

1981-1982 хичээлийн жил

Бодолтууд

18.1. $4^{18} + 4^{1000} + 4^n = 4^{18}(1 + 4^{982} + 4^{n-18})$ бүтэн квадрат байхын тулд $1 + 4^{982} + 4^{n-18} = a^2$, $a \in \mathbb{Z}$ байх ёстой.

$$1 + 4^{982} + 4^s = 1 + 2 \cdot 2^{1963} + 2^{2s}, \quad s = 1963$$

буюу $n = 1981$ үед энэ тоо бүтэн квадрат болно.

Одоо s нь 1963-аас их бол шийд болохгүйг үзүүлье. Эсрэгээр $1 + 2^{1964} + 2^{2s} = a^2$, $s > 1963$ болог. Тэгвэл

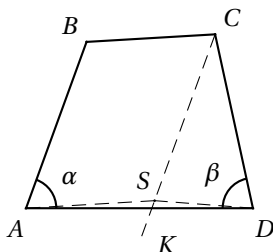
$$2^{2s} < a^2 = 2^{2s} + 2 \cdot 2^{1963} + 1 < 2^{2s} + 2 \cdot 2^s + 1 = (2^s + 1)^2$$

буюу

$$2^{2s} < a < 2^{2s} + 1$$

болж зөрчилд хүрэв. Иймд хамгийн их n тоо нь 1981 болов.

18.2. $ABCD$ нь байгуулбал зохих дөрвөн өнцөгт байг.



$\angle BAD = \alpha$, $\angle CDA = \beta$ гэе. $AB \parallel CK$ -г татаж $|AB| = |CS|$ байх S цэгийг CK шулуун дээр авъя. $\angle KCD = \pi - (\alpha + \beta)$ болох ба $ABCS$ нь параллелограмм юм. Эндээс $ABCD$ байгуулахын тулд $ASCD$ -г байгуулбал хүрэлцээтэй гэж гарна.

$ASCD$ -г байгуулахдаа $\triangle SCD$ -г өгсөн 2 тал $|SC| = |AB|$, $|CD|$ ба хоорондох өнцөг $\angle SCD = \pi - (\alpha + \beta)$ -ээр байгуулж S цэг дээр төвтэй $|AS| = |BC|$ радиустай тойрог, D цэг дээр төвтэй $|AD|$ -радиустай тойргуудын огтлолцлын цэг нь A орой болно. Ингэж $ASCD$ дөрвөн өнцөгтийг байгуулна.

18.3. $1 \geq a \geq \frac{20}{27}$ кг жинтэй чулууны тоог $S(a)$ гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $S(a) \leq 27$ байна. Эдгээрийг гурав гурваар нь 9 жинлэе. Тэдгээрийн жинг харгалзан $m_1, m_2, \dots, m_9$ гэе. Хэрэв бүх чулуу тэдгээрт орж байвал жинлэлт дуусна.

$b < \frac{20}{27}$ кг жинтэй чулуу оршин байг. Тэгвэл $\min m_i \leq \frac{20-b}{9} < 3-b$ учир m_i дээр тавьж жинлэнэ.

Одоо 8 жинлэлт хангалтгүйг үзүүлье. $\frac{4}{5}$ кг жинтэй 25 ширхэг чулууны нийт жин 20 кг байна. 1 жинлэлтээр 3-аас олныг жинлэж үл чадна. $\frac{4}{5} \cdot 4 > 3$ тул гурав гурваар нь 8 удаа жинлэе. Гэтэл 1 чулуу үлдэнэ. Иймд хамгийн цөөндөө гарцаагүй хийгдэх жинлэлтийн тоо 9 байна.

