
ММО-15

Улсын математикийн 15-р олимпиад

1978–1979 хичээлийн жил

Энэ олимпиадын цуврал албан ёсоор хэвлэгдэж гараагүй тул бодлого, бодолтыг дараах номоос эмхэтгэн оруулав. Эх сурвалж: П. Энхболд, Ц. Дашдорж. Монголын Математикийн Олимпиад I. Ахлах ангиллын бодлогууд (1965–1985). Улаанбаатар, 2022. © “Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо” НҮТББ.

Бодлогууд

15.1. ABC гурвалжны өндрүүд O цэгт огтлолцоно. ABC , OBC , OAC , OAB гурвалжнуудын талбай харгалзан S , S_A , S_B , S_C , эдгээр гурвалжинг багтаасан тойргуудын радиус харгалзан R , R_A , R_B , R_C бол

$$S_A R_A + S_B R_B + S_C R_C = S \cdot R$$

болохыг батал.

15.2. Зургаатын тооллын системд тэгээс ялгаатай цифрүүдээр бичигдэх n оронтой бүх тооны нийлбэрийг ол.

15.3. Аль ч гурав нь нэг шулуун дээр үл орших n цэг ($n \geq 6$) хавтгай дээр өгчээ. Эдгээр цэгт оройтой бөгөөд аль нэг өнцөг нь 120° -аас багагүй байх гурвалжин оршин байхыг батал. Ийм гурвалжнуудын тоо хамгийн цөөндөө хэд байх вэ?

15.4.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k, \quad k > 0 \\ \frac{k + x_1}{k + x_1 + x_2} = \frac{x_2}{k + x_1 + x_2 + x_3} \\ \frac{x_1}{k + x_1 + x_2} = \frac{x_2}{k + x_1 + x_2 + x_3} \\ \vdots \\ \frac{k + x_1 + \cdots + x_{n-1}}{x_{n-1}} = \frac{k + x_1 + \cdots + x_n}{x_n} \end{array} \right.$$

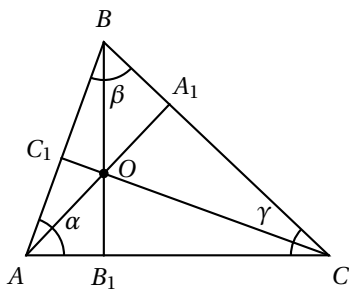
системийн эерэг шийдийг ол.

15.5. Дугуй дотор A цэг өгчээ. $\angle XAY = 90^\circ$ байх бүх боломжит хөвч XY -ыг татав. M нь XY шулууны хувьд A -тай тэгш хэмтэй орших цэг бол тийм бүх M цэгүүдийн геометр байрыг ол.

15.6. Өөрийнхөө бүх цифрүүдийн, мөн цифрүүдийг хоёр хоёроор, гурав гурваар гэх мэтчилэн авсан үржвэрүүдийн нийлбэр бүх цифрүүдийн үржвэртэй тэнцүү байх 15 оронтой бүх тоонуудыг ол.

Бодолтууд

15.1. $AB = c, BC = a, AC = b, AA_1 = h_1, BB_1 = h_2, CC_1 = h_3, AO = h'_1, BO = h'_2, CO = h'_3$ гэж тэмдэглэе.



$SR = \frac{abc}{4}$ болох нь синусын теоремоос шууд гаргана. Иймд батлах тэнцэл маань

$$\frac{ch'_1h'_2}{4} + \frac{ah'_2h'_3}{4} + \frac{bh'_1h'_3}{4} = \frac{abc}{4}$$

буюу

$$\frac{h'_1h'_2}{ab} + \frac{h'_2h'_3}{bc} + \frac{h'_1h'_3}{ac} = 1$$

болно. $\angle BOA = \pi - \gamma$ болох нь илэрхий тул

$$\begin{aligned} \frac{h'_1h'_2}{ab} + \frac{h'_2h'_3}{bc} + \frac{h'_1h'_3}{ac} &= \frac{h'_1h'_2 \sin(\pi - \gamma)}{ab \sin \gamma} + \frac{h'_2h'_3 \sin(\pi - \alpha)}{bc \sin \alpha} + \frac{h'_1h'_3 \sin(\pi - \beta)}{ac \sin \beta} \\ &= \frac{S_C}{S} + \frac{S_A}{S} + \frac{S_B}{S} = \frac{S}{S} = 1 \end{aligned}$$

15.2. Зургаатын тооллын системд манай n оронтой тоо нь $1 \leq a_i \leq 5$,

$$\overline{a_0 \dots a_{n-1}} = a_0 + a_1 \cdot 6 + \dots + a_{n-1} \cdot 6^{n-1}$$

