

ММО-21

Улсын математикийн 21-р олимпиад

1984–1985 хичээлийн жил

Энэ олимпиадын цуврал албан ёсоор хэвлэгдэж гараагүй тул бодлого, бодолтыг дараах номоос эмхэтгэн оруулав. Эх сурвалж: П. Энхболд, Ц. Дашдорж. Монголын Математикийн Олимпиад I. Ахлах ангиллын бодлогууд (1965–1985). Улаанбаатар, 2022. © “Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо” НҮТББ.

Бодлогууд

21.1. 1985 ширхэг натурал тооноос тогтох M олонлог өгчээ. M олонлогийн ямар ч тоо нь $a + 21$ -ээс их анхны тоонд үл хуваагдана. Тэгвэл

1. $a \leq 9$ бол M олонлогийн ямар нэг 2 элементийн геометр дундаж нь бүхэл тоо байхыг батал.
2. $a \geq 10$ бол аль ч хоёр элементийн нь геометр дундаж бүхэл тоо биш байхаар тийм M олонлог олдохыг үзүүл.

21.2. Дараах тэнцэтгэлийг батал.

$$\sqrt{3} \operatorname{tg}^5 20^\circ - 9 \operatorname{tg}^4 20^\circ + 30 \operatorname{tg}^2 20^\circ + 9\sqrt{3} \operatorname{tg} 20^\circ = 9 + 6\sqrt{3} \operatorname{tg}^3 20^\circ$$

21.3. D_1BD_{n+1} гурвалжны D_1D_{n+1} тал дээр $D_2; D_3; \dots; D_n$ цэгүүд дараалан өгөгджээ. D_1BD_{n+1}, D_kBD_{k+1} гурвалжнуудад багтсан тойргийн радиусуудыг харгалзан r, r_k ; тэдгээрийн B өнцөгт гадаад багтсан тойргийн радиусыг $R, R_k, (k = 1, 2, \dots, n)$ гэж тэмдэглэвэл

$$\frac{r_1 \cdots r_n}{R_1 \cdots R_n} = \frac{r}{R}$$

байхыг батал.

21.4. A^2 нь дараалсан хоёр тооны кубуудын ялгавар бол A нь дараалсан хоёр тооны квадратуудын нийлбэр гэж батал.

21.5.

$$\sqrt{\cos 2x + \sin x - \cos x} + \sqrt[4]{\pi^2 - x} + \sqrt{\pi + x} > \pi$$

тэнцэтгэл бишийг бод.

21.6. Хоёр гурвалжны талууд $a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3$ бөгөөд дурын сондгой n -ийн хувьд

$$a_1^n + a_2^n + a_3^n = b_1^n + b_2^n + b_3^n$$

бол энэ хоёр гурвалжин тэнцүү гэж батал.

Бодолтууд

21.1. а) Тохиолдолд өгсөн тоонууд нь $2, 3, 5, \dots, 23, 29$ гэсэн 10 анхны тоонд хуваагдах ёстой. M олонлогийн ямар ч тоо нь $x = 2^{a_1} 3^{a_2} \dots 29^{a_{10}}, a_i \geq 0$ хэлбэртэй байна. Хэрэв $a_i \equiv b_i \pmod{2}, i = 1, 2, \dots, 10$ бол xy нь квадрат хэлбэртэй болно. Энд $y = 2^{b_1} 3^{b_2} \dots 29^{b_{10}} \in M$ тоо. Нэгэнт $A = \{(a_1, a_2, \dots, a_{10}) \mid a_i = 0, 1\}, |A| = 2^{10} < 1985$ тул $a_i \equiv b_i \pmod{2}, i = 1, \dots, 10$ байх 2 тоо $x, y \in M$ заавал олдоно.

б) $a \geq 10$ үед M олонлогийн элементүүд нь $2, 3, 5, \dots, 31$ гэсэн 11 анхны тоонд хуваагдана. $2^{11} > 1985$ тул энэ нөхцөлийг хангасан олонлогийг олж болно. Тухайлбал $2, 3, \dots, 31, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, \dots, 29 \cdot 31, \dots, 2 \cdot 3 \dots 31$ гэсэн $2^{11} - 1$ ширхэг тооны аль ч 1985-аас нь тогтох олонлог байж болно.

