

Гарчиг

Өмнөх үг	iii
Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо	1
Монголын Математикийн 61-р Олимпиадын I Даваа	3
Сургуулийн Олимпиад	3
Бодлогууд	4
Монголын Математикийн 61-р Олимпиадын II Давааны I шат	9
Аймаг/дүүргийн Олимпиад	9
Бодлогууд	10
Бодолтууд	14
Монголын Математикийн 61-р Олимпиадын II Давааны II шат	29
Хот/бүсийн Олимпиад	29
Бодлогууд	30
Бодолтууд	35
Монголын Математикийн 61-р Олимпиадын III Даваа	53
Улсын Олимпиад	53
Олимпиадын дүн	55
Бодлогууд	56
Бодолтууд	59
Олон Улсын Мэдээ	73
Европын Охидын Математикийн Олимпиад	73
Олон Улсын Математикийн Зуны Сургалт	74
Олон Улсын Математикийн Олимпиад	76
Ираны Геометрийн Олимпиад	78
Ази-Номхон Далайн Математикийн Олимпиад	80

Өмнөх үг

Монголын Математикийн 61-р Олимпиад I даваа, II давааны I шат, II давааны II шат, III даваа гэсэн бүтэцтэй, C (5-6), D (7-8), E (10-11), F(11-12), S (Бага ангийн багш), T (Багш) ангилалтай зохион байгуулагдав.

Энэхүү цувралаар тус олимпиадын бодлого болон бодолтуудыг толилуулж байна. Мөн хорооны танилцуулга болон Монгол улсын баг олон улсын математикийн олимпиадууд хэрхэн оролцсон тухай мэдээг эндээс уншаарай.

Талархал. Цувралыг Капитрон банкны санхүүжилтээр бэлтгэж хэвлүүлэв. Оюунлаг ирээдүйг дэмжигч Капитрон банканд талархал илэрхийлье.

Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо

Үүсгэн байгуулагчид

Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо Төрийн бус байгууллага (Хороо) 2008 онд

Б.Баасандорж	Хувийн хэвшил
Б.Баясгалан	Олонлог сургууль
Б.Бүүвэйбаатар	Хувийн хэвшил
Ч.Даваадорж	Нийслэлийн БГ
Ц.Дашдорж	МУИС
Д.Нарангэрэл	Нийслэлийн 1-р сургууль
Б.Сандагдорж	МУБИС

нарын санаачлагаар

Математикийн шинжлэх ухааныг түгээн дэлгэрүүлэх, гоо сайхныг нь хүүхэд залуучуудад таниулан сурталчлах, математикийн авъяастай хүүхэд залуусыг тодруулан дэмжих, математикийн уралдаан тэмцээнийг дэлхийн жишгээр зохион байгуулах

эрхэм зорилготойгоор үүсгэн байгуулагджээ. 2018 онд шинэчлэгдэн зохион байгуулагдаж өдгөө Удирдах зөвлөл, Гүйцэтгэх зөвлөл, Мэргэжлийн хороо гэсэн бүтэцтэйгээр үйл ажиллагаа явуулж байна.

Удирдах зөвлөл

Ерөнхийлөгч:	Н. Мөнхнасан	Монполимет группийн ТУЗ-ийн дарга
Дэд ерөнхийлөгч:	Ч. Анар	Монгол Улсын Их Хурлын гишүүн
	Б. Батбаасан	Космо группийн ТУЗ-ийн дарга
	Б. Чандмань	Капитрон банкны гүйцэтгэх захирлын тэргүүн орлогч
	Д. Энхтүвшин	Монгол Улсын Их Хурлын гишүүн
Гишүүн:	Г. Баярмагнай	МУИС-ийн профессор
	Ү. Отгонбаяр	АНД Глобал компанийн хиймэл оюун хариуцсан захирал

Гүйцэтгэх зөвлөл

Дарга:	Ү. Отгонбаяр
Нарийн бичгийн дарга:	С. Цогзолмаа
Гишүүн:	Б. Батбаясгалан
	У. Батзориг
	Г. Баярмагнай
	Т. Хулан

Мэргэжлийн хороо

Багш	Оюутан
Т.Базар	А.Алтансүх
Б.Батбаясгалан	Х.Анхбаяр
У.Батзориг	Г.Баяржавхлан
Б.Баяржаргал	Т.Билгүүн
Г.Баярмагнай	Э.Гэрэлхүү
Л.Буянтогтох	Г.Далайцэрэн
Д.Даянцолмон	Н.Дөлгөөн
Ш.Доржсэмбэ	Б.Дөлгөөнмөрөн
Э.Оргил-Эрдэнэ	Х.Нурсолтан
Ү.Отгонбаяр	Г.Оргил
Т.Хулан	О.Тэнгис
С.Цогзолмаа	Б.Улсболд
	Б.Хангал
	У.Хүслэн
	Ц.Цэнгэл

Бодлогын баг

Энэ хичээлийн жил бодлого дэвшүүлсэн нийт гишүүддээ талархал илэрхийлье.

Бодлогын баг	Бодлого дэвшүүлсэн
У.Батзориг	А.Алтансүх
Ү.Отгонбаяр	Н.Аргилсан
Т.Хулан	Б.Батбаясгалан
	У.Батзориг
	Г.Баярмагнай
	Б.Билэгдэмбэрэл
	Л.Буянтогтох
	Ч.Гантөмөр
	Р.Гончигдорж
	Э.Гэрэлхүү
	Ш.Доржсэмбэ
	Н.Дөлгөөн
	Х.Нурсолтан
	Ү.Отгонбаяр
	М.Ханзул
	Т.Хулан

Монголын Математикийн 61-р Олимпиадын I Даваа

Сургуулийн Олимпиад

Олимпиадын I даваа 2024 оны 10-р сарын 28-ны өдөр зохион байгуулагдав.

Олимпиад маш өргөн дэлгэр явагдаж 21 аймаг, 9 дүүргийн нийт 776 сургуулийн 60 мянга шахам сурагч оролцлоо. Үүнээс үүдэн олимпиадын дүнг шивж оруулахад бидний урьдчилан тооцоолоогүй техникийн хүндрэл гарсны улмаар олон мэргэжилтэнд ажил удсан ба сурагч, эцэг эхчүүдэд ойлгомжгүй байдал үүссэнд хүлцэл өчье. Ирэх жил техникийн өөр шийдэл ашиглах замаар энэ асуудлыг шийдвэрлэх болно.

Сурагчид C (5-6), D (7-8) ангилалд тус бүр 10 бодлогыг 2 цагийн хугацаанд, E (9-10), F (11-12) ангилалд тус бүр 12 бодлогыг 2 цаг 30 минутын хугацаанд бодож өрсөлдөв.

Үүнээс 1 буюу түүнээс дээш оноо авч аймгийн жагсаалтын эхний 30 байрт, дүүргийн жагсаалтын эхний 50 байрт шалгарсан сурагчдад II давааны I шатанд оролцох эрх олгосон ба сургууль бүрийн эхний 3 хүртэлх тооны сурагчид II давааны I шат буюу аймаг, дүүргийн олимпиадад оролцох эрх нэмэлтээр олголоо.

Олимпиадын дүнг аймаг, дүүрэг тус бүрээр ММОХ-ын албан ёсны веб хуудас www.mmo.mn-ээс харж болно.

Бодлогууд

Бодлого С1. 3 гэсэн цифр агуулсан, 9 гэсэн цифр агуулаагүй гурван оронтой тоо хэд байх вэ?

Хариу: 200.

Бодлого С2. Сурагч дөрвөн оронтой тоо санах. Санасан тооны урд талд 5 гэсэн цифр залгахад үүссэн тоо санасан тооны ард талд 4 гэсэн цифр залгахад үүссэн тооноос тав дахин их байв. Санасан тоог ол.

Хариу: 1020.

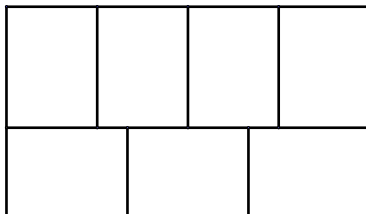
Бодлого С3. 4г, 5г, 6г ийн жинтэй 30 ширхэг зоосны нийт жин 140г байсан бол 4г ба 6г жинтэй зооснуудын тооны зөрүү хэд байсан бэ?

Хариу: 10.

Бодлого С4. Тоглолтын тасалбар нийт 3 өдөр зарагджээ. Эхний өдөр нийт тасалбарын $\frac{3}{8}$ хэсгийг, хоёр дахь өдөр үлдсэн тасалбарын $\frac{18}{35}$ хэсгийг зарав. 3 дахь өдөр 300 аас их 320 оос бага билет зарагдсан бол нийт хичнээн тасалбар зарагдсан бэ?

Хариу: 1008.

Бодлого С5. Долоон ижил жижиг тэгш өнцөгтөөр зургийн дагуу 18900 нэгж квадрат талбай бүхий том тэгш өнцөгт байгуулсан бол жижиг тэгш өнцөгтийн периметр хэд вэ?



Хариу: 210.

Бодлого С6. Зөвхөн 1, 2, 5, 8 цифрүүдээр бичигддэг 4-т хуваагддаг гурван оронтой тоо хэд байх вэ?

Хариу: 16.

Бодлого С7. 2024, 2023, 1, 2022, 2021, 1, 2020, ... тоон дарааллын 61-р гишүүнийг ол.

Хариу: 1984.

Бодлого С8. $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 31 \times 32$ үржвэрээс хамгийн цөөндөө хэдэн үржигдэхүүн арилгавал бүхэл тооны квадрат болох вэ?

Хариу: 6.

Бодлого С9. Бүх цифр нь ялгаатай, аль ч дараалсан хоёр цифрээс бүтсэн тоо нь 17 эсвэл 31-д хуваагддаг хамгийн их тооны цифрүүдийн нийлбэрийг ол.

Хариу: 27.

Бодлого C10. $\overline{a2024b}$ хэлбэрийн 33-т хуваагдахгүй зургаан оронтой тоо хэд байх вэ?

Хариу: 87.

Бодлого D1. $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = x_5 - x_4 = x_6 - x_5$ байх $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ бодит тоонууд өгөгдөв. Хэрэв $x_1 + x_2 + x_3 = 25$ ба $x_4 + x_5 + x_6 = 61$ бол $x_2 - x_1$ ялгаврыг ол.

Хариу: 4.

Бодлого D2. 465-ыг натурал a тоонд хуваахад гарах ноогдвор ба үлдэгдэл нь тэнцүү байдаг бүх a тооны нийлбэрийг ол.

Хариу: 740.

Бодлого D3. Шинэ мөөгний 94%-ийг, харин хатаасан мөөгний 14%-ийг ус эзэлнэ. Мөөгийг хатаахад зөвхөн ус нь ууршина гэж үзье. Хатаасан мөөгийг усанд дэвтээсний дараа жин нь 5 дахин өсдөг байв. Чимгээ түүсэн мөөгнийхөө жинг мөөгөө хатаагаад усанд дэвтээсний дараах жинтэй харьцуулахад $p : q$ гарсан ба $\text{ХИЕХ}(p, q) = 1$ байв. $p + q$ нийлбэрийг ол.

Хариу: 46.

Бодлого D4. $1 \times 8 \times 15 \times 22 \times \dots \times 2024$ үржвэрийг x, y, z, t натурал тоонуудын хувьд $2^x \times 3^y \times 5^z \times t$ хэлбэртэй бичсэн бол $x + y + z$ нийлбэрийн хамгийн их утгыг ол.

Хариу: 507.

Бодлого D5. Зөв 11 өнцөгтийн оройнууд дээр оройтой адил хажуут биш гурвалжин хэд байх вэ?

Хариу: 110.

Бодлого D6. $x^2y^3 = 7xy$ ба $-20 \leq x \leq 20$ ба $-20 \leq y \leq 20$ байх (x, y) бүхэл тоон хос хэд байх вэ?

Хариу: 83.

Бодлого D7. 100 хүртэлх натурал тоонууд дотор 3-ын ялгаатай зэрэгтүүдийн нийлбэрт тавигдах хэдэн тоо байгаа вэ? Жишээлбэл $1 = 3^0$, $4 = 3^0 + 3^1$, $9 = 3^2$, $31 = 3^0 + 3^1 + 3^3$ тул нөхцөл хангана. Харин $7 = 3^0 + 3^1 + 3^1$, $18 = 3^2 + 3^2$, $32 = 3^0 + 3^0 + 3^1 + 3^3$ тул нөхцөл хангахгүй.

Хариу: 24.

Бодлого D8. m, n натурал тоонууд ба $\text{ХИЕХ}(m, n) = 3$ бол $3m + 7n, 11m + 2n$ тоонуудын ерөнхий хуваагч хамгийн ихдээ ямар тоо байж болох вэ?

Хариу: 213.

Бодлого D9. Хурц өнцөгт ABC гурвалжныг багтаасан тойрог, A болон B оройгоос буусан өндрүүдтэй дахин харгалзан D, E цэгүүдэд огтлолцоно. $AB = DE$ бол $\angle ACB$ өнцгийг ол.

Хариу: 60.

Бодлого D10. Адил талт ABC гурвалжны талын урт 7860 нэгж байв. AB шулуун дээр D цэгийг B, D цэгүүд A оройн хоёр талд байх бөгөөд $AD = 2358$ байхаар авав. AC тал дээр E цэгийг $AE : EC = 3 : 7$ байхаар авав. DE шулуун BC талтай F цэгт огтлолцоно. CF хэрчмийн уртыг ол.

Хариу: 2751.

Бодлого E1. 2^n болон 5^n тоонууд ижил цифрээр эхэлдэг байх n тооны хамгийн бага утгыг ол.

Хариу: 5.

Бодлого E2. $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = x_5 - x_4 = x_6 - x_5$ байх $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ бодит тоонуудын хувьд $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ ба $x_4 + x_5 + x_6 = 32$ байв. Харилцан анхны p, q натурал тоонуудын хувьд $x_2 - x_1 = p/q$ гэж бичигддэг бол $p + q$ нийлбэрийг ол.

Хариу: 10.

Бодлого E3. $2025!! = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 2023 \times 2025$ үржвэрт 7-гийн зэрэг хэд байх вэ?

Хариу: 169.

Бодлого E4. $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн хувьд $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ ба $BC = 8$, $AD = 8\sqrt{3}$ байв. AB болон CD талуудын уртын ялгаварыг ол.

Хариу: 16.

Бодлого E5. 10-ыг нэмэхэд болон 10-аар үржихэд бүтэн квадрат болдог хамгийн бага натурал тоог ол.

Хариу: 90.

Бодлого E6. $ABCD$ трапецийн BC, AD сууриуд $BC = 17$, $AD = 30$ урттай байв. $\angle BAD$ өнцгийн дотоод биссекрисс CD талын дундаж цэгийг дайрдаг бол AB талын уртыг ол.

Хариу: 47.

Бодлого E7. ABC тэгш өнцөгт гурвалжны AB гипотенузын дундаж цэгийг D гэе. AC тал дээр E цэгийг, BC тал дээр F цэгийг $\angle EDF = 90^\circ$ байхаар авав. $AE = \sqrt{135}$ ба $BF = \sqrt{226}$ бол EF хэрчмийн уртыг ол.

Хариу: 19.

Бодлого E8. a, b, c анхны тоонуудын хувьд $a^2 + b^2 = c^3$ байдаг бол $a + b + c$ нийлбэрийн авч болох хамгийн их утгыг ол.

Хариу: 18.

Бодлого E9. $2^{p^2+3p+2} + 3^{p^2+3p+2}$ нийлбэр p -д хуваагддаг байх бүх p анхны тооны нийлбэрийг ол.

Хариу: 74.

Бодлого E10. x, y, z бодит тоонуудын хувьд $z^2 + 2xy + 3 = 0$ бол $(x - y)^2 + 2(x + y - 2z)$ илэрхийллийн авч болох хамгийн бага утгын бүхэл хэсгийг ол.

Хариу: 3.

Бодлого E11. Самбарт бичигдсэн тоог гурван натурал тооны нийлбэрт 61 янзаар задалж болдог байв (нэмэгдэхүүний байр харгалзахгүй). Самбарт бичигдсэн тоог ол.

Хариу: 27.

Бодлого E12. Цифрүүдийн нийлбэр нь 4 байдаг натурал тооны дөрвөн зэрэгтийн цифрүүдийн нийлбэр хамгийн ихдээ хэд байж болох вэ?

Хариу: 130.

Бодлого F1. Квадрат дээр нь 61-ийг нэмэхэд натурал тооны куб гардаг хамгийн бага натурал тоог ол.

Хариу: 8.

Бодлого F2. x, y эерэг тоонуудын хувьд $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ ба $\sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} = 5$ байв. $x + y$ нийлбэрийг харилцан анхны n, m натурал тоонуудын хувьд n/m хэлбэртэй бичиж болдог бол $n + m$ нийлбэрийг ол.

Хариу: 187.

Бодлого F3. Зөв 21 өнцөгтийн оройнууд дээр оройтой элдэв талт гурвалжин хэд байх вэ?

Хариу: 1134.

Бодлого F4. 6 нэгж радиустай дугуйг төвөөс нь 1 нэгж зайтай CD хөвчөөр хоёр хэсэгт хуваасан ба дугуйн бага талбайтай хэсэг бохирдсон байв. Бохирдоогүй хэсэгт хоёр орой нь CD нум дээр, хоёр орой нь CD хөвч дээр оршдог байхаар хамгийн их талбайтай тэгш өнцөгтийг багтаасан бол уг тэгш өнцөгтийн CD хөвчтэй перпендикуляр талын урт хэдэн нэгж вэ?

Хариу: 5.

Бодлого F5. 400 ба 600 хуваарьтай хоёр эерэг, үл хураагдах бутархайн нийлбэрийг үл хураагдах хэлбэртэй бичихэд хуваарь нь хамгийн багадаа хэд байж болох вэ?

Хариу: 48.

Бодлого F6. a, b бүхэл тоонууд ба $P(x)$ бүхэл коэффициенттой олон гишүүнтийн хувьд $x^{61} - 1 = (x^2 + x + 1)P(x) + ax + b$ байдаг бол $2025a + b$ нийлбэрийг ол.

Хариу: 2024.

Бодлого F7. a_1, a_2, a_3, a_4 натурал тоонуудын нийлбэр $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15$ бол

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1 + a_1} + \frac{a_3}{1 + a_1 + a_2} + \frac{a_4}{1 + a_1 + a_2 + a_3}$$

илэрхийллийн авч болох хамгийн бага утгын бүхэл хэсгийг ол.

Хариу: 4.

Бодлого F8. $\angle A = 60^\circ$, талын урт нь 2 нэгж байх $ABCD$ ромбын AB тал дээр P цэгийг, AD тал дээр Q цэгийг PQ шулуун $ABCD$ ромбд багтсан тойргийг шүргэдэг байхаар авав. $\triangle PCQ$ гурвалжны талбай $\sqrt{n}$ хэлбэртэй бичигддэг бол n тоог ол.

Нэмэлт: бодлогын өгүүлбэр алдаатай байлаа, хүлцэл өчье. Зөв нь “ $\triangle PCQ$ гурвалжны талбай харилцан анхны n, m натурал тоонуудын хувьд $\sqrt{n/m}$ хэлбэртэй бичигддэг бол $n + m$ тоог ол”.

Хариу: 43.

Бодлого F9. $ABCD$ дөрвөн өнцөгт ω тойрогт багтаж байв. ω тойргийн C, D оройг агуулдаггүй AB нумын дундажыг F гэе. FD, AC шулуунууд P цэгт, FC, BD шулуунууд Q цэгт, FC, AB шулуунууд T цэгт тус тус огтлолцоно. Хэрэв $AT = 25, TB = 20$ ба $AP : PC = 2 : 3, BQ : QD = 1 : 4$ байсан бол $6BQ^2 - QC^2$ илэрхийллийн утгыг ол.

Хариу: 450.

Бодлого F10. a, b, c натурал тоонуудын хувьд $a^3 + b^3 = c^3 + 2025$ байдаг бол c тоо хамгийн багадаа ямар утга авах вэ?

Хариу: 82.

Бодлого F11. Нийлбэр нь 21 байдаг, сүүлийн гишүүнээс бусад бүх гишүүн нь дараагийн гишүүнээ хуваадаг натурал тоон дараалал хэд байх вэ?

Хариу: 147.

Бодлого F12. Цифрүүдийн нийлбэр нь 9 байдаг натурал тооны дөрвөн зэрэгтийн цифрүүдийн нийлбэр хамгийн ихдээ хэд байж болох вэ?

Хариу: 2025.

Монголын Математикийн 61-р Олимпиадын II Давааны I шат

Аймаг/дүүргийн Олимпиад

Монголын математикийн 61-р олимпиадын II давааны I шат буюу аймаг/дүүргийн олимпиадыг 2024 оны 12-р сарын 14, 15-ны өдрүүдэд ММОХ аймаг, дүүргүүдийн боловсролын газруудтай хамтран зохион байгууллаа.

Олимпиадын сурагчдын С, D, E, F ангилал ба багш нарын S, T ангилалд нийт 17 мянга гаран оролцогч оролцож С, D ангилалд тус бүр 4 бодлого, E, F, S, T ангилалд тус бүр 6 бодлого бодож уралдлаа.

Олимпиадад I даваанаас шалгарсан сурагчид оролцсон бол багш нарын ангилалд төр болон хувийн хэвшлийн сургуульд ажиллаж байгаа үндсэн багш нар оролцлоо.

Олимпиадын сэдэв, дүгнэх аргачлалыг ММОХ-ноос томилогдсон бодлогын комисс бэлтгэн аймаг, дүүргийн зохион байгуулах комиссын ахлагч нарын имэйл хаягаар хүргүүлэв. Засалтыг тухайн аймаг/дүүргийн комисс зохион байгуулав.

Бодлогууд

С ангилал (5-6 анги)

Бодлого С1. Урсдаг шатаар байрандаа зогсоод буухад 54 секунд зарцуулдаг. Баяраа урсдаг шатаар 1 м/с хурдтай доошоо алхаж буухад 36 секунд зарцуулав. Баяраа урсдаг шатаар 2 м/с хурдтай доошоо алхвал хэдэн секундэд буух вэ?

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого С2. Дөрвөн оронтой тооны $ABCD$ бүх цифр ялгаатай бөгөөд тэг биш байдаг ба $\frac{CD}{AB}$, $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{B}$ бутархайнууд бүхэл байдаг бол энэ тоог *сайн тоо* гээ. Жишээлбэл 1284 гэсэн дөрвөн оронтой тооны бүх цифр ялгаатай, тэг биш ба $\frac{84}{12} = 7$, $\frac{8}{1} = 8$, $\frac{4}{2} = 2$ бүхэл тул 1284 сайн тоо. Бүх сайн тоог ол. Энд сайн тоо өөр байхгүй гэж батлах шаардлагагүй.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого С3. 4×4 хүснэгт 25 ширхэг зангилааны цэгтэй. Хүснэгтийн аль нэг нүдийг будахад тэр нүдний орой болдог дөрвөн зангилааны цэг будагддаг бол бүх зангилааны цэг ядаж нэг будагдсан байхаар хүснэгтийн нүднүүдийг хэдэн янзаар будаж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого С4. Есөн ширхэг ялгаатай натурал тооны нийлбэр 111 байв. Эдгээр дунд нийлбэр нь ядаж 61 байдаг дөрвөн ялгаатай тоо олдоно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Д ангилал (7-8 анги)

Бодлого D1. 1-р машин A хотоос, 2-р машин B хотоос нэгэн зэрэг өөд өөдөөсөө угталцан гарав. Машинууд тогтмол хурдтай явсан ба A , B хотуудад очингуутаа шууд буцаад хөдөлж байв. 1-р машин 2-р машинаас 1.25 дахин их хурдтай байв. Хоёр машин 2 дахиа уулзсан цэгээс 3 дахиа уулзсан цэг хүртлэх зай 56 км байсан бол A , B хотуудын хоорондох зайг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого D2.

(1) $a^3 = b^3 + 61$ байдаг бүх натурал тоон (a, b) хосыг ол.

(2) $a^5 = b^5 + 61$ байдаг бүх натурал тоон (a, b) хосыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого D3. BC , AD талууд нь тэнцүү урттай байдаг $ABCD$ дөрвөн өнцөгт өгөгджээ. $BC = CE = DE$ байдаг E цэгийг E болон A цэгүүд CD шулууны хоёр өөр талд оршиж байхаар авав. Хэрэв $\angle BAE + \angle CBE = 90^\circ$ байсан бол $\angle ABE + \angle DAE = 90^\circ$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого D4. 45×45 хүснэгтэд 1-ээс 2025 хүртэлх тоог дараалсан хоёр тоо хөрш нүдэнд байрладаг байхаар бичив. Тэгвэл $1^2, 2^2, \dots, 45^2$ тоонууд нэг мөрөнд бичигдсэн байх боломжтой юу? Энд ерөнхий талтай хоёр нүдийг хөрш гэнэ.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

Е ангилал (9–10 анги)

Бодлого Е1. 4×5 хүснэгтийн нүднүүдийг уг хүснэгтийн аль ч 2×2 дэд хүснэгтэд яг нэг будагдсан нүд байхаар хэчнээн янзаар будаж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодлого Е2. $x^4 + x^3 + x^2 + x = y^6 + 61$ тэгшитгэл бүхэл тоон шийдгүй гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого Е3. $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ байдаг $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн диагоналууд P цэгт огтлолцоно. P цэгийг дайрсан AD талтай параллел шулуун BC шулуунтай K цэгт, P цэгийг дайрсан AB талтай параллел шулуун DC шулуунтай L цэгт огтлолцоно. KLC гурвалжныг багтаасан тойргийг ω гэе. AC шулуун ω тойрогтой дахин E цэгт огтлолцоно. KL шулуун AB шулуунтай M цэгт, AD шулуунтай N цэгт огтлолцоно. ω тойрог EM шулуунтай дахин Q цэгт, EN шулуунтай дахин R цэгт огтлолцдог бол $QR = KL$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого Е4. BC, AD талууд нь тэнцүү урттай байдаг $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгт өгөгджээ. $BC = CE = DE$ байдаг E цэгийг E болон A цэгүүд CD шулууны хоёр өөр талд оршиж байхаар авав. Хэрэв $\angle BAE + \angle CBE = 90^\circ$ байсан бол $\angle ABE + \angle DAE = 90^\circ$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого Е5. $P(X) = X^5 + 61X + 2025$ олон гишүүнтийг бүхэл коэффициенттой хоёр тогтмол биш олон гишүүнтийн үржвэрт тавьж болохгүй гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого Е6. 2024×2024 хэмжээтэй хүснэгтийн нүднүүдийг 1×2 болон 2×1 хэмжээтэй доминоор давхардалгүй хучсан ба сурагч хүснэгтийн аль нэг нүдэнд робот тавив. Робот доминогийн нэг нүднээс нөгөө нүдрүү шилжих ба шилжсэн чиглэлд нь дараагийн домино байвал тэр домино руу шилжинэ, дараагийн домино байхгүй бол хөдөлгөөнөө зогсооно. Робот хэсэг хугацааны дараа анх эхэлсэн байрандаа ирж чадах уу?

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

Ү ангилал (11–12 анги)

Бодлого F1. $(x^2 - 3)^2 = x + 3$ тэгшитгэлийг авч үзье.

(1) Тэгшитгэлийн бүхэл шийдүүдийг ол.

(2) Тэгшитгэлийн бүхэл биш шийдүүдийн үржвэрийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого F2. $n \geq 2$ гэе. $4 \times n$ хүснэгтийн нүднүүдийг уг хүснэгтийн аль ч 2×2 дэд хүснэгтэд яг нэг будагдсан нүд байхаар хэчнээн янзаар будаж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодлого F3. Натурал тоон олонлогийг $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ гэж тэмдэглэе.

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ функцийн хувьд $f(1) = 1$ ба $n \geq 2$ үед $f(f(n)) = 3f(n) - 2n$ ба $\frac{n-1}{f(n)-n}$ бүхэл байдаг бол $f(2024)$ утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

Бодлого F4. $n \geq 2$ ба $a^n = b^n + 61$ байдаг бүх бүхэл тоон (n, a, b) гурвалыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого F5. C оройн өнцөг нь мохоо байдаг, тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгт өгөгдөв. $BCDH$ параллелограмм байх H цэгийг авав. AH шулуун CD шулуунтай M цэгт, BC шулуунтай N цэгт огтлолцоно. H цэгийг дайрсан AC шулуунтай параллел шулуун, CD шулуунтай K цэгт, BC шулуунтай L цэгт огтлолцоно. Хэрэв K, L, M, N цэгүүд нэг тойрог дээр оршиж байвал $\angle ABC = 90^\circ$ байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого F6. 2024×2024 хэмжээтэй хүснэгтийн нүднүүдийг 1×2 болон 2×1 хэмжээтэй доминогоор давхардалгүй хучсан ба сурагч хүснэгтийн аль нэг нүдэнд робот тавив. Робот доминогийн нэг нүднээс нөгөө нүдрүү шилжих ба шилжсэн чиглэлд нь дараагийн домино байвал тэр домино руу шилжинэ, дараагийн домино байхгүй бол хөдөлгөөнөө зогсооно. Робот хэсэг хугацааны дараа анх эхэлсэн байрандаа ирж чадах уу?

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

S ангилал (Бага ангийн багш)

Бодлого S1. Хэсэг хүмүүсийг A цэгээс B цэг рүү автобусаар зөөх хэрэгтэй байсан ба автобусанд тэдний зөвхөн хагас нь багтаж байв. Автобус эхний хэсэг хүмүүсийг суулган хөдөлсөн ба энэ үед үлдсэн хүмүүс зам дагуу алхаж эхлэв. Автобус замын дагуу нэгэн газар хүмүүсээ буулгаад буцаж хөдлөв. Буусан хүмүүс цааш алхаж эхлэв. Автобус үлдсэн хэсгийн хүмүүстэй таарч тэдгээрийг суулган B цэгийн зүг хөдлөв. Автобус болон явган алхсан хүмүүс нэгэн зэрэг B цэгт хүрчээ. Ингэхэд нийт хүмүүсийг 2 автобусаар зэрэг зөөх хугацаанаас 2 дахин их хугацаа зарцуулав. Явган хүмүүс нэгэн жигд хурдтай явсан ба хурд нь автобусны хурднаас 12 дахин бага байв. Тэгвэл эхний хэсэг хүмүүсийн автобусанд зарцуулсан хугацааг, ахлахад зарцуулсан хугацаанд харьцуулсан харьцааг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого S2. 3×61 хүснэгтийн нүднүүдийг уг хүснэгтийн аль ч 2×2 дэд хүснэгтэд яг нэг будагдсан нүд байхаар хэчнээн янзаар будаж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодлого S3. $(n+1)!(n+2)! = (2n)!$ байдаг бүх натурал n тоог ол. Энд $m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m$.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого S4. ABC зөв гурвалжны тал a м урттай. A оройгоос 3 м/с хурдтай X цэг, B оройгоос 4 м/с хурдтай Y цэгүүд C оройг чиглэн нэгэн зэрэг гарав. Ямар хугацааны дараа XY зай ABC гурвалжны өндөртэй тэнцүү болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого S5. $\alpha = \sqrt{60} + \sqrt{61}$ гээ.

(1) α иррационал гэж батал.

(2) α тоо язгуур нь болдог бүхэл коэффициенттэй олон гишүүнтийн жишээ нэгийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодлого S6. 8×8 шатрын хөлөг дээр аль ч хоёр нь бие биенээ идэхгүй байхаар гурван өөр тэмээг хэчнээн янзаар байрлуулж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Т ангилал (Дунд ангийн багш)

Бодлого Т1. A, B эерэг тоонуудын хувьд $A \star B = \frac{A}{AB+1}$ гэж тодорхойлъё.

(1) $(A \star B) \star C = A \star (B + C)$ гэж батал.

(2) $((\dots((1 \star 2) \star 3) \star 4) \dots) \star 59) \star 60) \star 61$ илэрхийллийн утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого Т2. a, b гэж эхлээд өмнөх хоёр үгийг нь залгаж бичих замаар байгуулсан $a, b, ab, bab, abbab, bababab, \dots$ үгсийн дарааллын 3-р гишүүнээс хойших аль ч гишүүний хамгийн урд талын хоёр үсгийг дарахад палиндром үг үүснэ гэж батал. Энд ард, урдаасаа яг ижил уншигддаг үгийг *палиндром* үг гэж нэрлэдэг. Жишээ нь $ababa$ палиндром, $abab$ палиндром биш.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого Т3. $a! \cdot (a+1)! = b!$ байдаг бүх натурал тоон (a, b) хосыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого Т4. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ нөхцөл биелдэг α, β, γ өнцгүүдтэй гүдгэр биш өнцөгт гурвалжны хувьд

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} + \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \geq 2$$

болохыг баталж, тэнцэлдээ хүрэх нөхцөлийг ол.

