлого F6. Нэгэн улс n арлаас бүрддэг. Зарим арлууд хоорондоо натурал тоон нэгж төлбөртэй гүүрээр холбогддог ба гүүрүүд хоорондоо арлаас өөр газарт огтлолцдоггүй байв. Ижил арал дээр төгсгөлтэй гүүрүүдийг холбон зам хийнэ.

Аль ч хоёр арлыг холбосон яг нэг зам байх бөгөөд бүх замуудын нийт төлбөр хоорондоо ялгаатай ба $N = n(n-1)/2$ тооноос хэтрэдэггүй бол n эсвэл $n-2$ бүтэн квадрат гэж батал.

Жишээлбэл A, B, C, D дөрвөн арлаас бүрдэх ба $d(A, B) = 1$, $d(A, C) = 2$, $d(A, D) = 4$ нэгж төлбөртэй ба бусад арлууд холбогдоогүй байхад нөхцөл биелнэ.

(Дэвшүүлсэн: Б. Билэгдэмбэрэл)

S ангилал (Бага ангийн багш)

Бодлого S1. Усан сангийн ус тогтмол хурдаар ууршдаг ба уг усан санд 3 цоргоор ус нэмдэг. Хэрэв ууршилт байхгүй гэвэл уг 3 цоргоор хоосон усан санг 2 долоо хоногт дүүргэнэ. Хоосон усан санг зөвхөн 1 ба 2 дугаар цоргыг нээн 6 долоо хоногт дүүргэжээ. Үүний дараа зөвхөн 3 дугаар цоргыг нээж орхиход 5 долоо хоногийн дараа усан сангийн усны $\frac{1}{3}$ хэсэг ууршсан байв. Дүүрэн устай усан сангийн бүх цоргыг хаавал түүний ус хэдэн долоо хоногт ууршиж дуусах вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодлого S2. Баатар тэгш өнцөгт параллелепипедийн ирмэгүүдийг төмөр утсаар хийж загвар бүтээжээ. Түүнд хоёр цэгийн хоорондын зайг хэмжихээс гадна, тахир шугамын дагуу урт хэмжиж чаддаг уян утсан метр (дээрээ хэмжээс бүхий) байсан бөгөөд түүнийгээ ашиглан хийсэн параллелепипидийнхээ бүтэн гадаргуугийн талбайг хоёрхон удаагийн хэмжилтээр олж чадна гэж сайрхжээ. Тэр үнэн хэлсэн үү?

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

Бодлого S3. Зөв 360 өнцөгтийн оройнуудыг цагийн зүүний дагуу дэс дараалан 1, 2, ..., 360 тоонуудаар дугаарлав. 1-р тооноос эхлэн цагийн зүүний дагуу тоолон 359 дахь тоог дарна, үүний дараа дарсан тооны дараагийн тооноос эхлэн үргэлжлүүлэн тоолж 358 дахь тоог дарна, үүний дараа дарсан тооны дараагийн тооноос эхлэн үргэлжлүүлэн тоолж 357 дахь тоог дарна гэх мэтчилэн нэг тоо үлдтэл үйлдлийг гүйцэтгэв. Хамгийн сүүлд ямар тоо үлдэх вэ? (дарагдсан тоог дахин тоолохгүй)

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодлого S4. A тооны цифрүүдийн нийлбэр 60, харин B тооны цифрүүдийн нийлбэр 2024 бол $A+B$ тооны цифрүүдийн нийлбэр хамгийн багадаа хэд байж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

Бодлого S5. a, b, c бодит тоонуудын нийлбэр $a+b+c=3$ бол

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \geq 3$$

гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого S6. ABC тэгш өнцөгт гурвалжны хувьд $\angle ACB = 90^\circ$ ба $\angle BAC = 36^\circ$ байв. AL биссектрис дээр M цэгийг $AM = MB$ байхаар тэмдэглэв. $AM = 2CL$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Батзориг)

Т ангилал (Дунд ангийн багш)

Бодлого T1. Нүднүүдэд нь 1, 2, ..., 120 тоонуудыг нэг, нэгээр нь нүд бүрд нь ялгаатай тоо байхаар бичсэн 2×60 хэмжээтэй хүснэгтүүдийг авч үзье. Хүснэгтийн мөр, багана бүрийн хувьд тэнд бичигдсэн тоонуудын нийлбэр болох 62 тоо бүгдээрээ тэгш тоо байвал *тэгш хүснэгт*, харин бүгдээрээ сондгой тоо байвал *сондгой хүснэгт* гэж нэрлэе. Бүх боломжит тэгш хүснэгтийн тоо ба бүх боломжит сондгой хүснэгтийн тооны аль нь их вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

Бодлого T2. $p \geq 3$ анхны тоо байг. $p \mid x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + x_5^4$ бөгөөд $1 \leq x_1, \dots, x_5 \leq p$ байх бүх натурал тоон $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ тавтын тоог p -д хуваахад гарах үлдэгдлийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Билэгдэмбэрэл)

Бодлого T3. 2×2 хэмжээтэй бүх бодит матрицын огторгуйг $M_2(\mathbb{R})$ гэж тэмдэглэе. $M_2(\mathbb{R})$ дээр матрицын ердийн нэмэх

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

ба үржих

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

үйлдлүүдийг авч үзье. Дурын $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ матрицын хувьд

$$\varphi(A + B^2) = \varphi(A) + \varphi(B)^2$$

байдаг бүх $\varphi: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ буулгалтыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого T4. ABC гурвалжны AB талыг B цэгт шүргэдэг C оройг дайрсан ω тойрог татав. $\angle A$ өнцгийн дотоод биссектрис ω тойрогтой E, F цэгүүдэд, BC талтай D цэгт огтлолцох ба F цэг ABC гурвалжин дотор оршиж байв. $2\angle EBS = \angle BAC$ байх S цэгийг EC хэрчим дээр авав. Мөн DT шулуун CS шулуунтай параллел байх T цэгийг BS хэрчим дээр авав. ET шулуун ω тойрогтой дахин U цэгт огтлолцоно. ABU гурвалжны багтаасан тойрог AD шулууныг шүргэнэ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого T5. $n \geq 1$ хувьд $d_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{n+k} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \dots + \frac{1}{3n}$ гэвэл

$$\frac{2}{3n+1} < d_n < \frac{2}{3n-2}$$

байна гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого Т6. A, B үсгээр бичигдсэн S үгэнд агуулагдах хоорондоо үл огтлолцох ABA дэд үгийн тооны хамгийн их утгыг $f(S)$ гэж тэмдэглэе. Жишээлбэл $f(ABBABBA) = 0$, $f(ABABABBA) = 1$, $f(ABABABA) = 2$ байна.

$n = 4k + 1$ гэе. S үг бүх n урттай үгээр гүйх үеийн $f(S)$ утгуудын нийлбэрийг ол.

(Дэвшүүлсэн: А. Нямдаваа)

Бодолтууд

D ангилал (7-8 анги)

Бодлого D1. $\underbrace{66\dots6}_{60} \times \underbrace{77\dots7}_{60}$ үржвэрийн цифрүүдийн нийлбэрийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодолт. **Хариу: 540.**

$k \geq 1$ хувьд

$$\begin{aligned} \underbrace{66\dots6}_{3k} \times \underbrace{77\dots7}_{3k} &= \underbrace{518518\dots518}_{k-1} 517 \underbrace{481481\dots481}_{k-1} 482 \\ \underbrace{66\dots6}_{3k+1} \times \underbrace{77\dots7}_{3k+1} &= \underbrace{518518\dots518}_k 41 \underbrace{481481\dots481}_{k-1} 482 \\ \underbrace{66\dots6}_{3k+2} \times \underbrace{77\dots7}_{3k+2} &= \underbrace{518518\dots518}_k 5081 \underbrace{481481\dots481}_{k-1} 482 \end{aligned}$$

байна. Тухайлбал

$$\underbrace{66\dots6}_{60} \times \underbrace{77\dots7}_{60} = \underbrace{518518\dots518}_{19} 517 \underbrace{481481\dots481}_{19} 482$$

тул цифрүүдийн нийлбэр нь

$$19 \cdot (5 + 1 + 8 + 4 + 8 + 1) + 5 + 1 + 7 + 4 + 8 + 2 = 540$$

байна.

Бодлого D2. A тоо дэс дараалсан гурван натурал тооны квадратуудын нийлбэрт бичигддэг, B тоо дэс дараалсан дөрвөн натурал тооны квадратуудын нийлбэрт бичигддэг бөгөөд $3A - B = 2025$ байх (A, B) хосуудын тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. **Хариу: 3.**

Бодлогын өгүүлбэрээс $n \geq 2, k \geq 2$ хувьд

$$\begin{aligned} A &= (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 3n^2 + 2 \\ B &= (k-1)^2 + k^2 + (k+1)^2 + (k+2)^2 = 4k^2 + 4k + 6 \end{aligned}$$

байна. Үүнийг өгсөн тэгшитгэлд орлуулбал $3A - B = 3(3n^2 + 2) - (4k^2 + 4k + 6) = 2025$ гэдгээс $9n^2 - (2k+1)^2 = 2024$ буюу

$$(3n - 2k - 1)(3n + 2k + 1) = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$$

гэж гарна. Сүүлчийн тэгшитгэлийн зүүн талын 2 үржигдэхүүний нийлбэр тэгш тул тус бүрдээ тэгш тоо байх ёстой. Мөн $3n - 2k - 1 < 3n + 2k + 1$ тул $(3n - 2k - 1, 3n + 2k + 1)$ хос $(2, 1012)$, $(4, 506)$, $(22, 92)$, $(44, 46)$ утгууд авах боломжтой. Эндээс $(n, k) = (169, 252)$, $(85, 125)$, $(19, 17)$, $(15, 0)$ болох ба 0 натурал тоо биш тул сүүлийн хос нөхцөл хангахгүй. Иймд нөхцөл хангах (A, B) хос 3 байна.

Бодлого D3. B цэг A болон C цэгүүдийн хооронд байхаар A, B, C цэгүүдийг l шулуун дээр авав. l шулууны нэг талд орших D, E цэгүүдийг $AD = BD, BC = EC$ бөгөөд $\triangle ADB, \triangle ECB$ гурвалжнууд төсөөтэй байхаар авав. AE, CD шулуунууд F цэгт огтлолцоно. CD шулуун $\angle BFE$ өнцгийн биссектрис болно гэж батал.

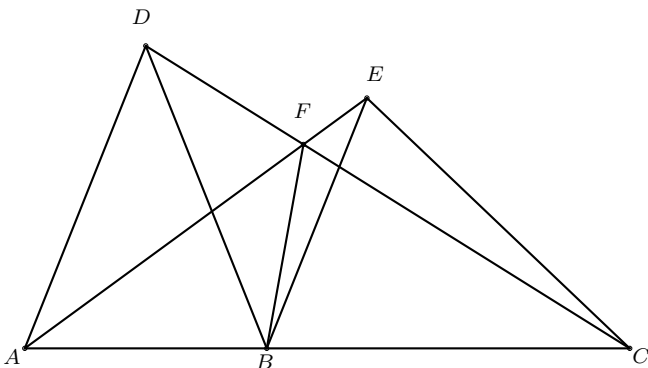
(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт.

$\angle ABD = \angle CBE = \alpha$ гэдгээс $\angle ABE = \angle CBD$ байна. Мөн

$$\frac{AB}{BE} = \frac{DB}{BC}$$

тул $\triangle ABE \sim \triangle DBC$ байна. ABE гурвалжныг α өнцгөөр эргүүлбэл $A'E' \parallel CD$ болох учир $\angle EFC = \alpha$ байна. $\angle EFC = \angle EBC$ тул $FECB$ тойрогт багтана. Иймд $\angle CEB = \angle CFB$ болно. Иймд ECB адил хажуут гурвалжин учир $\angle EFC = \angle CFB$ болж батлагдав.



Бодлого D4. 60-аас хэтэрдэггүй 11 ширхэг ялгаатай натурал тооноос тогтох олонлог өгөгдөв. Энэ олонлогоос элементүүдийн тоо болон элементүүдийн нийлбэр нь тэнцүү, ерөнхий элементгүй, хоосон биш хоёр дэд олонлог сонгон авч болно гэж батал.

Жишээлбэл $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ тоонууд өгөгдсөн бол $\{1, 4\}, \{2, 3\}$ олонлогууд бодлогын нөхцөл хангана, харин $\{1, 2\}, \{3\}$ олонлогууд элементүүдийн тоо нь зөрөх тул, $\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\}$ олонлогууд элементүүдийн нийлбэр нь зөрөх тул нөхцөл хангахгүй.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодолт. Эдгээр тоонуудаас $C_{11}^5 = 462$ янзаар 5 элементтэй дэд олонлог сонгон авах ба нийлбэр нь $56 + 57 + 58 + 59 + 60 = 290$ тооноос хэтрэхгүй. Иймд эдгээр олонлогууд дунд элементүүдийнх нь нийлбэр тэнцүү A, B гэсэн ялгаатай хоёр олонлог оршин байна. Энэ үед $A \setminus B$ ба $B \setminus A$ олонлогууд бодлогын нөхцөл хангана.

Е ангилал (9-10 анги)**Бодлого Е1.** a, b, c бодит тоонуудын хувьд

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ x + cy = a \\ cx + y = b \end{cases}$$

тэгшитгэл (x, y) бодит шийдтэй бол $a^2 + b^2 + c^2 = 2abc + 1$ байна гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. $(b - ac)^2 = (1 - a^2)(1 - c^2)$ гэж батлахад хангалттай.

$x = a - cy$ гэдгээс $a(a - cy) + by = 1$ буюу $(b - ac)y = 1 - a^2$ байна. Мөн ижлээр $c(a - cy) + y = b$ гэдгээс $b - ac = (1 - c^2)y$ болно. $y \neq 0$ бол $(b - ac)^2 = (1 - a^2)(1 - c^2)$ байна. $y = 0$ бол $1 - a^2 = b - ac = 0$ гэдгээс $(b - ac)^2 = (1 - a^2)(1 - c^2)$ байна.

Бодлого Е2. 288-аас хэтэрдэггүй 13 ширхэг ялгаатай натурал тооноос тогтох олонлог өгөгдөв. Энэ олонлогоос элементүүдийн тоо болон элементүүдийн нийлбэр нь тэнцүү, ерөнхий элементгүй, хоосон биш хоёр дэд олонлог сонгон авч болно гэж батал.

Жишээлбэл $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ тоонууд өгөгдсөн бол $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$ олонлогууд бодлогын нөхцөл хангана, харин $\{1, 2\}$, $\{3\}$ олонлогууд элементүүдийн тоо нь зөрөх тул, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{5, 6, 7, 8\}$ олонлогууд элементүүдийн нийлбэр нь зөрөх тул нөхцөл хангахгүй.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодолт. Эдгээр тоонуудаас $C_{13}^6 = 1716$ янзаар 6 элементтэй дэд олонлог сонгон авах ба нийлбэр нь

$$283 + 284 + 285 + 286 + 287 + 288 = 1713$$

тооноос хэтрэхгүй. Иймд эдгээр олонлогууд дунд элементүүдийнх нь нийлбэр тэнцүү A, B гэсэн ялгаатай хоёр олонлог оршин байна. Энэ үед $A \setminus B$ ба $B \setminus A$ олонлогууд бодлогын нөхцөл хангана.

