

МОН МАТЕМАТИКЫН ХХН ОЛИМПИАДЫН
7 ДУГААР АНГИЙН ТҮРЭН БАРААН
БОЛЛОО

Б.Чулуунорж

А1. Бүхэл коэффициенттэй $ax^2 + bx + c = 0$
квадрат тэгшитгэлийн дискриминант 1987-той тэнцүү
байх болохыг батал.

А2. $x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} = 5$ тэгшитгэлийг бод.

А3. ABC гурвалжны $\angle A = 2\angle B$ бол
 $BC^2 = (AC + AB)AC$ болохыг батал.

Б1. Гурвалжны галууд a, b, c байг.

$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$ болохыг батал.

Б2. $xyz = 1$
 $\frac{1}{1+x+xy+xyz} + \frac{1}{1+y+yz+yx} + \frac{1}{1+z+zx+zy} +$
 $+\frac{1}{1+x+yz+xy}$
нийлбэрийг ол.

Б3. Хөвтгөл дээр аль ч 3 нь нэг шулуун дээр үл орших,
бүгд нэг тойрогт үл оршигч 4 нэг бүчэр. Эцгээрийн
нэг дээр төвгөй зөвхөн нэгийг нь дайрсан тойрог
оршин байх уу.

А1 бодлогын бодолт

$D = B^2 - 40C$ тул D ба B^2 4-д хуваахад тэнцүү үл-
цэлтэй байна. Иймд $D=1987$ гэвэл 4-д хуваахад 3
үлцэгцэл гарна. B - сонлигой тул B^2 нь 4-д хуваахад
үлцэгцэл нь 1 гарна. Иймд $D \neq 1987$ гэдэг нь батлагдлаа.

А2 бодлогын бодолт.

Уг тэгшитгэлийн эхүн гар талыг дараах байцлаар хувирган
бүтэн квадрат ялгая.

$$\left[(x^2 + 4x + 4) - 4x + \left(\frac{2x}{x+2} \right)^2 \right] - 4 = 5 \quad \text{буюу}$$

$$\left[(x+2) - \left(\frac{2x}{x+2} \right) \right]^2 = 9 \quad \text{тул эндээс}$$

$$(x+2) - \left(\frac{2x}{x+2} \right) = \pm 3; \quad x+2 - \frac{2x}{x+2} = 3 \quad \text{бол}$$

$$x^2 + 4x + 4 - 2x = 3x + 6 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \quad \text{эндээс}$$

$$x_1 = 2, x_2 = -1 \quad \text{болно.} \quad x+2 - \frac{2x}{x+2} = -3 \quad \text{бол}$$

$$x^2 + 4x + 4 - 2x = -3x - 6 \Rightarrow x^2 + 5x + 10 = 0 \quad D = -15 < 0$$

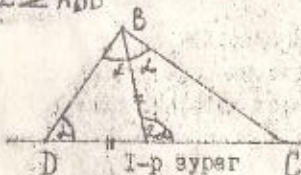
тул бодит шийдгүй. Иймд тэгшитгэлийн шийд $x_1 = 2, x_2 = -1$
байна. Үүнтэй адил бодолтыг Төв аймгийн сурагч Б.Алтансүх
хийсэн. Бусад сурагчин гүйцэтгэхүйн бодлогын задлах аргаар
бодсон байлаа.

А3 бодлогын бодолт.

Энэ бодлогыг хамгийн оновчтой цет аргаар Архангай аймгийн
сурагч Д.Мөнхбат болон бодсон байна. Одоо бид энэ бодолтыг
авч үзье. AC шулуун дээр $AB = AD$ бийх

$$D \text{ цэгийг тэмдэглэе. } \angle BAC = \angle ADB + \angle DBA =$$

$$= 2 \angle ADB$$



$$\angle DBA = \angle ADB = \alpha$$

$$\angle C \text{ өрөнхий } \angle BAC = \angle BDC$$

$$\text{тул } \triangle ABC \sim \triangle BDC$$

Эндээс төсөөтэй гурвалжны хэргэлсэн талуудын харьцааг бичвэл

$$\frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow BC^2 = DC \cdot AC$$

$(AD+AC)AC = (AB+AC)AC$ болж батлах үгүйс
батлагдана.

В1 бодлогын бодолт.

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{2a}{2(b+c)} + \frac{2b}{2(a+c)} + \frac{2c}{2(a+b)}$$

a, b, c - үлд гурвалжны талууд тул $a+b > c$, $a+c > b$, $b+c > a$

$$\begin{aligned} &\text{тул үүнийг амилгавал} \quad \frac{2a}{2(b+c)} + \frac{2b}{2(a+c)} + \frac{2c}{2(a+b)} \\ < \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b &> c \\ a+c &> b \\ b+c &> a \end{aligned}$$

болж батлах төсөөтэйгээ бич батлагдана.

В2 бодлогын бодолт

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+y+yz+yzx} &= \frac{x}{x(1+y+yz+yzx)} = \frac{x}{x+xy+xyz+1} \\ \frac{1}{1+z+zx+zxz} &= \frac{xy}{xy(1+z+zx+zxz)} = \frac{xy}{xy+xyz+1+x} \\ \frac{1}{1+x+zx+zxz} &= \frac{xyz}{xyz(1+x+zx+zxz)} = \frac{xyz}{xyz+1+x+xy} \\ \frac{1}{1+x+xy+xyz} &+ \frac{1}{1+y+yz+yzx} + \frac{1}{1+z+zx+zxz} \\ + \frac{1}{1+x+xy+xyz} &= \frac{1}{1+x+xy+xyz} + \frac{x}{x+xy+xyz+1} + \\ + \frac{xy}{xy+xyz+1+x} &+ \frac{xyz}{xyz+1+x+xy} = 1 \end{aligned}$$

$$2b+2c = b+b+c+c$$

$$\begin{aligned} a+b &> c \\ a+c &> b \\ 2a+b+c &> b+c \end{aligned}$$

Нэгэн сурталчид яг үүнтэй төстэй бодолт хийсэн байлаа.

В3 бодлогын бодолт.

Нийм тойрог оршин байхыг батална. Үлдэх 3 цэгтээ хамтдаа зөв

$$2a+2c = a+a+2c$$

байхгүй юм. А цэгийг сонгон авъя. Энэ цэгээс аль 1 цэг
 зүгтэлх вэ? Бусдаас их бол бодлогын нөхцөлийг хангах тойрог
 шууд олноо. Иймд уг тойрог дээр аль нэг 2 цэг оршиж үлдэх
 цэг нь уг тойрог дээр оршиггүй байх бол олох ёстой тойрог
 нь А цэгээс дусадтай харьцангуй хамгийн ойр байх орших
 цэгийг дайрсан тойрог, олох ёстой тойрог болно. Одоо 3 цэг
 А дээр төвтэй тойрог дээр орших тохиолдол үлдээ.
 / 2-р зургийг үз/



2-р зураг

Тэгвэл В дээр төвтэй
 АВ радиустай тойрог бод-
 логын нөхцөлийг хангах
 нь өмөрхий. Үүнтэй төс-
 төй бодлогыг 7-р ангийн
 олимпиадын улсын аварга
 Улаанбаатар хотын сурагч
 А.Бат-Олзий хийсэн.

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХШ ОЛИМПИАДЫН
ҮШ АНГИЙН ГҮРВЫН ДАВААНЫ БОДЛОГО

Б.Адъяасүрэн
Ц.Батхүү

✓ А1. ABC зөв гурвалжны дотор O цэгийг $\angle AOB = 118^\circ$,
 $\angle AOC = 119^\circ$ байхаар авчээ. Талын нь уртууд AO, OB, OC хэрч-
мүүдийн урттай тэнцүү байх гурвалжны өнцгүүдийг ол.

А2. $x^2 + 19874^2 = z^2$ тэгшитгэл натурал тооны
олонлогт төгсгөлгүй олон шийдтэй болохыг батал.

А3. Самбарт $1, 2, 3, \dots, 1986$ гэсэн 1986 ширхэг
тоонууд бичигдсэн байв. Сурагчид өдгөөр тоонуудаас аль нэг
хоёрыг дарж оронд нь ялгаврын абсолют хэмжигдэхүүнийг бичих
процессийг ганц тоо үлд x хүртэй үргэлжлүүлэв. Үлдэх ганц тоо
нь тэг байх болох уу?

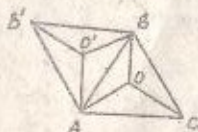
В1. α параметрийн ямар утганд $x^2 - 2\alpha - \alpha^2 + 1 = 0$
тэгшитгэлийн язгуурууд $x^2 - 2(\alpha+1)x + \alpha(\alpha-1) = 0$ тэгшит-
гэлийн язгууруудыг хооронд орших вэ?

✓ В2. Тус бүрийн цифруудын нийлбэр 35-д хуваагддаг
дэс дараалсан натурал хос тоонууд төгсгөлгүй олон болохыг
батал. Мөн 35-ыг 1988-аар солиход нөхцөл биелэхийг үзүүл.

В3. Ад..л хажуут гурвалжны суурийн аливаа цэгээс
түүний хажуу талуудад буулгасан перпендикулярруудын уртын
нийлбэр суурийн нэг оройгоос нь хажуу талд нь буулгасан
өндөртэй тэнцэхийг батал.

11. Бодлогын бодолт

Бид OA, OB, OC хэрчмүүдийн урттай тэнцүү талуудтай гурвалжныг үүсгэх зорилго тавьж: A цэгт төвтэй 60° өнцөг бүхий эргүүлэлтийг авч үзье. Энэ эргүүлэлтээр C цэг B цэгт шилжинэ.



3-р зураг

Харин B, O цэгүүд харгалзан B', O' цэгүүдэд шилжсэн байг / 3-р зураг / эргүүлэлтээр эвч хадгалагдах учраас $AO' = AO, O'B = OC$ байна. Бидний авч үзэж буй эргүүлэлтээр O цэг O' цэгт шилжих тул $\angle OAO' = 60^\circ$. Ийнхүү $\triangle AOO'$ гурвалжин эвч гурвалжин байна.

Иймд $AO = AO' = OO'$. Ийнхүү $O'BO$ гурвалжин нь бидний хайж буй гурвалжин болно. Энэ гурвалжны өнцгүүдийг олъё.

$\angle AOB = 118^\circ, \angle AOO' = 60^\circ$ тул $\angle BOO' = 118^\circ - 60^\circ = 58^\circ$ болно. Эргүүлэлтээр өнцгийн хэмжээ хадгалагдах учраас байна. $\angle AOO' = 60^\circ$ тул $\angle BOO' = 119^\circ - 60^\circ = 59^\circ$ болно. $\angle O'BO = 180^\circ - (58^\circ + 59^\circ) = 63^\circ$. Ийнхүү тални нь уртзуд AO, OB, OC хэрчмүүдийн урттай тэнцүү байх гурвалжны өнцгүүд $58^\circ, 59^\circ, 63^\circ$ байна.

12. Бодлогын бодолт

Төгсгөлгүй шийдийн дотор хамааралтай шийдүүдийг тооцохгүй, Өгөгдсөн тэгшитгэлийг $1987y^2 = z^2 - x^2$ буюу

$$1987y^2 = (z+x)(z-x) \quad (1)$$

хэлбэрт хувиргаж.

I/ y тэгш байг. Тэгвэл x, z сондгой байх болно. Иймд $y, z+x, z-x$ нь тэгш байна. (1) тэгшитгэлийн 2 талыг 4-д хуваавал

$$1987\left(\frac{z}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(z+\alpha) \cdot \frac{1}{2}(z-\alpha) \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}(z+\alpha) = m, \quad \frac{1}{2}(z-\alpha) = n, \quad (3) \text{ гэе.}$$

$$(2) \text{ тэгшитгэлээс } 1987\left(\frac{1}{2}y\right)^2 = mn, \quad (4) \text{ гэх гарна.}$$

$(m, n) = 1$ гэдэг нь тодорхой. 1987 нь анхны тоо учраас

$$m = 1987m^2, \quad n = n^2, \quad (m, n) = 1.$$

Эдгээр утгуудыг (3), (4) тэгшитгэлд орлуулбал

$$1987m^2 = \frac{1}{2}(z+\alpha), \quad 1987m^2n^2 = 1987\left(\frac{1}{2}y\right)^2,$$

$$n^2 = \frac{1}{2}(z-\alpha) \quad \text{буюу} \quad y = 2mn, \quad z = 1987m^2 + n^2$$

$$\alpha = 1987m^2 - n^2 \quad ((m, n) = 1, \quad m, n \text{ нь}$$

дурын натурал тоо) болно. Ийнхүү y тэгш үед өгөгдсөн тэгшитгэл тэгсгэлгүй олон шийдтэй болохыг харууллаа.

2. y сондгой үед дээр бодсонтой төслөйгээр өгөгдсөн тэгшитгэл тэгсгэлгүй олон шийдтэй болохыг үзүүлж болно.

А3. Бодлогын бодолт. Инвариант нэртэй өгүүллийг үе.

Б1. Бодлогын бодолт.

$$x^2 - 2x - a^2 + 1 = 0$$

тэгшитгэлийн язгууруу-

дыг олбол $x_2 = a+1$

$$x_1 = 1-a$$

байна.

$$x^2 - 2(a+1)x + a(a-1) = 0$$

тэгшитгэлийн

язгууруудыг олбол

$$x_3 = a+1 - \sqrt{1+3a},$$

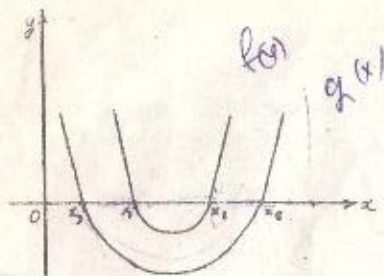
$$x_4 = a+1 + \sqrt{1+3a}; \quad (a > -\frac{1}{3})$$

байна.

$$f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 1,$$

$$g(x) = x^2 - 2(a+1)x + a(a-1)$$

байр.



Эдгээр функцуудийн графи-
кийг тоймлон дүрсэлж .

