
ММО-16

Улсын математикийн 16-р олимпиад

1979–1980 хичээлийн жил

Энэ олимпиадын цуврал албан ёсоор хэвлэгдэж гараагүй тул бодлого, бодолтыг дараах номоос эмхэтгэн оруулав. Эх сурвалж: П. Энхболд, Ц. Дашдорж. Монголын Математикийн Олимпиад I. Ахлах ангиллын бодлогууд (1965–1985). Улаанбаатар, 2022. © “Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо” НҮТББ.

Бодлогууд

16.1. $x^2 + y^2 + z^2 = 1980$ тэгшитгэлийн бүх натурал шийдийг ол.

16.2. $a_1, \dots, a_n$ бодит тоонуудаас зохиосон

$$|a_1 + \dots + a_k - a_{k+1} - \dots - a_n|, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

тоонуудын аль нэг нь $\max |a_i|$ -ээс үл хэтэрнэ гэж батал.

16.3. Гурвалжны хамгийн их өнцөг нь 90° -аас үл хэтрэх бөгөөд r ба R нь түүнд багтсан ба багтаасан тойргийн радиусууд, m нь гурвалжны хамгийн их өндөр бол $r + R \leq m$ болохыг батал.

16.4. n, a, b нь натурал тоонууд бөгөөд $a > b, n > b, a^n + b^n = c^n$ бол c нь бүхэл тоо байж чадахгүйг батал.

16.5. $\sin x > 0, n \in \mathbb{N}$ бол $n \sin^{n+1} x - (n+1) \sin^n x + 1 = 0$ тэгшитгэлийг бод.

16.6. $x_1, \dots, x_n$ тоонууд нь 1 ба -1 -ийн аль нэгтэй тэнцүү ба

$$\sum_{i=1}^n x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3} = 0, \quad (x_{n+k} = x_k)$$

бол n нь 4-д хуваагдахыг батал.

Бодолтууд

16.1. Натурал тооны квадратыг 16-д хуваахад зөвхөн 0, 1, 4, 9 үлдэгдэл өгнө. Нөгөө талаас $1980 = 16 \cdot 123 + 12$ юм.

$$a + b + c \equiv 12 \pmod{16}$$

тэгшитгэл $\{0, 1, 4, 9\}$ олонлогт шийдгүй гэдгийг шууд шалгаж болно. Иймд тэгшитгэл шийдгүй.

16.2. $S_k = \sum_{i=1}^k a_i - \sum_{i=k+1}^n a_j$ гэж тэмдэглэе. $S_n = \sum_{i=1}^n a_i > 0$ гэж үзье. $S_n < 0$ байх

тохиолдол нь мөн адилаар бодогдох нь бодолтоос харагдана. Иймд

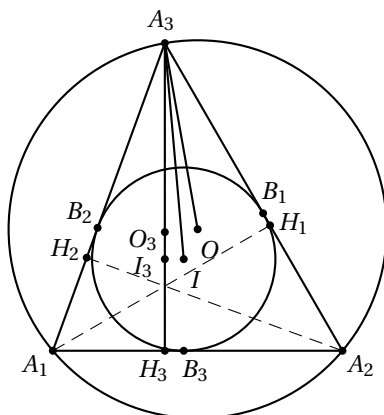
$$S_0 = -S, S_1, S_2, \dots, S_n = S$$

байна. S_k хэмжигдэхүүн нь $S_0 = -S < 0$ ээс $S_n = S > 0$ хүртэлх бүх утгыг авч байгаа билээ. Иймд $S_k < 0$ ба $S_{k+1} \geq 0$ байх k дугаар заавал олдоно. Нэгэнт $S_{k+1} = S_k + 2x_{k+1}$ тул

$$a_{k+1} = \frac{S_{k+1} + (-S_k)}{2} = \frac{|S_{k+1}| + |S_k|}{2}$$

буюу $a_{k+1} = |a_{k+1}|$ нь $|S_{k+1}|$ ба $|S_k|$ -ийн хооронд оршино. Тухайлбал, $|S_{k+1}| < |S_k|$ гэвэл $|a_{k+1}| \geq |S_{k+1}|$ болно. Нэгэнт $\max |a_i| \geq |a_k|$ тул бодлого бодогдов.