Бодлого Е3. I төвтэй тойрог багтаасан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн $\angle BAD < 90^\circ$ байв. BI хэрчим дээр E цэгийг, DI хэрчим дээр F цэгийг $\angle EAF = \angle BAI$ байхаар авав. ABD гурвалжныг багтаасан тойргийн төвийг O гэе. O цэгийн BD шулууны хувьд тэгш хэмтэй цэгийг Q гэе. B, D, Q, C цэгүүд нэг тойрог дээр орших бол $\angle ECF = \angle BAD$ гэж батал.

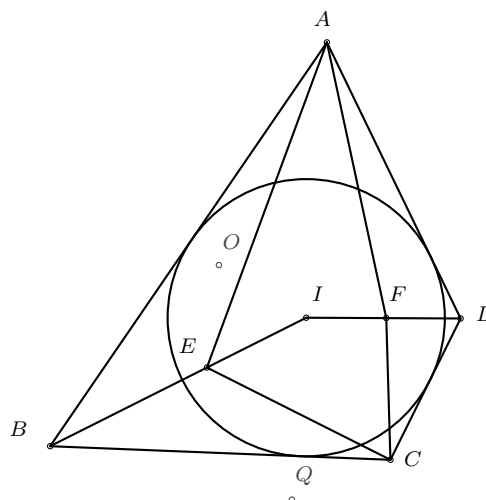
(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. $BCQD$ тойрогт багтана гэдгээс $\angle BCD = \angle BQD = \angle BOD = 2\angle BAD$ болно. $\angle BAE = \angle IAF = \alpha$ ба $\angle EAI = \angle FAD = \beta$ гэе. $\sin \angle AEB = \sin \angle AEI$, $\sin \angle AFD = \sin \angle AFI$ учраас

$$AB \frac{\sin \alpha}{BE} = AI \frac{\sin \beta}{EI}, \quad AD \frac{\sin \alpha}{FD} = AI \frac{\sin \beta}{FI}$$

байна. Эндээс $\frac{BE \cdot DF}{EI \cdot FI} = \frac{AB \cdot AD}{AI^2}$ болно.

$\angle BCI = \angle ECF'$ байх F' цэгийг DI дээр авъя. Дээрх-тэй ижлээр $\frac{BE \cdot DF'}{EI \cdot F'I} = \frac{BC \cdot CD}{CI^2}$ байна.



$\sin \angle AIB = \sin \angle DIC$, $\sin \angle AID = \sin \angle BIC$ учраас

$$\begin{aligned} \frac{AB \cdot AD}{AI^2} &= \frac{\sin \angle AIB}{\sin \angle ABI} \cdot \frac{\sin \angle AID}{\sin \angle ADI} = \frac{\sin \angle DIC}{\sin \angle CBI} \cdot \frac{\sin \angle BIC}{\sin \angle CDI} = \\ &= \frac{\sin \angle DIC}{\sin \angle CDI} \cdot \frac{\sin \angle BIC}{\sin \angle CBI} = \frac{BC \cdot CD}{CI^2} \end{aligned}$$

болно. Эндээс $\frac{BE \cdot DF}{EI \cdot FI} = \frac{BE \cdot DF'}{EI \cdot F'I}$ буюу $\frac{DF}{FI} = \frac{DF'}{F'I}$ болох тул $F = F'$ байна. Иймд $\angle ECF = \angle BCI = \angle BCD/2 = \angle BAD$ болж батлагдав.

Бодлого Е4. Тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн AC , BD диагоналууд перпендикуляр бөгөөд P цэгт огтлолцоно. BC тал дээр X цэгийг авсан ба XP шулуун APD гурвалжныг багтаасан тойрогтой P цэгээс ялгаатай Y цэгт огтлолцоно.

$\angle AXD + \angle BYC = 90^\circ$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. $\angle BCA = \angle BDA = \angle PYA$ учир $AXCY$ тойрогт багтана.

Иймээс $\angle XYC = \angle XAC$ байна. $\angle CBD = \angle CAD = \angle PYD$ учир $BXDY$ тойрогт багтана. Эндээс

$$\angle XYB = \angle XDB$$

болно.

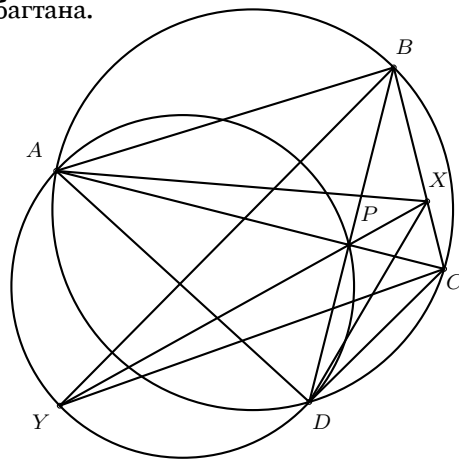
$$\angle APY = \angle AXP + \angle XAP = \angle AXP + \angle XYC$$

$$\angle YPD = \angle PXD + \angle XDB = \angle PXD + \angle XYB$$

Эдгээр тэнцэлийг нэмбэл

$$\angle APD = \angle AXD + \angle BYC$$

болох ба $\angle APD = 90^\circ$ учраас бодлого бодогдоно.



Бодлого Е5. $211 \cdot 9^k + 125^m = 2024^n$ тэгшитгэлийн бүх (k, m, n) сөрөг биш бүхэл тоон шийдийг ол.

(Дэвшүүлсэн: А. Ганбат)

Бодолт. **Хариу:** $(k, m, n) = (1, 1, 1)$.

$(1, 1, 1)$ шийд болохыг шалгах төвөггүй. Өөр шийдгүй гэж харуулъя.

$2024 = 8 \cdot 11 \cdot 23$ ба $2025 = 25 \cdot 81$ болохыг анзааръя.

$1 \cdot 2^k + (-1)^m \equiv 1 \pmod{7}$ гэдгээс $k > 0$ ба $m = 2m_1 + 1$ байна.

$(-1)^m \equiv (-1)^n \pmod{9}$ гэдгээс $n = 2n_1 + 1$ болно.

$1 \cdot (-1)^k + 0 \equiv -1 \pmod{5}$ гэдгээс $k = 2k_1 + 1$ байна.

$211 \cdot 9 - 5^{2m_1+1} \equiv 9^{2n_1+1} \pmod{13}$ гэдгээс $m_1 = 2m_2$ байна.

Одоо $211 \cdot 9^{2k_1+1} + 125^{4m_2+1} = 2024^{2n_1+1}$ тэгшитгэлийг авч үзье.

$n_1 \geq 1$ бол $211 \cdot 9 + 125 \equiv 8 \equiv 0 \pmod{16}$ болж зөрчил гарна.

$n_1 = 1$ үед $k_1 = m_2 = 0$ буюу $(k, m, n) = (1, 1, 1)$ байна.

Бодлого Е6. 0, 1 цифрүүдээр бичигдсэн M , N тоонуудын хувьд N тооны эхлэлээс хэдэн цифр ба төгсгөлөөс хэдэн цифр дарахад M тоо үлддэг бол M тоог N тооны дэд тоо гэе.

$M = 10101$ тоо N тоонд хэдэн удаа дэд тоо болж агуулагдахыг $g(N)$ гэж тэмдэглэе. Энд давхардлыг зөвшөөрнө. Жишээлбэл $g(101101) = 0$, $g(10101101) = 1$, $g(1010101) = 2$ байна.

$n \geq 5$ гэе. N тоо 0, 1 цифрүүдээр бичигдсэн бүх n -ээс хэтрэхгүй оронтой тоогоор гүйх үеийн $g(N)$ утгуудын нийлбэрийг ол.

(Дэвшүүлсэн: А. Нямдаваа)

Бодолт. **Хариу:** $(n - 4)2^{n-5}$.

$T = 10101$ ба $m = 5$ гэе. Бүх n урттай 0, 1 цифрүүдээр бичигдсэн үг дотор $0 \leq i \leq n - m$ байрлалаас T эхлэх боломжуудыг нэмэх замаар

$$\sum_{|a| \leq n} g(a) = (n - m + 1)2^{n-m} = (n - 4)2^{n-5}$$

байна.

Г ангилал (11-12 анги)

Бодлого F1. Нүднүүдэд нь 1, 2, ..., 120 тоонуудыг нэг, нэгээр нь нүд бүрд нь ялгаатай тоо байхаар бичсэн 2×60 хэмжээтэй хүснэгтүүдийг авч үзье. Хүснэгтийн мөр, багана бүрийн хувьд тэнд бичигдсэн тоонуудын нийлбэр болох 62 тоо бүгдээрээ тэгш тоо байвал *тэгш хүснэгт*, харин бүгдээрээ сондгой тоо байвал *сондгой хүснэгт* гэж нэрлэе. Бүх боломжит тэгш хүснэгтийн тоо ба бүх боломжит сондгой хүснэгтийн тооны аль нь их вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

Бодолт. **Хариу:** Сондгой хүснэгтийн тоо тэгш хүснэгтийн тооноос их.

Сондгой хүснэгтийн тоо $2^{59} \cdot (60!)^2$ -тай тэнцүү. Үнэхээр эхний 59 баганад бичигдэх тоонуудыг $C + T$, $T + C$ гэж сонгох боломжийн тоо 2^{59} -тэй тэнцүү ба сүүлийн баганын хүснэгт өмнөх 59 баганын хүснэгтөөсөө нэг утгатай тодорхойлогдоно.

Тэгш хүснэгтийн тоо $C_{60}^{30} \cdot (60!)^2$ -тай тэнцүү. Иймд 2^{59} ба C_{60}^{30} тоонуудыг жишихэд хангалттай. Энд

$$C_{60}^{30} = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{30^2 \cdot 29^2 \cdot \dots \cdot 2^2 \cdot 1^2} < \frac{60 \cdot 60 \cdot 58 \cdot 58 \cdot \dots \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1}{30 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 29 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 2^{59}$$

байна.

Бодлого F2. ω_1, ω_2 тойргууд P, Q ялгаатай цэгүүдэд огтлолцоно. P цэгийг дайрсан шулуун ω_1 тойрогтой дахин A цэгт, ω_2 тойрогтой дахин B цэгт огтлолцоно. l шулуун ω_1 тойрогтой E, D цэгүүдэд, ω_2 тойрогтой C, F цэгүүдэд огтлолцох ба C, D цэгүүд E, F цэгүүдийн хооронд оршино. (A, B, C, D, E, F нь бүгд ялгаатай цэгүүд.) AE, BC шулуунууд H цэгт, AD, BF шулуунууд G цэгт огтлолцоно. C цэгийг дайрсан BF шулуунтай параллел шулуун, D цэгийг дайрсан AE шулуунтай параллел шулуунтай M цэгт огтлолцоно. H, M, G цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. $\angle HEQ = \angle ADQ = \angle APQ = 180^\circ - \angle QPB = 180^\circ - \angle QCB = \angle H C Q$ учир $HECQ$ тойрогт багтана.

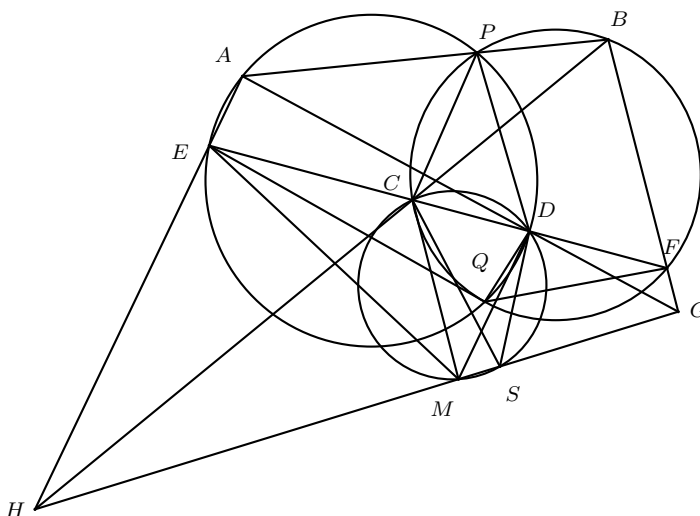
Мөн үүнтэй төстэйгээр $QDFG$ тойрогт багтана.

$HECQ, QDFG$ багтаасан тойргуудын Q -ээс ялгаатай огтлолцолын цэгийг S гээ. Тэгвэл $\angle QSD = \angle QFD = \angle QPC, \angle CSQ = \angle CEQ = \angle QPD$ учир $\angle CSD = \angle CPD$ болно. Үүнийг ашиглан өнцөг тооцвол

$$\angle DSG + \angle DSC + \angle CSH = 180^\circ$$

болж $S \in HG$ гарна.

$\angle DSG = \angle DFB = \angle FCM$ гэдгийг тооцвол C, D, S, M цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Эндээс өнцөг тооцоод $\angle DMS = \angle DMG$ болж $M \in SG$ гарна.



Бодлого F3. $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ олон гишүүнтийн дарааллыг $P_0(x) = 0$ ба $n \geq 0$ үед

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x - P_n(x)^2}{2}$$

гэж тодорхойлж. Дурын $m \geq n \geq 0$ ба $0 \leq x \leq 1$ тоонуудын хувьд

$$|P_m(x) - P_n(x)| < \frac{1}{n+1}$$

байна гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. $x = 0$ үед $P_n(0) = P_m(0) = 0$ тул тэнцэтгэл биш үнэн. Одоо $0 < x \leq 1$ гээд $t = \sqrt{x}$ ба $p_n = P_n(x)$ гэе. Бодолтоо алхмуудад хуваая.

(i) Эхлээд $0 \leq p_n < t$ гэж харуулъя. $n = 0$ үед илт ба $n \geq 0$ үед $0 \leq p_n < t$ бол

$$0 < t - p_{n+1} = (t - p_n) \left(1 - \frac{t + p_n}{2} \right) < t - p_n \leq t$$

байна. Иймд $n + 1$ үед үнэн. Мөн энд $p_{n+1} > p_n$ болох нь батлагдлаа.

(ii) Одоо $t - p_n \leq t(1 - t/2)^n$ гэж харуулъя. $n = 0$ үед үнэн ба дээрхээс $t - p_{n+1} \leq (t - p_n)(1 - t/2)$ тул индукцээр бүх n хувьд үнэн.

(iii) Эцэст нь $t - p_n \leq \frac{1}{n+1}$ гэж харуулъя. $n = 0$ үед илт тул $n \geq 1$ гэе. $s = t/2$ гэвэл А-Г дунджийн тэнцэтгэл бишээр

$$t - p_n \leq \frac{2}{n} n s (1 - s)^n \leq \frac{2}{n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = \frac{2}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

ба Бернулийн тэнцэтгэл бишээр $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \geq 2$ тул батлагдлаа.

(iv) $m \geq n \geq 0$ бол $0 \leq p_m - p_n < t - p_n$ тул бодлого бодогдов.

Нэмэлт. Энэ бодлогоос $P_n(x)$ олон гишүүнт $[0, 1]$ завсарт $\sqrt{x}$ функц рүү жигд нийлдэг болох нь мөрдөнө. Ийм олон гишүүнтүүд олдоно гэдэг нь Вейерштрассын дөхөлтийн теоремын чухал алхам ба ихэнхдээ Тэйлор болон Абелийн теорем эсвэл Динигийн теорем ашиглаж баталдаг. Энд элементар баталгаа өгөв.