Тэгвэл

$$\left. \begin{aligned} g(x_2) &< 0 \\ g(x_1) &< 0 \\ a &> -\frac{1}{3} \end{aligned} \right\}$$

4 дүгээр зураг

$$\left\{ \begin{aligned} &\text{буюу} \\ &(a+0,25)(a-1) < 0 \\ &-3a-1 < 0 \\ &a > -\frac{1}{3} \end{aligned} \right.$$

Энэ системийг хангах

a -ийн бүх утга бодлогын нөхцлийг хангана гэдэг нь
тодорхой. Дээрх системийг бодвол $a \in [-0,25; 1]$ болно.

✓ 2. Бодлогын бодолт

$$a/n = \overline{a, a_1 \dots a_k 9999}, \quad n+1 = \overline{a, a_1 \dots a_k a'_k 0000}$$

$$\text{Энд: } a_k \neq 9, \quad a_1 + \dots + a_k = 35q - 1, \quad a'_k = a_k + 1$$

хэлбэрийн тоо, бодлогын нөхцлийг хангана. q нь дурин
натурал тоо байх учраас бодлогын нөхцлийг хангах тоо төгс-
гөлгүй олон байна.

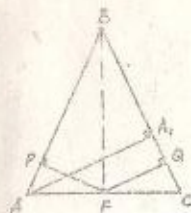
$$a/n = \overline{a, a_1 \dots a_m \underbrace{99 \dots 9}_{221}}, \quad n+1 = \overline{a, a_1 \dots a_m \underbrace{0 \dots 0}_{221}}$$

$$\text{Энд: } a_m \neq 9, \quad a_1 + \dots + a_m = 1988p - 1$$

$a'_m = a_m + 1$ хэлбэрийн тоо бодлогын нөхцлийг хан-
гана. Ийм хэлбэрийн тоо төгсгөлгүй байх учраас бодлогын нөхц-
лийг хангах тоо төгсгөлгүй олон байна.

33. Бодлогын бодолт

Эгнэгдсэн гурв тэнийг ABC ($AB=BC$) гэе.



Холбогдох зургийг зурж, түүн дээрээ өсхийх тэмдэглэлүүдийг хийнэ. / 5-р зураг / В оройг F цэгтэй холчмээр холбоё.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{BC \cdot AA_1}{2}, \quad S_{\triangle FBC} = \frac{BC \cdot FQ}{2}$$

5-р зураг

$$S_{\triangle FAB} = \frac{AB \cdot FP}{2}, \quad S_{\triangle ABC} = S_{\triangle FBC} + S_{\triangle FAB}, \quad BC = AB.$$

байх учраас
$$\frac{BC \cdot AA_1}{2} = \frac{BC \cdot FQ}{2} + \frac{BC \cdot FP}{2}$$

буюу $AA_1 = FQ + FP$ болно.

Сурэгч А.Батхүү (УБ), С.Давсгүх (Ув), Б.Наранхүү (Дундговь) зэрэг нэлээд олон сурэгч ил энэ аргаар бодсон байв.

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХХ ОЛИМПИАДЫН
9 ДҮГЭЭР АНГИЙН ГУРАВЫН ДАВААНЫ
БОДЛОГЫН БОДОЛТ

А.Хамбаатар
А.Ганбаатар
Л.Хадхүү /МУИС/

А 1. ABC гурвалжны Q талны дундагт D гэс.
2 шулуун (AB) , (AD) , (AC) гурван шулуунг харгал-
зан B' , D' , C' цэгээр огтоодог ба

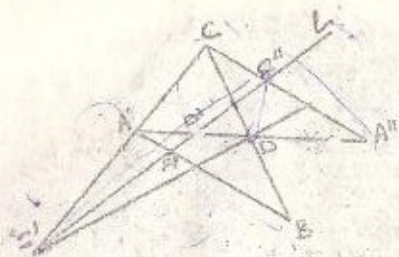
$$\frac{|AB|}{|AB'|} = \lambda, \frac{|AC|}{|AC'|} = \mu \text{ бол } \frac{|AD|}{|AD'|} = \kappa \text{ харьцааг ол.}$$

А 2. $ax^2 + bx + c = 0$ (3)
 $(a, b, c \in \mathbb{R})$ квадрат гурван талуунтайн язгууруудыг x_1, x_2
гэс. $S_n = x_1^n + x_2^n$ дараалал геометрийн прогресс үүсгэх
нөхцлийг (a, b, c) коэффициентүүдийн тусламжтайгаар
тогтоос.

А 3. Натурал тоо m бүрийн хувьд
$$\frac{(2m+1)2m(2m-1)\dots(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} < 2^{2m}$$

тэнцэтгэл биш биелэгдэхийг батал.

В 1. ABC гурвалжны A өрөйгөөс буулгасан өндөр
нь A өнцөгт гадуур багтсан тойргийн радиустай тэнцүү
бөгөөд уг гурвалжинд багтсан ба багтаасан тойргийн радиус
 $2,5$, бол гурвалжны талуудыг ол.



зүрэг 2.

$$a/ \triangle A''C'D' \cap \triangle A'B'D' \Rightarrow$$

$$\frac{A''C'}{A'B'} = \frac{A''D'}{A'D'}$$

$$\text{Эсвэл } A''C' = A'B'$$

$$\text{Сайдлаас } \frac{A'B' - CC''}{A'B'} =$$

$$\frac{2AD - AD'}{AD'} \quad \text{буюу } \lambda - \frac{CC''}{A'B'} = 2 \frac{AD}{AD'} - 1 \quad (4)$$

б/ $\triangle CC''C' \cap \triangle A'B'C'$ дотроод $CC' = AC' + AC'$, C' цэг нь (AC) зүжүүн дээр A цэгээс C -ийн өсрөг талд байгаа тул манай гэгжнэлд ол.

$$\frac{AC}{AC} = -M \quad \text{байх учраас} \quad \frac{CC''}{A'B'} = \frac{CC'}{AC} \quad \text{буюу}$$

$$\frac{CC''}{A'B'} = -M + 1 \quad (5)$$

$$(5) \text{ мт } (4) - \text{д тавихад } \lambda + M - 1 = 2 \frac{AD}{AD'} - 1 \quad \text{болж}$$

$$\frac{AD}{AD'} = \frac{2 + M}{2}$$

1.2 бодлогын бодолт

$$1 \text{ Өгөгдсөн Носоор } S_{n-1} \cdot S_{n+1} = S_n^2 \quad \text{буюу}$$

$$(x_1^{n-1} + x_2^{n-1})(x_1^{n+1} + x_2^{n+1}) = (x_1^n + x_2^n)^2 \quad \text{болно. Эндээс}$$

$$x_1^{n-1} \cdot x_2^{n+1} (x_1 - x_2)^2 = 0 \quad (6)$$

биедэхийн тулд дараах хоёр нөхцлийн ядах нэг нь биелэх нь ойлгомжтой. а/ $x_1 \cdot x_2 = 0$ буюу өгөгдсөн тэгшитгэл $x = 0$ шийдтэй байх ёстой. (б) тэгшитгэлд $x = 0$ гэж авбал $C = 0$ болно, б/ $x_1 = x_2$ буюу өгөгдсөн тэгшитгэл давхар шийдтэй, өөрөөр хэлбэл дискриминант нь тэгтэй.

тэнцүү байх ёстой. Эндээс $6^2 = 4$ гэсэн нөхцөл гарна. Буцаагаад $c=0$ бол (3) тэгшитгэл $x_n=0$ шийдтэй. Иймд $S_n = x_n^n$ болно. $6^2 = 4$ гэсэн тохиолдолд $x_1 = x_2$ буюу $S_n = 2x_1^n$ болно. Өөрөөр хэлбэл альч тохиолдолд нь дараалал геометр прогресс үүсгэх нь харагдаж байна. (Сурагчдын ихэнх хэсэг нь (6) нөхцлөөс $x_1, x_2 = 0$ байх болохыг тооцолгүй шийд орхисон байлаа).

А 3. Бодлогын бодолт

Энэ бодлого нь бусдыгаа бодвол хөнгөтөр бодлого байсан учир ихэнх сурагчид зөв бодсон байлаа. Сурагчдын нрүүлсэн хэд хэдэн явзны бодолтуудаас математик индукцийн арга хэрэглэн бодсон бодолтыг үзүүлье. $m=1$ тохиолдолд $3 < 4$ гэсэн үнэн тэнцэтгэл бий гарч байна. Одоо $m=k$ тохиолдолд тэнцэтгэл бий үнэн, өөрөөр хэлбэл:

$$\frac{(2k+1)2k(2k-1)\dots(k+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} < 2^{2k} \quad (7)$$

тэнцэтгэл бий биелдэг гэх үзвэл $m=k+1$ тохиолдолд тэнцэтгэл бий биелэхийг харуулъя. $m=k+1$ тохиолдолд батлах тэнцэтгэл бишийн зүүн тал

$$\frac{(2k+3)(2k+2)\dots(k+2)}{1 \cdot 2 \dots (k+1)}$$

болох ба үүнийг өөрөөр

$$\frac{(2k+3)(2k+2)}{(k+2)(k+1)} \cdot \frac{(2k+1)2k(2k-1)\dots(k+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}$$

гэх бичих болно.

Цааш нь (7) нөхцлийг ашиглавал

$$\frac{(2k+3)(2k+2)}{(k+2)(k+1)} \cdot \frac{(2k+1)2k(2k-1)\dots(k+2)}{1 \cdot 2 \dots k} < \frac{2k+3}{k+2} \cdot 2^{2k}$$

$$< \frac{2k+4}{k+2} \cdot 2^{2k+1} = 2^{2k+2} = 2^{2(k+1)}$$

болж, $m=k+1$ тохиолдолд тэнцэтгэл бий биелдэг байна. Иймд индукц ёсоор натурал тоо n бүрийн хувьд тэнцэтгэл бий биелэгдэнэ.

В I Бодлогын бодолт

4. А өнцөгт тодуур багтсан тойргийн радиусыг $2a$

а гэдэг буулгасан өндрийг h_a гэвэл

$$s = \frac{1}{2} a h_a = p z = z_a (p-a) = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (8)$$

гэвчлэг. $z_a = h_a$ гэснээр $\frac{1}{2} a = p-a$ буюу $p = \frac{3}{2} a$ (9)

буюу (9) ба өгсөн нөхцлөөр $b+c = 2a$ (10)

$$2 \cdot \frac{3}{2} a = \frac{abc}{4.5} \quad \text{эндээс } bc = 60 \quad (11) \text{ мөн } (8) \text{ ёсоор}$$

$$\frac{3}{2} a \cdot 2 = \sqrt{\frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{2} (p-b)(p-c)} \quad \text{хялбарчлахад}$$

$$12 = p^2 - (b+c)p + bc, \quad (9)(10)(11) \text{ нөхцлөөр } -3a^2 = -4b \cdot 4$$

$$\text{буюу } a = 8. \text{ Өө } \begin{cases} b+c = 16 \\ bc = 60 \end{cases} \quad \text{тул үлдсэн хоёр тал}$$

6, 10 байна. Ийнхүү (6, 8, 10).

В.2. Бодлогын бодолт

4 Бодлогын нөхцөл ёсоор $b_1, b_2, \dots, b_{15}$ тоонуудын нэг 14 нь зохих тоо байна. 15-аас багатай өхний 14 ширхэг зохих тоо нь 15, 16, 18, 20, 21,

22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33 тоонууд байх учир $k \geq 33$ болно. Одоо $k=33$ нь дурьдсан чанартай байхыг харуулъя. $b_{15} = 30, b_{14} = 28, b_{13} = 26,$
 $b_{12} = 24, b_{11} = 23, b_{10} = 20, b_9 = 27, b_8 = 32,$

$b_7 = 21, b_6 = 18, b_5 = 26, b_4 = 16, b_3 = 15,$

$b_2 = 22, b_1 = 14$ тоонуудыг {15, 16, 17, 18, 19, 20,

21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33}

сонилогоос авбал $b_m : m$ ($m = 1, 2, \dots, 15$) нөхцөлд сонгох нь ойлгомжтой. Иймд $k=33$ нь бидний олох тоо болно. ♣

Энэ бодлого харьцангуйгаар хилбар бодлого байсан боловч сурагчдын 75 % нь гайц ч оноо авсаагүй.

В 3 бодлогын бодолт

Энэхүү бодлого нь бусдыгаа бодвол нэлээд эвэрмэд өгөгдөлтэй шалгарсан хундагтэр бодлого байсан учир бараг бүх сурагч бүтэн оноо авсангүй. Булган хотын 10 жилийн 2-р ангийн сурагч Б.Чулуунбаатар ганцаараа энэ бодлогыг гүйцэд бодож авбал зохих 6 оноог авчээ. Одоо Чулуунбаатарын бодолтыг багц зэрэгт авсарлан өгжүүлжээ.

4 Тойрог дээр орших n ($n \geq 7$) цэгийг аль нэгээс нь эхлэн тоонуудаар дугаарлан. 1 гэсэн дугаартай цэгээс эхлэн цагийн зүүний дагуу тоохи, долоо дахь цэг бүрийг дарснаар нэг цэг үлдэхэд, үлдсэн тэр цэгийн дугаарыг $f(n)$ гэж.

Нэмж 1. Хэрэв $n \geq 7$ бол

$$(12) \quad f(n+1) = \begin{cases} f(n)+7 & (f(n)+7 \leq n+1 \text{ тохиолдолд}) \\ f(n)-n+6 & (f(n)+7 > n+1 \text{ тохиолдолд}) \end{cases}$$

байна.

