
ММО-10

Улсын математикийн 10-р олимпиад

1973–1974 хичээлийн жил

Энэ олимпиадын цуврал албан ёсоор хэвлэгдэж гараагүй тул бодлого, бодолтыг дараах номоос эмхэтгэн оруулав. Эх сурвалж: П. Энхболд, Ц. Дашдорж. Монголын Математикийн Олимпиад I. Ахлах ангиллын бодлогууд (1965–1985). Улаанбаатар, 2022. © “Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо” НҮТББ.

Бодлогууд

10.1. $\log_{x-1}(x+1) > \log_{x^2-1}(x+1)$ тэнцэтгэл бишийг бод.

10.2. $a + b + c = 2$ бол $a^{2^n} + b^{2^n} + c^{2^n} > \frac{1}{2^{2^n} - 1}$ тэнцэтгэл бишийг батал. Энд n -натурал тоо ба a, b, c -нь бодит тоо.

10.3. P цэгт шүргэлцсэн 2 тойрог өгчээ. Нэг тойргийг A цэгээр шүргэсэн шулуун нөгөө тойргийг B, C цэгүүдээр огтлов. PA шулуун PB, PC шулуунуудын хоорондох өнцгийг таллан хуваахыг батал.

10.4. Рационал тоон олонлог $\mathbb{Q}$ дээр тодорхойлогдсон $f(x)$ функц дурын $x, y \in \mathbb{Q}$ -ийн хувьд

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$$

ба $f(1) = 2$ бол $f(x)$ функцийг ол.

10.5. $a_0, a_1, \dots, a_n$ дараалал $a_0 = \frac{1}{2}$ ба $0 \leq k \leq n-1$ хувьд $a_{k+1} = a_k + \frac{1}{n} a_k^2$ гэсэн рекуррент томъёогоор өгөгдсөн бол $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$ болохыг батал.

10.6. $n > 2$ хайрцагт харгалзан $b_1, \dots, b_n$ ширхэг ном байв. Минут бүрд тэдгээрийн $n-2$ -д нь нэг нэг ном нэмнэ. $n, b_1, \dots, b_n$ тоонууд ямар нөхцөл хангаж байвал хэзээ нэг цагт бүх хайрцаг тэнцүү номтой болох боломжтой вэ?

Бодолтууд

10.1. Тодорхойлогдох муж нь $D: x - 1 > 0, x - 1 \neq 1$ тул $x > 1, x \neq 2$ байна.

$$\log_{x-1}(x+1) > \log_{x^2-1}(x+1) \iff \frac{1}{\log_{x+1}(x-1)} > \frac{1}{\log_{x+1}(x^2-1)}$$

$t = \log_{x+1}(x-1)$ гэвэл

$$\iff \frac{1}{t} > \frac{1}{t+1} \iff \frac{1}{t(t+1)} > 0 \iff t < -1 \cup t > 0$$

байна. $x+1 > 1$ тул

$$\log_{x+1}(x-1) < -1 \iff x-1 < \frac{1}{x+1} \iff x < \sqrt{2}$$

эсвэл

$$\log_{x+1}(x-1) > 0 \iff x-1 > 1 \iff x > 2$$

байна. Тодорхойлогдох мужаа тооцвол $1 < x < \sqrt{2}$ эсвэл $x > 2$ байна.

10.2. $0 < a \leq b \leq c < 1$ гэж үзэж болно. Тэгвэл $a + b + c = 2$ гэдгээс $a \leq \frac{2}{3}, b \geq \frac{1}{2}, c \geq \frac{2}{3}$ гэж гарна. Иймд

$$a^{2^n} + b^{2^n} + c^{2^n} > \frac{1}{2^{2^n}} + \frac{2^{2^n}}{3^{2^n}}$$

болно. Одоо

$$\frac{1}{2^{2^n}} + \frac{2^{2^n}}{3^{2^n}} > \frac{1}{2^{2^n} - 2}$$

болохыг баталъя.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{2^n}} + \frac{2^{2^n}}{3^{2^n}} &= \frac{3^{2^n} + 2^{2 \cdot 2^n}}{6^{2^n}} > \frac{1}{2^{2^n} - 2} \\ \iff 6^{2^n} + 2^{3 \cdot 2^n} - 2 \cdot 3^{2^n} - 2^{(2^{n+1}+1)} &> 6^{2^n} \\ \iff 8^{2^n} - 2 \cdot (3^{2^n} + 4^{2^n}) &> 0 \end{aligned}$$