Бодлого F4. $f(x)$ квадрат гурван гишүүнтийг ямар нэг $g(x)$ квадрат гурван гишүүнт дурын бодит x тооны хувьд $g(f(x)) = f(x) \cdot g(x)$ байхаар олддог бол *сайн* гэе.

Ямар нэг сайн олон гишүүнтийн язгуур болж чадах 2025-аас хэтрэхгүй натурал тоо хэд байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Батзориг)

Бодолт. $f(z) = 0$ байг. Тэгвэл $g(f(z)) = f(z) \cdot g(z) = 0$ тул $g(0) = 0$ болно. Иймээс, $g(x) = ax(x+b)$ болно, энд $a \neq 0, b$ бодит тоонууд. Үүнийг өгсөн тэгшитгэлд орлуулбал

$$af(x)(f(x)+b) = f(x)ax(x+b)$$

гэж гарна. $\deg f = 2$ тул $f \neq 0$ ба $a \neq 0$ тул

$$f(x) + b = x(x+b) \iff f(x) = x^2 + bx - b.$$

$r \neq 1$ нь $f(x) = x^2 + bx - b$ -ийн шийд болох гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $b = \frac{r^2}{1-r}$. Иймээс бодлогын нөхцөл хангах натурал тоонуудын тоо $2025 - 1 = 2024$ байна.

Бодлого F5. $211 \cdot 3^k + 5^m = 2024^n$ тэгшитгэлийн бүх (k, m, n) сөрөг биш бүхэл тоон шийдийг ол.

(Дэвшүүлсэн: А. Ганбат)

Бодолт. **Хариу:** $(k, m, n) = (2, 3, 1)$.

$(2, 3, 1)$ шийд болохыг шалгах төвөггүй. Өөр шийдгүй гэж харуулъя.

$2024 = 8 \cdot 11 \cdot 23$ ба $2025 = 25 \cdot 81$ болохыг анзааръя.

$1 \cdot 3^k + (-2)^m \equiv 1 \pmod{7}$ гэдгээс $k > 0, m > 0$ байна. $n > 0$ болох нь илт.

$-(-1)^k + 1 \equiv 0 \pmod{4}$ гэдгээс $k = 2k_1$ байна.

$9^{k_1} \equiv 1 \pmod{8}$ тул $3 + (-3)^m \equiv 0 \pmod{8}$ гэдгээс $m = 2m_1 + 1$ байна.

$9^{k_1} \equiv 0 \pmod{9}$ тул $5^m \equiv (-1)^n \pmod{9}$ гэдгээс $m = 3(2m_2 + 1)$ ба $n = 2n_1 + 1$ байна.

$1 \cdot (-1)^{k_1} + 0 \equiv -1 \pmod{5}$ гэдгээс $k_1 = 2k_2 + 1$ байна.

$5^6 \equiv 1 \pmod{7}$ тул $1 \cdot 4^{k_2} \cdot 9 + 5^3 \equiv 1 \pmod{7}$ гэдгээс $k_2 = 3k_3$ буюу $k = 12k_3 + 2$ байна.

$211 \cdot 3^2 - 5^{2m_2+1} \equiv 9^{2n_1+1} \pmod{13}$ гэдгээс $m_2 = 2m_3$ буюу $m = 12m_3 + 3$ байна.

Одоо $211 \cdot 3^{12k_3+2} + 5^{12m_3+3} = 2024^{2n_1+1}$ тэгшитгэлийг авч үзье.

$n_1 \geq 1$ бол $211 \cdot 3^2 + 5^3 \equiv 8 \equiv 0 \pmod{16}$ болж зөрчил гарна.

$n_1 = 1$ үед $k_3 = m_3 = 0$ буюу $(k, m, n) = (2, 3, 1)$ байна.

Бодлого F6. Нэгэн улс n арлаас бүрддэг. Зарим арлууд хоорондоо натурал тоон нэгж төлбөртэй гүүрээр холбогддог ба гүүрүүд хоорондоо арлаас өөр газарт огтлолцдоггүй байв. Ижил арал дээр төгсгөлтэй гүүрүүдийг холбон зам хийнэ.

Аль ч хоёр арлыг холбосон яг нэг зам байх бөгөөд бүх замуудын нийт төлбөр хоорондоо ялгаатай ба $N = n(n-1)/2$ тооноос хэтэрдэггүй бол n эсвэл $n-2$ бүтэн квадрат гэж батал.

Жишээлбэл A, B, C, D дөрвөн арлаас бүрдэх ба $d(A, B) = 1, d(A, C) = 2, d(A, D) = 4$ нэгж төлбөртэй ба бусад арлууд холбогдоогүй байхад нөхцөл биелнэ.

(Дэвшүүлсэн: Б. Билэгдэмбэрэл)

Бодолт. Арлуудыг орой, гүүрүүдийг ирмэг, гүүрийн төлбөрийг жин гэж сэтгээд G жинтэй, чиглэлгүй, гогцоогүй граф байгуулъя. Нөхцөлөөс G мод болох тул нийт $N = \binom{n}{2}$ замтай байна. Иймд замуудын жингүүд яг $\{1, 2, \dots, N\}$ болох ба сондгой жинтэй замын тоо $M = \lceil N/2 \rceil$ байна.

Одоо $u \in G$ орой бэхлээд u -г хараар будъя. $v \neq u$ хувьд $d(u, v)$ жин сондгой бол v -г цагаан, тэгш бол хараар будъя. $v \neq w$ хувьд v, w ялгаатай өнгөтэй $\iff d(u, v) + d(u, w) \equiv 1 \pmod{2} \iff d(v, w) \equiv 1 \pmod{2}$ байна (шалга!). Иймд хар оройн тоог a , цагаан оройн тоог b гэвэл $a + b = n$ ба $ab = M$ байна.

N тэгш бол $ab = M = N/2 = \frac{n^2 - n}{4}$ гэдгээс $n = (a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2$ байна. N сондгой үед $ab = M = (N + 1)/2$ гэдгээс мөн ижлээр $n - 2 = (a - b)^2$ болно.

S ангилал (Бага ангийн багш)

Бодлого S1. Усан сангийн ус тогтмол хурдаар ууршдаг ба уг усан санд 3 цоргоор ус нэмдэг. Хэрэв ууршилт байхгүй гэвэл уг 3 цоргоор хоосон усан санг 2 долоо хоногт дүүргэнэ. Хоосон усан санг зөвхөн 1 ба 2 дугаар цоргыг нээн 6 долоо хоногт дүүргэжээ. Үүний дараа зөвхөн 3 дугаар цоргыг нээж орхиход 5 долоо хоногийн дараа усан сангийн усны $\frac{1}{3}$ хэсэг ууршсан байв. Дүүрэн устай усан сангийн бүх цоргыг хаавал түүний ус хэдэн долоо хоногт ууршиж дуусах вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодолт. Нийт хэсгээ 210. x_1, x_2, x_3 цоргуудаар нэг өдөрт нэмэх усны хэмжээ. x_4 нэг өдөрт уурших хэмжээ.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 5 \\ x_4 - x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow x_4 = 6$$

тул $\frac{210}{6} = 35$ өдөр буюу 5 долоо хоног.

Бодлого S2. Баатар тэгш өнцөгт параллелепипедийн ирмэгүүдийг төмөр утсаар хийж загвар бүтээжээ. Түүнд хоёр цэгийн хоорондын зайг хэмжихээс гадна, тахир шугамын дагуу урт хэмжиж чаддаг уян утсан метр (дээрээ хэмжээс бүхий) байсан бөгөөд түүнийгээ ашиглан хийсэн параллелепипидийнхээ бүтэн гадаргуугийн талбайг хоёрхон удаагийн хэмжилтээр олж чадна гэж сайрхжээ. Тэр үнэн хэлсэн үү?

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

Бодолт. **Хариу: Үнэн.**

Баатарын хийсэн параллелепипидийн урт, өргөн, өндөр нь харгалзан a, b, c байг.

1-р хэмжилтээр $a + b + c$ нийлбэрийг олж чадна.

2-р хэмжилтээр диагоналын эсрэг цэгүүдийн хоорондох зайг хэмжин $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ уртыг олж чадна. Өөрөөр хэлбэл параллелепипидийн эсрэг хоёр оройг холбосон их диагоналын уртыг олж болно. Ингээд олсон хоёр утгаа ашиглан бүтэн гадаргуугийн талбайг

$$(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 2(ab + bc + ac)$$

гэж олно.

Бодлого S3. Зөв 360 өнцөгтийн оройнуудыг цагийн зүүний дагуу дэс дараалан 1, 2, ..., 360 тоонуудаар дугаарлав. 1-р тооноос эхлэн цагийн зүүний дагуу тоолон 359 дахь тоог дарна, үүний дараа дарсан тооны дараагийн тооноос эхлэн үргэлжлүүлэн тоолж 358 дахь тоог дарна, үүний дараа дарсан тооны дараагийн тооноос эхлэн үргэлжлүүлэн тоолж 357 дахь тоог дарна гэх мэтчилэн нэг тоо үлдтэл үйлдлийг гүйцэтгэв. Хамгийн сүүлд ямар тоо үлдэх вэ? (дарагдсан тоог дахин тоолохгүй)

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодолт. Дарагдах тоонууд нь 359, 357, 355, ... буюу 360-аас эхлээд цагийн зүүний эсрэг чиглэлд тоолоход хоёр дахь тоонууд байна гэдгийг ажиглахад төвөгтэй биш.

Эхлээд дараах Иосефийн бодлогыг авч үзье. Зөв n өнцөгтийн оройнуудыг 1, 2, ..., n тоонуудаар дугаарлав. 1-ээс эхлэн цагийн зүүн дагуу тоолж 2 дахь тоо бүрийг даръя. Өөрөөр хэлбэл 2, 4, 6, ... гэх мэтчилэн дарна. Дарагдсан тоонуудыг дахин тоолохгүйгээр үйлдлээ давтахад хамгийн сүүлд

ямар тоо үлдэх вэ? Энэ бодлогын хариултыг $J(n)$ гэе. Тэгвэл $J(2n) = 2J(n) - 1$ ба $J(2n + 1) = 2J(n) + 1$ байхыг хялбархан харж болно. $n = 360$ байх үед

$$\begin{aligned} J(360) &= 2J(180) - 1 = 2(2J(90) - 1) - 1 = 4J(90) - 3 \\ &= 4(2J(45) - 1) - 3 = 8J(45) - 7 = 8(2J(22) + 1) - 7 \\ &= 16J(22) + 1 = 16(2J(11) - 1) + 1 = 32J(11) - 15 \\ &= 32(2J(5) + 1) - 15 = 64J(5) + 17 = 64(2J(2) + 1) + 17 \\ &= 128J(2) + 81 = 128 \cdot 1 + 81 = 209 \end{aligned}$$

байна.

Манай бодлогын хувьд 360-аас эхлэн цагийн зүүний эсрэг чиглэлд тоолох тул $360 - 209 + 1 = 152$ гэсэн тоо үлдэнэ.

Бодлого S4. A тооны цифрүүдийн нийлбэр 60, харин B тооны цифрүүдийн нийлбэр 2024 бол $A + B$ тооны цифрүүдийн нийлбэр хамгийн багадаа хэд байж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

Бодолт. **Хариу: 5.**

X тооны цифрүүдийн нийлбэрийг $S(X)$ гэж тэмдэглэе. $X \equiv S(X) \pmod{9}$ гэдгээс $A + B$ тооны цифрүүдийн нийлбэр хамгийн багадаа $S(A + B) \equiv A + B \equiv S(A) + S(B) \equiv 5 \pmod{9}$ байна.

$A = 9999996$ ба $B = \underbrace{99 \dots 9}_{224} 0000008$ тоонуудын хувьд $S(A) = 9 \cdot 6 + 6 = 60$, $S(B) = 9 \cdot 224 + 8 = 2024$ бөгөөд $A + B = \underbrace{100 \dots 0}_{230} 4$ гэдгээс $S(A + B) = 5$ байна.

Бодлого S5. a, b, c бодит тоонуудын нийлбэр $a + b + c = 3$ бол

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} \geq 3$$

гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Дурын x тооны хувьд $(x^4 + x^2 + 2) - (x^2 + 1)(x + 1) = (x - 1)(x^3 - 1) \geq 0$ тул

$$\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x^2 + 1} \geq \frac{1 + x}{2}$$

байна. Одоо a, b, c хувьд нэмэхэд батлах зүйл гарах ба $a = b = c = 1$ үед тэнцэл биелнэ.

Бодлого S6. ABC тэгш өнцөгт гурвалжны хувьд $\angle ACB = 90^\circ$ ба $\angle BAC = 36^\circ$ байв. AL биссектрис дээр M цэгийг $AM = MB$ байхаар тэмдэглэв. $AM = 2CL$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Батзориг)

Бодолт. L цэгийн AC -ийн хувьд тэгш хэмтэй орших цэгийг K гэе. Тэгвэл $\angle KAB = \angle ABK = 54^\circ$ болох тул $AK = KB$ болно. Мөн $AM = MB$ ба $\angle KAM = \angle KBM = 36^\circ$ тул $\triangle KAM = \triangle KBM$ болно. Иймээс, $\angle AKM = \angle BKM = 36^\circ$. Нөгөө талаас, $\angle KAM = 36^\circ$ тул $AK = KM$. Мөн $\angle KLM = 72^\circ$ ба $\angle MKL = 36^\circ$ тул $KL = KM$. Эцэст нь, $AM = KM = KL = 2CL$.

Т ангилал (Дунд ангийн багш)

Бодлого Т1. Нүднүүдэд нь 1, 2, ..., 120 тоонуудыг нэг, нэгээр нь нүд бүрд нь ялгаатай тоо байхаар бичсэн 2×60 хэмжээтэй хүснэгтүүдийг авч үзье. Хүснэгтийн мөр, багана бүрийн хувьд тэнд бичигдсэн тоонуудын нийлбэр болох 62 тоо бүгдээрээ тэгш тоо байвал *тэгш хүснэгт*, харин бүгдээрээ сондгой тоо байвал *сондгой хүснэгт* гэж нэрлэе. Бүх боломжит тэгш хүснэгтийн тоо ба бүх боломжит сондгой хүснэгтийн тооны аль нь их вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

Бодолт. **F1** бодлогын бодолтыг харна уу.

Бодлого Т2. $p \geq 3$ анхны тоо байг. $p \mid x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + x_5^4$ бөгөөд $1 \leq x_1, \dots, x_5 \leq p$ байх бүх натурал тоон $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ тавтын тоог p -д хуваахад гарах үлдэгдлийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Билэгдэмбэрэл)

Бодолт. **Хариу: 0.**

Нөхцөл хангах тавтын тоог N гээ. $S = \{1, 2, \dots, p\}$ гээд $f: S^5 \rightarrow \mathbb{Z}$ функцийг

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 1 - (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + x_5^4)^{p-1}$$

гэж тодорхойлбол Фермагийн бага теоремоос $\sum_{x \in S^5} f(x) \equiv N \pmod{p}$ байна. Нөгөө талаас $g(n) = \sum_{x \in S} x^{4n}$ гэвэл

$$\sum_{x \in S^5} f(x) = p^5 - \sum_{n_1 + \dots + n_5 = p-1} g(n_1) \dots g(n_5)$$

байна. Иймд $n_1 + \dots + n_5 = p-1$ бол $g(n_1) \dots g(n_5) \equiv 0 \pmod{p}$ гэж харуулахад хангалттай. Энд $n_1 \leq \frac{p-1}{5} < \frac{p-1}{4}$ гэж үзэхэд явцуурах зүйл үгүй.