● Баталгаа. $n+1$ цэг аваад эхлээд 7 гэсэн дугаартай цэгийг дарсны дараа n цэг үлдэнэ. Энэ n цэгийг 8 гэсэн дугаартай цэгээс эхлэн цагийн зүүний дагуу 1, 2, ..., n тоонуудаар давхар дугаарлая. Ингээд "шинэ" n дугаартай цэгийн "хуучин" дугаар нь: $k+7 \leq n+1$ тохиолдолд $k+7$, харин $k+7 > n+1$ тохиолдолд $k+7-(n+1)$ буюу $k-n+6$ болно. Одоо 8 гэсэн дугаартай цэгээс эхлэн цааш нь үргэлжлүүлэн тоохи долоо дахь цэг бүрийг дарснаар ханц цэг үлдэхэд түүний шинэ дугаар $f(n)$, харин "хуучин" дугаар нь $f(n)+7 \leq n+1$ тохиолдолд $f(n)+7$, $f(n)+7 > n+1$ тохиолдолд $f(n)-n+6$ болно. Өөрөөр хэлбэл

$$f(n+1) = \begin{cases} f(n)+7 & (f(n)+7 \leq n+1 \text{ тохиолдолд}) \\ f(n)-n+6 & (f(n)+7 > n+1 \text{ тохиолдолд}) \end{cases}$$

бодог лэмь батлагдан. ●

(12) томъёо нь $f(n)$ мэдэгдэж байхад $f(n+1)$ -ийг олох рекуррент томъёо юм. (12) томъёогоор $f(1987)$ -г олно, гэвэл эхлээд $f(7)$ -г олсны дараа (12) томъёо 1980 удаа хэрэглэх хэрэгтэй болно. Өөрөөр хэлбэл (12) томъёогоор $f(1987)$ -г олохын тулд $f(7)$ -оос эхлэн $f(1987)$ хүртэл зааврын бүх утгыг бодож гаргах хэрэгтэй болно гэсэн үг. Иймд $f(7)$ оос $f(1987)$ хүртэлх зааврын бүх утгыг бодолгүйгээр $f(1987)$ -г олох өөр нэг рекуррент томъёог гаргая.

$f(n) < 7$ байх бүх $n \geq 7$ тоонуудын дарааллыг $\{n_i\}$ (n_i, n_{i+1}) гэв. $f(7) = 5$ учир $n_1 = 7$ болно.

Лемм 2.

$$n_{i+1} = n_i + \left[\frac{n_i - f(n_i)}{6} \right] + 1 \quad (13)$$

$f(n_{i+1}) = f(n_i) - n_i + 6 \left[\frac{n_i - f(n_i)}{6} \right] + 6$
 $n_i = n_i + k$ байг. Энэ нь $f(n_i) < 7$, $f(n_{i+1}) < 7$ ба $f(n_i + s) \geq 7$ ($s = 1, 2, \dots, k-1$) байна гэсэн үг.
 (12) томъёог хэрэглэн

$$f(n_i + s) = f(n_i) + 7s \quad (s = 1, 2, \dots, k-1)$$

$$f(n_{i+1}) = f(n_i + k) = f(n_i) + 7k - (n_i + k) = f(n_i) - n_i + 6k$$

$$\text{ба } f(n_i) + 7s \leq n_i + s \quad (s = 1, 2, \dots, k-1)$$

$f(n_i) + 7k > n_i + k$ болохыг ямархан тогтоож болно.

$f(n_i) + (k-1)7 \leq n_i + k-1$ ($s = k-1$ тохиолдол) ба

$f(n_i) + 7k > n_i + k$ тэнцэтгэл бишүүдээс

$$\frac{n_i - f(n_i)}{6} < k \leq \frac{n_i - f(n_i)}{6} + 1$$

гэсэн давхар тэн-

цэтгэл биш гарна.

$$\text{Эндээс } k = \left[\frac{n_i - f(n_i)}{6} \right] + 1, \quad k = \left[\frac{n_i - f(n_i)}{6} \right] + 1$$

гэсэн томъёо гарна. Эцэст нь

$$\begin{aligned} n_{i+1} &= n_i + k = n_i + \left[\frac{n_i - f(n_i)}{6} \right] + 1 \quad \text{ба } f(n_{i+1}) = \\ &= f(n_i) - n_i + 6k = f(n_i) - n_i + 6 \left[\frac{n_i - f(n_i)}{6} \right] + 6 \end{aligned}$$

бодж лемм батлагдана. $\bullet$

(13) төмөрсөн тусламжтайгаар $u_{57} = 1747$, $u_{58} = 2038$ бн

$\frac{1}{2}(1747) = 873.5$ болохыг олж болно.

Эндээс $\frac{1}{2}(1987) = \frac{1}{2}(1747) + \frac{1}{2}(1987 - 1747) = 873.5 + 107.5 = 981$

буюу үлдэх гэнц цэгийн дугаар 981 болно.

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХН ОЛИМПИАДЫН
ГҮРВЫН ДАВААНЫ Х АНГИЙН БОДЛОГО,
ТҮҮНИЙ БОДОЛТ

Ц.Давдорж

✓ A1. $[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 12345$

тэгшитгэлийг бод.

A2. $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, $a_n - a_1 = d$ бол

$(n-1)d \leq \sum (a_j - a_i) \leq n^2 d / 4$ байхыг батал.

Энд $1 \leq i < j \leq n$ байх бүх боломжит (i, j) хоосуудаар нийлбэрчилсэн болно.

A3. ABC гурвалжны талууд дээр BC_1, CA_1, AB_1 зөв гурвалжингуудыг гадаад сайдлаар байгуулав. ABC гурвалжны талбай $A_1B_1C_1$ гурвалжны талбайгаас бага гэж батал.

B17 $f(x)$ олон гишүүнт, a тоо хоёр $f(x) = f(a-x)$ тэнцэтгэлийг ямагт хангах байвал

$f(x) = g(x - \frac{a}{2})^2$ тэнцэтгэлийг ямагт хангах $g(x)$ олон гишүүнт олдоно гэж батал.

B2. S тойрогт багтсан A_1, A_2, A_3, A_4 гүдгэр дөрвөн цэгтийн хувьд $MA_1 + MA_3 = MA_2 + MA_4$ байх M цэг S тойрог дээр олдоно гэж батал.

B3 Дараах системийн бүхэл шийдийг о.

$$\begin{cases} x + y + z = 8 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8 \end{cases}$$

A1. Хэрэв x нь өгөгдсөн тэгшитгэлийн шийд бол

$$x = [x] + \alpha \quad 0 \leq \alpha < 1;$$

$$\sum_{k=0}^5 [2^k x] = \sum_{k=0}^5 2^k [x] + \sum_{k=0}^5 [2^k \alpha] = 63[x] + \sum_{k=0}^5 [2^k \alpha]$$

г.х хувиргах болно. $12345 = 63 \cdot 195 + 60$ тул

$$[x] \leq 195. \quad \text{Эндээс } \sum_{k=0}^5 [2^k \alpha] \geq 60 \text{ нөгөө талаас}$$

$$[\alpha] = 0, [2\alpha] \leq 1, [4\alpha] \leq 3, [8\alpha] \leq 7, [16\alpha] \leq 15,$$

$$[32\alpha] \leq 31 \text{ тул } \sum_{k=0}^5 [2^k \alpha] \leq 57. \text{ гэсэн зөрчилд}$$

хүрч өг өгдсөн тэгшитгэл шийдгүй болох нь батлагдав.

A2. Зүүн гарын тэнцэтгэл бийийг шууд батлая.

$$\sum (a_j - a_i) \geq \sum_{j=2}^{n-1} (a_n - a_j) + \sum_{j=2}^{n-1} (a_j - a_1) + (a_n - a_1)$$

$$= (n-2)(a_n - a_1) + (a_n - a_1) = (n-1)d.$$

Баруун гарын тэнцэтгэл бийийг n -ээр нь индукцлон баталъя. $n=2$ үед илэрхий үнэн байна.

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \quad \text{ба} \quad a_{n+1} - a_1 = d \quad \text{байг.}$$

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n+1} \quad \text{дарааллын}$$

$$\text{хувьд зохиогдох нийлбэрийг} \quad S_{n+1}; \quad \left[\frac{n+1}{2} \right] + 1 = k;$$

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{k-1} \leq a_k \leq \dots \leq a_{n+1}$$

$$\text{дарааллын хувьд зохиогдох нийлбэрийг} \quad S_n \quad \text{гэх}$$

ГЭМДЭГДЭВЭЛ

$$S_{n+1} = S_n + \sum_{i=1}^{n+1} (a_i - a_{i-1}) + \sum_{j=n+1}^{n+1} (a_j - a_n)$$

Индукцийн таамаглал ёсоор

$$S_n \leq \frac{n^2(a_{n+1} - a_1)}{4} = \frac{n^2 d}{4} \quad \text{ба}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} (a_i - a_{i-1}) + \sum_{j=n+1}^{n+1} (a_j - a_n) \leq \frac{n}{2} d \quad \text{тул}$$

$$S_{n+1} \leq \left(\frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}\right)d < \frac{(n+1)^2 d}{4} \quad \text{Оолж батлагдвал.}$$

АЗ. Тэниүү талт гурвалжны хувьд бодлого илэрхий тул тэниүү бие талт гурвалжны тохиолдлыг авч үзье. Тодорхой болгохын тулд

$$60^\circ > \hat{A} \leq \hat{C} \leq \hat{B} > 60^\circ$$

гэх үзье.

А оройгоос C, B , талаар таслагдан A, B, C , гурвалжны гадна хоцрох ABC гурвалжны хэсэг нь C, BD гурвалжингаас бага талбайтай. Энд D нь C , цэгээс AB талд буулгасан өндрийн суурь. $\hat{C} < 60^\circ$ байвал дээрхийн адил A, B , талаар таслагдан A, B, C , гурвалжны гадна хоцрох ABC гурвалжны хэсэг нь A, BE гурвалжингаас бага талбайтай. Энд E нь A , цэгээс BC талд буулгасан өндрийн суурь. $\hat{B} > 60^\circ$ тул A, C , талаар таслагдан A, B, C , гурвалжны гадна хоцрох ABC гурвалжны хэсэг байхгүй. Иймээс ABC гурвалжны талбай A, B, C , гурвалжинхаас бага байна. Хэрэв $\hat{C} \geq 60^\circ$ байвал A, B , талаар таслагдан A, B, C , гурвалжны гадна хоцрох ABC гурвалжны хэсэг байхгүй тул дээрх дүгнэлт мөн зөв байна.

ВІ. $f\left(\frac{a}{2} + x\right) = h(x)$ гэвэл $f(x) = f(a - x)$ гэх өгөгдсөнөөс $h(x)$ нь тэгш функц болно. Иймээс $h(x)$

олонгивүүнтэд x хувьсагч бүр тэгш зэрэгтэй орох тул
 $f(x) = g(x^2)$ хэлбэрт M бичиг болно. Ийнхүү

$$f(x) = f\left(x - \frac{a}{2}\right) = g\left(\left(x - \frac{a}{2}\right)^2\right) \quad \text{болж батлагдав.}$$

Б. 5 тойрог дээр хөдөлж байгаа M цэгийн хувьд

$f(M) = MA_1 - MA_2 + MA_3 - MA_4$ функцийг авч үзье. Гүдгэр олон гишүүнийг аль урт талаас нь эхлэн тэмдэглэж болох тул A_1, A_2 нь хамгийн урт тал гэж үзэж болно.

$$f(A_1) = A_1A_3 - A_1A_2 - A_1A_4 < A_1A_3 - A_1A_2 \leq 0$$

$$f(A_2) = A_2A_1 + A_2A_3 - A_2A_4 \geq A_2A_1 + A_2A_3 - A_2A_4 > 0$$

Иймээс f тасралтгүй функц A_1, A_2 хооронд орших ямар нэг M цэг дээр тэг утга авах ботой: $f(M) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{В 3. } x^3 + y^3 + z^3 &= (x+y)^3 + z^3 - 3xy(x+y) = \\ &= (x+y+z)^3 - 3(x+y)z(x+y+z) - 3xy(x+y) \end{aligned}$$

Иймээс x, y, z нь өгөгдсөн системийн бүхэл шийд бол

$$8 = 8^3 - 2yz(8-z) - 3xy(8-z) \quad \text{улимаар} \quad (1)$$

$(8-z)(8z+xy) = 8 \cdot 21$
 $x=2x_1, y=2y_1, z=2z_1$ гэж гурвуулав тэгш болохгүй. Учир нь зэрэг тохиолдолд $x_1 + y_1 + z_1 = 4$

$$x_1^3 + y_1^3 + z_1^3 = 1 \quad \text{болно. Гэтэл}$$

гурван бүхэл тооны нийлбэр тэгш байвал тэдгээрийн кубүүдийн нийлбэр мөн тэгш байхыг "одолтын эхэнд бичсэн адилтгалаас хялбархан ажиг болно. x, y, z гурвын зөвхөн хоёр нь сондгой байхыг тэдгээрийн нийлбэр 8-г өгөгдсөнөөс ажиг болно. Бодлогын нөхцөлт x, y, z тэгш эрхтэй тул x, y нь сондгой z нь тэгш байх тохиолдолыг

Ийнжибээл хангалттай, (I) тэнцэтгэлээс

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 8-z = \pm 8 \\ 8z+xy = \pm 2i \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 8-z = \pm 24 \\ 8z+xy = \pm 7 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 8-z = \pm 56 \\ 8z+xy = \pm 3 \end{array} \right\} \end{array}$$

Эндээс (15, 9, -16) гэсэн шийд гарна. Ийнхүү өгөгдсөн систем
6 бүхэл шийдтэй.

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХХ ОЛИМПИАДЫН
ДӨРӨВ / СҮҮЛЧ / -ИЙН ДАВААНЫ
БОДЛОГУУД

Ц.Дамдоря, Д.Ламжав

Олимпиадын дунд ангуу сүрээр, бодлого бүрээр хүснэгтээр маш дэлгэрэнгүй гаргасан тул статистикийн холбогдолтой элдэв иэдээг тэндээс сонирхохыг хүсье.

Дөрвийн даваанд тус бүр долоон оноогоор үнэлэгдсэн зургаан бодлогыг хоёр өдөр бодууллаа.

А1. /А.Ганбаатар/ $n \geq 2$ үед $f(n-1) \cdot f(n+1) = f(n)^2$
-1 ба $f(1987) = 1987$ байх бүх $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
функцийг ол.