21.2. $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$ томьёонд $\alpha = 20^\circ$ авбал

$$\sqrt{3} = \frac{3 \operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{tg}^3 20^\circ}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 20^\circ}$$

буюу

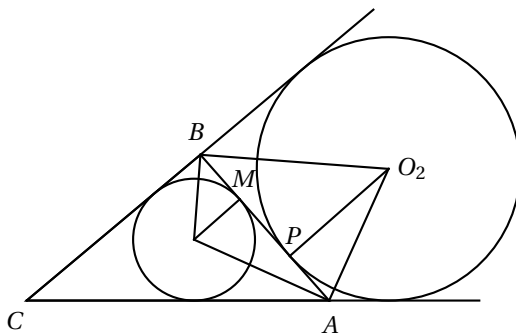
$$\operatorname{tg}^3 20^\circ - 3\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 20^\circ - 3 \operatorname{tg} 20^\circ + \sqrt{3} = 0 \quad (1)$$

болно. (1)-ийн хоёр талыг $\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 20^\circ - 3\sqrt{3}$ -аар үржүүлж эмхэтгэвэл манай тэнцэл батлагдана.

21.3. $n = 2$ үед баталбал хангалттай гэдэг нь илэрхий. M нь AB тал дээр байгаа цэг ба $\angle ABC = \beta, \angle BCA = \gamma, \angle CAB = \alpha, \angle AMC = \delta$ гэвэл

$$|AB| = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + r \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \quad (1)$$

болно.



P нь гадаад багтсан тойргийн AB талыг шүргэсэн цэг ба O_2 нь уг тойргийн төв бол $\angle APO_2 = \angle BPO_2 = \frac{\pi}{2}$ тул

$$|AB| = R \tan \frac{\alpha}{2} + R \tan \frac{\beta}{2}$$

болно. Иймд (1)-ээс

$$\frac{r}{R} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \quad (2)$$

болно. Үүний адилаар $\angle ACM$ ба $\angle MCB$ -д харгалзах тойргуудын хувьд $\frac{r_1}{R_1} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.
 $\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}, \frac{r_2}{R_2} = \operatorname{tg} \frac{\pi - \delta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ болох тул $\frac{r_1 r_2}{R_1 R_2} = \frac{r}{R}$ болох нь илэрхий.

21.4. $(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1 = y^2$ тэгшитгэлийг бодоход шилжив. Үүнийг 4-өөр үржүүлэх замаар $3(2x+1)^2 = (2y-1)(2y+1)$ хэлбэртэй бичвэл $2y-1, 2y+1$ нь харилцан анхны тоонууд тул дараах 2 тохиолдол л байж болно.

$$\text{a) } \begin{cases} 2y-1 = 3m^2 \\ 2y+1 = n^2 \end{cases}, \text{ б) } \begin{cases} 2y-1 = m^2 \\ 2y+1 = 3n^2 \end{cases}, (m, n) = 1$$

б) тохиолдолд $m = 2k+1$ гэж авбал $2y = 4k^2 + 4k + 2 = 2[(k+1)^2 + k^2]$ болно. Харин а) тохиолдол байж үл болно. Учир нь энэ үед $n^2 - 3m^2 = 2$ гэж гарах ба энэ нь ямар ч бүхэл тооны квадратыг 3-д хуваахад 0 юм уу 1, үлдэнэ гэдэгт харшилна.

21.5. $x > 0$ бол $\sqrt{\pi+x} > \sqrt{\pi}$, $x < 0$ бол $\sqrt[4]{\pi^2-x} > \sqrt{\pi}$, $x = 0$ бол $2\sqrt{\pi} > \sqrt{\pi}$ байх учир манай тэнцэтгэл бишийн шийд нь тодорхойлогдох муж юм. Иймд $(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x - 1) \geq 0$; $\pi^2 - x \geq 0$; $x + \pi \geq 0$ системийг бодож шийдийг олно.

21.6. $a_1 \leq a_2 \leq a_3, b_1 \leq b_2 \leq b_3$ гэж үзэж болно. Хэрэв $a_3 > b_3$ бол $a_3 = b_3 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$; $a_3^n = (b_3 + \varepsilon)^n \geq b_3^n + n \cdot \varepsilon \cdot b_3^{n-1} - 1$ болно. Тэгвэл

$$b_3^n + n\varepsilon b_3^{n-1} > b_3^n + b_2^n + b_1^n$$

$$n\varepsilon b_3^{n-1} > b_2^n + b_1^n, \quad n > \frac{b_2^n + b_1^n}{b_3^{n-1}\varepsilon}$$

байхаар n -ийг сонгож авсан үед $a_3^n > b_1^n + b_2^n + b_3^n$ тул бодлогын нөхцөлд харшлав. Иймд $a_3 = b_3$ болно. Үүний дараа энэ сэтгэлгээгээр $a_2 = b_2, a_1 = b_1$ гэж тус тус гарна.

Асуулт. Дурын бодит тоо $a_1 \leq \dots \leq a_{k_1}, b_1 \leq \dots \leq b_{k_2}$ ба дурын сондгой натурал тоо n -ийн хувьд $a_1^n + \dots + a_{k_1}^n = b_1^n + \dots + b_{k_2}^n$ бол $k_1 = k_2, a_1 = b_1, \dots, a_{k_1} = b_{k_1}$ болохыг батал.