16.3. $A_1 A_2 A_3$ нь хамгийн их өнцөг нь 90° -аас үл хэтрэх гурвалжин байг. $\angle A_1 \geq \angle A_2 \geq \angle A_3$ гэж үзэж болно. O нь багтаасан тойргийн, I нь багтсан тойргийн төвүүд, H_i нь A_i оройгоос эсрэг талд буулгасан өндрийн сууриуд, B_1 нь багтсан тойргийн $A_2 A_3$ талыг, B_2 нь багтсан тойргийн $A_1 A_3$ талыг, B_3 нь багтсан тойргийн $A_1 A_2$ талыг шүргэсэн цэг нь байг.



Хэрэв I ба O цэг давхацвал $A_1 A_2 A_3$ нь зөв гурвалжин болох ба $r + R = m$ байх нь илэрхий юм.

$$|A_2 B_1| = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\angle A_2}{2} \leq r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\angle A_3}{2} \leq |B_1 A_3|$$

$$\begin{aligned}\angle OA_3B_1 &= \frac{1}{2}(\pi - \angle A_3OA_2) = \frac{1}{2}(\pi - 2\angle A_1) \\ &\leq \frac{1}{2}(\pi - \angle A_1 - \angle A_2) = \frac{\angle A_3}{2} = \angle IA_3B_1\end{aligned}$$

тул O төв нь B_1A_3I гурвалжны дотор юмуу тал дээр нь оршино.

$$\angle H_3A_3I = \frac{\angle A_3}{2} - \angle A_1A_3H = \frac{\angle A_3}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \angle A_1\right) = \frac{\angle A_3}{2} - \angle OA_3B_1 = \angle OA_3I$$

учир A_3O ба A_3H_3 нь A_3I -ийн хувьд тэгш хэмтэйгээр байрлана. A_3I -ийн хувьд O -той тэгш хэмтэйгээр A_3H_3 дээр орших цэг нь O_3 гэвэл $|A_3O_3| = R$ харин I цэгийн A_3H_3 дээрх ортогональ проекц нь I_3 гэвэл $|I_3H_3| = r$ болно. $\angle O_3IB_3 > \frac{\pi}{2}$ тул O_3 цэг $|A_3I_3|$ хэрчим дээр оршино. Иймд $r + R \leq |A_3H_3| = m$

16.4. $a^n + b^n = c^n$ гэдгээс $a < c$ гэж гарна.

$(a+1)^n = a^n + na^{n-1} + \dots$, $b < n$ ба $b^{n-1} < a^{n-1}$ байгаа тул $c^n = a^n + b^n < (a+1)^n$ болно. Эндээс $a < c < a+1$ гэж гарах тул c нь бүхэл тоо байж чадахгүй.

16.5.

$$\begin{aligned}n \sin^{n+1} x - n \cdot \sin^n x - (\sin^n x - 1) &= n \sin^n x (\sin x - 1) - (\sin x - 1) \sum_{k=0}^{n-1} \sin^k x \\ &= (\sin x - 1)(n \sin^n x - \sin^{n-1} x - \dots - 1) = 0\end{aligned}$$

болох ба $0 < \sin x < 1$ бол $\sin^n x < \sin^{n-1} x < \dots < \sin x < 1$ байх тул

$$n \sin^n x - \sin^{n-1} x - \dots - 1 \neq 0$$

болно. Иймд $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

16.6. $y_k = x_k x_{k+1} x_{k+2} x_{k+3}$, $k = 1, 2, \dots, n$ гэж авъя. y_k бүр 1 юмуу -1 утгыг авах ба $y_1 + \dots + y_n = 0$ билээ. Эндээс $n = 2m$ болох ба y_k -уудын m нь 1-тэй, m нь -1 -тэй тэнцүү байна. Иймд

$$y_1 \cdots y_n = (-1)^m$$

болно. Энэ үржвэрт x_j бүр 4 удаа орж байгаа тул

$$y_1 \cdots y_n = (-1)^m = \left(\prod x_i\right)^4 = 1.$$

Иймд $m = 2p$, $n = 2m = 4p$ болж батлагдав.