

---

# ММО-1

## Улсын математикийн 1-р олимпиад

1964–1965 хичээлийн жил

---

Энэ олимпиадын цуврал албан ёсоор хэвлэгдэж гараагүй тул бодлого, бодолтыг дараах номоос эмхэтгэн оруулав. Эх сурвалж: П. Энхболд, Ц. Дашдорж. Монголын Математикийн Олимпиад I. Ахлах ангиллын бодлогууд (1965–1985). Улаанбаатар, 2022. © “Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо” НҮТББ.

### Бодлогууд

**1.1.**  $0 \leq a \leq 1 \leq b \leq 2 \leq c \leq 3$  нөхцөлд тохирох  $a, b, c$  талуудтай гурвалжнууд дотроос хамгийн их талбайтай гурвалжныг ол.

**1.2.**  $x, y, z$  нь хос хосоороо тэнцүү биш, бүхэл тоонууд бол  $(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$  нийлбэр  $5(x-y)(x-z)(z-y)$  үржвэрт хуваагдахыг батал.

**1.3.**  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$  тоонуудын хувьд  $a_0 = a_n = 0$  бөгөөд дурын  $1 \leq k \leq n-1$  хувьд  $a_{k+2} - 2a_{k+1} + a_k \geq 0$  байдаг бол эдгээр  $a_k$  тоонууд эерэг биш болохыг батал.

**1.4.**  $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$  тэгшитгэлийг бод.

**1.5.**  $K$  тойрог дээр гурван өөр  $A, B, C$  цэгүүд өгчээ.  $ABCD$  дөрвөн өнцөгт дотор багтсан тойрог байж болохуйцаар  $K$  тойрог дээр (горьтог болон шугам хэрэглэж) дөрөв дэх  $D$  цэгийг байгуул.

## Бодолтууд

**1.1.**  $a, b, c$  талуудтай гурвалжны талбай

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma \leq \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

байна. Мэдээж  $a = 1, b = 2, c = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$  үед тэнцэлдээ хүрэх тул хамгийн их талбайтай гурвалжин болно.

**1.2.** Дараах адилтгалаас илэрхий.

$$(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5 = 5(x - y)(y - z)(z - x)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$$

**1.3.**  $a_\ell$  хамгийн бага гишүүн гээ. Аливаа  $k$  дугаарын хувьд

$$a_{k+2} - a_{k+1} \geq a_{k+1} - a_k \geq 0$$

тул

$$0 \geq a_\ell - a_{\ell-1} \geq a_{\ell-1} - a_{\ell-2} \geq \dots \geq a_1 - a_0$$

ба

$$a_n - a_{n-1} \geq a_{n-1} - a_{n-2} \geq \dots \geq a_{\ell+1} - a_\ell \geq 0$$

байна. Иймд

$$0 = a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_\ell \leq a_{\ell+1} \leq \dots \leq a_n = 0$$

болж батлах зүйл батлагдав.

**1.4.**  $c = \cos 2x$  гэвэл  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1 + c}{2}$  ба  $\cos^2 3x = \frac{1 + \cos 6x}{2} = \frac{1 + 4c^3 - 3c}{2}$  гэдгээс тэгшитгэл маань  $2c^3 + c^2 - c = c(c+1)(2c-1) = 0$  гэж бичигдэнэ.

Эндээс  $c = 0, -1, \frac{1}{2}$  буюу  $k$  бүхэл тооны хувьд

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \quad \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$$

байна.

**1.5.**  $K$  тойрог дээр дурын  $D'$  цэг авч  $BAD', BCD'$  өнцгийн биссектрисүүдийн огтлолцлын цэгийг  $S$  гээ.  $S$  цэгийг  $K$  тойрог дотор оршдог гээ. Эсрэг тохиолдолд төстэйгөөр батлагдана.  $ABCD'$  багтсан дөрвөн өнцөгт тул  $\angle BAD' + \angle BCD' = 180^\circ$  гэдгээс  $\angle BAS + \angle BCS = 90^\circ$  болно. Эндээс  $\angle ASC = 270^\circ - \angle ABC$  болж,  $\angle ASC$  нь  $D'$  цэгийн сонголтоос үл хамаарна. Одоо  $ASC$  гурвалжныг багтаасан тойргийг байгуулж,  $ABC$  өнцгийн биссектрис уг тойрогтой  $ABCD'$  дөрвөн өнцөгт дотор огтлолцох цэгийг  $T$  гээ.  $K$  тойрог дээр  $D$  цэгийг  $AT$  нь  $\angle BAD$ -ийн биссектрис байдаг байхаар авъя.  $A, S, T, C$  нэг тойрг дээр орших тул  $\angle ASK = \angle AKC$ ,  $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$  гэдгийг тооцвол  $\angle DAT + \angle DCT = 90^\circ$  гэж гарна. Эндээс  $\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ$  тул  $CT$  нь  $\angle BCD$ -ийн биссектрис болно.  $ABCD$  дөрвөн өнцөгтийн хувьд  $A, B, C$  орой дах өнцгүүдийн биссектрисүүдийн  $T$  цэгт огтлолцох

тул  $D$  орой дах өнцгийн биссектрис мөн  $T$  цэгийг дайрна. Өөрөөр хэлбэл,  $ABCD$  дөрвөн өнцөгт дотор тойрог багтааж болно.

