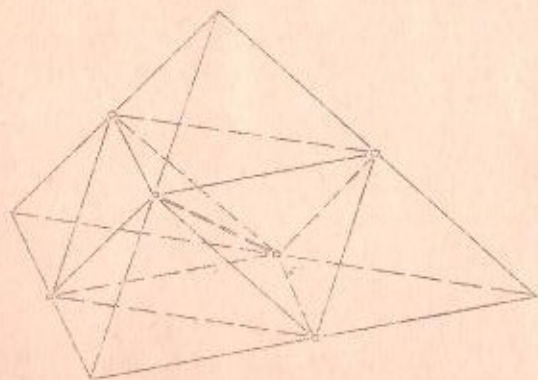


Ардын Боловсролын Яам
Улсын Математикийн Олимпиадыг Зохион
Байгуулах Хорос

Улсын Математикийн XXII Олимпиад



Улаан-баатар хот 1986 он

Улсын Математикийн
XXII Олимпиад - 1986.

Улсын математикийн олимпиадад
бэлтгэгчидэд
тусламж мэх

редактор: А. Мехей
Б. Наронхүү.

Улаан Баатар 1986.он.

Тарчиг.

1. Улсын математикийн XXII олимпын
агийн VII ангийн гурван даваант бодлого 4-4.
2. Улсын математикийн XXII олимпиад-
ын VIII ангийн гурван даваант бодлого 8-12.
3. Улсын математикийн XXII олимпиадын
IX ангийн гурван даваант бодлого 12-23.
4. Улсын математикийн XXII олимпиадын
X ангийн гурван даваант бодлого 24-27.
5. Улсын математикийн XXI олимпиадын
X ангийн дөрвөн даваант бодлого 28-35.
6. Олон улсын математикийн XXVII
олимпиадын бодлого 36-47.
7. Нөгөөтгэл зайлуулалт дүрчлэл 48-56.
8. Улсын математикийн олимпиадад
бэлтгэгчдэд зориулсан бич дээш
бодон бодлогууд 57-70.
9. Олон улсын математикийн
сүрдийн олимпиадын бодлогууд 71-84.
10. Олон улсын математикийн XXVIII
олимпиадад БКМЗ-аас дэвшүүлсэн
бодлогууд 85-95.

Редакторуудын өмнөх үг.

БНМАУ-ын Ардын Боловсролын Яамны
завшаарлаар 1985 оноос эхлэн УМО
ба ОУМЧ-ын даваануудын бодлогыг бодол-
тны хамт басм сурагчид тун
бур хэвлэн нургаж, дараа жилийн
олимпиадад бэлтгэхэд нь тусламж
болохоор Улсын математикийн
олимпиадад бэлтгэгчид тусламж
цувралын эхний дугаарыг нийтэлн
байна.

Тус дугаарыг бэлтгэхэд Д.Ламжав,
А.Мөхий, Н.Дамдорж, Б.Наранхуу,
Р.Тогшилдорж, Б.Чулуундорж,
В.Агдзасүрэн, А.Хадзуу нар оролцов.

Энэхүү цувралын талаар санал,
хүсэлт, гишүүнчлэлээ УМО-г зохих
байгуулалт хороонд ирүүлж байхыг
уншигч та буужааж хүсье.

А.Мөхий² Б.Наранхуу.

1. Улсын математикийн XXII
олимпиадын VII сүгийн турбын
багааны бодлого.

Б. Чулуундорж.

3. ΔABC нь $\angle C$ нэгийг нэмэлт нөгөөдөг
хүснэгдэх 1-ээс эхлэхтэй бус нэгдүгээр
дүгээр ол.

2. Нэгж талтай зөв гурвалжин талууд дээдхүр
гурван эхлэх тасралтгүй тойрсон ажээ.
Ямар нэг эгшинд хоорондох зай нь $\frac{1}{2}$ -ээс хэт-
рэхгүй байх хоёр эхлэх олгоно гэжигээ батал.
(2 цэгийн хоорондох зай гэж тэдгээрийг холбосон
хэрмийн уртыг ойлгоно).

3. $ABCD$ тэгш өнцөгтийн CD талын үргэлж-
лэл дээр P цэгийг, D цэг нь C ба P цэгүүдийн
хооронд оршин байхаар авчээ. M, N цэгүүд харгалзан
 BC, AD талуудын дундаж цэгүүд, NP ба AC шулу-
уудын огтлол Q цэг бол $\angle QMN = \angle MNP$ гэдгийг
батал.

4. $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ долоон өнцөгт тойрогт багт-
жээ. Хэрэв энэ тойргийн төв долоон өнцөгтийн
дотор оршдог бол A_1, A_3, A_5 оройнууд дээрх өнцөгүүдийн
нийлбэр 450° -аас хэтрэхгүй гэж батал.

5. $2, 2, 2$ гурван тоо өгөгджээ. Эдгээрийн ол
нэгийг нь өрсөдөг нөгөө хоёрын үржвэртээ 4-ийг хассан
алдврыг тавих замаар цааш үргэлжлүүлэн 6, 331,

1985 гэсэн гурван тоог гарган олж болох уу?

6. Цифруудын нийлбэр нь $a_1 + a_2 = a_2$,
 $a_1 + a_2 + a_3 = a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = a_n$. Нөхцөлийг
 хангах n оронтой $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$ тоо нийт-
 дээ хэдэн ширхэг байх вэ?

Бодолтнууд.

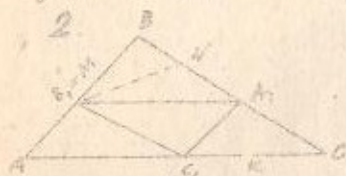
1. Бодлогын нөхцөлийг хангах 2 тоог a, b гэв.
 $a \leq b$ гэж үзье.

Хэрвээ $a = b$ бол $a + 1 : a$ гэдгээс $a = 1$ гарах нь
 илэрхий үймв $a \neq b$ байх бөгөөд $a < b$ болно.

$a + 1 : b$ ба $a + 1 \leq b$ мэд $a + 1 = b$ болно. $b + 1 : a$ мэд
 $b + 1 = aq$ ($q \geq 2$) $a + 1 = aq - 1$ $2 = a(q - 1)$ ба
 эндээс $a + 1$ мэд $a = 2$ $q - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$.

$a = 2$, $b = a + 1 = 2 + 1 = 3$ үймв $a = 2$ $b = 3$ гэсэн
 зөвхөн хамт хос байна.

2.



Эндээс 3 эхлээг гурвалжны
 талууд дээр байх 3 цэг
 гэж үзэж болно. Үз 3
 цэгийг нэг нь B , гэсэн

бүрдэж дээр байх эхлээг олж үзье.

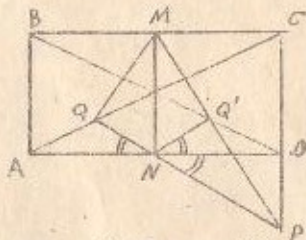
Тэгвэл нөгөө 2 цэг B, BA, C, A, C, AB, C , гэсэн
 гурвалжнуудын талууд дээр байна. B , дээр байх
 цэгийг M , нөгөө 2 цэгийг N, K гэв. M ба K
 цэгүүдийн эдгээс нэг нь AB, C , B, BA , гурвалжнуудын
 талууд дээр оршвол олох ёстой 2 цэг маань M ба

уг хоёр цэгийн аль нэг нь хоёр болно.

(Жишээ нь: M ба N хоёр болно.)

$|MN| \leq \frac{1}{2}$ байх нь илэрхий иймд N ба K нь C, A, C гурвалжны талууд дээр орших нь сонирхолтой. Энэ тохиолдолд N ба K хоёр нь аль нэгийг 2 цэг болно.

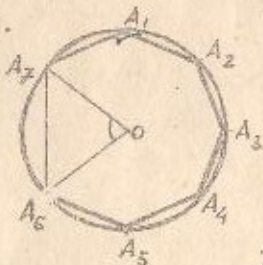
3



MP ба BQ шулуунуудын огтлолцогч Q' гэдг. AD шулуун хувьд тэгш хэмтэй. Гэвч хувиргалд $\angle Q'ND = \angle PND$ гэдгийг баталж

болно. Иймд $\angle ANQ = \angle DNQ'$. Энэвс Q' цэг нь Q цэгтэй MN шулуун хувьд тэгш хэмтэй. Ийнхүү $\angle QMN = \angle Q'MN$ болно.

4.



Нумыг цагийн зүүний эсрэг тоолно гэж үзвэл

$$\angle A_1 = 180^\circ - \frac{A_2 A_7}{2}$$

$$\angle A_3 = 180^\circ - \frac{A_4 A_2}{2}$$

$$\angle A_5 = 180^\circ - \frac{A_6 A_4}{2} \quad \text{Иймд}$$

$$\angle A_1 + \angle A_3 + \angle A_5 = 3 \cdot 180^\circ - \frac{A_2 A_7 + A_4 A_2 + A_6 A_4}{2} = 2 \cdot 180^\circ + \frac{360^\circ - A_6 A_2}{2} =$$

$$= 2 \cdot 180^\circ + \frac{A_7 A_5}{2}$$

О цэг 7 өнцөгтийн дотор орших тул $\widehat{A_7 A_5} < 180^\circ$ Иймд $\angle A_1 + \angle A_3 + \angle A_5 < 2 \cdot 180^\circ + 90^\circ = 450^\circ$

5. 6 гэсэн тоог гаргаж авахын тулд үрэг
гарсан 3 тоон дотор 1 ба 7 гэсэн 2 тоо байх
ёстой. Иймд одоо 2,2,2 гэсэн 3 тооноос 1-ийг
гарган ач болох уу гэсэн бодлогод илджинэ.

Бүтэл 2,2,2 - оос дээрхи дүрлээр гарсан авах
3 тоон дотор 1 гарч ирэхгүй нь илэрхий билээ.

6. $n \geq 3$ байх нь илэрхий. Сүүлчийн a_1, a_2
цифрүүд нь хоёулаа 0 байж болохгүй. Эсрэг
технологид 42 тооны бүх цифр 0 болно. Одоо
 a_1 ба a_2 -ийн дүрлэлэн нарийвчлалыг анхаа-
рахгүйгээр тоолдог дүрлэл нь эдгээр тоонуудын
тоог 2 дахин авна. Одоо a_2, a_1 гэсэн
цифрүүд 0, 0, байх. Илгэвэл ийм тоо 2 ширхэг
байна. Хэрвээ a_2, a_1 гэсэн цифрүүд 1, 0, бол
ийм тоо 8 байна.

Гэх мэтчилэн a_2, a_1 цифрүүд 8, 0, бол
ийм тоо 2 ширхэг, a_2, a_1 цифрүүд 9, 0, бол
ийм тоо 1 байна. Иймд бодлогын нөхцөлийг
хангах тоонууд $2(9+8+\dots+1) = 90$ ширхэг
байна.

101

202

303

303

803

819

2. Улсын математикийн XIII
олимпиадын VIII ангийн гурвын
давааны бодлого.

В. Абьясүрэн.

1. Хэрэв гурвалжны тэнцүү биш 2 тал эсрэг орших
энцгийнхөө биссектрисийн урлуутай тэнцүү бол
энцгүүд нь арифметикийн прогресс үүсгэхийг батал.

2. $\frac{11 \dots 1}{1986} \cdot \frac{22 \dots 2}{1986} + \frac{33 \dots 3}{1986} + 1$ илэрхийлэл хэвээр
болохыг батал.

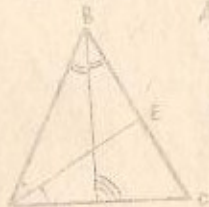
3. Нэгж радиустай тойрогт 1986 зөв олон энцэгт
бэгтжээ. Тойргийн дурьд үзвэл олон энцэгтийн
оройнууд хурталх зайн квадратын нийлбэрийг ол.
У. Цифрүүдийнх нь нийлбэр 72 тооноос цифруудайх
нь үржвэрийг хассан элэгдэлтэй тэнцүү байх бүх
тоог ол.

5. $1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot \dots \cdot 100^{100} < 67^{5050}$ болохыг батал.

6. Нэг квадрат нэгж талбайтай гурвалжныг
хэр квадрат нэгжээс бага талбай бүхий параллело-
граммаар хучиж болох үү?

Бодолтууд

1. ABC нь өгөгдсөн гурвалжин (1-зургаа)
AE, BF нь түүний биссектрисс байх.
Өгөгдсөн ёсоор $BC = \frac{1}{AE}$, $AC = \frac{1}{BF}$ байна.
Эндээс $\frac{BC}{AC} = \frac{BF}{AE}$ (1) болно.



(1-зургаа)

Синусын теоремоор $BF = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin(180^\circ - (A + \frac{B}{2}))}$

$$= \frac{AB \cdot \sin A}{\sin(A + \frac{B}{2})} \quad \text{I} \quad AE = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin(180^\circ - (B + \frac{A}{2}))} = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin(B + \frac{A}{2})}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\sin A}{\sin B} \quad \text{болонхи.} \quad \text{Чигийн (1) - д орлуулбал}$$

$$\frac{\sin A \cdot \sin(B + \frac{A}{2})}{\sin B \cdot \sin(A + \frac{B}{2})} = \frac{\sin A}{\sin B} \quad \text{буюу} \quad \sin(B + \frac{A}{2}) = \sin(A + \frac{B}{2})$$

болон. Үүдээс бодлогын нөхцөлийг тооцвол

$$B + \frac{A}{2} = 180^\circ - (A + \frac{B}{2}) \quad \text{буюу} \quad A + B = 120^\circ \quad \text{энт гэрнэ.}$$

Цэгийг $C = 60^\circ$ болох тул $A, 60^\circ, 120^\circ - A$ тоснууд
орифаментик процесс үүсгэнэ.

$$\begin{aligned} 2. \quad & \frac{11 \dots 1}{1585} \frac{22 \dots 2}{1985} + \frac{33 \dots 3}{1985} + 1 = \frac{11 \dots 1}{1985} \cdot 10^{1985} + \\ & + \frac{22 \dots 2}{1985} + \frac{33 \dots 3}{1985} + 1 = \left(\frac{11 \dots 1}{1985} \cdot 10^{1985} - \frac{11 \dots 1}{1985} \right) + \\ & + \left(\frac{11 \dots 1}{1985} + \frac{22 \dots 2}{1985} \right) + \frac{33 \dots 3}{1985} + 1 = \frac{11 \dots 1}{1985} \cdot (10^{1985} - 1) + \\ & + 2 \cdot \frac{33 \dots 3}{1985} + 1 = \frac{11 \dots 1}{1985} \cdot \frac{99 \dots 9}{1985} + 2 \cdot \frac{33 \dots 3}{1985} + 1 = \\ & = \frac{33 \dots 3}{1985}^2 + 2 \cdot \frac{33 \dots 3}{1985} + 1 = \left(\frac{33 \dots 3}{1985} + 1 \right)^2 = \frac{33 \dots 3}{1985}^2 + 4 \end{aligned}$$

3. $A_1, A_2, \dots, A_{1993}$ нь нэгж радиустай тойрогт
байсан гол олон цэгээр байв.

A_i, A_{i+1993} ($i = 1, 2, \dots, 993$) цэгүүд тойргийн ди-
аметрийн төгсгөлийн цэгүүд болохыг хэлбэрхэн үгэл
шинэ болгов. Тойргийн дурьд M цэгийг үүсгэв

$A_i \text{ и } A_{i+993}$ ($i = 1, 2, \dots, 993$) гурвалжныуд бүрт

тэгш энцэгт гурвалжин багасгальт гипотенуз нь
 2-той тэнцүү. Ийнхүү

$$MA_1^2 + MA_{999}^2 = 4$$

$$MA_2^2 + MA_{998}^2 = 4$$

$$MA_{993}^2 + MA_{106}^2 = 4 \quad \text{тэнцэтгэлийг бичиж}$$

болно. Эдгээр тэнцэтгэлийг гишүүнчлэн нэмбэл

$$MA_1^2 + MA_2^2 + MA_3^2 + \dots + MA_{993}^2 + MA_{998}^2 + \dots + MA_{106}^2 =$$

$$= 3912$$

4. Огсгдсон ёсоор $a, a_1, \dots, a_n - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) =$
 $= a_1 \cdot a_2 \dots a_n$ буюу $a_1, a_2, \dots, a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$
 Эндээс $10^{n-1} a_1 + 10^{n-2} a_2 + \dots + a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n +$
 $+ a_1 a_2 \dots a_n \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n + 9^{n-1} a_1 = a_1 + \dots + a_n +$
 $+ (9^{n-1} + 1) a_1$ тэнцэтгэл бэл мөрдөн гарна.

Энэ тэнцэтгэл бэл $n=2$ үед л цэнх. Ийнхүү
 олох тоо $\overline{ab} = a+b+ab$ тэнцэтгэлийг хангана.
 Эндээс $b=9$. Бидний олох тоо : 19, 29, 39;
 49, 59, 69, 79, 89, 99.

5. Батлах тэнцэтгэл бичийн зүүн талыг

$$1 \cdot 2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 100^{100} = 1 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{3} \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{4} \dots \frac{100 \cdot \dots \cdot 100}{100}$$

хэлбэрт бичье.

