
ММО-19

Улсын математикийн 19-р олимпиад

1982–1983 хичээлийн жил

Энэ олимпиадын цуврал албан ёсоор хэвлэгдэж гараагүй тул бодлого, бодолтыг дараах номоос эмхэтгэн оруулав. Эх сурвалж: П. Энхболд, Ц. Дашдорж. Монголын Математикийн Олимпиад I. Ахлах ангиллын бодлогууд (1965–1985). Улаанбаатар, 2022. © “Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо” НҮТББ.

Бодлогууд

19.1. $a_0 = 1$ байх $a_0, a_1, \dots, a_n$ натурал тоон дарааллын a_0 -оос бусад аль ч гишүүн нь ямар нэг хоёр гишүүнийх нь (ижил байж болно) нийлбэр болдог бол

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n < 2^{n+1}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

19.2. $\operatorname{tg} \alpha_1 = a_1, \dots, \operatorname{tg} \alpha_3 = a_3$ ба $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ нь хурц, $a_i > 0$ бол $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ нь хурц өнцөг байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөлийг ол.

19.3. 7 гэсэн тоог 3 рационал тооны квадратуудын нийлбэрт тавьж болохгүйг батал.

19.4. $m = 1 + \operatorname{tg}^2 10^\circ + \operatorname{tg}^2 50^\circ + \operatorname{tg}^2 70^\circ$, $a = \frac{n}{1983}$ бол $|2 - \log_m a| \leq 4$ тэнцэтгэл бишийг хангах 661-д хуваагддаг, 1728-тай харилцан анхны бүх натурал n -г ол.

19.5. Гурвалжны нэг талын урт нь b , түүн дээр буулгасан өндөр, медиан нь оройн өнцгийг 3 тэнцүү хэсэгт хуваадаг бол багтаасан ба багтсан дугуйн талбайн харьцааг ол.

19.6. $30 < n$ байх n натурал тооны хувьд $m < n$ ба $(m, n) = 1$ байх m зохиомол тоо олдохыг үзүүл.

Бодолтууд

19.1. $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ гэж эрэмбэлсэн гэе. Тэгвэл $a_1 = a_0 + a_0 = 2$, $a_2 \leq a_1 + a_1 = 4$, $a_3 \leq a_2 + a_2 = 8, \dots, a_n \leq a_{n-1} + a_{n-1} \leq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ болно. Иймд

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n \leq 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = \frac{2^n \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1 < 2^{n+1}$$

19.2. $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 < 90^\circ$ гэж үзье. Тэгвэл $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ нь хурц өнцөг байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $0 < \operatorname{tg}(\alpha_i + \alpha_j) < \infty, 0 < \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) < \infty$ болно. Иймд

$$0 < \operatorname{tg}(\alpha_i + \alpha_j) = \frac{a_i + a_j}{1 - a_i a_j} < \infty, i \neq j, i, j = 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned} 0 < \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) &= \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) + \operatorname{tg} \alpha_3}{1 - \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) \operatorname{tg} \alpha_3} \\ &= \frac{a_1 + a_2 + a_3 - a_1 a_2 a_3}{1 - (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3)} < \infty \end{aligned}$$

$0 < 1 - a_2 a_3 \Rightarrow a_2 a_3 < 1, 0 < a_1 < 1$ болно. Иймд

$$a_1 a_2 a_3 < a_1 < 1, \quad a_1 + a_2 + a_3 > a_1 a_2 a_3, \quad 1 > a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3$$

гэж гарна. Гэтэл $1 > a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 > 0$ нөхцөлөөс бусад бүх нөхцөлүүд мөрдөгдөх тул $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ өнцөг хурц байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$1 > a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 > 0$$

болно.

19.3. $z = \frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2} + \frac{\ell^2}{r^2}, (m, p) = (n, q) = (\ell, r) = 1$ гэж үзье.

$$7p^2 q^2 r^2 = m^2 q^2 r^2 + n^2 p^2 r^2 + \ell^2 p^2 q^2$$

үүнийг $7A^2 = B^2 + C^2 + D^2, A, B, C, D \in \mathbb{N}$ гэж бичье.

1) A тэгш тоо байвал B, C, D -ийн дотор тэгш тоо нь сондгой тоотой орсон байх ёстой.

1а) B тэгш, C, D нь сондгой байг. Тэгвэл $7 \cdot 4a^2 = 4b^2 + (2c+1)^2 + (2d+1)^2$ болох ба үүний зүүн талд 4-д хуваагдаж байхад баруун тал нь 4-д хуваахад 2 үлдэнэ. Ийм байж үл болно.

1б) B, C, D нь гурвуул тэгш бол: $7 \cdot 4a^2 = 4b^2 + 4c^2 + 4d^2$ болох ба эндээс $7a^2 = b^2 + c^2 + d^2$ болох тул эсвэл A сондгой байх эсвэл B, C, D -ийн аль нэг нь сондгой байх тохиолдол руу шилжив.

