
ММО-11

Улсын математикийн 11-р олимпиад

1974–1975 хичээлийн жил

Энэ олимпиадын цуврал албан ёсоор хэвлэгдэж гараагүй тул бодлого, бодолтыг дараах номоос эмхэтгэн оруулав. Эх сурвалж: П. Энхболд, Ц. Дашдорж. Монголын Математикийн Олимпиад I. Ахлах ангиллын бодлогууд (1965–1985). Улаанбаатар, 2022. © “Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо” НҮТББ.

Бодлогууд

11.1. Натурал n тоо ба бүхэл a_0, a_1, a_2, a_3 тоонуудын хувьд

$$a_0 + a_1 \sqrt[4]{4n+3} + a_2 \sqrt[4]{(4n+3)^2} + a_3 \sqrt[4]{(4n+3)^3} = 0$$

тэнцэл биелж байвал $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ болохыг батал.

11.2. $k > 2, m > 1$ байх k, m натурал тоонуудын хувьд аль ч k ширхэг нь арифметикийн прогресс үүсгэдэг mk ширхэг бодит тоо өгөгдсөн бол эдгээр тоонууд тэнцүү болохыг батал.

11.3. Аль ч гурав нь нэг шулуун дээр үл орших хавтгайн 6 цэгийг хос хосоор нь хэрчмээр холбожээ. Эдгээр хэрчим бүрийг хоёр өнгийн зөвхөн нэгээр буджээ. Өгсөн цэгүүд дээр оройтой, ижил өнгийн талуудтай гурвалжин дор хаяж 2 олдохыг үзүүл.

11.4. M нь тогтмол тоо агуулаагүй бөгөөд үл хураагдах $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ хэлбэртэй функцэн элементүүд бүхий төгсгөлөг олонлог болно. Энд a, b, c, d бүхэл. Дараах нөхцөлүүдийг хангах бүх M олонлогийг ол.

а) $f(x) \in M$ бол $\frac{1}{f(x)} \in M$;

б) $f(x), g(x) \in M$ бол $f(g(x)) \in M$;

в) $f(x), g(x) \in M$ бол $f(g(x)) = g(f(x))$.

11.5. $n \geq 3$ хүмүүс бие биетэйгээ гар барилцжээ. Гар барилтын тоо $1 + \left\lceil \frac{n^2}{4} \right\rceil$ -ээс багагүй бол хоорондоо гар барьсан 3 хүн олдохыг үзүүл.

11.6. 1×1 талбайтай квадрат дээр (дотор ба хүрээн дээр) 1975 цэг тэмдэглэжээ.

$$A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8$$

тахир шугамын урт $\frac{9}{16}$ -өөс үл хэтрэх 8 цэг олдохыг үзүүл.

11.7. Зэргэлдээ хоёрын хоорондох зай нь a ба b байх 3 параллел шулуун дээр оройтой бөгөөд тэнцүү талуудын хоорондох өнцөг нь α байх адил хажуут гурвалжны талбайг ол.

11.8. $\left[\frac{2x-1}{3} \right] = \left[\frac{x+1}{2} \right]$ тэгшитгэлийг бод.

Бодолтууд

11.1. Бодолт хоёр шатаар хийгдэнэ.

а) Дурын $n \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд $\sqrt{4n+3}$ нь рационал тоо биш гэж үзүүлье. Хэрэв

$$\sqrt{4n+3} = \frac{p}{q}, \quad (p, q) = 1$$

бол $4n+3 = \frac{p^2}{q^2}$ байна. Эндээс

$$3q^2 \equiv p^2 \pmod{4} \Rightarrow p \equiv q \equiv 0 \pmod{2}$$

болж $(p, q) = 1$ гэдэгт зөрчинө. Иймд $\sqrt{4n+3}$ нь иррационал тоо байна.

б) $k \in \mathbb{N}$ нь бүтэн квадрат биш байхад a_0, a_1, a_2, a_3 бүхэл тоонуудын хувьд

$$a_0 + a_1 \sqrt[4]{k} + a_2 \sqrt[4]{k^2} + a_3 \sqrt[4]{k^3} = 0$$

бол $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ байхыг үзүүлье.