18.4. Эсрэгээс нь $1982^n + 2^n$ тооны орон 1982^n тооны оронгоос их байх n гэсэн тоо олддог байг. Тэгвэл ямар нэг k тоо олддог $1982^n < 10^k$, $1982^n + 2^n \geq 10^k$ байна. $1982^n > 10^{3n}$ учир $k > 3n$ байна. Энэ тэнцэтгэл бишийн 2 тал 2^n -д бүхлээр хуваагдана.

$$\begin{cases} 991^n < 5^k \cdot 2^{k-n} \\ 991^n + 1 \geq 5^k \cdot 2^{k-n} \end{cases} \quad \text{тэнцэтгэл бишийн системээс } 991^n + 1 = 5^k \cdot 2^{k-n} \text{ болно.}$$

Гэтэл энэ тэнцэл шийдгүй. Учир нь тэнцлийн баруун гар тал нь ямагт 2-оор, зүүн гар тал нь ямагт 0-ээр төгсөнө. Ингэж зөрчилд хүрч дурын n -ын хувьд $1982^n + 2^n$ ба 1982^n тоонууд адил оронтой байх нь батлагдав.

18.5. Уг тоо $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ хэлбэртэй байг. Тэгвэл энэ тоо 0, 1, 6, 8, 9 цифрүүдэд бичигдэнэ. Энэ тоог дундуур нь 2 тэнцүү хэсэгт салгая. Тэгвэл сүүлийн хэсгийн тоо урдах хэсгийн тоотой нэг ижил утгаар тодорхойлогдоно. Учир нь цаасны толгойг эргүүлсний дараа сүүлийн хэсгийн тоо нь урдах хэсгийн тоо болно. Иймд эдгээр тоонуудын тоотой тэнцүү.

1) n тэгш байг. Эхний хэсэгт $\frac{n}{2}$ цифр орно. 0, 1, 6, 8, 9 цифрүүдээр зохиогдсон $\frac{n}{2}$ оронтой тоо $4 \cdot 5^{\frac{n}{2}-1}$ байна. Учир нь эхний цифр нь 0 байж болохгүй бусад цифрийг дураараа сонгон авна.

2) n сондгой байг. Тэгвэл 2 хэсэгт хуваахад голд 1 цифр үлдэнэ. Энэ нь урвуу харуулахад үл өөрчлөгдөх тул 0, 1, 8 цифрийн нэг байна. Эдгээр тоонуудын тоо $12 \cdot 5^{\frac{n-1}{2}-1}$ байна.

18.6. $z_i = \operatorname{tg} x_i, i = 1, \dots, n$ ба $\varphi(x) = \frac{1}{3} \left(x + \frac{1}{x} \right)$ гэвэл

$$z_{s+1} = \frac{1}{3} \left(z_s + \frac{1}{z_s} \right) = \varphi(z_s), s = 1, \dots, n \quad (1)$$

байна. (1)-ээс бүх z_i ижил тэмдэгтэй болох нь гарна. Бид зөвхөн $z_i > 0$ тохиолдлыг бодъё. $z_i < 0$ байх тохиолдолд бодолт ижил байна. Бодлогын нөхцөлөөс

$$z_s = \varphi^n(z_s)$$

болно.

$y = x$ ба $y = \varphi^n(x)$ муруйнууд нь $x > 0$ байх огтлолцлын цэг зөвхөн ганцтай¹. Гэтэл $x = \varphi(x)$ бол $x = \varphi^n(x)$ байх ёстой тул энэ эрж буй шийд нь зөвхөн $x = \varphi(x)$ -ийн л шийд байна.

$$3x = x + \frac{1}{x} \iff 2x = \frac{1}{x} \iff x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Иймд (1) системийн бодит шийд нь $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \dots, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ ба $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \dots, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ болно.

Өөр бодит шийд байхгүй.

Иймд $\operatorname{tg} x_i = \frac{\sqrt{2}}{2}, i = 1, 2, \dots, n$ эсвэл $\operatorname{tg} x_i = -\frac{\sqrt{2}}{2}, i = 1, 2, \dots, n$ гэсэн шийдтэй.

¹Энэ өгүүлбэрийг баталгаа ойлгомжгүй байсан тул энд оруулсангүй. Та бүхэн хялбар баталгаа олбол бидэнд ирүүлнэ үү