болно. Нөгөө талаас $k \geq 2$ үед $8^k - 2 \cdot (3^k + 4^k) > 0$ болохыг хялбархан баталж болно. Үнэндээ

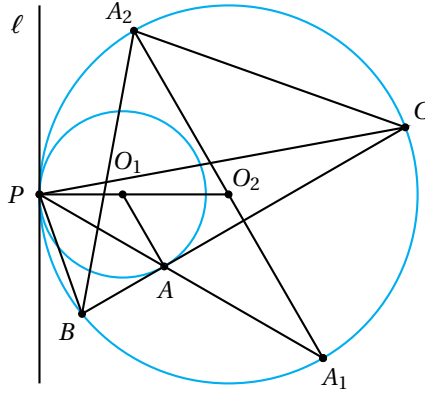
$$8^k - 2 \cdot (3^k + 4^k) > 0 \iff 1 - 2 \cdot \left\{ \left(\frac{3}{8} \right)^k + \left(\frac{4}{8} \right)^k \right\} > 0$$

ба сүүлийн тэнцэтгэл биш нь

$$1 - 2 \cdot \left\{ \left(\frac{3}{8} \right)^k + \left(\frac{4}{8} \right)^k \right\} > 1 - 2 \cdot \left\{ \left(\frac{3}{8} \right)^2 + \left(\frac{4}{8} \right)^2 \right\} = \frac{7}{32} > 0$$

тул үнэн юм.

10.3. Өгсөн хоёр тойрог дотоод байдлаар шүргэлцсэн тохиолдлыг авч үзье. P дээр төвтэй $\frac{PA_1}{PA} = k$ коэффициенттэй гомотетийг φ гэе. ℓ нь P цэг дээрх шүргэгч байг.



$O_1P \perp \ell \perp O_2P$ тул O_1 цэг нь PO_2 хэрчим дээр оршино. Иймд адил хажуут гурвалжин PO_1A , PO_2A нь төстэй ба $\varphi(A) = A_1$ тул $\varphi(O_1) = O_2$ болно. Нэгэнт $\varphi(A) = A_1$ тул $\varphi([O_1A]) = [O_2A_1]$ ба $O_1A \parallel O_2A_1$ болно. $O_1A \perp BC$ гэдгээс $O_2A_1 \perp BC$ гэж гарах тул O_2A_1 нь $[BC]$ -г таллан хуваана. Иймд $\triangle A_2BC$ нь адил хажуут тул

$$\angle BPA_1 = \angle BA_2A_1 = \angle A_1A_2C = \angle A_1PC$$

болно. Өгсөн хоёр тойрог гадаад байдлаар шүргэлцсэн тохиолдолд мөн үүнтэй адил болно.

10.4. $x = y = 0$ гэвэл

$$f(0) = [f(0)]^2 - f(0) + 1 \Rightarrow f(0) = 1$$

болно. $y = 1$ гэвэл

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) \cdot f(1) - f(x+1) + 1 \\ &= 2f(x) - f(x+1) + 1 \end{aligned}$$

тул

$$f(x+1) = f(x) + 1 \quad (1)$$

гэж гарна. (1)-ээс аливаа $m \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд

$$f(x+m) = f(x) + m$$

ба $f(1) = 2$ гэдгээс $\forall m \in \mathbb{Z}$ хувьд $f(m) = m + 1$ болохыг харуулах төвөгтэй биш. Иймд

$$\begin{aligned} 2 &= f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) \\ &= f(n) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(n + \frac{1}{n}\right) + 1 \\ &= (n+1) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) - n - f\left(\frac{1}{n}\right) + 1 \\ &= n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) - n + 1 \end{aligned}$$

учраас $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + 1$ болно. Түүнчлэн аливаа $x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ тооны хувьд

$$\begin{aligned} f\left(\frac{m}{n}\right) &= f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) \\ &= f(m) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(m + \frac{1}{n}\right) + 1 \\ &= (m+1) \cdot \left(\frac{1}{n} + 1\right) - \left(m + \frac{1}{n} + 1\right) + 1 \\ &= \frac{m}{n} + 1 \end{aligned}$$

учир $f(x) = x + 1$ болов.