$n_1 = 0$ үед $g(0) = p \equiv 0 \pmod{p}$ тул $n_1 > 0$ гээ. Энэ үед $p-1 \nmid 4n_1$ гэдгээс $\varepsilon \in S$ анхны язгуурын хувьд $a = \varepsilon^{4n_1} \neq 1$ тул $g(n_1) = \sum_{k=1}^{p-1} a^k = \frac{a^p - a}{a - 1} \equiv 0 \pmod{p}$ байна.

Бодлого Т3. 2×2 хэмжээтэй бүх бодит матрицын огторгуйг $M_2(\mathbb{R})$ гэж тэмдэглэе. $M_2(\mathbb{R})$ дээр матрицын ердийн нэмэх

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

ба үржих

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

үйлдлүүдийг авч үзье. Дурын $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ матрицын хувьд

$$\varphi(A + B^2) = \varphi(A) + \varphi(B)^2$$

байдаг бүх $\varphi: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ буулгалтыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу:** $\varphi = 0$.

$\varphi = 0$ шийд болох нь илт тул өөр шийдгүй гэж харуулъя. $t \in \mathbb{R}$ тоог $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ матрицтай адилтая.

$B = 0$ гэвэл $\varphi(0) = 0$ болно. Одоо $A = 0$ гэвэл $\varphi(B^2) = \varphi(B)^2$ болох ба $A = -B^2$ гэвэл $\varphi(-B^2) = -\varphi(B)^2$ болно.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ гэе. Кели-Хамилтоны теоремоор $A^2 = (a+d)A - (ad-bc)$ байна.

Эхлээд $ad-bc > 0$ ба $a+d+2\sqrt{ad-bc} > 0$ гэе. Энэ үед $m = \sqrt{ad-bc}$ ба $n = \sqrt{a+d+2m} > 0$ гэвэл $B = n^{-1}(A+m) \in M_2(\mathbb{R})$ матрицын хувьд $B^2 = n^{-2}(A+m)^2 = n^{-2}(A^2+2mA+m^2) = n^{-2}((a+d)A-m^2+2mA+m^2) = A$ байна.

Иймд $t > 0$ тоог хангалттай том авбал $A+t = B^2$ гэж бичигдэнэ. Энд $C = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{t} \\ \sqrt{t} & 0 \end{pmatrix}$ гэвэл $A = B^2 + C^2$ болох ба эндээс

$$\varphi(A) = \varphi(B^2) + \varphi(C)^2 = \varphi(B)^2 + \varphi(C)^2 \geq 0$$

байна. Мөн ижлээр $-A = D^2 + E^2$ гэж бичигдэх тул $\varphi(A) + \varphi(D)^2 = \varphi(A+D^2) = \varphi(-E^2) = -\varphi(E)^2$ гэдгээс

$$\varphi(A) = -\varphi(D)^2 - \varphi(E)^2 \leq 0$$

байна. Эндээс $\varphi(A) = 0$ болно.

Нэмэлт. (1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ матрицыг $A = B^2$ хэлбэртэй бичих боломжгүй.

(2) Дурын $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ хувьд $\varphi(A+B) = \varphi(A) + \varphi(B)$ ба $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$ байдаг $\varphi: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ буулгалт 0-ээс өөр байхгүй гэдэг нь сонгодог бөгөөд хялбар үр дүн.

Бодлого Т4. ABC гурвалжны AB талыг B цэгт шүргэдэг C оройг дайрсан ω тойрог татав. $\angle A$ өнцгийн дотоод биссектрис ω тойрогтой E, F цэгүүдэд, BC талтай D цэгт огтлолцох ба F цэг ABC гурвалжин дотор оршиж байв. $2\angle EBS = \angle BAC$ байх S цэгийг EC хэрчим дээр авав. Мөн DT шулуун CS шулуунтай параллел байх T цэгийг BS хэрчим дээр авав. ET шулуун ω тойрогтой дахин U цэгт огтлолцоно. ABU гурвалжны багтаасан тойрог AD шулууныг шүргэнэ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. $DT \parallel CE$ тул

$$\angle TUB = \angle EUB = \angle ECB = \angle TDB$$

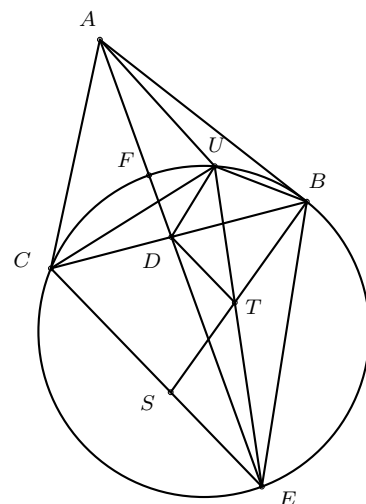
болно. Иймд $DUBT$ тойрогт багтана.

Эндээс $\angle DUT = \angle DBT$ ба $\angle CUE = \angle CBE$ байна. Эдгээр өнцгүүдийн ялгаварууд тэнцүү учраас $\angle CUD = \angle TBE = \alpha/2$ болно. Иймд $\angle CAD = \angle CUD$ болж $AUDC$ тойрогт багтана.

Эндээс $\angle DCU = \angle DAU$ гарна. AB нь ω -ийн шүргэгч тул

$$\angle DCU = \angle BCU = \angle UBA$$

байна. Эндээс $\angle DAU = \angle UBA$ болж ABU гурвалжны багтаасан тойрог AD -г D цэгт шүргэнэ.



Бодлого Т5. $n \geq 1$ хувьд $d_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{n+k} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \cdots + \frac{1}{3n}$ гэвэл

$$\frac{2}{3n+1} < d_n < \frac{2}{3n-2}$$

байна гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт.

Элементар бодолт: Дурын $m \geq 1$ хувьд $\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+2} \right)$ болохыг шалгах төвөггүй. Иймд

$$d_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n+2k} - \frac{1}{n+2k+1} \right) + \frac{1}{3n} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n} \right) + \frac{1}{3n} = \frac{2}{3n} > \frac{2}{3n+1}$$

байна. Мөн ижлээр

$$d_n = \frac{1}{n} - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n+2k+1} - \frac{1}{n+2k+2} \right) < \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{3n+1} \right) < \frac{2}{3n-2}$$

байна. Энд

$$\frac{4}{3n-2} + \frac{1}{n+1} = \frac{7n+2}{3n^2+n-2} > \frac{7n+2}{3n^2+n} = \frac{2}{n} + \frac{1}{3n+1}$$

болохыг ашиглав.

Интеграл ашигласан бодолт: $k \geq 0$ бол $\int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$ байдгийг саная.

$n \geq 0$ хувьд $b_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ гэе. $\sum_{k=0}^{2n} (-x)^{n+k-1} = \frac{(-x)^{n-1} - (-x)^{3n}}{1+x}$ гэдгээс $d_n =$

$b_{n-1} + b_{3n}$ болно. $0 < x < 1$ хувьд $\frac{x^n}{1+x} > \frac{x^n}{2}$ тул $b_n > \frac{1}{2(n+1)}$ байна. Эндээс

$$d_n > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(3n+1)} = \frac{4n+1}{2n(3n+1)} > \frac{2}{3n+1}$$

байна. $0 < x < 1$ хувьд $1+x > 2\sqrt{x}$ гэдгээс $\frac{x^n}{1+x} < \frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{2}$ тул $b_n < \frac{1}{2n+1}$ байна. Эндээс

$$d_n < \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{6n+1} = \frac{8n}{(2n-1)(6n+1)} < \frac{2}{3n-2}$$

байна.

Бодлого Т6. A, B үсгээр бичигдсэн S үгэнд агуулагдах хоорондоо үл огтлолцох ABA дэд үгийн тооны хамгийн их утгыг $f(S)$ гэж тэмдэглэе. Жишээлбэл $f(ABBABBA) = 0$, $f(ABABABBA) = 1$, $f(ABABABA) = 2$ байна.

$n = 4k + 1$ гэе. S үг бүх n урттай үгээр гүйх үеийн $f(S)$ утгуудын нийлбэрийг ол.

(Дэвшүүлсэн: А. Нямдаваа)

Бодолт. **Хариу:** $\frac{(5n-8)2^{n-1}+3}{25}$.

S, T үгнүүдийн хувьд S дотор T дэд үг болж орох тоог $C(S, T)$ гэе. Оруулах-гаргах зарчмаар $f(S) = C(S, ABA) - C(S, ABABA) + C(S, ABABABA) - \dots$ байна.

Нөгөө талаас $|T| = m$ урттай бол $0 \leq i \leq n-m$ байрлалаас T үг эхлэх боломжуудыг нэмэх замаар

$$\sum_{|S|=n} C(S, T) = (n-m+1)2^{n-m}$$

байна. Иймд

$$\sum_{|S|=n} f(S) = \sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i-1} (n-2i) 2^{n-2i-1}$$

байна. $g(x) = \sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i-1} x^{n-2i} = \frac{x^n - x}{x^2 + 1}$ гэвэл

$$g'(x) = \sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i-1} (n-2i) x^{n-2i-1} = \frac{(n-2)x^{n+1} + nx^{n-1} + x^2 - 1}{(1+x^2)^2}$$

гэдгээс бидний олох нийлбэр $\frac{(5n-8)2^{n-1}+3}{25}$ байна.

Монголын Математикийн 60-р Олимпиадын III Даваа

Улсын Олимпиад

Монголын Математикийн 60-р олимпиадын III даваа 2024 оны 4.1-нээс 6-ний өдрүүдэд Өмнөговь аймгийн Даланзадгад хотод зохион байгуулагдав.

Улсын математикийн 60-р олимпиадыг амжилттай зохион байгуулж, мэргэжлийн хороог ажиллах нэн таатай нөхцөлөөр хангаж өгсөн Д. Баасанхүү даргатай Өмнөговь аймгийн БШУГ-д талархал илэрхийлье.

Олимпиадын мэргэжлийн хороо

ММО-60-ын мэргэжлийн үйл ажиллагааг Б. Батбаясгалан ахлагчтай их, дээд сургуулиудын багш, оюутнуудын баг гүйцэтгэж бодлого зохиох, дэвшүүлэх, сонгох, засах, дүгнэх аргачлалыг гаргах, бодолт хамгаалах ажлуудыг тус тус гүйцэтгэлээ.

Гишүүд:

1. Бодлогын комиссын ахлагч, ММОХ-ны удирдах зөвлөлийн гишүүн доктор Ү. Отгонбаяр,
2. Д. Даянцолмон (МУИС, доктор, олимпиадын хорооны нарийн бичигийн дарга)
3. Т. Хулан (МУИС, доктор),
4. У. Батзориг (МУИС, доктор),
5. Г. Баярмагнай (МУИС, доктор),
6. С. Цогзолмаа (МУИС, доктор),
7. Б. Баяржаргал (МУИС, доктор),
8. Б. Сандагдорж (МУБИС, доктор),
9. Э. Азжаргал (МУБИС, доктор),
10. Л. Буянтогтох (МУБИС, доктор),
11. Ш. Доржсэмбэ (МУБИС, доктор),
12. Э. Оргил-Эрдэнэ (ММОХ)
13. Т. Базар (ММОХ)

Бодлого засалтыг доктор Т. Хулан ахлав. Комиссын гишүүдээс гадна Г. Баяржавхлан, А. Алтансүх, Т. Цэрэнлхам, Б. Улсболд, Э. Гэрэлхүү нарын МУИС-ийн математикийн ангийн оюутнууд болон Б. Золбаяр, О. Бодрол, О. Эрхэсболд нарын олон улсын олимпиадад эх орноо төлөөлөн оролцож

байсан оюутнууд бодлого засах ажлыг гүйцэтгэлээ. Мөн ахмад багш, академич Р. Гончигдоржийн дэвшүүлсэн бодлого F ангиллын 2-р бодлогоор сонгогдов.

Бодлого хамгаалалтыг цахим ба танхимийн гэсэн 2 үе шаттайгаар зохион байгуулав. 1-р шатанд оролцогчдын бодлого хамгаалах хүсэлтийг цахимаар хүлээн авч тухайн бодлогыг хариуцсан ахлагч, бодлого зохиогч болон бодлого зассан комиссын гишүүд хамтран хариу тайлбарыг цахимаар өгсөн бол 2-р шатанд оролцогчдыг төлөөлж багш нар танхимаар ирж бодлого хамгаалав.

Бодлого дэвшүүлэлт ба засалт

E (9-10) ангиллын даамлаар Др. Т. Хулан ажиллалаа.

Бодлого	Төрөл	Зохиогч	Зассан
E1	Алгебр	У. Батзориг	Г. Баяржавхлан, Б. Золбаяр
E2	Комбинаторик	Б. Батбаясгалан	Б. Батбаясгалан, О. Бодрол
E3	Тооны онол	Г. Баярмагнай	Э. Оргил-Эрдэнэ, Т. Цэрэнлхам
E4	Тооны онол	Ү. Отгонбаяр	Б. Сандагдорж, О. Эрхэсболд, Э. Азжаргал, Б. Золбаяр
E5	Геометр	Т. Хулан	Т. Хулан, Э. Гэрэлхүү
E6	Алгебр	Ү. Отгонбаяр	Э. Оргил-Эрдэнэ, Т. Цэрэнлхам

F (11-12) ангиллын даамлаар Др. У. Батзориг ажиллалаа.

Бодлого	Төрөл	Зохиогч	Зассан
F1	Тооны онол	Ү. Отгонбаяр	Э. Азжаргал, О. Эрхэсболд
F2	Комбинаторик	Р. Гончигдорж	Р. Гончигдорж, Л. Буянтогтох, Т. Базар
F3	Алгебр	Ү. Отгонбаяр	У. Батзориг, Б. Улсболд
F4	Алгебр	Ү. Отгонбаяр	З. Ууганбаяр, Ш. Доржсэмбэ, А. Алтансүх
F5	Геометр	Б. Билэгдэмбэрэл	Т. Базар, Б. Улсболд
F6	Тооны онол	Г. Баярмагнай	У. Батзориг, Г. Баяржавхлан

T (ДБ) ангиллын даамлаар Др. Ү. Отгонбаяр ажиллалаа.