Эсрэгээс нь ийм биш гэж үзье. Өөрөөр хэлбэл

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0, 0)$$

боловч дээрх харьцаа биелэх (a_0, a_1, a_2, a_3) дөрвөл оршин байна гэж үзье. Ийм дөрвөлүүдээс зохиож болох

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

олон гишүүнтүүдээс хамгийн бага зэрэгтэй нь $f(x)$ гэе. $g(x) = x^4 - k$ гээд $g(x)$ -г $f(x)$ -д хуваая.

$$g(x) = f(x) \cdot q(x) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg f(x)$$

гэе.

$$r(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$

гэвэл $g(\sqrt[4]{k}) = f(\sqrt[4]{k}) = 0$ тул $r(\sqrt[4]{k}) = 0$ болно. Иймд $f(x)$ -ийн тодорхойлолтоос

$$(b_0, b_1, b_2, b_3) = (0, 0, 0, 0)$$

болно. Иймд $g(x) = f(x) \cdot q(x)$ болов. Нөгөө талаас $g(x)$ нь тэг биш хоёр олон гишүүнтийн үржвэрт

$$g(x) = (x - \sqrt[4]{k})(x^3 + \sqrt[4]{k}x^2 + \sqrt[4]{k^2}x + \sqrt[4]{k^3})$$

$$g(x) = (x + \sqrt[4]{k})(x^3 - \sqrt[4]{k}x^2 + \sqrt[4]{k^2}x - \sqrt[4]{k^3})$$

$$g(x) = (x^2 - \sqrt[4]{k^2})(x^2 + \sqrt[4]{k^2})$$

гэж задарна. Гэтэл а)-д баталснаар $\sqrt[4]{k^2} = \sqrt{k}$ нь рационал тоо биш учир үржигдэхүүн бүрд ядаж нэг рационал биш коэффициент орж байна. Иймд $g(x) = f(x) \cdot q(x)$ гэсэн задрал байж болохгүй юм. Энэ зөрчил нь

$$a_0 + a_1 \sqrt[4]{k} + a_2 \sqrt[4]{k^2} + a_3 \sqrt[4]{k^3} = 0$$

байх ядаж нэг тэг биш дөрвөл олдono гэж авснаас болжээ.

11.2. Өгөгдсөн тоонууд нь

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{mk}$$

гэе. Аль ч k нь арифметик прогресс үүсгэх ба $k + 1 < mk$ тул

$$a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k$$

ба

$$a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}$$

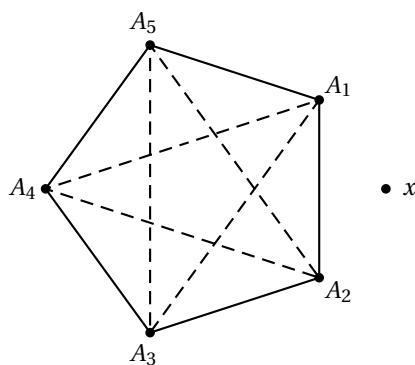
нь үл буурах арифметик прогрессууд юм. Иймд $a_k = a_{k+1}$ болно. Эндээс $k > 3$ тул a_k, a_{k+1} тоонуудыг агуулсан аливаа k ширхэг тоо бүгд a_k -тай тэнцүү болов. Иймд өгөгдсөн бүх тоонууд тэнцүү.

11.3. Лемм. $G = (V, E)$ графын хувьд $|V| = 5$ граф ба $K_3 \not\subseteq G, K_3 \not\subseteq \overline{G}$ бол $G = C_5$ байна.

Хэрвээ 5 оройтой графын орой бүрийн зэрэг 2 бол C_5 байх нь ойлгомжтой. Ямар нэг x оройн зэрэг 2-оос их байг. Тэгвэл гурвалжин агуулахгүй тул x оройтой хөрш оройнууд ирмэгээр холбогдохгүй байх ёстой. Энэ тохиолдолд $\overline{G}$ нь гурвалжин агуулна. Ямар нэг x оройн зэрэг 2-оос бага байг. Тэгвэл $\overline{G}$ графын хувьд x оройн зэрэг 2-оос их байна. Леммийн нөхцөлд G ба $\overline{G}$ нь тэгш эрхтэй тул лемм батлагдав.