Арифметик геометрийн дундаж хэрэглэвэл

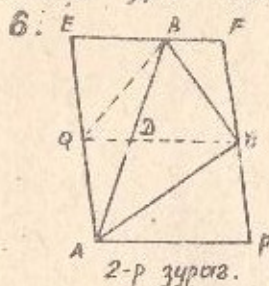
$$1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 100^{100} < \left(\frac{1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \dots + 100 \cdot 100}{5050} \right)^{5050}$$

$$= \left(\frac{1^2 + 2^2 + \dots + 100^2}{5050} \right)^{5050} \quad \text{болно.}$$

$$1 + 2^2 + \dots + 100^2 = 67 \cdot 5050$$

болгохыг хялбархын үүднээс болох нь
 $1 \cdot 2^2 \dots 100^{100} < \left(\frac{67.5050}{5050} \right)^{5050} = 67^{5050}$ болж

батлах зүйл батлагдвал.



ABC нь өгөгдсөн 1-нэгж
 талбайтай гурвалжин (2-р зурвалж)
 болж. Түүнийг хүндэтгэвч
 талбай нь 2 нэгжээс багца
 байх AEPF параллелограмм
 олдог гэдэг.

О оройг дайруулж EF,

AP-г өнгөт параллель шулуун татахад AE-г

Q үзэг, AB-г D үзэгт огтлохон гэдэг. Тэгвэл

$$S_{\Delta CQD} \leq S_{\Delta CQD} = \frac{1}{2} S_{CEFD}$$

$$S_{\Delta CQD} \leq S_{\Delta CAD} = \frac{1}{2} S_{CAEQ} \text{ болно. Энэвч } S_{\Delta CQD} \leq S_{\Delta CAD} = \frac{1}{2} S_{CAEQ}$$

$$S_{AEPF} = 2S_{CEQ} + 2S_{CAQ} \geq 2(S_{\Delta CQD} + S_{\Delta CAD}) = 2S_{\Delta ABC} = 2. \text{ болж } S_{AEPF} < 2 \text{ гэдэгт харилав.}$$

Ийнхүү 1 нэгж талбайтай гурвалжныг
 2 нэгжээс багца талбайтай параллелограммд
 хуучаа болохгүй.

3. Математикийн XII олимпиадын
IX ангийн гурвын давааны бодлого
Д. Ламжав

Улаанбаатар хотод өгөгдсөн зургаан бодлогыг бодолтын хамт дорсгйруулэв. Аймгуудын хувд I өдрийн бодлогыг өөрсдөө хийх, II өдрийн бодлогыг товоос өгсөн (4, 5, 6 дугаар бодлого) сэдвээр хийх ёстой байлаа. Бодлого бүр ихэнхэн 6 оноотой, бодолтын цэвэр хугацаа өдөр бүр 4 цаг байв.

1 ба 3 дугаар бодлогыг В.И. Берник «Сборник олимпиадных задач» номноос авсан. 2 дугаар бодлогыг Г. Хүрэлбаатар (МУИС математикийн 3-р курсийн оюутан, XIX олимпиадын өвчөг), 4 дугаар бодлогыг А. Хашбаатар, 5 ба 6 дугаар бодлогыг Д. Ламжав нар тус тус зохиосон болно.

Өөрийн зохиссон бодлогыг гурав, дөрвийн даваанд оруулахыг хүссэн хуш олимпиадог зохион байгуулах

хорооно юуу эвэл түүний аль нэг гишгүүнд уг бодлогоо нүүцнэ нь алдагдуулахгүйгээр эвчүүдээ байх нь цаашид олимпиадын хөдөлгөөнийг үзэвхнүүдэхэд гухал ая холбогдолтой юм.

I сэдэр

✓ ① $[n]$ нь n тооны хувьцыг байр бүх натурал тоог ол.

② Түргээр дөрвөн онцөгтийн диагоналуудын квадратуудын нийлбэр талуудынхаа квадратуудын нийлбэртэй хэтрэхгүй гэж батал.

③ Бүх гишүүд нь $0 \leq c_i \leq n$ нөхцөлийг хангадаг $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ бүхэл тоон дарааллын хамгийн бага утгыг $m(c)$ гэж тэмдэглэе (энд n, k хоёр нь бэхлэгдсэн натурал тоонууд). c нь тэр хамт бүх дарааллаар гүйц үеийн $m(c)$ утгуудын нийлбэр

$$1^k + 2^k + \dots + n^k$$

нийлбэртэй тэнцэнэ гэж батал.

II Одоо

- ④. ABC гурвалжны талбай S , S оройн дотроос онцгийн биссектрис m хоёр $2S = m^2 tg \hat{C}$ тэнцэтгэлийг хангадаг бол энэхүү биссектрисийн AO талтай үүсгэсэн онцгийг ол.

- ⑤. ($0 < a, 1 < q$). a эхний гишүүнтэй, q хуваарь бүхий геометрийн прогрессийн эхний n гишүүнийг дурэн байдлаар тус бүр n гишүүнтэй хоёр хэсэгт хуваагаад нэгдүгээр хэсгийг осох, хоёрдугаар хэсгийг буурах байдлаар

$$b_1 < b_2 < \dots < b_n;$$

$$c_1 > c_2 > \dots > c_n$$

гэх бичвэ.

$$|b_1 - c_1| + |b_2 - c_2| + \dots + |b_n - c_n| = \frac{a(q^n - 1)^2}{q - 1}$$

тэнцэтгэл зиагт биелэдэхийг батал.

- ⑥. Өөр өөр онцгой наажил
цаас бүр дээр 0, 1, 2, 3, 4, 5 цифрүүдээс нэгийг бичнэ. Нийлбэр нь 22 гарах хичнээн боломж байх вэ?

① Бодлогын бодолт

◀ m натурал тооны хувьд.

$m^2 \leq n < (m+1)^2$ байх. n натурал тооны бүхэл хэсэг m байна: $[\sqrt{n}] = m$. Нөгөө талаас

$m^2, m^2+1, m^2+2, \dots, m^2+m, m^2+m+1, \dots, m^2+2m$ тоонууд дотор зөвхөн m^2, m^2+m, m^2+2m гурван тоо m тоонд хуваагдана.

Үүнхүү $m = 1, 2, 3, \dots$ утгуудыг өгөх замаар бодлогын нөхцөлийг хангах бүх n натурал тоог гарган авна:

$1, 2, 3, 4, 6, 8, \dots, m^2, m^2+m, m^2+2m, \dots$ ▶

② Бодлогын бодолт

Энэ бодлого нь XXII олимпиадын дөрвөнийн дсвааны хоёрдох өдрийн хоёрдугаар бодлогын хавтгай дахь тохиолдол юм. Энэ тохиромжтой байгаа огторгуй дахь бодолт нь юу ч турхун тангив. Хавтгай дахь бодолт олнохөөс зарчмын дэглэ байхгүй. Тэгж байгаа та эргий зураасаа тэмдэглэгдсэн хэргмүүгийг тоо зураасаар тэмдэглэх хэрэг.

төв. Тэгвэл d_{ab} тоогнал тэгээрээ нэг
байсан бол энд $d_{ab} = 0$ о.х. о.х.
дугаарын дундаж үзэгчүүд гавцалыг
болох тул $d_{ab} \geq 0$ байна.

③ Бодлогын бодолт

▲ Эдгээр зургаан бодлогын 1 ба 3
зургаар бодлогыг ямар номноос авсан
болохыг ²⁰⁰⁹гурсан билээ. Тэгвэл маргаан
болох гэж байгаа х ангийн гурван да-
вааны эхний өдрийн гурван бодлогыг
би бэлтгэх ёстой болов. Үүн байдалд би
"буудал идэхээс" өөр аргагүй болсон юм.
Ер нь олимпиадыг өөрсдийн шиг
зохиосон бодлогчуудаар эвүүлж байх нь
олимпиадын хөдөлгөөнийг эргэлтүүлэх
гучал шигшсэн гэж бус үздэг. Учир
нь бодлого зохиох эвчдэг олимпиадыг
зохион эвүүлж байгаа хүмүүс өөрсдөө
хогсдөг.

3 зургаар бодлогыг номон дээрх индүү
үзээр баталсан байгаа. Харин энд үг
бодлогыг "нэгтгэн тайлцуулах зарчим"д

ашигласан шинэ бодолтыг хийв. Хэрэв
та энэ заргын мэдэхгүй буюу эвэл
дүрхэг төсөөлж байгаа бол энэ тогтмол
байгаа «нэгтгэн зайлуулах
заргын» гэж өгүүллийг цуцшиж
боловруулахыг танд зөвлөв.

$m(s) = n$ байх бодлод эхлэсэн $s =$
 $(s_1, s_2, \dots, s_k)$ дарааллуудын олонлогийг
 D_n , олох ёстой нийлбэрээ S гэж
нүс тус тус тэмдэглэвэл $S = \sum_{i=1}^n |D_i|$
байх нь илэрхий. Одоо D_i олон-
логийн элементийг тоолохын тулд
 $s_i = \nu$ байх $s = (s_1, s_2, \dots, s_k)$ дараал-
луудынхаа олонлогийг A_i гэж тэм-
дэглэв. $i = 1, 2, \dots, k$. Мэдээж $D_n = \bigcup_{i=1}^k A_i$
тул нэгтгэн зайлуулах заргын ёсоор
 $|D_n| = |\bigcup_{i=1}^k A_i| = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} S_i$.

Одоо i дугаар рангийн нийлбэр
 $S_i = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_i \leq k} |A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_i}|$ илэрхийллийг
бодохын тулд
 $|A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_i}|$ тоог олж. Энэ нь
 $s_{j_1} = \nu, s_{j_2} = \nu, \dots, s_{j_i} = \nu$ байдаг $\nu \in s_1, s_2, \dots, s_k \in n$

нормийн хангах $C = (C_1, C_2, \dots, C_k)$ бүхэл
төрх дараалал хэд вэ? гэсэн үг.

Үргэлж зарчмыг ёсоор ийм дараал-
луудын тоо $(n - (v-1))^{k-i} = (n-v+1)^{k-i}$

байна. $|A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_i}| = (n-v+1)^{k-i}$.

Иймээс

$$S_i = C_k^i \cdot (n-v+1)^{k-i}$$

Олон утгаар $|D_v|$ -гийн илэрхийлэлд

орлуулан бодвол

$$|D_v| = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} C_k^i (n-v+1)^{k-i} = (n-v+1)^k -$$

$$- \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i (n-v+1)^{k-i} = (n-v+1)^k - [(n-v+1) + (-1)]^k$$

$$= (n-v+1)^k - (n-v)^k$$

Олон $|D_v| = (n-v+1)^k - (n-v)^k$ утгаа
бодол ёстой. S нийлбэрт орлуулан

$$S = \sum_{v=0}^n v [(n-v+1)^k - (n-v)^k] =$$

$$= \frac{n-1}{1} - n \cdot (n-1)^k + (n-1) \cdot 2^k - \frac{(n-1) \cdot 1^k}{1} + (n-2) \cdot 3^k - (n-2) \cdot 2^k +$$

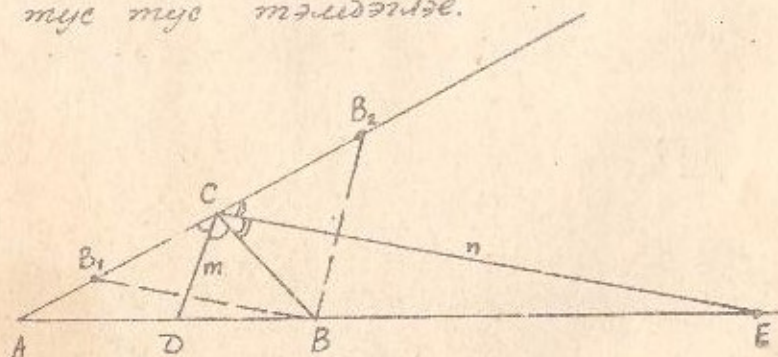
$$+ (n-2) \cdot 4^k - (n-2) \cdot 3^k + \dots + 2 \cdot (n-1)^k - 2 \cdot (n-2)^k +$$

$$+ 1 \cdot n^k - 1 \cdot (n-1)^k = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$$

$$S = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k \quad \triangleright$$

④ Бодлогын бодолт

$\triangle A, B, C$ өнцгийн эсрэг орших талуудыг харгалзан a, b, c ; C өнцгийг γ гэж тус тус тэмдэглэе. $2S = m^2 \tan \gamma$ нөхцөлөөс $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ бийх нь харогдаж байн. Үалчилбал $a \neq b$ (үгүйр нь $a = b$ гэнэ эсрэгээр нь үзвэл $2S = a^2 \sin \gamma = a^2 \cos \gamma \tan \gamma = (a^2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} - a^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}) \tan \gamma = (m^2 - \frac{c^2}{4}) \tan \gamma = 2S - \frac{c^2}{4} \tan \gamma$ $2S = 2S - \frac{c^2}{4} \tan \gamma$ $\tan \gamma = 0$ гэсэн зөрчилд хүрнэ). Төрдөрхөй болохын тулд $a < b$ гэнэ үзье. C өрөөн гадаад өнцгийн биссектрисийг n , B цэгийг m , n биссектрисүүдийн хувьд тэгш хэмтэй хувиргахад гарх цэгүүдийг харгалзан B_1, B_2 гэнэ тус тус тэмдэглэе.



$CD \parallel B_2B$; $CE \parallel B_1B$ (Угир нь CBV_2 гурвалжин C өнцөгтэй хамар өнцөг үүсгэх δ өнцөг нь мөн гурвалжин B_2, B өнцөгдийн нөхцөлдөртэй тэнцэх ба $\hat{B}_2 = \hat{B}$ тул $\hat{B}_2 = \frac{\pi}{2}$. Иймээс $CD \parallel B_2B$. Үүний адил $CE \parallel B_1B$ болох нь батлагдах).

$\triangle ACD \sim \triangle AB_2B$, $\triangle AB_1B \sim \triangle ACE$ тул

$$\frac{b}{b+a} = \frac{m}{b_2B}, \quad \frac{b-a}{b} = \frac{b_1B}{n}$$

CB_1B ; CB_2B адил хангуут гурвалжингуудаас

B_1B ; B_2B сууриудог нь олвол

$$B_1B = 2a \sin \frac{\gamma}{2} \quad B_2B = 2a \sin \frac{\pi - \gamma}{2} = 2a \cos \frac{\gamma}{2}$$

Иймээс

$$m = \frac{2ab \cos \frac{\gamma}{2}}{b+a}; \quad n = \frac{2ab \sin \frac{\gamma}{2}}{b-a}$$

$$\text{Эндээс } b+a = \frac{2ab \cos \frac{\gamma}{2}}{m}, \quad b-a = \frac{2ab \sin \frac{\gamma}{2}}{n}$$

квадрат зөрж гүйцүүлж тасалд харах өнцгийн тооцоо амтлавал

$$\frac{1+\cos \gamma}{m^2} - \frac{1-\cos \gamma}{n^2} = \frac{2}{ab}$$

$$ab \sin \gamma = 2S \quad \text{тул} \quad \frac{1+\cos \gamma}{m^2} - \frac{1-\cos \gamma}{n^2} = \frac{\sin \gamma}{S}$$

$$2S = m^2 \operatorname{tg} \delta \quad \text{гэж өгөгдснийг ашиглавал}$$

$$\frac{1 + \cos \delta}{m^2} - \frac{1 - \cos \delta}{n^2} = \frac{2 \cos \delta}{m^2}. \quad \text{Эндээс}$$

$$\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) (1 - \cos \delta) = 0. \quad \delta \text{ хурц өнцөг тул}$$

$$1 - \cos \delta \neq 0 \quad \text{угир} \quad \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} = 0. \quad \text{Эндээс}$$

$$m = n \text{ болно.}$$

Цэнхүү оройдоо тэгшөнмтэй бүхий адил хажуут гурвалжин CDE-гийн суурийн өнцөг $\angle CDE = 45^\circ$ байна ▽

⑤ Бодлогын бодолт

▽ $a < a$, $1 < q$ тул өгөгдсөн геометрийн прогресс өснө:

$a < aq < aq^2 < \dots < aq^{n-1} < aq^n < \dots < aq^{2n-1}$
 $aq^{n-1} < d < aq^n$ байх d тоо сонгон авч.
 d -гээс бага прогрессийн гишүүдийг «этхэр» тоо, ихийг нь «улаан» тоо гэж нэрлэе. Цэнхүү n ширхэг этхэр, n ширхэг улаан тоо байна. b_k, c_k хоёр нь заавал өөр өнгөтэй байх (угурт ижил өнгөтэй гэж зэрэгцээс нь үзвэл зорчилд хурхна. b_k, c_k хоёула этхэр э.х. $b_k < d$, $c_k < d$ байх гэж үзвэл. Энэ тохиолдолд

$b_1 < b_2 < \dots < b_{k-1} < b_k < d$, $d > c_k > c_{k-1} > \dots > c_1$
 байх тул $k + (n - (k-1)) = n+1$ ширхэг

үзэхээр тоо олдов Тэгвэл зөвхөн n
 ширхэг үзэхээр тоо байгаа билээ.

b_k, c_k хоёул улаан э.х. $d < b_k, d < c_k$
 байна гэж үзв. Энэ тохиолдолд

$d < b_k < b_{k+1} < \dots < b_n$; $c_1 > c_2 > \dots > c_k > d$
 байх тул $(n - (k-1)) + k = n+1$ ширхэг

улаан тоо олдов Тэгвэл зөвхөн n

ширхэг улаан ^(тоо) байгаа билээ өөр
 тохиолдол байхгүй) Үүнээс $|b_k - c_k| =$

$= u_k - v_k$. Энд b_k, c_k хоёр тоогийн уламнан
 нь u_k , үзэхээрийн нь v_k гэж тэмдэг