Бодлого	Төрөл	Зохиогч	Зассан
T1	Тооны онол	Г. Баярмагнай	Ш. Доржсэмбэ, А. Алтансүх
T2	Геометр	Э. Гэрэлхүү	Т. Хулан, Э. Гэрэлхүү
T3	Алгебр	Г. Баяржавхлан	Г. Баяржавхлан
T4	Алгебр	Ү. Отгонбаяр	Э. Азжаргал, Б. Золбаяр
T5	Комбинаторик	Б. Билэгдэмбэрэл	Л. Буянтогтох, Р. Гончигдорж, О. Бодрол
T6	Тооны онол	М. Өнөболд	Г. Баяржавхлан

Тус олимпиадад алгебрын бодлогын ахлагчаар Ү. Отгонбаяр, геометрийн бодлогын ахлагчаар Т. Хулан, комбинаторикийн бодлогын ахлагчаар Б. Батбаясгалан, тооны онолын бодлогын ахлагчаар У. Батзориг нар ажиллаа. Бодлогын ахлагч нар тухайн төрлийн бодлогын дүгнэх аргачлал гаргах, засалт, маргаан таслах зэрэгт ерөнхий хяналт тавьж ажиллав.

Олимпиадын дүн

Монголын Математикийн 60-р олимпиад уламжлал ёсоор дунд, ахлах, багшийн ангиллаар зохион байгуулагдлаа. Олимпиадын E ангилалд 82 сурагч, F ангилалд 85 сурагч, T ангилалд 69 багш нийт 236 хүн оролцож оюун ухаан авьяас чадвараа сорин уралдсанаас 33 сурагч, 3 багш медальт байрт шалгарлаа.

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН 60 ДУГААР ОЛИМПИАДЫН Е АНГИЛАЛ

Медаль	Овог	Нэр	Сургууль	Оноо
Алт	Гарам	Нармандах	Сант	35
Мөнгө	Болдбаатар	Төвшиндалай	11-р сургууль	33
Мөнгө	Бямбасүх	Цолмон	Орчлон	33
Мөнгө	Пүрэвбрагчаа	Тэмүүлэн	11-р сургууль	30
Мөнгө	Даваадорж	Хүслэн	Сант	30
Хүрэл	Батбилэг	Наранхүү	Эрдмийн Сан	29
Хүрэл	Амаржаргал	Буянтогтох	Эрдмийн эхлэл	27
Хүрэл	Дамдинбазар	Төрмандах	11-р сургууль	27
Хүрэл	Ууганбаяр	Бэлгүтэй	Эрдмийн Сан	27
Хүрэл	Буян-Ундрах	Тэгшбилэг	Шинэ үе	27
Хүрэл	Гантулга	Амармэнд	Од цогцолбор	27
Хүрэл	Цэнд-Аюуш	Бажнамсрай	2-р сургууль	27
Хүрэл	Даянцолмон	Удвал	Сант	26
Хүрэл	Цогтбаяр	Цэцбилгүүн	Монгол тэмүүлэл	25
Хүрэл	Мөнхжин	Тэмүгэ	1-р сургууль	25
Хүрэл	Харрис	Брюс Гарет	11-р сургууль	25
Хүрэл	Гандаваа	Тэн-Мэргэн	Эрхэт Эрдэм	25
Хүрэл	Баяржаргал	Мөнх-Эрдэнэ	143-р сургууль	25

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН 60 ДУГААР ОЛИМПИАДЫН Ү АНГИЛАЛ

Медаль	Овог	Нэр	Сургууль	Оноо
Алт	Дэлгэрдалай	Энэрэлт	Сант	38
Мөнгө	Тамир	Билгүүнгэрэлт	Эрхэт Эрдэм	36
Мөнгө	Хавалболат	Нурсолтан	11-р сургууль	33
Мөнгө	Одонбаатар	Тэнгис	11-р сургууль	29
Мөнгө	Равдандорж	Мөнхжаргал	1	28
Хүрэл	Баяр	Бэлгүтэй	11-р сургууль	27
Хүрэл	Баяртулга	Гүр-Аранз	Эрдмийн Сан	26
Хүрэл	Батлхагва	Тэнүүнсайхан	Шинэ үе	25
Хүрэл	Эрдэнэбаяр	Тэнүүн	Hobby school of Ulaanbaatar	24
Хүрэл	Арвис	Ивээл	11-р сургууль	24
Хүрэл	Амартүвшин	Түмэнбаяр	Эрдмийн сан	24
Хүрэл	Сонор	Манлай	Сант	23
Хүрэл	Шинэбаяр	Одбаяр	Сант	22
Хүрэл	Цэгц	Цэнгэл	Сант	19
Хүрэл	Алдаржав	Наранбаатар	Эрхэт Эрдэм	19

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН 60 ДУГААР ОЛИМПИАДЫН Т АНГИЛАЛ

Медаль	Овог	Нэр	Сургууль	Оноо
Алт	Батмөнх	Ганбат	Эрдмийн Хишиг	33
Мөнгө	Раднаабазар	Доржзовд	Эрдмийн сан	27
Хүрэл	Мягмар	Батбилэг	Орчлон	26

Бодлогууд

Е (9-10)

Бодлого Е1. Тэгээс ялгаатай a, b, c бодит тоонуудын хувьд $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}$ байв.

(1) $a^3 + b^3 + c^3 \neq 0$ болохыг батал.

(2) $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a^3 + b^3 + c^3}$ илэрхийллийн авч болох бүх утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого Е2. Самбарт бичигдсэн үгэн дээр дараах 3 төрлийн үйлдлийн аль нэгийг хийж болно. x, y, z, a, b, c нь үсгүүд болог.

(1) Аливаа xy дэд үгийг $xzzy$ болгон өөрчилж болно. Жишээ нь $abc \rightarrow addbc$ болно.

(2) Аливаа xzy дэд үгийг zyx болгон өөрчилж болно. Жишээ нь $cab \rightarrow cba$ болно.

(3) Аливаа $xuyx$ хэлбэрийн дэд үгийг арилгаж болно. Жишээ нь $abcaacc \rightarrow abc$ болно.

Дээрх үйлдлүүдийн тусламжтайгаар $abccab$ үгээс $baccba$ үгийг гарган авч болох уу?

Тайлбар: xuz үгийн хувьд x, y, z, xy, yz, xuz дэд үг болно, харин xz дэд үг биш.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодлого Е3. $m \geq 2$ натурал тоо, $p \geq 5$ анхны тоо гэе. $n \geq 1$ хувьд $a_n = (p-2)^n + p^n - m$ гэж тодорхойлогдох $a_1, a_2, \dots$ дарааллын ямар нэг гишүүнийг хуваадаг хамгийн бага анхны тоог q гэе. $q \geq m$ байх бүх (m, p) хосыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого Е4. $2^a + 2^b + 2^c + 2^d = 60 \cdot \min\{a, b, c, d\}$ тэгшитгэлийн бүх натурал тоон шийдийг ол. Энд a, b, c, d тоонуудын хамгийн багыг $\min\{a, b, c, d\}$ гэж тэмдэглэв.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого Е5. $AB = BC$ байх адил хажуут ABC гурвалжны AC талын дундаж цэгийг M гэе. BM хэрчмийн дундаж цэгийг N гээд AMN гурвалжны AN талд буулгасан өндрийн суурийг P гэе. APM ба CPB гурвалжнууд төсөөтэй гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого Е6. $a, b, c \geq 0$ сөрөг биш тоонуудын хувьд $a^3 + b^3 + c^3 = abc + 2$ бол

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a + b + c$$

байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Ү ангилал (11-12 анги)

Бодлого F1. $a! + b! = c^4 + 2024$ тэгшитгэл $a \leq b$ байх (a, b, c) натурал тоон цор ганц шийдтэй болохыг баталж шийдийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого F2. Гүдгэр таван өнцөгтийн гурван орой дээр оройтой гурвалжны талбай өгсөн таван өнцөгтийн талбайн хагасаас их бол уг гурвалжныг *том* гэе. Гүдгэр таван өнцөгтөд том гурвалжин хамгийн олондоо хэд байж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Р. Гончигдорж)

Бодлого F3. Эерэг бодит тоон олонлогийг $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ гэж тэмдэглэе. Дурын $x, y \in \mathbb{R}^+$ тоонуудын хувьд

$$f(x)f(y + f(x)) = f(1 + xy)$$

байдаг бүх $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ функцийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого F4. Сөрөг биш коэффициенттой $P(x)$ ба $Q(x)$ олон гишүүнтүүд өгөгдөв.

$P(x)$ -ийн уламжлалыг $P'(x)$ гэе. $P(0) = Q(0) = 0$ ба $Q(1) \leq 1 \leq P'(0)$ байв.

(1) Дурын $0 \leq x \leq 1$ тооны хувьд $0 \leq Q(x) \leq x \leq P(x)$ байна гэж батал.

(2) Дурын $0 \leq x \leq 1$ тооны хувьд $P(Q(x)) \leq Q(P(x))$ байна гэж батал.

Тэнцэл биелэх нөхцөлийг олох шаардлагагүй.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого F5. Хурц өнцөгт ABC гурвалжинд BE ба CF өндрүүд татав. AD хэрчим ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн диаметр болно. BC талын дундаж цэгийг M гэе. BMF ба CME гурвалжинд багтсан тойргуудын дотоод ерөнхий шүргэгчүүд K цэгт огтлолцдог байв. K, M, D цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Билэгдэмбэрэл)

Бодлого F6. $n \geq 1$ гишүүнтэй натурал тоон $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ олонлогийг авч үзье. Дурын ялгаатай $X \neq Y \subseteq A$ дэд олонлогуудын хувьд $S(X) - S(Y)$ ялгавар 2^n тоонд хуваагддаггүй бол A олонлогийг *сайн* гэе. Энд $X \subseteq A$ дэд олонлогийн гишүүдийн нийлбэрийг $S(X) = \sum_{a \in X} a$ гэж тэмдэглэх ба $S(\emptyset) = 0$ гэж тодорхойлно.

Бүх гишүүн нь 2^n тооноос бага байдаг сайн олонлогийн тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Т ангилал (Дунд ангийн багш)

Бодлого T1. $n \geq m \geq 1$ байх натурал тоонуудын хувьд

$$(a^n - b^n)^2 = a^{n+m} - b^{n+m}$$

тэгшитгэл $|a| > |b| > 1$ байх (a, b) харилцан анхны бүхэл тоон шийдгүй болохыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого T2. $AB \neq AC$ байх ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг ω гээд BC талын дундаж цэгийг M гэе. ω тойргийн B болон C цэгт татсан шүргэгч шулуунууд T цэгт огтлолцоно. AMT гурвалжныг багтаасан тойрог BC шулуунтай дахин N цэгт огтлолцоно. NT хэрчмийн дундаж цэг S бол SA шулуун ω тойргийн шүргэгч болно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Э. Гэрэлхүү)

Бодлого Т3. Эерэг бодит тоон олонлогийг $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ гэж тэмдэглэе. Дурын $x \in \mathbb{R}^+$ тооны хувьд

$$f(g(x)) = f(x)g(x) \quad \text{ба} \quad f(x) = x(1 + g(x))$$

байдаг бөгөөд $g(x), g(g(x)), g(g(g(x))), \dots$ дараалал төгсгөлөг ширхэг ялгаатай утга авдаг байх бүх $f, g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ хос функцийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баяржавхлан)

Бодлого Т4. Гурвалжны α, β, γ өнцгүүдийн хувьд

$$\cos(\alpha) \cos(3\alpha) + \cos(\beta) \cos(3\beta) + \cos(\gamma) \cos(3\gamma) + \frac{7}{4} \geq 2 \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma)$$

байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого Т5. m, n натурал тоонууд байг. $m \times n$ хэмжээтэй тэгш өнцөгт хүснэгт өгөгдөв. Тэгш өнцөгтийн аль нэг талтай параллел хэрчмийг *сайн* гэе. Хүснэгтийг зангилааны цэгүүд дээр оройтой гурвалжнуудад хуваав. Эдгээр бүх гурвалжнуудын ядаж нэг тал сайн байсан ба аль ч сайн талд буулгасан өндөр нэгж урттай байв. Яг хоёр сайн талтай гурвалжин хамгийн цөөндөө хэд байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Билэгдэмбэрэл)

Бодлого Т6. Дурын $n, m \geq 1$ дугааруудын хувьд $na_n - ma_m + 2a_m - 1$ илэрхийлэл $a_n + a_m - 1$ тоонд хуваагддаг байх бүх натурал тоон $a_1, a_2, \dots$ дарааллыг ол.

(Дэвшүүлсэн: М. Өнөболд)

Бодолтууд

Е ангилал (9-10 анги)

Бодлого Е1. Тэгээс ялгаатай a, b, c бодит тоонуудын хувьд $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}$ байв.

(1) $a^3 + b^3 + c^3 \neq 0$ болохыг батал.

(2) $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a^3 + b^3 + c^3}$ илэрхийллийн авч болох бүх утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. $s = a + b + c$ гэвэл өгсөн нөхцөлөөс $\frac{s}{c} = \frac{s}{a} = \frac{s}{b}$ болно.

(1) $s = 0$ бол $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc = 3abc \neq 0$ байна.
 $s \neq 0$ бол $a = b = c$ гэдгээс $a^3 + b^3 + c^3 = 3a^3 \neq 0$ байна.

(2) $a^3 + b^3 + c^3 \neq 0$ тул

$$F(a, b, c) = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a^3 + b^3 + c^3}$$

тодорхойлогдоно. **Хариу:** $F = -1/3, 8/3$.

$(1, 1, -2), (1, 1, 1)$ бодлогын нөхцөл хангах ба $F(1, 1, -2) = -1/3, F(1, 1, 1) = 8/3$ тул энэ утгуудыг авч чадна. Өөр утга авахгүй гэж харуулъя.

Үнэхээр, $s = 0$ үед $F = \frac{(-c)(-a)(-b)}{3abc} = -\frac{1}{3}$ байх ба $s \neq 0$ үед $a = b = c$ тул $F = \frac{8a^3}{3a^3} = \frac{8}{3}$ байна.

Бодлого Е2. Самбарт бичигдсэн үгэн дээр дараах 3 төрлийн үйлдлийн аль нэгийг хийж болно. x, y, z, a, b, c нь үсгүүд болог.

(1) Аливаа xy дэд үгийг $xzzy$ болгон өөрчилж болно. Жишээ нь $abc \rightarrow addbc$ болно.

(2) Аливаа xzy дэд үгийг zyx болгон өөрчилж болно. Жишээ нь $cabc \rightarrow ccba$ болно.

(3) Аливаа $xuux$ хэлбэрийн дэд үгийг арилгаж болно. Жишээ нь $abcaacc \rightarrow abc$ болно.

Дээрх үйлдлүүдийн тусламжтайгаар $abccab$ үгээс $baccba$ үгийг гарган авч болох уу?

Тайлбар: xuz үгийн хувьд x, y, z, xy, yz, xuz дэд үг болно, харин xz дэд үг биш.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодолт. **Хариу:** Болохгүй.

Үгийн сондгой байрлалтай a үсгийн тооноос тэгш байрлалтай a үсгийн тоог хасвал дээрх үйлдлүүдээр өөрчлөгдөхгүй хэмжигдэхүүн гарна. Энэ хэмжигдэхүүн $abccab$ үед 2, харин $baccba$ үед -2 утга авах тул хооронд нь шилжих боломжгүй.

Бодлого Е3. $m \geq 2$ натурал тоо, $p \geq 5$ анхны тоо гэе. $n \geq 1$ хувьд $a_n = (p-2)^n + p^n - m$ гэж тодорхойлогдох $a_1, a_2, \dots$ дарааллын ямар нэг гишүүнийг хуваадаг хамгийн бага анхны тоог q гэе. $q \geq m$ байх бүх (m, p) хосыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. **Хариу:** $p \geq 5$ анхны, $(a, p) = (2, p), (3, p)$.