Өгсөн 6 цэг ба тэдгээрийг холбосон 1-р өнгийн хэрчмүүдээр үүсэх графыг авч үзье. Энэ графын аль ч 5 оройтой дэд хэсэг нь C_5 биш байг. Тэгвэл аль ч 5 оройг авахад ижил өнгийн гурвалжин олдох тул дор хаяж 2 ширхэг ижил өнгийн гурвалжин олдох нь ойлгомжтой.

Иймд аль нэг 5 оройгоор үүсэх хэсэг нь C_5 байсан гэе. Үлдэх оройг x гэе. Зурагт үзүүлсэнтэй адилаар ирмэгийг хэрчмээр, ирмэг бишийг тасархай шугамаар холбосон байг.



Хэрвээ x оройгоос 0 эсвэл 1 хар ирмэг гарсан бол 2 ширхэг тасархай гурвалжин, 4 эсвэл 5 хар ирмэг гарсан бол 2 ширхэг хар гурвалжин олдох нь илт. Иймд x оройгоос 2 эсвэл 3 хар ирмэг гарсан гэе. Эхлээд 2 ирмэг гарсан тохиолдлыг авч үзье. Дараалсан хоёр оройтой хараар холбогдсон байг. Тэдгээр нь A_1, A_2 гэхэд явцуурахгүй. Тэгвэл xA_1A_2 хар, xA_3A_5 тасархай гурвалжин болно. Дараалсан биш хоёр оройтой хараар холбогдсон байг. Тэдгээр нь A_1, A_3 гэхэд явцуурахгүй. Энэ

тохиолдолд $x A_2 A_4$, $x A_2 A_5$ гэсэн 2 тасархай гурвалжин олдоно. Одоо x оройгоос 3 оройтой хар ирмэгээр холбогдсон гээ. Тэдгээр нь дараалсан бол A_1 , A_2 , A_3 гэхэд явцуурахгүй. Энэ тохиолдолд $x A_1 A_2$, $x A_2 A_3$ гэсэн хар гурвалжнууд үүснэ. Тэдгээр нь дараалаагүй бол A_1 , A_2 , A_4 гэхэд явцуурахгүй. Энэ тохиолдолд $x A_1 A_2$ хар, $x A_3 A_5$ тасархай гурвалжин болно. Иймд аль ч тохиолдолд дор хаяж 2 ширхэг ижил өнгийн гурвалжин олдох нь батлагдлаа.

11.4. Дараах тэмдэглэлийг хийе.

$$f^{m+n}(x) = f^m(f^n(x)), \quad n, m \in \mathbb{N}$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \in M \text{ элементийг авъя. Тэгэхэд}$$

$$ad - bc = e \quad (1)$$

гээ.

$$f^2(x) = \frac{(a^2 + bc)x + b(a + d)}{c(a + d)x + (d^2 - bc)} = \frac{a_1x + b_1}{c_1x + d_1} \text{ болохыг шууд тогтоож болох бөгөөд } f^2(x)\text{-ийн хувьд (1) илэрхийлэл нь}$$

$$(a^2 + bc)(d^2 - bc) - bc(a + d)^2 = e^2 \quad (2)$$

хэлбэртэй болохыг хялбархан харж болно. Яг үүний адилаар

$$f^4(x) = f^2(f^2(x)) = \frac{a_2x + b_2}{c_2x + d_2}$$

гарсан гэвэл энэ бутархайн хувьд (2) ёсоор (1)-ийг бодоход $a_2d_2 - c_2b_2 = e^4$ гарна. Ийнхүү $\frac{a_nx + b_n}{c_nx + d_n} = f^{2n}(x)$ -ийн хувьд (1)-ийг бодвол $f^{2n}(x) = f^{2n-1}(f^{2n-1}(x))$ тул индукцээр

$$a_nd_n - b_nc_n = (a_{n-1}d_{n-1} - b_{n-1}c_{n-1})^2 = (e^{2^{n-1}})^2 = e^{2^n}$$

болно.

