

ММО-17

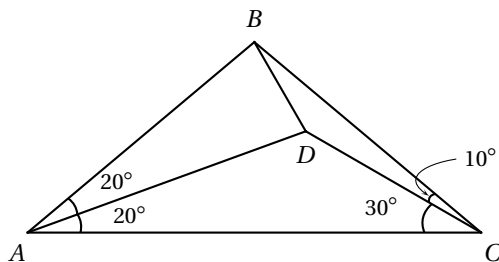
Улсын математикийн 17-р олимпиад

1980–1981 хичээлийн жил

Энэ олимпиадын цуврал албан ёсоор хэвлэгдэж гараагүй тул бодлого, бодолтыг дараах номоос эмхэтгэн оруулав. Эх сурвалж: П. Энхболд, Ц. Дашдорж. Монголын Математикийн Олимпиад I. Ахлах ангиллын бодлогууд (1965–1985). Улаанбаатар, 2022. © “Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо” НҮТББ.

Бодлогууд

17.1.



Зургаас $\angle DBC$ -г ол.

17.2. Дараах хоёр тооны аль нь их вэ?

$$a = \sqrt[60]{2}, b = \sqrt[60]{3} \text{ бол } a^b, b^a.$$

17.3. Нэгэн дугуй ширээг тойрон 1981 хүүхэд, 1921 том хүн суужээ. Зэрэгцэн суусан хүүхдийн хосын тооноос, зэрэгцэн суусан томчуудын тоог хасахад 60 болохыг батал.

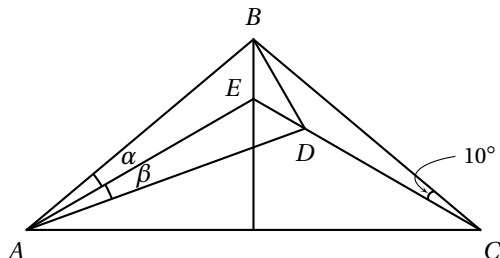
17.4. $(\overline{abc})^2 = (a + b + c)^5$ нөхцлийг хангадаг бүх 3 оронтой тоог ол.

17.5. $a > 2$ бодит тоо бол $\sin \frac{\pi}{a} > \frac{3}{\sqrt{a^2 + 9}}$ тэнцэтгэл бишийг батал.

17.6. $x^2 + xy - y^2 = 1$ тэгшитгэлийн $x > 100, y > 100$ байх ядаж нэг бүхэл тоон шийдийг ол.

Бодолтууд

17.1. E нь B оройгоос буулгасан өндрийн DC -тай огтлолцсон цэг болог.



$\angle B = 100^\circ$ тул $\angle ABE = 50^\circ$. ADC гурвалжны гадаад өнцөг болох $\angle EDA = 50^\circ$, $\alpha = \beta = 10^\circ$ тул $\triangle ABE = \triangle AED$. Иймд $|AB| = |AD|$ болох тул ABD нь адил хажуут гурвалжин учраас

$$\angle ABD = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ.$$

Эндээс $\angle DBC = 100^\circ - 80^\circ = 20^\circ$.

17.2. $x = a^b = \sqrt[60]{2}^{\sqrt[60]{3}}$, $y = b^a = \sqrt[60]{3}^{\sqrt[60]{2}}$ гэж тэмдэгдэе.

$$x^{\sqrt[60]{3^{59}}} = (\sqrt[60]{2}^{\sqrt[60]{3}})^{\sqrt[60]{3^{59}}} = \sqrt[60]{2^3} = \sqrt[60]{8}$$

$$y^{\sqrt[60]{2^{59}}} = (\sqrt[60]{3}^{\sqrt[60]{2}})^{\sqrt[60]{2^{59}}} = \sqrt[60]{3^2} = \sqrt[60]{9}.$$

Иймд $x^{\sqrt[60]{3^{59}}} < y^{\sqrt[60]{2^{59}}}$ болно. Иймд $x < y$ буюу $a^b < b^a$.

17.3. Зэрэгцэж суусан хүүхдүүдийн хосын тоог N , зэрэгцэж суусан томчуудын хосын тоог M гэе. Дурын нэг хүүхдийг бэхлээд цагийн зүүний эсрэг чиглэлд хүүхдээс том хүнд гэсэн шилжилтийг тоолбол $1981 - N$, том хүнээс хүүхдэд гэсэн шилжилт нь $1921 - M$ болно.

Одоо $1981 - N = 1921 - M$ болохыг баталъя. Хүүхдээс хүүхэд, том хүнээс том хүнд гэсэн шилжилтийг үл тооцвол дээрх тоололтоор $x \rightarrow T \rightarrow x \rightarrow T \rightarrow \dots \rightarrow T \rightarrow x$ тул $x \rightarrow T, T \rightarrow x$ гэсэн шилжилтүүдийн тоо тэнцүү байна. Иймд $1981 - N = 1921 - M$ буюу $N - M = 60$

17.4. Өгсөн нөхцөл ёсоор $\overline{abc} = \left(\frac{\overline{abc}}{(a+b+c)^2} \right)^5$ ба $\left(\frac{\overline{abc}}{(a+b+c)^2} \right)^2 = a + b + c$

тул $\frac{\overline{abc}}{(a+b+c)^2}$ нь бүхэл тоо байна. $4^5 > 1000$ учраас $\overline{abc} = 3^5 = 243$ байх ганцхан боломж байна.

17.5. $a > 0$ үед $0 < \frac{\pi}{a} < \frac{\pi}{2}$ болох учраас $\tan \frac{\pi}{a} > \frac{\pi}{a}$ байдаг. Эндээс $\tan \frac{\pi}{a} > \frac{3}{a}$ болно. Иймд $\tan^2 \frac{\pi}{a} > \frac{9}{a^2}$ буюу $a^2 \sin^2 \frac{\pi}{a} > 9 - 9 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{a}$ болж батлах зүйл батлагдав.

17.6. Тэгшитгэлийнхээ хэлбэрийг хялбар болгох зорилгоор $x = u - v, y = 2v$ гэж орлуулбал, манай тэгшитгэл $u^2 - 5v^2 = 1$ хэлбэртэй болно. $u = 9, v = 4$ нь энэ тэгшитгэлийн нэг шийд мөн.

Одоо энэ шийдийг томсгох асуудлыг авч үзье. n нь натурал тоо бол $(9 + 4\sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^n 9^{n-k} (4\sqrt{5})^k C_n^k = a_n + b_n \sqrt{5}$ хэлбэртэйгээр бичиж болдог. Энд a_n, b_n нь натурал

тоонууд. Тэгвэл $(9 - 4\sqrt{5})^n = a_n - b_n \sqrt{5}$ байх юм. Эндээс натурал тоо n бүрийн хувьд $u = a_n, v = b_n$ нь $u^2 - 5v^2 = 1$ тэгшитгэлийн шийд болно. Одоо $x > 100, y > 100$ байхаар n -ийг авч үзэхэд асуудал дуусна. $(9 + 4\sqrt{5})^3 = 2889 + 1292\sqrt{5}$ учраас $y = 2v = 2584, x = u - v = 1597$ нь манай тэгшитгэлийн шийд мөн.