лэв. $|b_1 - c_1| + |b_2 - c_2| + \dots + |b_n - c_n| =$

$$= (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \dots + (u_n - v_n) =$$

$$= (u_1 + u_2 + \dots + u_n) - (v_1 + v_2 + \dots + v_n) =$$

$$= (a q^n + a q^{n-1} + \dots + a q^{2n-1}) - (a + a q + \dots + a q^{n-1}) =$$

$$= a q^n (1 + q + \dots + q^{n-1}) - a (1 + q + \dots + q^{n-1}) =$$

$$= a (1 + q + \dots + q^{n-1}) (q^n - 1) = a \frac{q^n - 1}{q - 1} (q^n - 1) =$$

$$= \frac{a (q^n - 1)^2}{q - 1} \quad \blacktriangleright$$

⑥ Бодлогын бодолт

Энэ бодлого нь тус тохиолдолд

хэвлэгдсэн «Олон улсын математикийн
XXVII олимпиадад БНМАУ-аас згуулсан
бодлогчуд» огцуулийн гуравдугаар бодлого
 $n=6$, $k=21$, $v=5$ байх үеийн шүүд ту-
хайн тохиолдол тул энэ гуравдугаар
бодлогын бодолтой таамаахыг зөвлөв.

$$m = \min \left\{ 6, \left[\frac{21}{5+1} \right] \right\} = \min \{ 6, 3 \} = 3 \text{ тул}$$

$$\begin{aligned} S(21, 5, 6) &= \sum_{k=0}^3 (-1)^k \binom{6}{k} \binom{21-6k}{5} = \binom{21}{5} - \binom{6}{1} \binom{21}{5} \\ &+ \binom{6}{2} \binom{15}{5} - \binom{6}{3} \binom{9}{5} = \frac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - 6 \cdot \frac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \\ &+ \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - 20 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 21 \cdot 26 \cdot 23 \cdot 5 - \\ &- 21 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 + 77 \cdot 13 \cdot 45 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 23 - \\ &- 2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 19 + 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 135 - 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = \\ &= 2 \cdot 3^3 (5 \cdot 13 \cdot 23 - 7 \cdot 17 \cdot 19) + 3^2 \cdot 5 \cdot 7 (11 \cdot 13 - 2^3) = \\ &= -2 \cdot 3^3 \cdot 766 + 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 135 = 3^5 \cdot 5 \cdot 7 - 2^2 \cdot 3^3 \cdot 183 = \\ &= 3^3 (3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 - 2^2 \cdot 383) = 27 (225 \cdot 7 - 383 \cdot 4) = \\ &= 27 (1575 - 1532) = 27 \cdot 43 = 1161 \end{aligned}$$

4. Математикийн XII олимпиадын
х ангийн үүрвэл давааны бодлого
Ц. Дамдорж

Энэхүү 6 бодлогои Олон Усын Математи-
кийн 26-р олимпиадын жүрийн материал-
наас авсан байна.

I Одор.

1. Турвалжны хоёр талын уржвэр нь
түрэгд байтсан ба түүнийн байтасан тойр-
гуудын диаметрүүдийн уржвэртээ их нэг
батал.

2. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}$ тэгшитгэлийн бүх нату-
рал шийдийг ол.

(3.)

A-нь натурал тоонуудаас тогтох олонлог
ба A-гийн ямарваа хоёр элемент x, y-ийн
хувьд $|x-y| \geq \frac{xy}{25}$ бол A-нь хамгийн олон
тал. 9 элементтэй тийм A олонлогийн жи-
шээ ол.

II Одор

4. a, b-нь бүхэл, n-нь натурал тоо бол

$$A = b^{n-1} a(a+b)(a+2b) \cdots (a+(n-1)b) / n! - \text{нь}$$

бүхэл тоо нэг батал.

5. Нэгт радиустай тойрогт нүдэр дор-
ын олон тал байх. $0 < p - \sum d < 2$ байх
батал. Энд p-нь дорын олонгийн пери-

метр, Σd -ны диагональдын нийлбэр болно.
 б. $n \geq 2$ натурал тоо бүхийн хувьд

$$\log_2 \log_2 \dots \log_2 (2n-2) \leq 1 \quad \text{байхын батал.}$$

1-р бодлогын бодолт.

S -ны үр нэрвэлтийн талбай бол синусын теорем ба нэрвэлтийн тэнгэл бишгэж

$$ab = \frac{2S}{\sin \gamma} = 2(a+b+c) \cdot \frac{2R}{c} \geq 2 \cdot 2c \cdot \frac{2R}{c} = 2n \cdot 2R.$$

2-р бодлогын бодолт.

$x \leq y \leq z$ гэж үзэж болно. Эртнээ $\frac{3}{x} > \frac{4}{5}$ ба $\frac{1}{x} < \frac{4}{5}$ тул $2 \leq x \leq 5$ гэж гарна.

$x=2$ бол $\frac{x}{y} > \frac{1}{10}$ ба $\frac{1}{y} < \frac{1}{10}$ болох тул

$4 \leq y \leq 6$ гэж гарна. Мийн $x=2, y=4$ үед

$z=20$; $x=2, y=5$ үед $z=10$; $x=2, y=6$ үед z -ны бэрл биш болохын тус тус олно. Эртнээ $x=3$ бол $3 \leq y \leq 4$ болох ба энэ үед z -ны бэрл байх тааралгүй. Мийн $(2, 4, 20)$; $(2, 5, 10)$ - нээ өөр мийн байдалгүй.

3-р бодлогын бодолт.

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n,$$

$$x_{i+1} = x_i + d_i, \quad d_i > 0 \quad \text{байх.}$$

Эртнээ: $25d_i \geq 2i(x_i + d_i)$, $d_i \geq \frac{2i}{25-i}$, $x_i \geq 5$ байх нь ойлголцмтой тул

$$d_6 \geq \frac{25}{10} > 1, \quad x_6 \geq 7, \quad d_7 \geq \frac{29}{18} > 1, \quad x_7 \geq 10, \\ d_8 \geq \frac{70}{15} > 6, \quad x_8 \geq 17, \quad d_9 \geq \frac{282}{8} > 36, \quad x_9 \geq 54, \\ x_{10} \geq 55 \quad \text{түр}$$

$x_{10} > |x_{10} - x_9| \geq \frac{x_9 x_8}{25} > 2x_{10}$ зогшил
нь $1A \leq 9$ боломж тохруулаа.

4-р багцлын багцт.

n -р ангид тас ба $n! - 1$ хуваах p -ийн
халигын өндөр зүйт нь p^n тэнх

$$d = \left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \dots \leq \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n}{2^2} \right] + \dots \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \dots =$$

$$= n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) < n \quad \text{болно. Үүр нь тэгээр}$$

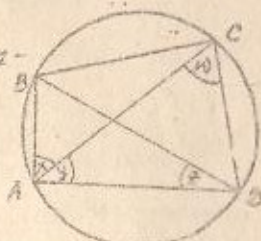
бэл төгсгөлөг нийлбэр байна. Иймд

$n! - 1$ болно. Иймдүү хэрэв b нь p -д ху-
ваагдах бэл $p-1$ A -ийн хуваарьд ху-
раат болно. Хэрэв p -но $b-1$ хуваагдах
үр бэл p -но. $a, a+b, \dots, a+(p-1)b$ - үржил-
дүүнүүдийн адас нийл хуваана. Үүр нь
 p -но хэрэгийн алийг 1 хуваагдахүр нь
бэл p -д хуваахад адил үрүдүг одог
хоёр тас $a+1b, a+2b, \dots, a+(p-1)b$ -
доно. Төвлөл $a+1b - a+2b - (1-2)b$ нь p -д ху-
ваагдах үрүг b нь p -д хуваагдахад үрүг
зорил гарна. Иймд A -ийн хуртүрт дор
халад $\left[\frac{n}{p} \right]$ шүрхн p -д хуваах дор үрүнд
хүрү бий. Үүний адилээр A -ийн хуртүрт
дор халад $\left[\frac{n}{p^2} \right]$ шүрхн p^2 -д хуваагдах

үрчилдүүгээр бүтээгдэхүйц $a(a+b) \dots (a+n \cdot b)$ -г эдгээр талбайн хэрэгтэй гүйцэтгэнэ.

5-р бодлогын бодолт.

d_1, d_2 нь диагоналууд нь бол үүр-
валжны тэнцэж Δ нэмж $2p = AB +$
 $+ BC + BC + CD + CD + DA + DA + AB >$
 $> 2(d_1 + d_2)$ буюу $p - \Sigma d > 0$ болно.



$\angle BAC = x, \angle CAD = y, \angle ACD = w,$
 $\angle ADB = z$ нэ. $x + y + z + w = \pi$ Гэвч $x > y$ нэ үүр-
болно. Нэмж ABCD нь 2 диаметртэй той-
роон багтсан тул синусын теоремоор $AB = 2R \sin x,$
 $BC = 2R \sin y, CD = 2R \sin z, AD = 2R \sin w = 2R \sin(x + y + z),$
 $AC = 2R \sin(x + z), BD = 2R \sin(y + w)$ боловч тул

$\sin x + \sin y + \sin z + \sin(x + y + z) - \sin(x + y) - \sin(x + z) < 1$ нэ
баталбал болно. Өөрөөр үргэлж хуримт
 $\sin x + \sin y + \sin z + \sin(x + y + z) < \sin(x + y) + \sin(y + z) + \sin(z + x)$
тэнцэл бишгүй батална. Үүрчилж батла-
хад тухайн үеийн бичиг юм.

6-р бодлогын бодолт.

$\log_k \log_n (2n - k) \leq 1$, нэ баталбал хангалттай.

$\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$ тэнцэл биш нь дургүй хэрэг бодит
тоонуудын кубаг хуримттай тул

$$\begin{aligned} \log_k \log_n (2n - k) &\leq \frac{(\log_k + \log_n (2n - k))^2}{4} = \frac{(\log_k (2n - k))^2}{4} \\ &\leq \frac{(\log_n (2n))^2}{4} = \frac{(\log_n n^2)^2}{4} = 1 \end{aligned}$$

болон нь
баталдаг.

5. Улсын математикийн XXII
олимпиадын бодлого.

И. Дашдорж. А. Мисий.

Улсын математикийн XXII олимпиад
манай орны ЕБДС-ийн бүх сурагчид
хамарч, дөрвөн даваатай хэвдэст
дууслаа. УМО-ын IV даваанд аймал
хотын математикийн олимпиадын
III даваанд нгмарсан 27 сурагч
оролцлоо. УМО-ын IV даваа 1986 оны
V сарын 10, 11-ний өдөрүүдэд МУИС-дэр
хэвдэглээ. Хоёр өдрийн уриеддаг,
олимпиадын зохион байгуулах хорооны
сигүүдийн саналаар шал-
гаруудыг авсан, тус бүр нь 6 оноо
бүхш 6 бодлогоо бодом сурагчид
урагдав.

Алхдгтмийн Батболд (45, I сургуул)
31,5 оноогоор I, Чингэлэн Баттогтох (Зархан
I сургуул) 27,5 оноогоор II, Ариунбаатдын
Төрлөг-Оз (45 I сургуул) 25,5 оноогоор II,
Чингэлэн Хүмүүжил (Чингэлэн, II сургуул)

25,5 оноогоор II; Дэлгэралт Амарсалаа
(Фархан, I сургууль) 24,5 оноогоор III, Голмөн
Монголхурал (Баянхошир, -авиан хамт) 22,5 оноогоор
III, Авраагын Эрхмэдиг (Ховд I сургууль)
23,5 оноогоор III, Гувсангийн Нэгдүгээр
(Эрхмэдиг, хамт) 20 оноогоор III, Тугалгийн
Батцэвэр (Ч.Б. 48-р сургууль) 20 оноогоор III
байртай тул тус дээд. Дээрх IX
сурталас гадна Галбадрахын Энхтос,
Налирхынгийн Вадбайр, Зандан Түвш-
сүрэг нар онгожи 50-наас дээш хувийг
авсан байна.

А. Галбадр (цэцэрлэг хамт I сургууль)
VII ангийн, З. Сосол-Эрдэнэ (Ч.Б. хамт
I сургууль) VIII ангийн, Э. Мандэгдорж
(Ч.Б. хамт I сургууль) IX ангийн
тус тус математикийн XXII олимпиадын
аврааа болжээ.

Улсын мате математикийн XXII олим-
пиадын IV даваанд сонгогдсон бодлого
тэдний бодолт дээр сургууль
I одор.

1. Хоёронт байтсан дөрвөн тусгайтайн тал-
цуг арифметик прогресс үүсгэн ба их
тал нь диаметр болсон бол

$$\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \quad \text{болохыг батал}$$

(А. Ганбаатар, МУИС)

2. $8x^3 - y^3 = 49 - 2xy$ тэгшитгэлийн нэгү-
рэл шийдийг ол (Б. Зулуудорж, УБДС)

3. Амг 3-ны нь алахаг идэх 2 нь холбог-
сон бийхний тулд бүтцийн хамгийн цөөн
хэдхэн хэрчлэлтэй гэж холбооны урхих вэ?
(Ц. Дамдорж, МУИС)

II овор

4. Амг цураахны нь нийлбэр 3-т, алг
дөрвийн нь нийлбэр 4-т кубусуудад
хэс, хэсвэрээс харилцан алхныг тогтоолгой
олон натурал тоо олдохыг батал
(Ц. Дамдорж, МУИС)

5. Гурвалжинг. пирамидын ерөнхий үзг-
гүй хэер призмийн квадратүүдийн
нийлбэр буцаг призмийн квадратүүдийн
нийлбэртэй бага иж батал
(Г. Хуралдаатар, МУИС оюутан)

6. $1 < x_1 < 2$, $x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{x_n^2}{2}$ рекуррент
төлөвөөгөөр өгөгдсөн дөрвөлөл нэгдүгээ

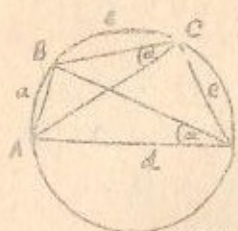
$|x_n - \sqrt{2}| < 2^{-n}$ Тэнгэр буюу хангана нь
үүхүү (Р. Виттурго, МУИС.)

Бодолтгүй

1. Холбогдох зурвас зурм, түүн өөрөө
зохиж тэнгэр нэвчүүгүйн хувь (1 р зурвал).

$$BD^2 = d^2 - c^2 \quad (1)$$

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \\ = b^2 + c^2 + 2bc \sin \alpha \quad (2)$$



$$\Delta ABD \text{ - нө } \frac{a}{d} = \sin \alpha \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) - aac$$

$$\text{зурвал } d^2 - a^2 = b^2 + c^2 + \frac{2abc}{d}$$

$$(d-a)(d+a) = (b+c)^2 - 2bc + \frac{2abc}{d} \quad (4)$$

$$\frac{1}{d} a, b, c, d - \text{нө } a+d = b+c \quad (5)$$

$$(4), (5) - aac \quad (d-a)(b+c) = (b+c)(d+a) - \\ - 2bc + \frac{2abc}{d}, \quad 2ab + 2ac + \frac{2abc}{d} = 2bc | :$$

$$: 2abc \text{ нөхц } \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \text{ болно.}$$

2. $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2) = 49-2xy$ баг-
лаар нь тэнцэтгэлийн бусад. Дар-
нахт 3 тохиролз нь тэнцэтгэлийн бусад.

а) $2x-y > 0$ болн. $2x-y \geq 1$ нэгүрад

тоо байн тул $4x^2+2xy+y^2 \leq (2x-y)$.

$$(4x^2+2xy+y^2) - 49 - 2xy, \quad 4x^2+4xy+y^2 \leq \\ \leq 49, \quad (2x+y)^2 \leq 7^2, \quad 2x+y \leq 7,$$

$$2bc = (b+c)(d+a - d+a) + \frac{2abc}{d}$$

$$2bc = 2ab + 2ac + \frac{2abc}{d}$$

$x \in \{1, 2, 3\}$ ит гарна.

$x=1$ бол $2x-y > 0$ болгох x $y < 2$ ит гарна ба өсөн тэнцүүл $8-y^3=49-2y$.

$y(y^2-2)=41$ болох ба энэ тэнцүүл нь шийдгүй илэрхийл.

$x=2$ бол $y < 4$ болох ба $64-y^3=49-4y$,

$y(y^2-4)=16=3 \cdot 5$ ит $y=3$ итэн шийдгээд ба $(2,3)$ нь манай шийд болох. $x=3$ бол $y < 6$ болох ба $216-y^3=49-6y$, $y^3-6y=167$ нь хатгал шийдгүй.

б) $x-y < 0$, $y^3-2x^3=49-2xy$ хэлбэртэй. ир бол $(y-2x)(y^2+2xy+4x^2)=-49+2xy$, $y^2+2xy+4x^2 \leq (y-2x)(y^2+2xy+4x^2)=-49+2xy$, $y^2+4x^2 \leq -49$ нь боломжгүй ам.

в) y -тэй тэг байх, боломжгүй тус $2x-y=0$ байх үе болох. Иймд $(2,3)$ гарна шийдгээд.

3.



Зураг 2.

2-р зурагт тус тус, холбоот бодлого нэгдлийн хангана тус тус харуулав. Үүний тус 6 үн 5 тус тус нэг холбоот ам 2 2 нь хоорондоо холбогдохгүй 3 үн

олзжам үүрвэл хангалттай. Нэгтс үүр-
ууд хэргийг гарсан. А үн алдана. Эс-
тгвэл үн бүртгэ 2-оос цөөнгүй хэр-
гийг гарг нийт хэргийнх түү $\frac{2 \cdot 6}{2} = 6$
-оос цөөнгүй болоход хүртэл.