Хэрэв $e \neq 0, \pm 1$ бол M олонлог б) чанар ёсоор төгсгөлгүй олон элементтэй болоход хүрнэ. Иймд дурын $f(x) \in M$ элементийн хувьд $ad - bc = 0, \pm 1$ байна. Эхлээд $ad - bc = 0$ байх тохиолдлыг авч үзье. Хэрэв a, d, b, c тоонуудын аль нэг нь тэгтэй тэнцүү бол тэр үед M олонлог тогтмол тоо агуулахыг хялбархан харж болно. Энэ нь M олонлог тогтмол тоо үл агуулна гэсэнд харшилна. Хэрэв $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$ байсан ч $ad - bc = 0$ бол $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{adx+bd}{d(cx+d)} = \frac{bcx+bd}{d(cx+d)} = \frac{b}{d}$ болж M олонлог тогтмол тоо агуулахад хүрч зөрчил үүсэв. Иймд $ad - bc = 0$ байж үл болно.

Одоо $ad - bc = \pm 1$ байх тохиолдлыг авч үзье. Эндээс

$$(a, b) = (a, c) = 1, (d, b) = (d, c) = 1 \quad (3)$$

байхыг хялбархан харж болно. Хэрэв $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \in M$ бол $a)$ ёсоор $g(x) = \frac{cx+d}{ax+b} \in M$ болно. Одоо в) чанар ёсоор $f(g(x)) = g(f(x))$ болно гэдгээс $a(b+c) =$

$c(a+d)$ буюу $ab = cd$ болно. Гэтэл $ad - bc = \pm 1$, $ab = cd$ -аас бид (3)-ийг ашиглан $a \mid d$, $d \mid a$ гэж гарна. Иймд $a = \varepsilon d$ үүний адилаар $b = \varepsilon c$, $\varepsilon = \pm 1$ болно. Ийнхүү $|a| = |d|$, $|b| = |c|$ болох тул бидний авч үзэж буй тохиолдолд $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ гэдгийг анхаарвал

$$a^2 - c^2 = \pm 1 \quad (4)$$

болно. Нэгэнт $a - c, a + c \in \mathbb{Z}$ учраас $a = 0$, $|c| = 1$ эсвэл, $|a| = 1$, $c = 0$ болно. Хэрэв $a = 0$, $|c| = 1$ бол $f(x) = \frac{1}{x}$ эсвэл $f(x) = -\frac{1}{x}$ гэж гарна. Хэрэв $|a| = 1$, $c = 0$ бол $f(x) = x$ буюу $f(x) = -x$ гэж гарна. Ийнхүү M олонлогийн бүх элементүүд зөвхөн дээрх дөрвөн элементийн аль нэгтэй тэнцэх юм. Иймд $M_1 = \left\{x, \frac{1}{x}\right\}$, $M_2 = \left\{x, -x, \frac{1}{x}, -\frac{1}{x}\right\}$ олонлогууд бодлогын бүх нөхцөлийг хангаж чадна.

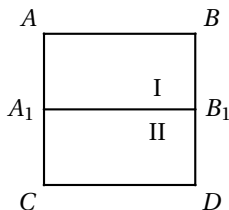
11.5. Хүмүүсээ $A_1, \dots, A_n$ цэгүүдээр тэмдэглэж, гар барилцсаныг нь хэрчмүүдээр холбоё. Тэгвэл гурвалжин үүсэхгүй байхаар татаж болох хамгийн олон хэрчим нь $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ байна гэдгийг тодруулбал бодлого бодогдоно. Хамгийн олон хэрчим гарсан цэг нь A_1 ба үүнээс d хэрчим гарсан бөгөөд эдгээрийн үзүүрийн цэгүүд нь $A_n, A_{n-1}, \dots, A_{n-d+1}$ байг. Тэгвэл $A_n, A_{n-1}, \dots, A_{n-d+1}$ цэгүүд нь хоорондоо хэрчмээр холбогдохгүй.