Бодлого Т5. C оройн өнцөг нь мохоо байдаг, тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгт өгөгдөв. $BCDH$ параллелограмм байх H цэгийг авав. AH шулуун CD шулуунтай M цэгт, BC шулуунтай N цэгт огтлолцоно. H цэгийг дайрсан AC шулуунтай параллел шулуун, CD шулуунтай K цэгт, BC шулуунтай L цэгт огтлолцоно. Хэрэв K, L, M, N цэгүүд нэг тойрог дээр оршиж байвал $\angle ABC = 90^\circ$ байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого Т6. $P(X) = X^8 + 61X + 2025$ олон гишүүнтийг бүхэл коэффициенттой хоёр тогтмол биш олон гишүүнтийн үржвэрт тавьж болохгүй гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолтууд

С ангилал (5-6 анги)

Бодлого С1. Урсдаг шатаар байрандаа зогсоод буухад 54 секунд зарцуулдаг. Баяраа урсдаг шатаар 1 м/с хурдтай доошоо алхаж буухад 36 секунд зарцуулав. Баяраа урсдаг шатаар 2 м/с хурдтай доошоо алхвал хэдэн секундэд буух вэ?

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. 36 секундын дараа урсдаг шат нийт замынхаа ямар хэсгийг туулсан байхыг олъя:

$36 : 54 = 2 : 3$. Иймд нийт замынхаа $\frac{1}{3}$ ийг яваагүй үлдсэн гэсэн үг. Энэ зөрөө бол Баяраагийн 1 м/с хурдтайгаар 36 сек доош алхсан зам гарна. Өөрөөр хэлбэл нийт замын $\frac{1}{3}$ нь $1 \times 36 = 36$ м болох ба замын урт $3 \times 36 = 108$ м болно. $108 : 54 = 2$ урсдаг шатны хурд. Иймд 2 дахин их хурдтай доошлох бодит хурд нь $2 + 2 \times 1 = 4$ м/с гарах ба $108 : 4 = 27$ сек зарцуулна.

Бодлого С2. Дөрвөн оронтой тооны $ABCD$ бүх цифр ялгаатай бөгөөд тэг биш байдаг ба $\frac{CD}{AB}$, $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{B}$ бутархайнууд бүхэл байдаг бол энэ тоог *сайн тоо* гэе. Жишээлбэл 1284 гэсэн дөрвөн оронтой тооны бүх цифр ялгаатай, тэг биш ба $\frac{84}{12} = 7$, $\frac{8}{1} = 8$, $\frac{4}{2} = 2$ бүхэл тул 1284 сайн тоо. Бүх сайн тоог ол. Энд сайн тоо өөр байхгүй гэж батлах шаардлагагүй.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. Хариу: 1236, 1248, 1284, 1296, 1326, 1428, 1498, 2163, 2184, 2346, 2369, 3162, 3264, 3296, 3468, 4182, 4386.

Эдгээр 17 тоо сайн тоо болохыг шалгах хэцүү биш.

Бодлого С3. 4×4 хүснэгт 25 ширхэг зангилааны цэгтэй. Хүснэгтийн аль нэг нүдийг будахад тэр нүдний орой болдог дөрвөн зангилааны цэг будагддаг бол бүх зангилааны цэг ядаж нэг будагдсан байхаар хүснэгтийн нүднүүдийг хэдэн янзаар будаж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. Хариу: 1215.

Нөхцөл хангах будалт авъя. Булангийн цэг яг нэг нүдэнд харъяалагдах тул тэр нүд будагдах ёстой. Талын дундаж цэг хоёр нүдэнд харъяалагдах тул эдгээрийн ядаж нэг будагдах ёстой. Голын цэгийг тойрсон дөрвөн нүдний ядаж нэг будагдах ёстой.

Нөгөө талаас ямар ч ийм будалтын хувьд бүх зангилааны цэг будагдахыг шалгах амархан.

Иймд нийт нөхцөл хангах будалтын тоо $(2^2 - 1)^4 (2^4 - 1) = 1215$ байна.

Бодлого С4. Есөн ширхэг ялгаатай натурал тооны нийлбэр 111 байв. Эдгээр дунд нийлбэр нь ядаж 61 байдаг дөрвөн ялгаатай тоо олдоно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. Тоонуудаа $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_8 < a_9$ гэж эрэмбэлъе.

Одоо $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \geq 61$ гэж баталъя.

$a_6 \geq 14$ бол $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \geq 14 + 15 + 16 + 17 = 62 > 61$ байна.

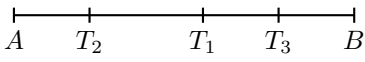
$a_6 \leq 13$ бол $a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 \leq 12 + 11 + 10 + 9 + 8 = 50$ гэдгээс $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 111 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) \geq 111 - 50 = 61$ байна.

Д ангилал (7-8 анги)

Бодлого D1. 1-р машин A хотоос, 2-р машин B хотоос нэгэн зэрэг өөд өөдөөсөө угталцан гарав. Машиныуд тогтмол хурдтай явсан ба A , B хотуудад очингуутаа шууд буцаад хөдөлж байв. 1-р машин 2-р машинаас 1.25 дахин их хурдтай байв. Хоёр машин 2 дахиа уулзсан цэгээс 3 дахиа уулзсан цэг хүртлэх зай 56 км байсан бол A , B хотуудын хоорондох зайг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. T_i -аар нь i дахиа уулзсан цэгүүдийг тэмдэглэе.



Хоёр машины хурдны харьцаа $5 : 4$ гарна. $AB = S$ гэвэл $AT_1 = \frac{5}{9}S$, $T_1B = \frac{4}{9}S$ болно. $AT_2 = x$ гэвэл 2 дахиа уулзах хүртлэх замын харьцаа

$$(S + x) : (2S - x) = 4 : 5$$

болно. Эндээс $9x = 3S$, $x = \frac{1}{3}S$ гэж гарна. $BT_3 = y$ гэвэл 3 дахиа уулзах хүртлэх замын харьцаа

$$(2S + y) : (3S - y) = 4 : 5$$

болно. Эндээс $9y = 2S$, $y = \frac{2}{9}S$ гэж гарна.

$$T_2T_3 = S - x - y = S - \frac{2}{9}S - \frac{1}{3}S = \frac{4}{9}S = 56$$

Эндээс $S = 126$ км.

Бодлого D2.

(1) $a^3 = b^3 + 61$ байдаг бүх натурал тоон (a, b) хосыг ол.

(2) $a^5 = b^5 + 61$ байдаг бүх натурал тоон (a, b) хосыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Хариу: (1) $(a, b) = (5, 4)$ (2) байхгүй.

(1) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = 61$ гэдгээс $a - b = 1$ ба $(b + 1)^3 - b^3 = 3b(b + 1) + 1 = 61$ болно. Эндээс $b(b + 1) = 20$ буюу $b = 4$, $a = 5$ болно. Өөр шийдгүй.

(2) $(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = 61$ гэдгээс $a - b = 1$ ба $(b + 1)^5 - b^5 = 5b^4 + 10b^3 + 10b^2 + 5b + 1 = 61$ болно. Эндээс $b(b + 1)(b(b + 1) + 1) = 12$ буюу $b(b + 1) = 3$ болох тул шийдгүй.

Дараалсан зэрэгтийн өсөлтөд үнэлгээ хийсэн бодолтын хувьд “дараалсан хоёр $n \geq 2$ зэрэгтийн ялгавар эрс өснө” гэсэн өгүүлбэрийг баталгаагүй ашиглаж болно. Харин энийг хэлэлгүй дүгнэлт гаргасан бодолтод $n = 3$ үед жижиг алдаа -1 оноо, $n = 5$ үед дунд хэмжээний алдаа -2 гэж оноо хасна.

Бодлого D3. BC , AD талууд нь тэнцүү урттай байдаг $ABCD$ дөрвөн өнцөгт өгөгджээ. $BC = CE = DE$ байдаг E цэгийг E болон A цэгүүд CD шулууны хоёр өөр талд оршиж байхаар авав. Хэрэв $\angle BAE + \angle CBE = 90^\circ$ байсан бол $\angle ABE + \angle DAE = 90^\circ$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. Дараах хоёр тохиолдолд бодъё.

- 1) C цэг уг гурвалжин дотор оршиж байгаа гэж үзье.

Өгсөн нөхцлөөс BCE адил хажуут гурвалжин болох ба суурийн өнцөг нь $90^\circ - \angle BAE$, оройн өнцөг нь $\angle BCE = 2\angle BAE$ болно. Гурвалжныг багтаасан тойргийн төвийн чанараар C цэг ABE гурвалжныг багтаасан тойргийн төв болно. Иймд $AC = CE = AD = DE$ гарах тул D цэг ABE гурвалжны гадна талд оршино, эсвэл $D \equiv C$ байна. D цэг ABE гурвалжны гадна талд оршиж байх үед $\angle ABE + \angle DAE = 90^\circ$ болохыг хялбархан харж болно.

- 2) C цэг ABE гурвалжин дотор оршихгүй үед бодъё.

ABE гурвалжныг багтаасан тойргийн төвийг O гэе. $\angle BAE = \alpha$ гэвэл бодлогын нөхцлөөс $\alpha \leq 90^\circ$ гэж гарах ба $\angle BOE = 2\alpha$ болно. Эндээс $\angle BEO = (180^\circ - 2\alpha)/2 = 90^\circ - \alpha$. Өгсөн нөхцлөөс $\angle CBE = 90^\circ - \alpha$ болох тул $\angle BEO = \angle CBE$ гарна.

Иймээс BCE , BOE гэсэн адил хажуут гурвалжнуудын суурийн өнцгүүд нь тэнцүү учир Энэ 2 гурвалжин төсөөтэй. Мөн ерөнхий суурьтай учир $\triangle BCE = \triangle BOE$ болно. Иймд

$$BC = CE = BO = AO = OE = ED = AD$$

болно. Иймээс D цэг эсвэл O цэгтэй давхцана, эсвэл ABE гурвалжны гадна талд оршино.

Хэрэв D цэг ABE гурвалжны гадна талд оршиж байвал $AOED$ ромбо болно. Хэрэв $\angle ABE = \beta$ гэвэл $\angle DAE = \angle OAE = 90^\circ - \beta$ болж $\angle DAE + \angle ABE = 90^\circ$ гарна.

Хэрэв $D \equiv O$ бол $\angle ABE + \angle DAE = 90^\circ$ болохыг хялбархан харж болно.

Бодлого D4. 45×45 хүснэгтэд 1-ээс 2025 хүртэлх тоог дараалсан хоёр тоо хөрш нүдэнд байрладаг байхаар бичив. Тэгвэл $1^2, 2^2, \dots, 45^2$ тоонууд нэг мөрөнд бичигдсэн байх боломжтой юу? Энд ерөнхий талтай хоёр нүдийг хөрш гэнэ.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

Бодолт. Хариу: Болохгүй.

Эсрэгээс нь $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 45^2$ тоонууд k -р мөрөнд байрладаг гэвэл уг мөрөнд квадрат биш тоо байрлахгүй. Иймд дараалсан хоёр квадратын хооронд оршин натурал тоонууд бүгдээрээ k -р мөрийн нэг талд хамтдаа орно. Түүнчлэн $a^2 - 1, a^2 + 1$ тоонууд бичигдсэн нүднүүд a^2 тоо бичигдсэн нүдтэй хөрш боловч k -р мөрөнд байж болохгүй тул A ба B хэсгүүдэд нэг, нэгээрээ орох ёстой.

Хүснэгтийн k -р мөрийн дээд хэсгийг A , доод хэсгийг B гэвэл тэгш хэмтэй тул A хэсэгт $(1^2 + 1, 2^2 - 1), (3^2 + 1, 3^2 + 2, \dots, 4^2 - 1), (5^2 + 1, 5^2 + 2, \dots, 6^2 - 1), \dots, (43^2 + 1, 43^2 + 2, \dots, 44^2 - 1)$ тоонууд; B хэсэгт $(2^2 + 1, 2^2 + 2, \dots, 3^2 - 1), (4^2 + 1, 4^2 + 2, \dots, 5^2 - 1), (6^2 + 1, 6^2 + 2, \dots, 7^2 - 1), \dots, (44^2 + 1, 44^2 + 2, \dots, 45^2 - 1)$ тоонууд ордог гэж үзэж болно.

Нөгөө талаас A ба B хэсгүүд нь тус бүр 45 баганатай хүснэгтүүд тул бичигдсэн тоонуудынх нь тоо 45-д хуваагдах ёстой. Гэтэл энэ нь A хэсэгт

$$2 + 6 + \dots + (44^2 - 1 - 43^2) = 2 + 6 + \dots + 86 \equiv 23 \not\equiv 0 \pmod{45}$$

ширхэг тоо бичигдсэн гэдэгтэй зөрчилдөж байна. Иймд бодлогын нөхцөлийг хангаж байхаар тоонуудыг бичих боломжгүй.

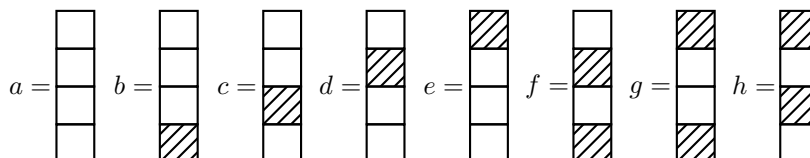
Е ангилал (9-10 анги)

Бодлого Е1. 4×5 хүснэгтийн нүднүүдийг уг хүснэгтийн аль ч 2×2 дэд хүснэгтэд яг нэг будагдсан нүд байхаар хэчнээн янзаар будаж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодолт. Хариу: 16.

Уг хүснэгтийн баганууд



байна. Эдгээрээс a багана зөвхөн f, h -тэй хөрш байж болох тул эдгээр баганууд оролцсон зөвхөн $aYaYa$, $YaYaY$ хэлбэрийн будалт байна. Энд Y нь f, h -ийн аль нь ч байж болох тул нийт $2^2 + 2^3 = 12$ будалт байна.

b нь зөвхөн d -тэй, c нь зөвхөн e -тэй хөрш байж болно. Ийм будалт $2 + 2 = 4$ байна. g оролцсон будалт байхгүй. Иймд нөхцөл хангах нийт 16 будалт байна.

Бодлого Е2. $x^4 + x^3 + x^2 + x = y^6 + 61$ тэгшитгэл бүхэл тоон шийдгүй гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. (x, y) шийд гэе. Фермагийн бага теоремоор $y^6 + 61 \equiv 5, 6 \pmod{7}$ байна. Нөгөө талаас $x^4 + x^3 + x^2 + x = x(x+1)(x^2+1) \equiv 0, 1, 2, 3, 4 \pmod{7}$ болохыг шалгах төвөггүй.

Бодлого Е3. $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ байдаг $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн диагоналиуд P цэгт огтлолцоно. P цэгийг дайрсан AD талтай параллел шулуун BC шулуунтай K цэгт, P цэгийг дайрсан AB талтай параллел шулуун DC шулуунтай L цэгт огтлолцоно. KLC гурвалжныг багтаасан тойргийг ω гэе. AC шулуун ω тойрогтой дахин E цэгт огтлолцоно. KL шулуун AB шулуунтай M цэгт, AD шулуунтай N цэгт огтлолцоно. ω тойрог EM шулуунтай дахин Q цэгт, EN шулуунтай дахин R цэгт огтлолцдог бол $QR = KL$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. C цэг PKL гурвалжны хоёр өндрийн огтлолцлын цэг тул $PE \perp MN$. CKL гурвалжны ортотөв P , дараах Леммээр $PF = FE$ байна.

Лемм. ABC гурвалжны ортотөв H , AD өндөр байг. AD шулуун багтаасан тойрогтой дахин E цэгт огтлолцдог бол $ED = DH$ байна.

$$\angle DBC = \angle NAC = \angle KPF = \angle KEF$$

гарч байгаа учраас $BPKE$ тойрогт багтана. Үүн дээр $PK = EK$ гэдгийг тооцвол $\angle DBC = \angle CBE$ болно. $CD \cap AB = S$, $BC \cap AD = T$ гэвэл:

Лемм. E цэг AST гурвалжны A оройгоос буусан өндрийн суурь болно.

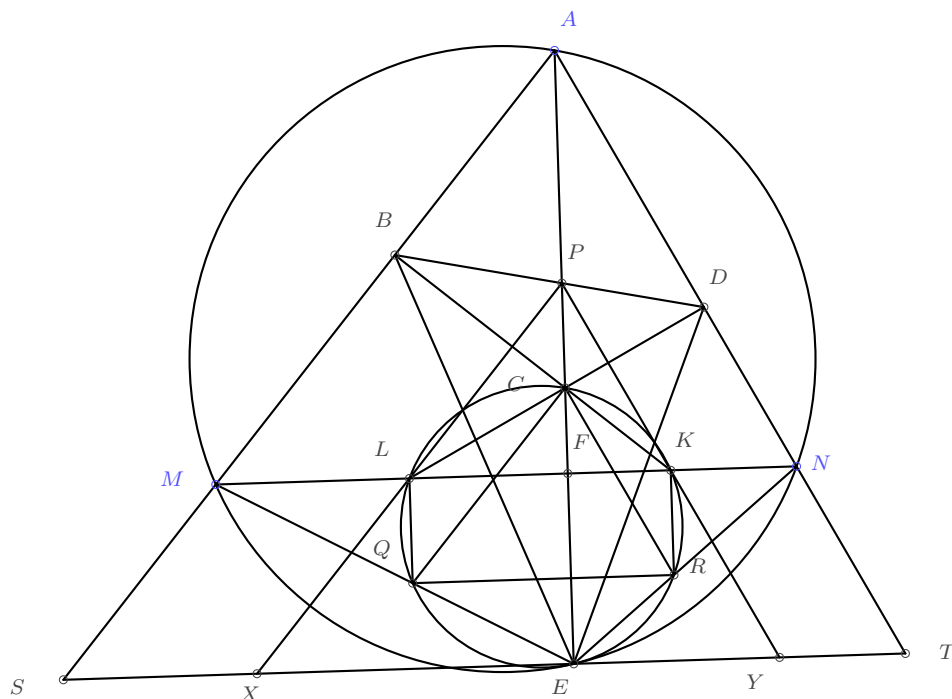
Баталгаа. $ST \cap AE = E'$ гэе. B, D, E' цэгүүд нь өндрийн сууриуд учраас $\angle DBC = \angle CBE'$ байна. $\angle DBC = \angle CBE = \angle CBE'$ $E \equiv E'$. $\square$

$PL \cap ST = X$, $PK \cap ST = Y$ гэе. $SM LX$ параллелограмм учир $SM = XL = LP$. Мөн $SM \parallel LP$ тул $SMPL$ параллелограмм болно. Иймд $\angle MPK = 90^\circ$ болно. Үүнтэй төстэйгээр $LPN = 90^\circ$

болох ба $\angle MPL = \angle NPK$ гэж мөрдөнө. Иймээс $\angle QEL = \angle REK$ болох ба QL, KR нумууд хоорондоо тэнцүү. Тэгвэл $LK \parallel QR$.

$$\triangle QRE \sim \triangle MNE = \triangle MNP \sim \triangle LKC$$

Иймд $\angle QRE = \angle CKL$, $LC = QE$ болох тул $LQ \parallel CE$ болж $LKRQ$ тэгш өнцөгт болно.



Бодлого Е4. BC, AD талууд нь тэнцүү урттай байдаг $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгт өгөгджээ. $BC = CE = DE$ байдаг E цэгийг E болон A цэгүүд CD шулууны хоёр өөр талд оршиж байхаар авав. Хэрэв $\angle BAE + \angle CBE = 90^\circ$ байсан бол $\angle ABE + \angle DAE = 90^\circ$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. **D3** бодлогын бодолтыг харна уу.

Бодлого Е5. $P(X) = X^5 + 61X + 2025$ олон гишүүнтийг бүхэл коэффициенттой хоёр тогтмол биш олон гишүүнтийн үржвэрт тавьж болохгүй гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. n бүхэл үед $P(n)$ сондгой тул $P(X)$ бүхэл язгуургүй. Одоо $a, \dots, e$ бүхэл тоонуудын хувьд $P(X) = (X^2 + aX + b)(X^3 + cX^2 + dX + e)$ гэж задардаг гэе.

Эндээс $a + c = 0$, $b + ac + d = 0$, $bc + ad + e = 0$, $bd + ae = 61$, $be = 2025$ болно.

Иймд $c = -a$, $d = a^2 - b$, $e = a(2b - a^2)$ ба $ab(2b - a^2) = 2025 = 3^4 \cdot 5^2$ болно. Мөн $ab \mid 2025$ ба $(a, b) \mid 61$ гэдгээс $(a, b) = (a, 2b - a^2) = (b, 2b - a^2) = 1$ байна. Иймд $\{a, b, 2b - a^2\} = \{\pm 1, \pm 25, \pm 81\}$ байх ёстой боловч энэ нь боломжгүй:

$$\begin{array}{lll} \pm 50 + 1^2 \neq \pm 81 & \pm 2 + 25^2 \neq \pm 81 & \pm 2 + 81^2 \neq \pm 25 \\ \pm 162 + 1^2 \neq \pm 25 & \pm 162 + 25^2 \neq \pm 1 & \pm 50 + 81^2 \neq \pm 1 \end{array}$$

Бодлого Е6. 2024×2024 хэмжээтэй хүснэгтийн нүднүүдийг 1×2 болон 2×1 хэмжээтэй доминоор давхардалгүй хучсан ба сурагч хүснэгтийн аль нэг нүдэнд робот тавив. Робот доминогийн нэг нүднээс нөгөө нүдрүү шилжих ба шилжсэн чиглэлд нь дараагийн домино байвал тэр домино руу шилжинэ, дараагийн домино байхгүй бол хөдөлгөөнөө зогсооно. Робот хэсэг хугацааны дараа анх эхэлсэн байрандаа ирж чадах уу?

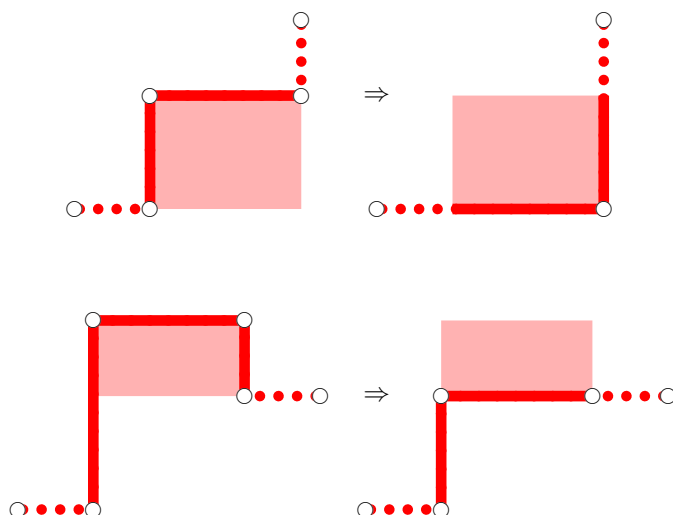
(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

Бодолт. Хариу: Чадахгүй.

Аль ч дараалсан хоёр нь хөрш нүднүүд байдаг, ялгаатай нүднүүдийн дарааллыг зам гэе. Замын эхлэл төгсгөл хоёр давхацдаг бол цикл гэе.

Лемм. Талуудынх нь урт сондгой байдаг циклийн талбай сондгой байна.

Баталгаа. Хэрвээ цикл маань тэгш өнцөгт бол талуудын урт нь сондгой тул талбай нь сондгой байна. Хэрвээ тэгш өнцөгт биш бол дараах хоёр үйлдлийн тусламжтайгаар сондгой талуудтай тэгш өнцөгтөд шилжүүлж болох ба талбайн тэгш сондгойг хадгална. Учир нь талын уртууд сондгой ба хүрээ нэгж нүднүүдээс тогтох тул будагдсан дүрсийн ядаж нэг талын урт тэгш ба шинээр үүсэх дүрсийн талуудын урт сондгой байна. $\square$



Лемм. Робот өгсөн үйлдлээр цикл үүсгэдэг бол циклийн талбай сондгой байна.

Баталгаа. Роботын хөдөлгөөнөөр үүсэх дүрсийн талууд сондгой байх нь илэрхий юм. $\square$

Одоо үндсэн бодлогодоо оръё. Эсрэгээс нь робот анхны байрандаа ирдэг гэвэл түүний зам цикл үүсгэнэ. Энэ цикл доторх дүрсийг 2×1 , 1×2 доминонуудаар хучиж болох тул талбай нь тэгш байх ёстой болж сүүлийн леммд зөрчиж байна. Иймд робот анхны байрандаа ирэх боломжгүй юм.

F ангилал (11-12 анги)**Бодлого F1.** $(x^2 - 3)^2 = x + 3$ тэгшитгэлийг авч үзье.

- (1) Тэгшитгэлийн бүхэл шийдүүдийг ол.
- (2) Тэгшитгэлийн бүхэл биш шийдүүдийн үржвэрийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Хариу: (1) 1, -2 (2) -3.

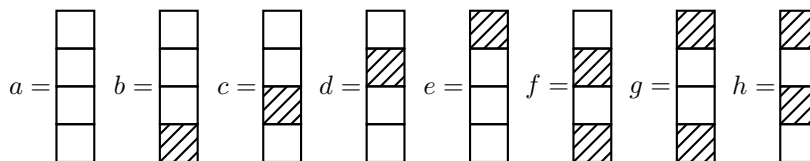
- (1) $x^4 - 6x^2 - x + 6 = x(x^3 - 1) - 6(x^2 - 1) = (x - 1)(x^3 + x^2 - 5x - 6)$ гэж задарна. Бүхэл язгуурын теорем ашиглан $x^3 + x^2 - 5x - 6 = 0$ тэгшитгэлийн шийд $x = -2$ болохыг олно.
- (2) $x^3 + x^2 - 5x - 6 = (x + 2)(x^2 - x - 3)$ гэж бичиж болно. Эндээс Виетийн теоремоор өгсөн тэгшигэлийн бүхэл биш шийдүүдийн үржвэр -3 байна.

Бодлого F2. $n \geq 2$ гэе. $4 \times n$ хүснэгтийн нүднүүдийг уг хүснэгтийн аль ч 2×2 дэд хүснэгтэд яг нэг будагдсан нүд байхаар хэчнээн янзаар будаж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодолт. Хариу: $2^{\lfloor n/2 \rfloor} + 2^{\lceil n/2 \rceil} + 4$.

Уг хүснэгтийн баганууд



байна. Эдгээрээс a багана зөвхөн f, h -тэй хөрш байж болох тул эдгээр баганууд оролцсон зөвхөн $aYaYa \dots, YaYaY \dots$ хэлбэрийн будалт байна. Энд Y нь f, h -ийн аль нь ч байж болох тул ийм будалт нийт $2^{\lfloor n/2 \rfloor} + 2^{\lceil n/2 \rceil}$ ширхэг байна.

b нь зөвхөн d -тэй, c нь зөвхөн e -тэй хөрш байж болно. Ийм будалтын тоо $2 + 2 = 4$ байна.

g оролцсон будалт байхгүй.

Иймд нөхцөл хангах нийт $2^{\lfloor n/2 \rfloor} + 2^{\lceil n/2 \rceil} + 4$ будалт байна. Тухайлбал $n = 2m$ үед $2^{m+1} + 4$ будалт, $n = 2m + 1$ үед $3 \cdot 2^m + 4$ будалт байна.

Бодлого F3. Натурал тоон олонлогийг $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ гэж тэмдэглэе.

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ функцийн хувьд $f(1) = 1$ ба $n \geq 2$ үед $f(f(n)) = 3f(n) - 2n$ ба $\frac{n-1}{f(n)-n}$ бүхэл байдаг бол $f(2024)$ утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

Бодолт. Хариу: $f(2024) = 4047$.

$f(n) = f(m)$ бол $2n = 3f(n) - f(f(n)) = 3f(m) - f(f(m)) = 2m$ байх тул f инъектив байна.

Одоо хүчит индукцээр дурын $n \geq 1$ хувьд $f(n) = 2n - 1$ гэж харуулъя. $n = 1$ үед үнэн. $n \geq 2$ гэе. $f(n) - n \mid n - 1$ гэдгээс $f(n) \leq 2n - 1$ байх ба $2(f(n) - n) = f(f(n)) - f(n) \mid f(n) - 1$ гэдгээс $f(n)$ сондгой байна. Иймд $f(n) = 2m - 1$ ба $1 \leq m \leq n$ байна. $m < n$ бол индукцийн алхмаар $f(m) = 2m - 1$ байх тул f инъектив гэдэгт зөрчинө. Иймд $m = n$ буюу $f(n) = 2n - 1$ байна.

Бодлого F4. $n \geq 2$ ба $a^n = b^n + 61$ байдаг бүх бүхэл тоон (n, a, b) гурвалыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Хариу: $(n, a, b) = (2, 31, \pm 30), (2, -31, \pm 30), (3, 5, 4), (3, -4, -5)$.

Дээрх хариу шийд болох нь илт тул өөр шийдгүй гэж харуулъя.

Эхлээд $a, b \geq 0$ гэе. 61 анхны тоо тул $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = 61$ гэдгээс $a = b + 1$ ба $(b + 1)^n - b^n = 61$ болно.

$n = 2$ үед $(b + 1)^2 - b^2 = 2b + 1 = 61$ гэдгээс $b = 30, a = 31$ болно.

$n = 3$ үед $(b + 1)^3 - b^3 = 3b(b + 1) + 1 = 61$ гэдгээс $b = 4, a = 5$ болно.

$n \geq 4$ үед шийдгүй гэж харуулъя. $b = 0, 1$ үед илт шийдгүй ба $b \geq 2$ үед

$$(b + 1)^n - b^n = \sum_{k=1}^n (b + 1)^{n-k} b^{k-1} \geq \sum_{k=1}^4 3^{4-k} 2^{k-1} = 3^4 - 2^4 = 65 > 61$$

тул шийдгүй.

Одоо ерөнхий тохиолдлыг авч үзье. n тэгш үед (a, b) шийд $\iff (|a|, |b|)$ шийд тул өмнөх тохиолдол руу шилжинэ. n сондгой гэе. $a^n > b^n$ гэдгээс $a > b$ байна. (a, b) шийд $\iff (-b, -a)$ шийд тул $0 \geq a > b$ үед өмнөх тохиолдол руу шилжинэ. $a > 0 \geq b$ үед $a^n + (-b)^n = 61$ шийдгүйг шалгах амархан.

Бодлого F5. C оройн өнцөг нь мохоо байдаг, тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгт өгөгдөв. $BCDH$ параллелограмм байх H цэгийг авав. AH шулуун CD шулуунтай M цэгт, BC шулуунтай N цэгт огтлолцоно. H цэгийг дайрсан AC шулуунтай параллел шулуун, CD шулуунтай K цэгт, BC шулуунтай L цэгт огтлолцоно. Хэрэв K, L, M, N цэгүүд нэг тойрог дээр оршиж байвал $\angle ABC = 90^\circ$ байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. $ABCD$ -г багтаасан тойрог AH шулуунтай дахин E цэгт, BH шулуунтай дахин F цэг огтлолцдог гэе.

$AC \parallel HK$ тул $\angle CAE = \angle LHE$. Мөн $\angle CAE = \angle CBE = \angle LBE$. Иймд $HBEL$ тойрогт багтана. Мөн $\angle CDE = \angle CBE = \angle KHE$ учир $HEKD$ тойрогт багтана.

Хэрэв $\angle BHE = \alpha$ гэвэл $HB \parallel DM$ тул $\angle NMK = \alpha$ болно. $KLNM$ тойрогт багтахыг тооцвол $\angle HEB = \angle HLB = \alpha$ болох ба HBE адил хажуут гурвалжин болох ба $HB = BE$ байна.

Мөн $\angle DHN = \beta$ гэвэл $HD \parallel BC$ учир $\angle CNM = \beta$ болно. $KLNM$ тойрогт багтахыг тооцвол $\angle HED = \angle HKD = \beta$ болох ба HDE адил хажуут гурвалжин болох ба $HD = DE$ байна.

$HD = DE, HB = BE$, 3 дахь тал нь ерөнхий тул HBD, EBD гурвалжнууд тэнцүү болно. Мөн $BD \perp HE$ гэж мөрдөнө.

$$90^\circ - \alpha = \angle HBD = \angle FBD = \angle FAD.$$

$$\alpha = \angle AFB = \angle AEB.$$

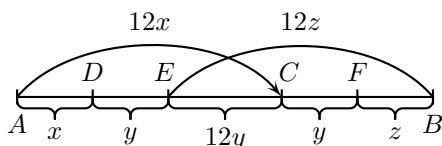
тул $AD \perp HB$ болох ба H нь ABD гурвалжны ортотөв болно. $HD \parallel CB$ тул $\angle ABC = 90^\circ$ болж батлагдав.