2) A сондгой байвал B, C, D -ийн дотор сондгой тоо сондгой тоотой орно.

2а) B сондгой, C, D тэгш байг. $7(2a+1)^2 = (2b+1)^2 + 4c^2 + 4d^2$ болох үүний зүүн хэсэг нь 4-д хуваахад 3 үлдэхэд баруун талыг нь 4-д хуваахад 1 үлдэнэ.

2б) B, C, D нь гурвуул сондгой бол $7(2a+1)^2 = (2b+1)^2 + (2c+1)^2 + (2d+1)^2$ болох ба үүний зүүн хэсгийг нь 8-д хуваахад 7 үлдэж байхад баруун хэсгийг нь 8-д хуваахад 3 үлдэнэ.

19.4. $\operatorname{tg}(3 \cdot 10^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}(3 \cdot (-50^\circ)) = \operatorname{tg}(3 \cdot 70^\circ)$ тул $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$ томъёог ашиглавал $x_1 = \operatorname{tg} 10^\circ$, $x_2 = \operatorname{tg}(-50^\circ) = -\operatorname{tg} 50^\circ$, $x_3 = \operatorname{tg} 70^\circ$ тоонууд нь

$$\frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

буюу

$$\operatorname{tg}^3 \alpha - \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

тэгшитгэлийн язгуурууд нь болно. Тэгвэл Виетийн томъёо ёсоор $x_1 + x_2 + x_3 = \sqrt{3}$, $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = -3$ тул

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = (\sqrt{3})^2 - 2(-3) = 9$$

болно. Иймд

$$\left| 2 - \lg_{10} \frac{n}{1983} \right| \leq 4,$$

$$6 \geq \lg_{10} \frac{n}{1983} \geq -2,$$

$$10^6 \cdot 1983 \geq n \geq 10^{-2} \cdot 1983,$$

$1983 = 3 \cdot 661$ тул $n = 661 \cdot n_1$ гэж үзвэл $3 \cdot 10^6 \geq n_1 \geq 10^2 \cdot 3$ буюу $3 \cdot 10^6 \geq n_1 \geq 1$ болно. $1728 = 2^6 \cdot 3^3$, $(n_1, 2) = (n_1, 3) = 1$ гэдгийг анхаарвал энэ сүүлчийн тэнцэтгэл бишийг хангах натурал тоонуудын тоо нь

$$3 \cdot 10^6 \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) = 10^6$$

болно.

19.5. BM медиан ба BH өндөр байг. (32-р зураг) $|AC| = b$, $|BH| = h$ гэе. $\triangle ABM$ нь адил хажуутай ба $\triangle BMC$ -ээс биссектриссийн чанар ёсоор $\frac{|HM|}{|BH|} = \frac{b}{4 \cdot n} =$

$\frac{|MC|}{|BC|} = \frac{b}{2|BC|}$ тул $|BC| = 2h$ буюу $\angle C = 30^\circ$, $\angle B = 90^\circ$ болно. Иймд $\triangle ABC$ -

г багтаасан дугуйн радиус нь $R = \frac{b}{2}$ болно. $\triangle ABC$ -д багтсан дугуйн радиус

$r = \frac{b\sqrt{3}}{2(3 + \sqrt{3})}$ болохыг төвөггүй олж болно. Иймд $\frac{S_R}{S_V} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{b^2 \cdot 4(3 + \sqrt{3})^2}{4 \cdot b^2 \cdot 3} =$

$$\frac{12 + 6\sqrt{3}}{3} = 4 + 2\sqrt{3}$$

19.6. Өгөгдсөн бодлого нь дараах туслах бодлоготой эквивалент гэдгийг хялбархан харж болно.

Туслах бодлого. A -аас бага түүнтэй харилцан анхны тоо бүр анхны тоо байдаг тоонуудын дотроос хамгийн их нь $A = 30$ гэдгийг батал.

Баталгаа. $A \geq 4$ бол $2 \mid A$ болно. Учир нь $2 \nmid A$ бол $(A, 4) = 1$ ба $4 = 2 \cdot 2$ зохиомол тоо тул A -ийн тодорхойлолтонд үл тохирно.

$A \geq 9$ бол $3 \mid A$ болно. Учир нь $3 \nmid A$ бол $(A, 9) = 1$ ба $9 = 3 \cdot 3$ зохиомол тоо тул A -ийн тодорхойлолтонд үл тохирно.

Үүний адилаар $A \geq 25$ бол $5 \mid A$ ба $A \geq 49$ бол $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \mid A$ болохыг тус тус олно.