А-тай холбогдоогүй эдгээ 4 үн бай-
гаа ба энэ дөрвийн аль н 3 нь
хоорондоо холбогдох буюу $C_3^2 = 6$ хэргийг
татагдсан бийх ёстай болов. Үүр-
кэ энэ 4 үгийн дотор холбогдоогүй
2 үн байвал тэр нь А-тай нийлж
холбоогүй үүрвэлд үүсгэхсэн.

Үүнтэ арай өөр бодолтой А. Батболд
хийсэн.

4. $A = \{p^2 \mid 5 \leq p \text{ анхны тоо}\}$ олонлог нь
бодлогын нэгдлийг хангахыг үзүүлвэ.

$p = 2k+1 = 3k_1 \pm 1$ гэдг болох болох тул
 $p^2 = 4c+1 = 3c_1+1$ хэлбэртэй болно.

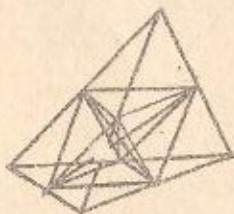
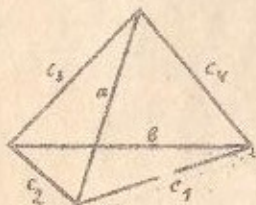
Ийн хэлбэрийн 3 тооны нийлбэр 3-т,
4 тооны нийлбэр 4-т хуваагдах нь
илэрхий. Энэ бодолтой А. Батболд
хийв. Өөр хэлбэр бодолтой авч үзье.

$A = \{12k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ олонлогоос аль н
хэрг нь харилцан анхны тоо байх

дэг олонлогийг сонгох авчд. $a_1 = 12 \cdot 1 + 1$,
 $a_2 = 12 \cdot 2 + 1$ гэж авбал $(a_1, a_2) = 1$
 болно. Ийнхүү хэр хос хосоор харил-
 цан анхны $a_1, \dots, a_n$ тоо өгөгдсөн
 үед $a_{n+1} = 12a_1 \dots a_n + 1$ гэж авбал
 $(a_k, a_{n+1}) = 1, \quad 1 \leq k \leq n$ болох
 нь илэрхий тул $a_1, \dots, a_n, \dots$

$a_{n+1} = 12a_1 \dots a_n + 1, \quad n \in \mathbb{N}$, тэгсгэл-
 гүй дараалал бодлогын нэгдлийн
 хангана.

5.



$a^2 + b^2 < c_1^2 + \dots + c_n^2$ тэнцэл-
 бийийг байлах хэрэгтэй.
 Чухий тулд ирмэг бүр
 дээр дундаж үзгийг нь
 тэмдэглэж, тэдгээрийг
 хос хосоор нь хэрэг-
 мээр холбовол гурван
 параллелограм үүснэ.
 Эдгээрийн диагоналуудыг
 харгалзан d_{ab}, d_{13}, d_{24}
 гэж тэмдэглэе. Параллело-
 грамны дүрэм ёсоор
 $d_{13}^2 + d_{ab}^2 = 2 \left[\left(\frac{c_1}{2} \right)^2 + \left(\frac{c_4}{2} \right)^2 \right] \quad (1)$

$$d_{24}^2 + d_{25}^2 = 2 \left[\left(\frac{a}{2} \right)^2 + \left(\frac{c}{2} \right)^2 \right] \quad (2)$$

$$d_{13}^2 + d_{24}^2 = 2 \left[\left(\frac{a}{2} \right)^2 + \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right] \quad (3)$$

$$\frac{(1) + (2) - (3)}{8} \quad \text{үлгізгенін үлгізетіндей}$$

$$\frac{d_{25}^2}{4} = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 - a^2 - b^2 \quad \text{болмо.}$$

$d_{25} > 0$ байт не шығарыл мыл $0 < c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 - a^2 - b^2$, $a^2 + b^2 < c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2$ болмы
 бағаларға.

6. $(1, 2)$ завтарға $f(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2}$ функция бұры-
 гағын қарайтын үлгі $n=3$ үлгі

$$|x_n - \sqrt{2}| < 2^{-n} \quad (1)$$

мында бұл үлгі боларға қарайтын шарты
 болмо. $n=k$ үлгі (1) үлгі байт. Нәтиже

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = -(x + y) \frac{1}{2} + 1, \quad x_{k+1} = f(x_k) \quad \text{мында}$$

$$\left| -(x_k + \sqrt{2}) \frac{1}{2} + 1 \right| = \left| \frac{f(x_k) - f(\sqrt{2})}{x_k - \sqrt{2}} \right| = \left| \frac{x_{k+1} - 1 \cdot \sqrt{2} + 1}{x_k - \sqrt{2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{x_{k+1} - \sqrt{2}}{x_k - \sqrt{2}} \right|, \quad \text{мында} \quad |x_{k+1} - \sqrt{2}| = |x_k - \sqrt{2}|.$$

$$\frac{1}{2} |2 - (x_k + \sqrt{2})| < 2^{-k} |2 - (x_k + \sqrt{2})| \frac{1}{2}.$$

Одоо $|x_k - \sqrt{2}| < 2^{-k} \leq 2^{-3} = \frac{1}{8}$ -и анықтай $|2 - x_k - \sqrt{2}| < 1$
 шартына $|x_{k+1} - \sqrt{2}| < 2^{-(k+1)}$ боларға.

6. Олон улсын математикийн
XXVII олимпиадын бодлого
А.Мекей. Б.Наранхуу.

МОУ-ийн XXVIII олимпиадад гаргах
зургаан бодлогыг 37 орны 210 сур-
гал бодогч зуралдсан юм.

1. d -н: 2, 5 ба 13-аас ялгаатай эерэг
бүхэл тоо байв. $ab-1$ -н бүхэл тооны
квадрат биш байсаар өөрсөндөө ялгаа-
тай a, b хоёр бүхэл тоог $\{2, 5, 13, d\}$
олонлогоос олж бэлэглэн үзүүл.

2. Хавтгайд $A_1A_2A_3$ гурвалжин, дунги
 P_0 нэг огтло. Дүрэн бүтээгчээр $4 \leq 5$
тооны сууц $A_2 = A_5-3$ гэж тэмдэглэв.
 P_{k+1} нэг, хавтгайд A_{k+1} цэгийн сууц
цаашиг чурмын дагуу 180° эргүүлэхэд P_k
цэгийн дүр байсаар, $P_0, P_1, P_2, \dots, P_k, P_{k+1}, \dots$
цэгүүдийн дарааллыг байгуулна. ($k=0, 1, 2, \dots$)
Хэрэв $P_{k+1} = P_0$ бол $A_1A_2A_3$ гурвалжин
адам тавийн гэж батал.

3. Тавуудангийнх нь нийлбэр зэрэг тоо
байхад, эв таван өндөгнийх өрш бүр

Нэг нэг бүхэл тоо бөгжээ. Мөрөв уг
таван онцогтийн дараалсан гурван оройд
нь x, y, z гурван тоо харгалзан байсан
бөгөөд $y < 0$ бол: x, y, z тоог харгалзан
 $x+y, -y, z+y$ тоогоор солих үйлдэл
зөвхөн өргөдсөн байг. Үйлдэл бүрийн дараа,
таван онцогтийн ядаж нэг оройд нь сөрөг
тоо байвал, уг үйлдлийг дахин үргэлжлүү-
лэнэ. Энэ үйлдэл тооговчлоог аялалын
дараа зогсох эсэхийг тодорхойл.

4. A, B зөв n онцогтийн (нэг) дараал-
сан хоёр орой, O түүнийг төв байг. XYZ
гурвалжин OAB гурвалжинтай тэнцүү
бөгөөд, эхлээд тэд давхцат байв. Дараа
нь Y, Z орой нь n онцогтийн эгнээгээр
Хорой нь n онцогтийн дотор нь байхаар
уг гурвалжин n -онцогтийн хавтгай дээр
хөдөлнө. Y, Z цэг хамтаараа n -онцогт-
ийн хил дэвсгэр бүхэн тойроод гүрэхэд,
Х цэг хавтгайд ямар дүрс зурах вэ?

5. Сөрөг биш бодит тооны олонлог дээр
тодорхойлогдсон бөгөөд сөрөг биш бодит утга-
тай, дараах хангуудыг хангах бүх
 $f(x)$ функцийг ол. Чунд:

1) дурин сорог бич x, y -ийн хувьд:

$$f(f(y)x) \cdot f(y) = f(x+y)$$

2) $f(2) = 0$

3) дурин 0-аас хувьд $f(x) \neq 0$.

Б. M нь координатын хавтгайн бүхэл тоон координаттай цэгүүдийн дурин төгсгөлөг олохлог байг. Координатын аль нэг тэнхлэгтэй параллель дурин L -шулуун дээр орших M -ийн улаан ба цагаан өнгийн цэгүүдийн тооны ялварын абсолют хэмжээ 1-ээс ихгүй байхаар, M -ийн нэг бүрийг цагаан эсвэл улаан өнгийн аль нэгээр үргэлжт болох уу?

Бодлогуудын бодолт.

1-дүгээр бодлого. $a, b \in \{1, 5, 13\}$ ба $a \neq b$ бол $ab-1$ -нь бүхэл тооны квадратыг дахин хувиархан шалгах болно. $d \in \{1, 5, 13\}$ байх эерэг бүхэл тоо, $a, b \in \{1, 5, 13, d\}$ ба $a \neq b$ байх дурин хоёр тоо байг. $ab-1$ -нь бүхэл тооны квадрат гэдэг эсрэгээс нь үзвэг. Тэгвэл

$$2d-1 = x^2; \quad (1)$$

$$5d-1 = y^2; \quad (2)$$

$$13d-1 = z^2; \quad (3) \quad \text{болно.}$$

$$x^2 + 1 = 16k^2 \pm 8k + 9 + 1$$

(1)-ээс $x = 4k \pm 3$ дүрсний сондгой тоо ба $ad = x^2 + 1 \equiv 1 \pmod{8}$ болно. Эндээс d -сондгой тоо гэнэ гэрхнэ. d -сондгой бол (2) ба (3)-аас y, z - тэгш тоонууд болоод.

$$8d = z^2 - y^2 = (z-y)(z+y) \quad (4)$$

болно. $z = 2z_1, y = 2y_1$, учир (4)-ээс

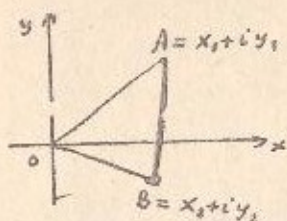
$$2d = (z_1 - y_1)(z_1 + y_1) \quad \text{гэж гарна.}$$

Сүүлийн тэнцэл, z_1 ба y_1 хоулаа тэгш, эсвэл хоулаа сондгой бол d -ийн сондгой эгдээг, z_1 ба y_1 -ийн тэгш сондгой нь зэрэгтэй бол тэнцэтгэлийн зүүн тал тэгш тоо байхаартай хариглана. Иймд $2d-1, 5d-1, 13d-1$ цуврыг аль нэг нь заавал квадратай байх болно.

2-дугаар бодлого Үг бодлого

комплекс тоо олонлог бодог. Хавтгайд $A(x, y)$ координаттай цэг, үг эзээр тодорхойлогдох $x+iy$ комплекс тоо адилтсан $A = x+iy$ гэж тэмдэглэе.

Тэгвэл $\overrightarrow{OA} = A = x+iy$ гэсэн бичлэг утга таамагдар болно. Чухнийг бодолцоход $A = x_1 + iy_1, B = x_2 + iy_2$ гэж үзвэл олохсон бол $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = B - A = (x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)$ болно (зураг 1)



Зураг 1.

Хэр комплекс тоог урцуулэхэд тэдний модуль уршилдог, аргумент нь нэмэгдэх билээ. Иймд комплекс векторыг эхний хувьд амар нэг α -ынцгоор (эсрэг илгээд) эрцуулэхэд гарах векторыг олохын тулд түүнийг $\cos\alpha + i\sin\alpha$ тоогоор урлцуулэх нь хамгаалттай. Түүнэлэн $\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ = -(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$ байна. Эдгээр санамжуудыг ашиглах болно.

P_0 цэг координатын эх байхаар координатын хамгай солгоок авьд. Тэгдэлэн есоор $A_1 = A_4 = A_7 = A_{10} = \dots = A_{3k+1} = \dots$,
 $A_2 = A_5 = A_8 = A_{11} = \dots = A_{3k+2} = \dots$, (5)
 $A_3 = A_6 = A_9 = A_{12} = \dots = A_{3k} = \dots$

болно. P_k цэгийн байрлалыг олохын тулд P_{k-1}, A_k - комплекс векторыг о.х $P_{k-1} - A_k$ - векторыг A_k - цэгийн хүрээ 120° эрцуулэх хэрэгтэй. Тэгэхэд бид $P_k - A_k$ - векторыг гарган авах билээ. Иймд $P_k - A_k = (P_{k-1} - A_k) (\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ) = (A_k - P_{k-1}) (\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$ болно.

$\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = u$ гэж тэмдэглэн
 өгнөм тэнцэтгэлийг

$$P_k = A_k + (A_k - P_{k-1})u \quad (6)$$

$k = 1, 2, 3, \dots$ гэж бичигн болно.

(6) тэмдэглээс:

$$P_k = (1+u)(A_k - uA_{k-1} + u^2A_{k-2} - \dots + (-1)^{k-1}u^{k-1}A_1)$$

гэж олж болно.

$P_0 = O(0,0)$ координатын эх учир:

$$O = P_0 = P_{1986} = A_{1986} - uA_{1985} + u^2A_{1984} - \dots + u^{1985}A_1$$

болно

(6) өсөөр эхлээс

$$(1 - u^3 + u^6 - \dots - u^{1983})(A_3 - uA_2 + u^2A_1) = 0$$

гарна. $1 - u^3 + u^6 - \dots - u^{1983} \neq 0$ учир

$$A_3 - uA_2 + u^2A_1 = 0 \quad \text{болно.}$$

$$u = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{тул} \quad u^2 = u - 1 \quad \text{болох ба}$$

$$A_3 - A_1 = (A_2 - A_1)u \quad \text{болно.}$$

Энэ тэнцэтгэл $A_2 - A_1$ векторын $+60^\circ$ эргүүлэхэд

хэд $A_3 - A_1$ гарахыг харгилжээ. Иймд

A_1, A_2, A_3 - адил талт гурвалжин юм.

Э-дугаар бодлого.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_5 - x_1)^2 + (x_5 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_4 - x_1)^2 + (x_1 - x_4)^2 \quad \text{Функци байгуулъя.}$$

Пронесса бүрийн дараа f -г функцүүдийн
 утга хэрхэн өөрчлөгдөх тухай

авт үүс. $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ гэдгээр
 $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = f(X)$ гэсэн тоо
 тэмдэглэл оруулъя.

Жишээлэхэд $x_4 < 0$ тоо бол дээрх
 үйлдлийг нэг удаа гүйцэтгэхэд

$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ вектор

$Y = (x_1, x_2, x_3 + x_4, -x_4, x_5 + x_4)$ -

векторзаар солигдох болно.

$$f(Y) = (x_3 + x_4 - x_1)^2 + (x_5 - x_2)^2 + \\ + (x_2 - x_5 - x_4)^2 + (x_2 + x_4)^2 + (x_5 + x_4)^2$$

тул $f(Y) - f(X) = 2x_4 S$ болно.

үүнд $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 > 0$.

Иймд $f(Y) = f(X) + 2x_4 S$, ба

$f(X) > f(Y)$ байна.

Дөрөг бүхэл тоонуудын буурах
 дараалал төгсгөлөг алхамд дуу-
 сах учир, төгсгөлөг алхамын
 дараа үе процесс зогсох болно

4-дүгээр бодлогын бодолт. A, B с
 нь зөв n -ошгоотийн дараалсан
 гурван орой, O -туурхит төв ба
 Y нь AB тал дээр, Z -нь BC тал дээр,
 X нь n -ошгоотийн дотор байсан гэв.

(Зураг 2).

Өгөгдсөн нэгдүгээр өгөгдсөн $\angle BAC$ -

$$= \angle ABO = \angle ZYX =$$

$$= \angle XZY = \frac{\pi}{n}.$$

$\angle AOB = \angle YXZ$. Үүнээс.

XYZ - гурвалжин

ингэж хадгалахад

X -орой BO -шугууны дагуу хадгалахад

гэж харууцна. $\angle ABC + \angle YXZ = \pi$

үүср XVZ - дөрвөн өнцөгт тойрогт байх юм. $\angle ZVM = \angle ZYM = \angle ZYX$

үүср X нь M цэг дагууна. Иймд XYZ

гурвалжны Y -орой нь n -анцрагийн

AB тал дээр, Z -орой нь BC тал

дээр байхад хадгалахад X

орой нь BO шугууны дагуу хадгалахад

хэрхэн зурна. Y ба Z нь B -гээс

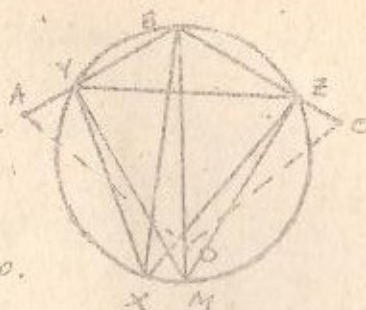
адал зайд алслагдсан үед энэ

хэрхэн хамгийн урт болохыг хам

бархан тэгшитгэл болно. Энэ үрт

$b_n = a \cdot \frac{(1 - \cos \frac{\pi}{n})}{b_n \cdot \frac{\pi}{n}}$ байхыг n хамтар

алт болно. Иймд X -орой нь тус



Зураг 2

бүр нь $\forall$ -урттай ба тэдгээрийн
 зөв n -оигдмийн $\forall$ рүү өгөгдсөн
 n -хэргээс тогтох $\forall$ хэлбэртэй
 дүрс зурна.