S ангилал (Бага ангийн багш)

Бодлого S1. Хэсэг хүмүүсийг A цэгээс B цэг рүү автобусаар зөөх хэрэгтэй байсан ба автобусанд тэдний зөвхөн хагас нь багтаж байв. Автобус эхний хэсэг хүмүүсийг суулган хөдөлсөн ба энэ үед үлдсэн хүмүүс зам дагуу алхаж эхлэв. Автобус замын дагуу нэгэн газар хүмүүсээ буулгаад буцаж хөдлөв. Буусан хүмүүс цааш алхаж эхлэв. Автобус үлдсэн хэсгийн хүмүүстэй таарч тэдгээрийг суулган B цэгийн зүг хөдлөв. Автобус болон явган алхсан хүмүүс нэгэн зэрэг B цэгт хүрчээ. Ингэхэд нийт хүмүүсийг 2 автобусаар зэрэг зөөх хугацаанаас 2 дахин их хугацаа зарцуулав. Явган хүмүүс нэгэн жигд хурдтай явсан ба хурд нь автобусны хурднаас 12 дахин бага байв. Тэгвэл эхний хэсэг хүмүүсийн автобусанд зарцуулсан хугацааг, ахлахад зарцуулсан хугацаанд харьцуулсан харьцааг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. C нь хүмүүсээ буулгаад хөдөлсөн цэг байг.



$$\left. \begin{aligned} 12x &= x + y + 12y \\ 12z &= 12y + y + z \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = z$$

2 автобусаар зэрэг зөөх хугацаанаас 2 дахин их хугацаа зарцуулсан учраас $2AB = AC + EB$ байна. Иймд

$$12x + 12y + 12x = (14y + 2x) \cdot 2$$

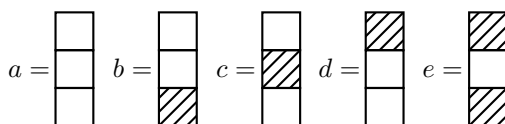
Эндээс $20x = 16y$, $5x = 4y$ гэж гарна.

Мөн $AC = AD + DE + EC$ тул $x + y + 12y = 12x$ тэнцэл биелэх ёстой. Эндээс $13y = 11x$ болох ба $5x = 4y$ биелэх ёстой тул $x = y = 0$ гарснаар бодлогын нөхцөлийг хангах боломжгүй болно.

Бодлого S2. 3×61 хүснэгтийн нүднүүдийг уг хүснэгтийн аль ч 2×2 дэд хүснэгтэд яг нэг будагдсан нүд байхаар хэчнээн янзаар будаж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодолт. Уг хүснэгтийн баганууд



байна. Эдгээрээс a багана зөвхөн c, e -тэй, b зөвхөн d -тэй, c зөвхөн a -тай, d зөвхөн b -тэй, e зөвхөн a -тай хөрш байж болох тул багануудыг үсгээр солиход $XaXaXa \dots X$, $aXaXaX \dots a$ хэлбэрийн эсвэл $bdbd \dots b$, $dbdb \dots d$ үгүүдийн аль нэг нь үүснэ. Энд X нь c, e үсгүүдийн аль нэг байж болно. Иймд бодлогын нөхцөлийг хангах будалтын тоо $2^{31} + 2^{30} + 2$ ширхэг байна.

Бодлого S3. $(n+1)!(n+2)! = (2n)!$ байдаг бүх натурал n тоог ол. Энд $m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m$.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Хариу: $n = 5$.

$2!3! > 2!$, $3!4! > 4!$, $4!5! > 6!$, $5!6! > 8!$ ба $6!7! = 10!$ болохыг шалгах амархан. Одоо $n \geq 6$ үед $(n+1)!(n+2)! < (2n)!$ гэж батлахад өөр шийдгүй болох нь харагдана.

$n = 5$ үед тэнцэл биелэх ба $(n+1)!(n+2)! \leq (2n)!$ бол

$$(n+2)!(n+3)! = (n+1)!(n+2)! \cdot (n+2)(n+3) < (2n)! \cdot (2n+1)(2n+2) = (2n+2)!$$

байх тул индукцээр үнэн.

Бодлого S4. ABC зөв гурвалжны тал a м урттай. A оройгоос 3 м/с хурдтай X цэг, B оройгоос 4 м/с хурдтай Y цэгүүд C оройг чиглэн нэгэн зэрэг гарав. Ямар хугацааны дараа XY зай ABC гурвалжны өндөртэй тэнцүү болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт.

Y цэгээс AC тал руу буусан перпендикулярын суурийг P гэе. t хугацааны дараа $AX = 3t$, $BY = 4t$ болно. CYP нь $\angle C = 60^\circ$ байдаг тэгш өнцөгт гурвалжин тул

$$CP = CY \cdot \cos 60^\circ = (a - 4t) \cdot \frac{1}{2}$$

$$YP = CY \cdot \sin 60^\circ = (a - 4t) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Мөн $XP = a - 3t - (a/2 - 2t) = a/2 - t$ болно. XPY гурвалжны хувьд Пифагорын теорем бичвэл $XY^2 = (CB \sin 60^\circ)^2 = XP^2 + YP^2$ буюу

$$a^2 \cdot \frac{3}{4} = (a/2 - t)^2 + 3(a/2 - 2t)^2$$

болно. Эндээс $t = a/2$ эсвэл $a/26$ болно.

Бодлого S5. $\alpha = \sqrt{60} + \sqrt{61}$ гэе.

(1) α иррационал гэж батал.

(2) α тоо язгуур нь болдог бүхэл коэффициенттэй олон гишүүнтийн жишээ нэгийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

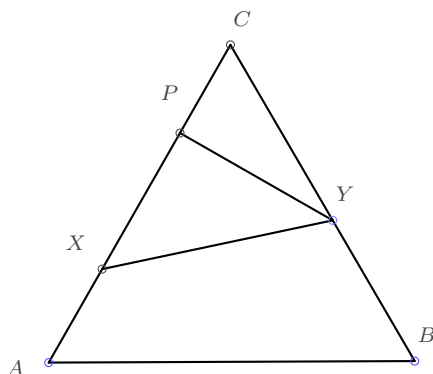
Бодолт.

(1) Эсрэгээс нь α рационал гэе. Тэгвэл $(\alpha - \sqrt{61})^2 = (\sqrt{60})^2$ гэдгээс

$$2\sqrt{61}\alpha = \alpha^2 + 1 \quad (*)$$

болно. Эндээс $\sqrt{61} = \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha}$ рационал болж зөрчил үүсэв. Иймд α иррационал.

(2) $(*)$ -ийн хоёр талыг квадрат зэрэгт дэвшүүлбээд хялбарчилбал $\alpha^4 - 242\alpha^2 + 1 = 0$ болох тул α нь $p(x) = x^4 - 242x^2 + 1$ олон гишүүнтийн язгуур болно.



Бодлого S6. 8×8 шатрын хөлөг дээр аль ч хоёр нь бие биенээ идэхгүй байхаар гурван өөр тэмээг хэчнээн янзаар байрлуулж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодолт. Гурван өөр тэмээг 8×8 шатрын хөлөг дээр $64 \cdot 63 \cdot 62$ янзаар байрлуулж болно. Тэмээнүүдээ 1, 2, 3 гэж дугаарлаад T_{ij} -ээр i, j тэмээнүүд нэг диагональ дээр байрлах байрлуултын тоог тэмдэглэвэл бидний олох тоо

$$\begin{aligned} \#3 \text{ ялгаатай тэмээ} &= 64 \cdot 63 \cdot 62 - |T_{12} \cup T_{13} \cup T_{23}| \\ &= 64 \cdot 63 \cdot 62 - |T_{12}| - |T_{13}| - |T_{23}| + |T_{12} \cap T_{13}| + |T_{12} \cap T_{23}| \\ &\quad + |T_{13} \cap T_{23}| - |T_{12} \cap T_{13} \cap T_{23}| \end{aligned}$$

байна. $|T_{12}| = |T_{13}| = |T_{23}|$ ба $|T_{12} \cap T_{13}| = |T_{12} \cap T_{23}| = |T_{13} \cap T_{23}|$ байх нь илэрхий.

7	7	7	7	7	7	7	7
7	9	9	9	9	9	9	7
7	9	11	11	11	11	9	7
7	9	11	13	13	11	9	7
7	9	11	13	13	11	9	7
7	9	11	11	11	11	9	7
7	9	9	9	9	9	9	7
7	7	7	7	7	7	7	7

Зурагт тухайн нүдэнд байрлах тэмээ өөр хэдэн нүд довтолж байгаа тоог тэмдэглэв. Өөрөөх хэлбэл шатрын хөлгийн 64 нүдний 28 нүдэнд байгаа тэмээ өөр 7 нүдийг, 20 нүдэнд байгаа тэмээ өөр 9 нүдийг, 12 нүдэнд байгаа тэмээ өөр 11 нүдийг, 4 нүдэнд байгаа тэмээ өөр 13 нүдийг довтолж байна.

Өгүүлбэр 1. $|T_{12}| = (28 \times 7 + 20 \times 9 + 12 \times 11 + 4 \times 13) \times 62 = 560 \times 62 = 34720$ байна.

Өгүүлбэр 2. $|T_{12} \cap T_{13}| = 28 \times A_7^2 + 20 \times A_9^2 + 12 \times A_{11}^2 + 4 \times A_{13}^2 = 4560$

1-р тэмээг k нүд довтолдог нүдэнд байрлуулахад 2 ба 3-р тэмээг A_k^2 янзаар байрлуулж болно.

Өгүүлбэр 3. $|T_{12} \cap T_{13} \cap T_{23}| = 4(A_3^3 + A_4^3 + A_5^3 + A_6^3 + A_7^3) + 2A_8^3 = 2352$

Энэ тохиолдолд 3 тэмээ нэг диагональ дээр байрлах ёстой. 3, 4, 5, 6, 7 элементтэй диагональ тус бүр 4 ширхэг, 8 элементтэй диагональ 2 ширхэг байна. Иймд ялгаатай 3 тэмээг

$$64 \cdot 63 \cdot 62 - 3 \cdot 34720 + 3 \cdot 4560 - 2352 = 157152$$

янзаар байрлуулж болно.

Т ангилал (Дунд ангийн багш)

Бодлого Т1. A, B эерэг тоонуудын хувьд $A \star B = \frac{A}{AB+1}$ гэж тодорхойлъя.

(1) $(A \star B) \star C = A \star (B + C)$ гэж батал.

(2) $((\dots((1 \star 2) \star 3) \star 4) \dots) \star 59) \star 60) \star 61$ илэрхийллийн утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт.

$$(1) (A \star B) \star C = \frac{A \star B}{(A \star B)C + 1} = \frac{\frac{A}{AB+1}}{\frac{AC}{AB+1} + 1} = \frac{A}{A(B+C) + 1} = A \star (B + C)$$

(2) Дээрхийг давтан ашиглавал $((\dots((1 \star 2) \star 3) \star 4) \dots) \star 59) \star 60) \star 61 = 1 \star (2 + 3 + \dots + 61) = 1 \star 1890 = 1/1891$ байна

Бодлого Т2. a, b гэж эхлээд өмнөх хоёр үгийг нь залгаж бичих замаар байгуулсан $a, b, ab, bab, abbab, bababab, \dots$ үгсийн дарааллын 3-р гишүүнээс хойших аль ч гишүүний хамгийн урд талын хоёр үсгийг дарахад палиндром үг үүснэ гэж батал. Энд ард, урдаасаа яг ижил уншигддаг үгийг *палиндром* үг гэж нэрлэдэг. Жишээ нь $ababa$ палиндром, $abab$ палиндром биш.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. Өгсөн дарааллыг $\{x_n\}$ гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $n \geq 3$ үед $x_n = x_{n-2}x_{n-1}$ байх ба n тэгш үед x_n -ийн эхний хоёр үсэг үргэлж ab , n сондгой үед x_n -ийн эхний хоёр үсэг үргэлж ba болохыг анзааръя. y_n -р x_n -ийн эхний хоёр үсгийг дарахад гарах үгийг тэмдэглэе. Индукцээр y_n палиндром болохыг баталъя. $n = 3, 4, 5$ үед илт ба $n \geq 6$ үед y_{n-3} ба y_{n-2} үгүүд палиндром байг. n тэгш үед $x_n = x_{n-2}x_{n-1} = x_{n-2}x_{n-3}x_{n-2} = aby_{n-2}bay_{n-3}aby_{n-2}$ болох тул $y_n = y_{n-2}bay_{n-3}aby_{n-2}$ палиндром. n сондгой үед мөн ижил.

Бодлого Т3. $a! \cdot (a+1)! = b!$ байдаг бүх натурал тоон (a, b) хосыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Хариу: $(a, b) = (1, 2), (6, 10)$.

$a = 1$, 6 шийд болох ба $2 \leq a \leq 5$ үед шийдгүйг харах амархан. Одоо $a \geq 7$ үед шийдгүй гэж харуулъя.

$a \geq 7$ ба $a!(a+1)! = b!$ гэе. $7!8! > 10!$ тул $b \geq 11$ байх ба эндээс $a \geq 10$ байна. $10!11! > 16!$ тул $b \geq 17$ байх ба эндээс $a \geq 16$ байна. Энд $c = a+1$ гэвэл $(c-1)!c! = b!$ болно.

Эхлээд $b \geq 1.5c$ гэж харуулъя. Үнэхээр, $t \geq 6$ бол

$$(2t-1)!(2t)! > (3t)! \quad \text{ба} \quad (2t)!(2t+1)! > (3t+2)!$$

байна. Энд $t = 6$ үед $11!12! > 18!$ ба $12!13! > 20!$ үнэн бөгөөд $t \geq 6$ үед

$$4t(2t+1)^2 > 3(3t+1)(3t+2) \quad \text{ба} \quad 4(2t+1)(t+1)(2t+3) > 3(3t+4)(3t+5)$$

гэдгээс индукцийн алхам мөрдөнө. Иймд $b \geq 1.5c$ байна.

Нөгөө талаас $c \geq 8$ тул Бертрандын постулатаар $c < p < 1.5c \leq b$ байх анхны тоо олдоно. Энэ үед $p \mid b!$ ба $p \nmid (c-1)!c!$ болж зөрчил гарна.

Бодлого Т4. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ нөхцөл биелдэг α, β, γ өнцгүүдтэй гүдгэр биш өнцөгт гурвалжны хувьд

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} + \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \geq 2$$

болохыг баталж, тэнцэлдээ хүрэх нөхцөлийг ол.

Бодолт. Давхар өнцгийн томъёогоор $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ байна. Одоо $0 < x < \pi/2$ үед $0 < \sin 2x < 1$ гэдгээс $\frac{\cos x}{\sin x} = 2 \frac{\cos^2 x}{\sin 2x} > 2 \cos^2 x$ байх ба $x = \pi/2$ үед $\frac{\cos x}{\sin x} = 0 = 2 \cos^2 x$ байна. Иймд

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} + \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \geq 2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = 2$$

болж тэнцэтгэл биш батлагдана. Тэнцэтгэл биелэхийн тулд $x = \alpha, \beta, \gamma$ хувьд $\cos x = 0$ эсвэл $\sin 2x = 1$ буюу $x = \pi/2$ эсвэл $\pi/4$ байна. Эндээс зөвхөн адил хажуут тэгш өнцөгт гурвалжны хувьд тэнцэтгэл биелнэ. Тухайлбал хурц өнцөгт гурвалжны хувьд тэнцэтгэл биелэхгүй.

Нэмэлт: $1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 0$ гэдгээс бодлогын нөхцөл хангадаг гурвалжин тэгш өнцөгт гурвалжин байхаас өөрцгүй.

Бодлого Т5. C оройн өнцөг нь мохоо байдаг, тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгт өгөгдөв. $BCDH$ параллелограмм байх H цэгийг авав. AH шулуун CD шулуунтай M цэгт, BC шулуунтай N цэгт огтлолцоно. H цэгийг дайрсан AC шулуунтай параллел шулуун, CD шулуунтай K цэгт, BC шулуунтай L цэгт огтлолцоно. Хэрэв K, L, M, N цэгүүд нэг тойрог дээр оршиж байвал $\angle ABC = 90^\circ$ байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. **F5** бодлогын бодолт ба дүгнэх аргачлалыг харна уу.

Бодлого Т6. $P(X) = X^8 + 61X + 2025$ олон гишүүнтийг бүхэл коэффициенттой хоёр тогтмол биш олон гишүүнтийн үржвэрт тавьж болохгүй гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. $P(X) = R(X)S(X)$ ба $\deg R \geq 1, \deg S \geq 1$ гэж задардаг гээ.

Эхлээд $P(X) \pmod{61}$ авч үзье. $P(X) \equiv X^8 - 49 = (X^4 - 7)(X^4 + 7) \pmod{61}$ байна. $7^{30} \equiv -1 \pmod{61}$ гэдгээс Фермагийн бага теоремоор $x^2 \not\equiv \pm 7 \pmod{61}$ байна. Эндээс $X^4 \pm 7 \pmod{61}$ үл задрах болно. Үнэхээр, $X^4 \pm 7 \pmod{61}$ илт язгуургүй ба хэрэв

$$X^4 \pm 7 = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d) \pmod{61}$$

бол $a + c = 0, b + ac + d = 0, ad + bc = 0, bd = \pm 7$ байна. $a = 0$ бол $d = -b$ гэдгээс $b^2 = -bd = \mp 7$ болж зөрчил гарна, $a \neq 0$ бол $d = b$ гэдгээс $b^2 = \pm 7$ болж зөрчил гарна.

Иймд $\deg R = \deg S = 4$ байна.

Одоо $P(X) \pmod{2}$ авч үзвэл $P(X) = (X^2 + X + 1)(X^6 + X^5 + X^3 + X^2 + 1) \pmod{2}$ гэж задарна. Үнэхээр

$$(X + 1)P(X) \equiv X^9 + X^8 + X^2 + 1 = (X^3 + 1)(X^6 + X^5 + X^3 + X^2 + 1) \pmod{2}$$

байна. Эндээс $Q(X) = X^6 + X^5 + X^3 + X^2 + 1 \pmod{2}$ олон гишүүнт хоёр зэргийн хуваагчтай байх ёстой болно. $\pmod{2}$ дээр $X \nmid Q(X), X^2 + 1 \nmid Q(X)$ ба $X^2 + X + 1 \nmid Q(X)$ гэдгээс зөрчил үүснэ. Иймд $P(X)$ үл задрах байна.

Монголын Математикийн 61-р Олимпиадын II Давааны II шат

Хот/бүсийн Олимпиад

Монголын Математикийн 61-р олимпиадын II давааны II шат буюу хот/бүсийн олимпиад 2025 оны 2-р сарын 24, 25-ны өдрүүдэд зохион байгуулагдлаа. Улаанбаатар хотын олимпиад уламжлал ёсоор МУГБ С. Цагааны нэрэмжит болон нийслэлийн 1-р сургууль дээр зохиогдов. Зүүн бүсийн олимпиад Сүхбаатар аймагт, төвийн бүсийн олимпиад Хөвсгөл аймагт, баруун бүсийн олимпиад Увс аймагт, говийн бүсийн олимпиад Өвөрхангай аймагт зохион байгуулагдлаа.

Олимпиадын D, E, F, S, T ангилалд нийт 1000 гаран оролцогч эрдэм ухаанаа уралдууллаа.

Бодлогууд

D ангилал (7–8 анги)

Бодлого D1. Учрал хэсэг найзуудын хамт дэлгүүрээс хэдэн ном ба хэдэн дэвтэр худалдан авчээ. Нэг ширхэг ном нэг ширхэг дэвтрээс A дахин илүү үнэтэй. Учрал болон түүний найзууд шударга хуваарилах үүднээс худалдан авсан ном, дэвтрүүдээ мөнгөн дүнгээр тэнцүү байхаар хуваан авахаар шийдэв. Учрал бүх номын $\frac{1}{10}$ ба бүх дэвтрийн $\frac{1}{15}$ -ийг авсан байв. Тэрээр өөрт оногдсон ном болон дэвтрүүдээ тоолоход өөрт нь оногдсон дэвтрийн тоо номын тооноос 6 дахин их болохыг анзаарав. A -ийн авч болох бүх утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого D2. $AC = BC$ байдаг адил хажуут ABC гурвалжны AB тал дээр E цэгийг, AC тал дээр D цэгийг авсан ба EC , BD хэрчмүүд G цэгт огтлолцож байв. $ADGE$ дөрвөн өнцөгтийн талбай BGC гурвалжны талбайтай тэнцүү ба $EC = BD$ байв. $\angle EGB = \angle ACB$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого D3. Анхны тоон хуваагч бүрийхээ квадратад хуваагддаг зохиомол тоог *сайн тоо* гээ. Ялгаатай сайн тоонуудын нийлбэрт тавигддаггүй хамгийн их натурал тоог ол. Энд нийлбэр нэг гишүүнтэй байж болно. Жишээ нь 1, 3, 12 тоонууд сайн тоо биш бөгөөд 9 ба 108 сайн тоо мөн.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого D4. 6×6 хэмжээтэй квадрат дотор аль ч орой болон ирмэгээрээ, мөн дотор талаараа огтлолцохгүй тэгш өнцөгт хэлбэртэй зангилааны цэгүүд дээр оройтой бөгөөд талууд нь квадратын талуудтай параллел хоёр дэд хүснэгтийг хэчнээн янзаар сонгож болох вэ? Энд сонгох дарааллыг харгалзахгүй.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

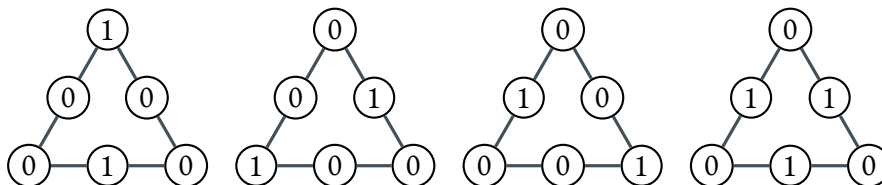
E ангилал (9–10 анги)

Бодлого E1. $\underbrace{66 \dots 6}_{61} \underbrace{11 \dots 1}_{61}$ тоо 61-т хуваагдана гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

Бодлого E2. Гурвалжин хэлбэртэй цайзын гурван талын дундаж цэг болон гурван орой дээр харуулын цамхаг байдаг гээ. Талын дундаж цэг дээр байгаа харуул тэр талаа хамгаалж чадна, орой дээр байгаа харуул залгаа хоёр талаа хамгаалж чадна.

Жишээлбэл, цайзын тал болгоныг яг 1 харуул хамгаалдаг байхаар харуулуудыг нийт 4 янзаар байрлуулж болно.



Цайзын тал болгоныг яг 11 харуул хамгаалдаг байхаар харуулуудыг нийт хэдэн янзаар байрлуулж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого Е3. Хурц өнцөгт ABC гурвалжныг багтаасан тойрог ω -ийн BC жижиг нумын дунджийг M гэе. AM хэрчим дээр D цэгийг авсан ба D цэг ABC гурвалжин дотор оршиж байв. BD шулуун, AC талтай N цэгт, ω тойрогтой дахин P цэгт огтлолцоно. AN хэрчим дээр $\angle NDE = \angle CAM$ байх E цэг авав. DE шулуун BC талтай F цэгт огтлолцоно. M цэгийг дайрсан BP шулуунтай параллел шулуун ω тойрогтой дахин L цэгт огтлолцоно. EP, DL, FM шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого Е4. Тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийг багтаасан тойргийн C, D , оройнуудыг агуулдаггүй AB нумын дунджийг E гээд A, B , оройнуудыг агуулдаггүй CD нумын дунджийг F гэе. $AC \cap BF = K, BD \cap AF = L, AC \cap DE = M, BD \cap CE = N$ байг. $\angle DML = \angle CNK$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого Е5. Бодит тоон $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ дарааллын хувьд $a_1 = 1, a_2 = 3$ ба $n \geq 1$ үед

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{3a_{n+1} - 1}{a_{n+1} - a_n}$$

байв. $\{a_n\}$ дарааллын гишүүд натурал болохыг баталж a_{61} гишүүнийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого Е6. Натурал N тооны цифрүүдийн нийлбэрийг $S(N)$ гэж тэмдэглэе.

$$S(n) + S(2n) + S(3n) + \dots + S(n^2) = \frac{4n^2}{15} + 9$$

байдаг бүх натурал n тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

Г ангилал (11-12 анги)

Бодлого Г1. Тэгээс ялгаатай a, b, c тоонуудын хувьд $\sqrt[3]{abc}(a+b+c) = ab+bc+ca$ байдаг бол эдгээр тоонуудыг ямар нэгэн дарааллаар бичихэд геометр прогресс үүснэ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого Г2. ω тойрогт хурц өнцөгт ABC гурвалжин багтжээ. ω тойргийн AB жижиг нумын дунджийг M гэе. ω тойргийн B цэгт татсан шүргэгч шулуун, AC шулуунтай P цэгт огтлолцоно. PM шулуун ω тойрогтой дахин G цэгт огтлолцоно. ω тойргийн G цэг дээрх шүргэгч шулуун BC шулуунтай Q цэгт огтлолцоно. AB, CG шулуунууд K цэгт огтлолцох ба P, Q, K, C цэгүүд нэг тойрог дээр орших бол KQ, GB шулуунууд параллел гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого Г3. $2n \times 2n$ хүснэгтийн (i, j) нүдэнд $2n(i-1) + j$ тоог бичжээ. Бат мөр ба багана бүрээс яг n ширхэг нүд сонгогдсон байхаар $2n^2$ ширхэг нүдийг сонгов. Сонгогдсон нүднүүд дэх тоонуудын нийлбэр нь сонгогдоогүй нүднүүд дэх тоонуудын нийлбэртэй тэнцүү байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

Бодлого Г4. 2×64 хүснэгтийн хоёр нүдийг будав. Аль хоёр нүдийг будахад, ядаж нэг будагдсан нүд агуулсан дэд хүснэгтийн тоо хамгийн их байх вэ? Энд дэд хүснэгт гэж хүснэгтийн зангилааны цэгүүд дээр оройтой, хүснэгтийн талуудтай параллел талуудтай тэгш өнцөгтийг хэлнэ.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодлого F5. $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ бүхэл тоон дарааллуудыг $a_1 = 3, b_1 = c_1 = 1$ ба $n \geq 1$ үед

$$a_{n+1} = 3a_n + b_n$$

$$b_{n+1} = a_n + b_n$$

$$c_{n+1} = b_n + c_n$$

гэж тодорхойлж. $N \geq 3$ сондгой тоо гэе.

(1) $a_n - 1, b_n, c_n - 1$ тоонууд бүгд N -д хуваагддаг байх n дугаар олдоно гэж батал.

(2) $a_m - 1, b_m - 1, c_m - 1$ тоонууд бүгд N -д хуваагддаг байх m дугаар олдохгүй гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого F6. Эерэг бодит тоон олонлогийг $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ гэж тэмдэглэе.

Дурын $x, y \in \mathbb{R}^+$ тоонуудын хувьд $f(xf(x) + y) = x^2 + f(y)$ байдаг бүх $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ функцийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Билэгдэмбэрэл)

S ангилал (Бага ангийн багш)

Бодлого S1. Учрал хэсэг найзуудын хамт дэлгүүрээс хэдэн ном ба хэдэн дэвтэр худалдан авчээ. Нэг ширхэг ном нэг ширхэг дэвтрээс A дахин илүү үнэтэй. Учрал болон түүний найзууд шударга хуваарилах үүднээс худалдан авсан ном, дэвтрүүдээ мөнгөн дүнгээр тэнцүү байхаар хуваан авахаар шийдэв. Учрал бүх номын $\frac{1}{10}$ ба бүх дэвтрийн $\frac{1}{15}$ -ийг авсан байв. Тэрээр өөрт оногдсон ном болон дэвтрүүдээ тоолоход өөрт нь оногдсон дэвтрийн тоо номын тооноос 6 дахин их болохыг анзаарав. A -ийн авч болох бүх утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Батзориг)

Бодлого S2. Олимпиадын хороо 5 хүнтэйгээр 20 удаа хуралдав. Хоёр хуралд хоёулаа суусан хоёр хүн байхгүй бол олимпиадын хороо хамгийн цөөндөө хэдэн гишүүнтэй байж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Л.Буянтогтох, Ш.Доржсэмбэ)

Бодлого S3. Анхны тоон хуваагч бүрийхээ квадратад хуваагддаг зохиомол тоог *сайн тоо* гэе. Ялгаатай сайн тоонуудын нийлбэрт тавигддаггүй хамгийн их натурал тоог ол. Энд нийлбэр нэг гишүүнтэй байж болно. Жишээ нь 1, 3, 12 тоонууд сайн тоо биш бөгөөд 9 ба 108 сайн тоо мөн.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Батзориг)

Бодлого S4. $1 \leq x, y \leq 45$ бөгөөд $\frac{x^3 + 1}{xy + 1}$ харьцаа бүхэл байдаг бүх натурал тоон (x, y) хосын тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

Бодлого S5. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ тоонууд иррационал байдгийг саная.

(1) s, t, r бүхэл тоонуудын хувьд $s + \sqrt{2}t + \sqrt{3}r = 0$ бол $s = t = r = 0$ гэж батал.

(2) a, b, c, d бүхэл тоонуудын хувьд $\frac{a + \sqrt{2}b + \sqrt{3}c}{b + \sqrt{2}c + \sqrt{3}d}$ харьцаа рационал тоо байдаг бол $ad = bc$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

Бодлого S6. ABC гурвалжны BE , CF биссектрисүүд I цэгт огтлолцоно. Энд F цэг AB тал дээр, E цэг AC тал дээр оршино. $\angle A = 60^\circ$ бол $S_{BCF} + S_{BCE} = 3S_{BIC}$ гэж батал. Энд XYZ гурвалжны талбайг S_{XYZ} гэж тэмдэглэв.

(Дэвшүүлсэн: Б. Билэгдэмбэрэл)

Т ангилал (Дунд ангийн багш)

Бодлого Т1.

(1) $t \geq 2$ бол $t^3 \geq t^2 + 4$ байна гэж баталж тэнцэтгэл биелэх нөхцөлийг ол.

(2) $t_1, t_2, \dots, t_n \geq 2$ тоонуудын хувьд

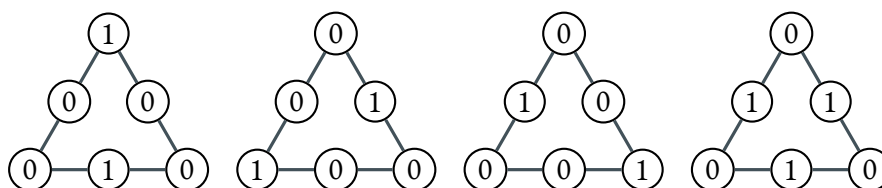
$$\frac{t_1^3}{t_2^2 + 4} + \frac{t_2^3}{t_3^2 + 4} + \dots + \frac{t_{n-1}^3}{t_n^2 + 4} + \frac{t_n^3}{t_1^2 + 4} \geq n$$

байна гэж баталж тэнцэтгэл биелэх нөхцөлийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого Т2. Гурвалжин хэлбэртэй цайзын гурван талын дундаж цэг болон гурван орой дээр харуулын цамхаг байдаг гэе. Талын дундаж цэг дээр байгаа харуул тэр талаа хамгаалж чадна, орой дээр байгаа харуул залгаа хоёр талаа хамгаалж чадна.

Жишээлбэл, цайзын тал болгоныг яг 1 харуул хамгаалдаг байхаар харуулуудыг нийт 4 янзаар байрлуулж болно.



Цайзын тал болгоныг яг n харуул хамгаалдаг байхаар харуулуудыг нийт хэдэн янзаар байрлуулж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого Т3. ω тойрогт хурц өнцөгт ABC гурвалжин багтжээ. ω тойргийн AB жижиг нумын дунджийг M гэе. ω тойргийн B цэгт татсан шүргэгч шулуун, AC шулуунтай P цэгт огтлолцоно. PM шулуун ω тойрогтой дахин G цэгт огтлолцоно. ω тойргийн G цэг дээрх шүргэгч шулуун BC шулуунтай Q цэгт огтлолцоно. AB , CG шулуунууд K цэгт огтлолцох ба P , Q , K , C цэгүүд нэг тойрог дээр орших бол KQ , GB шулуунууд параллел гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого Т4. ABC гурвалжны AB тал дээр D цэгийг, BC тал дээр E цэгийг $ADEC$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтаж байхаар авав. BDE гурвалжныг багтаасан тойргийн B оройг агуулаагүй DE нум дээр X , Y ялгаатай цэгүүдийг $BX = BY$ байхаар авав. XY , AC шулуунууд параллел гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого Т5. Бодит тоон $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ дарааллын хувьд $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ ба $n \geq 1$ үед

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{3a_{n+1}^2 - 1}{a_{n+1} - a_n}$$

байв. $\{a_n\}$ дарааллын гишүүд натурал болохыг баталж $a_{61} > 4^{61}$ гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого Т6. $m \leq 2n - 2$ бөгөөд

$$a^n + b^n = (a, b)^m(a + b), \quad b^n + c^n = (b, c)^m(b + c), \quad c^n + a^n = (c, a)^m(c + a)$$

байдаг бүх натурал тоон (a, b, c, m, n) тавтыг ол. Энд x, y тоонуудын хамгийн их ерөнхий хуваагчийг (x, y) гэж тэмдэглэв.