А2. /А.Хамбаатар/ 4 радиустай тойргийг багтах ABC гурвалжны C оройгоос нөгөө хоёр оройн гадаад өнцгийн биссектрис бүртгэсэн перпендикулярны сууриудыг хоорондох зай 21 ба

$$7 \lg \frac{4}{2} + \lg \frac{3}{2} = 2 \quad \text{боя талуудыг ол.}$$

А3. /Р.Гончигдорж/ Өгөгдсөн N_0 натурал тооны хувьд $N_0, N_1, N_2, \dots$ сөрөг бий бүхэл тоон дарааллыг дараах дүрмээр байгуулъя. Үүнд: «Хэрэв $N_k = 0$ байвал байгуулах процессыг зогсооно; хэрэв $N_k > 0$ байвал $N_k - 1$ тоог

$$N_{k-1} = a_m + a_{m-1}k + a_{m-2}k^2 + \dots + a_0k^m$$

Энд $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ $i = \overline{1, m}$ дүрсэн
дээр бичвэд N_{k+1} тоог

$$a_m + a_{m-1}(k+1) + a_{m-2}(k+1)^2 + \dots + a_0(k+1)^m$$

нийлээртэй тэнцүү гэж тодорхойлъя. Бидний сонирхон
байгаа дараалал ямагт $\mathbb{Q}$ -төгсгөлөг гэж батал.

В1. / Л. Хадхүү / Дараах системийг бод:

$$\begin{cases} 4x^2 + 3y^2 = 1 \\ 32x^3 - 6x + 9y - 36y^3 = 1 \end{cases}$$

В2. / Б. Чулуундорж / $n \geq 32$ үед $2, 3, \dots, n$
тоонуудыг дурьд арчар хоёр бүлэгт хуваахад $a \cdot b = c$
байх a, b, c тоонууд ядаж нэг бүлгээс нь олдоно гэж
батал / $a = b$ байх болно /.

В3. / А. Ганбаттар / Хэвтэгл дээр O цэгт тав-
тэй тойрог, энэ тойргийн гадна орших S цэг хоёр өгөгд-
лээ, P нь өгөгдсөн тойрогт татсан ST шүрхэгчийн
пүргэлтийн цэг; Q нь P цэгээс OS хэрчим дээр
буулгасан перпендикулярын суурь байг. PQ хэрчим дээр
дурьд T цэг аваад тойрог, ST шулуун хоёрын огтлол-
лын цэгүүдийг A, B гэж тэмдэглэе.

$$\angle AQT = \angle TQB \quad \text{байхыг батал.}$$

Бодолт

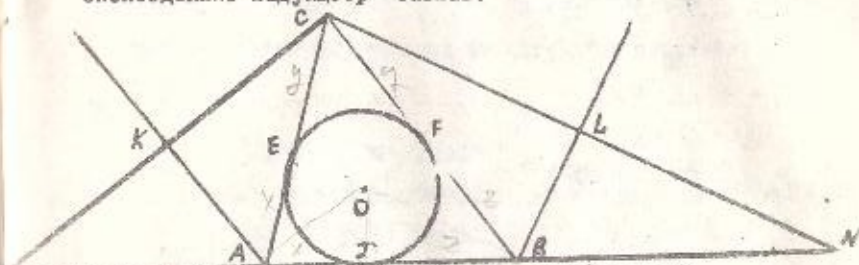
А1. $f(n) = n$ адиятгал функц бодлогын нөхцлийг
хангах нь илэрхий. Одоо бодлогын нөхцлийг хангах дурьд
 $f(n)$ функц заавал адиятгал функц байна, гэж баталъя.
 $f(n)$ нь өсөх функц болохыг тогтооё. Эсрэгээс нь
 $f(m) > f(m+1)$ байх m дугаар олдоно гэвэл
 $f(m), f(m+2) = f(m+1) - 1 < f^2(m+1) < f(m) < f(m+1)$
Эндээс $f(m+1) > f(m+2)$. Энэ процессыг индукцээр

давтаан дурын K дугаарын хувьд $f(n) > f(m+1) > \dots > f(m+k)$
Гэтэл f нь натурал утга алдаг тул ийм байх болох-
гүй.

$$1987 = f(1987) > f(1986) > \dots > f(2) > f(1)$$

Эндээс $f(n) = n$ тэнцэтгэл $n = 1987$ байх бүх n ду-
гаарын хувьд батлагддаг. $f(K) = K$ болох нь $K \leq n$
байх бүх K дугаарын хувьд батлагдсан байг гэж үзье.

$f(n-1) f(n+1) = f(n)^2 - 1$ тэнцэтгэлээс индукцийн тэмдэг-
лал ёсоор $(n-1) f(n+1) = n^2 - 1$; $f(n+1) = n+1$
Ийнхүү $f(n) = n$ тэнцэтгэлийг дурын n дугаарын хувьд
онолэгдэхийг индукцээр батлав.



$z = 4$, $AB = c$, $AC = b$, $BL = a$, $a + b + c = 2p$ гэж
тэмдэглэе. CBN ба CAM гурвалжингууд адил хажуутай тул
 $MN = 2p$ байх бөгөөд KL нь CMN гурвалжны дун-
дах шугам болно. Иймээс $p = 21$. $AE = x = AD$,

$$CE = y = CF, \quad BF = z = BD$$

$$\text{гэвэл} \quad 2x + 2y + 2z = 2p. \quad x + y + z = p$$

$$x = p - (y + z) = p - a, \quad z = p - (x + y) = p - b.$$

$$AOD, BOD \text{ гурвалжингуудаас } \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = \frac{z}{p-a} \cdot \frac{z}{p-b}$$

$$\text{Эндээс } (p-a)(p-b) = 56$$

Герони томъёог ашиглавал

$$\sqrt{21 \cdot 56 \cdot (21-c)} = 21.4$$

$$\text{Эндээс } c = 15$$

Гэдсэн хоёр талыг

$$\begin{cases} a+b = 42-45 \\ (21-a)(21-b) = 56 \end{cases}$$

системээс олбол $a=14$, $b=13$ болно.

А3. $N_{10} = 18$ байх жишээн дээр байгуулалтыг туршиж үзье.

$$N_{10}-1 = 17 = 7+1 \cdot 10$$

$$N_{11} = 7+1 \cdot 11 = 18$$

$$N_{11}-1 = 17 = 6+1 \cdot 11$$

$$N_{12} = 6+1 \cdot 12 = 18$$

$$N_{12}-1 = 17 = 5+1 \cdot 12$$

$$N_{13} = 5+1 \cdot 13 = 18$$

$$N_{13}-1 = 17 = 4+1 \cdot 13$$

$$N_{14} = 4+1 \cdot 14 = 18$$

$$N_{14}-1 = 17 = 3+1 \cdot 14$$

$$N_{15} = 3+1 \cdot 15 = 18$$

$$N_{15}-1 = 17 = 2+1 \cdot 15$$

$$N_{16} = 2+1 \cdot 16 = 18$$

$$N_{16}-1 = 17 = 1+1 \cdot 16$$

$$N_{17} = 1+1 \cdot 17 = 18$$

$$N_{17}-1 = 17 = 0+1 \cdot 17$$

$$N_{18} = 0+1 \cdot 18 = 18$$

$$N_{18}-1 = 17 = 17+0 \cdot 18$$

$$N_{19} = 17+0 \cdot 19 = 17$$

$$N_{19}-1 = 16 = 16+0 \cdot 19$$

$$N_{20} = 16+0 \cdot 20 = 16$$

$$N_{24}-1 = 1 = 1+0 \cdot 24$$

$$N_{25} = 1+0 \cdot 25 = 1$$

$$N_{25}-1 = 0$$

зогсоно.

N_{10} нь аравтын тооллын систем дээр $n+1$ оронтой тоо байх. Бүх $n+1$ урттай сөрөг бич бүхэл сон дарааллын анги дээр цаглан толгойн эрэмбэ, өөрөөр хэлбэл толиноос уг харахдаа баримталдаг нэг эрэмбэлг тогтоой:

$$A = (a_0, a_1, \dots, a_m); B = (b_0, b_1, \dots, b_n)$$

гэсэн хоёр өөр дарааллын хувьд $a_i \neq b_i$ байх хамгийн

бага i индекс $a_i < b_i$ тэнцэтгэл бишийг хангаж байвал
 $A < B$ гэж үзье.

$$N_K = a_{k0} K^n + a_{k1} K^{n-1} + \dots + a_{kn-1} K + a_{kn}$$

бүрт $A_K = (a_{k0}, a_{k1}, \dots, a_{kn})$ дарааллыг харгалзуулъя. Энд
 $a_{ki} \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$. K -тн

тооллын систем дээр $\frac{a_{k0} a_{k1} \dots a_{kn}}{a_{k+10} a_{k+11} \dots a_{k+1n}} - 1$ үйлдлийг

хийхэд гарах «цифрүүдийн»

тууламжтайгаар $A_{k+1} = (a_{k+10}, a_{k+11}, \dots, a_{k+1n})$

гэж олдох тул $A_K > A_{K+1}$ Ийнхүү $A_{10} > A_{11} > A_{12} > \dots$

процессо төгсгөлгүй үргэлжилж болохгүй тул ямар нэг

$$A_m = (0, 0, \dots, 0, 1) \quad \text{болж} \quad N_m = 1.$$

В1. $2x = \cos t$, $\sqrt{3}y = \sin t$ гэсэн орлуулга хийж
 болох нь эхний тэгшитгэлээс харагдаж байна. ($-\pi \leq t \leq \pi$).

$$4\cos^3 t - 3\cos t + 3\sqrt{3}\sin t - 4\sqrt{3}\sin^3 t = 1$$

$$\cos 3t + \sqrt{3}\sin 3t = 1. \quad \frac{1}{2}\cos 3t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3t = \frac{1}{2}.$$

$$\sin(3t + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}. \quad 3t + \frac{\pi}{6} = (-1)^K \arcsin \frac{1}{2} + \pi K$$

$$t = [(-1)^K - 1] \frac{\pi}{18} + \frac{\pi K}{3}. \quad -\pi \leq t \leq \pi \text{ тул}$$

$$-18 \leq (-1)^K - 1 + 6K \leq 18$$

Энэ тэнцэтгэл бишийг $K = 0, \pm 1, \pm 2, 3$ утгууд
 хангах тул өгөгдсөн тэгшитгэл параметрийн t_K

утгуудад харгалзах $x_K = \frac{1}{2} \cos t_K, y_K = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin t_K$

$$(l = 0, \pm 1, \pm 2, 3)$$

гэвэл зургаан жилдтэй байна.

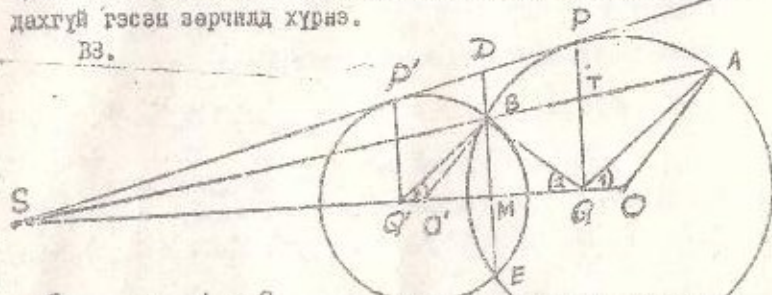
В2. Эсрэгээс нь бохир оогийг нөхдлийг хангадартуй
хуваалт олдono гэм үзье.

$$\{1, 3, \dots, 32\} = A \cup B$$

$g \in A$ гэвэл $4 \in B$; $16 \in A$ нэмээс $32 \in B$

Одоо 8 гэсэн тоо 1,8 хоёрын аль алинд нь харьяалагдахгүй гэсэн зөрчилд хүрнэ. Р

B3.



5 тавтай $A \rightarrow B$ төсөөг адил үзье. Өгөгдсөн тойрог энэ төсөөгөөр O' тавтай PS шулуун P' цэгт хүргэсэн тойрогт бууна. $DE \parallel PQ \parallel P'Q'$ тун огтлолч ба хүргэгчийн тухай теорем ёсоор

$$PD^2 = DB \cdot DE = DP'^2 \quad PD = P'D$$

Эндээс $QM = MQ'$. Ийнхээс QMQ' адил хажуут гурвалжин болох тул түүний суурийн өнцгүүд тэнцүү $\angle 2 = \angle 3$. $\angle 1 = \angle 3$ байх нь илэрхий тул $\angle 2 = \angle 1$. Эндээс бодлогын дүгээлт үнэн болох нь харагдан байна.

Олимпиадын сүүлчийн даваанд оролцохоор ирсэн багш, сурагчдад олимпиадын чиглэлтэй сэдвүүдээр яриа, лекцүүд хийлгэв. Чөлөөт цагаар тэдний хууд сагсан бөмбөгийн тэмцээн, үзвэр үзүүлэх, нэвтрэн зэрэг ололт зохиов. МУИС-ийн нэвтрэн клубт Булган аймгаас ирсэн математикийн багш нэвтрэн мастер Ч.Хүрэлбаатар 8 хүнтэй харахгүй

ээрэг тоглож $5\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2}$ харьцаатайгаар хожив.

Мөн олимпиад дууссны дараа албан ёсын бий багийн олимпиад зохиосон нь онц сонирхолтой боллоо. Энд сүг, гч, багш, оюутан, комисс гэсэн дөрвөн баг тус бүр хоёр бодлого дэвшүүлэх, өөрийн хоёр бодлогыг шалгах, бусдын 6 бодлогыг бодох бодолтыг бүрэн хийсэн үед оноо өгөх, 3 цаг бодох, багийн хүний тоог хязгаарлахгүй, бодолтын цаг дууссаны дараа аль нэг багийн хүсэлтээр зарим бодолтыг хамгаалуулах дүрэмтэйгээр багийн олимпиадыг явуулав.

