
ММО-14

Улсын математикийн 14-р олимпиад

1977–1978 хичээлийн жил

Энэ олимпиадын цуврал албан ёсоор хэвлэгдэж гараагүй тул бодлого, бодолтыг дараах номоос эмхэтгэн оруулав. Эх сурвалж: П. Энхболд, Ц. Дашдорж. Монголын Математикийн Олимпиад I. Ахлах ангиллын бодлогууд (1965–1985). Улаанбаатар, 2022. © “Монголын Математикийн Олимпиадын Хорго” НҮТББ.

Бодлогууд

14.1. Гүдгэр 6 өнцөгтийн дотоод өнцгүүд тэнцүү бол

$$S \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(a_1a_2 + a_3a_4 + a_5a_6)$$

болохыг батал. Энд S нь зургаан өнцөгтийн талбай; $a_1, \dots, a_6$ дараалсан талууд болно.

14.2. $P_1, \dots, P_k$ нь $m + n$ -ийг хуваадаг ялгаатай анхны тоонууд бөгөөд эдгээрээс яг S ширхэг нь n -ийг хуваадаг бол дараах тэнцэтгэлийг батал.

$$\sum_{\{i_1, \dots, i_j\}} \left(\left\lfloor \frac{m+n}{P_{i_1}P_{i_2} \dots P_{i_j}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{P_{i_1}P_{i_2} \dots P_{i_j}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{P_{i_1}P_{i_2} \dots P_{i_j}} \right\rfloor \right) = 2^k - 2^s$$

Энд $\{i_1, \dots, i_j\}$ гэсэн $\{1, \dots, k\}$ -ийн бүх хоосон биш дэд олонлогоор нийлбэрчилнэ.

14.3. Нийлбэр нь 832 байх ба квадратууд нь геометр прогресс үүсгэх бүх натурал тоон гурвалыг ол.

14.4. Бодит тоон олонлог дээр тодорхойлогдсон бөгөөд дурын бодит тоо a, b -ийн хувьд

$$f(a+b) = \frac{f(a) + f(b)}{1 + f(a) \cdot f(b)}$$

нөхцөлийг хангах бүх тэгш функц $f(x)$ -үүдийг ол.

14.5. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ нь хос хосоороо ялгаатай бөгөөд $0 \leq \alpha_i \leq \pi, i = 1, \dots, n$ байх өнцгүүд, n сондгой натурал тоо бол

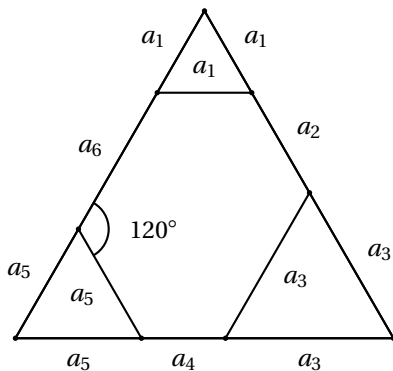
$$(\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n)^2 + (\cos \alpha_1 + \dots + \cos \alpha_n)^2 \geq 1$$

тэнцэтгэл бишийг батал.

14.6. Зөв гурвалжин дотор дурын O цэг авчээ. Энэ цэгээс оройнууд хүртэлх зайнуудын нийлбэр, энэ цэгээс талууд хүртэлх зайнуудын нийлбэрийг 2 дахин авснаас багагүй гэдгийг батал. Хэдийд тэнцэл биелэх вэ?

Бодолтууд

14.1. Бүх өнцөгүүд нь 120° ба $a_1 + a_2 = a_4 + a_5$, $a_3 + a_4 = a_1 + a_6$ болохыг харахад төвөгтэй биш юм. Эндээс $a_5 = a_1 + a_2 - a_4$, $a_6 = a_3 + a_4 - a_1$ болно.



$$\begin{aligned}
 S &= \frac{\sqrt{3}}{4}(a_1 + a_2 + a_3)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a_1^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a_3^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a_5^2 \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4}(2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3 + a_3^2 - (a_1 + a_2 - a_4)^2) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4}(2a_1a_3 + 2a_2a_3 + a_3^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_4^2 + 2a_1a_4 + 2a_2a_4)
 \end{aligned}$$