(Дэвшүүлсэн: Б. Билэгдэмбэрэл)

Бодолтууд

Д ангилал (7-8 анги)

Бодлого D1. Учрал хэсэг найзуудын хамт дэлгүүрээс хэдэн ном ба хэдэн дэвтэр худалдан авчээ. Нэг ширхэг ном нэг ширхэг дэвтрээс A дахин илүү үнэтэй. Учрал болон түүний найзууд шударга хуваарилах үүднээс худалдан авсан ном, дэвтрүүдээ мөнгөн дүнгээр тэнцүү байхаар хуваан авахаар шийдэв. Учрал бүх номын $\frac{1}{10}$ ба бүх дэвтрийн $\frac{1}{15}$ -ийг авсан байв. Тэрээр өөрт оногдсон ном болон дэвтрүүдээ тоолоход өөрт нь оногдсон дэвтрийн тоо номын тооноос 6 дахин их болохыг анзаарав. A -ийн авч болох бүх утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. Хариу: $A = 24, 9, 4, 3/2$.

Уганд байсан ном ба дэвтрийн нийт үнийг харгалзан x, y гэе. Мөн Учралыг оролцуулан түүний найзуудын тоог n гэе. Хүн бүр мөнгөн дүнгээр тэнцүү тооны ном, дэвтэр авсан тул

$$n \left(\frac{x}{10} + \frac{y}{15} \right) = x + y.$$

Эндээс,

$$3x(n - 10) = 2y(15 - n) \quad (*)$$

болно. Иймд $n = 11, 12, 13, 14$ боломжтой.

- $n = 11$ үед $(*)$ тэгшитгэл $3x = 8y$ болно. Иймээс Учралд $x/10$ төгрөгийн үнэтэй ном болон $x/40$ төгрөгийн үнэтэй дэвтэр оноогджээ. Иймд мөнгөн дүнгийн харьцаа нь $\frac{x}{10} : \frac{x}{40} = 4$ ба дэвтрийн тоо номын тооноос 6 дахин их тул $A = 4 \cdot 6 = 24$.
- $n = 12$ үед $(*)$ тэгшитгэл $x = y$ болно. Иймээс Учралд $x/10$ төгрөгийн үнэтэй ном болон $x/15$ төгрөгийн үнэтэй дэвтэр оноогджээ. Иймд мөнгөн дүнгийн харьцаа нь $\frac{x}{10} : \frac{x}{15} = \frac{3}{2}$ ба дэвтрийн тоо номын тооноос 6 дахин их тул $A = 3/2 \cdot 6 = 9$.
- $n = 13$ үед $(*)$ тэгшитгэл $9x = 4y$ болно. Иймээс Учралд $x/10$ төгрөгийн үнэтэй ном болон $3x/20$ төгрөгийн үнэтэй дэвтэр оноогджээ. Иймд мөнгөн дүнгийн харьцаа нь $\frac{x}{10} : \frac{3x}{20} = \frac{2}{3}$ ба дэвтрийн тоо номын тооноос 6 дахин их тул $A = 2/3 \cdot 6 = 4$.
- $n = 14$ үед $(*)$ тэгшитгэл $6x = y$ болно. Иймээс Учралд $x/10$ төгрөгийн үнэтэй ном болон $2x/5$ төгрөгийн үнэтэй дэвтэр оноогджээ. Иймд мөнгөн дүнгийн харьцаа нь $\frac{x}{10} : \frac{2x}{5} = \frac{1}{4}$ ба дэвтрийн тоо номын тооноос 6 дахин их тул $A = 1/4 \cdot 6 = \frac{3}{2}$.

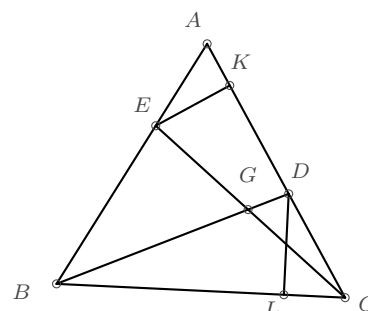
Бодлого D2. $AC = BC$ байдаг адил хажуут ABC гурвалжны AB тал дээр E цэгийг, AC тал дээр D цэгийг авсан ба EC, BD хэрчмүүд G цэгт огтлолцож байв. $ADGE$ дөрвөн өнцөгтийн талбай BGC гурвалжны талбайтай тэнцүү ба $EC = BD$ байв. $\angle EGB = \angle ACB$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт.

$ADGE$ дөрвөн өнцөгт болон BGC гурвалжныг GDC гурвалжинтай нийлүүлбэл AEC болон BDC гурвалжнууд үүсэх ба талбайнууд нь тэнцүү болно. E цэгээс AC талд буулгасан перпендикулярын суурийг K , D цэгээс BC талд буулгасан перпендикулярын суурийг L гэе.

$$S_{AEC} = \frac{AC \cdot EK}{2} = S_{BDC} = \frac{BC \cdot DL}{2}$$



$AC = BC$ учир $EK = DL$ байна. Мөн $BD = EC$, $\angle BLD = \angle EKD = 90^\circ$ учраас $\triangle BDL = \triangle EKC$ байна. Хамар өнцгийн чанараар,

$$\angle EGB = \angle GBC + \angle GCB = \angle DBL + \angle GCB = \angle ECK + \angle ECB = \angle ACB$$

болж батлагдав.

Нэмэлт. Энэ үед ABC зөв гурвалжин гэж мөрдөнө.

Бодлого D3. Анхны тоон хуваагч бүрийхээ квадратад хуваагддаг зохиомол тоог *сайн тоо* гэе. Ялгаатай сайн тоонуудын нийлбэрт тавигддаггүй хамгийн их натурал тоог ол. Энд нийлбэр нэг гишүүнтэй байж болно. Жишээ нь 1, 3, 12 тоонууд сайн тоо биш бөгөөд 9 ба 108 сайн тоо мөн.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. Хариу: 30.

Ялгаатай сайн тоонуудын нийлбэрт тавигддаг тоог *онц тоо* гэе. 9, 25, 27 ба 4, 8, 16, ... тоонууд сайн.

Натурал тоо ялгаатай 2-ийн зэрэгтүүдийн нийлбэрт нэг утгатай бичигддэгийг саная. Эндээс $4k$, $9 + 4(k - 1)$, $9 + 25 + 4(k - 1)$, $27 + 4(k - 1)$ хэлбэртэй бүх тоо онц байна.

Тухайлбал 31-ээс багагүй бүх тоо онц. Одоо 30 онц биш гэж харуулъя. 30-аас бага сайн тоо дээр бичсэн 6-аас өөр байхгүй ба $9 + 25 > 30$ тул нийлбэрт сондгой тоо орох боломжгүй. $4 + 8 + 16 < 30$ тул тэгш сайн тоонуудын нийлбэрт тавих боломжгүй.

Бодлого D4. 6×6 хэмжээтэй квадрат дотор аль ч орой болон ирмэгээрээ, мөн дотор талаараа огтлолцохгүй тэгш өнцөгт хэлбэртэй зангилааны цэгүүд дээр оройтой бөгөөд талууд нь квадратын талуудтай параллел хоёр дэд хүснэгтийг хэчнээн янзаар сонгож болох вэ? Энд сонгох дарааллыг харгалзахгүй.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. Хариу: 28420.

Өгсөн квадратыг тэгш өнцөгт координатын эх дээр байрлуулсан гэж сэтгэе. Тэгвэл аливаа тэгш өнцөгтийн талууд нь хэвтээ болон босоо интервалууд байх ёстой болно. Тэгш өнцөгтүүд үл огтлолцохын тулд хэвтээ эсвэл босоо интервалууд огтлолцохгүй байх ёстой (хоёулаа огтлолцохгүй байж болно).

Эхлээд хэвтээ интервалууд давхацдаггүй байх тохиолдлуудыг тоолъё. Хэвтээ интервалуудыг $[i, j]$ болон $[k, l]$ гэж тэмдэглэе. Тэгш өнцөгтүүдийг сонгох дараалал хамаарахгүй тул $i < k$ гэж үзэж болох ба үүнээс $i < j < k < l$ болно. Тэгвэл i, j, k, l -г сонгох боломжийн тоо $\binom{7}{4}$. Босоо интервалууд дээр ямар нэгэн хязгаарлалт байхгүй тул тэдгээрийг сонгох боломжийн тоо $\binom{7}{2}^2$. Иймээс хэвтээ интервалууд давхацдаггүй байх нийт боломжийн тоо $\binom{7}{4} \times \binom{7}{2}^2$ байна.

Мөн адилаар квадрат тэгш хэмтэй тул босоо интервалууд давхацдаггүй байх боломжийн тоо $\binom{7}{4} \times \binom{7}{2}^2$ байна.

Одоо хэвтээ болон босоо интервалууд хоёулаа давхацдаггүй байх тохиолдлуудыг тоолъё. Хэвтээ интервалууд $[i, j]$ болон $[k, l]$, босоо интервалууд $[m, n]$ болон $[p, q]$ байг. $i < j < k < l$ гэж үзэж болох тул боломжийн тоо $\binom{7}{4}$ байна. Харин босоо интервалуудын хувьд $m < n < p < q$ болон $p < q < m < n$ гэсэн хоёр л боломжтой. Тиймээс босоо интервалуудыг сонгох сонголтын тоо $2 \times \binom{7}{4}$. Иймээс хоёулаа давхацдаггүй тохиолдлын тоо $2 \times \binom{7}{4}^2$ байна.

Иймд нийт боломжийн тоо

$$2 \times \binom{7}{4} \times \binom{7}{2}^2 - 2 \times \binom{7}{4}^2$$

болно.

Е ангилал (9-10 анги)

Бодлого Е1. $\underbrace{66 \dots 6}_{61} \underbrace{11 \dots 1}_{61}$ тоо 61-т хуваагдана гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

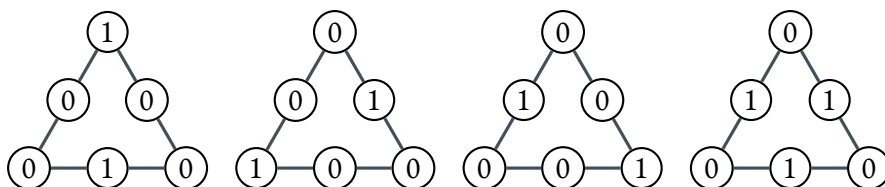
Бодолт. $p = 61$ гэвэл

$$\underbrace{66 \dots 6}_p \underbrace{11 \dots 1}_p = 6 \frac{10^{2p} - 10^p}{10 - 1} + \frac{10^p - 1}{10 - 1} = \frac{10^p - 1}{10 - 1} (6 \cdot 10^p + 1)$$

байна. Фермагийн бага теоремоор $10^p \equiv 10 \pmod{p}$ тул $6 \cdot 10^p + 1 \equiv 61 \equiv 0 \pmod{p}$ байна.

Бодлого Е2. Гурвалжин хэлбэртэй цайзын гурван талын дундаж цэг болон гурван орой дээр харуулын цамхаг байдаг гэе. Талын дундаж цэг дээр байгаа харуул тэр талаа хамгаалж чадна, орой дээр байгаа харуул залгаа хоёр талаа хамгаалж чадна.

Жишээлбэл, цайзын тал болгоныг яг 1 харуул хамгаалдаг байхаар харуулуудыг нийт 4 янзаар байрлуулж болно.



Цайзын тал болгоныг яг 11 харуул хамгаалдаг байхаар харуулуудыг нийт хэдэн янзаар байрлуулж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Хариу: 489.

Талын хоёр орой дээр a, b цэрэг байвал талын дундаж дээр $11 - a - b$ цэрэг байх хэрэгтэй. Иймд сөрөг биш бүхэл тоон гурвалуудаас тогтох

$$A = \{(a, b, c) \mid a + b \leq 11, a + c \leq 11, b + c \leq 11\}$$

олонлогийн гишүүдийг тоолоход болно. Энд

$$B = \{(a, b, c) \in A \mid a \leq 5, b \leq 5, c \leq 5\} = \{(a, b, c) \mid a \leq 5, b \leq 5, c \leq 5\}$$

$$C = \{(a, b, c) \in A \mid c \geq 6\} = \{(a, b, c) \mid a \leq 11 - c, b \leq 11 - c, 6 \leq c \leq 11\}$$

гэвэл $|A| = |B| + 3|C|$ ба

$$|B| = 6^3 = 216, \quad |C| = \sum_{c=6}^{11} (12 - c)^2 = \sum_{d=1}^6 d^2 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} = 91$$

байх тул $|A| = 216 + 3 \cdot 91 = 489$ байна.

Бодлого Е3. Хурц өнцөгт ABC гурвалжныг багтаасан тойрог ω -ийн BC жижиг нумын дундажийг M гэе. AM хэрчим дээр D цэгийг авсан ба D цэг ABC гурвалжин дотор оршиж байв. BD шулуун, AC талтай N цэгт, ω тойрогтой дахин P цэгт огтлолцоно. AN хэрчим дээр $\angle NDE = \angle CAM$ байх E цэг авав. DE шулуун BC талтай F цэгт огтлолцоно. M цэгийг дайрсан BP шулуунтай параллел шулуун ω тойрогтой дахин L цэгт огтлолцоно. EP, DL, FM шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт.

DL шулуун ω тойрогтой дахин K цэгт огтлолцдог гэе. Эдгээр 3 шулуун K цэгт огтлолцдог гэж баталъя. Өнцөг тооцвол

$$\begin{aligned}\angle AKL &= \angle ABC + \angle CAL \\ &= 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB + \angle CAL\end{aligned}$$

Эндээс $\angle NDE = \angle BAC/2$, $\angle END = (\angle ACB + \angle PBC)/2$, $\angle CAL = (\angle BAC - \angle PBC)/2$ гэдгийг тооцвол $\angle AKL = \angle DEC$ болж $KAED$ тойрогт багтана. Иймд $\angle DKE = \angle BAC/2 = \angle LKD$ болох тул K, E, D цэгүүд нэг шулуун дээр оршино. Мөн $KAED$ тойрогт багтана гэдгээс

$$\angle KDE = 180^\circ - \angle KAE = 180^\circ - \angle KAC = \angle KBC = \angle KBF$$

болж $KDFB$ тойрогт багтана. Эндээс $\angle DKF = \angle DBF = \angle PBC = \angle MKN$ болж K, F, M цэгүүд нэг шулуун дээр оршино.

Бодлого Е4. Тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийг багтаасан тойргийн C, D , оройнуудыг агуулдаггүй AB нумын дунжийг E гээд A, B , оройнуудыг агуулдаггүй CD нумын дунжийг F гэе. $AC \cap BF = K$, $BD \cap AF = L$, $AC \cap DE = M$, $BD \cap CE = N$ байг. $\angle DML = \angle CNK$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт.

$\angle MDN = \angle MCN$ тул $DCNM$ тойрогт багтана. Иймд $\angle DBA = \angle DCM = \angle DNM$ болж $MN \parallel AB$ гэж мөрдөнө. Үүнтэй төстэйгээр $KL \parallel CD$ гэж гарах ба Фаллесийн теоремоор

$$\frac{PK}{PL} = \frac{PC}{PD}$$

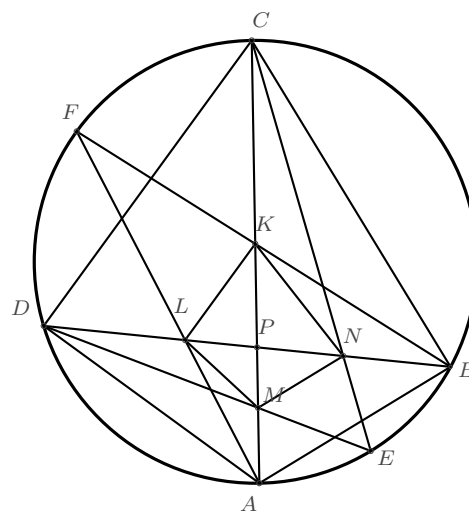
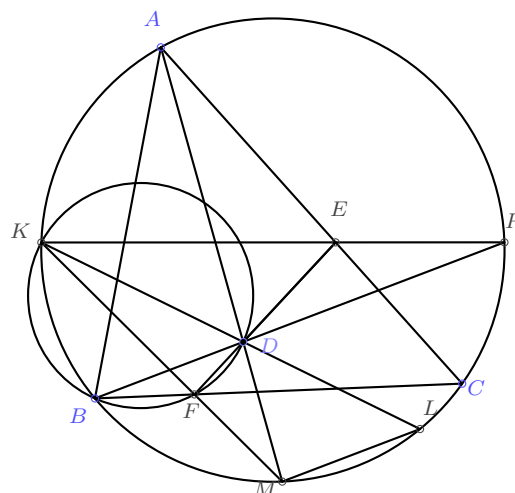
болно. $DCNM$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтах тул $\triangle DPM \sim \triangle CPN$ болно. K, L цэгүүд нь эдгээр гурвалжны талуудыг ижил харьцаагаар хуваах тул $\triangle DLM \sim \triangle CKN$ болох ба $\angle DML = \angle CNK$ гэж мөрдөнө.

Бодлого Е5. Бодит тоон $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ дарааллын хувьд $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ ба $n \geq 1$ үед

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{3a_{n+1} - 1}{a_{n+1} - a_n}$$

байв. $\{a_n\}$ дарааллын гишүүд натурал болохыг баталж a_{61} гишүүнийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)



Бодолт. Хариу: $a_{61} = 2791$.

$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 12, a_5 = 19, a_6 = 27, a_7 = 37$ байна. Эндээс $n \geq 2$ үед $a_{n+1} - a_{n-1} = 3n$ болохыг таамаглаж болно. Одоо $k \geq 1$ хувьд $a_{2k-1} = 3k^2 - 3k + 1, a_{2k} = 3k^2$ болохыг индукцээр батлах хэцүү биш: $k = 1$ үед үнэн ба $k \geq 1$ үед

$$3k^2 + 3k + 1 = 3k^2 + \frac{9k^2 - 1}{3k - 1}, \quad 3(k+1)^2 = 3k^2 + 3k + 1 + \frac{9k^2 + 9k + 2}{3k + 1}$$

байна. Иймд $a_{61} = 2791$ байна.

Бодлого Е6. Натурал N тооны цифрүүдийн нийлбэрийг $S(N)$ гэж тэмдэглэе.

$$S(n) + S(2n) + S(3n) + \dots + S(n^2) = \frac{4n^2}{15} + 9$$

байдаг бүх натурал n тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

Бодолт. Хариу: $n = 45$.

n шийд гэе. Бодлогын нөхцөлөөс $15 \mid n$ байна. Дурын натурал N тооны хувьд $S(N) \equiv N \pmod{9}$ байдгийг ашиглавал

$$\frac{4n^2}{15} + 9 \equiv S(n) + S(2n) + \dots + S(n^2) \equiv \frac{n^2(n+1)}{2} \equiv 0 \pmod{9}$$

гэдгээс $3^3 \cdot 5 \mid 4n^2$ болно. Иймд $45 \mid n$ байна. $n = 45m$ гэе.

Лемм. $9 \mid N < \underbrace{9 \dots 9}_k$ бол $S(N) \leq 9(k-1) < 9 \log_{10} N$ байна. □

$m = 1$ үед $n = 45$ шийд болно. $1 \leq i \leq 45$ хувьд $45i$ тоо цифрүүдийн нийлбэр нь 9-д хуваагддаг, 0 эсвэл 5-аар төгссөн тоо байна. 4 оронтой үед эхний цифр 2-оос хэтрэхгүй тул $S(45i) \leq 18$ байх ба тэнцэтгэл биелэх нь $45i = 990, 1890, 1980,$

$$495, 585, 675, 765, 855, 945, \quad 1395, 1485, 1575, 1665, 1755, 1845, 1935$$

үед байна. Иймд $\sum_{i=1}^{45} S(45i) = 9 \cdot 45 + 9 \cdot 16 = 549 = \frac{4 \cdot 45^2}{15} + 9$ байна.

$m = 2$ үед $1 \leq i \leq 90$ хувьд $S(90i) = S(9i) \leq 18$ тул $\sum_{i=1}^{90} S(90i) \leq 18 \cdot 90 < \frac{4 \cdot 90^2}{15}$ байна.

$m = 3$ үед $1 \leq i \leq 135$ хувьд $S(135i) \leq 36$ тул $\sum_{i=1}^{135} S(135i) \leq 36 \cdot 135 < \frac{4 \cdot 135^2}{15} + 9$ байна.

$m = 4$ үед $1 \leq i \leq 180$ хувьд $S(180i) \leq 36$ тул $\sum_{i=1}^{180} S(180i) \leq 36 \cdot 180 < \frac{4 \cdot 180^2}{15}$ байна.

$m \geq 5$ үед шийдгүй. Үнэхээр $45 \mid N$ үед $S(N) < 9 \log_{10} N$ тул

$$\sum_{i=1}^n S(ni) \leq 9 \sum_{i=1}^n \log_{10}(ni) \leq 18n \log_{10}(n)$$

байна. $f(x) = x - 75 \log_{10} x$ функцийг авч үзье. $x \geq 75$ үед $f'(x) = 1 - \frac{75}{x \log 10} > 0$ тул $f(x)$ өсөх ба

$$f(200) = 200 - 75 \log_{10} 200 = 50 - \frac{75}{\log_2 10} > 50 - \frac{75}{3} > 0$$

тул $n \geq 200$ үед $\frac{4n}{15} + \frac{9}{n} > \frac{4n}{15} > 18 \log_{10} n$ байна. Иймд $m \leq 5$ байна.

Г ангилал (11-12 анги)

Бодлого F1. Тэгээс ялгаатай a, b, c тоонуудын хувьд $\sqrt[3]{abc}(a+b+c) = ab+bc+ca$ байдаг бол эдгээр тоонуудыг ямар нэгэн дарааллаар бичихэд геометр прогресс үүснэ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. $t = \sqrt[3]{abc} \neq 0$ гэвэл

$$(t-a)(t-b)(t-c) = (t^3 - abc) - (t(a+b+c) - ab+bc+ca)t = 0$$

байна. $t = a$ үед $bc = a^2$ тул (c, a, b) геометр прогресс үүсгэнэ. Мөн ижлээр $t = b$ үед (a, b, c) , харин $t = c$ үед (b, c, a) геометр прогресс үүсгэнэ.

Бодлого F2. ω тойрогт хурц өнцөгт ABC гурвалжин багтжээ. ω тойргийн AB жижиг нумын дунджийг M гэе. ω тойргийн B цэгт татсан шүргэгч шулуун, AC шулуунтай P цэгт огтлолцоно. PM шулуун ω тойрогтой дахин G цэгт огтлолцоно. ω тойргийн G цэг дээрх шүргэгч шулуун BC шулуунтай Q цэгт огтлолцоно. AB, CG шулуунууд K цэгт огтлолцох ба P, Q, K, C цэгүүд нэг тойрог дээр орших бол KQ, GB шулуунууд параллел гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт.

$\triangle PMB \sim \triangle PBG, \triangle PMA \sim \triangle PCG$ ба $\triangle PBA \sim \triangle PCB$ учир

$$\frac{BG}{MB} = \frac{PG}{PB}, \quad \frac{MA}{CG} = \frac{PA}{PG}, \quad \frac{AB}{BC} = \frac{PA}{PB}$$

болох ба эхний 2 тэнцэлийг үржүүлээд 3 дахьтай нь тэнцүүлбэл,

$$\frac{BG}{CG} = \frac{PA}{PB} = \frac{AB}{BC}$$

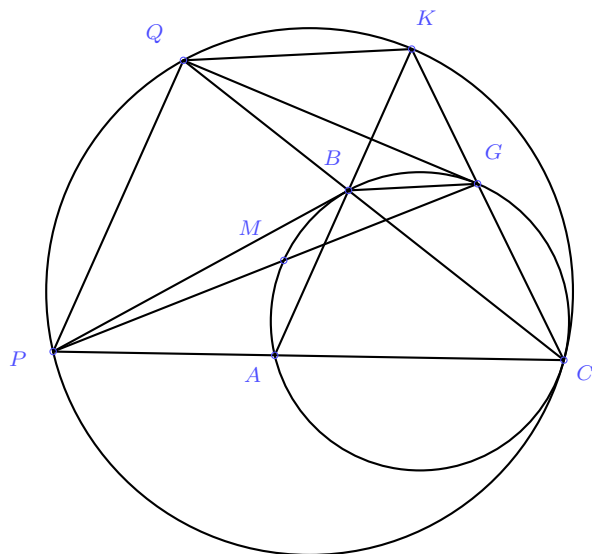
болно. $\triangle QBG \sim \triangle QGC, \triangle PBA \sim \triangle PCB$ учир дараах тэнцэлүүд биелнэ.

$$\frac{QB}{QC} = \left(\frac{BG}{CG}\right)^2, \quad \frac{PA}{PC} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2$$

үүнийг өмнөх үр дүнтэй нэгтгэвэл $\frac{QB}{QC} = \frac{PA}{PC}$ гарч $PQ \parallel AB$ болно. $(PQC) \cap CG = K'$ гэе. C дээр төвтэй $B \rightarrow Q$ гомотетээр $A \rightarrow P, G \rightarrow K'$ бууна. $PQKC$ тойрогт багтах тул $K \equiv K'$ болох ба гомотетийн чанараар $GB \parallel KQ$ болно.

Бодлого F3. $2n \times 2n$ хүснэгтийн (i, j) нүдэнд $2n(i-1) + j$ тоог бичжээ. Бат мөр ба багана бүрээс яг n ширхэг нүд сонгогдсон байхаар $2n^2$ ширхэг нүдийг сонгов. Сонгогдсон нүднүүд дэх тоонуудын нийлбэр нь сонгогдоогүй нүднүүд дэх тоонуудын нийлбэртэй тэнцүү байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)



Бодолт.

Халз тоолсон бодолт: $A = \{(i, j) | (i, j) \text{ нүд сонгогдсон}\}$ тэгвэл A олонлогт нэг дүгээр координат нь i байдаг яг n элемент байгаа ба хоёр дугаар координат нь j байдаг яг n элемент байгаа. Эндээс сонгогдсон нүднүүд дээрх тоонуудын нийлбэр

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in A} (2n(i-1) + j) &= 2n \sum_{i=1}^{2n} n(i-1) + \sum_{j=1}^{2n} nj \\ &= 2n^2 \frac{(2n-1)(2n)}{2} + n \frac{(2n)(2n+1)}{2} \\ &= n^2(4n^2 + 1) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{4n^2} k \end{aligned}$$

болж бодлого бодогдов.

Граф ашигласан бодолт: Сонгогдсон тоонуудын тэмдгүүдийг сольё.

$G = (V, E)$ графийг : $V = (r_1, r_2, \dots, r_{2n}, c_1, c_2, \dots, c_{2n})$ гээд $i, j \in \overline{1, 2n}$ хувьд хүснэгтийн i -р мөр j -р баганад харгалзах нүдэнд хэрэв эерэг тоо байвал $r_i \rightarrow c_j$ чиглэлийн дагуу харин сөрөг тоо байвал $c_j \rightarrow r_i$ чиглэлийн дагуу холбогдсон байхаар зохион байгуулъя. Уг байгуулалтаар $|E| = 4n^2$ болох ба хүснэгтийн нүд бүр графийн яг нэг ирмэгтэй харгалзах ба $r_i \rightarrow c_j$ ирмэгт харгалзах нүдэнд $2n(i-1) + j$ гэх тоо бичигдэх ба харин $c_j \rightarrow r_i$ ирмэгт харгалзах нүдэнд $-(2n(i-1) + j)$ тоо байна.

Лемм. G графийн дурын циклийн ирмэгүүдэд харгалзах нүднүүд дээрх тоонуудын нийлбэр 0 байна.

Баталгаа. $(r_{i_1} \rightarrow c_{j_1} \rightarrow r_{i_2} \rightarrow c_{j_2} \rightarrow \dots \rightarrow r_{i_k} \rightarrow c_{j_k} \rightarrow r_{i_1})$ нь G ийн ямар нэг цикл байсан гэе. Тэгвэл уг циклийн ирмэгүүдэд харгалзах нүднүүд дээрх тоонуудын нийлбэр

$$\sum_{1 \leq s \leq k} (2n(i_s - 1) + j_s) - \sum_{1 \leq s \leq k} (2n(i_{s+1} - 1) + j_s) = 0$$

болж батлагдав. Энд $i_{k+1} = i_1$ байна. □

Лемм. $G' = (V', E')$ нэг чиглэлт графийн дурын оройны хувьд уг оройноос гарсан болон орсон ирмэгийн тоо тэнцүү бол G граф цикл агуулна.

Баталгаа. $V' = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ гэе. Ямар нэг $u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_t$ зам авч үзье тэгвэл u_t гийн хувьд орсон болон гарсан ирмэгийн тоо тэнцүү тул $u_t \rightarrow u$ байх u олдоно хэрэв $u \in \{u_1, u_2, \dots, u_t\}$ бол G' граф цикл агуулна үүнээс эсэргээс нь G' граф цикл агуулдаггүй гэвэл $u \notin \{u_1, u_2, \dots, u_t\}$ байна үүнээс $u_{t+1} = u$ байхаар сонгож замын уртыг нэгээр нэмэгдүүлж чадах ба уг үйлдэлийг давтан хийсээр замыг уртыг төгсгөлгүй уртасгах чадах тул зөрчилд хүрнэ. □

Лемм 2 ыг ашиглавал G графийн ирмэгүүдийг үл огтлолцох циклүүдийн нийлбэрт тавьж болох ба Лемм 1 ийн дагуу цикл бүрийн хувьд уг циклийн ирмэгүүдэд харгалзах нүднүүд тоонуудын нийлбэр 0 тул хүснэгтийн бүх нүднүүдийн нийлбэр 0 болж батлагдав.

Бодлого F4. 2×64 хүснэгтийн хоёр нүдийг будав. Аль хоёр нүдийг будахад, ядаж нэг будагдсан нүд агуулсан дэд хүснэгтийн тоо хамгийн их байх вэ? Энд дэд хүснэгт гэж хүснэгтийн зангилааны цэгүүд дээр оройтой, хүснэгтийн талуудтай параллел талуудтай тэгш өнцөгтийг хэлнэ.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодолт. Хариу: Хоёр өөр мөрөнд, нэг нь урдаасаа 26-р баганад, нөгөөх нь хойноосоо 26-р баганад байх.

Урдаасаа эсвэл хойноосоо t -р баганад байгаа будагдсан нүд агуулсан дэд хүснэгтийн тоо $2t(65 - t)$ болохыг харахад төвөгтэй биш.

A нүд урдаасаа m -р баганад, B нүд хойноосоо n -р баганад байрласан ба A нүд B нүднээс эсвэл урд, эсвэл нэг баганад байрласан гэж үзье. Тэгвэл хоёр будагдсан нүдийг нэгэн зэрэг агуулсан дэд хүснэгтийн тоо уг хоёр нүд нэг ижил мөрд байгаа тохиолдолд $2mn$, хоёр өөр мөрд байгаа тохиолдолд mn байна. Ядаж нэг будагдсан нүд агуулсан дэд хүснэгтийн тоо: хоёр нүд нэг мөрд байрлах тохиолдолд

$$2m(65 - m) + 2n(65 - n) - 2mn$$

өөр, өөр мөрд байрлах тохиолдолд

$$2m(65 - m) + 2n(65 - n) - mn$$

байна. Тэгэхээр ядаж нэг будагдсан нүд агуулсан дэд хүснэгтийн тоо хамгийн их байхын тулд будагдсан хоёр нүд өөр, өөр мөрд байрлана. Эндээс бид

$$M = 2m(65 - m) + 2n(65 - n) - mn = 130m + 130n - 2m^2 - 2n^2 - mn$$

илэрхийллийн хамгийн их утгыг $1 \leq m, n \leq 64$ үед олох ёстой болов. Кошийн тэнцэтгэл биш ашиглан үнэлгээ хийвэл

$$\begin{aligned} M &= 130m + 130n - 2m^2 - 2n^2 - mn \\ &= 130(m + n) - 2(m + n)^2 + 3mn \\ &\leq 130(m + n) - 2(m + n)^2 + \frac{3(m + n)^2}{4} \\ &= 130(m + n) - \frac{5(m + n)^2}{4} \end{aligned}$$

болох ба сүүлийн илэрхийлэл $m + n = -\frac{130}{2 \cdot (-5/4)} = 52$ үед хамгийн их утга 3380-тай тэнцүү байна. Кошийн тэнцэтгэл биш тэнцэлдээ хүрэх нөхцөлийг тооцвол $m = n = 26$ ба будагдсан нүднүүд өөр, өөр мөрд байрлах үед $M = 3380$ байна.

Бодлого F5. $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ бүхэл тоон дарааллуудыг $a_1 = 3, b_1 = c_1 = 1$ ба $n \geq 1$ үед

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3a_n + b_n \\ b_{n+1} &= a_n + b_n \\ c_{n+1} &= b_n + c_n \end{aligned}$$

гэж тодорхойлж. $N \geq 3$ сондгой тоо гэе.

(1) $a_n - 1, b_n, c_n - 1$ тоонууд бүгд N -д хуваагддаг байх n дугаар олдоно гэж батал.

(2) $a_m - 1, b_m - 1, c_m - 1$ тоонууд бүгд N -д хуваагддаг байх m дугаар олдохгүй гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт.