$p \geq 5$ анхны гэе.

$m \geq 2$ тэгш бол $a_1 = 2(p-1) - m$ тэгш тул $q = 2$ байна. Иймд $m = 2$ нөхцөл хангах ба $m \geq 4$ тэгш тоо нөхцөл хангахгүй.

$m = 3$ бол a_n үргэлж сондгой тул $q \geq 3$ байна. Иймд $m = 3$ нөхцөл хангана.

Одоо $m \geq 5$ сондгой бол $q < m$ гэж харуулъя. Эхлээд $m - 2 = p^k$, $k \geq 1$ гэе. Энд $p = 5$, $k = 1$ бол $3 \mid a_2 = 27$ тул $q = 3 < 7 = m$ байна. Бусад тохиолдолд $3 \leq a_k = (p-2)^k - 2 < m$ тул $q < m$ байна.

Одоо $p \neq r \mid m - 2$ анхны хуваагч авъя. $r \mid p - 2$ бол $r \mid a_1$ ба $r \nmid p - 2$ бол Фермагийн бага теоремоор $r \mid a_{r-1}$ тул $q \leq r < m$ байна. Иймд $m \geq 5$ сондгой тоо нөхцөл хангахгүй.

Бодлого Е4. $2^a + 2^b + 2^c + 2^d = 60 \cdot \min\{a, b, c, d\}$ тэгшитгэлийн бүх натурал тоон шийдийг ол. Энд a, b, c, d тоонуудын хамгийн багыг $\min\{a, b, c, d\}$ гэж тэмдэглэв.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу:** $a \leq b \leq c \leq d$ гэвэл $(a, b, c, d) = (4, 5, 6, 7)$ байна.

$a \leq b \leq c \leq d$ гэе. $S = 2^a + 2^b + 2^c + 2^d = 15 \cdot 4a$ гэдгээс $2^a \mid 4a$ тул $2^a \leq 4a$ буюу $a \leq 4$ байна.

$S \equiv 0 \pmod{15}$ бол a, b, c, d тоонууд 4-т хуваахад ялгаатай үдэгдэл өгнө гэж харуулъя. $2^4 \equiv 1 \pmod{15}$ тул үдэгдлүүдийг $0 \leq a' \leq b' \leq c' \leq d' \leq 3$ гэж эрэмбэлж болох ба цаашилбал $a' = 0$ гэж үзэж болно. $d' \leq 2$ бол $S \leq 13$ болж зөрчил гарах тул $d' = 3$ байна. $c' \leq 1$ бол мөн $S \leq 13$ болох тул $c' = 2$ байна. Энэ үед $b' = 1$ байх нь илт.

Эндээс $v_2(S) = a = 2 + v_2(a)$ байх хэрэгтэй тул $a \neq 1, 2, 3$ байна.

$a = 4$ үед $b \geq 5$, $c \geq 6$, $d \geq 7$ гэдгээс $S \geq 240$ болох ба тэнцэл биелнэ гэдгээс өөр шийдгүй байна.

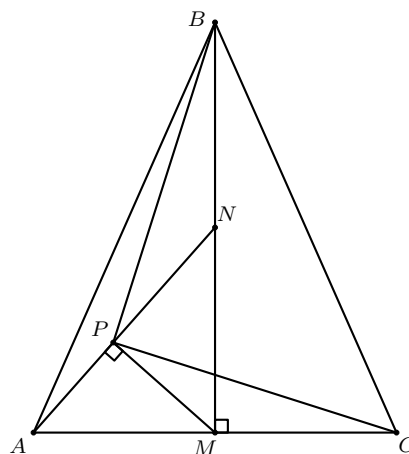
Бодлого Е5. $AB = BC$ байх адил хажуут ABC гурвалжны AC талын дундаж цэгийг M гэе. BM хэрчмийн дундаж цэгийг N гээд AMN гурвалжны AN талд буулгасан өндрийн суурийг P гэе. APM ба CPB гурвалжнууд төсөөтэй гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт.

$\angle PNM = \alpha$ гэе. $\angle PMC = \angle PNB = 180^\circ - \alpha$, мөн $\angle PAC = \angle PMB$ учраас $\triangle APM \sim \triangle MPN$ болно. Бодлогын нөхцлөөс $AM = MC$, $MN = NB$ учраас $\triangle APC \sim \triangle MPB$ болно. Эндээс $\angle APC = \angle MPB$, $\angle MPC = \angle NPB$ гарах ба $\angle BPC = 90^\circ$ болно.

$\angle PBM = \angle PCM$ тул $BCMP$ тойрогт багтана. Эндээс $\angle MPC = \angle MBC$ болно. Мөн $\angle PMC = \angle BNA = \angle BNC$ тул $\triangle MPC \sim \triangle NBC$ гарна. Иймд $\angle BCN = \angle PCA$ болох ба $\angle NCA = \angle PCB$ гэж мөрдөнө. Мөн $\angle APM = \angle BPC = 90^\circ$ тул $\triangle APM \sim \triangle CPB$ болно.



Бодлого Е6. $a, b, c \geq 0$ сөрөг биш тоонуудын хувьд $a^3 + b^3 + c^3 = abc + 2$ бол

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a + b + c$$

байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Дурын сөрөг биш $a, b, c \geq 0$ тоонуудын хувьд

$$F(a, b, c) = 2(a^4 + b^4 + c^4) - (a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3 - abc) \geq 0$$

гэж батлахад хангалттай. $b, c \geq a$ гэхэд явцуурах зүйл үгүй ба энэ үед

$$F(a, b, c) = (b - c)^2(b(b - a) + bc + c(c - a)) + a^2(c - a)(b - a) \geq 0$$

байна. $(a, b, c) = (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$ үед тэнцэл биелнэ.

Г ангилал (11-12 анги)

Бодлого F1. $a! + b! = c^4 + 2024$ тэгшитгэл $a \leq b$ байх (a, b, c) натурал тоон цор ганц шийдтэй болохыг баталж шийдийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу:** $(a, b, c) = (5, 8, 14)$.

Дээрх хариу шийд болохыг шалгах хэцүү биш тул өөр шийдгүй гэж харуулъя.

Эхлээд $c^4 \equiv 0, 1 \pmod{16}$ болохыг анзааръя. $6! = 720$ тул $b \geq 7$ байна.

$(1!, 2!, 3!, 4!, 5!, 6!) \pmod{16} = (1, 2, 6, 8, 8, 0) \pmod{16}$ ба $c^4 + 2024 \equiv 8, 9 \pmod{16}$ гэдгээс $a = 4, 5$ байх боломжтой ба $c = 2d$ тэгш байна. $7!/16 = 315$ болохыг тэмдэглэе.

$a = 4$ үед $b!/16 = d^4 + 125 \equiv 5, 6 \pmod{8}$ ба $7!/16 \equiv 3 \pmod{8}$, $8!/16 \equiv 0 \pmod{8}$ тул боломжгүй.

$a = 5$ үед $b!/16 = d^4 + 119 \equiv 7, 8 \pmod{16}$ ба $7!/16 \equiv 11 \pmod{16}$, $10!/16 \equiv 0 \pmod{16}$ гэдгээс $b = 8, 9$ байж болно. $b = 9$ шийд биш болохыг шалгах амархан.

Бодлого F2. Гүдгэр таван өнцөгтийн гурван орой дээр оройтой гурвалжны талбай өгсөн таван өнцөгтийн талбайн хагасаас их бол уг гурвалжныг *том* гэе. Гүдгэр таван өнцөгтөд том гурвалжин хамгийн олондоо хэд байж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Р. Гончигдорж)

Бодолт. **Хариу:** 4.

Эхлээд 4 том гурвалжинтай жишээ байгуулъя. $AB_1B_2C_1C_2$ гүдгэр таван өнцөгтийг $AB_1 = B_2C_1 = C_2A = 1$ ба $B_1B_2 = C_1C_2 = \epsilon > 0$ хангалттай жижиг байхаар авахад i, j бүрд AB_iC_j гурвалжин том байна.

Одоо том гурвалжин хамгийн ихдээ 4 байна гэж харуулъя. 2 тал 1 диагоналаас тогтох таван гурвалжинг *захын* гурвалжин, 1 тал 2 диагоналаас тогтох таван гурвалжинг *голын* гурвалжин гэе. Том биш гурвалжинг *жижиг* гээд жижиг гурвалжин ядаж 6 байхыг харуулъя. $ABCDE$ гүдгэр таван өнцөгт авъя.

Ямар нэг захын гурвалжин, жишээлбэл ABC , том байг. Тэгвэл $ACDE$ -д оройтой дөрвөн гурвалжин жижиг байна. Мөн B оройтой BCD, BDE, BEA гурвалжнуудын ихдээ нэг нь том байна. Иймд жижиг гурвалжин ядаж 6 байна.

Одоо бүх захын гурвалжинг жижиг гее. Голын жижиг гурвалжин олдохыг харуулахад хангалттай. Эсрэгээс нь бүх голын гурвалжин том гее. $S = S_{ABCDE}$ гее.

AD, CE диагоналууд P цэгт огтлолцдог гее. $d(B, AD) \leq d(C, AD)$ гэхэд явцуурах зүйл үгүй. Энэ үед $S_{BPD} \leq S_{CPD} \leq S_{CED}$ байна. Мөн $S_{ABP} \leq \max\{S_{ABC}, S_{ABE}\}$ байна. $S_{ABD} = S_{ABP} + S_{BPD}$ гэдгээс эхний тохиолдолд $S_{ABD} \leq S_{ABC} + S_{CED} = S - S_{ACE} < S/2$, дараагийн тохиолдолд $S_{ABD} \leq S_{ABE} + S_{CED} = S - S_{BCE} < S/2$ болж зөрчил гарна.

Иймд голын жижиг гурвалжин оршин байна.

Бодлого F3. Эерэг бодит тоон олонлогийг $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ гэж тэмдэглэе. Дурын $x, y \in \mathbb{R}^+$ тоонуудын хувьд

$$f(x)f(y+f(x)) = f(1+xy)$$

байдаг бүх $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ функцийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу:** $f = 1$ ба $f = 1/x$.

Дээрх шийдүүд бодлогын нөхцөл хангах нь илт тул өөр шийдгүй гэж харуулъя.

f инъектив биш бол $f = 1$ гэж харуулъя. $a > b > 0$ ба $f(a) = f(b)$ гее. Тэгвэл дурын $x \in \mathbb{R}^+$ хувьд

$$f(1+ax) = f(a)f(x+f(a)) = f(b)f(x+f(b)) = f(1+bx)$$

байна. Энд $c = a/b > 1$ ба $x \mapsto x/b$ гэвэл $f(1+cx) = f(1+x)$ болох тул дээрхээс дурын $y \in \mathbb{R}^+$ хувьд

$$f(1+(1+cx)y) = f(1+(1+x)y)$$

болно. Одоо $1 < t < c$ хувьд $x = \frac{t-1}{c-t} > 0$ ба $y = \frac{c-t}{c-1} > 0$ гэвэл $(1+cx)y = t, (1+x)y = 1$ болох тул $f(1+t) = f(2)$ байна. Индукцээр дурын $n \geq 1$ хувьд $f(1+c^n x) = f(1+x)$ болох ба n -ийг ихэсгэвэл дурын $x \geq 2$ хувьд $f(x) = f(2)$ тогтмол болох нь харагдана.

Эцэст нь дурын $x \in \mathbb{R}^+$ хувьд $y = 2 + 1/x$ гэж авбал $y + f(x) > 2$ ба $1 + xy > 2$ тул $f(x) = f(1+xy)/f(y+f(x)) = 1$ байна.

f инъектив бол $f = 1/x$ гэж харуулъя. $x > 1$ гее. $y = \frac{x-1}{x} > 0$ гэвэл $1 + xy = x$ ба $f(x) \neq 0$ гэдгээс

$$f(1 - 1/x + f(x)) = 1$$

байна. Иймд $d = f(2) - 1/2$ гэвэл f инъектив гэдгээс $f(x) = d + 1/x$ байна. Одоо $y = x$ гэвэл $x > 1, y + f(x) > 1, 1 + xy > 1$ гэдгээс

$$\left(d + \frac{1}{x}\right) \left(d + \frac{1}{x + d + \frac{1}{x}}\right) = d + \frac{1}{1 + x^2}$$

болох ба ижил хуваарьт оруулбал хүртвэрт x -ийн олон гишүүнтийн адилтгал гарна. Сул гишүүдийг харьцуулбал $d = 0$ болно. Эндээс $x > 1$ бол $f(x) = 1/x$ байна. $y = f(x)$ гэвэл $f(2f(x)) = f(1 + xf(x))/f(x)$ гэдгээс

$$f\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{x}{1 + x\frac{1}{x}} = \frac{x}{2}$$

болно. Иймд $0 < x < 2$ бол $f(x) = 1/x$ байна.

Бодлого F4. Сөрөг биш коэффициенттой $P(x)$ ба $Q(x)$ олон гишүүнтүүд өгөгдөв.

$P(x)$ -ийн уламжлалыг $P'(x)$ гэе. $P(0) = Q(0) = 0$ ба $Q(1) \leq 1 \leq P'(0)$ байв.

(1) Дурын $0 \leq x \leq 1$ тооны хувьд $0 \leq Q(x) \leq x \leq P(x)$ байна гэж батал.

(2) Дурын $0 \leq x \leq 1$ тооны хувьд $P(Q(x)) \leq Q(P(x))$ байна гэж батал.

Тэнцэл биелэх нөхцөлийг олох шаардлагагүй.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. $P(0) = Q(0) = 0$ ба коэффициентууд сөрөг биш гэдгээс $P(x)/x$ ба $Q(x)/x$ функцүүд $x > 0$ дээр өсдөг байна. $0 \leq x \leq 1$ гэе.

(1) $x = 0$ үед $Q(0) = 0 = P(0)$ үнэн. $0 < x \leq 1$ бол

$$0 \leq Q(x)/x \leq Q(1)/1 \leq 1 \leq P'(0) \leq P(x)/x$$

гэдгээс $0 \leq Q(x) \leq x \leq P(x)$ байна.

(2) $Q(x) = 0$ үед $P(Q(x)) = P(0) = 0 \leq Q(P(x))$ үнэн. $Q(x) > 0$ бол дээрхээс $P(Q(x))/Q(x) \leq P(x)/x$ ба $Q(x)/x \leq Q(P(x))/P(x)$ гэдгээс

$$P(Q(x)) \leq P(x)Q(x)/x \leq Q(P(x))$$

байна. Энэ хэсгийг уламжлал ашиглан дараах байдлаар баталж болно.

$R(x) = Q(P(x)) - P(Q(x))$ гэвэл $R(0) = 0$ тул $R(x)$ өсдөг буюу $R'(x) \geq 0$ гэж харуулахад хангалттай. Энд $P'(x), Q'(x) \geq 0$ сөрөг биш коэффициенттой тул өсдөг функцүүд байна гэдгээс $Q'(P(x)) \geq Q'(x)$ ба $P'(Q(x)) \leq P'(x)$ байна. Эндээс $R(x)' = Q'(P(x))P'(x) - P'(Q(x))Q'(x) \geq 0$ байна.