Нийт хэрчмийн тоог x , A цэгээс гарсан хэрчмийн тоог $d(A)$ гэвэл

$$x \leq d(A_1) + d(A_2) + \dots + d(A_{n-d}) \leq (n-d)d \leq \left(\frac{n-d+d}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}$$

буюу $x \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ болно.

11.6. Нэгж квадратаа $\frac{1}{16}$ талтай 256 жижиг квадратад хуваая. Тэгвэл эдгээр жижиг квадратын аль нэгд нь манай тэмдэглэсэн цэгээс дор хаяад 8 цэг оршино. Энэхүү жижиг квадратаа зурагт үзүүлсэнээр 2 тэнцүү тэгш өнцөгт болгож хуваая. Сонирхож буй 8 цэгээс k ширхэг нь I тэгш өнцөгтөд $8-k$ ширхэг нь II тэгш өнцөгтөд агуулагддаг гэе.



Одоо I тэгш өнцөгтөд буй цэгүүдийг дураараа $A_1, A_2, \dots, A_k$ гэж дугаарлаад эдгээрийг хэрчмүүдээр холбож $A_1 A_2 \dots A_k$ тахир шугам үүсгэвэл $A_i A_j$, $1 \leq i, j \leq k$ хэрчмийн урт $|A_1 B| = \frac{\sqrt{5}}{32}$ диагоналиас үл хэтэрнэ. Иймд $A_1 A_2 \dots A_k$ тахир шугамын урт $\frac{(k-1)\sqrt{5}}{32}$ -ээс үл хэтэрнэ.

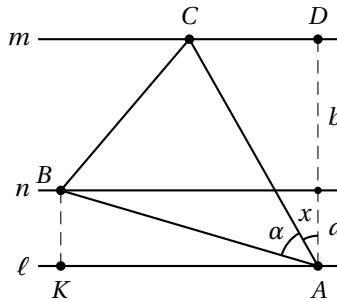
Цааш нь II тэгш өнцөгтийн цэгүүдийг дураараа $A_{k+1}, \dots, A_8$ гэж дугаарлавал $A_{k+1} \dots A_8$ тахир шугамын урт $\frac{(7-k)\sqrt{5}}{32}$ -гаас үл хэтэрнэ. $|A_k A_{k+1}| \leq \frac{\sqrt{2}}{16}$ байх нь илэрхий учраас

$$|A_1 \dots A_8| \leq \frac{(k-1)\sqrt{5}}{32} + \frac{(7-k)\sqrt{5}}{16} + \frac{\sqrt{2}}{16} = \frac{3\sqrt{5} + \sqrt{2}}{16} \leq \frac{9}{16}$$

болох нь батлагдав.

11.7. Параллель 3 шулуунаа харгалзан m, n, ℓ гэе. Бодлого 3 тохиолдолтой. Учир нь адил хажуут гурвалжны α өнцөгтэй орой нь m, n, ℓ шулуунуудын аль нь дээр ч оршиж болно.

α өнцөгтэй орой нь аль нэг захын шулуун тухайлбал ℓ шулуун дээр байх тохиолдлыг эхлээд бодъё.



Олох ёстой талбай S нь

$$S = \frac{1}{2}|AB||AC| \sin \alpha = \frac{1}{2}|AC|^2 \sin \alpha \quad (1)$$

болно. Одоо $|AC|$ -г олъё.

$$|AC| = \frac{a+b}{\cos x},$$

$\angle BKA = 90^\circ$ тул $|AB| = \frac{b}{\sin(90^\circ - \alpha - x)}$, $|AC| = |AB| \sin(90^\circ - \alpha - x) = \cos(\alpha + x)$ гэдгээс

$$\frac{a+b}{\cos x} = \frac{b}{\cos(\alpha + x)} \quad (2)$$

болно. (2)-ийг хувиргавал

$$[(a+b) \cos \alpha - b] \cos x = (a+b) \sin \alpha \cdot \sqrt{1 - \cos^2 x} \quad (3)$$