(1) $a_0 = 1, b_0 = 0, c_0 = 1$ гэвэл $n = 0$ үед нөхцөл биелнэ.

Авч болох утга нь төгсгөлөг тул $(a_m, b_m, c_m) \equiv (a_n, b_n, c_n) \pmod{N}$ байх $0 \leq m < n$ олдох нь тодорхой. $m = 0$ бол бодлого бодогдоно. $m \geq 1$ үед $2a_{m-1} = a_m - b_m \equiv a_n - b_n = 2a_{n-1} \pmod{N}$ гэдгээс $a_{m-1} \equiv a_{n-1} \pmod{N}$ байна. Мөн $b_{m-1} = b_m - a_{m-1} \equiv b_n - a_{n-1} = b_{n-1} \pmod{N}$ ба $c_{m-1} = c_m - b_{m-1} \equiv c_n - b_{n-1} = c_{n-1} \pmod{N}$ болох тул $(a_{m-1}, b_{m-1}, c_{m-1}) \equiv (a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}) \pmod{N}$ байна. Индукцээр $m = 0$ гэж үзэж болно.

(2) Индукцээр $a_n = 2b_n + c_n$ гэж харуулъя. $n = 1$ үед $a_1 = 3 = 2 \cdot 1 + 1 = 2b_1 + c_1$ үнэн. $n \geq 1$ үед $a_{n+1} - 2b_{n+1} - c_{n+1} = a_n - 2b_n - c_n$ тул индукцийн алхам үнэн.

Иймд $(a_m, b_m, c_m) \equiv (1, 1, 1) \pmod{N}$ байх m олддог бол $2 \equiv 2b_m + c_m - a_m = 0 \pmod{N}$ болж зөрчил гарна.

Бодлого F6. Эерэг бодит тоон олонлогийг $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ гэж тэмдэглэе.

Дурын $x, y \in \mathbb{R}^+$ тоонуудын хувьд $f(xf(x) + y) = x^2 + f(y)$ байдаг бүх $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ функцийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Билэгдэмбэрэл)

Бодолт. Хариу: $f(x) = x$.

$f(x) = x$ шийд болох нь илт тул өөр шийдгүй гэж харуулъя.

$y > xf(x)$ үед $y \rightarrow y - xf(x)$ гэж орлуулбал $f(y) = x^2 + f(y - xf(x))$ болно. Давтан хэрэглэвэл n, m натурал тоонуудын хувьд $nx f(x) - my f(y) \geq 0$ бол

$$f(z + nx f(x) - my f(y)) = f(z) + nx^2 - my^2 > 0$$

байна. Энд (n, m) -ийн оронд (nk, mk) гэж авч болох тул $nx^2 - my^2 \geq 0$ байна.

Ямар нэг x, y хувьд $\frac{f(y)}{y} < \frac{f(x)}{x}$ бол $\frac{yf(y)}{xf(x)} < \frac{n}{m} < \frac{y^2}{x^2}$ байх n, m сонгож чадах ба энэ үед

$nx f(x) - my f(y) > 0 > nx^2 - my^2$ болж зөрчил гарна. Иймд дурын x, y хувьд $\frac{f(y)}{y} \geq \frac{f(x)}{x}$ байна. Тэгш хэмтэй тул тэнцэл биелнэ. $f(x) = ax$ хэлбэртэй ба $a(a+1) = f(f(1)+1) = 1^2 + f(1) = 1 + a$ гэдгээс $a = 1$ байна.

S ангилал (Бага ангийн багш)

Бодлого S1. Учрал хэсэг найзуудын хамт дэлгүүрээс хэдэн ном ба хэдэн дэвтэр худалдан авчээ. Нэг ширхэг ном нэг ширхэг дэвтрээс A дахин илүү үнэтэй. Учрал болон түүний найзууд шударга хуваарилах үүднээс худалдан авсан ном, дэвтрүүдээ мөнгөн дүнгээр тэнцүү байхаар хуваан авахаар шийдэв. Учрал бүх номын $\frac{1}{10}$ ба бүх дэвтрийн $\frac{1}{15}$ -ийг авсан байв. Тэрээр өөрт оногдсон ном болон дэвтрүүдээ тоолоход өөрт нь оногдсон дэвтрийн тоо номын тооноос 6 дахин их болохыг анзаарав. A -ийн авч болох бүх утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. Хариу: $A = 24, 9, 4, 3/2$.

Уутанд байсан ном ба дэвтрийн нийт үнийг харгалзан x, y гэе. Мөн Учралыг оролцуулан түүний найзуудын тоог n гэе. Хүн бүр мөнгөн дүнгээр тэнцүү тооны ном, дэвтэр авсан тул

$$n \left(\frac{x}{10} + \frac{y}{15} \right) = x + y.$$

Эндээс,

$$3x(n - 10) = 2y(15 - n) \quad (*)$$

болно. Иймд $n = 11, 12, 13, 14$ боломжтой.

- $n = 11$ үед $(*)$ тэгшитгэл $3x = 8y$ болно. Иймээс Учралд $x/10$ төгрөгийн үнэтэй ном болон $x/40$ төгрөгийн үнэтэй дэвтэр оноогджээ. Иймд мөнгөн дүнгийн харьцаа нь $\frac{x}{10} : \frac{x}{40} = 4$ ба дэвтрийн тоо номын тооноос 6 дахин их тул $A = 4 \cdot 6 = 24$.
- $n = 12$ үед $(*)$ тэгшитгэл $x = y$ болно. Иймээс Учралд $x/10$ төгрөгийн үнэтэй ном болон $x/15$ төгрөгийн үнэтэй дэвтэр оноогджээ. Иймд мөнгөн дүнгийн харьцаа нь $\frac{x}{10} : \frac{x}{15} = \frac{3}{2}$ ба дэвтрийн тоо номын тооноос 6 дахин их тул $A = 3/2 \cdot 6 = 9$.
- $n = 13$ үед $(*)$ тэгшитгэл $9x = 4y$ болно. Иймээс Учралд $x/10$ төгрөгийн үнэтэй ном болон $3x/20$ төгрөгийн үнэтэй дэвтэр оноогджээ. Иймд мөнгөн дүнгийн харьцаа нь $\frac{x}{10} : \frac{3x}{20} = \frac{2}{3}$ ба дэвтрийн тоо номын тооноос 6 дахин их тул $A = 2/3 \cdot 6 = 4$.
- $n = 14$ үед $(*)$ тэгшитгэл $6x = y$ болно. Иймээс Учралд $x/10$ төгрөгийн үнэтэй ном болон $2x/5$ төгрөгийн үнэтэй дэвтэр оноогджээ. Иймд мөнгөн дүнгийн харьцаа нь $\frac{x}{10} : \frac{2x}{5} = \frac{1}{4}$ ба дэвтрийн тоо номын тооноос 6 дахин их тул $A = 1/4 \cdot 6 = \frac{3}{2}$.

Бодлого S2. Олимпиадын хороо 5 хүнтэйгээр 20 удаа хуралдав. Хоёр хуралд хоёулаа суусан хоёр хүн байхгүй бол олимпиадын хороо хамгийн цөөндөө хэдэн гишүүнтэй байж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Л.Буянтогтох, Ш.Доржсэмбэ)

Бодолт. Хэрэв гишүүн бүр 4-өөс ихгүй хуралд суусан бол нийт хуралд суусан хүмүүсийн тоо давхардлын хамт 100 байх учир дор хаяж 25 гишүүнтэй болно. Харин дор хаяж 5 хуралд суусан нэг гишүүн олддог бол түүнтэй хуралд суусан гишүүд бүгд хоорондоо ялгаатай байх учир $5 \cdot 4 = 20$ гишүүн буюу хороо дор хаяж 21 гишүүнтэй. Одоо 21 гишүүнтэй байх жишээ өгье.

[1, 2, 3, 4, 5], [1, 6, 7, 8, 9], [1, 10, 11, 12, 13], [1, 14, 15, 16, 17], [1, 18, 19, 20, 21],
 [2, 6, 10, 14, 18], [2, 7, 11, 15, 19], [2, 8, 12, 16, 20], [2, 9, 13, 17, 21], [3, 6, 11, 16, 21],
 [3, 7, 10, 17, 20], [3, 8, 13, 14, 19], [3, 9, 12, 15, 18], [4, 6, 12, 17, 19], [4, 7, 13, 16, 18],
 [4, 8, 10, 15, 21], [4, 9, 11, 14, 20], [5, 6, 13, 15, 20], [5, 7, 12, 14, 21], [5, 8, 11, 17, 18].

Бодлого S3. Анхны тоон хуваагч бүрийхээ квадратад хуваагддаг зохиомол тоог *сайн тоо* гэе. Ялгаатай сайн тоонуудын нийлбэрт тавигддаггүй хамгийн их натурал тоог ол. Энд нийлбэр нэг гишүүнтэй байж болно. Жишээ нь 1, 3, 12 тоонууд сайн тоо биш бөгөөд 9 ба 108 сайн тоо мөн.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. Хариу: 30.

Ялгаатай сайн тоонуудын нийлбэрт тавигддаг тоог онц гэе. 9, 25, 27 ба 4, 8, 16, ... тоонууд сайн.

Натурал тоо ялгаатай 2-ийн зэрэгтүүдийн нийлбэрт нэг утгатай бичигддэгийг саная. Эндээс $4k$, $9 + 4(k - 1)$, $9 + 25 + 4(k - 1)$, $27 + 4(k - 1)$ хэлбэртэй бүх тоо онц байна.

Тухайлбал 31-ээс багагүй бүх тоо онц. Одоо 30 онц биш гэж харуулъя. 30-аас бага сайн тоо дээр бичсэн 6-аас өөр байхгүй ба $9 + 25 > 30$ тул нийлбэрт сондгой тоо орох боломжгүй. $4 + 8 + 16 < 30$ тул тэгш сайн тоонуудын нийлбэрт тавих боломжгүй.

Бодлого S4. $1 \leq x, y \leq 45$ бөгөөд $\frac{x^3 + 1}{xy + 1}$ харьцаа бүхэл байдаг бүх натурал тоон (x, y) хосын тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

Бодолт. Хариу: $6 + 44 + 43 = 93$.

Бодлогын нөхцөлд өгсөн ёсоор $\frac{x^3 + 1}{xy + 1} = k$ бүхэл гэе. Дараах хоёр тохиолдолдыг авч үзье.

1) $x < y$ байг. Энэ үед $k = \frac{x^3 + 1}{xy + 1} < x$ ба $k = x^3 - kxy + 1$ гэж гарна. Эндээс k тоог x -д хуваахад 1 үлдэх тул $k = 1$, $y = x^2$ болно. Иймд $(x, y) = (n, n^2)$, $n = 1, 2, \dots, 6$ болов.

2) $x \geq y$ байг. $ky^3 = \frac{x^3y^3 + y^3}{xy + 1} = x^2y^2 - xy + 1 + \frac{y^3 - 1}{xy + 1}$ тул $\frac{y^3 - 1}{xy + 1}$ бүхэл байх ёстой.

2.1) Хэрэв $y = 1$ байвал x -дурын натурал тоо байж болно. Өөрөөр хэлбэл $(x, y) = (n, 1)$, $n = 2, 3, \dots, 45$ (өмнөх (1) тохиолодолд $(1, 1)$ шийдийг тооцсон!)

2.2) Хэрэв $y > 1$ байвал $\ell = \frac{y^3 - 1}{xy + 1} \in \mathbb{N}$ ба $\ell < y$ байна. Эндээс $\ell = y^3 - \ell xy - 1$ буюу $\ell \equiv y - 1 \pmod{y}$ болж $\ell = y - 1$, $x = y + 1$ болно. Иймд $(x, y) = (n, n - 1)$, $n = 3, 4, \dots, 45$ болов.

Бодлого S5. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ тоонууд иррационал байдгийг саная.

(1) s, t, r бүхэл тоонуудын хувьд $s + \sqrt{2}t + \sqrt{3}r = 0$ бол $s = t = r = 0$ гэж батал.

(2) a, b, c, d бүхэл тоонуудын хувьд $\frac{a + \sqrt{2}b + \sqrt{3}c}{b + \sqrt{2}c + \sqrt{3}d}$ харьцаа рационал тоо байдаг бол $ad = bc$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

Бодолт.

(1) $s + \sqrt{2}t = -\sqrt{3}r$ гэдгээс $2\sqrt{2}st = 3r^2 - s^2 - 2t^2$ болох ба $\sqrt{2}$ иррационал тул $st = 0$ байна.

$s = 0$ бол $2t = -\sqrt{6}r$ ба $\sqrt{6}$ иррационал гэдгээс $t = r = 0$ байна.

$t = 0$ бол $s = -\sqrt{3}r$ ба $\sqrt{3}$ иррационал гэдгээс $s = r = 0$ байна.

(2) $p, q \neq 0$ бүхэл ба $\frac{a + \sqrt{2}b + \sqrt{3}c}{b + \sqrt{2}c + \sqrt{3}d} = \frac{p}{q}$ гэе.

$p = 0$ бол өмнөх хэсгээс $a = b = c$ болох тул $ad = 0 = bc$ байна.

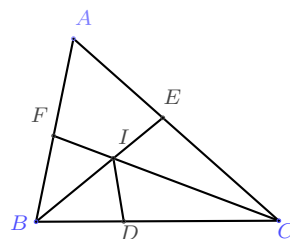
$p \neq 0$ гэе. Нөхцөлөөс $(aq - bp) + \sqrt{2}(bq - cp) + \sqrt{3}(cq - dp) = 0$ болох тул өмнөх хэсгээс $aq - bp = bq - cp = cq - dp = 0$ болно. Эндээс $aqdp = bpcq$ болох тул $ad = bc$ байна.

Бодлого S6. ABC гурвалжны BE, CF биссектрисүүд I цэгт огтлолцоно. Энд F цэг AB тал дээр, E цэг AC тал дээр оршино. $\angle A = 60^\circ$ бол $S_{BCF} + S_{BCE} = 3S_{BIC}$ гэж батал. Энд XYZ гурвалжны талбайг S_{XYZ} гэж тэмдэглэв.

(Дэвшүүлсэн: Б. Билэгдэмбэрэл)

Бодолт.

BIC өнцгийн биссектрисийг ID гэе. $\angle BIC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC - \frac{1}{2}\angle ACB = 120^\circ$ учраас $\angle FIB = \angle DIB = \angle CIE = 60^\circ$ болно. ӨТӨ шинжээр $\triangle BIF = \triangle BID, \triangle CIE = \triangle CID$ болох ба эндээс талбайнууд нь тэнцүү болох ба батлах үр дүн мөрдөнө.



Т ангилал (Дунд ангийн багш)**Бодлого Т1.**

(1) $t \geq 2$ бол $t^3 \geq t^2 + 4$ байна гэж баталж тэнцэтгэл биелэх нөхцөлийг ол.

(2) $t_1, t_2, \dots, t_n \geq 2$ тоонуудын хувьд

$$\frac{t_1^3}{t_2^2 + 4} + \frac{t_2^3}{t_3^2 + 4} + \dots + \frac{t_{n-1}^3}{t_n^2 + 4} + \frac{t_n^3}{t_1^2 + 4} \geq n$$

байна гэж баталж тэнцэтгэл биелэх нөхцөлийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт.

(1) $t \geq 2$ бол $t^3 \geq 2t^2 = t^2 + t^2 \geq t^2 + 4$ байна. $t = 2$ үед тэнцэтгэл биелнэ.

(2) Дундаж ашигласан бодолт: Арифметик-Геометр дунджийн тэнцэтгэл бишээр

$$\frac{t_1^3}{t_2^2 + 4} + \frac{t_2^3}{t_3^2 + 4} + \dots + \frac{t_{n-1}^3}{t_n^2 + 4} + \frac{t_n^3}{t_1^2 + 4} \geq n \sqrt[n]{\frac{t_1^3}{t_1^2 + 4} \cdot \frac{t_2^3}{t_2^2 + 4} \cdots \frac{t_n^3}{t_n^2 + 4}}$$

болох тул (1)-с мөрдөнө.

Эрэмбэ ашигласан бодолт: $t_1, t_2, \dots, t_n \geq 2$ тоонуудыг $2 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$ гэж эрэмбэлэе.

Энэ үед

$$s_1^3 \leq s_2^3 \leq \dots \leq s_n^3 \quad \text{ба} \quad \frac{1}{s_1^2 + 4} \geq \frac{1}{s_2^2 + 4} \geq \dots \geq \frac{1}{s_n^2 + 4}$$

тул эрэмбийн тэнцэтгэл бишээр

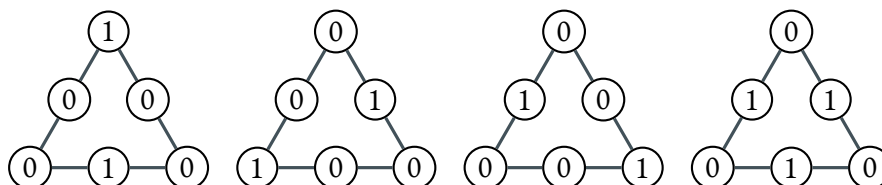
$$\frac{t_1^3}{t_2^2 + 4} + \frac{t_2^3}{t_3^2 + 4} + \dots + \frac{t_{n-1}^3}{t_n^2 + 4} + \frac{t_n^3}{t_1^2 + 4} \geq \frac{s_1^3}{s_1^2 + 4} + \frac{s_2^3}{s_2^2 + 4} + \dots + \frac{s_n^3}{s_n^2 + 4}$$

болох тул (1)-с мөрдөнө.

$t_1 = t_2 = \dots = t_n = 2$ үед тэнцэтгэл биелнэ.

Бодлого Т2. Гурвалжин хэлбэртэй цайзын гурван талын дундаж цэг болон гурван орой дээр харуулын цамхаг байдаг гэе. Талын дундаж цэг дээр байгаа харуул тэр талаа хамгаалж чадна, орой дээр байгаа харуул залгаа хоёр талаа хамгаалж чадна.

Жишээлбэл, цайзын тал болгоныг яг 1 харуул хамгаалдаг байхаар харуулуудыг нийт 4 янзаар байрлуулж болно.



Цайзын тал болгоныг яг n харуул хамгаалдаг байхаар харуулуудыг нийт хэдэн янзаар байрлуулж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Хариу: $(4n^3 + 18n^2 + 28n + 15 + (-1)^n)/16$.

$m = \lfloor n/2 \rfloor$ гэе. Талын хоёр орой дээр a, b цэрэг байвал талын дундаж дээр $n - a - b$ цэрэг байх хэрэгтэй. Иймд сөрөг биш бүхэл тоон гурвалуудаас тогтох

$$A_n = \{(a, b, c) \mid a + b \leq n, a + c \leq n, b + c \leq n\}$$

олонлогийн гишүүдийг тоолоход болно. Энд

$$B_n = \{(a, b, c) \in A_n \mid a \leq m, b \leq m, c \leq m\} = \{(a, b, c) \mid a \leq m, b \leq m, c \leq m\}$$

$$C_n = \{(a, b, c) \in A_n \mid c > m\} = \{(a, b, c) \mid a \leq n - c, b \leq n - c, m < c \leq n\}$$

гэвэл $|A_n| = |B_n| + 3|C_n|$ байна. Одоо $k = n - m$ гэвэл

$$|B_n| = (m + 1)^3, \quad |C_n| = \sum_{c=m+1}^n (n - c + 1)^2 = \sum_{d=1}^k d^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

байх тул

$$|A_{2m}| = \frac{(m+1)(4m^2 + 5m + 2)}{2}, \quad |A_{2m+1}| = \frac{(m+1)(4m^2 + 11m + 8)}{2},$$

болох ба нийлүүлээд

$$|A_n| = \frac{4n^3 + 18n^2 + 28n + 15 + (-1)^n}{16}$$

гэж бичиж болно.

Бодлого ТЗ. ω тойрогт хурц өнцөгт ABC гурвалжин багтжээ. ω тойргийн AB жижиг нумын дунджийг M гэе. ω тойргийн B цэгт татсан шүргэгч шулуун, AC шулуунтай P цэгт огтлолцоно. PM шулуун ω тойрогтой дахин G цэгт огтлолцоно. ω тойргийн G цэг дээрх шүргэгч шулуун BC шулуунтай Q цэгт огтлолцоно. AB, CG шулуунууд K цэгт огтлолцох ба P, Q, K, C цэгүүд нэг тойрог дээр орших бол KQ, GB шулуунууд параллел гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. **F2** бодлогын бодолтыг харна уу.

Бодлого Т4. ABC гурвалжны AB тал дээр D цэгийг, BC тал дээр E цэгийг $ADEC$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтаж байхаар авав. BDE гурвалжныг багтаасан тойргийн B оройг агуулаагүй DE нум дээр X, Y ялгаатай цэгүүдийг $BX = BY$ байхаар авав. XY, AC шулуунууд параллел гэж батал.

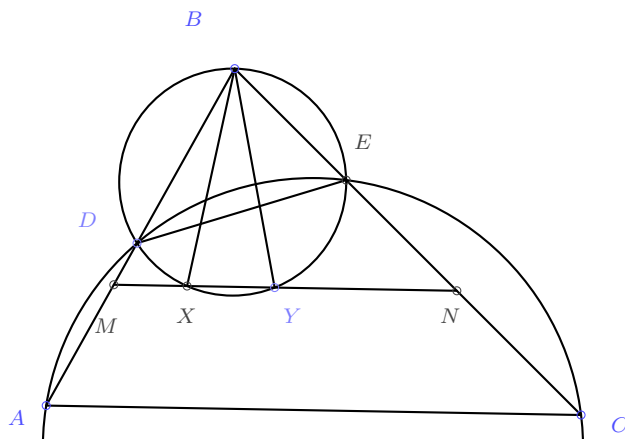
(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт.

$XY \cap AD = M, XY \cap CE = N$ гэе. $BX = BY$ тул $\angle XDB = \angle YEB$ байна. Эдгээрийн хамар өнцгүүд тэнцүү $\angle MDX = \angle NEY$. Энд $DEYX$ тойрогт багтах тул $\angle EDX = \angle EYN$ болно. NEY гурвалжны өнцгүүдийн нийлбэр

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \angle ENY + \angle NEY + \angle EYN \\ &= \angle ENY + \angle MDX + \angle EDX \\ &= \angle ENY + \angle MDE \end{aligned}$$

болж $DENM$ тойрогт багтана. Эндээс $\angle ENM = 180^\circ - \angle EDM = \angle ECA$ болж батлагдав.



Бодлого Т5. Бодит тоон $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ дарааллын хувьд $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ ба $n \geq 1$ үед

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{3a_{n+1}^2 - 1}{a_{n+1} - a_n}$$

байв. $\{a_n\}$ дарааллын гишүүд натурал болохыг баталж $a_{61} > 4^{61}$ гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. $a_3 = 16$ байна. $b_1 = 1$ ба $n \geq 2$ үед $b_n = a_n - a_{n-1}$ гэвэл $b_2 = 2$, $b_3 = 13$ ба

$$b_{n+2}b_{n+1} = 3(a_n + b_{n+1})^2 - 1 = 3a_n^2 - 1 + 6a_nb_{n+1} + 3b_{n+1}^2 = (b_n + 6a_n + 3b_{n+1})b_{n+1}$$

тул $b_{n+2} = 6a_n + b_n + 3b_{n+1}$ байна. Эндээс $n \geq 2$ үед $a_{n+2} = 4a_{n+1} + 4a_n - a_{n-1}$ болно.

Иймд a_n бүхэл байна. Мөн $a_3 > a_2 > a_1$ ба $n \geq 2$ үед $a_n > a_{n-1}$ бол $a_{n+2} > a_{n+1}$ байна. Эндээс $a_{n+1} > a_n \geq 1$ тул a_n натурал байна.

Одоо $\alpha = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$, $\beta = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$ гэвэл $x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = (x+1)(x-\alpha)(x-\beta)$ гэдгээс

$$a_n = \frac{1}{7}(\alpha^n + \beta^n - 2(-1)^n)$$

гэж бичигдэхийг харах хэцүү биш (эндээс мөн $a_n \geq 1$ болох нь мөрдөнө).

Эцэст нь $5 > \sqrt{21} > 4$ гэдгээс $\alpha > 0$ ба $\beta > 4.5$ тул $a_{61} > 4.5^{61}/7$ байна. Бернулийн тэнцэтгэл бишээр $(4.5/4)^{61} > 1.1^{61} > 1 + 61/10 > 7$ тул бодлого бодогдов.

Бодлого Т6. $m \leq 2n - 2$ бөгөөд

$$a^n + b^n = (a, b)^m(a + b), \quad b^n + c^n = (b, c)^m(b + c), \quad c^n + a^n = (c, a)^m(c + a)$$

байдаг бүх натурал тоон (a, b, c, m, n) тавтыг ол. Энд x, y тоонуудын хамгийн их ерөнхий хуваагчийг (x, y) гэж тэмдэглэв.

(Дэвшүүлсэн: Б. Билэгдэмбэрэл)

Бодолт. Хариу: $2n \geq m + 2$ үед $(1, 1, 1, m, n)$, $(a, a, a, n - 1, n)$.

Хариу шийд болох нь илт тул өөр шийдгүй гэж харуулъя. $2n \geq m + 2 \geq 3$ гэдгээс $n \geq 2$ байна. a, b, c тэгш хэмтэй гэдгийг анзааръя.

(1) $a = 1$ бол $1 + b^n = 1 + b$, $c^n + 1 = c + 1$ гэдгээс $b = c = 1$ байна. Иймд ядаж нэг нь 1 бол бүгд 1 байна.

(2) Бүгд ≥ 2 гэе. $(a, b)^m = \frac{a^n + b^n}{a + b} \geq \frac{a^{n-1} + b^{n-1}}{2} \geq 2$ гэдгээс $(a, b) \geq 2$ байх ба $(a, b)^m \geq \frac{a^{n-1} + b^{n-1}}{2} \geq (a, b)^{n-1}$ гэдгээс $m \geq n - 1$ байна.

(i) $m = n - 1$ бол тэнцэтгэл биелнэ гэдгээс $a = b = c$ байна.

(ii) $m \geq n$ үед шийдгүй гэж харуулъя. $g = (a, b, c)$ гээд $a = ga_1$, $b = gb_1$, $c = gc_1$ гэвэл $(a_1, b_1, c_1) = 1$ байна.

Эхлээд $g = 1, 2$ гэж харуулъя. $g^{m-n+1}(a_1, b_1)^m(a_1 + b_1) = a_1^n + b_1^n$ гэдгээс $g^{m-n+1} \mid a_1^n + b_1^n$, $b_1^n + c_1^n$, $c_1^n + a_1^n$ болох тул $g^{m-n+1} \mid 2a_1^n, 2b_1^n, 2c_1^n$ байна. Эндээс $g \mid g^{m-n+1} \mid 2(a_1^n, b_1^n, c_1^n) = 2$ байна.

$d = (b_1, c_1)$, $e = (c_1, a_1)$, $f = (a_1, b_1)$ хос хосоороо харилцан анхны тул $a_1 = efa_2$, $b_1 = fdb_2$, $c_1 = dec_2$ гэж бичигдэнэ. Энэ үед

$$(gf)^{m-n+1} = \frac{(ea_2)^n + (db_2)^n}{ea_2 + db_2} \geq \frac{(ea_2)^{n-1} + (db_2)^{n-1}}{2} \geq \frac{e^{n-1} + d^{n-1}}{2}$$

байна.

$g = 1$ үед $f^{n-1} \geq f^{m-n+1} \geq \frac{e^{n-1} + d^{n-1}}{2}$ байх ба үлдсэн хоёроос тэнцэтгэл биелэх нь гарах тул $d = e = f = (a_1, b_1) = (a, b) \geq 2$ байна. Эндээс $g \geq 2$ болж зөрчил гарна.

$g = 2$ үед $m = n$ ба $2(a_1, b_1)^n(a_1 + b_1) = a_1^n + b_1^n \equiv 0 \pmod{2}$ байна. Энд a_1 сондгой бол b_1, c_1 сондгой. $(a_1, b_1, c_1) = 1$ гэдгээс ядаж нэг нь сондгой тул бүгд сондгой.

$n = 2$ үед $2 \equiv a_1^2 + b_1^2 \equiv 0 \pmod{4}$ болж зөрчил гарна.

$n \geq 3$ гэе. $2f \geq \frac{e^{n-1} + d^{n-1}}{2} \geq \frac{e^2 + d^2}{2}$ байна. Бүгдийг нэмбэл $d^2 + e^2 + f^2 \leq 2(d + e + f)$ буюу $(d - 1)^2 + (e - 1)^2 + (f - 1)^2 \leq 3$ болох тул $d, e, f \leq 2$ байна.

d, e, f сондгой тул $d = e = f = 1$ байна. $2 = \frac{a_2^n + b_2^n}{a_2 + b_2} \geq \frac{a_2^{n-1} + b_2^{n-1}}{2}$ гэдгээс $a_2 = b_2 = c_2 = 1$ болох ба энэ үед $2 > (1^n + 1^n)/(1 + 1)$ болж зөрчил гарна.

Монголын Математикийн 61-р Олимпиадын III Даваа

Улсын Олимпиад

Монголын Математикийн 61-р олимпиадын III даваа 2025 оны 4 сарын 1-нээс 5-ны өдрүүдэд Нийслэлийн ЕБ-ын 11-р сургууль дээр амжилттай зохион байгуулагдав.

Зохион байгуулагчаар ММОХ, хамтран зохион байгуулагчаар Нийслэлийн ЕБ-ын 1-р сургууль болон Нийслэлийн ЕБ-ын 11-р сургууль ажиллав. Зохион байгуулалтыг Хорооноос С. Цогзолмаа, 1-р сургуулиас Б. Эрдэнэбат, 11-р сургуулиас С. Батсайхан ахлаж ажиллав. Амжилттай хамтран ажилласан 1-р сургуулийн захирал Р. Энхбат, 11-р сургуулийн захирал Б. Хишигбаяр нарт гүн талархал илэрхийлье.

Олимпиадын Е ангилалд 85 сурагч, F ангилалд 84 сурагч, Т ангилалд 67 багш оюун ухаан авьяас чадвараа сорин уралдав.

Тус олимпиадын үйл ажиллагааг удирдлага, санхүүжүүлэлтээр хангасан Боловсролын Яам болон Боловсролын Ерөнхий Газарт талархал илэрхийлье.

Олимпиадын мэргэжлийн хороо

Олимпиадын мэргэжлийн үйл ажиллагааг Ү. Отгонбаяр ахлагчтай их, дээд сургуулиудын багш, оюутнуудын баг гүйцэтгэж бодлого зохиох, дэвшүүлэх, сонгох, засах, дүгнэх аргачлалыг гаргах, бодолт хамгаалах ажлуудыг тус тус гүйцэтгэлээ. Бодлогын багийг Ү. Отгонбаяр, засалтын багийг Т. Хулан ахлав.

Багш	Оюутан
Т.Базар	А.Алтансүх
Б.Батбаясгалан	Х.Анхбаяр
У.Батзориг	Г.Баяржавхлан
Б.Баяржаргал	Т.Билгүүн
Г.Баярмагнай	Э.Гэрэлхүү
Л.Буянтогтох	Г.Далайцэрэн
Д.Даянцолмон	Н.Дөлгөөн
Ш.Доржсэмбэ	Б.Дөлгөөнмөрөн
Э.Оргил-Эрдэнэ	Х.Нурсолтан
Ү.Отгонбаяр	Г.Оргил
Т.Хулан	О.Тэнгис
С.Цогзолмаа	Б.Улсболд
	Б.Хангал
	У.Хүслэн
	Ц.Цэнгэл

Даамал ба ахлагч

Ангилал	Даамал	Сэдэв	Ахлагч
E	Хулан	A - Алгебр	Батзориг
F	Батзориг	G - Геометр	Хулан
T	Баярмагнай	C - Комбинаторик	Батбаясгалан
		N - Тооны онол	Баярмагнай

Бодлогын мэдээлэл

		Зохиогч	Зассан		
E1	N	Алтансүх	Алтансүх	Цэнгэл	
E2	C	Батбаясгалан	Анхбаяр	Билгүүн	
E3	G	Батзориг	Гэрэлхүү	Далайцэрэн	
E4	G	Хулан	Гэрэлхүү	Далайцэрэн	
E5	A	Отгонбаяр	Билгүүн	Доржсэмбэ	Анхбаяр
E6	N	Баярмагнай	Оргил-Эрдэнэ	Хангал	
F1	C	Батбаясгалан	Дөлгөөнмөрөн	Оргил-Эрдэнэ	Цэнгэл
F2	N	Ханзул	Нурсолтан	Тэнгис	
F3	G	Батзориг	Базар	Дөлгөөн	
F4	G	Ханзул	Улсболд	Дөлгөөн	
F5	A	Отгонбаяр	Дөлгөөнмөрөн	Цэнгэл	
F6	N	Баярмагнай	Нурсолтан	Батзориг	Тэнгис
T1	A	Отгонбаяр	Улсболд	Доржсэмбэ	
T2	N	Батзориг	Хангал	Буянтогтох	
T3	C	Билэгдэмбэрэл	Баяржавхлан		
T4	C	Батбаясгалан	Баяржавхлан		
T5	G	Билэгдэмбэрэл	Базар	Баяржаргал	
T6	N	Баярмагнай	Тэнгис	Алтансүх	

Бодлого хамгаалалт

Бодлого хамгаалалтыг цахим ба танхимийн гэсэн 2 үе шаттайгаар зохион байгуулав. 1-р шатанд оролцогчдын бодлого хамгаалах хүсэлтийг цахимаар хүлээн авч тухайн бодлого зассан комиссын гишүүд, сэдвийг хариуцсан ахлагч, бодлого зохиогч нар хамтран хариу тайлбарыг цахимаар өгсөн ба 2-р шатанд оролцогчдыг төлөөлж багш нар танхимаар ирж бодлого хамгаалав.