5-дугаар бодлогын бодолт.

1) ба 2) кахулаас $x \geq 2$ бол $f(x) = 0$
 мөн урвуугаар $f(x) = 0$ бол $x \geq 2$
 байхыг хэлбэрхэн үзүүхэд болно.

Одоо $0 \leq y < 2$, $x \geq 0$ байг. Энэ үед
 3) ёсоор $f(y) \neq 0$ учир $f(x+y) = 0$
 бол $f[xf(y)] = 0$ мөн урвуу нь үнэн.

$$f[xf(y)] = 0 \Leftrightarrow xf(y) \geq 2$$

$$f(x+y) = 0 \Leftrightarrow x+y \geq 2$$

Иймд $0 \leq y < 2$, $x \geq 0$ бол

$$xf(y) \geq 2 \Leftrightarrow x+y \geq 2 \quad \text{буюу}$$

1-үүнд $\Leftrightarrow$ -тэдгээг адил нэмэгдэл
 байна гэсэн үгийг тусламттай

$$x \geq \frac{2}{f(y)} \Leftrightarrow x \geq 2-y \quad \text{болно.}$$

$$\text{Эндээс } \frac{2}{f(y)} = 2-y, \quad 0 \leq y < 2$$

байхыг олно. Иймд бидний

олгох дүгнэл дараах байдалаар
 өгөгдөнө гэж дүгнэх болно:

$$f(y) = \frac{2}{2-y}, \quad 0 \leq y < 2 \quad \text{үед,}$$

$$f(y) = 0, \quad y \geq 2 \quad \text{үед.}$$

Игээн тодорхойлогдсон f -функци
 1), 2), 3) хамарна хамгаалж үзүүрнэ.
 Хэр эхдэн тохиолдол нь үүнэ.

а) $x+y < 2$, $x f(y) < 2$ байг.

Тэгвэл $0 < y < 2$, $f(y) = \frac{2}{2-y}$ ба

$$f(x f(y)) = \frac{2}{2 - x f(y)} = \frac{2}{2 - \frac{2x}{2-y}} = \frac{2-y}{2-(x+y)}$$

$$T\&1 \quad f(x f(y)) \cdot f(y) = \frac{2}{2-(x+y)} = f(x+y)$$

б) $x+y \geq 2$, $x f(y) \geq 2$ байг. Тэгвэл

$$f(x+y) = 0, \quad f(x f(y)) = 0 \quad \text{үүнэр}$$

1) бүлэг үүнэ.

в) $x+y \geq 2$, $x f(y) < 2$ байг. Тэгвэл,

эсвэл $y \geq 2$ ба 1)-ийн хөр тал хосу-
 лаа тэг болж буцаана; эсвэл $0 < y < 2$

ба $x \cdot \frac{2}{2-y} < 2$ - эвс $x+y < 2$ байх
 шаардлагатай болт өгөгдсөн тэдн
 хариглана.

г) $x+y < 2$, $x f(y) \geq 2$ байг. Тэгвэл

$$f(y) \geq \frac{2}{x}, \quad 0 < y < 2 \quad \text{ба} \quad x \cdot \frac{2}{2-y} \geq 2$$

болж $x+y \geq 2$ - эхэн харигал гарна
 Буцаж хамар бүлэг нь мээрхм?

6-дугаар бодлогын бодолт.

Огөгдсөн M олонлогтой огтлоонох.

Бөгөөд координатын аль нэг тэнхлэг-
 тэй параллель ℓ шулуунд авъя
 $M \cap \ell$ олонлог $P_1, P_2, \dots, P_k$ цэгүүдээс
 тогтох бөгөөд эдгээр цэгүүд голоом
 координатын осдох дарааллаар дугаар-
 ласдсан гэж үзье. P_1 -ийг P_2 -тай,
 P_2 -ийг P_3 -тай, P_3 -ийг P_4 -тай г.м хэрг-
 мээр холбоё. Ийм үйлдлийг $M \cap \ell$ -
 хоосон бичиг бичээд координатын
 аль нэг тэнхлэгтэй параллель ℓ
 шулуун бүрийн хувьд хийе. Итгэхд
 M -ийн цэгүүдийг холбоон хэрчимүүдийн
 бүл үүсэх бөгөөд M -ийн үзэг бүр
 хоёроос илүүгүй хэрчимд харгалзаг-
 дана. Хэрчимүүдийн энэ бүл битүү
 бунаг задгай хугархай шугамууд
 үүсгэнэ. Илгээ үүссэн хугархай
 шугамын хоёр бүл бүр хоорондоо
 ерөнхий оройгүй байна. Битүү хугар-
 хай шугам бүхэн тэгш тоолон хэрг-
 мээс тогтоно, учир нь түүний
 дараалсан хоёр хэрчим нь хоорондоо
 перпендикуляр юм. Хугархий шулам-
 уудын оройн цэгүүдийг улаан ба

цагаан ангийн будгаар элмүүхэн
будал. Энэ будалт боломжтой, учир
нь битүү хугархай шугам бүр тэгш
тоон хэрмээс тогтох юм (загвар
тохиолд ямарх харшил гарахуй?).

Ингэхэд авч үзсэн хөрмүүдэд үнэ
хэргийг алдах үзэг М-д үндсэн бол
тэдгээрийг дурин онгоор будал.

Энэ будалт бодлогын хөхлийг
хангана, учир нь хоорондоо хэрмээр
холбогдон байгаа хэвмээ бүх босоо шү-
лүүн дагуу байгаа зэгүүд хэс хэсгээ-
рөө мөр аар онгоор будагдана;

Артв шүлүүн дагуу сондгой тоон
үзэг байсан бол, үг шүлүүн. дээрх
үзэгийг дээр дурьдсан дүрлээр
будахаар хамгийн сүүлийн
үзэгийн өнгө аюусан ямар 1-ээс
илүүгүй байгааг анзааруулахуй.

4. Нэгтгэн зайлуулах зарчим

Д. Ламжав

Олимпиадын практикт олонтой таа'ралдаг комбинаторикийн нэгэн гухал гүнзгий зарчим бол «нэгтгэн зайлуулах зарчим» юм. Үүмээс математикийн олимпиадад шалдан бэлтгэн байгаа охид ангийн сурагчид энэ зарчмыг гадагшгүй эзэмшэх шаардлагатай байдаг.

X нь төгсгөлөг олонлог байхад түүний элементийн тоог $|X|$ гэж тэмдэглэе. Жишээ нь $A = \{1, 4, 8\}$ бол $|A| = 3$, $|B| = 0$

$$(1) \quad |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

(1) томиёог үгээр «хөр олонлогийн нэгдлийн элементийн тоо нь тус бүрийн элементийн тооны нийлбэрээс ерөнхий хэсгийн элементийн тоог хассантай тэнцүү» гэж ойлгохыг нь зүйтэй.



Энэ диаграммаас (1) томиёо үхэн болох нь

илэрхий. (1) нь хоёр төгсгөлөг олонлогийн хувьдах нэгтгэн зайлуулах заргын бодол нэгтгэн зайлуулах ерөнхий заргын тусгийг эхлэж түүнээс шууд мөрдөн гаргах тул (1) томъёог сайн анхаарч хэрэгтэй.

А Одоо A, B, C гурван төгсгөлөг олонлогийн хувьдах нэгтгэн зайлуулах зарглыг олж. $|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C| \stackrel{1}{=} |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \stackrel{1}{=} (|A| + |B| - |A \cap B|) + |C| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap C \cap B|) = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$ Ийнхүү гурван төгсгөлөг олонлогийн хувьд нэгтгэн зайлуулах заргын

(2). $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$ байх нь батлагдвал.

A, B, C, D дөрвөн төгсгөлөг олонлогийн хувьдах нэгтгэн зайлуулах зарглыг $|A \cup B \cup C \cup D| = |(A \cup B \cup C) \cup D|$ тэнцэтгэлийн баруун тал талд эхлээд (1) томъёог, дараа нь (2) томъёог хэрэглэх замаар хялбархан гарган

овг болно. Нэгөө талаас (1) ба (2) то-
ёог сайтар ажиглавал дөрвөн олон-
логийн хувь дахь нэгтгэн зайлуулах
заргын дараах байдалтай баймаар
байна:

$$\begin{aligned} (3) |A \cup B \cup C \cup D| &= |A| + |B| + |C| + |D| - \\ &- |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + \\ &+ |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - \\ &- |A \cap B \cap C \cap D|. \end{aligned}$$

Үүхээр энэ томьёо үнэн болохыг
олшо хэлсэн аргаар амархан шалгах
болно. Одоо таван тогсголт олонлогийн
хувьд нэгтгэн зайлуулах заргын бигш
амархан боловч баруун гар талын
илэрхийлэл нүсэр болох нь шүүд мэд-
рэгдэж байна. Хэрэв мянган гишүүн
тогсголт олонлогийн хувьд нэгтгэн
зайлуулах заргын нэгд нэгэнгүй бие-
вэл хичнээн цаас, хичнээн хугацаа
шаардагдахыг төсөөлөхөд бэрх юм.
Энэ зохисгүй байдлаас хэрхэн гарх
вэ? (3) томьёог анхааралтай ижил-
лэв. 1-р зэргийн гишүүдийн нийлвэрээс

хоёрдугаар зэргийн гишүүдийн нийлбэрийг хасаж гуравдугаар зэргийн гишүүдийн нийлбэрийг нэмээд нэгт нь дөрөвдүгээр зэргийн гишүүдийн нийлбэрийг хассак байка. Хэрэв эдгээр нийлбэрийг харгалзан S_1, S_2, S_3, S_4 гэж тэмдэглэвэл (3) тольёог дараах байдалтай нэвчхөн бичигж болно:

(4). $|AUBUCUD| = S_1 - S_2 + S_3 - S_4$.

Одоо A, B, C, D, E таван тогсгоог олонлогийн хувь дахь нэгтгэн зайлуулах зэргийн дараах хэлдэртэй байка:

(5). $|AUBUCUDUE| = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5$.

(4) тольёонд байгаа S_n нийлбэр A, B, C, D дөрвөн олонлогийн хувьд, (5) тольёонд байгаа S_n A, B, C, D, E таван олонлогийн хувьд бүлгэгдсэн байгаа тул хоорондоо тэнцэх албагүй нь ойлгогчтой.

Мянган олонлогийн хувьд нэгтгэн зайлуулах зэргийг дараах байдалтай бичиж болно:

$$|A_1UA_2U\cdots UA_{1000}| = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \cdots - S_{1000}.$$

Одоо $A_1, A_2, \dots, A_n$ гэсэн дүрэн n

ширхэг тэгсгөлөг олонлогийн хувьд
нэгтгэн зайлуулах заргил дараах
хэсбэртэй байна:

$$\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} S_k \quad (x)$$

Энд k дугаар зэргийн (рангийн) S_k
нэмлэргийн дараах томъёогоор
бодно:

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| \quad (p)$$

(p) томъёонд байгаа нэмэгдүүний
тоо нь n -ээс k -гаар авсан хэсгил-
лийн тоотой тэнгүү байна. Үйлээс
 $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|$ нь $i_1, i_2, \dots, i_k$ -гаас
хамаарахгүй б.х. $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| =$
 $= f(n, k)$ гэж зовхон k, n хоёроос
хамаарах үед $S_k = C_n^k f(n, k)$ байна.

Одоо нэгтгэн зайлуулах заргилд
мөрдөн гарах хэдэн сонгодог бод-
логыг томъёолж бодёе. Эдгээр сонго-
дог бодлогыг ойн эгнэлсэн байх нь
сон олимпиадад бэлтгэх байгаа

Сураггидаг маш хэрэгтэй.

1. Давхгийн бодлого. $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

оломлогийн ганц элементийг байранд нь үлдээхгүй орчуулгын тоо

$$n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$$

инерхийг эхтэй тэнцүү байна.

Бодолт

▲ $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ оломлогийн бүх орчуулгын тоо (о.х. сэлгэмэлийн тоо) $n!$ байдаг. $x_1 \neq 1, x_2 \neq 2, \dots, x_n \neq n$ байх $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ сэлгэмэлүүдийг тоолох хэрэгтэй. Үүний сэлгэмэлүүдийн оломлогийг F , бүх сэлгэмэлүүдийнхээ оломлогийг E , ядаж нэг давхцал үүсгэдэг сэлгэмэлүүдийн оломлогийг G гэж тус тус тэмдэглэе.



$$|E| = n! \quad n! = |F| + |G| \quad \text{тус}$$

G оломлогийн элементийг тоолвол хангалттай.

k дугаар байранд давхцал байдал (о.х. $x_k = k$ байна) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ сэлгэмэлүүдийн оломлогийг A_k гэж тэмдэглэе. Үүнтэй $G = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Нэгтгэ

Займчулах заргын ёсоор $|G| = |\bigcup_{k=1}^n A_k| =$
 $= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_k$. Одоо х дугаар рангийн
 S_k нийлбэргийг бодохын тулд түүний
 дүрн $|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k|$ нэмэгдүүхийг
 олж. $x \in A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$ байх нь
 $x_1 = i_1, x_2 = i_2, \dots, x_k = i_k$ нэгхэлтэй тэг
 үүсгэлтэй тул $|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k| = (n-k)!$
 байна. Иймээс $S_k = C_n^k \cdot (n-k)! = n!/k!$.
 $|G| = n! \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k!}$. $|F| = n! - |G| =$
 $= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \triangleright$

2. Сюръектив буулгалтын тоог олох бодлого

z элементэй A олонлогийг n элемент-
 тэй B олонлогт буулгах сюръектив буул-
 галтын тоог $N(z, n)$ гэж тэмдэглэе.

$$N(z, n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (n-k)^z$$

гэж батал.

▲ A олонлогийг B олонлогт буулгах буул-
 галтын олонлогийг $F(A, B)$, сюръектив
 буулгалтуудын нь олонлогийг $\mathcal{G}$, сюръектив
 биш буулгалтуудын нь олонлогийг H гэж

тус тус тэмдэглэвэл $|F(A, B)| = n^2$

$n^2 = |G| + |H|$. Н олонлогийн элементийг



тоололын тусд В олонлогийн элементүүдийг

$v_1, v_2, \dots, v_k$ гэж дугаарлав.

$$A_k = \{f: A \xrightarrow{f} B, v_k \notin f(A)\}$$

олонлогуудыг авч үзвэ. Мэдээж $H = \bigcup_{k=1}^n A_k$

туд нэгтгэн зайлуулах заргын

ёсоор $|H| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_k$. k рангийн S_k

күйлдэрийг бодохын тулд түүнийг

дурын $|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k|$ хэмээгдэхүүнийг

олго. Энэ нь A олонлогийг $C = B \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$

олонлогт буулгах буулгалтын

тоо. Болох угсаас $|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k| = (n-k)^2$

Уймээс $S_k = C_n^k (n-k)^2$, үүнийг

$$|G| = n^2 - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} C_n^k (n-k)^2 = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (n-k)^2$$

3. r ширхэг үн ялгадаг бөмбөгийн

v эзэлхүүнтэй n ширхэг

хайрцагт байрлуулах бүх бө-

мбөгийн тоог $S(r, v, n)$ - эер

тэмдэглэв.

$$S(r, v, n) = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_n^k C_{n-(v+1)k+v-1}^{n-1}$$

томъёо биелэгдэнэ. Энд $m = \{n, [\frac{n}{2}]\}$.

Бодолтыг тус товхимолд хэвлэгдсэн «Олон улсын математикийн хvii олимпиадад БНМАУ-аас дэвшүүлсэн бодлогүүд» өгүүллийн 5-р бодлогоос үз.

8. Усун Математикийн олимпиадад
бэлтгэлтгэдэ зориурсан бие дааж
бодох бодлогнууд.

(8 ба 9-р ангийн сурагчдад
зориулав.). Л. Хазхуу.

8-р анги

1. Сургуулийн 7-р ангийн сурагч бүр
17 кг, 8-р ангийн сурагч бүр 19 кг, бүр
1987 кг тэнцрийн хайрдам цунцурдмтээ.
Төмөр цунцурдад хамгийн багадаа хэ-
эт сурагч оролцсон байж болох вэ?

А. Хэрв I машин 4 рейс, II машин 3
рейс хийвэл тэд хамтдаа 21 тонноос бага
агаа зооно. Хэрв I машин 7 рейс, II машин
4 рейс хийвэл тэд хамтдаа 33 тонноос их
агаа зоох болно. Аль нь шүү даахтай вэ?

3. Нн хүн замон $\frac{1}{3}$ хэсгийг явганаар
 $5\frac{ки}{чиг}$ хурдтайгаар, дараагийн $\frac{1}{3}$ хэсгийг
дугуйгаар $12\frac{ки}{чиг}$ хурдтайгаар, үлдсэн
хэсгийг мотоциклтэр $60\frac{ки}{чиг}$ хурдтайгаар
тууламтээ. Энэ хүний дундаж хурдон ал.