гэж бичигдэнэ. Ийм тооны нийт тоо нь 5^n байх ба тодорхойлон бэхэлсэн a_i цифр нь 5^{n-1} удаа давтагдана. Учир нь a_i -ийг бэхэлсэн үед $a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ -үүд нь тус бүр 5 янзын утгыг дураараа авч болох тул тэднийг сонгох боломж нь 5^{n-1} байна. Иймд

$$\begin{aligned} \sum \overline{a_0 \dots a_{n-1}} &= 5^{n-1} \{ (1 + \dots + 5) + (1 + \dots + 5) \cdot 6 + \dots + (1 + \dots + 5) 6^{n-1} \} \\ &= 5^{n-1} \cdot 15 \cdot \frac{6^n - 1}{6 - 1} = 5^{n-1} \cdot 3 \cdot (6^n - 1) \end{aligned}$$

15.3. Аль ч гурав нь нэг шулуун дээр үл орших 6 цэгийн хувьд дурдсан гурвалжин ямагт оршихыг баталъя. Хэрэв уг 6 цэг гүдгэр 6 өнцөгтийн орой дээр оршвол уг 6 өнцөгтийн ядаж нэг өнцөг нь 120° -аас багагүй байх нь илэрхий. Хэрэв уг 6 цэгийг агуулсан гүдгэр олонлог 5 өнцөгт бол 6 дахь цэг нь энэ 5 өнцөгтийн дотор орших тул түүнийг аль нэг 3 цэгээр нь тодорхойлогдох гурвалжны дотор байна гэж үзэж болно. Энэ тохиолдолд уг цэгийг гурвалжны 3 оройтой холбоход заавал дурдсан чанар бүхий гурвалжин олдоно. Хэрэв уг 6 цэгийг агуулсан гүдгэр олонлог нь дөрвөн өнцөгт эсвэл гурвалжин бол мөн адилаар бодогдоно. Иймд C_n^6 дурдсан гурвалжин олдох нь илэрхий. Гэтэл үүний нэг гурвалжин нь 3 цэгээрээ тодорхойлогдох ба үлдэх гурван цэгийг C_{n-3}^3 янзаар сонгох ба уг гурвалжин нийт C_{n-3}^3 удаа давтагдан тоологдох тул нийт гурвалжны тоо $\frac{C_n^6}{C_{n-3}^3}$ байна.

15.4.

$$\frac{k+x_1}{x_1} = \frac{k+x_1}{x_2} + 1 \Rightarrow \frac{k}{x_1} = \frac{k+x_1}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{k+x_1}{k} \cdot x_1$$

байна. Индукцээр

$$x_s = \left(\frac{k+x_1}{k} \right)^{s-1} \cdot x_1$$

болохыг баталъя. $s < t$ үед үнэн гээд $s = t$ үед баталъя.

$$\begin{aligned} \frac{k+x_1+\dots+x_{t-1}}{x_{t-1}} &= \frac{k+x_1+\dots+x_t}{x_t} \Rightarrow \\ \frac{k+x_1+\dots+x_{t-2}}{x_{t-1}} &= \frac{k+x_1+\dots+x_{t-1}}{x_t} \Rightarrow \\ x_t &= \frac{k+x_1+\dots+x_{t-1}}{k+x_1+\dots+x_{t-2}} \cdot x_{t-1} \\ &= \frac{k+x_1+\dots+x_{t-1}}{k+x_1+\dots+x_{t-3}} \cdot x_{t-2} \\ &\vdots \\ &= \frac{k+x_1+\dots+x_{t-1}}{k} \cdot x_1 \end{aligned}$$

Нөгөө талаас

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_{t-1} &= \sum_{s=1}^{t-1} \left(\frac{k+x_1}{k} \right)^{s-1} \cdot x_1 \\ &= \frac{x_1 \left(\left(\frac{k+x_1}{k} \right)^{t-1} - 1 \right)}{\frac{k+x_1}{k} - 1} \\ &= k \cdot \left(\frac{k+x_1}{k} \right)^{t-1} - k \end{aligned}$$

тул

$$x_t = \left(\frac{k+x_1}{k} \right)^{t-1} \cdot x_1$$

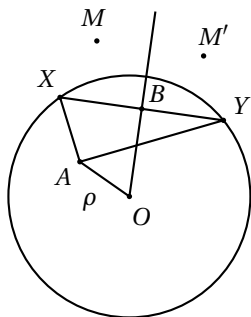
болж батлагдав.