Бодлого F5. Хурц өнцөгт ABC гурвалжинд BE ба CF өндрүүд татав. AD хэрчим ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн диаметр болно. BC талын дундаж цэгийг M гэе. BMF ба CME гурвалжинд багтсан тойргуудын дотоод ерөнхий шүргэгчүүд K цэгт огтлолцдог байв. K, M, D цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Билэгдэмбэрэл)

Бодолт.

BMF, CME гурвалжинд багтсан тойргуудыг харгалзан ω_1, ω_2 , төвүүдийг харгалзан I_1, I_2 , мөн BF, CE хэрчмүүдийн дундаж цэгүүдийг харгалзан P, Q гэе. ω_1, ω_2 тойргийн гадаад шүргэгчүүдийн огтлолцлын цэгийг N , ABC гурвалжны ортотөвийг H гэе. BC гадаад шүргэгч учраас N цэг BC дээр байна. AD диаметр гэдгийг тооцвол $BD \parallel CF, BE \parallel CD$ болно. Эндээс

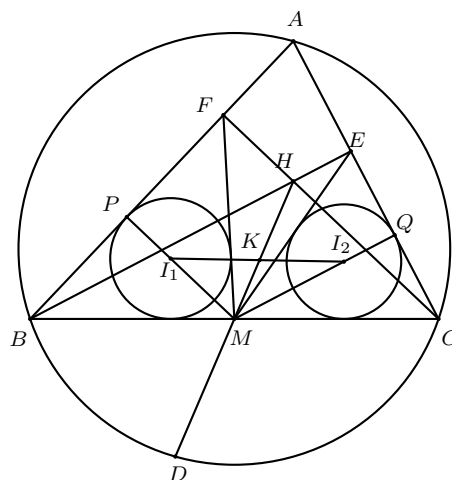
$$\angle CBD = \angle CAD = \angle BCF,$$

ба

$$\angle BCD = \angle BAD = 90^\circ - \angle C = \angle CBE$$

учир $BHCD$ параллелограмм болно. Иймд D, M, H цэгүүд нэг шулуун дээр оршино.

$$MB = MF = ME = MC$$



гэдгээс $I_1 \in MP$, $I_2 \in MQ$ ба MI_1 нь BH хэрчмийн дундаж цэгийг дайрна. Мөн $MI_2 \parallel BH$ гэдгээс $M(BI_1HI_2)$ харандаа болно. Иймд I_1I_2 шулуунтай огтлолцох цэгүүд нь гармоник бөгөөд нөгөө талаас (NI_1KI_2) гармаоник тул K цэг MH дээр байх болж бодлого бодогдов.

Бодлого F6. $n \geq 1$ гишүүнтэй натурал тоон $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ олонлогийг авч үзье. Дурын ялгаатай $X \neq Y \subseteq A$ дэд олонлогуудын хувьд $S(X) - S(Y)$ ялгавар 2^n тоонд хуваагддаггүй бол A олонлогийг сайн гэе. Энд $X \subseteq A$ дэд олонлогийн гишүүдийн нийлбэрийг $S(X) = \sum_{a \in X} a$ гэж тэмдэглэх ба $S(\emptyset) = 0$ гэж тодорхойлно.

Бүх гишүүн нь 2^n тооноос бага байдаг сайн олонлогийн тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. **Хариу:** $2^{n(n-1)/2}$.

$N = 2^n$ гэж тэмдэглэе. Натурал a тооны хувьд $2^s \mid a$ ба $2^{s+1} \nmid a$ бол $v_2(a) = s$ гэж тэмдэглээд A олонлогийн хувьд $v_2(A) = \{v_2(a) \mid a \in A\}$ гэе.

A олонлог сайн байх гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл $v_2(A) = \{0, 1, \dots, n-1\}$ болохыг харуулья.

Эхлээд $A_n = \{2^i b_i \mid b_i \text{ сондгой тоо } (0 \leq i \leq n-1)\}$ хэлбэртэй олонлог сайн гэж харуулья. $n = 1$ үед илт ба $n \geq 1$ хувьд A_n сайн бол $\{S(X) \pmod{N} \mid X \subseteq A_n\} = \{0, \dots, N-1 \pmod{N}\}$ гэдгээс

$$\begin{aligned} \{S(X) \pmod{2N} \mid X \subseteq A_{n+1}\} &= \{S(X), S(X) + N \pmod{2N} \mid X \subseteq A_n\} \\ &= \{0, 1, \dots, 2N-1 \pmod{2N}\} \end{aligned}$$

болох тул A_{n+1} сайн байна.

Одоо $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ олонлог сайн гээд $M = 2^N - 1$ гэе. $2^N \equiv 1 \pmod{M}$ ба $\{S(X) \pmod{N} \mid X \subseteq A\} = \{0, \dots, N-1 \pmod{N}\}$ гэдгээс

$$\prod_{j=1}^n (2^{a_j} + 1) = \sum_{X \subseteq A} 2^{S(X)} \equiv \sum_{k=0}^{N-1} 2^k \equiv 0 \pmod{M}$$

байна. Энд $M = \prod_{i=0}^{n-1} (2^{2^i} + 1)$ болохыг анзааръя.

$0 \leq i \leq n-1$ бэхэлье. Тэгвэл $d = (2^{2^i} + 1, 2^{a_j} + 1) \neq 1$ байх $1 \leq j \leq n$ оршин байх ба $2^{2^i} \equiv 2^{a_j} \equiv -1 \pmod{d}$ гэдгээс $2^{2^{i+1}} \equiv 2^{2a_j} \equiv 1 \pmod{d}$ байна. Эндээс $(2^{i+1}, 2a_j) = 2^s$, $0 \leq s \leq i+1$, гэвэл $2^{2^s} \equiv 1 \pmod{d}$ болох тул $s > i$ байна. Иймд $s = i+1$ буюу $a_j = 2^i b_i$ хэлбэртэй байна. Түүнчлэн $2^{2^i} \equiv -1 \pmod{d}$ тул b_i сондгой байна. Эндээс $\{0, 1, \dots, n-1\} \subseteq v_2(A)$ болох ба $|v_2(A)| = n$ тул тэнцүү байна.

Иймд гишүүд нь 2^n -ээс бага сайн олонлогийн тоо $2^{n-1} \times 2^{n-2} \times \dots \times 2^0 = 2^{n(n-1)/2}$ байна.

Т ангилал (Дунд ангийн багш)

Бодлого T1. $n \geq m \geq 1$ байх натурал тоонуудын хувьд

$$(a^n - b^n)^2 = a^{n+m} - b^{n+m}$$

тэгшитгэл $|a| > |b| > 1$ байх (a, b) харилцан анхны бүхэл тоон шийдгүй болохыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. Эсрэгээс нь $n \geq m \geq 1$ хувьд тэгшитгэл нөхцөл хангах (a, b) шийдтэй гэе.

$(a^n - b^n)^2 = a^{n+m} - b^{n+m} = a^n(a^m - b^m) + b^m(a^n - b^n)$ гэдгээс $a^n - b^n \mid a^m - b^m$ болно. $S = (a^m - b^m)/(a^n - b^n)$ гэвэл $a^n S + b^m = a^n - b^n$ гэдгээс $a^n(1 - S) = b^m(b^{n-m} + 1)$ байна. $|b| > 1$ гэдгээс $b^{n-m} + 1 \neq 0$ тул $a^n \mid b^{n-m} + 1$ байна. Эндээс

$$|b|^n + 1 \leq (|b| + 1)^n \leq |a|^n \leq |b|^{n-m} + 1 < |b|^n + 1$$

болж зөрчил гарна.

Бодлого Т2. $AB \neq AC$ байх ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг ω гээд BC талын дундаж цэгийг M гэе. ω тойргийн B болон C цэгт татсан шүргэгч шулуунууд T цэгт огтлолцоно. AMT гурвалжныг багтаасан тойрог BC шулуунтай дахин N цэгт огтлолцоно. NT хэрчмийн дундаж цэг S бол SA шулуун ω тойргийн шүргэгч болно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Э. Гэрэлхүү)

Бодолт.

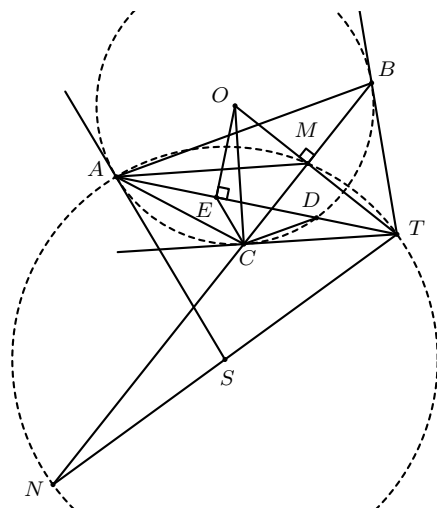
BTC адил хажуут гурвалжин тул TM өндөр болж

$$\angle CMT = \angle NMT = 90^\circ$$

байна. Иймд S цэг AMT гурвалжныг багтаасан тойргийн төв болж $SA = ST$ ба $\angle SAT = \angle STA$ болно. Энд AT нь ABC гурвалжны A оройн симедиан тул $\angle BAM = \angle TAC$ байна.

$$\begin{aligned} \angle SAT &= \angle ATN = \angle AMN \\ &= \angle ABM + \angle BAM \\ &= \angle TAC + \angle ABM \end{aligned}$$

болох ба $\angle SAT = \angle TAC + \angle ABM$ гэдгээс $\angle CAS = \angle BAM = \angle ABC$ болж батлагдав.



Бодлого Т3. Эерэг бодит тоон олонлогийг $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ гэж тэмдэглэе. Дурын $x \in \mathbb{R}^+$ тооны хувьд

$$f(g(x)) = f(x)g(x) \quad \text{ба} \quad f(x) = x(1 + g(x))$$

байдаг бөгөөд $g(x), g(g(x)), g(g(g(x))), \dots$ дараалал төгсгөлөг ширхэг ялгаатай утга авдаг байх бүх $f, g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ хос функцийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баяржавхлан)

Бодолт. **Хариу:** $f(x) = x + 1$ ба $g(x) = 1/x$.

Дээрх функцүүд шийд болохыг шалгах хэцүү биш. Өөр шийдгүй гэж харуулахын тулд $x \in \mathbb{R}^+$ бэхлээд $g^0 = x$ ба $n \geq 1$ үед $g^n = g(g^{n-1})$ гэе.

$g(x)(1 + g(g(x))) = f(g(x)) = f(x)g(x) = x(1 + g(x))g(x)$ ба $g(x) \neq 0$ гэдгээс $1 + g^2 = f = x(1 + g)$ байна. Эндээс

$$gg^2 - 1 = (xg - 1)(1 + g)$$

болох ба индукцээр $g^2g^3 - 1 = (gg^2 - 1)(1 + g^2) = (xg - 1)(1 + g)(1 + g^2)$ гэх мэтчилэн

$$g^n g^{n+1} - 1 = (g^{n-1} g^n - 1)(1 + g^n) = (xg - 1)(1 + g)(1 + g^2) \dots (1 + g^n)$$

байна. Бодлогын нөхцөлөөс $g^n = g^m$ байх $n > m$ олдох ба энэ үед

$$(xg - 1)(1 + g) \dots (1 + g^m)((1 + g^{m+1}) \dots (1 + g^n) - 1) = 0$$

байна. Одоо $g^k > 0$ болохыг ашиглавал $g = 1/x$ ба $f = 1 + x$ болно.

Бодлого Т4. Гурвалжны α, β, γ өнцгүүдийн хувьд

$$\cos(\alpha) \cos(3\alpha) + \cos(\beta) \cos(3\beta) + \cos(\gamma) \cos(3\gamma) + \frac{7}{4} \geq 2 \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma)$$

байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Эхлээд $2 \prod \cos \alpha = 1 - \sum \cos^2(\alpha)$ байдгийг саная. Одоо $\cos(3x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x)$ болохыг ашиглавал

$$\begin{aligned} 4 \sum \cos(\alpha) \cos(3\alpha) - 8 \prod \cos(\alpha) + 7 &= 16 \sum \cos^4(\alpha) - 8 \sum \cos^2(\alpha) + 3 \\ &= \sum (4 \cos^2(\alpha) - 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

болж батлагдана. $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$ үед тэнцэл биелнэ.

Бодлого Т5. m, n натурал тоонууд байг. $m \times n$ хэмжээтэй тэгш өнцөгт хүснэгт өгөгдөв. Тэгш өнцөгтийн аль нэг талтай параллел хэрчмийг *сайн* гэе. Хүснэгтийг зангилааны цэгүүд дээр оройтой гурвалжнуудад хуваав. Эдгээр бүх гурвалжнуудын ядаж нэг тал сайн байсан ба аль ч сайн талд буулгасан өндөр нэгж урттай байв. Яг хоёр сайн талтай гурвалжин хамгийн цөөндөө хэд байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Билэгдэмбэрэл)

Бодолт. **Хариу:** $m, n \geq 2$ ба mn тэгш бол 0, бусад үед 2.

Нөхцөл хангах хуваалтыг товчоор хуваалт гэе.

$1 \leq m \leq n$ гэж үзэхэд явцуурах зүйл үгүй. Хоёр сайн талтай гурвалжинг онц гурвалжин гэе. Онц гурвалжин нэгж катеттай адил хажуут тэгш өнцөгт гурвалжин байна. $n \geq 2$ үед $2 \times n$ тэгш өнцөгтийг онц гурвалжингүй, $1 \times n$ тэгш өнцөгтийг 2 онц гурвалжинтай байхаар хувааж чадна. Эндээс $m \geq 2$ ба mn тэгш бол онц гурвалжингүй, $m = 1$ эсвэл mn сондгой үед 2 онц гурвалжинтай хуваалт олдоно.

Одоо $m = 1$ эсвэл mn сондгой бол ямар ч хуваалт ядаж 2 онц гурвалжин агуулахыг харуулъя. Сайн биш талыг муу тал, онц биш гурвалжинг муу гурвалжин гэе. Муу гурвалжин хоёр муу талтай байх ба тэдгээрийн дунджуудыг холбосон хэрчмийг гол хэрчим гэе. Муу тал оройгоосоо өөр зангилааны цэг дайрахгүй болохыг анзааръя.

Ерөнхий муу талтай хоёр муу гурвалжны гол хэрчмүүд холбогдох ба үргэлжилсэн гол шугмууд гинж үүсгэнэ. Гол хэрчим сайн байх ба зөвхөн нүдний голд чиглэлээ өөрчилж чадна. Эндээс битүү гинж тэгш ширхэг нүд дайрна. Битүү биш гинжний хоёр төгсгөлд онц гурвалжин байна.

$m = 1$ үед битүү гинж олдохгүй ба mn сондгой үед битүү биш гинж олдоно гэдгээс ядаж 2 онц гурвалжин олдоно.

Бодлого Т6. Дурын $n, m \geq 1$ дугааруудын хувьд $na_n - ma_m + 2a_m - 1$ илэрхийлэл $a_n + a_m - 1$ тоонд хуваагддаг байх бүх натурал тоон $a_1, a_2, \dots$ дарааллыг ол.