Нөгөө талаас

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{3}}{2}(a_1a_2 + a_3a_4 + a_5a_6) &= \frac{\sqrt{3}}{2}(a_1a_2 + a_3a_4 + (a_1 + a_2 - a_4)(a_3 + a_4 - a_1)) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2}(a_1a_3 + a_1a_4 - a_1^2 + a_2a_3 + a_2a_4 - a_4^2 + a_1a_4) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4}(2a_1a_3 + 2a_1a_4 - 2a_1^2 + 2a_2a_3 + 2a_2a_4 - 2a_4^2 + 2a_1a_4)
 \end{aligned}$$

тул өгсөн тэнцэтгэл биш

$$a_1^2 + a_3^2 + a_4^2 \geq a_2^2 + 2a_1a_4$$

тэнцэтгэл бишийг батлахад шилжинэ. Тэгш хэмтэй тул a_3 -ийг хамгийн урт тал буюу $a_3^2 \geq a_2^2$ гэж үзэж болно. Түүнчлэн $a_1^2 + a_4^2 \geq 2a_1a_4$ болохыг тооцвол батлах тэнцэтгэл биш батлагдав. Тэнцэлдээ хүрэх нөхцөл нь

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6$$

байна.

14.2. $p_1, p_2, \dots, p_s$ нь n -ийг хуваадаг гэж үзье. Тэгвэл эдгээр нь $m+n$ -ийг хуваадаг учир m -ийг бас хуваана.

$$\frac{m+n}{p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_j}} = x, \frac{m}{p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_j}} = y, \frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_j}} = z$$

гэсэн тэмдэглэл хийвэл

$$x - y - z = 0$$

эндээс

$$[x] + \{x\} - [y] - \{y\} - [z] - \{z\} = 0,$$

$\{y\} + \{z\} - \{x\}$ нь бүхэл утга авдаг бол 0, 1-ээс өөр утга авах боломжгүй. Иймд нэг бол

$$[x] - [y] - [z] = 1$$

эсвэл

$$[x] - [y] - [z] = 0.$$

Өгөгдсөн нийлбэр нь

$$C_k^1 + C_k^2 + \dots + C_k^k = 2^k - 1$$

нэмэгдэхүүнтэй. Иймд нийлбэрийн утга нь $2^k - 1$ -ээс хэтрэхгүй юм. $p_{i_1} \dots p_{i_j}$ нь бүгд $p_1, p_2, \dots, p_s$ -ээс бүрдсэн тийм нэмэгдэхүүн бүр 0-тэй тэнцүү байна. Учир нь

$$\begin{aligned} & \left[\frac{m+n}{p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_j}} \right] - \left[\frac{m}{p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_j}} \right] - \left[\frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_j}} \right] = \\ & = \frac{m+n}{p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_j}} - \frac{m}{p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_j}} - \frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_j}} = 0 \end{aligned}$$

Ийм нэмэгдэхүүн өгөгдсөн нийлбэрт

$$C_s^1 + C_s^2 + \dots + C_s^s = 2^s - 1$$

ширхэг байна. Хэрэв $p_{i_1}, \dots, p_{i_j}$ -ийн ядаж нэг нь $p_{s+1}, p_{s+2}, \dots, p_k$ -ийн аль нэгтэй тэнцүү бол $\frac{m+n}{p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_k}}$ бүхэл $\frac{m}{p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_k}}$ бүхэл биш, $\frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_k}}$ бүхэл биш учир

$$\left[\frac{m+n}{p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_j}} \right] - \left[\frac{m}{p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_j}} \right] - \left[\frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_j}} \right] \neq 0$$

иймд

$$\left[\frac{m+n}{p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_j}} \right] - \left[\frac{m}{p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_j}} \right] - \left[\frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_j}} \right] = 1$$

Ингэхлээр өгөгдсөн нийлбэр нь $2^k - 1$ нэмэгдэхүүнтэй бөгөөд түүний яг $2^s - 1$ нь 0-тэй тэнцүү бусад нь 1-тэй тэнцүү юм. Иймд

$$\sum_{\{i_1, \dots, i_j\}} \left[\frac{m+n}{p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_j}} \right] - \left[\frac{m}{p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_j}} \right] - \left[\frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_j}} \right] = (2^k - 1) - (2^s - 1) = 2^k - 2^s.$$

14.3. Олох ёстой тоонуудыг a, b, c гэе. Тэгвэл $a < b < c$ гэж үзэж болно. a^2, b^2, c^2 -геометр прогрессын хуваарийг d гэе. Тэгвэл $a^2, b^2 = a^2 d, c^2 = a^2 d^2$ ба $a, b = a\sqrt{d}, c = ad$ нь мөн геометр прогресс үүсгэнэ. $d = q^2$ гэвэл $a, b = aq, c = aq^2$ ба $q > 1$. Иймд

$$a + b + c = a + aq + aq^2 = a(q^2 + q + 1) = 832,$$

q нь рационал тоо байж болох учир $q = \frac{m}{n}, (m, n) = 1, m > n$ гэж үзье. Энд $m, n \in \mathbb{N}$.