хэлбэртэй болно. (3)-ийн 2 талыг квадрат зэрэгт дэвшүүлж, төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэвэл

$$\cos^2 x = \frac{(a+b)^2 \sin^2 \alpha}{a^2 + 2b(a+b)(1 - \cos \alpha)} \quad (4)$$

болно. (4)-ыг $|AC|^2 = \frac{(a+b)^2}{\cos^2 x}$ -д орлуулбал

$$|AC|^2 = \frac{a^2 + 2b(a+b)(1 - \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \frac{a^2 + 4b(a+b) \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \alpha}$$

болох тул

$$S = \frac{a^2 + 4b(a+b) \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \alpha} \quad (5)$$

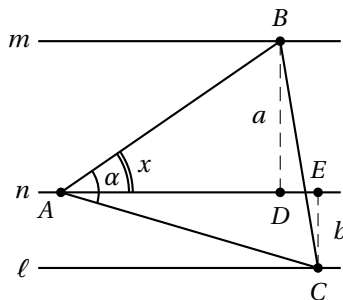
боллоо.

Хэрэв гурвалжны α өнцөгтэй орой нь нөгөө захын шулуун n дээр оршвол (5) томьёонд a, b -ийн үүрэг солигдож

$$S = \frac{b^2 + 4a(a+b) \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \alpha}$$

болно.

Одоо гурвалжны α өнцөгтэй орой нь дундах шулуун n дээр оршиж байх тохиолдолдлыг авч үзье.



Энэ үед мөн $\alpha = \angle BAC$, $|AB| = |AC|$ болох ба талбай S нь мөн (1) томьёо ёсоор бодогдоно. $|AB| = |AC| = \frac{a}{\sin x}$, $|AC| = \frac{b}{\sin(\alpha - x)}$

$$\frac{a}{\sin x} = \frac{b}{\sin(\alpha - x)} \quad (6)$$

$$\sin^2 x = \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha} \quad (7)$$

болохыг тус тус олж болно.

$$|AC|^2 = |AB|^2 = \frac{a^2}{\sin^2 x}$$

учраас (7)-г ашиглавал

$$|AC|^2 = \frac{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \quad (8)$$

болно. (1)-д (8)-ыг орлуулбал

$$S = \frac{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}{2 \sin \alpha}$$

болж бодлого бодогдов.

11.8. Дурын бодит тоо x -ийн хувьд

$$x = [x] + \{x\} \quad (1)$$

(Энд $[x]$ ба $\{x\}$ нь x тооны бүхэл ба бутархай хэсэг) $0 \leq \{x\} < 1$ гэж бичиж болох учраас өгөгдсөн тэгшитгэлийг

$$\frac{2x-1}{3} - \left\{ \frac{2x-1}{3} \right\} = \frac{x+1}{2} - \left\{ \frac{x+1}{2} \right\}$$

буюу

$$\frac{2x-1}{3} + \alpha = \frac{x+1}{2} + \beta, \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq 1$$

гэж бичиж болно. Эндээс

$$\frac{2x-1}{3} - \frac{x+1}{2} = \beta - \alpha$$

болох ба $0 \leq \alpha, \beta < 1$ гэдгийг анхаарвал

$$-1 < \frac{x-5}{6} < 1 \iff -1 < x < 11$$

болно. Эндээс $0 < \frac{x+1}{2} < 6$ тул

$$\left[\frac{2x-1}{3} \right] = \left[\frac{x+1}{2} \right] = 0 \vee 1 \vee 2 \vee 3 \vee 4 \vee 5$$

тохиолдлуудад шийдийг олж нэгтгэнэ. Жишээ нь

$$\left[\frac{2x-1}{3} \right] = \left[\frac{x+1}{2} \right] = 2$$

тохиолдолд

$$\begin{cases} 2 \leq \frac{2x-1}{3} < 3 \\ 2 \leq \frac{x+1}{2} < 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 3.5 \leq x < 5 \\ 3 \leq x < 5 \end{cases}$$

тул $[3.5, 5)$ завсар шийд болно.