Баг	Бодлого									Оноо	Байр
		a	b	c	d	e	f	g	h		
1	Сурагч			+	+	+	+		+	4	III
2	Багш	+	+			+	+		+	5	I
3	Оюутан	+	+	+					+	4	IV
4	Комисс	+	+	+		+	+			5	II

3 цаг бодсон «математикийн тулалдааны» дүнд бодолтын байдал дээрх байдалтай болж, дараа нь шүүх ажиллагаа зүй ёсоор эхлэв. Бүгд багаас дэвшүүлсэн 1 бодлогыг ганцхан сурагч баг бодсон болохоор бодолтыг хамгаалуулах саналыг комисс баг шаардав. Гэтэл сурагч баг бодолтоос хамгаалж чадаагүй тул багш баггаар бодуулах саналыг мөн комисс баг санал болгов. Багш баг бодолтыг амжилттай хийв. Багш багийн шаардлагаар ганц ч баг бодоогүй g бодлогыг комисс баг бодож хамгаалав. Бусад багийг нэг нэг бүдрүүлэх зорилго тавьсан хоёр хамир багт хамгийн их өртсөд оюутан баг d, g тод огуудыг хаанаас авсан болохыг нь асууж мэдсэн юм. d бодлогыг Болгарын олимпиадын бодлогоос, g бодлогыг мэргэд И. Комиссоос

авсан байв. Багууд номерийг сугалаагүй бөгөөд онсо тэнц-
вэл бага номертой нь урд нь орно гэж тогтсон байв.

Багийн олимпиадад дэвшигдсэн бүх бодлогыг томиёолж,
олон хүний бодлыг сорьсон d, g гэсэн хоёр гоё бодлогын
бодолтыг хийх нь зүйтэй байх гэж бодож байна.

а/ $x(x+1) = 23^4 y(y+1)$ тэгшитгэлийн бүх натурал тоон
шийдийг ол.

б/ $A = \{1, 2, 3, \dots, 2^n\}$ ($n > 2$) олонлогийг

$$b_1 + b_2 + \dots + b_i = c_1 + c_2 + \dots + c_{2^{n-i}}$$

$$b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_i^2 = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_{2^{n-i}}^2$$

нөхцлүүдийг ханган байхаар

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_i\}$ $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{2^{n-i}}\}$
хоёр олонлогт хуваа.

с/ Өөр өөр радиустай гурван тойргийн гадаад ерөнхий шүр-
гэгчүүдийн огтлолын цэгүүд нэг шулуун дээр оршихыг
батал.

д/ $p + q + r = 1$ байх гурван эсрэг тооны
хувьд

$$1 + r^3 < (1 - p^3)^3 + (1 - q^3)^3$$

тэнцэл/бич биелэгдэхийг батал.

е/ $\cos 3^\circ + \cos 75^\circ + \cos 147^\circ + \cos 219^\circ + \cos 291^\circ$

нийл/бэрийг ол.

2) $(96!)^2 + 1$ нь 193 тоонд хуваагдахыг батал.

3) Ахмад гишүүний коэффициент нь 1 байх n зэргийн

$$P_n(x) \text{ олон гишүүнийн хувьд } |P_n(x_0)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

байх $-1 \leq x_0 \leq 1$ цэг олдохыг батал.

4)

Алч гурвынх нь нийлбэр гуравт, аль ч дөрвийнх нь нийлбэр дөрөвт хуваагдах төгсгөлгүй олон анхны тоо олдохыг батал.

а) бодлогын бодолт. p, q, r нь $p+q+r=1$

байх эсрэг тоонууд тул тэдгээрийг нийцгүй бөгөөд аль нэг нь зайлшгүй явагдах гурван үзэгдлийн магадлал хэм үзэх болно. Эхнээ нь дээдрийн нэг нүдийг улаан, хөх, ногооноос гурван өнгийн зөвхөн нэгээр нь харгалаан p, q, r магадлалтайгаар булах туршилтыг авч үзье.

Одоо есөн нүднээс тогтсон дүрсийг авч үзье. Нэгдүгээр мөр улаан байх магадлал p^3 тул нэгдүгээр мөр улаан биш байх магадлал $(1-p^3)$ байна. Иймээс гурван мөр гурвуулаа улаан биш байх магадлал $(1-p^3)^3$.

Иймээс дээрх гурван мөрийн ядах нэг нь улаан байх магадлал $1 - (1-p^3)^3$ байна. Үүний адилаар ядах нэг багана хөх байх магадлал $1 - (1-q^3)^3$ байна. Нэг диагональ ногооноос байх магадлал r^3 ба саяны хэлсэн гурван үзэгдэл нийцгүй бөгөөд нэгдэл нь зайлшгүй биш тул магадлалуудынх нь нийлбэр нэгээс бага байна.

$$r^3 + 1 - (1-p^3)^3 + 1 - (1-q^3)^3 < 1$$

$$1 + x^3 < (1 - p^3)^3 + (1 - q^3)^3$$

9). Бодлогын бодолт $-1 \leq x \leq 1$ үед

$$\cos(\arccos x) = x, \quad \cos(2 \arccos x) = x^2 (1 - x^2) \\ = 2x^2 - 1, \quad \cos(3 \arccos x) = 4 \cos^3(\arccos x) - 3 \cos(\arccos x) \\ = 4x^3 - 3x$$

түүх мэтчилэн $\cos(n \arccos x)$ нь ахмад гишүүнийх нь 2^{n-1} коэффициент $-1 \leq x \leq 1$ үед зэргийн олон гишүүнт юм. Ийнхээс

$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$ нь $-1 \leq x \leq 1$ үед ахмад гишүүнийх нь коэффициент нэгтэй тэнцүү n зэргийн олон гишүүнт болно. Цаашилбал $T_n(x)$ нь

$$x_k = \cos \frac{k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

гэсэн $n+1$ ширхэг цэг дээр $\frac{(-1)^k}{2^{n-1}}$

утгуудыг авна:

$$T_n(x_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Ахмад гишүүний коэффициент нь нэг байдаг n зэргийн дурын $P_n(x)$ олон гишүүнтийг авъя. Эсрэгээс нь дурын $-1 \leq x \leq 1$ утгын хувьд

$$|P_n(x)| < \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{гэж үзье.} \quad L_{n-1}(x) = T_n(x) - P_n(x)$$

нь $n-1$ зэргийн олон гишүүнт байх бөгөөд

$x_0, x_1, \dots, x_n$ цэгүүд дээр эерэг, сөрөг утгуудыг эзэлж авч тухайн n ширхэг ялгаатай язгууртай бэй х ёстой. Гэтэл $n-1$ зэргийн олон гишүүнт их бодом $n-1$ ширхэг язгууртай байна.

ОЛОН УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХҮШ
ОЛИМПИАДЫН БОДЛОГЫН БОДОЛТ

А.Искаев

Олон улсын математикийн ХХҮШ олимпиад 1987 оны 7-р сарын 5-аас 16-нд Куба улсын Гаван хотод боллоо. Энэ олимпиадад 44 орноос 243 сурагч оролцов. Үүнээс 42 орны сурагчийн баг албан. Үсөөр, хоёр орын баг ажиглагчаар оролцов. 16-аас дээш оноо авсан 120 сурагч I, II, III зэргийн дипломоор шагнагдав.

Багийн дүнгээр БНСУ-ын баг 250 оноогоор I, ХЕНТУ-ын баг 248 оноогоор II, Зөвлөлт Холбоот улсын баг 235 оноогоор III, БНАГУ-ын баг 231 оноогоор IV, АНУ-ын баг 220 оноогоор V, БНУЛУ-ын баг 218 оноогоор VI, МБАУ-ын баг 210 оноогоор VII, БНХАУ-ын баг 200 оноогоор VIII, БНСЧСУ-ын баг 192 оноогоор IX, Английн баг 182 оноогоор X, БНСЛУ-ын баг 172 оноогоор XI байранд орлоо. Манай улсын баг нийлбэр дүнгээр ХХХ с йранд орсон ам.

Манай орны багт С.Батсэлд, Ц.Донгор, Б.Сайнсаяр, Э.Х. г-дагдоре / бүх УБ хотын I сургууль /, Б.Даваацэрэн /Дархан хот /, Б.Цэвээнравдан /Увс аймгийн Улаангом хотын сургууль / нарын 6 сурагч орсон ам.

ОУМ-ийн ХХҮШ олимпиадад тус бүр нь 7 оноо бүхий хоёрт 6 бодлогыг бодож уралдсан ам. Үүнд:

I бодлого. n , $(n \geq 1)$ "элементар олонлогийн бүх ордуулуудын дотор их K үл хөдлөх цэгтэй ордуулуудын тоог $P_n(K)$ гэв. Тэгвэл

$$\sum_{k=0}^n k \cdot p_n(k) = n!$$

байхыг батал.

С а н а и ж . $S = \{1, 2, \dots, n\}$ олонлогийг
өөрийг нь өөр дээр нь буулгасан хөрлцөн нэг утгатай
 $f: S \rightarrow S$ буулгалт бүрийг S олонлогийн орлуулга
гэнэ. Хэрэв $f(i) = i$ бол i тоог f орлуулгын үн хэд-
лэх цэг гэнэ.

II бодлого. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны M биссентри-
скийн үргэлжлэл уг гурвалжныг багтаасан тойргийг N цэг-
ээр эгтөлм оно. Үүнд $L \in BC$, $N \neq A$ 1.

Уг гурвалжны AB ба AC тал дээр L цэгээс хар-
галзан LK ба LM перпендикуляр буулгав. AKM дөрвөн
өнцөгтийн талбай ABC гурвалжны талбайтай тэнцүү боло-
хыг батал.

III бодлого. $x_1, x_2, \dots, x_n$ нь $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$
байх бодит тоо байг. Дурын бүхэл $k \geq 2$ тооны хувьд

$$|a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^{k-1}}$$

тэнцэтгэл биш биелэх бөгөөд $|a_i| \leq k^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$
байх ядаж нэг нь тэгээс ялгаатай $a_1, a_2, \dots, a_n$ бүхэл
тоо олдохыг батал.

IV бодлого. $N_0 = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$

сөрөг биш бүхэл тооны олонлог байг.

Дурын $n \in N_0$ тооны хувьд

$$f(f(n)) = n + 1987$$

байх $f: N_0 \rightarrow N_0$ функц олдохгүй гэж батал.

V бодлого. $n \geq 3$ байх натурал тоо байг. Тэгвэл
дараах хоёр нөхцөл зэрэг биелсэн байхаар n цэгийг хавт-
гайд сонгон авч болохыг батал. Үүнд:

а/ дурын хоёр цэгийн хоорондох зай нь иррационал
тоо;

б/ ялгаатай гурван цэг бүр нь нэг шулуун дээр орших

ба рационал тоон талбайтай гурвалжны орой болно.

II бодлого. $n \geq 2$ байх бүхэл тоо. Хэрэв

$0 \leq k \leq \sqrt{\frac{n}{3}}$ байх k бүхэл тоо бүрийн хувьд $k^2 + k + n$ анхны тоонууд бол, $0 \leq k \leq n-2$ байх дурын k бүхэл тооны хувьд $k^2 + k + n$ тоонууд анхны тоо байхыг батал.

Бодлогуудын бодолт

I бодлогын бодолт. $P_n(k) = C_n^k P_{n-k}(0)$ байхыг ойлгоход төвөггүй, үүнд $P_{n-k}(0)$ -ны $(n-k)$ - тэмдгийн /элементийн / нэгийг ч байранд үлдээхгүй орлуулгын тоо.

$C_n^k = \frac{n!}{k! (n-k)!}$ байхыг хялбархан салгаж болно. Одоо бодлогыг индукцээр баталъя.

$$n=1 \quad \text{бол} \quad \sum_{k=0}^n k \cdot P_n(k) = 0 \cdot P_1(0) + 1 \cdot P_1(1) = 1$$

Иймд бодлогыг n үед үнэн гэе. Өөрөөр хэлбэл

$$\sum_{k=0}^n k \cdot P_n(k) = n!$$

$$\text{Цагт нь} \quad \sum_{k=0}^{n+1} k \cdot P_{n+1}(k) = (n+1)!$$

гэх баталъя.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k \cdot P_{n+1}(k) &= \sum_{k=0}^{n+1} k \cdot C_{n+1}^k P_{n+1-k}(0) = \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot C_{n+1}^k P_{n+1-k}(0) = \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot \frac{n+1}{k} \cdot C_n^{k-1} P_{n+1-k}(0) = \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (n+1) C_n^{k-1} P_{n+1-k}(0) \quad (1) \end{aligned}$$

(1)-ий $k-1=t$ - гэж орлуулан бичвэл:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k \cdot P_{n+1}(k) = (n+1) \sum_{k=0}^n C_n^k P_{n-k}(0) = (n+1) \sum_{k=0}^n P_n(k) =$$

$$= (n+1) \cdot n! = (n+1)!$$

болно.