4. Дараагы системүүдийг бод.

$$\left. \begin{array}{l} 1) \begin{cases} x^3 + 2xy = 4y \\ y^3 + 2xy = 2x \end{cases} \\ 2) \begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 - x + 2y = 0 \\ x^2 - xy - y^2 + 2x + y = 0 \end{cases} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{ll}
 3) \left. \begin{array}{l} x^2 - 3xy = x - 6 \\ y^2 + xy = 8 - y \end{array} \right\} & 4) \left. \begin{array}{l} x^2 - 2xy - 3y^2 + x + y = 0 \\ x^2 + xy - 2y^2 - x - 2y = 0 \end{array} \right\} \\
 5) \left. \begin{array}{l} x^2 + 2 = 3xy \\ 7xy + 4y^2 = 18 \end{array} \right\} & 6) \left. \begin{array}{l} x^2 + 2x + y = 4 \\ y^2 + 2y + x = 4 \end{array} \right\} \\
 7) \left. \begin{array}{l} 3y - 2x^2 = x^2y \\ y + 2x = 3xy \end{array} \right\} & 8) \left. \begin{array}{l} x^3 + y^3 = 9 \\ x^2y + xy^2 = 6 \end{array} \right\} \\
 9) \left. \begin{array}{l} y = x^2 - 2x \\ y < 4x - 9 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

5. $x^2 + \sqrt{25 - x^2} - 6 = 0$ тншмтн бод

6. Оху хавтгайд координатууд нь $y^2 - x \geq 1$

$(x+y+1)(x-y+1) < 0$ } системийн хавтгай (x, y) цэвэрлэлийн олонлогийн дүрсэл.

7. Үргэлжлүүлж бичиж заарал.

а) $x^{10} + x^5 + 1$ б) $x^9 + 4$

8. Тэрв $x + 2y = 1$ бол x^2y^2 илэрхийллийн хамгийн бага утгыг ол.

9. Тэрв $y = ax^2 + bx + c$ квадрат 3 ширүүний гурвал нь өгөгдсөн бол a, b, c коэффициентүүдийн тншдгийн тодорхойл.

10. $\frac{x+1}{x^2+x+1}$ илэрхийллийн максимум ба минимум утгыг ол.

11. Дараахь 2 тооны аль нь их вэ?

а) $\sqrt[3]{2}$ ба $\sqrt[3]{5}$

$$d) 2^{300} \text{ ба } 3^{400}$$

$$e) \sqrt{1985} + \sqrt{1987} \text{ ба } 2\sqrt{1986}$$

$$f) \sqrt{2} + \sqrt{3} \text{ ба } \pi$$

14. Бүх бодит x -ийн хувьд

$$x^{20} - x^{17} + x^{14} - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$$

тэнцэтгэл биш биелэхийн батал.

15. $\overline{BA}^B = \overline{DBA}$ нөхцөлийн хамт

D, B, A циррүүдийн ал

✓ 1. Циррүүдийнх нь нийлбэр 5-д хуваагдах натурал тоонуудын ослыг тусгаар нь бичгээ. Эртнээс өмнөх хайр тооны амалыг хамгийн багадаа хэд байх вэ?

✓ 15. 4 үсэг циррүүд тогосон натурал тооны энэ циррийн нь дарж, тэнд нь бичгээхүү түүхтс 4 дахин их тоо гаргах ньм нанаархай хамгийн бага тоо ол. (Багцлага ороотно).

16. Аравтын бичлэгт нь 3 үсэг циррүүд ороогүй бүх цуврал ороогтой тоонуудын нийлбэрийн тусам циррийн ал.

17. Бат 3 марк, 4 мн захидал, 4 дүгтүй авахдаа 32 монго, Дарж 7 мн, 5 мн захидал, 10 дүгтүй хялалдан авч 1 тог 27 монго зарцуулна. Марк амар

үзгэлтэй вэ? (Нп торшийн зүйлсийн ижил
үзгэлтэй үгс тооц).

18. Мушгат нп бүр нь 1 монголын ү-
нэтэй марк, 3 монголын үзгэлтэй нл за-
хидал, 5 ба 7 монголын үзгэлтэй дунтуй
байв. Сурагч 14 тал худалдан авч 61 монго
зарцуулав. Тэр нл захидал худалдсан
авсан үү?

19. 2^{1986} , 7^{1986} тоонуудын сүүлийн
цифрийн ал.

20. Тэрв а ба 5а натурал тоонуудын
цифруудийн нийлбэр нь ижил бэл а тоо
9-д хуваагдахын батал.

21. Тнн натурал тоо н бүрийн хувьд
 n^2+20n тоо 48-д хуваагдахын батал.

22. 1 см, 2 см, n см талууд бүхий цур-
валжин байгуулж болохоор бүх n гэж
натурал тоог ал.

23. $ax+2y=1$ ба $dx+ay=1$ шулуунууд
перпендикуляр байх а параметрийн
бүх утгын ал.

24. В талбай бүхий ABC цурвалжин
огогдсон. $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ цэвэрлүүд
гэр харгалзан P, Q, R цэгүүдийн $|PA|=2|QA|$,

$|QB|=3|BC|$, $|RC|=4|AC|$ байхаар тэнцэтгэл бол PQR гурвалжны талбайг ол.

✓ 25. ABC гурвалжны AB, BC, CA талууд дээр харгалзан P, Q, R цэгүүдийг $|AP|=\frac{1}{3}|AB|$, $|BQ|=\frac{1}{2}|BC|$, $|CR|=\frac{1}{3}|AC|$ байхаар тэнцүүлнэ. Тэрв ABC гурвалжны талбай S бол PQR гурвалжны талбайг ол.

✓ 26. ABC гурвалжны AB, BC, CA талууд дээр харгалзан M, N, P цэгүүдийг $|AM|=\frac{1}{3}|AB|$, $|BN|=\frac{1}{2}|BC|$, $|CP|=\frac{1}{3}|AC|$ байхаар сонгон авч. Тэрв $S_{MNP}=4$, $S_{ABC}=9$ бол S_{MNP} -г ол.

✓ 27. ABC гурвалжны бүх гаднаад биссектрисүүд нь $A_1B_1C_1$ гурвалжны үүсгэнэ. $A_1B_1C_1$ гурвалжны бүх гаднаад биссектрисүүд нь $A_2B_2C_2$ гурвалжны үүсгэнэ. Тэрв $A_2B_2C_2$ гурвалжны өнцгүүд нь $55^\circ, 60^\circ, 65^\circ$ бол ABC гурвалжны өнцгүүдийг ол.

28. 20 см тал бүхий ABC гурвалжны MN ($M \in [AB]$, $N \in [CB]$) дундагс шулан дээр K цэгийг сонгон авч. AK шулуун BC талын D цэгт огтлоно. Тэрв $|MK|:|KN|=1:2$ бол AD хэрчимийн уртыг ол.

29. Тэрв гурвалжны бүх өнцгүүд нь 1 см-ээс бага бол талбай нь 1 см^2

- аас их байх болох уу?

✓ 30. Турвалжны талбай S болно. Нүүрний медиануудаар нь тал хийсэн турвалжны талбайг ол.

✓ 31. Турь онцлог турвалжны онцлогдугийн огтлолцол цэгийн талуудын хувьд тний хэмтэй цэгийг нь үг турвалжны багтаасан тойрог дээр оршихыг батал.

✓ 32. Параллелограмын дотоод онцлогдугийн биссектрисууд нь тний онцлог цэгт хийг батал.

✓ 33. $ABCD$ параллелограмын дотоод онцлогдугийнх нь биссектрисууд таталдсан. Тэрв эдгээр биссектрисууд хуртандсан дөрвөн онцлогдугийн талбай 1 м^2 , $\hat{A} = 60^\circ$, $|AB| = 1\text{ м}$ бол AD талын уртыг ол.

✓ 34. A, B, C, D нь S талбай бүхий чдгээр дөрвөн онцлогдугийн талуудын дундаг цэгийг болно. $ABCD$ дөрвөн онцлог параллелограмм болохыг баталж талбайг нь ол.

✓ 35. $ABCD$ параллелограмм, түүний

эргэлцүүдээр үүссэн ABC , ABD гурвалжинууд тэгшмэл. Тэрвэ $|AB|=a$, $|BC|=b$ бол $|BD|$ ба $|AC|$ -г ол.

36. Тэрвэ $ABCD$ цугдөрвөн өнцөгтийн AC диагональ 1 см, BD диагональ 3 см ба талуудын дундсуудын холбоосон хэрмүүд нь хоорондоо тэнцүү бол тал байх нь эл.

37. Хавтгайн нп шулуун дээр үл орших 3 илгэж ижил зайнд алмагдсан хийлгэж шулуун оршин байх вэ?

38. О үн $A_1, A_2, \dots, A_n$ зов 18 өнцөгтийн төв бол $\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \dots + \vec{OA_n} = \vec{0}$ болохыг батал.

39. Кудийн хавтгайнаар сэтгэгдэлээр олон өнцөгтүүд, гүжтэ болох вэ?

40. $ABCD$ тетрагдрийн гэрл орших өрмтүүд нь тос хосоороо перпендикуляр байна. $(AD) \perp (BC)$ болохыг батал.

9-р анги.

1. Дараахыг системүүдийн бод.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} x^2 - 2y + z = 0 \\ y^2 + 4z + 3 = 0 \\ z^2 + 4x + 1 = 0 \end{array} \right\} \quad \text{б) } \left. \begin{array}{l} 4x + 3y = 13xy \\ 2z + 5x = 24xz \\ 3z + 5y = 29yz \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\text{III)} \quad \left. \begin{aligned} xz + 2y &= 2 \\ yz + 2x &= 2 \\ x^2 - y^2 + z^2 &= 9 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{IV)} \quad \left. \begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ x^2+y^2+z^2 &= 1 \\ x^3+y^3+z^3 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{V)} \quad \left. \begin{aligned} x^3 + 3x^2y &= 0 \\ x^3 + xy^3 + 3y^4 &= 81 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{VI)} \quad \left. \begin{aligned} y &\geq x^2 + x \\ y &\leq 5x - 4 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{VII)} \quad \left. \begin{aligned} 2x^2y - xy^2 + 2y &= x + 2 \\ 2x + 2xy^2 - y &= y^2 + 4x^2y - 2 \end{aligned} \right\}$$

2. Дараахь функцуудийн өсөх буурах завсрын нь олж, графикийг нь байгуул.

a) $y = (x-2)^5(x-1)$

б) $y = 3 + x - x^3$

в) $y = \frac{1}{(x-3)^2}$

$y = x^3 - x + 1$ функцний графикийн Алар цэгт, татсан ширхэг нь $y = 2x - 1$ шулуунтай параллель байх вэ?

4. $xy = 1$ гиперболын ширхгүүр нь координатын тэнхлэгүүдтэй 2 цэгт талбай бүхий гурвалжин үүсгэхийг батал.

5. $y = \frac{x^2}{4}$ парабол $(0, -1)$ цэгт а-лар өнгөөр харагдах вэ?

6. $(0, 0.5)$ цэгт $y = x^2$ -ийн параболын гурвалжин хуртзых хамгийн сэрхон зайгаа.

7. Дараах тэгшитгэлүүдийн бодит эс-
үүрүүдэд тоо ол.

а) $dx^5 - 5x^4 + 2 = 0$

б) $x^2 - 5x = 0$

в) $3x^5 + 2x^3 + x - 6 = 0$

8. а параметрийн Амар утсанд
 $x^2 + ax + 7 = 0$ тэгшитгэлийн хуучур бо-
лел x_1, x_2 тоонууд $x_1 - x_2 = 1$ нөхцө-
лийн хамтаа вэ?

9. $\sqrt[3]{1985} + \sqrt{1987}$ ба $2\sqrt[3]{1986}$ тоонуудын
алс нь их вэ?

10. Хоёр хөрн тоотой нийлбэр нь 4-өөс
их ба нэгдүгжийн квадратуудын нийл-
бэр мөн 4-өөс их болохыг батал.

11. $|55\sin x + 126\cos x| \leq 13$ тэгшитгэл дийлийн
батал.

12. $(a, b + a^2)^{100}$ биномын задаргалын
хамгийн их гишүүний дугаарыг ол.

13. Амар n тоотой ($n \in \mathbb{N}$) хувьд

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 6$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} &= 3 \end{aligned} \right\} \text{ байх } x_1, x_2, \dots, x_n$$

хөрн тоонууд оршиж байх вэ?

14. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ тоонууд нь арифмети-
кийн прогрессийн гишүүд байх болох-

ийн батал.

15. $\sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}}$ тоо ялгавартай байхыг батал.

16. $\cos 7^\circ + \cos 47^\circ + \cos 87^\circ + \dots + \cos 327^\circ$ нийлбэрийн ол

17. Дараах хязгаарлудыг бод.

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})$ б) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x-3}-3}{\sqrt{x+4}-4}$

18. Аравтын бичлэгт нь 2 хэм. цифр

ороогүй бүх таван оронтой натурал

тооны нийлбэрийн сүүлийн цифрийн ол.

19. Бат 3 марк, 7 м захидал, 4 дундуй,

Дорно 7 марк, 5 м захидал, 8 дундуй,

Цэнд 1 марк, 8 м захидал, 2 дундуй

худалдан автээ. Ижил үртэй үрийг ижил

цэвэрлэж иж тооцно. Тэрв Бат 52 монго,

Дорно 1 төгрөг 62 монго зарцуулсан бол

Цэнд хичэтн монго зарцуулсан бэ?

20. Тэрв $3n+7m$ тоо 19-д хуваагддаг

бол $43n+75m$ тоо мөн 19-д хуваагда-

хын батал. Инд: n, m - нь бүхэл тоо-

нууд болно.

21. Энгийн цифрийн нь дараахад 35 дахин

байхдаг бүхэл тоо оошм байхыг батал.

22. 6 см, 7 см, а см талууд бүхий гурвал-

жин могоо өнцөгт гурвалжин байх бүх

натурал тоо $a-2$ ол.

23. $|AB|=3$ см, $|BC|=4$ см, $|AC|=5$ см та-
нууд. Бүхийн ABC гурвалжинг BD биссект-
рис татна. ABD ба BDC гурвалжинуудад
 $[BD]$ хэрлийн M ба P цэгүүдг шүүрт
тайрнууд багтсан бол $|MP|=?$ см.

24. ABC гурвалжинг талбай 1 см^2 .

$[AD]$ ($D \in [BC]$) хэрлийн CF медианыг
 $4|FM|=|CF|$ байх F цэгт огтлоно. ABD
гурвалжинг талбай ол.

25. ABC тнш өнцөгт гурвалжинг AB
гипотенуз дээр CD өндөр буулгав. $[A-]$ ба
 $[B-]$ хэрлүүдийн AC, BC катетууд дээрх
проекц болох $[AM], [BN]$ хэрлүүдийн ур-
тат гарцаа a болно. AMD, BND гурвал-
жнуудын талбайн гарцааг m .

26. Тнш өнцөгт гурвалжинг гипотенуз
дээр байгуулсан тэнгэр талт гурвалж-
ны талбай ур тнш өнцөгт гурвалж-
ны талбайгаас 2 дахин их бол тнш өн-
цөгт гурвалжинг өнцгүүдийн хамт ол.

27. Гурвалжинг биссектрисүүдийн уртнууд
дун хийлбэр периметрийн хэмжээг их,
периметрээс баян багатай багтал

28. ~~ABCD~~ параллелограммын гадаргуу тэнхлэгийн биссектрисүүд M, R, N, S цэгүүд дээр огтлолцно. Тэгвэл $ABCD$ параллелограммын периметр P , $\hat{A} = 30^\circ$ бол $MNRS$ дөрвөн өнцөгтийн талбайг ол.

29. $ABCD$ ($BC \parallel AD$) трапеций өгөгдөлтэй. A, B өнцгүүдийн биссектрис P цэгт, C, D өнцгүүдийн биссектрис Q цэгт огтлолцно. Тэгвэл $|AB| = 4$, $|BC| = 5$, $|CD| = 3$, $|AD| = 8$ бол $|PQ|$ -г ол.

30. $|AB| = 21$ см, $|CD| = 6$ см сууриуд бүхий $ABCD$ трапеций өгөгдөлтэй. Дунд C ба K цэгүүдийн хооронд байхаар K цэгийг CD шулуун дээр сонгож авч BK шулуун татъя. F нь BK ба AD шулуунуудын огтлолцлын цэг болно. BFA гурвалжны талбай $ABCD$ трапецийн талбайн хэдхэнтэй тэнцүү бол $|DK|$ -г ол.

31. a, b ($a < b$) урттай сууриуд бүхий трапецийн их суурь дэх хоёр өнцгийн тангест нь 90° бол сууриудынх нь дунд цэгийн холбосон хэрчимийн уртыг ол.

32. l , шулуун дээр $A, A_1, \dots, A_n$ цэгүүд, тийрэгтэй параллель l_1 шулуун дээр

38. Кудийн үзүүрт орших хоёр тал-
сын салбасон дуотанамуудын хоорондох
өнгийн ал.

39. Ил хавтгай дээр үл орших
4 оюогдсон цутг илмэй дайнд амьсгд-
сан хавтгай тилгэн орших байх в?

40. 7 ирмүүтэй олон талст орших
байхгүйн батал.

41. Кудийн хавтгай дээрх параллель
проект нь зов 6 өнгөнт байх болох
уу?

42. Кудийн тус тусоороо салбасон 3
ирмүүн дээр орших 3 цугийн дайрсан
хавтгайгаар үл кудийн ололсон оло-
лсон байгуул.

В. Олон урсан математикийн

сүрлийн шинжилгээний бодлого

1978. Бухарест. XX.

Р. Готтингдорф.

1. m, n - нь $n \geq 1$ байх натурал тоонуудын хувьд 1978^m ба 1978^n -үүдийн 10-тын систем дахь бичиглэлийн сүрлийн 3 цифрууд нь харгалзан тэнцүү байв. $m+n$ хамгийн бага утгаа авбал m, n -ийн ол.