(Дэвшүүлсэн: М. Өнөболд)

Бодолт. **Хариу:** $c \geq 0$ хувьд $a_n = 1 + c(n-1)$.

Дээрх хариу шийд болох нь илт тул өөр шийдгүй гэж харуулъя. Дурын $n, m \geq 1$ хувьд

$$n - \frac{na_n - ma_m + 2a_m - 1}{a_n + a_m - 1} = \frac{n(a_m - 1) + (m - 2)a_m + 1}{a_n + a_m - 1}$$

бүхэл байна. $c = a_2 - 1 \geq 0$ гэе. $m = 2$ гэвэл $\frac{cn + 1}{a_n + c}$ натурал байна.

$c = 0$ үед дурын $n \geq 1$ хувьд $a_n = 1$ байх тул $c \geq 1$ гэе.

Одоо $cn + 1$ анхны гэе. Энд $a_n + c \geq 2$ тул $a_n = 1 + c(n - 1)$ байх ба Дирихлейн теоремоор ийм байх n төгсгөлгүй олон байна. Цаашилбал энэ үед дурын $m \geq 1$ хувьд

$$(a_m - 1) - c \frac{n(a_m - 1) + (m - 2)a_m + 1}{cn + a_m - c} = \frac{a_m(a_m - 1 - c(m - 1))}{cn + a_m - c}$$

тоо бүхэл байна. Эндээс $a_m = 1 + c(m - 1)$ байна.

Олон Улсын Мэдээ

Европын Охидын Математикийн 13-р Олимпиад

EGMO 2024 буюу Европын Охидын Математикийн 13-р Олимпиад 2024 оны 4-р сарын 11-17 өдрүүдэд Гүрж улсын Цкалтурбо хотод явагдана. Энэ олимпиадад нийт 55 улсын охидууд оролцох гэж байна.

Манай улсыг төлөөлж оролцох багийн сонгон шалгаруулалт 1-р сарын 20, 21 болон 1-р сарын 31, 2-р сарын 1 ны өдрүүдэд явагдаж Э. Энхжин (Эрдмийн Сан), Г. Дөлгөөн (УБ 1-р сургууль), М. Амин-Эрдэнэ (Шинэ-Үе), Н. Болор (Эрдмийн Хишиг) нар шалгарлаа. Багийн ахлагчаар Т. Хулан, дэд ахлагчаар С. Цогзолмаа ажиллана.

Энэ жил тус олимпиадад оролцох зардлыг шийдэж өгсөн УИХ-ын дарга Г. Занданшатар болон БЕГ-ын дарга Т. Ням-Очир нарт талархал илэрхийлье.

Олон Улсын Математикийн 64-р Олимпиад

Олон Улсын Математикийн 64-р Олимпиад 2023 оны 7-р сарын 2-ноос 13-ны өдөр Япон улсын Чиба хотод зохион байгуулагдлаа. Олимпиадад нийт 112 орны 618 оролцогч мэдлэг оюунаа уралдуулан өрсөлдөж манай баг 138 оноогоор 30-р байранд шалгарлаа. Багийн ахлагчаар Ү. Отгонбаяр, дэд ахлагчаар Б. Батбаясгалан нар ажиллаж, ажиглагчаар У. Батзориг, Т. Базар, Д. Даянцолмон, Т. Хулан нар оролцов.

Олимпиадад оролцох багийг улсын математикийн олимпиадын (III даваа) F ангилалд оролцох эрх авсан сурагчдын дунд 4 сарын 1-2 болон 4 сарын 8-9 өдрүүдэд зохион байгуулсан сорилуудын оноо болон улсын олимпиадын F ангилалын онооны нийлбэр дүнгээр сонголоо.

Оролцогч	Сургууль	Оноо	Амжилт
Д. Энэрэлт	Сант	35	Алтан медаль
А. Ивээл	УБ, 11-р сургууль	23	Хүрэл медаль
Ц. Сайханбилэг	Сант	23	Хүрэл медаль
Х. Нурсолтан	УБ, 11-р сургууль	21	Хүрэл медаль
Б. Тэнүүнсайхан	Шинэ үе	19	Хүрэл медаль
О. Эрхэсболд	Сант	17	Тусгай шагнал
Баг		138	30-р байр

ОУМО-ын бэлтгэлийг 4 сарын 18-ны өдрөөс 7 сарын 2-ны өдөр хүртэл (улсын олимпиадын долоо хоногийг хасаад нийт 10 долоо хоног) зохион байгуулав.

Олимпиадын бэлтгэлд Др. У. Батзориг, Др. Ү. Отгонбаяр, Маг. Б. Батбаясгалан, Др Т. Хулан, Др. Г. Баярмагнай нар болон R3 сургалтын төвийн багш нар оролцлоо.

ОУМО-64-д оролцох багийн бэлтгэл болон бусад зардлыг ММОХ, БШУЯ хариуцаж ажиллалаа. Дэмжлэг үзүүлсэн БШУЯ болон БЕГ-т талархал илэрхийлье.

Бодлогууд

Бодлого 1. Дараах нөхцөлийг хангах бүх $n > 1$ зохиомол тоог ол: n тооны $d_1, d_2, \dots, d_k$ натурал тоон хуваагчдыг $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ гэж жагсаахад, дурын $1 \leq i \leq k - 2$ хувьд d_i тоо $d_{i+1} + d_{i+2}$ нийлбэрийг хуваана.

Бодлого 2. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны хувьд $AB < AC$ байв. ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг Ω гэе. Ω тойргийн A цэгийг агуулсан CB нумын дундаж цэгийг S гэе. A цэгээс BC талд буулгасан өндөр BS хэрчмийг D цэгт огтлох ба Ω тойргийг дахин $E \neq A$ цэгт огтолно. D цэгийг дайрсан BC шулуунтай параллель шулуун BE шулууныг L цэгт огтолно. BDL гурвалжныг багтаасан тойргийг ω гэж тэмдэглэе. ω тойрог Ω тойрогтой дахин $P \neq B$ цэгт огтлолцоно.

ω тойргийг P цэгт шүргэдэг шулуун BS шулуунтай $\angle BAC$ өнцгийн дотоод биссектрис дээр огтлолцохыг батал.

Бодлого 3. Бүхэл $k \geq 2$ тоо бүрийн хувьд дараах чанартай бүх натурал тоон $a_1, a_2, \dots$ дарааллыг ол: сөрөг биш бүхэл $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ тоонуудын хувьд $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1x + c_0$ гэж бичигдэх ямар нэг P олон гишүүнт олдоод, дурын $n \geq 1$ хувьд

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \cdots a_{n+k}$$

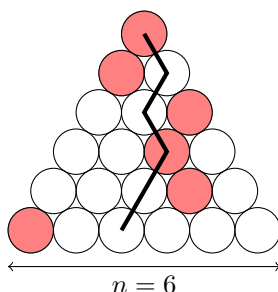
байна.

Бодлого 4. Хос хосоороо ялгаатай эерэг бодит $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ тоонууд өгөгдөв. Дурын $n = 1, 2, \dots, 2023$ хувьд

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)}$$

бүхэл бол $a_{2023} \geq 3034$ гэж батал.

Бодлого 5. Натурал n тоо өгөгдөв. $i = 1, 2, \dots, n$ бүрийн хувьд дээрээсээ i -р мөрөнд яг нэг нь улаанаар будагдсан i ширхэг тойрог байрласан байхаар зөв гурвалжин хэлбэртэй байрлуулсан $1 + 2 + \dots + n$ тойргийг Япон гурвалжин гэнэ. Япон гурвалжны эхний мөрнөөс эхлээд, нэг тойргоос түүний яг доор байрлах хоёр тойргийн аль нэг рүү давтан шилжсээр, хамгийн доод мөр хүрдэг n тойргийн дарааллыг *нинжа зам* гэнэ. Зурагт $n = 6$ хувьд Япон гурвалжин ба хоёр улаан тойрогтой нинжа замын жишээ үзүүлэв.



Япон гурвалжин бүр ядаж k ширхэг улаан тойрогтой нинжа зам агуулдаг байх хамгийн их k тоог n -ээс хамааруулж ол.

Бодлого 6. ABC зөв гурвалжны A_1, B_1, C_1 дотоод цэгүүдийн хувьд $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ ба

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ$$

байв. BC_1, CB_1 шулуунууд A_2 цэгт огтлолцдог, CA_1, AC_1 шулуунууд B_2 цэгт огтлолцдог, AB_1, BA_1 шулуунууд C_2 цэгт огтлолцдог гэе.

$A_1B_1C_1$ гурвалжин элдэв талт бол $AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2$ гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд бүгд хоёр ерөнхий цэгийг дайрна гэж батал.

(Тайлбар: аль ч хоёр талын урт нь ялгаатай гурвалжныг элдэв талт гэнэ.)

Олон Улсын Математикийн 1-р Зуны Сургалт

Олон Улсын Математикийн Олимпиадад Монгол улсаа төлөөж оролцох баг Бээжингийн Математикийн Ухаан ба Хэрэглээний Хүрээлэн дээр 6 дугаар сарын 18 өдрөөс 7 дугаар сарын 4-ний өдрийн хооронд явагдсан Олон Улсын Математикийн 1-р Зуны Сургалтад оролцож, дэлхийн шилдэг 27 багийн сурагчидтай хамт олон улсын олимпиадын бэлтгэл хийв.

Сургалтын төгсгөлд зохион байгуулагдсан олимпиадад манай баг амжилттай оролцож 13-р байр эзэллээ.

Оролцогч	Сургууль	Оноо	Амжилт
Д. Энэрэлт	Сант	41	I байр
Б. Тэнүүнсайхан	Шинэ үе	23	III байр
О. Эрхэсболд	Сант	23	III байр
Х. Нурсолтан	УБ, 11-р сургууль	20	Тусгай шагнал
А. Ивээл	УБ, 11-р сургууль	19	Тусгай шагнал
Ц. Сайханбилэг	Сант	16	Тусгай шагнал
Баг	(эхний 4)	107	13-р байр

Бид 2024 онд 2-р зуны сургалтад хамрагдахаар бэлтгэлээ хангаж байна.

Бодлогууд

Бодлого 1. Дараах чанартай бүх $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ функцийг ол: $f(1) \neq f(-1)$ ба

$$\text{дурын } m, n \in \mathbb{Z} \text{ хувьд } (f(m+n))^2 \mid f(m) - f(n).$$

Тайлбар: $a \mid b$ гэдэг нь $b = ka$ байх бүхэл k тоо олдоно гэсэн үг. Жишээлбэл,

$$6 \mid 42, \quad 3 \mid -6, \quad -42 \mid 0, \quad 0 \mid 0.$$

Бодлого 2. Нэг эгнээнд $1, 2, \dots, n!$ гэж дугаарлагдсан $n!$ ширхэг сагс байв. Бат эхлээд бүх сагсанд 1 ширхэг чулуу хийнэ. Дараа нь нэг алгасаад хоёр дахь сагс бүрд 2 ширхэг чулуу хийнэ. Бат энэ мэтээр үргэлжлүүлсээр хамгийн сүүлд $n-1$ алгасаад n дэх сагс бүрд n ширхэг чулуу хийнэ. Өөрөөр хэлбэл, $i = 1, 2, \dots, n$ бүрийн хувьд $i, 2i, 3i, \dots, n!$ дугаартай сагсанд i ширхэг чулуу хийнэ.

Эдгээр алхмуудыг хийж дууссаны дараа i дахь сагсанд x_i ширхэг чулуу байсан бол

$$n! \cdot n^2 \leq \sum_{i=1}^{n!} x_i^2 \leq n! \cdot n^2 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

болохыг батал.

Бодлого 3. Есөн ширхэг 3×3 дэд хүснэгтэд хуваагдсан 9×9 хүснэгтийг дараах чанартай бол бинокү гэнэ:

- нүд бүр эсвэл 0 эсвэл 1 агуулдаг,
- мөр бүр ядаж нэг 0 ба ядаж нэг 1 агуулдаг,
- багана бүр ядаж нэг 0 ба ядаж нэг 1 агуулдаг,
- есөн ширхэг дэд хүснэгт тус бүр ядаж нэг 0 ба ядаж нэг 1 агуулдаг.

Ямар нэг бинокүгийн хэдэн нүдний тоог арилгахад үлдэх хүснэгтийг гүйцэд биш бинокү гэнэ. Цор ганц аргаар бинокү болгож гүйцээж болдог гүйцэд биш бинокү хамгийн олондоо хэдэн ширхэг хоосон нүдтэй байж болох вэ?

Бодлого 4. $AB \neq AC$ байдаг ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төвийг I гэе. AI ба BC шулуунууд D цэгт огтлолцоно. AC хэрчим дээр E цэгийг $CD = CE$ байхаар авав. Мөн ижлээр, AB хэрчим дээр F цэгийг $BF = BD$ байхаар авав. CEI ба DFI гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд дахин $P \neq I$ цэгт огтлолцдог гэе. Мөн BFI ба DEI гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд дахин $Q \neq I$ цэгт огтлолцдог гэе. PQ ба BC шулуунууд перпендикуляр гэж батал.

Бодлого 5. Хавтгайд аль ч гурав нь нэг шулуун дээр үл орших 2022 цэг өгөгдөв. Цэг бүрийг эсвэл цэнхэр эсвэл улаан өнгөөр будсан ба ялгаатай гурван улаан цэг дээр оройтой гурвалжин бүр ядаж нэг цэнхэр цэг агуулдаг бол улаан цэг хамгийн олондоо хэд байж болох вэ?

Бодлого 6. Дурын натурал m, n тоонуудын хувьд

$$m + n \mid P^{(m)}(n) - P^{(n)}(m)$$

байдаг бүх бүхэл коэффициенттой $P(x)$ олон гишүүнтийг ол.

Тайлбар: P -ийн k -давхар композицийг $P^{(k)}(x)$ гэж тэмдэглэв, өөрөөр хэлбэл

$$P^{(k)}(x) = \underbrace{P(P(\dots(P(x))\dots))}_{k \text{ удаа}}.$$

STAR хөтөлбөр

АНУ-ын Global Talent Network төрийн бус байгууллагаас дунд ахлах ангийн авьяаслаг сурагчдыг олон улсын олимпиадад оролцоход дэмжлэг үзүүлэх зорилгоор STAR Challenge хөтөлбөрийг 2023 оны хавраас эхлэх хэрэгжүүлж байгаа билээ.

Хаврын хөтөлбөрт манай улсаас 14 сурагч хамрагдсанаас А. Ивээл төгсөлтийн сорилд амжилттай оролцож 1000 ам.долларын тэтгэлэг авсан. Хөтөлбөр 2023 оны намар дахин хэрэгжсэн ба 2024 оны хаврын хөтөлбөр 2 дугаар сард эхэлсэн. Хөтөлбөрийн дэлгэрэнгүй танилцуулгатай доорх хаягаар танилцаарай.

<https://www.globtalent.org/star>

Мөн энэ хичээлийн жилд манай хороо дээрх төрийн бус байгууллагын санхүүжилтээр Олон Улсын Математикийн Олимпиадад оролцох багаа бэлтгэх 10000 ам.долларын төсөл хэрэгжүүлж байгаа болохыг дуулгахад таатай байна.