Учир нь $\sum_{k=0}^n P_n(k) = n!$ байх нь илэрхий.
Энэ бодолт миний хийсэн бодолт бөгөөд авторынхаас зарчмын хувьд өөр км/. Сурагч С.Батболд

$P_n(k) = C_n^k P_{n-k}(0)$ - ыг тавь нэдэх байсан боловч үүнийгээ ашиглаж чадаагүй. Энэ бодлогыг сурагч Ц.Даваангарэн өөр аргаар бодсон. Түүний бодолтыг доор сийрүүтээв. Бодлогыг мөн n -ээр индукцан гүйцэтгэсэн км.

$$n=1 \text{ үед бугд илт. } n=2 \text{ үед } \sum_{k=0}^2 k P_2(k) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2!$$

Одоо $\sum_{k=0}^n k P_n(k) = n!$ -ийг үнэн гэв.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k P_{n+1}(k) = (n+1)! \text{ болохыг баталъя. Эхлээд}$$

$$P_{n+1}(k) = \frac{n+1}{k} \cdot P_n(k-1) \text{ болохыг үзүүлнэ.}$$

$n+1$ - элементээс яг k элементийг байрандаа үлдээх орлуулга бүрийг нэг элементийг хөдөлгөөнгүй сонгон сонгон аваад үлдсэ: n - элементээс яг $(k-1)$ -ийг нь байрандаа үлдээсэн орлуулга гэж сэтгэх болно. $n+1$ элементээс нэг элемент сонгон авах боломж $n+1$ -тэй тэнцүү. Үн хөдлөх k элементийн хувьд уг орлуулга k удаа тоологдох буй учир

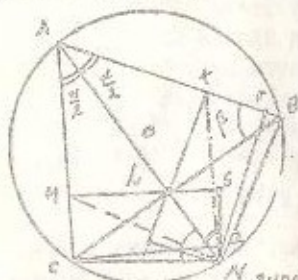
$$P_n(k) = \frac{n+1}{k} P_n(k-1) \text{ болно.}$$

$$\text{Иймд } k \cdot P_{n+1}(k) = k \cdot \frac{n+1}{k} P_n(k-1) = (n+1) P_n(k-1) \text{ болно.}$$

$$\text{Ивем нь } \sum_{k=0}^{n+1} k \cdot P_{n+1}(k) = (n+1)(P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(n)) =$$

$$= (n+1)n! = (n+1)! \quad \square$$

П бодлогын бодолт. Уг бодлогыг манай багийн сурагчдаас С.Батболд, Э.Мягдалгорж, Б.Цэвээр-тан, Долгор нар зөв бодсон юм. Эхлээд С.Батболдын бодолтыг өгье. / Зураг 1/



Зураг 1. Зураг 2

N -ээс ML -д буулгасан перпендикулярны суурийг S ; KL -д буулгасан перпендикулярны суурийг D ; AB -д буулгасан перпендикулярны суурийг F ; C -өөр SN -д буулгасан перпендикулярны суурийг Q гэх тус тус тэмдэглэе. AL биссектрис тухь $\angle NAB = \angle NAC$ Нийд $NB = NC$ болно. AM ба SN нэг шулуунд перпендикуляр тухь хоорондоо параллель

$$\angle SNL = \angle LAC = \frac{\alpha}{2} \quad \text{Нэг хөвчид тулсан учир}$$

$$\angle LAC = \angle QCN = \frac{\alpha}{2} \quad \text{Мөн адилнаар}$$

$$\angle ABC = \angle ANC = \beta$$

Эндээс

$$\angle FBN = \angle QNC = \beta + \frac{\alpha}{2}$$

нийд тэгш эцэгт

хоёр гурвалжин $\triangle FBN$ ба $\triangle QNC$ тесөөтэй болно.
 Эндээс $FB = QN$. Цааш нь $MC = SQ$, $DN = KF$
 учир $KB + MC = SN + DN$ (2) болно.
 $\triangle ALK \cong \triangle ALM$ - ээс $KL = ML$ тул
 (2) -ыг үүгээр үржүүлбэл

$$S_{\triangle KLB} + S_{\triangle MCL} = S_{\triangle KNL} + S_{\triangle MLN}$$

байхыг олно. Уг тэнцэтгэлийн хоёр тал дээр нь $S_{\triangle KLM}$

-ийг нэмбэл $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle KLM}$ болох нь батлагдана.
 Одоо зохиогчдын бодолтыг өгье. /Зураг 2/-ыг үз. P нь
 $AKLM$ -ийг дагтгасан тойрог B шулууныг огтлох хоёр
 дахь цэг нь байг. Тэгвэл нэг нумд тулсан өндөг учраас
 $\angle BCN = \angle BAN$. Мөн ийм шалтгаанаар

$\angle MAL = \angle MPL$. AL - биссектрис учир

$\angle BCN = \angle BAL = \angle MAL$ иймд $\angle MPL = \angle BCN$.

Эндээс $PM \parallel NC$. Үүнийг адилаар $KP \parallel BN$ болно.

$BKPN$ ба $NPMS$ трапец учир $S_{\triangle BCE} = S_{\triangle DFE}$

ба $S_{\triangle DFE} = S_{\triangle CFM}$ /Ямар учраас вэ? шалтгааныг ол /

болно. Эндээс $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle KLM}$ байх нь ойлгомжтой юм.

III бодлогын бодолт. Манай сурагчдаас энэ бодлогыг
 бодсон хүн байхгүй. Зохиогчийн бодолтыг өгье.

$$x_i^2 \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{ба} \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

учир Кошийн тэнцэтгэл бишийг ашиглавал:

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{n} = \sqrt{n}$$

болно. Иймээс $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ бол

$$|a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n| \quad \text{хэлбэрийн бүх нийлбэр}$$

1/5

ямар нэг $(k-1)/\sqrt{n}$ урттай битүү завсар дотор харьяалаг-
 дана. Учир нь $|a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n| \leq \sum_{i=1}^n |a_i x_i| \leq$

$$\leq \sum_{i=1}^n |a_i| |x_i| \leq (k-1) \sum_{i=1}^n |x_i| \leq (k-1) \sqrt{n}$$

Энэ завсрыг $\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$ урттай k^n-1 ширхэг жижиг завсруудаар бүрхэж болно. Бэлэсэн $x_1, \dots, x_n$ - ийн хувьд дээр авч үзэж буй бүх нийлбэрийн тоо k^n учраас тэдгээрийн ядам хоёр нь нэг жижиг завсарт харьяалагдах болно. Энэ хоёр нийлбэрийг $|c_1 x_1 + \dots + c_n x_n|$, $|b_1 x_1 + \dots + b_n x_n|$ гэвэл тэдгээрийн ялгавар завсрын уртаас хэтрэхгүй бөгөөд $|x| - |y| \leq |x - y|$ учир

$$|c_1 x_1 + \dots + c_n x_n| - |b_1 x_1 + \dots + b_n x_n| \leq |a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$$

ба $a_i = c_i - b_i$ тул $a_i \in \{0, \pm 1; \pm 2, \dots, \pm(k-1)\}$ болох нь ойлгомжтой.

IV. Бодлогын бодолт. Энэ бодлогыг манай багийн сурагчид бодоогүй юм. Иймд зохиогчийн бодолтыг өгье. Тийм функц f оршин байдаг гэв. Тэгвэл дурын $n \in \mathbb{N}$ тооны хувьд

$$f(n + 1987) = f(f(f(n))) = f(n) + 1987$$

тэнцэтгэл биелнэ. Цааш нь индукцаар, дурын $n, t \in \mathbb{N}$ тооны хувьд

$$f(n + 1987t) = f(n) + 1987t$$

байхыг хялбархан харуулж болно. Нөгөө талаас, хэрэв $z \in 1986\mathbb{N}$ байх натурал тоо өөрөөр хэлбэл $z \in \mathbb{N}_0$ бол $f(z)$ -ийг

$$f(z) = 1987k + l, \quad k, l \in \mathbb{N}_0, \quad l \in 1986\mathbb{N}$$

дүртэй тавьж болно.

Нөхцөл ёсоор $f(f(z)) = z + 1987$ саяны тэнцэтгэл ёсоор $f(f(z)) = f(l + 1987k) = f(l) + 1987k$ Эндээс дараах хоёр боломж гарна:

$$a) k=1. \text{ Энэ үед } f(z) = 1987 + l \quad \text{ба} \quad f(l) = z$$

Иймд $2 \neq 1$.

б/ $x=0$ $f(2)=1$ ба $f(1)=2+1987$ Иймд $2 \neq 1$

Тийнхүү $\{0, 1, 2, \dots, 1986\}$ олонлогийн элементүүд дараах байдалаар $a \neq b$ байх (a, b) хост чуваагдана.

Үүнд:

Эсвэл $f(a)=b$ ба $f(b)=a+1987$

эсвэл $f(b)=a$ ба $f(a)=b+1987$

$\{0, 1, 2, \dots, 1986\}$ олонлог сондгой тооны элементтэй учир энэ нь олонхгүй. Иймд нөхцлийг хангах функц үл олдоно. $\square$

У бодлогын бодолт. Энэ бодлогыг сурагч С.Батболд, Ц.Долгор нар зөв бодсон. С.Батболд зохиогчийнхтой яг адил бодсон. Энд С.Батболдын бодолтыг бичье. Хавтгайд $P(i, i')$

$i=1, 2, 3, \dots, n$ координаттай n цэг сонгох авъя.

Тэгвэл

$$P_j P_i = \sqrt{(i-j)^2 + (i^2-j^2)^2} = |i-j| \sqrt{1+(i+j)^2}$$

болно. Одоо $i \neq j$, $i \neq j$ үед $\sqrt{1+(i+j)^2}$ иррационал тоо байхыг хялбархан үзүүлж болно. Эсрэгээр нь батална /.

$\Delta P_j P_i$ $i < j < n$ гурвалжны талбай нь

$$S_{P_j P_i} = \frac{i^2 + n^2}{2} (n-i) - \frac{i^2 + j^2}{2} (j-i) - \frac{j^2 + n^2}{2} (n-j)$$

учир рационал тоо болно. Ц.Долгор ч ийм санаагаар лийсэн бөгөөд иррационал координаттай n цэг сонгох авсан юм. $\square$

II. Бодлогын бодолт. y нь $y \leq n-2$ ба y^2+y+n -тоо зохиомол тоо байх хамгийн бага сөрөг бий бүхэл тоо байг. y^2+y+n тооны хамгийн бага эхний хуваагчийг q гэж тэмдэглэе. Эхлээд $q > 2y$ гэж үзүүлб. $q \leq 2y$ байна гэж эсрэгээр нь авч үзье. Төвч болгох зорилгоор x тооны хувьд $x^2+x+n=f(x)$ гэж тэмдэглэе. $f(y)-f(x)=(y+x+1)(y-x)$

дүртэй тавигдана. Хэрэв $x \in \{0, 1, \dots, y-1\}$ гэх авч
үзвэл $y-x$ - ялгавар $1, 2, \dots, y$ гэсэн утга авна. $x+y+1$
илэрхийлэл нь $y+1, y+2, \dots, 2y$ утга авна.
Иймээс $q \mid (f(y) - f(x))$ байх x тоо, хүүд

0 $x \leq y-1$, олдоно.

Сонголт ёсоор $q \mid f(y)$ ба $f(x)$ анхны тоо. Иймд
 $q \mid f(x)$. q - анхны тоо учир $f(x) = q$.

Цааш нь :

$$y-x \leq n-2 \leq n+x+x^2 = f(x)$$

$$(y+x+1) \leq n+x-1 \leq n+x+x^2 = f(x)$$

Эндээс $f(x) \mid (y-1)(y+x+1)$ - гэсэн нөхцөл боломжгүй болох
нь $f(x) = q$ хүү 1

Энэ хэрхлэл $(q \geq 2y+1)$ байхыг харуулна. q - тоо
 $f(y)$ - ийн хамгийн бага анхны тоон хуваагч нь учир
 $q \leq \sqrt{f(y)}$ бэлээ. Иймээс $f(y) \geq q^2$. дээр батлагдсан
бүйлдээс:

$$y^2 + y + n \geq (2y+1)^2 = 4y^2 + 4y + 1$$

болно.

Энэ тэгцэтгэл бэлээс $y \leq \sqrt{\frac{n}{3}}$ байх нь илэрхий. Иймд

$f(0), f(1), \dots, f(\sqrt{\frac{n}{3}})$ тоонууд дотор зохиомол тоо байхад хүрв.
Энэ нь бодлогын нөхцөлд харшилна. Иймд

$f(0), f(1), \dots, f(n-2)$ тоонуудын дотор зохиомол
тоогүй байна. 2

$$3y^2 + 3y - n + 1 \leq 0$$

$$3\left(y^2 + y - \frac{n-1}{3}\right) \leq 0$$

-43-

$$y_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{n-1}{3}}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3+4n-4}{12}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4n-1}{12}}$$



ИНВАРИАНТ

Б.Адьяасүрэн

Ц.Батхүү

Ямар нэгэн объект, түүн дээр хийгдэх хувиргалтууд өгөгдөөд эдгээр хувиргалтаар уул объектыг тодорхой нэг дүрсэд оруулж чадахгүйг батлах бодлого дунд сургуулийн сурах бичгээс эхлээд бүх шатны олимпиадын материалд элсэг дайралддаг.

Хувиргалт бүрийг дэс дараалан бүрэн гүйцэд хянах нь төвөгтэй нүсэр тооцоо шаарддаг. Иймд уг хувиргалтыг хувьд өөрчлөгддөггүй үлддэг "Объектын шинэ чанарыг илтгэсэн хэмжигдэхүүнийг олж тогтоон, түүний тусламжтайгаар дээрх хэлбэрийн бодлогуудыг шийдэж болдог. Энэ хэмжигдэхүүнийг хувиргалтын инвариант гэдэг.

Инвариант хэмжигдэхүүн нь хувиргалтын аль ч латанд янхныхаасаа өөр утга авахгүй. Чухамхүү энэ чанарыг бодлого бодлоход ашиглаж болно. Инвариант хэмжигдэхүүнийг олж тогтоож, хэрэглэх арга замыг хялбар бодлого жишээн дээр үзүүлнэ.

Бодлогод олонтой таазралддаг хамгийн багшийн инвариант нь тооны тэгш сондгой, хуваагдах чанар юм.

Бодлого I. Самбар дээр 1986 ширхэг (+) тэмдэг, 1987 ширхэг (-) тэмдэг бичсэн байв. Сурагч эдгээр тэмдгүүдээс дураараа хоёрыг арилган оронд нь арилгасан тэмдгүүд ижил тохиолдолд (+) тэмдэг, эсрэг тохиолдолд (-) тэмдэг тавина. Энэ үйлдлийг цаашид дэс дараалан үйлдээд байвал хамгийн сүүлд ямар тэмдэг үлдэх вэ?

Бодолт. I-р арга. Хэрэв (+) тэмдгийг I-ээр, (-) тэмдгийг (-1) -ээр соливол бодлогын нөхцөлд дурьдсан тэмдгүүд

дээр хийх үйлдэл нь дураараа 2 тоо арилгах, тэдгээрийн оронд үрхвэрийг нь бичнэ гэсэн тэнцүү чанартай өгүүлбэрээр солигдоно. Энэ үйлдлийн хувьч самбар дээрх бүх тооны үрхвэр нь үл өөрчлөгдөх хэмжигдэхүүн болно. Иймд анх тэдгээрийн үрхвэр (-1) байсан бол хамгийн сүүлд мөн л (-1) буюу (-) тэмдэг үлдэнэ.

2-р арга. Бодлогын нөхцөлд дуусдсан үйлдлийг гүйцэтгэхэд (-) тэмдгийн тоо эсвэл огт өөрчлөгдөхгүй, эсвэл 2-оор цөөрнө. Иймд анх сондгой тооны (-) тэмдэг байсан тул хамгийн сүүлд (1 ширхэг) (-) тэмдэг үлдэнэ.