2. Олон бөмбөрцөг дээр Р цэг бэлэгджээ. РА, РВ, РС - үүд харшцан $\perp$ байхаар А, В, С цэвүүдийг өгсөн бөмбөрцөг дээрхс авбал РА, РВ, РС - үүдээр тодорхойлогдох параллелизмын диагоналын дунд Р-ийн хэрэг орших цэгийн Q гэж тэмдэглэе. Q цэгийн геометрийн байр ол.

3. Туха хэрэг бүр нь тоонуудын олонлог $\{f_1; f_2; \dots; f_n; \dots\}$ ба $\{g_1; g_2; \dots; g_m; \dots\}$ гэж үн олгогдох хоёр дэд олонлогууднаа нэгдэл болдог ба $f_1 < f_2 < \dots < f_n < \dots$; $g_1 < g_2 < \dots < g_m < \dots$; k -н бүрийн хувьд $g(k) = f(f(k)) + 1$ байдаг бол $f(240)$ -ийн ол.

4. ABC гурвалжин $AB=AC$ байв. ABC -г багтасан тойргийн дотор талас нур-
гасн ба AB -г P , AC -г Q цэг нур-
гасн тойргийн PQ хэвийн дундаж цэг нь
 ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв бай-
но гэдгийг батал.

5. (a_k) , $k=1,2,3,\dots,n$ - нь алаатай эс-
рэг бүрэн тоонуудын дараалал. Натирал
тоо n бүрийн хувьд

$$\sum_{k=1}^n a_k/k^2 \geq \sum_{k=1}^n 1/k \quad \text{тэнцэг бий үгээ-}$$

нийг батал.

6. Олон улсын нэгэн нийлэмжлэлийн ги-
шүүд нь алаатай 6 орноос үржээ ги-
шүүдийн нэрсийн нэгж 1978 хүртэл тоо-
цор алаатайнаар дуаарлажээ. Тэдвэл
ядаж нх гишүүний дуаар нь түүртэй
х орон нэгтэй ал нх хоёр гишүүний
дуааруудын нийлбэртэй тэнцүү эсвэл
х орон нэгтэй нх гишүүний дуаараас
хоёр дахин их байна гэдгийг дотол.

1979, Лондон. XXII.

1. P, Q - нь

$$P/Q = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots - 1/1318 + 1/1319$$

байх натирал тоонууд байр-нь 1979-д

хүснэгтэд батал.

2. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 таван өнцөгт оройтой,
 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 таван өнцөгт суурьтай призм
өгнэ. Эдгээр таван өнцөгтийн бүх та-
лууд болон $A_i B_j$ хэрлмүүд бүх $i, j = 1, 2, 5$
үүдэн хувьд улаан тэвэл нэгдсэн өнгөөр
бүдэгдэнэ. Призмын оройнууд дээр орой-
той бөгөөд бүх талууд нь бүдэгдсэн цур-
валжин бүр ямаатай өнцөгтэй хоёр та-
лыг агуурдан байв. Тэвэл орой бэлгэд сур-
лийн бүх ар'ан тал адил өнгөөр бүдэгд-
сэн үзлийг батал.

3. Хавтгай дээр хоёр тойрог олгог-
цон байрлахээ. Олгогцоллын цэгийн нэг
нь A байв. Хоёр цэг A цэгээс нэг зэрэг
поттисал хурднуудтайгаар нэг шилэнд
тойрог тус бүртгэ тойрон хөдөлнө.
Эн нэг тойрогд A цэг дээр нэг эрэг и-
рв. Тэвэл цэг хоёр цэг хуртмал зай цэг
ашигт тэнцүү байх бөгөөд цэг P
хавтгайгаас алдано үзлийг батал.

4. α хавтгай, түүн дээр орших P
цэг, түүний нэгдэн орших Q цэг тус тус
өгнэ. α дээр орших $(QP + PR) / QR$ хам-

ийн их байх бүх k натурдийн ол.

5.
$$\sum_{k=1}^5 kx_k = a; \quad \sum_{k=1}^5 k^2 x_k = a^2; \quad \sum_{k=1}^5 k^3 x_k = a^3$$

тэнцүүдийн хамтаа ерөө бичиг болж
түү x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 үүд олдог бүх
болж түү a -нуудын ол.

6. А ба Е нь зөв 8 онцлогийн хэрэг
оройнууд болж. Нх мөнхийн А орой дээр
рэг үсрэг хамтээ. Е-гээ өөр ямар о-
рой дээр байсан тэр зүйлсээ оройн хоёр
оройн аль үүд нь ч харагддаг
байв. Харин Е дээр үсрэг олгох тэнд
зогсонг хааш ч үсрэгээ болж. a_n - нь
Е дээр тогдог n үсрэгтийн ямар
тай мөрүүдийн түү бол

$$a_{n-1} = 0, \quad a_n = (1/\sqrt{2})(x^{n-1} - y^{n-1})$$
 итгэж байвал.

Үүнд: $n = 1, 2, 3, \dots, \quad x = \sqrt{2} + 2, \quad y = 2 - \sqrt{2}.$

Тайлбар: n -үсрэгтийн мөр үүд нь орой-
нуудын $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ итгэж гаргасан бо-
лоог

(1). $P_0 = A, \quad P_n = E$

(2) $0 \leq i \leq n-1$ байх i бүрийн хувьд P_i - нь

Е-гээ өөр,

(3) $0 \leq i \leq n-1$ байх i бүрийн хувьд P_i, P_{i+1} -

- үүд нь зэрэгдээ оролцууд мн.

1981. Вашингтон XXIII

1. P -нь өсөн ABC цувралтын доторхи
цн. D, E, F -нь P -н хармалан $BC, CA,$
 AB шулуунд татсан перпендикуляр-н
сүүрв бай

$BC/PD + CA/PE + AB/PF$ нь хамгийн бага
байх бүх P цэвэрүүдийг ол.

2. $\{1, 2, \dots, n\}$ олонлогийн n элементтэй
бүх дэд олонлогуудыг авч үзье, үүнд:
 $1 \leq k \leq n$. Мөн эдгээр дэд олонлогууд дахь
хамгийн бага элементүүдийг авч үзье.

Эрэв $F(n, k)$ эр эдгээр бүх хамгийн бага
элементүүдийн арифметик дунджийг тэн-
дүүлбэл $F(n, k) = (k+1)/(k+1)$ үндсийн бамал.

3. $m, n \in \{1, 2, \dots, 1981\}$ ба $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$
байдал бол $n^2 + n^2$ -ийн хамгийн их ут-
гыг ол.

4. (a). Ямар $n > 1$ үүдсийн хувьд хам-
гийн бага нь үндсн $n-1$ ийнхээ хам-
гийн бага ерөнхийлөн хуваагдагчийг ху-
ваадаг байхаар дараалсан n ширхэг
хэрн бүхэл тоонуудын дараалал алдах
вэ?

(б) Амар нэг үүрийн хувьд дээрх та-
лартай эл хамуухан дараахыг олдох вэ?

б. Осон цувралжин дотор ерөнхий
үн O бүхий түүрх цувран тойрог өг-
чээ. Тойрог бүр үн цувралжны хоёр та-
лан шуруу. Осон цувралжны багтсан
ба багтаасан тойргийн төвүүд бэлэн
 O үн цурав нн шуруун дээр оршиг-
хыг батал.

б. $f(x, y)$ функц нь амар x сөрөг
бич. x, y -ийн хувьд

(1) $f(0, y) = y + 1$

(2) $f(x+1, 0) = f(x, 1)$

(3) $f(x+1, y+1) = f(x, f(x+1, y))$ хамаруудтай
бол $f(4, 1981)$ ийг ол.

1982. Бүдэлдэлт. XXIV

1. f_n функц нь бүх жрн бүрэн n -ийн
хувьд тодорхойлогдсон ба сөрөг бич бү-
хыг тоон утгууд авдаг. Мөн аливаа
 m, n -ийн хувьд

$f(n+1) - f(n) - f(n) = 0$ эсвэл 1 ба $f(x) = 0$,
 $f(3) > 0$, $f(3999) = 3333$ бол $f(1982)$ ийг ол.

2. Адам талт бич цувралжны A_1, A_2, A_3 -
ийн A_i өнүгийн эсрн орших талын

a_i үн, $i=1,2,3$. M_i нь a_i талын дундаж үн ба T_i нь A_1, A_2, A_3 гурвалжинд байсан тойргийн a_i талын ширхэгт үн бөгөөд T_i шийн A_i өнцгийн (дотроод) биссектрис дээрх проекц нь S_i багал, $i=1,2,3$. Тэгвэл M_1S_1 , M_2S_2 ба M_3S_3 ууд нь тэнцүү гүйшн батал.

3. Зөрл бодит тоон, уудон:

$x_0=1$ ба $i \geq 0$ бүрийн хувьд $x_{i+1} \leq x_i$ байх тогтоолри дараалал (x_n) -ийн авгц уус.

(а) Ийм дараалал бүрийн хувьд $x_0^2/x_1 + x_1^2/x_2 + \dots + x_{n-1}^2/x_n \geq 3,999$ байх $n \geq 1$ дураар олдохыг батал.

(б) Бүх n -ийн хувьд $x_0^2/x_1 + x_1^2/x_2 + \dots + x_{n-1}^2/x_n < 4$ байдал ямар ч дараалал ол.

4. n нь $x^2 - 3xy^2 + y^3 = n$ тэнхлэгт бүхэл тоон хос (x, y) шийдтнн байдал хрл бүхэл тоо бол нэ тэнхлэгт я дагс гурван бүхэл тоон шийдтнн гдгшн батал. $n=2891$ үед энэ тнхлэгт бүхэл тоон шийдгүрн гдгшн үзүрл.

5. Зөв зургаан өнцөгт ABCDEF ийн AC, CE диагоналууд нь харгалзан дотроод ийн M ба N үүдээр

$$AM/AC = CN/CE = \tau \text{ байхаар хуваагдана.}$$

Хэрэв B, M, N цэгүүд нэг шугуун дээр оршигдвал 7-ийн утгын ал.

6. S нь 100 нт-тэй толгой квадрат ба L нь S доторхи өөрийнөөс огтлоогүй $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ эрэмүүдээс тогтох тохир шугам. $A_0 \neq A_n$. S-ийн ямар ч ийн P-ийн хувьд түүнийг $1/2$ оос хамуу зайнд орших ийн L-тэй огтлодог болов. Тэгвэл L дээрх хоорондох зай нь 1-тэй хамуу байх боловч тэдгээрийн хоорондох L тохир шугамын хамгийн урт нь 198-аас багагүй байх хоёр ийн огтлодог нт батал.

1983. Түрлж. XXV

1. Зэрл бодит тоонуудын олонлог дээр тодорхойлогдсон энэ олонлогт утгаа авдал дараах нөхцлүүдийг хангадал бүх f функцуудийн ал.

(1) Бүх зэрл x, y -ийн хувьд $f(x \cdot f(y)) = y \cdot f(x)$

(2) $x \rightarrow +\infty$ үед $f(x) \rightarrow 0$.

2. A -нь гаралзан O_1, O_2 цэвэрхэд
товчгүй нп хавтгай дээр орших тэнхүү
бүх хоёр тойрог C_1 ба C_2 -ийн огтлолц-
сон явцтай A цэгийн нп нь болох.

Эдгээр тойргийн нп ерөнхий шүрлэг
нь C_1 -ийн P_1 , C_2 -ийн P_2 цэгт, нөгөө
нп ерөнхий шүрлэг нь C_1 -ийн Q_1 , C_2 -ийн
 Q_2 цэгт шүрлэнэ. M_1 нь P_1O_1 -ийн, M_2
нь P_2O_2 ийн дундаж цэвэрхэд бол
 $\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$ гэтл батал.

3. Аль ч хоёр нь 1-тэй их ерөнхий
хувьцалтай эерх бүрэл тоонууд a, b, c
оготдот. Тэгвэл $2abc - bc - ca - ab$ нь
 $x^2 + y^2 + z^2$ хэлбэртэй бичигдэхгүй
хэлхийн их бүрэл тоо тэгшийн батал.
Үүнд: x, y, z - нь сөрөг бич бүрэл
тоонууд юм.

4. ABC нь тэнхүү талт гурвалжин
боловд E нь AB, AC, BC хэргүүд дээр
орших (A, B, C -г оруулаад) бүх цэвэрх-
дгийн олонлог. E -г лав ч үл огтлолцох
хоёр дэд олонлогт хуваасан явдал нп
дэд олонлогоос нь тэнх өнцөгт гур-
валжны оройнууд болох гурван цэг олж.

болоод байх уу? Хариултаа батал.

5. Аль э урав нь арифметикийн прогресс үүсгэхийг, тус бүр нь 10^5 -н хэтгэхийг 1983 ширхэг аялалтай нэр бүрэл тус сонгон авч болох уу? Хариултаа батал.

6. а, в, с үүд нь нэг үүсвэлхний тоолын уртнууд бол

$$bc^2(b-c) + c^2a(c-a) + a^2b(a-b) \geq 0$$
 гэдгийг батал. Тэгнийг тэнцэл биелэхийг тодорхойл.

1984. Прага, XXV.

1. x, y, z -нх сөрөг биш бодит тоонууд болоод $x+y+z=1$ байв.

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$$
 байхыг батал.

2. Дараах ханарны хангаж натурал тооноос тогтох ямар нэг (a, b) хосыг заа. Үүнд:

1) $ab(a+b)$ нь 7-г хуваагдана;

2) $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ нь 7^7 хуваагдана.

Хариултаа үндэслэ.

3. Хавтгайд O ба A гэсэн аялалтай хоёр цэг огтлогддог. Энэ хавтгайн

О-гоос ялгаатай X нэг бүрийн
 хувьд. $\exists \text{ } \forall OX$ онцгойн радианаар
 ширхмийдэгдэн. $\exists \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \text{ } \alpha(X)$
 гэж тэмдэглэв ($0 \leq \alpha(X) < 2\pi$).
 Үүнд $\alpha(X)$ -онцог $O\alpha$ цацргаас
 эхлэн цагийн зуурийг эерэг
 тоолдоно. $C(X)$ -ны $OX + \frac{\alpha(X)}{OX}$
 радиустай, O төвтэй тойрог
 байг. Төгсгөлөг тоонд өгөг
 өгөгдсөн бөгөөд хиймэлийн үзэгдэл
 эдгээр өнгийн аль нэгээр будагдана.
 $\alpha(Y) > 0$ ба $C(Y)$ тойрог дээр Y -
 тнй адил өнгийн ядам нэг
 үзэг байхаар Y үзэг оршин
 байхыг батал.

1. $ABCD$ цугтар дөрвөн
 онцогтийн хувьд CD шугуун
 AB диаметртай тойргийг шир-
 гэнэ. AB шугуун CD
 диаметртай тойргийг
 ширгсэн байх гарцаагүй
 бөгөөд гурвалзтай нөхцөл
 $BC \parallel AD$ гэж батал.

5. d -нь хавтгай дээрх гүдгэр n -өнцөгтийн, бүх диагоналын нийлбэр, p -түрний периметр, $n \geq 3$ байг.

$$n-3 < \frac{2d}{p} < \left[\frac{n}{2} \right] \cdot \left[\frac{n+1}{2} \right] - 2$$

байхыг батал. ($[x]$ -нь x тооны бүхэл хэсэг).

6. a, b, c, d -нь дарааж нөхцлүүдийг хангах сондгой бүхэл тоонууд.

үүнд: а) $0 < a < b < c < d$:

б) $ad = bc$

в) $a+d = 2^k$, $b+c = 2^m$, үүнд

k, m эгээр нэг бүхэл тоо: $a=1$ гэж батал.

1985. Хельсинки, XXVI.

1. Тойрогт багтаанс болох $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгт өгөгджээ.

AB тал дээр төвтэй эгээр нэг тойрог түүний нөгөө гурван талыг шүргэсэн бол $AD+BC = AB$ байхыг батал.

2. n ба k ($0 < k < n$) харилцан анхны бүхэл тоонууд. $M = \{1, 2, \dots, n-2, n-1\}$ олонлогийн тоо бүрийг дарааж нөхцлүүд биелэгдэн байхаар эсвэл хоо, эсвэл

улаан ангиар бүтнээ. Чунд:

(а) М олонлогийн i -тоо бүрийн хувьд i ба $n-i$ эер тоо нэг онгоор бүтнэгдэнэ;

(б) М-олонлогийн k -аас ялаатай i -тоо бүрийн хувьд i ба $|k-i|$ хоёр нэг онгоор бүтнэгдэнэ.

Мэвэл М-ийн дүр тоо зовлон нэг онгоор бүтнэгдэн байхыг батал.

3. Бүхэл тоон коэффициенттэй $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$

олонгичуунтийн сондгой тоо байх коэффициентийн тоог $w(P)$ гэж тэмдэглэв.

$$Q_i(x) = (1+x)^i \quad i=1, 2, 3, \dots$$

Хэрэв $i_1, i_2, \dots, i_n$ бүхэл тоонууд

$$0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n$$

хэлбэрт байвал

$$w(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \dots + Q_{i_n}) \geq w(Q_{i_2})$$

байхыг батал.

4. 1985 ширхэг ялаатай натураа тооноос тогтох М олонлог ологджээ. М-ийн аль тооны анхны тоон хуваагчид нь 25-аас

ихий. М олонгоос, үрнэг нь
бүхэл тооны дөрвөн хөрөст байх.
Эмгэгтэй дөрвөн тоог сонгон
авч болохыг батал.