$9 \leq A \leq 25$ бол $2 \cdot 3 \mid A$ гэдгээс A нь зөвхөн 12, 18, 24 утгуудыг л авч болох боломжтой.
 $25 \leq A \leq 49$ бол $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \mid A$ гэдгээс $A = 30$ л байж болох талтай.

$49 \leq A \leq 64$ бол $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 \mid A$ болох учраас ийм тоо оршин байх боломжгүй гэх мэт цааш үргэлжилнэ гэдгийг баталбал, өөрөөр хэлбэл $n > 4$ үед

$$p_{n+1}^2 < \prod_{i=1}^n p_i \quad (1)$$

гэдгийг баталбал манай бодлогыг хангаж чадах хамгийн их тоо нь зөвхөн $A = 30$ болно, энд p_n нь n -р анхны тоо.

Одоо (1)-ийг баталъя. $p_1, \dots, p_n$ тоонууд өгөгдсөн байг.

$$\begin{aligned} M_1 &= p_1 \cdot p_2 \cdots p_{i-1} \cdot 1 - 1 \\ M_2 &= p_1 \cdot p_2 \cdots p_{i-1} \cdot 2 - 1 \\ &\vdots \\ M_{p_i} &= p_1 \cdot p_2 \cdots p_{i-1} \cdot p_i - 1 \end{aligned}$$

гэсэн p_i ширхэг илэрхийллийн хувьд

- а) эдгээрийн аль нь ч $p_1, \dots, p_{i-1}$ -д үл хуваагдана.
- б) эдгээрийн нэгээс илүүгүй нь p_i -д хуваагдана.
- в) эдний нэгээс илүүгүй нь $p_{i+1}, \dots, p_n$ -д хуваагдана

гэсэн өгүүлбэрүүд хүчинтэй билээ.

б)-г баталъя. Хэрэв $p_i \mid M_x, M_y$ бол $1 \leq x < y \leq p_i$ тул

$$p_i \mid M_y - M_x = p_1 \cdots p_{i-1}(y - x)$$

болоход хүрнэ. Гэтэл $y - x \leq p_i$ тул энэ нь зөрчилд хүргэж байна. Яг үүний адилаар в) бас батлагдана. Хэрэв $p_i, p_{i+1}, \dots, p_n$ тоонуудын тоо нь $M_1, \dots, M_{p_i}$ илэрхийллүүдийн тооноос бага бол өөрөөр хэлбэл

$$n - i + 1 \leq p_i \quad (2)$$

бол M_x илэрхийллүүдийн ядаж нэг нь б) ба в)-ийн үндсэн дээр $p_i, p_{i+1}, \dots, p_n$ -үүдийн алинд ч үл хуваагдана гэж гарна. Иймд а)-г анхаарвал энэ илэрхийлэл нь эхний n анхны тооны алинд ч үл хуваагдана. Энэ илэрхийллийг M_h гэе. M_h -ийн анхны үржигдэхүүн бүр нь p_n -ээс их тул $p_{n+1} \leq M_h \leq M_{p_i}$ болно. Үүгээр хэрэв (2) хүчинтэй бол

$$p_{n+1} < \prod_{k=1}^i p_k \quad (3)$$

тэнцэтгэл биш мөн хүчинтэй гэдгийг оллоо. Нэгэнт $i < n$ тул (3) нь мөн $p_{n+1} < p_1 \cdots p_n$ гэж баталдаг Евклидын баталгаанаас ч хүчтэй юм. Одоо

$$p_1 \cdots p_i < p_{i+1} \cdots p_n \quad (4)$$

байх ба (2) нөхцөлийг хангах i -ийн утгыг олж болохыг харуулъя.

$$2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \alpha_n = n, \quad 0 \leq \alpha_n \leq 1$$

гээд $i = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \alpha_n$ гэж авахад (2) биелнэ. Учир нь

$$n - i + 1 = n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \alpha_n + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 < p_i = p_{\left\lfloor n/2 \right\rfloor + \alpha_n}$$

байх нь илэрхий. Одоо $i = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \alpha_n$ үед (4) биелэхийг баталъя. Энэ үед $p_1, \dots, p_i$ -ийн тоо нь $p_{i+1}, \dots, p_n$ -ийн тоотой тэнцүү юм уу 1-ээр илүү байна. Хэрэв эдгээрийн тоо тэнцүү бол

$$p_1 \cdots p_i < p_{i+1} \cdots p_n$$

байх нь илэрхий. Эсрэг тохиолдолд $p_1 \cdot p_2 = 2 \cdot 3 < p_n$ тул (4) мөн биелнэ. (4)-ийн хоёр талыг $p_1 \cdots p_i$ -ээр үржүүлбэл

$$(p_1 \cdots p_i)^2 < (p_1 \cdots p_n)$$

буюу

$$p_1 \cdots p_i < \sqrt{p_1 \cdots p_n}$$

болно. Иймд (3)-ыг анхаараал (1) батлагдана.