Дээрх 2 янзын бодолт нь самбар дээр бичигдсэн тоонуудын үрхвэрт (-) тэмдгийн тэгш сондгой чанар үл өөрчлөгдөнө гэдэгт тулгуурлах байгаа тул эдгээр нь бодлогын нөхцлөөр тодорхойлогдох үйлдлийн инвариант хэмжигдэхүүнүүд юм.

Бодлого 2. 1-ээс 1000 000 хүртэлх тоо бүрийг тэдгээрийн цифруудийн нийлбэртэй тэнцүү тоогоор солив. Гарсан тоонууд дээрх үйлдлийг давтан хийх замаар дан нэг оронтой 1000 000 ширхэг тоо гаргав. Тэгвэл эдгээр тоонууд дотор 1, 2 хоёрын аль нь олон байх вэ?

Бодолт. Тоог цифруудийн нь нийлбэртэй тэнцүү тоогоор солиход 9-д хуваагдах чанар нь хадгалагдана. Иймд дээрх үйлдлийн инвариант хэмжигдэхүүн нь 9-д хуваагдах чанар болно. Тэгвэл үлдсэн нэг оронтой тоонууд дотор тус бүр

$999999:9=111111$ ширхэг 1, 2, ..., 9 тоонууд байх ба 1000000 -ыг 9-д хуваахал 1 үлдэх тул эдгээр тоонууд дотор 1 тоо 2-ын тооноос нэг ширхэгээр илүү байна.

Бодлого 3. Самбарт 1, 2, 3, ..., 1986 гэсэн 1986 ширхэг тоонууд бичигдсэн байв. Сурагчид эдгээр тоонуудаас аль нэг 2-ыг лавч оронд нь тэдгээрийн нягаврын абсолют хэмжээг бичих процессийг ганц тоо үлдэх хүртэл үргэлжлүүлэв. Үлдсэн ганц тоо нь 0 байх болох уу?

Бодолт. 1, 2, ..., 1986 тоонуудын дотроос x, y тоог авч дараа тэдгээрийн оролд $(x-y)$ ялгаарыг бичихэд $(1+2+3+\dots+1986)$ нийлбэрийн тэгш сондгой чанар хадгалагдана. Ө.х. бодлогын нөхцөлд дурьдсан үйлдлийн хувь дахь инвариант хэмжигдэхүүн нь дээрх нийлбэрийн тэгш сондгой чанар болно. Нийлбэр сондгой учир дээрх үйлдлийг гүйцэтгэхэд хамгийн сүүлд үлдэх ганц тоо сондгой байна. Иймд дээрх замаар тэгийг гаргах авч чадахгүй.

Бодлого 4. а/ Шатрын хөлгийн зүүн доод булан а1-д байгаа морь еерийнхөө нүүдлээр нүд болгонд зөвхөн I удаа бууж баруун дээд булан h^8 -д очиж чадах у?

б/ 10×10 нүдтэй шатрын хөлгийг 4 нүднээс тогтох үсгийн хэлбэрт дүрсүүдэд хувааж бодох уу?

Бодолт. а/ Чаахгүй. Нүд болгон дээр I удаа бууж учир 68 удаа нүүнэ. Гэтэл сондгой дугаартай нүүлээ бүрд морь эсвэл цагаан нүдэн дээр (а1, h^8 нь хар нүднүүд) бууна. Энэ бол морин нүүдлийн хувьд инвариант. Иймд 68 нүүгээд хар нүднээс хар нүдэнд бууж чадахгүй.

б/ Болохгүй. 4 нүднээс тогтох T үсгийн хэлбэртэй дүрсүүд нь эсвэл I хар нүд эсвэл 3 хар нүдтэй байна.

Шатрын хэдгэйг $100:4=25$ ширхэг 4 нүднээс тогтох



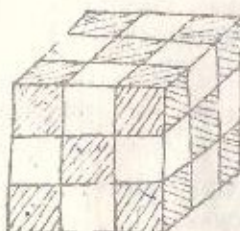
хэлбэрийн дүрсэд хувааж бодогдсон бол шатрын хөлөг заамаа сондгой тооны хар нүдтэй байхад хүрнэ. Ө.х. дээрх хуваалтын инвариант нь хар нүдийн тоо сондгой байх чанар юм. Гэтэл 10×10 нүдтэй шатрын хөлөг нь $100:2=50$ тэгш тооны хар нүдтэй.

Одоо бодлого 3-ын ерөгтгөлийг авч үзье. Энэ тохиолдолд инвариант хэмжигдэхүүнүүд тийм хялбар харагдахгүй учир нэмэлт байгуулалт /бодолт/ хийж инвариант хэмжигдэхүүнийг олно.

Бодлого 5. а/ Рубикийн шосны голын нэгийг кубэд орших цох куб болгонд зөвхөн нэг удаа олж, ерөнхий талстай

кубүүдээр дэншин хооноого гарч чадх уу?
 а/ 10×10 нүдтэй шатрын хөлгийг 1×4 тэгш өнцөгт
 нүднүүдэд хувиаж болох уу?

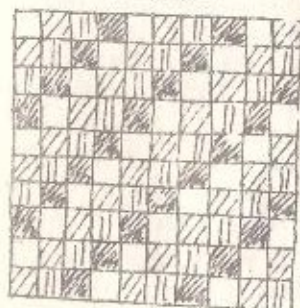
Бодолт. а/ Чадэхгүй. Ерөнхий талстай кубүүдийн **24** рэг
 өнгөөр будах замаар бүх кубүүдийг хар, цагаан өнгөө, будъя.



Голын кубыг цагаан өнгөөр
 будсан гэвэл 14 хар, 13 цагаан
 куб үүснэ. Цох нэг кубээс нөг-
 гөө кубэд дамжих шилжилтийн
 хувьд кубүүдийн өнгөр соолжлох
 чанар нь инвариант болно.

Гэтэл голын кубэд орших
 цох үлдсэн 14 хар, 12 цагаан
 кубад 1 улга байж өнгө соосмж-
 лен дамжих чадахгүй.

б/ Болохгүй. Шатрын хөлгийг зуралт үзүүлсэн байдлаар
 4 өнгөөр будъя.



Аливаа 1×4

- 1-р өнгө ☐ тэгш өнцөгт
- 2-р өнгө ☒ тэд болгон
- 3-р өнгө ☐ өнгө тус бүрийн
- 4-р өнгө ☒ нү.
- нагийг агуул-
на.

Иймд аливаа хуваалтын
 хувьд инвариант нь өнгө тус-
 бүрийн нү. тэнцүү байх чанар
 болно.

Гэтэл 1-р ангийн нүд 26, 4-р ангийн нүд 24 болохыг хялбар
 харж болно.

Енэ дааж бодох бодлогууд:

1. Нүднүүд дээр нь бүхэл тоо бичигсэн 8×8 хэмжээ-
 тэй таблиц өгөгдөл. Хэрэв түүнээс аливаа 3×3 эсвэл 4×4

*Миндугуу нь
 3, 21 дөр
 нэгдүгээ.*

хэмжээтэй квадратыг авч тэдгээрийн нүднүүд дээр бичигдсэн тоо тус бүрийг 1-ээр ихэсгэн болдог бол энэ үйлдлийг дээ дараалан гүйцэтгэх замаар анхны таблицын нүд бүр дэх тоог 8-т хуваагддаг тоо байхаар өөрчилж болох уу?

2. 1, 2, ..., n тоонууд ямар нэг эрэмбээр байрласан байна. Хэрэв ээргэлдээ орших аливаа 2 тооны багцыг сольж болдог бол энэ үйлдлийг сондгой тооны удаа үйлдэхэд анхны байрлалаас ялгаатай байрлал үүсдэгийг батал.

3. Зүүн доод булан a_1 , баруун дээд булан a_8 -ыг таслан авсан шатрын хөлгийг нэг нүднээс ялгаатай тэнцүү талбайтай тэгш өнцөгт нүднүүдэд хувааж болох уу?

4. Гүдгэр олон өнцөгтийг төгсгөлөг тооны гүдгэр бие 4 өнцөгтүүдэд хувааж болдоггүйг батал.

5. Гүдгэр $A_1, \dots, A_m$ гэсэн 2m өнцөгтийн диагоналууд дээр үл орших p цэг өгөгдөв. Тэгвэл p цэг нь $A_1, \dots, A_m$ цэгүүдэд орохтой хянг тооны гурвалжуудад харгалзагддаг болохыг батал.

$$04 + 9n + 96m = 7 \cdot 9 + 9n + 9m + 7m + 1 =$$

$$9(2n + m) + 7m + 1 \quad m = 7m + 1 =$$

$$m = 3k + 2 = 7(3k + 2) + 1 = 21k + 72 + 1$$

$$k = 0, 1, 2$$

$$2 = 0 \Rightarrow 2y \quad m \neq 3$$

$$2 = 1 \Rightarrow 4y \quad m \neq 3$$

$$2 = 2 \Rightarrow 4y \quad 15 \text{ ... } m \neq 3$$

$$m = 54y$$

$$80$$

$$m = 3k + 2 \text{ удаа}$$

3-ийн дагуу

3 хуваагддаг аар

сөрөгтөн дооно

$$\frac{80}{104} = \frac{20}{26} = \frac{10}{13}$$

§ I. Натурал тоон олонлог болох
түүний дэд олонлогсөр
индукцлах

Натурал тоон олонлог $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ -ийн үндсэн тодорхойлогч чанарын /аксиомын/ нэгийг дараах байдлаар тодорхойлж болно. (I) N -ийн ямар нэг дэд олонлог M нь тэгийг агуулдаг ба M -д харьяалагдах n бүрийг хувьд $n+1$ -ийг M агуулдаг бол $M = N$ байна. Чухамхүү энэ чанараас бүтэн индукцийн зарчмыг гаргахад гардаг билээ.

Теорем I.1. Хэрэв ямар нэг E чанарыг 0 хангадаг /индукцийн үндэслэл/ ба $n \in N$ E -г хангадаг /индукцийн таа-агдал/ гэдгээс $n+1$ нь E чанартай /индукцийн шилжилт/ бол E чанарыг бүх натурал тоо хангана /индукцийн дүгнэлт/.

Баталгаа. M -ээр E чанартай бүх натурал тоонуудыг олонлогийг тэмдэглэвэл M нь (I) дэх нөхцөлийг хангах тул $M = N$ байна. Өөр өөр хэлбэл бүх натурал тоо E чанартай.

Хэрэв M -д харьяалагдахад гэдгийг E чанар гэвэл (I) -г элэхүү бүтэн индукцийн зарчмын нэг тохиолдол гэж үзвэл түүний олонлогийн нэвчлэл дээрх томъёоноос тэд үзэж болох байна. Бүтэн индукцийн зарчмын нэг хэрэгжлээс болгон натурал тоо олонлогийн дараах чухал чанарыг баталъя.

Лердлөгөө I.2. N -ийн хоосон дин дэд олонлог бүр нь хамгийн бага элементтэй.

баталгаа. Үг тусноос хэтрэхгүй ямар нэг тоо агуулсан M -ийн дэд олонлог бүр хамгийн бага элементтэй гэсэн чанарыг E -ээр тэмдэглэв. Тэгвэл:

а/ индукцийн үндэслэл : $O \in E$ чанартай, учир нь MO -ээс хэтрэхгүй элемент агуулна гэдэг нь $O \in M$ гэсэн үг ба мэдээж O нь M -ийн хамгийн бага элемент болно.

б/ индукцийн шилжилт : 1 : n нь E чанартай байг. /индукцийн таамаглал / гээд $n+1$ нь E чанартайг үзүүлб. M нь $n+1$ -ээс хэтрэхгүй тоо K -г агуулдаг болог. Хоёр тохьолдол бий: 1 / $K < n+1$ бол $K \in n$, иймд n нь E чанартайн ачаар M нь хамгийн бага элементтэй;

2 / $K = n+1$ бол эсвэл $n+1$ нь M -ийн хамгийн бага элемент, эсвэл M -д $n+1$ -ээс эрс бага элемент бий, энэ үед мөг 1 / тохьолдол ёсоор M хамгийн бага элементтэй. Ийнхүү индукцийн дүгнэлт ёсоор ямарч натурал тоо E чанартай. Эдөө N -ээс дурьд хосон бич дэд олонлог M -ийг авбал түүнд ядах нэг натурал тоо K бий. K нь E чанартайн улмаас M нь хамгийн бага элементтэй

Энэ мөрдлөгөөг ашиглан теорем 1.1 дэх бүтэн индукцийн зарчмын өөр нэг тусбиололыг гаргах ярьв.

Теорем 1.3 . Хэрэв ямар нэг чанар E -г O хангадаг /индукцийн үндэслэл / ба $O < n$ бүрийн хувьд n -ээс бага натурал тоон бүхэн E -г хангадаг /индукцийн таамаглал / гэдгээс n нь E чанартай байцаг /индукцийн шилжилт / бол E чанарыг бүх натурал тоо хангана /индукцийн дүгнэлт / .

Баталгаа. M -аар E чанарыг хангадаггүй бүх натурал тоонуудын олонлогийг тэмдэглэв. Бидний зорилго бол M -ийг хосон гэж батлах явдал юм. Эсрэгээс нь M нь хосон бич гэв. Тэгвэл мөрдлөгөө 1,2 ёсоор M хамгийн бага элемент m тэй. Индукцийн үндэслэл ёсоор $m \neq O$ ба m -ээс бага натурал тоо болгох M -д орохгүй, ө.х. тэд E чанартай. Иймд индукцийн шилжилт ёсоор m нь

E чанартай. Энэ нь $m \in M$ гэдэгт зөрчил байна. Энэ зөрчил нь M заавал хоосон бөгөөд гадгийг баталж индукцийн дүгнэлт биелэгдэх нь батлагдав.

Теорем 1.3 -аас ерөнхийгээр N -ийн дурьд хоосон бий дэд олонлогоор индукцлах зарчмыг дээрхтэй яг адилхнаар баталж болно:

Теорем 1.4. M нь N -ийн хоосон бий дэд олонлог боловч. Хэрэв M -ийн хамгийн бага элемент E чанартай ба M -ийн бусад элемент бүрийн хувьд түүнээс бага M -ийн бүх элемент E чанартай гэдгээс M чанартай гэх батлагдах бол M -ийн бүх элемент E чанартай байна.