5. ABC гурвалжин, түүний
А ба С өрнөг багас AB, BC талуудыг
харгалзан, эмгэгтэй, К ба
N үзэгдэр өртлөх О төвийг
тойрог олохыг. ABC ба KBN
гурвалжинүүдийг багтаасан тойр-
гууд В ба М гэсэн зовхон хоёр-
хон ерөнхий үзэгтэй бол $\angle OMB$
тэгш өнцөг гэдэг батал.

10. Олон улсын математикийн XXVII
Олимпиадад БНМАУ-аас дэвшүүлсэн
бодлогууд (1986 он).

Д. Ламинсов

- ①. (А. Танбаатар МУИС). a, b, c, d талууд
тай, S талбай бүхий тойрог бөг-
төөдөг үүргээр дөрвөн өнцөгт

$$S \leq \sqrt{abcd}$$

тэнцэтгэлдүүнийг хангана гэж батал.
Хэдийг тэнцэтгэлдээ хүрэх вэ?

- ②. (Ц. Дагдорж МУИС) $x_1, x_2, \dots, x_n$
хувьсгалдот хувьд бараах тэгшит-
гэлүүдийн системийг бод:

$$\begin{cases} \lg x_1 + \lg x_1 = 3 \lg x_2 \\ \lg x_2 + \lg x_2 = 3 \lg x_3 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \lg x_n + \lg x_n = 3 \lg x_1 \end{cases}$$

- ③. (Д. Ламинсов МУИС). v, V, n - натурал
тоонууд байг. $x_1 + x_2 + \dots + x_n = v$
тэгшитгэлийн $x_1 \leq V, x_2 \leq V, \dots, x_n \leq V$
нөхцөлийг хангах сөрөггүй бүхэл
тоон $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ шийдийн тоог

$S(z, v, n)$ - дээр тэмдэглэв.

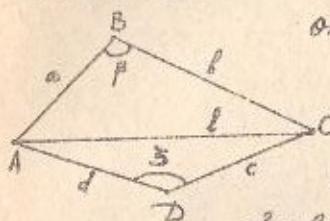
$$S(z, v, n) = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_n^k C_{z-(v+1)k+n-1}^{n-1}$$

гэх батал. Энд $m = \min\{n, \lfloor \frac{z}{v+1} \rfloor\}$.

④. (Р. Тонгигэрж МУИС). Дараах ньхилийг хакгадаг хамгийн бага n натурал тоог ол. Үүнд: Ерөнхий байрлалтай, нэгэн хэвтгэв дээр орших 8 цэг ба тэдгээрийг хайрлах n хэрглийн хувьд дөр хэдгэ дөрвийг нь дотроод цэгээр цэгээр огтлох шулуун орших байна.

⑤. (А. Мекей МУИС). $2 \leq n$ орохтой, тэгээс эхлээтэй цифруудээр бүтээгдэх $M = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ тоо, $1 \leq k \leq n-1$ дугаар хоёрын хувьд M_k тоог $M_k = \overline{a_{k+1} \dots a_n a_1 a_2 \dots a_k}$ гэж тодорхойлж $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ тоонуудад нэгэн зэрэг хуваагдах бүх M тоонуудыг ол.

① Додлогын додолт. $\triangle ABCD$ гурвал зорьч
 онцгой тогтоол багтаар
 тус $a+c=b+d$.



Экээс $a-b=d-c$

улам аар

$$a^2+b^2-2ab = d^2+c^2-2dc \quad (1).$$

b диагональн хувьд косинусын теоремыг
 хоёр янзаар бичигдсн хооронд нь тэнцүүлвэл

$$a^2+b^2-2ab \cos \beta = d^2+c^2-2dc \cos \gamma \quad (2).$$

(1) ба (2) тэнцэтгэлүүдээс

$$ab(1-\cos \beta) = dc(1-\cos \gamma).$$

Энд хэлээс онцгойнхнх синусынхнх томилоо
 ашиглавал $ab \sin^2 \frac{\beta}{2} = dc \sin^2 \frac{\gamma}{2} \quad (3).$

$$S = \frac{ab \sin \beta}{2} + \frac{dc \sin \gamma}{2} = \frac{ab \sin \beta + dc \sin \gamma}{2}$$

$$\stackrel{(3)}{=} \frac{ab \sin \beta + ab \sin \gamma \cdot \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}}{2} =$$

$$= \frac{ab}{2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} \left(\sin \beta \sin^2 \frac{\gamma}{2} + \sin \gamma \sin^2 \frac{\beta}{2} \right) =$$

$$= \frac{ab \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \left(\cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) =$$

$$= ab \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \sin \frac{\beta+\gamma}{2} \stackrel{(3)}{=} ab \sqrt{\frac{a-c}{ab}} \sin \frac{\beta+\gamma}{2} =$$

$$= \sqrt{abcd} \sin \frac{\beta + \gamma}{2}$$

$$S = \sqrt{abcd} \sin \frac{\beta + \gamma}{2}$$

Эндээс $S \leq \sqrt{abcd}$ байх нь шууд харагдаж байна. Цаашигдвал

$$S = \sqrt{abcd} \Leftrightarrow \sin \frac{\beta + \gamma}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$\Leftrightarrow \beta + \gamma = \pi$. Өөрөөр хэлбэл өгөгдсөн гүдгэр дөрвөн өнцөгт тойрогт дэгтдэг байх зовлон тэр үед дийнхий сөрүр-хонж байгаа $S \leq \sqrt{abcd}$ тэнцэтгэлдүү тэнцэтгэлдээ хүрнэ.

(2) Бодлогын бодолт. $\triangleleft$ $tg x_k = y_k$ орлуулга хийвэл өгөгдсөн систем хэлбэртэй болно.

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= \frac{1}{3} \left(y_1 + \frac{1}{y_1} \right) \\ y_3 &= \frac{1}{3} \left(y_2 + \frac{1}{y_2} \right) \\ &\vdots \\ y_n &= \frac{1}{3} \left(y_{n-1} + \frac{1}{y_{n-1}} \right) \\ y_1 &= \frac{1}{3} \left(y_n + \frac{1}{y_n} \right) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \\ (1) &\text{Функциудийг дараах} \\ &\text{байдалаар тодорхойлж,} \\ &\text{Функц: } \varphi_1(x) = \frac{1}{3} \left(x + \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(\varphi_1(x)), \varphi_3(x) = \varphi_1(\varphi_2(x)), \dots, \varphi_n(x) = \varphi_1(\varphi_{n-1}(x))$$

$\varphi_n(x)$ функцийг тусламж-тайгаар (1) системийг (2) системийн хэлбэртэй бичиж болно.

$$(2) \begin{cases} y_1 = \varphi_n(y_n) \\ y_2 = \varphi_n(y_2) \\ \vdots \\ y_n = \varphi_n(y_n) \end{cases}$$

ийнхүү (1) системийн шийд бүхэн
 (2) системийн шийд болно. $\varphi_1(x) > 0$
 тул (1) системийн $(y_1, y_2, \dots, y_n)$
 шийд бүхэн эсвэл $y_1 > 0, y_2 > 0, \dots, y_n > 0$,
 эсвэл $y_1 < 0, y_2 < 0, \dots, y_n < 0$ байна.
 $x = \varphi_1(x)$ тэгшитгэл шор ганц бодит
 шийдтэй ба $x = \varphi_1(x) \Rightarrow x = \varphi_2(x)$ байн
 тул (2) системийн шийд нь
 $(a, a, \dots, a)$, $(-a, -a, \dots, -a)$ хоёроор ша-
 хадна. Энд a нь $\frac{1}{2}(\varphi_1 x + \varphi_2 x)$
 тэгшитгэлийн шийд.

③ Бодлогын бодвол, Δ $u \leq v$ үед
 $x_1 \leq v, \dots, x_n \leq v$ эскалартай хэрэггүй
 болох тул $S(u, v, n)$ -ийн ерөнх $S(u, n)$
 гэж бүтэц олохдог. Энд үед

$$S(u, n) = C_{2+n-1}^n \quad (1).$$

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = u$ тэгшитгэлийн
 $x_k > v$ хэмжээг хаксах сөрөгбүлэ бүт-
 тэсн $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ шийдүүдийн олон-
 цоог A_k гэж тэмдэглэе ($k=1, 2, \dots, n$).

$$S(u, v, n) = C_{2+n-1}^n - \left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| \quad (2).$$

тэгшитгэл бүтэцэд нь хэрхэн.

Нэгтгэл эскаларах зорилго ёсоор

$$\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_k \quad (3). \quad \text{Энд } S_k \text{ нь}$$

k рангийн нийлбэр:

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| \quad (4).$$

Хэрэв $(v+1)k > 2$ байвал $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k} = \emptyset$ болж улмаар $S_k = 0$ байх тул

$$\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} S_k \quad (3').$$

$(v+1)k \leq 2$ байх үед (1) ёсоор

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = C_{2-(v+1)k}^{2-(v+1)k} = C_{2-(v+1)k+n-1}^{n-1}.$$

Энэ олсон утгыг (4) томъёонд оруулвал

$$S_k = C_n^k C_{2-(v+1)k+n-1}^{n-1} \quad (5).$$

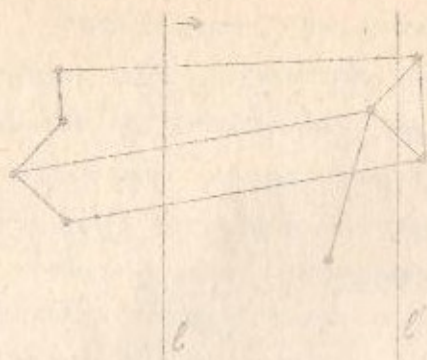
Бодлогын эцсийн хэсэг (5), (3') ба

(2) томъёонуудаас шууд гэрээ байна ▽

④ Бодлогын бодолт ▽ Нэг дууриал нь татагдсан гурвал найман онгоцтойг ямар нэг шүүмэл их бодом гурвал цуглур огтлох тул $n \geq 10$. $n=10$ нь бидний хайж байгаа тоо болохыг батлав. Хэрэв дөрвөн цэгнийг дөрвөн хэргэмээр холбосон байвал эдгээр хэргэмийн хэдээр нь хнийг хийсэн бүтүү мунд ямар нэгэн олддог.

Угшээс таван хэргээр холбогдсон
дөрвөн үнэ байвал дараах хоёр нонц-
лын эдэж нэг нь бүслэгдэнэ: а) Эдгээр
таван хэргийн дор хэвс дөрвийг
нь огтлох шулуун олдоно, б) Эдгээр
таван хэргийг дайрсан шулуунуудын
алс нь дээрх үнэ орших дурьд үзгээс
эж үзгийг дайрсан, дээрх таван хэрг-
ийн хэвс дөрвийг нь огтлох шулуун
олдоно. Цаашигбал ерөнхий талгуу
хоёр битүү олонхонд олдоно байвал
тэдгээрийн дөрвөн талс нь огтлох шу-
луун олдох нь үзэгдэнэ.

Өгөгдсөн арван хэргийнхний параллель
бүлэг-л шулууныг өгөгдсөн найман
үзэг түүний хоёр талд дөрөв дөрвөртэй
байхаар тэмдэг. Өмнө хрссан ёсоор
(зургийг анхаар) зууч дөрвөн үзэг нь гур-
ван хэргээр дараалах холбогдсон, баруун
дөрвөн үзэг нь дөрвөн хэргээр холбогдсон,
л шулууныг огтлох гурван хэргийн нь
өөр өөр баруун тэгсэлтэй байх зөвхөн
эж тэгсэлтэй өвг үзэгдэх тэгсэлтэй.



Одоо ℓ шулуун
баруун тал
«баруун тал руу
хөөр хэргийн гар-
сан шугамыг өнц-
рөх хүртэл»
 ℓ параллель зөөв.

Баруун талд бүтүү хэсэг байгаа тул
олонх зөөлтийг элэгт гүйцэтгэж байна.
Урьдхуу орогдсон 10 хэргийн эдгээс зөр-
вийг нь огтлох ℓ' шулуун олдоно.

⑤ Бодлогын бодолт Үнэмлэхэн шифрүү-
дээс тогтсон M тоо бодлогын нөхц-
лийг хангах нь үлэрхий. Үүн тоо
есөн шифрээг байна. Эдгээр есөөс зөр
тоо бодлогын нөхцлийг хангахгүй шү-
гийг эсрэгээс нь батлав. M нь бодо-
лын нөхцлийг хангадаг, эдгээс хоёр я-
лгаатай шифр бүхий натурал тоо
байг. M нь M_k тоонд аялагдах тул
 $a_i \geq a_{k+i}$ ($k=1, 2, \dots, n-1$). Цаашиндаа $a_i=9$
болгов эсвэл $a_i=8$ бэхэд M тоонд ба-
лзгт харгалзан 9, 4, 3, 2, 1; 8, 4, 3, 2, 1 шиф-

рүүдээс 1 орж болно. Чухтай адил $a_1=7$ юммуу $a_1=6$ үед 7,3,2,1; 6,3,2,1; $a_1=5$ юммуу $a_1=4$ үед 5,2,1; 4,2,1; $a_1=3$ юммуу $a_1=2$ үед 3,1; 2,1 цифрүүдээс 1 харагдсан M тооний бүлэгт орсон байхыг болно. Тохиролдол дүр нь $a_1 a_2 \dots a_n = a_2 a_3 \dots a_n a_1 \cdot K$ тэнцэтгэлийн улмаас зорилдо хүрнэ.

1986 оноос өмнө олон улсын математикийн олимпиадад ^{олимпиад} дэвшигч байсан бодлогчудад дөр томиоогддог.

⑧ (А. Мехей) $n \geq 4$ үед n хэвтэйд дээр үе орших $n \geq 4$ үед хэвтэйд дээр өнгөтнээ. Эдгээр хэвчүүд дээр оройнтой C_{n-3}^2 -аас хэвчгүй тооний гүдгээр дөрвөн өнгөтүүд өгдөггддөггд батал. (Х1 олимпиадад ^{олон улсын} шийтгэн оржээ).

⑨ (Р. Тонгигдорж) p периметр бүхий n гүдгээр өнгөтнсийн ($n \geq 3$) бүх өнгөтнсийн хуудын нийлбэрийг d гэвэл

$$n-3 < \frac{2d}{p} < \left[\frac{n}{2} \right] \left[\frac{n+1}{2} \right] - 2$$
 тэнцэтгэлийн бүлэгдэхийг батал

(Энэ бодлого олон улсын математикийн 15-р олимпиадад шийтгэн оржээ. Квант

1984 №12 45-р хуудас)

(10) (Р. Тонгидорж) 26-аас их анхны тоонд үн хуваагдах 1985 өмнөхөг ма-
туран тоо өмдөгжээ. Эдгээр тоон дот-
роос геометр дундаг нь натурал тоо
байх дорвон алгатай тоо олдохон
баттал.

(Энэ бодлого олон улсын математикийн
26-р олимпиадад шилэгдэн оржээ.
Квант 1985 №12 мөст, 46-р хуудас, Квант
1986 №4 36-37-р хуудас).

(11) (Т. Энхболд) Зов н өмдөгтийн орой
дур дээрээс нэг нэг машин нэгэн шилдэг
агил тогтмол хурдтайгаар н өмдөг-
тийн талчуд дээгүүр зэрэг тогтмол
хөдлөжээ. Хэрэв А орой дээр нэг удаа
дур машин зэрэг таларалсан бол өөр
орой дээр тэд хэзээг нэг дор шилдэгх-
гүй гэдгийг батал. А орой дээ, тэд
захин шилдэгх болохуу?

(12) (Р. Тонгидорж). $f_1 = (a_1, a_2, \dots, a_n)$
($n \geq 2$) нь дурал тоон дараалал. f_1
ээс эхлэн f_k дарааллуудыг дараах

замаар байгуулна. Хэрэв $f_k = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ бол $f_{k+1} = (c_1, c_2, c_2+1, c_2+1, \dots, c_n+1)$ гэж тодорхойлно. Энэ $i_1, i_2, \dots, i_n$ нь $1, 2, \dots, n$ -ээс зохиогдсон ямар нэг сэлгэмэл юм. Ямар нэг f_k нь тогтмол байх гаргалууд бодод хүргэгдэхтэй нөхцөлийг f_k -ийн тусламжтайгаар тооцвол.

(13) (Р.Тонгидорк, Д.Цоххтор) B_1 ,

E , O цэгүүд нь харгалзан ABC гурвалжны AC , AB , BC тал дээр хэвтнэ ба EO нь AC -тэй параллель байв. Хэрэв EO нь ABB_1 гурвалжны багтсан тийргийг хүргэдэг ба BB_1 хэрчимийг F цэгт огтолдог бол $\angle = \angle_1 + \angle_2$ болохыг батал. Энэ $\angle_1, \angle_2$ нь харгалзан ABC , ABB_1 , BFC гурвалжны багтсан тийргийн радиус.

(14) (П.Энхболд) ABC гурвалжны дотор орших дүрвэг P цэгийн хүнд AP , BP , CP цуцлууд эсрэг талтай өстөх цэгийг харгалзан $A(P)$, $B(P)$, $C(P)$ гэж тэмдэглэв. $A(P)$, $B(P)$, $C(P)$ гурвалжны хамгийн их талбайтай байх P цэгийг байгуул.

УЦУАУЕГ-ЫН ФОТО-ОФСЕТ ХЭВЭЭЛ
ЗАХИААЛГЫН ДУГААР 195-88 2200 III

Улаанбаатар хот

Бага тойрог 11