10.5. Өгсөн нөхцөлийг $a_{k+1} = \frac{a_k(a_k + n)}{n}, \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_k + n}$ гэж бичиж болно. Үүнийг $0 \leq k \leq n-1$ байх k -аар нийлбэрчилбэл

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_0} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n + a_i}$$

болно. $a_0 = \frac{1}{2}$ ба $a_i > 0$ тул

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_0} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n + a_i} \geq 2 - n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

буюу $a_n < 1$ болно. Нэгэнт $a_k < a_{k+1}$ тул дурын $k < n$ -ийн хувьд $a_k < a_n < 1$ болох нь батлагдлаа. Эндээс

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{a_k + n} < \frac{1}{n}$$

болно. Иймд

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_0} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n + a_i} < 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

буюу

$$a_n > \frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2} > 1 - \frac{1}{n}$$

болж бодлого бодогдов.

10.6. Анх байсан нийт номын тоог m гэе. m сондгой, n тэгш байхаас бусад тохиолдолд бүх хайрцаг тэнцүү номтой болох боломжтой гэдгийг харуулъя. Энэ нь аль нэг хоёр тавиурт ном нэмэх замаар бүгдийг нь тэнцүүлэх бодлоготой эквивалент гэдгийг харахад төвөгтэй биш юм. Иймд хоёр тавиурт ном нэмэх бодлогыг бодъё.

m сондгой, n тэгш үед нийт номын тоо үргэлж сондгой байна. Нөгөө талаас бүх хайрцаг тэнцүү тооны номтой болсон гэвэл энэ тоо тэгш байх ёстой. Иймд энэ тохиолдолд номын тоог тэнцүүлэх боломжгүй.

$n = 2k + 1$ байг. Хэсэг үйлдлийн дараа аль нэг хайрцагт бусдаасаа яг нэгээр илүү тооны ном нэмэгдсэн байхаар үйлдэл хийж чадвал бүгдийг нь тэнцүүлж болох нь ойлгомжтой. $n = 2k + 1$ үед энэ нь боломжтой юм.

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{4, 5\}, \dots, \{2k, 2k + 1\}$$

үйлдлээр 1-р хайрцагт бусдаас нь яг 1-ээр илүү тооны ном нэмэгдэнэ. Энд $\{a, b\}$ нь a, b -р тавиурт ном нэмэх үйлдлийг тэмдэглэж байгаа болно.

m, n тэгш үед хамгийн цөөн тооны номтой хоёр тавиур дээр ном нэмэх үйлдлийг давтан хийсээр бүх тавиурт тэнцүү тооны ном тавьж болно гэдгийг харуулъя. Тавиуруудад бүгд тэнцүү биш

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$$

ширхэг ном тавигдсан гэе. Дээрх дурдсан үйлдлээр хамгийн олон ба хамгийн цөөн хоёрын зөрөө багасаагүй гэе. Энэ нь дараах хоёр боломжтой. а) $a_1 = a_2 = a_3$ б) $a_2 = a_3 = \dots = a_n$

а) тохиолдолд хамгийн цөөн номтой тавиурын тоо 2-оор цөөрнө. Иймд үйлдлээ давтан хийсээр a_1 номтой тавиурын тоог 1 эсвэл 2 болгож болно. Хэрвээ 1 бол дахин нэг удаа үйлдэл хийхэд а) тохиолдол гарах боломжгүй тул эсвэл б) тохиолдол эсвэл бидний сонирхож байгаа зөрөө багасна. Харин 2 бол дараагийн үйлдлээр хамгийн олон ба хамгийн цөөн хоёрын зөрөө багасна.

б) тохиолдолд $a'_1 = a_1 + 1 < a_3 = a_4 = \dots = a_n < a'_2 = a_2 + 1$ байна. Учир нь $a'_1 = a_3$ бол m сондгой болоход хүрнэ. Иймд дараагийн үйлдлээр хамгийн олон ба хамгийн цөөн хоёрын зөрөө багасана.

Нөгөө талаас хамгийн олон ба хамгийн цөөн хоёрын зөрөөг төгсгөлгүй олон удаа багасах боломжгүй. Иймд хэсэг алхамын дараа тавиур бүр тэнцүү тооны номтой болно.