Олимпиадын дүн

Е ангилал

Медаль	Овог	Нэр	Сургууль	Оноо
Алт	Бямбасүх	Цолмон	Орчлон	29
Алт	Алтангэрэл	Ану	11-р сургууль	29
Мөнгө	Мөнхжин	Тэмүгэ	1-р сургууль	28
Мөнгө	Ууганбаяр	Бэлгүтэй	Эрдмийн Сан	26
Мөнгө	Мөнхтөгс	Бадамсамбуу	1-р сургууль	26
Хүрэл	Энхбат	Хангарьд	Сант	23
Хүрэл	Баттулга	Дэлгэрмөрөн	Дэлгэрмөрөн	22
Хүрэл	Азжаргал	Гоомарал	Шинэ Монгол Харүмафүжи	21
Хүрэл	Гансүмбэрэл	Дөлгөөн	Эрхэт Эрдэм	21
Хүрэл	Үнэнтөгс	Эрхэс	Hobby school of Ulaanbaatar	21
Хүрэл	Энхбаатар	Энхлэн	Шинэ Монгол	21
Хүрэл	Мөнгөншагай	Нандин-Эрдэнэ	Монгол Оюу	21
Хүрэл	Бэхбаяр	Чингүүн	Олонлог төв	21
Хүрэл	Энхтүвшин	Чингүн	1-р сургууль	21
Уран бодолт	Мөнхтөгс	Бадамсамбуу	1-р сургууль	26

F ангилал

Медаль	Овог	Нэр	Сургууль	Оноо
Алт	Сонор	Манлай	Сант	34
Мөнгө	Багахүү	Мөнхбадар	11-р сургууль	32
Мөнгө	Отгонбаяр	Түвшинбаатар	Эрхэт Эрдэм	32
Мөнгө	Тамир	Билгүүнгэрэлт	Эрхэт Эрдэм	32
Мөнгө	Даваадорж	Хүслэн	Сант	32
Мөнгө	Мөнхбаяр	Амин-Эрдэнэ	Шинэ үе	32
Хүрэл	Арвис	Ивээл	11-р сургууль	31
Хүрэл	Батлхагва	Тэнүүнсайдхан	Шинэ үе	31
Хүрэл	Эрдэнэбат	Мөнхтөр	Эрхэт Эрдэм	30
Хүрэл	Алдаржав	Наранбаатар	Эрхэт Эрдэм	29
Хүрэл	Болдбаатар	Төвшиндалай	11-р сургууль	29
Хүрэл	Наранбаатар	Болор	Эрдмийн Хишиг	27
Хүрэл	Эрдэнэбат	Энхжин	Эрдмийн Сан	27
Хүрэл	Анхбаяр	Мишээл	Orchlön	27
Хүрэл	Чиндэгсүрэн	Чингүн	Сант	27
Уран бодолт	Ерулан	Нартулга	Цонжин Кибер Боардинг	20

Т ангилал

Медаль	Овог	Нэр	Сургууль	Оноо
Алт	Дамбадорж	Хосбаяр	11-р сургууль	29
Мөнгө	Раднаабазар	Доржзовд	Эрдмийн сан	28
Мөнгө	Бат-Очир	Ганбилэг	Олонлог төв сургууль	27
Мөнгө	Мягмар	Батбилэг	Орчлон	27
Хүрэл	Хэнзий	Санжаахүү	Сант	25
Хүрэл	Ганбаатар	Түмэндэмбэрэл	Монгол Оюу	25
Хүрэл	Мөнхтогоо	Гантогтох	Орчлон	25
Уран бодолт	Раднаабазар	Доржзовд	Эрдмийн сан	28

Бодлогууд**Е (9-10)**

Бодлого Е1. X олонлогийн элементүүдийн нийлбэрийг $S(X)$ гэж тэмдэглэе.

$2^1, 2^2, \dots, 2^{10}$ тоонуудыг A ба B олонлогт хувааж хийе.

$$x^2 - S(A)x + S(B) = 0$$

тэгшитгэл натурал тоон шийдтэй байдаг байхаар $2^1, 2^2, \dots, 2^{10}$ тоонуудыг A ба B олонлогт хэдэн янзаар хувааж хийх боломжтой вэ? (A эсвэл B олонлог хоосон байж болно.)

$c_1, c_2, \dots, c_n$ тоонуудыг A ба B олонлогт хувааж хийнэ гэдэг нь A, B олонлогууд ерөнхий элементгүй ба $c_1, c_2, \dots, c_n$ тоонууд A, B олонлогуудын аль нэгэнд нь заавал орно гэсэн үг.

(Дэвшүүлсэн: А. Алтансүх)

Бодлого Е2. $a_0 = 2^{2025}$ тоо өгөгдсөн. Хоёр тоглогч ээлжлэн дараах дүрмээр тоглоно:

n -р ээлжинд тоглогч $a_n = a_{n-1} + 1$ эсвэл $a_n = S(a_{n-1})$ тоонуудын аль нэгийг дараалалд нэмж бичнэ.

Хэрвээ дараалалд гурван ижил тоо гарсан эсвэл дарааллын дараалсан дөрвөн гишүүн арифметик прогресс үүсгэж байвал тоглоомыг зогсоож хамгийн сүүлд тоо бичсэн тоглогч ялагч болно. Зөв тоглоход аль тоглогч хожих вэ?

Энд $S(n)$ нь n тооны цифрүүдийн нийлбэр юм.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодлого Е3. O цэгт төвтэй ω тойрогт багтсан элдэв талт ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв I байг. BI шулуун ω тойрогтой дахин M цэгт огтлолцдог байг. I цэгийн AC шулууны хувьд тэгш хэмтэй орших цэгийг I_B гээ. MI_B шулуун ω тойрогтой $D \neq M$ цэгт огтлолцдог байг. Мөн DO шулуун ω тойрогтой дахин E цэгээр огтлолцдог байг. OI ба BE шулуунууд параллел гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого Е4. ABC гурвалжны BC тал дээр K, L цэгүүдийг, AC тал дээр M цэгийг, AB тал дээр N цэгийг, $\triangle KMC \sim \triangle ABC$ ба $\triangle LBN \sim \triangle ABC$ мөн NL, KM хэрчмүүд ABC гурвалжны дотор P цэгт огтлолцдог байхаар авав. AMP гурвалжныг багтаасан тойрог CP шулуунтай дахин X цэгт, ANP гурвалжныг багтаасан тойрог BP шулуунтай дахин Y цэгт огтлолцоно. B, C, X, Y цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого Е5. Бүгд 2-оос хэтэрдэггүй a, b, c, d бодит тоонуудын хувьд

$$\frac{a^3}{b^2 + 4} + \frac{b^3}{c^2 + 4} + \frac{c^3}{d^2 + 4} + \frac{d^3}{a^2 + 4} \leq 4$$

байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого Е6. $n \geq 3$ натурал тоо байг. m оронтой N гэсэн натурал тоо $10^n - 3$ тоонд хуваагдана. Хэрэв $2n - 1 > m > n$ биелдэг бол N тооны цифрүүд дунд ядаж гурван ялгаатай цифр оршино гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Ү ангилал (11-12 анги)

Бодлого F1. $a_0 = 2^{2025}$ тоо өгөгдсөн. Хоёр тоглогч ээлжлэн дараах дүрмээр тоглоно:

n -р ээлжинд тоглогч $a_n = a_{n-1} + 1$ эсвэл $a_n = S(a_{n-1})$ тоонуудын аль нэгийг дараалалд нэмж бичнэ.

Хэрвээ дараалалд гурван ижил тоо гарсан эсвэл дарааллын дараалсан дөрвөн гишүүн арифметик прогресс үүсгэж байвал тоглоомыг зогсоож хамгийн сүүлд тоо бичсэн тоглогч ялагч болно. Зөв тоглоход аль тоглогч хожих вэ?

Энд $S(n)$ нь n тооны цифрүүдийн нийлбэр юм.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодлого F2. Натурал n тооноос бага n -тэй харилцан анхны натурал тооны тоог $\varphi(n)$ гэж тэмдэглэе. Жишээлбэл $\varphi(6) = |\{1, 5\}| = 2$ ба $\varphi(1) = |\{1\}| = 1$ байна.

a, b, c, d сөрөг биш бүхэл тоонуудын хувьд $\varphi(2^a(2b+1)) = 2^c(2d+1)$ байв. $b \geq 1$ гэе.

(1) $a \leq c$ гэж батал.

(2) $b \geq 2d+1$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: М. Ханзул)

Бодлого F3. ω тойрогт багтсан элдэв талт ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв I байг. BI шулуун ω тойрогтой дахин M цэгт огтлолцдог байг. I цэгийн AC шулууны хувьд тэгш хэмтэй орших цэгийг I_B гэе. ω тойргийн AM бага нум дээр H цэгийг $\angle BHI_B = 90^\circ$ байхаар сонгов. II_B хэрчим ба AC хэрчмүүдийн огтлолцлын цэгийг T гэе. HT шулуун ω тойрогтой дахин N цэгт огтлолцдог байг. MN хэрчим ба AC хэрчмүүдийн огтлолцлын цэгийг R гэе. Тэгвэл IRM гурвалжныг адил хажуут гурвалжин болохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого F4. $AB \neq AC$ байх ABC гурвалжны ортотөвийг H гэе. ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн A оройг агуулаагүй BC нум дээр T цэг авав. H цэгийг дайрсан BC талтай параллел l шулуун, TB шулуунтай P цэгт, TC шулуунтай Q цэгт огтлолцоно. PAB, QAC гурвалжныг багтаасан тойргууд дахин S цэгт огтлолцоно.

$\angle PAQ = 2\angle BAC$ гэе.

(1) S цэг BHC гурвалжныг багтаасан тойрог дээр оршино гэж батал.

(2) $\angle PАН = \angle НАQ$ эсвэл $\angle PAB = \angle BAN$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: М. Ханзул)

Бодлого F5. Бүгд 2-оос хэтэрдэггүй $t_1, t_2, \dots, t_n \leq 2$ бодит тоонуудын хувьд

$$\frac{t_1^3}{t_2^2 + 4} + \frac{t_2^3}{t_3^2 + 4} + \dots + \frac{t_{n-1}^3}{t_n^2 + 4} + \frac{t_n^3}{t_1^2 + 4} \leq n$$

байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого F6. Хоёр өөр цифрээр бичигдэх $10^{2025} + 3$ нийлбэрт хуваагддаг тоо хамгийн багадаа хэдэн оронтой байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Т ангилал (Дунд ангийн багш)

Бодлого Т1. Гурвалжны a, b, c талуудын эсрэг өнцгүүд тус тус α, β, γ байв.

a, b, c уртууд энэ дарааллаараа арифметик прогресс үүсгэдэг бол $\cos \alpha, 1 - \cos \beta, \cos \gamma$ утгууд энэ дарааллаараа арифметик прогресс үүсгэнэ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого Т2. $m^{2025} + n^{2024} = pmn$ байдаг бүх m, n натурал тоонууд болон p анхны тоон (m, n, p) гурвалыг ол.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого Т3. Нэгэн улс n арлаас бүрддэг. Зарим арлууд хоорондоо гүүрээр холбогдох ба гүүрүүдийг холбон зам хийнэ. Аливаа хоёр арлын хувьд тэднийг холбосон зам олддог бол хамгийн цөөхөн гүүрээр дамждаг замын гүүрний тоог тэр хоёр арлын зай гэнэ. Арал бүр ядаж m аралтай гүүрээр холбогддог бол арал хоорондын зай хамгийн ихдээ хэд байж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Билэгдэмбэрэл)

Бодлого Т4. $\{1, 2, \dots, n\}$ олонлогийн $x - y = 1$ байх x, y элементүүд агуулаагүй дэд олонлогийн тоог A_n гээд $x - y = 2$ байх x, y элементүүд агуулаагүй дэд олонлогийн тоог B_n гээ. $A_{2025} < B_{1013}^2$ болохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан, Х. Нурсолтан)

Бодлого Т5. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны өндрүүд AD, BE, CF байг. BC диаметртэй ω тойрог AD хэрчимтэй ABC дотор K цэгт огтлолцдог гээ. KD цацраг дээр $KA = KL$ байх L цэг авъя. BL, CL шулуунууд ω тойрогтой харгалзан P, Q цэгүүдэд огтлолцдог гээ. AD, QE, PF шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Билэгдэмбэрэл)

Бодлого Т6. Өгөгдсөн натурал $n \geq 3$ тооны хувьд $10^n - 7$ ялгаварт хуваагддаг зөвхөн 1, 2 цифрүүдээр бичигдэх тоо хамгийн багадаа хэдэн оронтой байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолтууд

Е ангилал (9-10 анги)

Бодлого Е1. X олонлогийн элементүүдийн нийлбэрийг $S(X)$ гэж тэмдэглэе.

$2^1, 2^2, \dots, 2^{10}$ тоонуудыг A ба B олонлогт хувааж хийе.

$$x^2 - S(A)x + S(B) = 0$$

тэгшитгэл натурал тоон шийдтэй байдаг байхаар $2^1, 2^2, \dots, 2^{10}$ тоонуудыг A ба B олонлогт хэдэн янзаар хувааж хийх боломжтой вэ? (A эсвэл B олонлог хоосон байж болно.)

$c_1, c_2, \dots, c_n$ тоонуудыг A ба B олонлогт хувааж хийнэ гэдэг нь A, B олонлогууд ерөнхий элементгүй ба $c_1, c_2, \dots, c_n$ тоонууд A, B олонлогуудын аль нэгэнд нь заавал орно гэсэн үг.

(Дэвшүүлсэн: А. Алтансүх)

Бодолт. Хариу: 2.

$2^1, 2^2, \dots, 2^{10}$ тоонуудаар $0, 2, 4, \dots, 2046$ доторх бүх тэгш тоог гаргаж чадахыг харуулах төвөггүй. Иймд $S(A) = 2n$ ($0 \leq n \leq 1023$) гээ. $2^1 + 2^2 + \dots + 2^{10} = 2046$ учир $S(B) = 2046 - 2n$ болох ба $S(A)$ тэгш тоо учир

$$D = S(A)^2 - 4S(B) = 4n^2 - 4(2046 - 2n) = 4n^2 + 8n - 8184$$

бүхэл тооны квадрат байхад хангалттай. Эндээс $4n^2 + 8n - 8184 = 4(n^2 + 2n - 2046)$ буюу $(n+1)^2 - 2047 = a^2$ болох ба шийдүүд нь $(n, a) = (1023, 1023); (55, 33)$ болно. Иймд 2 янзаар хувааж хийх боломжтой.

Бодлого Е2. $a_0 = 2^{2025}$ тоо өгөгдсөн. Хоёр тоглогч ээлжлэн дараах дүрмээр тоглоно:

n -р ээлжинд тоглогч $a_n = a_{n-1} + 1$ эсвэл $a_n = S(a_{n-1})$ тоонуудын аль нэгийг дараалалд нэмж бичнэ.

Хэрвээ дараалалд гурван ижил тоо гарсан эсвэл дарааллын дараалсан дөрвөн гишүүн арифметик прогресс үүсгэж байвал тоглоомыг зогсоож хамгийн сүүлд тоо бичсэн тоглогч ялагч болно. Зөв тоглоход аль тоглогч хожих вэ?

Энд $S(n)$ нь n тооны цифрүүдийн нийлбэр юм.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодолт. Эхлээд a_0 -ийн бага утгуудад хэн хожихыг олъё.

Өмнө нь a тоо давтагдаагүй ба $a_n = a \leq 9$ үед $a_{n+1} = S(a_n) = a$ гэж тоглосон тоглогч хожигдоно. Учир нь дараагийн тоглогч $a_{n+2} = S(a_{n+1}) = a$ гээд гурван ижил a -тай болж хожино.

Одоо a_0 -ийн ямар ч утгад эхний тоглогч хожино гэдгийг харуулъя.

$a_0 \leq 8$ үед эхний тоглогч хожино. Учир нь 1 ба 2-р тоглогчид 3 ижил тоогоор хожигдохгүйн тулд $a_1 = a_0 + 1$ ба $a_2 = a_1 + 1$ дүрмийг ашиглах хийх ёстой ба 3 дахь үйлдлийг 1-р тоглогч мөн л $a_3 = a_2 + 1$ дүрмээр гүйцэтгээд хожино.

$a_0 = 9$ үед $a_1 = 10$ гэвэл $a_2 = 11$ эсвэл $a_2 = 1$ байна. Эхний тохиолдолд $a_3 = 12$ гээд 1-р тоглогч хожих ба $a_2 = 1$ тохиолдол нь $a_0 = 1$ тохиолдол руу шилжих тул мөн л 1-р тоглогч хожино.

$10 \leq a$ үед $S(a) \leq a - 9$ тул индукцээр $a_n = S(a_{n-1})$ үйлдэл хийсэн тоглогч хожигдоно. Иймд хоёр тоглогч хожигдохгүйн тулд зөвхөн $a_n = a_{n-1} + 1$ дүрмээр тоглоно. Энэ үед a_0, a_1, a_2, a_3 тоонууд 4 урттай арифметик прогресс үүсгэх учир 1-р тоглогч хожино.

1-р тоглогч ямагт хожих тул $a_0 = 2^{2025}$ үед ч мөн 1-р тоглогч хожино.

Бодлого Е3. O цэгт төвтэй ω тойрогт багтсан элдэв талт ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв I байг. BI шулуун ω тойрогтой дахин M цэгт огтлолцдог байг. I цэгийн AC шулууны хувьд тэгш хэмтэй орших цэгийг I_B гээ. MI_B шулуун ω тойрогтой $D \neq M$ цэгт огтлолцдог байг. Мөн DO шулуун ω тойрогтой дахин E цэгээр огтлолцдог байг. OI ба BE шулуунууд параллел гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. Хоёр бодолт хийе.

I бодолт. DM ба AC шулуунуудын огтлолцлын цэгийг F , M цэгийн AC шулууны хувьд тэгш хэмтэй орших цэгийг G гэж тэмдэглэе. Incenter-Excenter Lemma ёсоор (AIC) тойргийн төв M болно.

$$\angle CDM = \frac{\widehat{CM}}{2} = \frac{\widehat{AM}}{2} = \angle MCA$$

тул $\Theta\Theta\Theta$ шинжээр, $\triangle CMF \sim \triangle DMC$. Эндээс, $MC^2 = MF \cdot MD = IM^2$ болно. G нь M цэгийн AC талын хувьд тэгш хэмтэй цэг тул $\angle FMG = \angle FGM$ болно. Нөгөө талаас, $OM = OD$ тул $\angle DMO = \angle MDO$ буюу $\angle MGF = \angle MDO$ болж $FGOD$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. Иймд $MF \cdot MD = MG \cdot MO = MI^2$ болно. Иймд ТӨТ шинжээр $\triangle MGI \sim \triangle MIO$ болно. Эндээс, $\angle MIG = \angle MOI$. Өнцөг хөөх замаар,

$$\begin{aligned} \angle MDO + \angle MIO &= \angle MDO + \angle MIG + \angle GIO \\ &= \angle MDO + \angle MOI + \angle GIO \\ &= \angle IGO + \angle GOI + \angle GIO \\ &= 180^\circ \end{aligned}$$

болж $MIOD$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. Иймд

$$\angle DMI = \angle IOE = \angle OEB$$

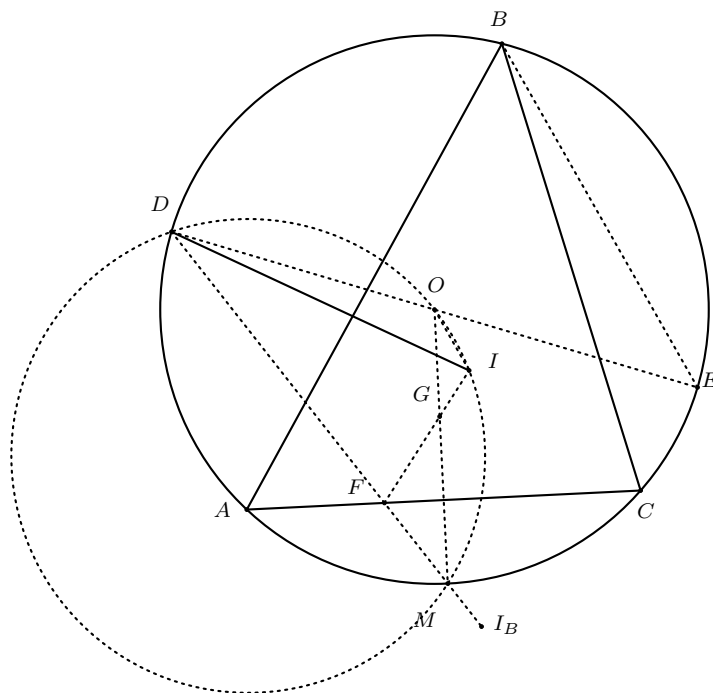
буюу $IO \parallel EB$ болж бодлого бодогдов.

II бодолт. $OM \parallel II_B$ учраас $\angle IMO = \angle I_BIM$ болно. Мөн $BO = OM$ учраас $\angle IMO = \angle IBO = \angle I_BIM$.

$$BI \cdot IM = R^2 - OI^2 = 2Rr$$

гэдгийг ашиглая. $BI \cdot IM = 2Rr = 2 \cdot BO \cdot \frac{II_B}{2} = BO \cdot II_B$ болох тул ТӨТ чанараар $\triangle I_BIM \sim \triangle IBO$ болно.

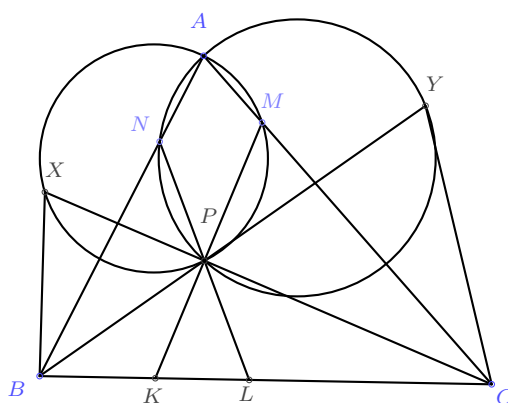
Эндээс $\angle BOI = \angle IMI_B = \angle BMD = \angle BED = \angle OBE$ болж батлагдана.



Бодлого Е4. ABC гурвалжны BC тал дээр K, L цэгүүдийг, AC тал дээр M цэгийг, AB тал дээр N цэгийг, $\triangle KMC \sim \triangle ABC$ ба $\triangle LBN \sim \triangle ABC$ мөн NL, KM хэрчмүүд ABC гурвалжны дотор P цэгт огтлолцдог байхаар авав. AMP гурвалжныг багтаасан тойрог CP шулуунтай дахин X цэгт, ANP гурвалжныг багтаасан тойрог BP шулуунтай дахин Y цэгт огтлолцоно. B, C, X, Y цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт.



I бодолт: $\triangle KMC \sim \triangle ABC$ учир $\angle MKC = \angle BAC$ болох ба $AMKB$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. Огтлогчийн чанараар $BC \cdot KC = AC \cdot MC$ болно. Мөн $AMKB$ тойрогт багтах тул $AC \cdot MC = XC \cdot PC$ биелнэ. Сүүлийн 2 тэнцлээс $XC \cdot PC = BC \cdot KC$ гэж мөрдөх тул $BXPK$ тойрогт багтана. Эндээс $\angle BXC = \angle MKC = \angle BAC$ болно.

Дээрхтэй төстэйгээр $\angle BYC = \angle NLC = \angle BAC$ гэж харуулна. Иймд $BXYC$ тойрогт багтана.

II бодолт: Дээрхтэй адилаар $AMKB$, $ANLC$ тойрогт багтана. Эндээс $\angle ABC = 180 - \angle AMP = \angle AXP$ болох ба $ABCX$ тойрогт багтана. Үүнтэй төстэйгээр $ABCY$ тойрогт багтана. Иймд $ABCXY$ тойрогт багтах болж батлагдав.

Бодлого Е5. Бүгд 2-оос хэтэрдэггүй a, b, c, d бодит тоонуудын хувьд

$$\frac{a^3}{b^2 + 4} + \frac{b^3}{c^2 + 4} + \frac{c^3}{d^2 + 4} + \frac{d^3}{a^2 + 4} \leq 4$$

байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. $a, b, c, d \geq 0$ гэж үзэхэд явцуурах зүйл үгүй. 2-т хуваан $0 \leq a, b, c, d \leq 1$ тоонуудын хувьд

$$\frac{a^3}{b^2 + 1} + \frac{b^3}{c^2 + 1} + \frac{c^3}{d^2 + 1} + \frac{d^3}{a^2 + 1} \leq 2$$

гэж батлахад хангалттай. Одоо a хамгийн их гээ. Энэ үед

$$\frac{a^3}{b^2 + 1} + \frac{b^3}{c^2 + 1} \leq \frac{1}{2} + \frac{a^3}{c^2 + 1}$$

байна. Үнэхээр, ижил хуваарь өгөөд хялбарчилбал

$$2a^3b^2 + b^2c^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq 2a^3c^2 + 2b^5 + 2b^3$$

гэж батлахтай ижил болох ба $b^2c^2 + 1 \geq b^2 + c^2$ тул $b^2(a^3 - b^3) + b^2(1 - b) + c^2(1 - a^3) \geq 0$ гэдгээс мөрдөнө. Мөн ижлээр

$$\frac{a^3}{c^2 + 1} + \frac{c^3}{d^2 + 1} \leq \frac{1}{2} + \frac{a^3}{d^2 + 1} \quad \text{ба} \quad \frac{a^3}{d^2 + 1} + \frac{d^3}{a^2 + 1} \leq \frac{1}{2} + \frac{a^3}{a^2 + 1}$$

байна. Илт $2a^3 \leq a^2 + 1$ тул бодлого бодогдов.

Буцаагаад 2-оор үржүүлб. (a, b, c, d, a) дараалал 0, 2-оос тогтох ба дараалсан 0 агуулаагүй үед тэнцэл биелнэ.

Нэмэлт. F5 бодлогын бодолтыг харна уу.

Бодлого Е6. $n \geq 3$ натурал тоо байг. m оронтой N гэсэн натурал тоо $10^n - 3$ тоонд хуваагдана. Хэрэв $2n - 1 > m > n$ биелдэг бол N тооны цифрүүд дунд ядаж гурван ялгаатай цифр оршино гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. $d = 10^n - 3$ гээ. Эсрэгээс нь 3-аас цөөн цифрээр бичигдэх $d \mid A$ байх $A = \overline{a_n \dots a_1}$ тоо олдоно гэж үзье. $S = \overline{a_n \dots a_1} + 3 \times \overline{a_m \dots a_{n+1}}$ гээ. Өгсөн нөхцөлөөр $2n - 2 \geq m$ тул

$$S \leq 10^n - 1 + 3 \times (10^{n-2} - 1) < 2d.$$

Түүнчлэн $d \mid A$ ба $d \mid A - S$ гэдгээс $d \mid S$, иймээс

$$\overline{a_n \dots a_1} + 3 \times \overline{a_m \dots a_{n+1}} = \underbrace{9 \dots 9}_{n-1} 7 \quad (*)$$

болно. $3 \times 10^{n-2} > 3 \times \overline{a_m \dots a_{n+1}}$ тул $(*)$ адилтгалаас $99 - \overline{a_n a_{n-1}} \in \{0, 1, 2\}$, эндээс $a_n = 9$ гэж мөрдөнө. Мөн $m \geq n + 1$ тул $3a_{n+1} + a_1 \equiv 7 \pmod{10}$ биелнэ. Эндээс $a_1 \neq a_{n+1}$ гэж мөрдөх ба $9 \in \{a_1, a_{n+1}\}$ учраас $(a_1, a_{n+1}) = (0, 9)$ эсвэл $(9, 6)$ болно. Аль ч тохиолдолд $3 \mid S$, гэвч энэ нь $(*)$ -тэй зөрчилдөнө.

Г ангилал (11-12 анги)

Бодлого F1. $a_0 = 2^{2025}$ тоо өгөгдсөн. Хоёр тоглогч ээлжлэн дараах дүрмээр тоглоно:

n -р ээлжинд тоглогч $a_n = a_{n-1} + 1$ эсвэл $a_n = S(a_{n-1})$ тоонуудын аль нэгийг дараалалд нэмж бичнэ.

Хэрвээ дараалалд гурван ижил тоо гарсан эсвэл дарааллын дараалсан дөрвөн гишүүн арифметик прогресс үүсгэж байвал тоглоомыг зогсоож хамгийн сүүлд тоо бичсэн тоглогч ялагч болно. Зөв тоглоход аль тоглогч хожих вэ?

Энд $S(n)$ нь n тооны цифрүүдийн нийлбэр юм.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодолт. **E2** бодлогын бодолтыг харна уу.

Бодлого F2. Натурал n тооноос бага n -тэй харилцан анхны натурал тооны тоог $\varphi(n)$ гэж тэмдэглэе. Жишээлбэл $\varphi(6) = |\{1, 5\}| = 2$ ба $\varphi(1) = |\{1\}| = 1$ байна.

a, b, c, d сөрөг биш бүхэл тоонуудын хувьд $\varphi(2^a(2b+1)) = 2^c(2d+1)$ байв. $b \geq 1$ гэе.

(1) $a \leq c$ гэж батал.

(2) $b \geq 2d+1$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: М. Ханзул)

Бодолт. $2b+1 = (2b_1+1)^{\alpha_1} \dots (2b_l+1)^{\alpha_l}$ анхны тоон задаргаатай гэе. Энэ үед

$$\varphi(2b+1) = 2^l(2b_1+1)^{\alpha_1-1} \dots (2b_l+1)^{\alpha_l-1} b_1 \dots b_l$$

байна. $b \geq 1$ тул $l \geq 1$ байна.

(1) $a = 0$ үед батлах зүйл үгүй тул $a \geq 1$ гэе. Энэ үед $c \geq a-1+l \geq a$ байна.

(2) $\frac{2d+1}{2b+1} \leq \frac{b_1}{2b_1+1} \dots \frac{b_l}{2b_l+1} < \frac{1}{2}$ тул $2d+1 \leq b$ байна.

Бодлого F3. ω тойрогт багтсан элдэв талт ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв I байг. BI шулуун ω тойрогтой дахин M цэгт огтлолцдог байг. I цэгийн AC шулууны хувьд тэгш хэмтэй орших цэгийг I_B гэе. ω тойргийн AM бага нум дээр H цэгийг $\angle BHI_B = 90^\circ$ байхаар сонгов. II_B хэрчим ба AC хэрчмүүдийн огтлолцлын цэгийг T гэе. HT шулуун ω тойрогтой дахин N цэгт огтлолцдог байг. MN хэрчим ба AC хэрчмүүдийн огтлолцлын цэгийг R гэе. Тэгвэл IRM гурвалжныг адил хажуут гурвалжин болохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. ω тойргийн төвийг O гээд $MI_B \cap \omega = D$ гэе. Мөн ω тойрогт BP ба DE диаметрууд татъя.

Лемм 1. IBD гурвалжин адил хажуут гурвалжин байна.