Тэгвэл

$$a \left(\frac{m^2}{n^2} + \frac{m}{n} + 1 \right) = a \cdot \frac{m^2 + mn + n^2}{n^2} = 832 \quad (1)$$

Гэтэл $(m^2 + mn + n^2, n) = 1$ тул $(m^2 + mn + n^2, n^2) = 1$ буюу $(m^2 + mn + n^2, n^2) = 1$. Иймд $a = n^2 S, S \in \mathbb{N}$ дүрсээр бичигдэнэ.

Тэгвэл (1)-ийг $S(m^2 + mn + n^2) = 832 = 2^6 \cdot 13$ гэж бичиж болно. $(n, m) = 1$ гэж үзсэн учраас $m^2 + mn + n^2$ сондгой тоо юм. Иймд $m^2 + mn + n^2 = 13, m, n \leq 13, m > n$ болохыг анхаарвал үүний шийд зөвхөн $m = 3, n = 1$. Ийм учраас $q = \frac{m}{n} = 3$ ба $a = 2^6 = 64, b = 64 \cdot 3 = 192, c = 192 \cdot 3 = 576, (64, 192, 576)$.

14.4. $a = 2x, b = -x$ үед

$$f(x) = \frac{f(2x) + f(-x)}{1 + f(2x)f(-x)} = \frac{f(2x) + f(x)}{1 + f(2x)f(x)} \Rightarrow$$

$$1 + f(2x)f(x) \neq 0, \quad f(2x)(f^2(x) - 1) = 0.$$

$a = b = x$ үед

$$f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + f^2(x)}$$

тул

$$\frac{2f(x)}{1 + f^2(x)} [f^2(x) - 1] = 0 \Rightarrow f(x)(f^2(x) - 1) = 0$$

болно. Иймд $f(x) = 0$, эсвэл $f(x) = 1$, эсвэл $f(x) = -1$. Одоо $0, 1, -1$ утгуудыг бүгдийг нь авдаг $f(x)$ функц олдохгүй гэж баталъя. Хэрэв тийм $f(x)$ функц олддог бол түүний хувьд $f(a_0) = 1, f(b_0) = -1$ байдаг a_0, b_0 цэгүүд олдоно. Гэтэл $1 + f(a_0)f(b_0) \neq 0$ байх ёстой билээ. Иймд $f(x)$ нь нэг бол $0, 1$ эсвэл $0, -1$ утгуудыг л авдаг байх ёстой. $f(x)$ нь $0; 1$ утгуудыг авдаг байг. Тэгвэл

$$f(x_1) = 0, f(x_1 + \Delta x) = f(x_2) = 1$$

байх $x_1, x_2 = x_1 + \Delta x$ цэгүүд олдоно. Гэтэл $f(\Delta x) \neq -1$ тул

$$f(x_1) = f(x_2 - \Delta x) = \frac{f(x_2) + f(-\Delta x)}{1 + f(x_2)f(-\Delta x)} = \frac{1 + f(\Delta x)}{1 + f(\Delta x)} = 1$$

Энэ нь бидний $f(x_1) = 0$ гэж авсанд харшилна. Үүнтэй адилаар $f(x)$ нь $0; -1$ утгуудыг авдаг гэвэл $f(x_1) = 0, f(x_2) = -1$ ба $f(\Delta x) \neq 1$ тул

$$f(x_1) = f(x_2 - \Delta x) = \frac{f(x_2) + f(\Delta x)}{1 + f(x_2)f(\Delta x)} = \frac{-1 + f(\Delta x)}{1 - f(\Delta x)} = -1$$

болж бас авсан нөхцөлд харшилна. Иймд бодлогын нөхцөлийг зөвхөн $f_1(x) = 0, f_2(x) = 1, f_3(x) = -1$ функцүүд хангана.