$x_1 + \dots + x_n = k$ гэдгээс

$$k \cdot \left(\frac{k + x_1}{k} \right)^n - k = k \Rightarrow \left(\frac{k + x_1}{k} \right)^n = 2$$

болно. Иймд $x_1 = k(\sqrt[n]{2} - 1)$ ба $\frac{k + x_1}{k} = \sqrt[n]{2}$ тул $x_s = k(\sqrt[n]{2} - 1) \sqrt[n]{2^{s-1}}$, $s = \overline{1, n}$ байна.

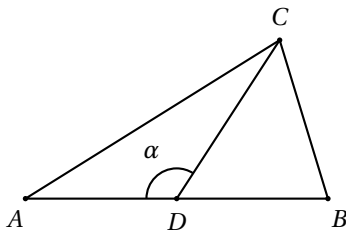
15.5. O нь тойргийн төв ба XY хөвчид перпендикуляр радиусын хувьд M цэгтэй тэгш хэмтэй орших цэг нь M' бол $OM = OM'$ байна. $\rho = OA$ ба r нь өгөгдсөн тойргийн радиус байг.



Одоо $OM' = \sqrt{2r^2 - \rho^2}$ болохыг баталъя. Өөрөөр хэлбэл OM' нь XY хөвчийн байрлалаас үл хамаарахыг баталъя.

A цэгийг тэнхлэгийн тэгш хэмээр 2 удаа дараалан хувиргахад M' цэг гарлаа гэж үзэж болох тул M' нь XY хөвчийн дундаж цэг b -ийн хувьд A -тай тэгш хэмтэй орших тул $AXM'Y$ нь тэгш өнцөгт болно. Учир нь $AXM'Y$ нь нэг тэгш өнцөгт бүхий параллелограмм болсон байгаа.

Лемм. ABC гурвалжинд $AD = DB$, CD -үүд нь тогтмол бол $AC^2 + CB^2$ нь мөн тогтмол байна.



Баталгаа. Косинусын теоремоор

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos \alpha$$

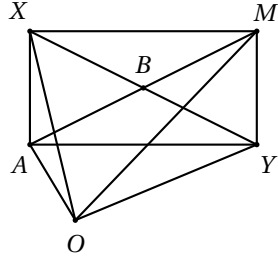
$$CB^2 = DB^2 + DC^2 - 2DB \cdot DC \cos (180^\circ - \alpha)$$

тул ба $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, $DB = AD$ тул дээрх хоёр илэрхийллийг нэмэхэд

$$AC^2 + CB^2 = 2AD^2 + 2DC^2$$

болж лемм батлагдав.

Иймд



$$AO^2 + OM'^2 = 2AB^2 + 2BO^2,$$

$$OX^2 + OY^2 = 2XB^2 + 2BO^2$$

болох ба энд $AB = XB$ байгааг анхаарч үзвэл $AO^2 + OM'^2 = OX^2 + OY^2$ гэж гарна. Эндээс

$$OM'^2 = OX^2 + OY^2 - AO^2 = 2r^2 - \rho^2$$

буюу $OM' = \sqrt{2r^2 - \rho^2}$. Иймд тийм M цэгийн геометр байр нь O дээр төвтэй $OM = \sqrt{2r^2 - \rho^2}$ радиустай тойрог болно.

Жич: Энд дээрх тойргийн цэг бүр ямар нэг XY хөвчид харгалзан гэдгийг харуулах шаардлагатай.

15.6. $a = \overline{a_1 \dots a_n}$ нь олбол зохих тоо байг.

$$S(a) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i < j} a_i a_j + \dots + a_1 \dots a_n$$

гэж тэмдэглэе.

$$\begin{aligned} S(a) &= \prod_{i=1}^n (1 + a_i) - 1 = a_1 \prod_{i=2}^n (1 + a_i) + \prod_{i=2}^n (1 + a_i) - 1 \\ &= \dots \\ &= a_1 \prod_{i=2}^n (1 + a_i) + a_2 \prod_{i=3}^n (1 + a_i) + \dots + a_n + 1 - 1 \\ &\leq a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_n = \overline{a_1 \dots a_n} = a \end{aligned}$$

тул $S(a) = a$ байхын тулд $i \geq 2$ үед $1 + a_i = 10$ байх ёстой болов. Өөрөөр хэлбэл, $\overline{a_1 9 \dots 9}$, $a_1 = 1, 2, \dots, 9$ хэлбэрийн тоонуудаас өөр тоо манай бодлогын шийд болж үл чадна.