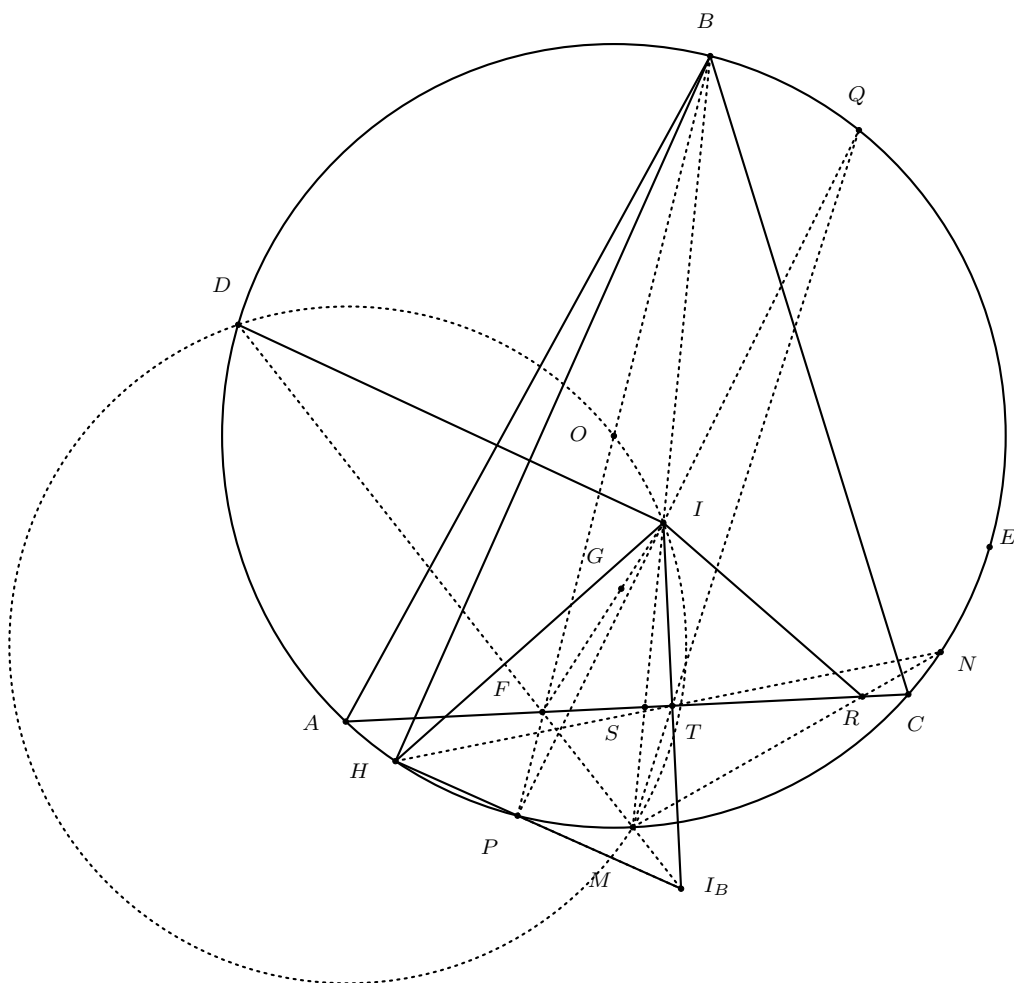
Баталгаа: DM ба AC шулуунуудын огтлолцлын цэгийг F , M цэгийн AC шулууны хувьд тэгш хэмтэй орших цэгийг G гэж тэмдэглэе. Incenter-Excenter Lemma ёсоор (AIC) тойргийн төв M болно. M цэг дээр төвтэй (AIC) тойргийн хувь дахь инверсийг Φ гэе. Тэгвэл энэ инверсээр I цэг өөртөө, D ба F цэгүүд харилцан бие биедээ бууна. Мөн $MI^2 = MO \cdot MG$ болохыг хялбар тооцоо хийн шалгаж болох тул Φ инверсээр O ба G цэгүүд харилцан бие биедээ бууна. M, I_B, F цэгүүд нэг шулуун дээр орших тул G, I, F цэгүүд нэг шулуун дээр оршино, энэ шулууныг ℓ гэе. ℓ шулуун Φ инверсийн төвийг дайраагүй тул инверсийн төвийг дайрсан тойрогт бууна, энэ тойрог

нь (DIO) байх нь илт. Иймд $DIOM$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. Иймд $\angle OIM = \angle ODM = \angle EDM = \angle EBM = \angle EBI$. Эндээс $OI \parallel BE$ болох тул $OI \perp BD$. Иймд $IB = ID$ болж IBD адил хажуут гурвалжин болох нь батлагдав.

PI шулуун ω тойрогтой Q цэгт огтолцдог байг. Тэгвэл M, T, Q цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэдгийг харуулъя. Φ инверсээр ω ба AC харилцан бие биедээ буух тул энэ инверсээр A цэгийн дүр $S = BM \cap AC$ байна. Иймд Φ инверсээр I цэг өөртөө буух тул энэ инверсээр BI ба IS диаметртэй тойргууд харилцан бие биедээ бууна. $IT \perp TS$ тул T цэг IS диаметртэй тойрог дээр оршино. Мөн $BQ \perp QP$ тул Q цэг BI диаметртэй тойрог дээр оршино. Иймээс Φ инверсээр Q цэгийн дүр нь T байна. Эндээс M, T, Q цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж гарна.

$MDNHPQ$ зургаан өнцөгтийн хувьд Паскалийн теоремийн урвуугуур D, I, N цэгүүд нэг шулуун дээр оршино. Лемм 1 болон I цэгийн зэргийг авч үзвэл $IM = IN$ буюу IMN гурвалжин адил хажуут гурвалжин байна.

Одоо бодлогынхоо бодолтод шилжиг. Φ инверсээр R ба N цэгүүд харилцан бие биедээ буух тул $MI^2 = MR \cdot MN$. Иймд $\triangle IMR \sim \triangle NIM$. Нөгөө талаас дээр баталсан ёсоор $IM = IN$ тул $IR = RM$ буюу IRM адил хажуут гурвалжин болох нь батлагдав.



Бодлого F4. $AB \neq AC$ байх ABC гурвалжны ортотөвийг H гэе. ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн A оройг агуулаагүй BC нум дээр T цэг авав. H цэгийг дайрсан BC талтай параллел l шулуун, TB шулуунтай P цэгт, TC шулуунтай Q цэгт огтлолцоно. PAB , QAC гурвалжныг багтаасан тойргууд дахин S цэгт огтлолцоно.

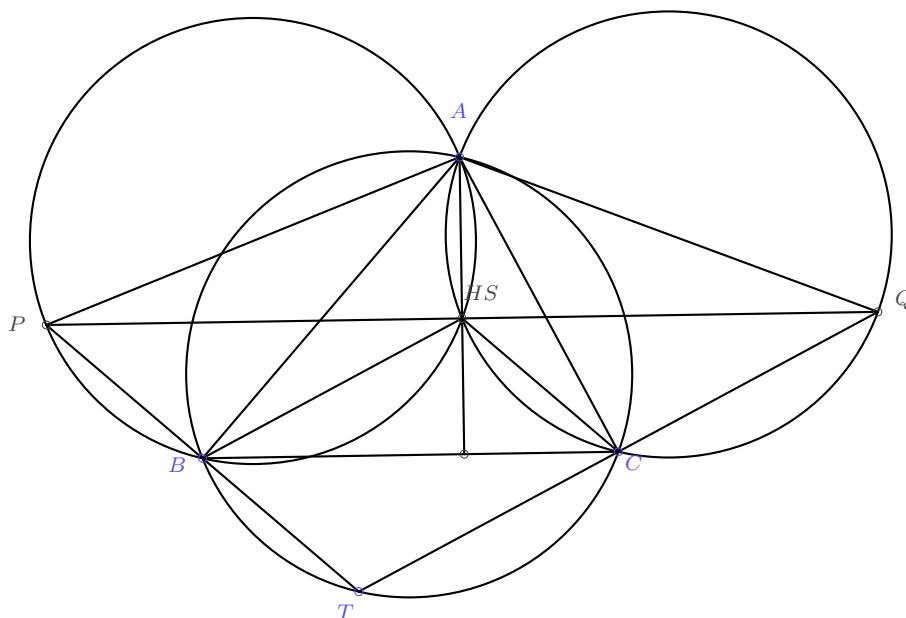
$\angle PAQ = 2\angle BAC$ гэе.

- (1) S цэг BHC гурвалжныг багтаасан тойрог дээр оршино гэж батал.
- (2) $\angle PAH = \angle HAQ$ эсвэл $\angle PAB = \angle BAH$ гэж батал.

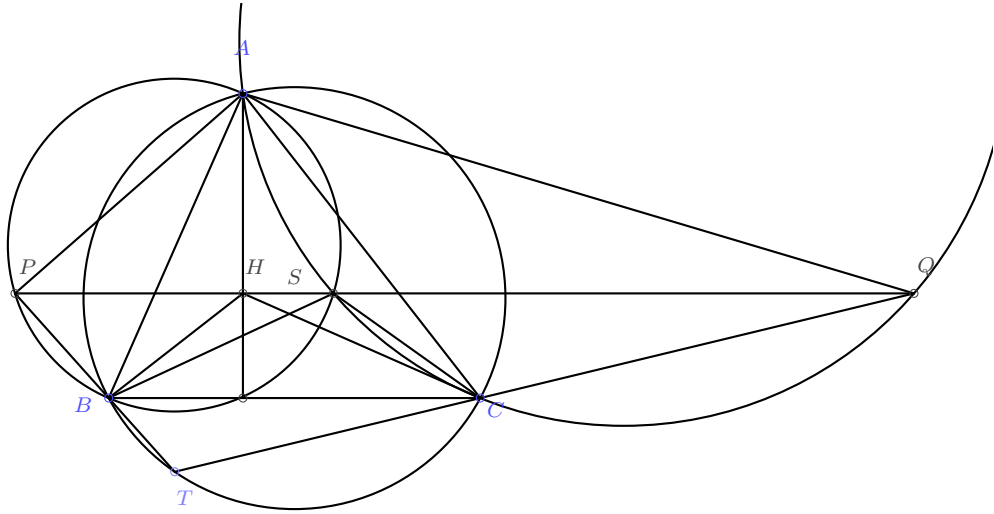
(Дэвшүүлсэн: М. Ханзул)

Бодолт.

- (1) Тойрогт багтсан дөрвөн өнцөгтийн чанараар $\angle PSA = \angle PBA = 180^\circ - \angle ABT = \angle ACT = 180^\circ - \angle ACQ = 180^\circ - \angle ASQ$ болох тул S цэг PQ шулуун дээр оршино. Өгсөн нөхцөлөөс $\angle PAB + \angle CAQ = \angle BAC$ гэж мөрдөх ба $\angle PSB + \angle CSQ = \angle BAC$ болно. Иймд $\angle BSC = 180^\circ - \angle BAC = \angle BHC$ болж S цэг BHC гурвалжныг багтаасан тойрог дээр оршино.
- (2) S , H цэгүүд PQ шулуун дээр оршино, мөн BHC гурвалжыг багтаасан тойрог дээр оршино. Иймд $S = H$ эсвэл $S \neq H$ байна.
1-р тохиолдол: $S = H$



Энэ үед P цэг ABH гурвалжныг багтаасан тойрог дээр оршино. $AH \perp PQ$, мөн $90^\circ = \angle AHP = \angle ABP$ учир $\angle ABT = 90^\circ$ байна. Иймд AT нь ABC -г багтаасан тойргийн диаметр болно. Энэ үед $BTCH$ нь параллелграм болох ба T дээр төвтэй 2 коэффициенттэй гомотетээр BC хэрчим PQ -д бууна. Эндээс $TB = BP$, $TC = CQ$ болно. $AB \perp TP$, $AC \perp TQ$ гэдгийг санавал A нь TPQ гурвалжныг багтаасан тойргийн төв болно. $AH \perp PQ$ гэдгийг тооцвал H нь PQ -ийн дундаж цэг болох ба $\angle PAH = \angle HAQ$ гэж мөрдөнө.
2-р тохиолдол: $S \neq H$



Энэ үед P цэг ABS гурвалжныг багтаасан тойрог дээр орших ба өнцөг тооцвол $\angle PAB = \angle PSB = \angle SBC = \angle HCB = \angle BAH$ болж батлагдав.

Бодлого F5. Бүгд 2-оос хэтэрдэггүй $t_1, t_2, \dots, t_n \leq 2$ бодит тоонуудын хувьд

$$\frac{t_1^3}{t_2^2 + 4} + \frac{t_2^3}{t_3^2 + 4} + \dots + \frac{t_{n-1}^3}{t_n^2 + 4} + \frac{t_n^3}{t_1^2 + 4} \leq n$$

байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. $s_i = t_i^2/4$ гэвэл $t_i^3 \leq 2t_i^2 = 8s_i$ тул $0 \leq s_1, \dots, s_n \leq 1$ тоонуудын хувьд

$$\frac{s_1}{s_2 + 1} + \frac{s_2}{s_3 + 1} + \dots + \frac{s_n}{s_1 + 1} \leq \frac{n}{2}$$

гэж батлахад хангалттай. $0 \leq x, y \leq 1$ тоонуудын хувьд

$$(1 + y)(1 - y + x) = 2x + (1 - y)(1 + y - x) \geq 2x$$

гэдгээс

$$\frac{x}{y + 1} \leq \frac{1 - y + x}{2}$$

байна. $\{s_i\}$ хувьд циклээр нэмэхэд

$$\sum_i \frac{s_i}{s_{i+1} + 1} \leq \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_i (s_i - s_{i+1}) = \frac{n}{2}$$

болж бодлого бодогдоно. Тэнцэтгэл i бүрийн хувьд $s_{i+1} = 1$ эсвэл $(s_i, s_{i+1}) = (1, 0)$ үед буюу $\{t_1, t_2, \dots, t_n, t_1\}$ дараалал 0, 2-оос тогтох ба дараалсан 0 агуулаагүй үед биелнэ.

Нэмэлт. E5 бодлогын бодолтыг харна уу.

Бодлого F6. Хоёр өөр цифрээр бичигдэх $10^{2025} + 3$ нийлбэрт хуваагддаг тоо хамгийн багадаа хэдэн оронтой байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. Хариу: 4050

$n = 2025$ ба $d = 10^n + 3$ гэе. Бүх цифр нь ижил эсвэл 2 өөр цифрээр бичигдэх $2n$ -ээс цөөн оронтой $d \mid N$ байх $N = \overline{a_m \dots a_2 a_1}$ ($2n > m$) тоо оршин байдаг гэе. $a_1 \geq 1$ гэж үзэхэд явцуурахгүй ба $N \geq d$ тул $m \geq n + 1$. $A = \overline{a_n \dots a_1}$ ба $B = \overline{a_m \dots a_{n+1}}$ гэж тэмдэглэе. $d > A$ ба $2n > m$ тул $d > 3B$. Түүнчлэн $A - 3B = N - dB$ ялгавар d -д хуваагдах учраас

$$A = 3B$$

болно. Иймд $m = 2n - 1$ болох ба $3a_{n+1} = \overline{b_{n+1}a_1}$ байх b_{n+1} цифрийн хувьд $2 \geq b_{n+1}$ ба $3a_{n+2} + b_{n+1} \equiv a_2 \pmod{10}$. Эндээс $a_1 \geq 1$ тул $a_{n+1} \geq 1$, мөн $a_{n+1} - a_1$ ба b_{n+1} тэгш гэж мөрдөнө. Иймд $a_{n+1} \neq 5$ болох тул $a_{n+1} \neq a_1$. Түүнчлэн $\overline{a_n a_{n-1}}$ тоо нь $3a_m$ болон түүн дээр нэмэгдэх аравтын оронгийн (C -ээр тэмдэглэе) нийлбэртэй тэнцүү, ө.х, $\overline{a_n a_{n-1}} = 3a_m + C$. Нөгөө талаас $3B < 3 \times 10^{n-1}$ тул $a_n \in \{1, 2\}$ ба $3 \times \overline{a_{m-1} \dots a_{n+1}} < 3 \times 10^{n-2}$ тул $0 \leq C \leq 2$.

$a_n = 1$ гэе. $a_{n+1} = 1$ үед $a_1 = 3$, иймээс $3a_i \leq 9$ тул $C = 0$. Гэвч $\overline{a_n a_{n-1}} - 3a_m \geq 11 - 3 \times 3 = 2$ болж зөрчинө. Харин $a_1 = 1$ үед $a_{n+1} = 7$, иймээс $C \geq 11 - 3 \times 1 = 8$ болж зөрчил гарна.

$a_n = 2$ гэе. $a_1 = 2$ үед $a_{n+1} = 4$ ба $C \geq 22 - 3 \times 4 = 10$, харин $a_{n+1} = 2$ үед $a_1 = 6$ ба $C \geq 22 - 3 \times 6 = 4$ болж зөрчил гарна.

Иймд $m \geq 2n$. Одоо 4 ба 9 цифрүүдээр бичигдэх $2n$ оронтой дараах тоо d -д хуваагдахыг харуулья:

$$\begin{aligned} \underbrace{49 \dots 9}_{n-1} \underbrace{49 \dots 9}_{n-2} 4 &= \underbrace{49 \dots 9}_{n-1} \times 10^{n-1} + \underbrace{49 \dots 9}_{n-2} 4 \\ &= (5 \times 10^{n-1} - 1) \times 10^{n-1} + (5 \times 10^{n-1} - 6) \\ &\equiv -3 \times (5 \times 10^{n-1} - 1) + (5 \times 10^{n-1} - 6) \\ &= -10^n - 3 \equiv 0 \pmod{d}. \end{aligned}$$

Т ангилал (Дунд ангийн багш)

Бодлого Т1. Гурвалжны a, b, c талуудын эсрэг өнцгүүд тус тус α, β, γ байв.

a, b, c уртууд энэ дарааллаараа арифметик прогресс үүсгэдэг бол $\cos \alpha, 1 - \cos \beta, \cos \gamma$ утгууд энэ дарааллаараа арифметик прогресс үүсгэнэ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Хоёр бодолт хийе.

Синусын теорем ашигласан бодолт: Синусын теоремоор $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$ арифметик прогресс болох тул

$$2 \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma - \alpha}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \cos \frac{\gamma - \alpha}{2} = \sin \alpha + \sin \gamma = 2 \sin \beta = 4 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}$$

байна. Энд $\cos \frac{\beta}{2} > 0$ гэдгээс $\cos \frac{\gamma - \alpha}{2} = 2 \sin \frac{\beta}{2}$ болох тул

$$\cos \alpha + \cos \gamma = 2 \cos \frac{\alpha + \gamma}{2} \cos \frac{\gamma - \alpha}{2} = 4 \sin^2 \frac{\beta}{2} = 2(1 - \cos \beta)$$

байна.

Косинусын теорем ашигласан бодолт: Косинусын теоремоор

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \gamma - 2(1 - \cos \beta) &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} - 2 \left(1 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \right) \\ &= \frac{(a + b - c)(b + c - a)}{2abc} (a + c - 2b) = 0 \end{aligned}$$

байна.

Бодлого Т2. $m^{2025} + n^{2024} = pmn$ байдаг бүх m, n натурал тоонууд болон p анхны тоон (m, n, p) гурвалыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Батзориг)

Бодолт. Хариу: $(m, n, p) = (1, 1, 2)$.

$$\text{ХИЕХ}(m, n) = d, \quad m = dm_1, \quad n = dn_1, \quad m_1, n_1 \in \mathbb{N}$$

ба $k = 2024$ гэе. Тэгвэл өгсөн тэгшитгэл

$$d^{k-2} (dm_1^{k+1} + n_1^k) = pm_1n_1$$

болно. $\text{ХИЕХ}(m_1, n_1) = 1$ тул $m_1 | d^{k-2}$. $\text{ХИЕХ}(d, n_1) = b, n_1 = ab, d = cb$ гэе. Үүнийг өгсөн тэгшитгэлд орлуулбал

$$(cb)^{k-2} (cm_1^{k+1} + a^k b^{k-1}) = pm_1a$$

Энд $\text{ХИЕХ}(cm_1^{k+1} + a^k b^{k-1}, m_1a) = 1$ ба $cm_1^{k+1} + a^k b^{k-1} > 1$ тул

$$\frac{(cb)^{k-2}}{m_1 a} (cm_1^{k+1} + a^k b^{k-1}) = p$$

болох ба p анхны тоо болохыг санавал

$$(cb)^{k-2} = m_1 a$$

болно. Сүүлийн тэгшитгэлд $\text{ХИЕХ}(m_1, b) = 1$ тул $b^{k-2} | a$ гэж гарах ба мөн $\text{ХИЕХ}(a, c) = 1$ тул $a | b^{k-2}$ болно. Иймд $a = b^{k-2}$ ба $m_1 = c^{k-2}$. Үүнийг () тэгшитгэлд орлуулбал

$$c^{k^2-k+1} + b^{k^2-k+1} = p$$

болох ба $k^2 - k + 1$ тоо сондгой тул сүүлчийн тэгшитгэлийн зүүн гар тал $b + c$ -д хуваагдана. Иймд $p = c + b$ болж $c + b = c^{k^2-k+1} + b^{k^2-k+1}$ болох тул $c = b = 1$ болно. Иймээс бодлогын хариу зөвхөн $m = n = 1, p = 2$.

Бодлого ТЗ. Нэгэн улс n арлаас бүрддэг. Зарим арлууд хоорондоо гүүрээр холбогдох ба гүүрүүдийг холбон зам хийнэ. Аливаа хоёр арлын хувьд тэднийг холбосон зам олддог бол хамгийн цөөхөн гүүрээр дамждаг замын гүүрний тоог тэр хоёр арлын зай гэнэ. Арал бүр ядаж m аралтай гүүрээр холбогддог бол арал хоорондын зай хамгийн ихдээ хэд байж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Билэгдэмбэрэл)

Бодолт. Хариу: $m = 1$ үед $n - 1$, $m \geq 2$ үед $3 \left\lceil \frac{n}{m+1} \right\rceil - \varepsilon(n)$, энд

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 3, & \text{хэрэв } n \equiv 0(m+1) \\ 2, & \text{хэрэв } n \equiv 1(m+1) \\ 1, & \text{бусад} \end{cases}$$

.

Аливаа хоёр арлын хоорондох зай $n - 1$ -с ихгүй тул $m = 1$ үед n арлууд нь нэг шулуун дээр ба аль ч хөрш хоёр нь гүүрээр холбогдсон байхаар авахад болно. $m \geq 2$ байг. Арлуудыг орой, гүүрүүдийг ирмэг гэж сэтгээд G -энгийн граф байгуулъя. Хамгийн их зайг нь d гэе. Уг зай бүхий замыг агуулдаг холбоост компонентийг нь G' , замыг нь $v = v_0, v_1, \dots, v_d$ гэе. $0 \leq i \leq d$ бүрийн хувьд $V_i = \{u \in G' \mid d(u, v) = i\}$ гэвэл $G' = \bigsqcup_{i=0}^d V_i$ болно. $V_{-1} = \emptyset$ гэе.

Дурын $0 \leq i \leq d$ сонирхож үзье. $v_i \in V_i \Rightarrow V_i \neq \emptyset$. v_i -н дурын хөрш u -н хувьд гурвалжны тэнцэтгэл бишээр $|d(u, v) - i| \leq 1 \Rightarrow u \in V_{i-1} \sqcup V_i \sqcup V_{i+1}$. Нөгөө талаас v_i ядаж m хөрштэй гэдгээс $|V_{i-1} \sqcup V_i \sqcup V_{i+1}| \geq m + 1$.

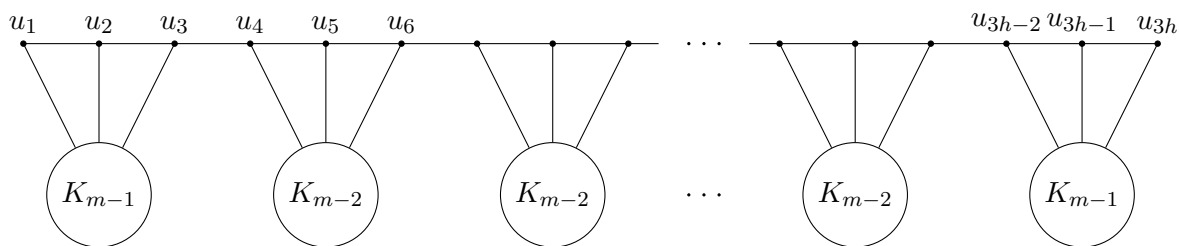
$h = \left\lceil \frac{n}{m+1} \right\rceil$ гэе. Эхлээд хариугаа зааглалт болохыг батлая. Эсрэгээс нь G графийг эсрэг жишээ гэж үзье.

(i) $n \equiv 0(m+1)$ байг. Эсрэгээс нь үзсэн тул $d \geq 3h - 2 \Rightarrow n \geq |G'| \geq |V_0 \sqcup V_1| + |V_2| + |V_3 \sqcup V_4 \sqcup V_5| + \dots + |V_{3h-6} \sqcup V_{3h-5} \sqcup V_{3h-4}| + |V_{3h-3} \sqcup V_{3h-2}| \geq (m+1) + 1 + (m+1) + \dots + (m+1) = 1 + h(m+1) = 1 + n \Rightarrow \emptyset$.

(ii) $n \equiv 1(m+1)$ байг. $d \geq 3h - 1 \Rightarrow n \geq |V_0 \sqcup V_1| + |V_2| + |V_3| + |V_4 \sqcup V_5 \sqcup V_6| + \dots + |V_{3h-5} \sqcup V_{3h-4} \sqcup V_{3h-3}| + |V_{3h-2} \sqcup V_{3h-1}| \geq (m+1) + 1 + 1 + (m+1) + \dots + (m+1) = 2 + h(m+1) \Rightarrow \emptyset$.

(iii) $n \not\equiv 0, 1(m+1)$ байг. $d \geq 3h \Rightarrow n \geq |V_0 \sqcup V_1| + |V_2 \sqcup V_3 \sqcup V_4| + \dots + |V_{3h-4} \sqcup V_{3h-3} \sqcup V_{3h-2}| + |V_{3h-1} \sqcup V_{3h}| \geq (h+1)(m+1) \Rightarrow \emptyset$.

Одоо байгуулалтаа хийе. $n \equiv 2(m+1)$ үед $u_1 \rightarrow u_{3h}$ зам аваад гурав гурваар нь бүтэн графийн бүх оройтой холбоход болно (Зураг 1). Ө.х u_1 -г K_{m-1} -н бүх оройтой холбоно. Захын хоёр гурвалыг K_{m-1} -тэй, бусдыг нь K_{m-2} -той холбоно.



Зураг 1.

Харин $n \pmod{m+1}$ үлдэгдэл хоёроос их бол харгалзах тооны K_{m-2} -үүдийг K_{m-1} болгоно.

$n \equiv 1 \pmod{m+1}$ үед u_{3h} -г арилгана. $n \equiv 0 \pmod{m+1}$ үед дахиад u_1 -г арилгана. Бодлого бодогдов.

Бодлого Т4. $\{1, 2, \dots, n\}$ олонлогийн $x-y=1$ байх x, y элементүүд агуулаагүй дэд олонлогийн тоог A_n гээд $x-y=2$ байх x, y элементүүд агуулаагүй дэд олонлогийн тоог B_n гээ. $A_{2025} < B_{1013}^2$ болохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан, Х. Нурсолтан)

Бодолт. $n, m \geq 1$ хувьд $\{1, 2, \dots, n+m\} = \{1, 2, \dots, n\} \cup \{n+1, n+2, \dots, n+m\}$ гэж задалбал $A_{n+m} \leq A_n A_m$ болох нь харагдана.

Нөгөө талаас $\{1, 2, \dots, n\}$ -ийн $x-y=2$ агуулаагүй X олонлогийн бүх сондгой тоонуудаас тогтох $X_o = X \cap \{1, 3, \dots\}$ дэд олонлог $\lceil n/2 \rceil$ элементтэй олонлогийн дэд олонлог, бүх тэгш тоонуудаас тогтох $X_e = X \cap \{2, 4, \dots\}$ дэд олонлог $\lfloor n/2 \rfloor$ элементтэй олонлогийн дэд олонлог байна. $x-y=2$ агуулахгүй тул X_o дараалсан хоёр сондгой тоо агуулахгүй, X_e дараалсан хоёр тэгш тоо агуулахгүй гэдгээс $B_n = A_{\lceil n/2 \rceil} \cdot A_{\lfloor n/2 \rfloor}$ байна.

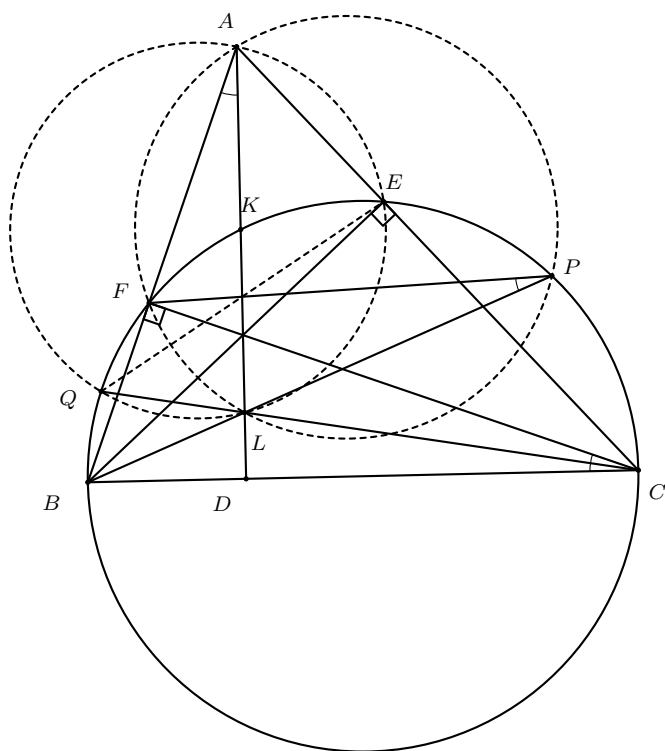
Иймд $A_{2025} < A_{2026} \leq A_{506}^2 A_{507}^2 = B_{1013}^2$ болж батлагдав.

Бодлого Т5. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны өндрүүд AD, BE, CF байг. BC диаметртай ω тойрог AD хэрчимтэй ABC дотор K цэгт огтлолцдог гээ. KD цацраг дээр $KA = KL$ байх L цэг авъя. BL, CL шулуунууд ω тойрогтой харгалзан P, Q цэгүүдэд огтлолцдог гээ. AD, QE, PF шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Билэгдэмбэрэл)

Бодолт. $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$ тул E, F цэгүүд ω дээр оршино. $\angle LAF = \angle DAB = \angle FCB = \angle FPL$ тул $AFLP$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтах ба багтаасан тойргийг ω_1 гээ. Адилаар, $AQLE$ тойрогт багтах ба багтаасан тойргийг ω_2 гээ.

ω, ω_1 тойргуудын радикал тэнхлэг нь PF , ω, ω_2 тойргуудын радикал тэнхлэг нь EQ , ω_1, ω_2 тойргуудын радикал тэнхлэг нь AL тул төвүүд нь нэг шулуун дээр орших 3 тойргийн радикал тэнхлэгүүд нэг цэгт огтлолцоно гэдгээс PF, AD, EQ шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно.



Бодлого Т6. Өгөгдсөн натурал $n \geq 3$ тооны хувьд $10^n - 7$ ялгаварт хуваагддаг зөвхөн 1, 2 цифрүүдээр бичигдэх тоо хамгийн багадаа хэдэн оронтой байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. Хариу: $2n + 1$

$d = 10^n - 7$ гэе. $N = \overline{a_m \dots a_2 a_1}$ тоо зөвхөн 1, 2 цифрүүдээр бичигдсэн ба $d \mid N$ байг. $2d$ нь $n + 1$ оронтой ба $N \geq 2d$ учир $m \geq n + 1$ байна. $S = 7 \times \overline{a_m \dots a_{n+1}} + \overline{a_n \dots a_1}$ гэе. Хэрэв $2n \geq m$ бол

$$S \leq 7 \times \underbrace{22 \dots 2}_n + \underbrace{22 \dots 2}_n < 2d.$$

Түүнчлэн $d \mid N - S$ гэдгээс $d \mid S$ гэж мөрдөх тул $S = d$ болно. Гэвч энэ тэнцэл боломжгүй, учир нь $S \equiv 7a_{n+1} + a_1 \pmod{10}$ ба $a_1, a_{n+1} \in \{1, 2\}$ тул $S \not\equiv 3 \pmod{10}$. Иймд $m \geq 2n + 1$.

Одоо $n + 2$ ширхэг 1, $n - 1$ ширхэг 2 цифрээр бичигдэх $2n + 1$ оронтой дараах тоо d -д хуваагдахыг харуулья:

$$\begin{aligned} \underbrace{21 \dots 11}_{n-1} \underbrace{2 \dots 22}_{n-2} 111 &= 2 \times 10^{2n} + \underbrace{1 \dots 11}_{n-1} 2 \times 10^n + \underbrace{2 \dots 2}_{n-3} 111 \\ &\equiv 2 \times 7^2 + 7 \times \underbrace{1 \dots 11}_{n-1} 2 + \underbrace{2 \dots 2}_{n-3} 111 \\ &\equiv \underbrace{7 \dots 7}_{n-2} 84 + \underbrace{2 \dots 2}_{n-2} 09 \equiv 0 \pmod{d}. \end{aligned}$$

Олон Улсын Мэдээ

Европын Охидын Математикийн Олимпиад

2024 оны 4 сарын 11 – 17 өдрүүдэд Гүрж улсын Цкалтубо хотод зохион байгуулагдсан Европын Охидын Математикийн 13-р Олимпиадад манай баг амжилттай оролцлоо. Багийн ахлагчаар Т. Хулан, дэд ахлагчаар С. Цогзолмаа ажиллав.

Оролцогч	Сургууль	Оноо	Амжилт
Г. Дөлгөөн	УБ 1-р сургууль	22	Мөнгөн медаль
М. Амин-Эрдэнэ	Шинэ-Үе	18	Хүрэл медаль
Э. Энхжин	Эрдмийн Сан	17	Хүрэл медаль
Н. Болор	Эрдмийн Хишиг	12	
Баг		69	23-р байр

2025 оны 4 сарын 10-17 өдрүүдэд Косово улсын Приштина хотод явагдах 14-р олимпиадад Монгол улсаа төлөөлөн оролцохоор шалгарсан Н. Болор (Эрдмийн Хишиг), А. Мишээл (Орчлон), Б. Оюун-билиг (Хархорин), А. Ану (УБ 11-р сургууль) нартаа амжилт хүсье. Багийн ахлагчаар Т. Хулан, дэд ахлагчаар С. Цогзолмаа ажиллана.