14.5. $n = 1$ үед $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ учир тэнцэтгэл биш үнэн. Иймд хойшид $n \geq 3$ гэж үзье. Хэрэв

$$\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \cdots + \sin \alpha_n \geq 1$$

байвал тэнцэтгэл биш илэрхий үнэн. Иймд

$$\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \cdots + \sin \alpha_n < 1 \quad (1)$$

гэж үзье. (1) нөхцөл биелж байхын тулд $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$ завсарт өгөгдсөн $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ өнцгүүдээс нэгээс ихгүй нь харъяалагдаж болно. Хэрэв энэ завсарт харъяалагддаг өнцөг байдаг бол түүнийг α_m гэе. Тэгвэл $\alpha_m \neq \frac{\pi}{2}$. Ингэхлээр α_m -ээс бусад бүх өнцөг нь $\left[0; \frac{\pi}{6}\right], \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ харъяалагдах ёстой. Тэдгээрийн хувьд $0 \leq \sin \alpha_i \leq \frac{1}{2}$, $i \neq m$. Харин $\frac{1}{2} \leq \sin \alpha_m < 1$. Нөгөө талаас

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 + \cdots + \cos \alpha_n &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} + \cdots + 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha_n}{2} \\ &= n - 2 \left(\sin^2 \frac{\alpha_1}{2} + \cdots + \sin^2 \frac{\alpha_n}{2} \right) \end{aligned}$$

Гэтэл

$$\sin^2 \frac{\alpha_i}{2} = \frac{1 - \cos \alpha_i}{2} = \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_i}}{2} \leq \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}, i \neq m$$

ба

$$\sin^2 \frac{\alpha_m}{2} = \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_m}}{2} < \frac{1}{2}$$

Иймд

$$\sin^2 \frac{\alpha_1}{2} + \cdots + \sin^2 \frac{\alpha_n}{2} < \frac{2 - \sqrt{3}}{4}(n - 1) + \frac{1}{2} = \frac{2n - \sqrt{3}(n - 1)}{4}$$

ба

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 + \cdots + \cos \alpha_n &= n - 2 \cdot \left(\sin^2 \frac{\alpha_1}{2} + \cdots + \sin^2 \frac{\alpha_n}{2} \right) > \\ &> n - 2 \cdot \frac{2n - \sqrt{3}(n - 1)}{4} = \frac{\sqrt{3}(n - 1)}{2} \end{aligned}$$

буюу

$$\cos \alpha_1 + \cdots + \cos \alpha_n > \frac{\sqrt{3}(n - 1)}{2}$$

$n \geq 3$ үед $\frac{\sqrt{3}(n - 1)}{2} > 1$ учир

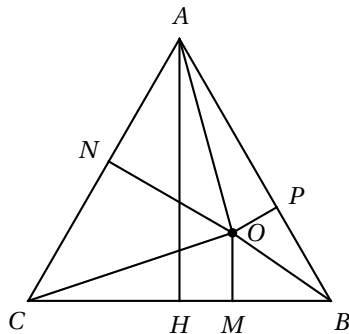
$$\cos \alpha_1 + \cdots + \cos \alpha_n > 1$$

Ийм учир (1) нөхцөл биелэх үед

$$\cos \alpha_1 + \cdots + \cos \alpha_n > 1$$

учраас батлах ёстой тэнцэтгэл биш үнэн байна.

14.6. $AH = h, AO = a, BO = b, CO = c, OM = \ell_a, ON = \ell_b, OP = \ell_c$ гэж тэмдэглэе.



$$\frac{S_{BOC}}{S_{ABC}} = \frac{\ell_a}{h}, \quad \frac{S_{AOC}}{S_{ABC}} = \frac{\ell_b}{h}, \quad \frac{S_{AOB}}{S_{ABC}} = \frac{\ell_c}{h}$$

Иймд

$$\frac{\ell_a}{h} + \frac{\ell_b}{h} + \frac{\ell_c}{h} = \frac{S_{BOC} + S_{AOC} + S_{AOB}}{S_{ABC}} = 1$$

буюу

$$\ell_a + \ell_b + \ell_c = h$$

Нөгөө талаас $h \leq a + \ell_a, h \leq b + \ell_b, h \leq c + \ell_c$. Иймд

$$a + b + c \geq 3h - (\ell_a + \ell_b + \ell_c) = 2(\ell_a + \ell_b + \ell_c).$$

O цэг өгөгдсөн зөв гурвалжны төвтэй давхцах үед тэнцэлдээ хүрнэ.