Дэлгэрэнгүй мэдээллийг албан ёсны сайтаас авна уу: <https://www.egmo.org/>

Бодлогууд

Европын Охидын Математикийн 13-р Олимпиадын бодлогуудыг толилуулж байна.

Бодлого 1. Самбарт u, v гэсэн ялгаатай бүхэл тоонууд бичигдсэн байв. Алхам бүрдээ дараах 2 үйлдлийн аль нэгийг хийнэ.

- (i) Хэрэв a, b нь самбарт бичигдсэн ялгаатай тоонууд ба $a + b$ тоо самбарт өмнө нь бичигдээгүй бол $a + b$ тоог самбарт бичнэ.
- (ii) a, b, c нь самбарт бичигдсэн хос хосоороо ялгаатай тоонууд байг. Хэрэв x бүхэл тоо өмнө нь самбарт бичигдээгүй ба $ax^2 + bx + c = 0$ тэнцэл биелдэг бол x тоог самбарт бичнэ.

Анх самбарт бичигдсэн (u, v) тоонуудаас эхлэн дурын бүхэл тоог төгсгөлөг алхмын дараа самбарт бичиж болдог байх бүх (u, v) хосыг ол.

Бодлого 2. $AC > AB$ байх ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг Ω , багтсан тойргийн төвийг I гэе. ABC гурвалжинд багтсан тойрог BC, CA, AB талуудыг харгалзан D, E, F цэгүүдэд шүргэнэ. $\widehat{DF}$ жижиг нум дээр X цэгийг, $\widehat{DE}$ жижиг нум дээр Y цэгийг $\angle BXD = \angle DYC$ байхаар авав. XY шулуун BC шулуунтай K цэгт огтлолцоно. Ω тойрог дээр T цэгийг KT шулуун Ω тойргийг шүргэх ба A, T цэгүүд BC шулууны нэг талд оршиж байхаар авав. TD, AI шулуунууд Ω тойрог дээр огтлолцоно гэж батал.

Бодлого 3. Хэрэв эерэг бүхэл n тооны ямар ч d гэсэн эерэг бүхэл хуваагчийн хувьд $d(d+1)$ тоо нь $n(n+1)$ тоог хуваадаг бол n тоог өвөрмөц тоо гэе. Тэгвэл хос хосоороо ялгаатай A, B, C, D өвөрмөц тоонуудын хувьд

$$\text{ХИЕХ}(A, B, C, D) = 1$$

гэж батал. Энд $\text{ХИЕХ}(A, B, C, D)$ -ээр A, B, C, D тоонуудын хамгийн их ерөнхий хуваагчийг тэмдэглэв.

Бодлого 4. $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ байх n ширхэг бүхэл тоонууд өгөгджээ. Хэрэв $1 \leq i < j \leq n$ байх (a_i, a_j) хосын хувьд

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2$$

ба $1 \leq k < \ell \leq n$ байх (a_k, a_ℓ) хос олддог бол (a_i, a_j) хосыг сонирхолтой гэж нэрлэе. $n \geq 3$ байх n бүрийн хувьд, n урттай дарааллууд дотроос хамгийн олон сонирхолтой хос агуулах дараалалд хичнээн сонирхолтой хос байх вэ?

Бодлого 5. Эерэг бүхэл тоонуудын олонлогийг $\mathbb{N}$ -ээр тэмдэглэе. Дурын (x, y) эерэг бүхэл хосын хувьд

- (i) x болон $f(x)$ тоонуудын эерэг бүхэл хуваагчдын тоо тэнцүү байдаг.
- (ii) Хэрэв x тоо y тоог хуваадаггүй, мөн y тоо x тоог хуваадаггүй бол

$$\text{ХИЕХ}(f(x), f(y)) > f(\text{ХИЕХ}(x, y))$$

байдаг.

гэсэн нөхцөлүүд биелдэг бүх $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ функцийг ол. Энд $\text{ХИЕХ}(m, n)$ -ээр m, n тоонуудын хамгийн их ерөнхий хуваагчийг тэмдэглэв.

Бодлого 6. d зэргийн P олон гишүүнтийн хувьд $P(0), P(1), P(2), \dots, P(d^2 - d)$ тоонууд дотор хамгийн ихдээ d ширхэг ялгаатай утгууд байдаг гэе. Эерэг бүхэл d тооны хувьд дээрх чанартай, бодит коэффициенттэй P олон гишүүнт олддог байх бүх d тоог ол.

Олон Улсын Математикийн Зуны Сургалт

Олон Улсын Математикийн 65-р Олимпиадад Монгол улсаа төлөөж оролцох баг Бээжингийн Математикийн Ухаан ба Хэрэглээний Хүрээлэн дээр 2024 оны 6 сарын 12 өдрөөс 7 сарын 4-ний өдрийн хооронд явагдсан Олон Улсын Математикийн 2-р Зуны Сургалтад оролцож, дэлхийн шилдэг 39 багийн сурагчидтай хамт бэлтгэл хийв.

Сургалтын төгсгөлд зохион байгуулагдсан олимпиадад манай баг амжилттай оролцож 19-р байр эзэллээ.

Оролцогч	Сургууль	Оноо	Амжилт
Д. Энэрэлт	Сант	21	II байр
О. Тэнгис	УБ 11-р сургууль	16	III байр
Т. Билгүүнгэрэлт	Эрхэт Эрдэм	15	III байр
Х. Нурсолтан	УБ 11-р сургууль	14	Тусгай шагнал
С. Манлай	Сант	14	Тусгай шагнал
Б. Билгүтэй	УБ 11-р сургууль	9	Тусгай шагнал
Баг	(эхний 4)	89	19-р байр

Бид 2025 оны 6 сарын 20 өдрөөс 7 сарын 10 өдрийн хооронд зохион байгуулагдах 3-р зуны сургалтад хамрагдахаар бэлтгэлээ хангаж байна.

Дэлгэрэнгүй мэдээллийг албан ёсны сайтаас авна уу: <https://www.imscprogram.com>

Бодлогууд

Олон Улсын Математикийн 2-р Зуны Сургалтын бодлогуудыг толилуулж байна.

Бодлого 1. Аравтын тооллын системд бичигдсэн натурал n тооны тэгээс ялгаатай бүх цифрийн үржвэрийг $P(n)$ гэж тэмдэглэе. n тоо $P(n)$ -д бүхлээр хуваагддаг бол n -ийг *Танюн* тоо гэж нэрлэнэ. Дэс дараалсан ℓ ширхэг *Танюн* тооноос тогтох олонлог төгсгөлгүй олон олддог байх хамгийн их бүхэл ℓ тоог ол.

Бодлого 2. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны AB тал дээр P цэг, AC тал дээр Q цэг орших ба PQ шулуун BC талтай параллел байв. BQ хэрчмийн дотоод X цэг ба CP хэрчмийн дотоод Y цэгийн хувьд $\angle AXP = \angle XCB$ ба $\angle AYQ = \angle YBC$ байв. $AX = AY$ гэж батал.

Бодлого 3. Алис, Боб хоёр 2024×2024 нэгж нүднээс тогтох квадрат хөлөг дээр дараагийн тоглоом тоглоно. Тэд ээлжлэн өөрийнхөө нэрийг бичсэн наалтыг нэгж нүдэнд наана. Алис сондгой дугаартай ээлжид, Боб тэгш дугаартай ээлжид үйлдэл хийнэ.

k -дугаар ээлжид $n_k \geq \frac{k}{2024}$ байх хамгийн бага бүхэл тоог n_k гэе. Ядаж нэг наалтгүй нүд оршин байдаг бол тэр ээлжид үйлдэл хийх тоглогч:

- ядаж нэг наалтгүй нүд агуулсан n_k -аас хэтрэхгүй ширхэг нэгж нүд сонгон
- сонгогдсон нэгж нүднүүдэд өөрийнхөө нэртэй наалтыг наана. Хэрэв сонгогдсон нүдэнд наалт байвал эхлээд тэр наалтыг хуулж авна.

Тоглогч үйлдлээ хийж дуусахад босоо, хэвтээ эсвэл диагональ дагуу 123 ширхэг дэс дараалсан нүдэнд уг тоглогчийн нэртэй наалт байвал тэр тоглогч хожно. Бүх нүд наалттай болоход хэн нь ч хожоогүй байвал тэнцлээ гэж үзнэ.

Алист хожих стратеги байгаа юу?

Бодлого 4. Анар 100×100 шатрын хөлөг дээр дараах тоглоом тоглоно. Анх хөлгийн хамгийн доод мөрийн нүд бүрд цагаан хүү, хамгийн дээд мөрийн нүд бүрд хар хүү байрлах ба хөлгийн бусад нүдэнд хүү байрлахгүй.

Цагаан хүүг хамгийн дээд мөр рүү чиглүүлэн, хар хүүг хамгийн доод мөр рүү чиглүүлэн дараах нүүдлүүдийн аль нэгийг хийнэ:

- яг өмнөх нүдэнд нь хүү байхгүй тохиолдолд тэр нүд рүү нүүнэ;
- диагоналын дагуу яг өмнөх нүдэнд нь эсрэг өнгийн хүү байрлаж байвал уг хүүг иднэ.

(P хүү эсрэг өнгийн Q хүүг идсэн тохиолдолд Q хүүг хөлгөөс авч Q -ийн байрлаж байсан нүдэнд P хүүг байрлуулна.)

Анар аль ч хүүг (хар ба цагаан хүү гэж ээлжлэх шаардлагагүй) дүрмийн дагуу нүүж болно. Цаашид ямар ч нүүдэл хийх боломжгүй болох үед хөлөг дээр хамгийн цөөндөө хэдэн хүү үлдэж болох вэ?

Бодлого 5. Бүх эерэг бодит тооны олонлогийг $\mathbb{R}_{>0}$ гэж тэмдэглэе. Дараах чанартай хоёр хувьсагчтай $P(x, y)$ бодит олон гишүүнт олддог байх бүх эрс монотон (өсдөг эсвэл буурдаг) $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол: дурын $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ тоонуудын хувьд

$$f(xy) = P(f(x), f(y))$$

биелнэ.

Санамж: Хоёр хувьсагчтай $P(x, y)$ бодит олон гишүүнт дараах хэлбэртэй: n, m сөрөг биш бүхэл тоонууд ба $a_{i,j}$ бодит тоонуудын хувьд $P(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{i,j} x^i y^j$.

Бодлого 6. $a \equiv 1 \pmod{4}$ натурал тоо байг. Сөрөг биш бүхэл коэффициенттэй Q олон гишүүнт авъя. Дурын натурал n тооны хувьд

$$Q(n+1)((a+1)^{Q(n)} - a^{Q(n)})$$

тоо бүтэн квадрат байдаг гэе. Q тогтмол олон гишүүнт байна гэж харуул.

Олон Улсын Математикийн Олимпиад

Олон Улсын Математикийн 65-р Олимпиад 2024 оны 7 сарын 11-13 өдрүүдэд ИБУИНВУ-ын Батт хотод зохион байгуулагдлаа. Олимпиадад нийт 108 орны 609 оролцогч мэдлэг оюунаа уралдуулан өрсөлдөж манай баг 142 оноогоор 16-р байрт шалгарсан сайхан амжилт гаргалаа. Багийн ахлагчаар Б. Батбаясгалан, дэд ахлагчаар У. Батзориг нар ажиллаж, ажиглагчаар Ү. Отгонбаяр, Л. Батхангай (БЕГ), Б. Мөнх-Эрдэнэ (УБ 11-р сургууль), С. Буяндэлгэр (УБ 11-р сургууль), Б. Энхмэнд (ММОХ) нар оролцов.

Оролцогч	Сургууль	Оноо	Амжилт
Д. Энэрэлт	Сант	29	Алтан медаль
Т. Билгүүнгэрэлт	Эрхэт Эрдэм	28	Мөнгөн медаль
О. Тэнгис	УБ 11-р сургууль	26	Мөнгөн медаль
Б. Билгүтэй	УБ 11-р сургууль	21	Хүрэл медаль
С. Манлай	Сант	21	Хүрэл медаль
Х. Нурсолтан	УБ 11-р сургууль	17	Хүрэл медаль
Баг		142	16-р байр

Олимпиадад оролцох багийг дүрмийн дагуу хоёр удаагийн сорил болон улсын математикийн олимпиадын F ангилалын онооны нийлбэр дүнгээр сонгосон. Олимпиадын бэлтгэлийг Глобал Талант Лаб ТББ-ын санхүүжилтээр зохион байгуулав.

Бодлогууд

Олон Улсын Математикийн 65-р Олимпиадын бодлогуудыг толилуулж байна.

Бодлого 1. Дурын натурал n тооны хувьд бүхэл

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

тоо n тоонд хуваагддаг байх бүх бодит α тоог ол. (Бодит z тооноос хэтэрдэггүй хамгийн их бүхэл тоог $\lfloor z \rfloor$ гэж тэмдэглэнэ. Жишээлбэл, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ ба $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

Бодлого 2. Дараах чанартай натурал g ба N тоонууд олддог байх бүх (a, b) натурал тоон хосыг ол:

Дурын бүхэл $n \geq N$ тооны хувьд $\gcd(a^n + b, b^n + a) = g$ байна.

(x, y бүхэл тоонуудын хамгийн их ерөнхий хуваагчийг $\gcd(x, y)$ гэж тэмдэглэнэ.)

Бодлого 3. $a_1, a_2, a_3, \dots$ натурал тоон төгсгөлгүй дараалал ба N натурал тоо гэе. Дурын $n > N$ дугаарын хувьд a_{n-1} тоо $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ жагсаалт дотор яг a_n удаа гарч ирдэг байв. $a_1, a_3, a_5, \dots$

ба $a_2, a_4, a_6, \dots$ дарааллуудын ядаж нэг нь яваандаа үелнэ гэж батал. (Натурал p, M тоонууд олдоод, дурын $m \geq M$ хувьд $b_{m+p} = b_m$ байдаг бол $b_1, b_2, b_3, \dots$ дарааллыг яваандаа үелнэ гэж хэлнэ.)

Бодлого 4. $AB < AC < BC$ байдаг ABC гурвалжинд багтсан ω тойргийн төвийг I гэе. BC шулуун дээр C цэгээс ялгаатай X цэгийг, X цэгийг дайрсан AC шулуунтай параллел шулуун ω тойргийг шүргэдэг байхаар авав. Мөн ижлээр, BC шулуун дээр B цэгээс ялгаатай Y цэгийг, Y цэгийг дайрсан AB шулуунтай параллел шулуун ω тойргийг шүргэдэг байхаар авав. AI шулуун ABC гурвалжныг багтаасан тойрогтой дахин $P \neq A$ цэгээр огтлолцоно. AB талын дундаж цэгийг K , AC талын дундаж цэгийг L гэе.

$\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$ байна гэж батал.

Бодлого 5. Турбо гэдэг эмгэн хумс 2024 мөр, 2023 баганатай хүснэгт дээр тоглоом тоглоно. Хүснэгтийн 2022 нүдэнд үл үзэгдэх мангас нуугдаж байгаа. Эхлээд, Турбо мангасууд хаана нуугдаж байгааг мэдэхгүй, гэхдээ 1-р мөр ба 2024-р мөрөөс бусад мөр бүрд яг нэг мангас байгаа бөгөөд аль ч баганад ихдээ нэг мангас байгаа гэж мэднэ. Турбо 1-р мөрөөс эхлэн 2024-р мөр хүртэл явах оролдлого давтан хийнэ. Оролдлого бүр дараах байдлаар явагдана:

Эхлээд Турбо эхлэх нүдээ 1-р мөрөөс сонгоно. Тэгээд одоо байгаа нүдтэйгээ ерөнхий хилтэй нүд рүү шилжих үйлдлийг давтана (урд нь очсон нүдэндээ дахиж очихыг зөвшөөрнө). Шилжиж очсон нүдэнд нь мангас нуугдаж байвал оролдлого амжилтгүй болох ба 1-р мөр рүү буцаагдан дараагийн оролдлогоо шинээр эхлүүлнэ.

Мангасууд байршлаа өөрчлөхгүй ба Турбо нэг очсон нүдэндээ мангас байсан эсэхийг мартахгүй. 2024-р мөрний ямар нэг нүдэнд очиж чадвал оролдлого амжилттай болж тоглоом дуусна. Мангасуудын байрлалаас үл хамааран, n эсвэл түүнээс цөөн оролдлого дотор Турбо 2024-р мөр хүрч чадах хамгийн бага n тоог ол.

Бодлого 6. Бүх рационал тооны олонлогийг $\mathbb{Q}$ гэж тэмдэглэе. Дурын $x, y \in \mathbb{Q}$ рационал тоонуудын хувьд

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{эсвэл} \quad f(f(x) + y) = x + f(y)$$

байдаг бол $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ функцийг тансаг гэе. Дараах чанартай бүхэл c тоо олдохыг баталж, ийм c тооны авч болох хамгийн бага утгыг ол:

Дурын тансаг f функцийн хувьд, рационал r тоо ашиглан $f(r) + f(-r)$ гэж илэрхийлж болдог ялгаатай рационал тоо хамгийн олондоо c ширхэг байна.

Ираны Геометрийн Олимпиад

Ираны Геометрийн 11-р Олимпиад 2024 оны 10 сарын 18 өдөр Нийслэлийн 1-р сургууль дээр зохион байгуулагдаж манай улсаас нийт 210 багш сурагч оролцов.

Ц. Отгонтэнгэр 23 оноогоор мөнгөн медаль, Э. Мишээл, М. Номгон нар 18 оноогоор хүрэл медаль, Б. Золхүү, У. Азбаяр, Б. Билгүүн, Б. Жаргал, А. Соёмбо, А. Ургахнаран, Т. Эрхэс нар 16 оноогоор хүрэл медаль хүртэж сайхан амжилт гаргалаа, бүгдэд нь баяр хүргэе!

Олимпиадыг амжилттай зохион байгуулсан Т. Хулан (ММОХ), Г. Батзаяа (УБ 1-р сургууль) нарт талархал илэрхийлье. Зохион байгуулалтыг оролцогчдын хураамжаар санхүүжүүлэв.

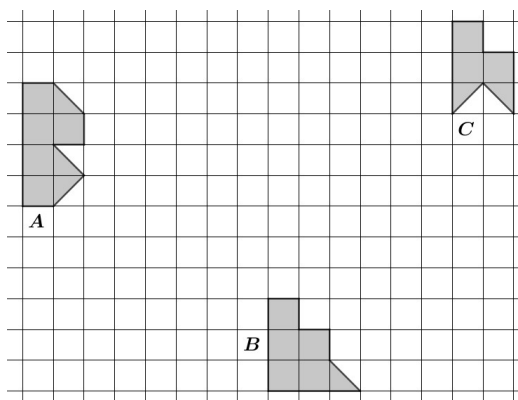
Дэлгэрэнгүй мэдээллийг албан ёсны сайтаас авна уу: <https://igo-official.com/>

Бодлогууд

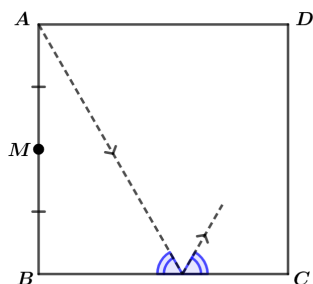
Ираны Геометрийн 11-р Олимпиадын бодлогуудыг толилуулж байна.

D ангилал

Бодлого D1. Зурагт үзүүлсэн A дүрсийг l_A шулууны хувьд тэгш хэмтэй хувирган, B дүрсийг l_B шулууны хувьд тэгш хэмтэй хувирган, C дүрсийг эргүүлэлтээр хувирган гарсан дүрсүүд нийлээд 4×4 квадрат үүсгэж байв. l_A, l_B шулуунууд болон эргүүлэлтийн төвийг олж A, B, C дүрсүүдээс хувиргалтаар үүссэн дүрсүүдийг зур.



Бодлого D2. $ABCD$ квадратын талын урт 20-той тэнцүү. A цэгээс гарсан гэрлийн цацраг BC , CD , DA талууд дээр ойн AB талын дундаж цэгт хүрчээ. Энэ гэрлийн цацрагийн нийт явсан замын уртыг ол. (Жич: Гэрлийн цацраг тал дээр ойхдоо талтай ижил өнцөг үүсгэнэ.)



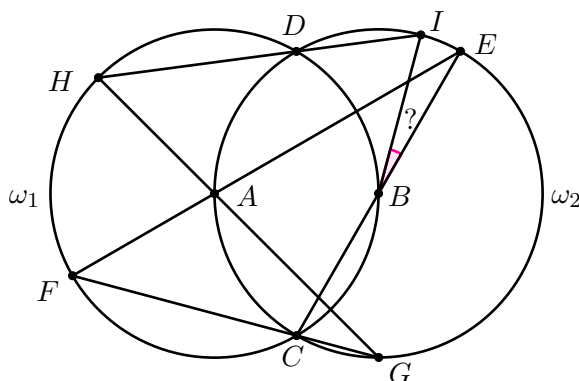
Бодлого D3. $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн дотор талд $DT = BC$ байх T цэг авав. Мөн AT хэрчим дээр $\angle TSD = 90^\circ$ байх S цэг өгчээ. Хэрэв $\angle DTA + \angle TAB + \angle ABC = 180^\circ$ бол $AB + ST \geq CD + AS$ гэж батал.

Бодлого D4. Тойрогт багтсан n -өнцөгт ($n > 3$) зөвхөн оройнууд дээрээ огтлолцох диагоналуудаар $n - 2$ ширхэг гурвалжинд хуваагдав. Хамгийн ихдээ хичнээн тэнцүү гурвалжин үүсэх боломжтой вэ? (Бүх оройнууд нь тойрог дээр орших n -өнцөгтийг тойрогт багтсан n -өнцөгт гэдэг.)

Бодлого D5. Хурц өнцөгт $\triangle ABC$ гурвалжныг багтаасан тойргийн BC жижиг нум дээр Y, Z цэгүүдийг авав. (Y цэг BZ жижиг нум дээр оршино). $\triangle ABC, \triangle XYZ$ гурвалжнууд төсөөтэй байх X цэгийг A, X цэгүүд YZ шулууны нэг талд оршиж байхаар авав. XY, AB шулуунууд E цэгт, XZ, AC шулуунууд F цэгт огтлолцоно. BY, CZ шулуунууд K цэгт огтлолцоно. $\triangle AEF, \triangle KBC$ гурвалжнуудыг багтаасан тойргийн огтлолцолын цэгүүдийн нэг нь KX шулуун дээр оршино гэж батал.

Е ангилал

Бодлого E1. Доорхи зурагт A цэг ω_1 тойргийн төв, B цэг ω_2 тойргийн төв. BC шулуунаас эхлэн E, F, G, H, I цэгүүдийг байгуулав. $\angle IBE$ өнцгийг ол.



Бодлого E2. X, Y цэгүүд $ABCDE$ гүдгэр таван өнцөгтийн CD тал дээр X цэг Y, C цэгүүдийн хооронд байхаар оршино. $\triangle XCB, \triangle ABX, \triangle AXY, \triangle AYE, \triangle YED$ гурвалжнууд төсөөтэй (оройнууд энэ дарааллаараа) гэж үзье. $\triangle ACD, \triangle AXY$ гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд шүргэлцэнэ гэж батал.

Бодлого E3. $\triangle ABC$ хурц өнцөгт гурвалжин ба D цэг BC тал дээр оршдог гэе. J цэг AC тал дээр $\angle BAD = 2\angle ADJ$ байхаар оршдог ба $\triangle CDJ$ гурвалжныг багтаасан тойргийг ω гэе. AD шулуун ω тойргийг P цэгт дахин огтлолдог ба J цэгээс AB талд буулгасан өндрийн суурь Q цэг байв.

Хэрвээ $JP = JQ$ бол A цэгээс DJ шулуунд татсан перпендикуляр шулуун ω тойргийг шүргэнэ гэж батал.

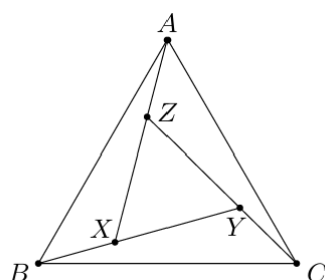
Бодлого E4. Эрка төсгөлөг ширхэг төвийн тэгш хэмтэй олон өнцөгтөөр (ижил эсвэл гүдгэр байх албагүй) P гүдгэр олон өнцөгтийг эвлүүлэв. P төвийн тэгш хэмтэй болохыг батал.

Бодлого E5. $AB \parallel CD$ байх $ABCD$ трапецийн AC, BD диагоналууд P цэгт огтлолцдог. AD шулууныг $\angle PDC$ өнцгийн дотоод биссектрисийн хувьд тэгш хэмтэй хувиргахад гарсан шулуун

$\triangle APD$ гурвалжныг багтаасан тойрогтой D' цэгт дахин огтлолцоно. BC шулуун $\angle PCD$ өнцгийн дотоод биссектрисийн хувьд тэгш хэмтэй хувиргахад гарсан шулуун $\triangle BPC$ гурвалжныг багтаасан тойрогтой C' цэгт дахин огтлолцоно. $C'A$ шулуун $\triangle BPC$ гурвалжныг багтаасан тойргийг дахин Y цэгт, $D'C$ шулуун $\triangle APD$ гурвалжныг багтаасан тойргийг дахин X цэгт огтолдог. P , X , Y цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

Ү ангилал

Бодлого F1. Адил талт $\triangle ABC$ гурвалжныг тэнцүү талбайтай 4 гурвалжинд хуваав. Энд зурагт үзүүлсэнчлэн $\triangle ABX$, $\triangle BCY$, $\triangle CAZ$ гурвалжнууд тэнцүү ба $\triangle XYZ$ гурвалжин адил талт байна. X , Y , Z цэгүүд $\triangle ABC$ гурвалжинд багтсан тойрог дээр оршино гэж батал.



Бодлого F2. Тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн CD тал дээрх P цэгийн хувьд $\angle CBP = 90^\circ$ байв. AC , BP -ийн огтлолцлын K цэгийн хувьд $AK = AP = AD$ байв. B цэгээс AC шулуун руу буулгасан перпендикулярын суурийг H гээ. $\angle APH = 90^\circ$ гэж батал.

Бодлого F3. $\triangle ABC$ гурвалжны A оройгоос BC талд буулгасан өндрийн суурийг D гээд $\triangle ABC$ гурвалжны багтсан тойргийн төвийг I , A оройд гадаад багтсан тойргийн төвийг I_A , C оройд гадаад багтсан тойргийн төвийг I_C гэж тэмдэглэе. $\triangle BDI_C$ гурвалжныг багтаасан тойрог BI шулуунтай дахин $P \neq B$ цэгт, DI_A шулуунтай дахин $Q \neq D$ цэгт огтлолцдог гээ. $AP = AQ$ гэж батал.

Бодлого F4. Хурц өнцөгт $\triangle ABC$ гурвалжин доторх P цэгийн хувьд $\angle BPC = 90^\circ$ ба $\angle BAP = \angle PAC$ байв. P цэгээс BC талд буулгасан перпендикулярын суурийг D гээ. $\triangle ABD$ гурвалжинд багтсан тойргийн төвийг M , $\triangle ADC$ гурвалжинд багтсан тойргийн төвийг N гээ. $BMNC$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтахыг батал.

Бодлого F5. ω тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн AC диагональ дээр E цэг бэхлээд ω тойрог дээр дурын M цэг авав. AM ба BD шулуунууд P цэгт огтлолцох ба EP шулуун AB шулуунтай R цэгт, AD шулуунтай Q цэгт огтлолцоно. BQ , DR шулуунууд S цэгт, MS , AC шулуунууд T цэгт огтлолцоно. M цэг ω тойргоор гүйхэд $\triangle CMT$ гурвалжныг багтаасан тойрог C цэгээс ялгаатай нэг бэхлэгдсэн цэг дайрна гэж батал.

Ази-Номхон Далайн Математикийн Олимпиад

Ази-Номхон Далайн Математикийн Олимпиадад манай улс анх удаа албан ёсоор оролцлоо.

Олимпиад 2025 оны 3 сарын 11 өдөр Нийслэлийн 11-р сургууль дээр зохион байгуулагдаж манай улсаас нийт 106 сурагч олимпиадад оролцов. Албан ёсны дүн жич зарлагдана.

Олимпиадыг амжилттай зохион байгуулсан У. Батзориг (ММОХ), А. Ганбат (УБ 11-р сургууль) нарт талархал илэрхийлье. Зохион байгуулалтыг оролцогчдын хураамжаар санхүүжүүлэв.

Дэлгэрэнгүй мэдээллийг албан ёсны сайтаас авна уу: <https://www.apmo-official.org/>

Бодлогууд

Ази-Номхон Далайн Математикийн 37-р Олимпиадын бодлогуудыг толилуулж байна.

Бодлого 1. Хурц өнцөгт ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг Γ гэе. A оройгоос BC талд буулгасан өндрийг AA_1 гэе. A_1 цэгээс AB ба AC -д буулгасан перпендикуляр проекцуудыг харгалзан B_1 ба C_1 гэж тэмдэглэе. P цэгийг AB_1PC_1 дөрвөн өнцөгт гүдгэр бөгөөд ABC гурвалжинтай ижил талбайтай байхаар сонгов. P цэг Γ тойргийн эрс дотор талд орших боломжтой юу? Хариултаа батал.

Бодлого 2. α, β эерэг бодит тоонууд байг. Маргад координатын хавтгайн эх $(0, 0)$ цэгээс эхлэн дараах дүрмийн дагуу хөдөлгөөн хийнэ. Тэрээр уг координатын хавтгайн $|x - y| < 2025$ муж дотор минут бүрд дээшээ нэг нэгж эсвэл баруун тийшээ нэг нэгж хөдөлнө. Тэр (x, y) цэгээс хөдлөхдөө энэ цэг дээр $\lfloor x\alpha + y\beta \rfloor$ бүхэл тоог бичнэ. Ингэж явсаар Маргад бүх сөрөг биш бүхэл тоог яг нэг удаа бичсэн байв. Ийм аялал оршин байх бүх (α, β) хос тоонуудыг ол.

Бодлого 3. Бүхэл коэффициенттой, тогтмол биш $P(x)$ олон гишүүнийн хувьд $P(0) \neq 0$ байв.

Дурын ялгаатай натурал $i \neq j$ тоонуудын хувьд $a_i - a_j$ ялгавар $P(i - j)$ утгад бүхлээр хуваагддаг байх бүхэл тоон $a_1, a_2, a_3, \dots$ төгсгөлгүй урттай дараалал өгөгдөв. $a_1, a_2, a_3, \dots$ дараалал тогтмол болохыг, өөрөөр хэлбэл, ямар нэг тогтмол c тоотой бүх a_n тэнцүү байна гэж батал.

Бодлого 4. $n \geq 3$ бүхэл тоо байг. Тойрог дээр n ширхэг нүд байх бөгөөд нүд бүрд 0 эсвэл 1 оноогдсон байг. Тахиа аль нэг нүднээс эхлэн дараах үйлдлийг давтан гүйцэтгэнэ:

- Хэрэв тахиа 0 утгатай нүдэнд байвал уг нүдний утгыг 1 болгон өөрчилж цагийн зүүний эсрэг чиглэлд дараагийн нүдэнд шилжинэ.
- Хэрэв тахиа 1 утгатай нүдэнд байвал, уг нүдний утгыг 0 болгон өөрчилж, цагийн зүүний эсрэг чиглэлд дараагийн нүдийг алгасаж тэрний дараагийн нүд рүү шилжинэ.

Хангалттай их үйлдэл хийсэн гэж үзээд дараах өгүүлбэрүүдийг батал:

Хэрэв тахиа C нүдэнд байвал, тэрээр тойргийг яг гурван удаа тойрч, дахин C нүдэн дээр ирнэ. Энэ үед нүд бүрд оноогдсон тоо нь тахиа тойргийг гурван удаа тойрохоор явж эхлэхээс яг өмнөхтэй адил байх болно.

Бодлого 5. Натурал тоон $a_1, a_2, \dots$ төгсгөлгүй урттай дараалал өгөгдөв. $m \leq n$ байх бүх m, n натурал тоонуудын хувьд

$$100!(a_m + a_{m+1} + \dots + a_n) \text{ тоо } a_{n-m+1}a_{n+m} \text{ тоонд бүхлээр хуваагддаг}$$

бол энэ дараалал зааглагдсан эсвэл шугаман гэж батал.

Санамж: $a_1, a_2, \dots$ натурал тоон дарааллын хувьд N тоо бүх натурал n -ийн хувьд $a_n < N$ байхаар олддог бол энэхүү дарааллыг зааглагдсан гэнэ. Мөн бүх натурал n -ийн хувьд $a_n = n \cdot a_1$ байвал энэхүү дарааллыг шугаман гэнэ.