$N \neq M$ -ийн хувьд теорем 1.1, -тэй төсөөтэй индукцийн зарчмыг хүчинтэй. Харин энэ үед индукцийн шилжилт нь M -ийн хамгийн бага нь бие элемент m бүрийн хувьд M дэх түүний яг өмнөх элемент нь E чанартай гэдгээс m чанартай гэх томъёологдоно. $m \in M$ бол n нь m -ийг яг өмнөх гэдэг нь $n < m$ ба M -д $n < z < m$ байх z байхгүй гэсэн үг юм.

§ 2. Минималийн нөхцөлтэй олонлогоор индукцлах

Бид теорем 1.3 -ийн бүр ерөнхий хэлбэрийг гаргах үрэх зорилт тавьж. Үүний тулд зарим огцолтуудыг сургуулъя.

Тодорхойлолт 2.1. Дараах гурвал нөхцөл биелж байвал хоосон бий A олонлогт эрэмбийн харьцаа $<$ тодорхойлогддог, гэдэг.

1/ $a \in A$ бүрийн хувьд $a < a$

2/ $a, b \in A$ бүрийн хувьд, хэрэв $a < b$ ба $b < a$ бол $a = b$

3/ $a, b, c \in A$ бүрийн хувьд, хэрэв $a < b$ ба $b < c$

бол $a < c$. Энэ үед A -г эрэмбэлэгдсэн ($<$ зэр) олонлог гэнэ. Энэ байдлыг товчоор $(A, <)$ гэх бичиж ч явдаг байх.

Б.г B -ийн минимал элемент гэнэ.

в/ Хэрвэ $(A, \leq)$ -ийн хоосон бие дэд олонлог бүр нь хамгийн бага элементтэй бол $(A, \leq)$ -г бүрэн эрэмбэлэгдсэн олонлог гэх ба харин $(A, \leq)$ -ийн хоосон бие дэд олонлог бүр нь минимал элементтэй бол $(A, \leq)$ -г минималийн нөхцөлтэй олонлог гэдэг.

Мердлегее 1.2 нь $(N, \leq)$ -ийг бүрэн эрэмбэлэгдсэн олонлог мөн гэдгийг хэмэ байхад $(N, \leq)$ нь бүрэн эрэмбэлэгдсэн олонлог бие гэдгийг түүн дэд олонлог

$B = \{2, 3\}$ гэрчилж байна. Учир нь $2 \nless 3$, $3 \nless 2$ болох тух 2 ба 3 -ийн аль нь ч $(\{2, 3\}, \leq)$ д хамгийн бага элемент бие харин аль нь ч минимал элемент би.

Теорем 2.3. а/ $(N', \leq)$ минималийн нөхцөлтэй олонлог мөн ба $(N' \setminus \{1\}, \leq)$ -ийн минимал элементүүдийг олонлог нь бүх эхлэх тэнхүү, даас тогтоно.

б/ $(A, \leq)$ нь бүрэн эрэмбэлэгдсэн олонлог бол $(A^m, \leq)$ нь мөн бүрэн эрэмбэлэгдсэн олонлог байна.

в/ $(A, \leq)$ нь минималийн нөхцөлтэй олонлог бол

$(A^m, \leq)$ нь мөн минималийн нөхцөлтэй олонлог байна.

Баталгаа. Зөвхөн (b^2) -г батлая. (b^2) нь үүнтэй "г адилхан батлагдана. (a^2) нь хялбархан батлагдана.

n -ийг E чанартай гэж хэрвэ (b^2) үнэн бол хэлбэ. Тэгээд теорем 1.4-ийг үндэслэн $M = \{1, 2, \dots\} \subseteq N$ дэд олонлогоор илүүжнээ. Цаашд ийм байдлыг:

" n -ээр илүүжнээ" гэж тусчхоор илэрхийлж байна.

$n=1$ үед өгсөн ёсоор $(A^m, \leq) = (A, \leq)$ нь минималийн нөхцөлтэй

$n \geq 2$ ба $1 < m < n$ бүрийн хувьд үнэн с.х. m бүр E чанартай буюу $(A^m, \leq)$ минималийн нөхцөлтэй болог. Илүүдийн таамаглал, тухайлбал, $m = n-1$ үед үнэн гээ. Тэгээд n -ийн хувьд батлая. B нь A^m -ийн дүрэн хоосон бие дэд олонлог ба B_1 нь B -д орлог дарааллуудын эхний гишүүдийн олонлог болог. Тэгвэл

B, A нь хоосон бий дэд олонлог тул B_1^0 гэсэн минималь элементтэй. Одоо $(B_1^0, B_2^0, \dots, B_n^0) \in B$ байх бүх $(B_2^0, \dots, B_n^0)$ дарааллуудын олонлогийг B гэвэл

$B, A^{(n-1)}$ ба B хоосон бий. Индукцийн таамаглал ёсоор B -д минималь элемент $(B_2^0, \dots, B_n^0)$ бий. Одоо $(B_1^0, B_2^0, \dots, B_n^0) \in B$ нь B -ийн минималь элемент гэдэг нь хялбархан шалгагдана.

Дараах теорем дурын минимальийн нөхцөлтэй олонлогоор төр тусмаа бүрэн эрэмбэлэгдсэн олонлогоор индукцлах зарчмыг баталж байна:

Теорем 2.4. $(A, \leq)$ нь минимальийн нөхцөлтэй олонлог E нь түүний элементүүдэд хамаатуулж болох чанар болог. Хэрэв

A -ийн минималь элемент бүр E чанартай / индукцийн үндэслэл / ба A -ийн минималь бий элемент a -ийн тухьд түүнээс эрс бага бүх элементүүд E чанартай / индукцийн таамаглал / гэдгээс $a \in E$ чанартай гэж гардаг / индукцийн шилжилт / бол A -ийн бүх элемент E чанартай байна / индукцийн дүгнэлт /.

Баталгаа. B -ээр E -г хангадаггүй. A -ийн элементүүдийн олонлогийг тэмдэглэе. B -г хоосон гэж батлах нь хангахтай. Зөрөгээр B хоосон бий болог. Тэгвэл B -д минималь элемент b_0 бий. Индукцийн үндэслэл ёсоор b_0 нь A -ийн минималь элемент бий. Иймд b_0 -оос бага элементүүд A -д бий. Гэхдээ b_0 нь B -д минималь учир эдгээр b_0 -оос бага бүх элементүүд B -д орохгүй, ө.х. тэд бүгд E чанартай. Иймд индукцийн шилжилт ёсоор $b_0 \in E$ гэсэн E чанартай байх ёстой. Энэ нь $b_0 \in B$ гэдэгт зөрчилөө. Ийнхүү B хоосон ба иймд A -ийн бүх элементүүд E чанартай.

Мөрдлөг I.2. Болов теорем 2.3 - уудаас теорем 2.4 -ийн үндсэн дээр дараах дүгнэлтийг шууд хийж болно.

Мөрдлөгөө 2.5. $(N, \leq)$ болон $(N^{(n)}, \leq)$ -үүдийн

дурш хоосон бий дэд олонлогоор индукцэлж болно. Ө.х.
 эдгээр эрэмбэлэгдсэн олонлогуудыг хувьд индукцийн
 зарчим хүчинтэй.

§ 3. Зарим бодлогын индукцийн зарчим ашигласан бодолт

3.1. $f: R \rightarrow R$ функцийг $I \subseteq R$ завсарт гүдгэр
 /харгалзан хотгор / тэн хэрвэв энэ завсарт байгуулагд-
 сан f -ийн графикийн альч хоёр цэгийн хоорондох хэсэг
 нь уг хоёр цэгийг холбосон хэвчээс дээш /харгалзан
 доош / оршиж байвал хэлдэг.



Зураг 1

Зураг 1-д өгөгдсөн график-
 тай функц, ийнхөөлбөө I завсарт
 гүдгэр, I завсарт хотгор
 байна. (Аливаа $x, y \in I$ шиг
 үзвэл $f(x) \leq f(y)$ биш I -г завсар
 үзвэл).

Энэ тодорхойлолтыг $f' = f'(x)$ функцийн утгуудын хувьд дахин томъёолбол:

$f: P \rightarrow R$ функц $I \subseteq R$ завсарт гүдгэр / хотгор / байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь аливаа $x_1, x_2 \in I$ ба $a \in [0, 1]$ үүдийн хувьд

$f(ax_1 + (1-a)x_2) \geq a f(x_1) + (1-a)f(x_2)$ тэнцэл биш / үүнийг Йенсений тэнцэл биш гэдэг / биелэх явдал юм.

Харин $y = f(x)$ функц I завсарт нэг ба хоёрдугаар эрэмбийн улынхнал $f'(x), f''(x)$ -тэй бол f нь энэ завсарт гүдгэр /хотгор / байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь аливаа $x \in I$ бүрийн хувьд $f''(x) \leq 0$ ($f''(x) \geq 0$) байх явдал юм.

Бодлого 3.1.А. $y = f(x)$ функц $I \subseteq R$ завсарт гүдгэр /хотгор / ба $n \geq 1$ натурал тоо бол аливаа

$x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ ба аливаа $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ байх $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$ тоонуудын хувьд

(1). $f(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n) \geq a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \dots + a_n f(x_n)$ ($\leq$)

тэнцэл биш биелнэ.

Бодолт. n -ээр индукцлээ / Энд болоод цаашд ийм өгүүлдөр нь чухам шу тэсэн E чанарыг ямар n - үүд хангана гэдэг нь туй тодорхой үед хэргтлэгдэнэ /

$n=1$ үед $a_1=1$ ба $f(a_1 x_1) = f(x_1) = a_1 \cdot f(x_1)$ учир (1) тэнцэл биш үнэн байна. /Бид гүдгэр функцийн хувьд батлая, хотгор үед яг адил батлагдана /

$(n-1)$ -ийн хувьд бодлого бодогдсон гэе.

n -ийн хувьд бодлогыг бодъя. $a_n=1$ бол (1) нилэрхий. $a_1 \neq 1$ бол $1-a_1 \neq 0$ болог.

учир $y = (a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1}) / (1-a_n)$ тэнцэл $a_1 + \dots + a_{n-1} = 1-a_n$ бодлого 3.1.Б - 2 үд.

Ненсний тэнцэл ойм ёсоор

$$f(2, x_1 + (1-2)y) \geq 2 \cdot f(x_1) + (1-2) \cdot f(y)$$

ба

$$p_1 = \frac{2_1}{1-2_1}, \dots, p_{n-1} = \frac{2_{n-1}}{1-2_{n-1}} \text{ гэвэл } p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} = 1$$

болох тул индукцийн таамаглал ёсоор

$$f(y) = f(p_1 x_1 + \dots + p_{n-1} x_n) \geq p_1 f(x_1) + \dots + p_{n-1} f(x_n)$$

Үүнийг дээрх тэнцэл бишид орлуулбал (I) батлагдана.

Бодлого 3.1.Б I нь R -ийн дэд олонлог болог.

Тэгвэл I нь завсар байх зайлгүй бөгөөд хүрэлцээтэй

нөхцөл нь аливаа $n \geq 1$ ба $2_1 + 2_2 + \dots + 2_n = 1$

байх $2_1, 2_2, \dots, 2_n \in [0, 1]$ болон аливаа $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$

үүүдийн хувьд $2_1 x_1 + 2_2 x_2 + \dots + 2_n x_n \in I$ байх

яг үнэн гэдгийг батал.

Бодлого 3.1.В Дараах тэнцэл бишүүдийг тохирох

$y = f(x)$, $I \subseteq R$, $2_1, 2_2, \dots, 2_n$, $x_1, x_2, \dots, x_n$

үүдийг сонгох замаар бодлого 3.1. А-г шууд амгалах

батал:

1/ $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ ба

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

2/ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ба $a, b, p, q > 0$ бол $a \cdot b \leq \frac{1}{p} \cdot a^p + \frac{1}{q} \cdot b^q$

3/ $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$ бол

$$\sqrt[n]{1-x_1^n} + \sqrt[n]{1-x_2^n} + \dots + \sqrt[n]{1-x_n^n} \leq n \cdot \sqrt[n]{1 - \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^n}$$

4/ $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ ба $k \geq 1$ ба

$$\frac{a_1^k + \dots + a_n^k}{n} \geq \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^k$$

$0 < k < 1$ бол

$$\frac{a_1^k + \dots + a_n^k}{n} \leq \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^k$$

5. α, β, γ нь нэг гурвалжны өнцгүүд бол

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

3.2. Хэрэв хавтгай дээрх дүрс F нь өөрийн аль ч хоёр гэгчийг тэдгээрийг холбосон хэрчимийн хамт агуулдаг бол түүнийг гүдгэр дүрс гэх нэрлэдэг.

Бодлого 3.2. А. /Хеллийн теорем/. Хавтгайд аль ч гурав нь ерөнхий цэгтэй төгсгөдөг тосын гүдгэр дүрсүүд өгчээ. Тэгвэл эд бүгд ерөнхий цэгтэй гэдгийг батал.

Бодолт. Гүдгэр дүрсүүдийн тоо n -ээр индукцлаа. Тэгвэл $n \geq 3$.

$n=3$ үед өөрийн хэл бар бий тохиолдлын гардаг. /Зарим үед өөрийн хэл бар бий тохиолдлын гардаг бэл ах нь индукцийн шилжилтийг батлахад чухал санааг өгөх ямуу, эсвэл танд шууд хэрэглэгддэг тал бий. Иймд ерөнхий индукцийн үндэслэлийг гэдгийг түүний дараах утгад шалгах хэрэг гардаг /.

$n=4$ үед мөн батлаа. F_1, F_2, F_3, F_4 - өгсөн гүдгэр дүрсүүд, M_i нь F_i -ээс бусад гуравныг нь огтлолцлолд байх ямар нэг цэг болог, $i=1,2,3,4$. Энд хоёр тохиолдол байна (а). M_1, M_2, M_3, M_4 цэгүүд гүдгэр $4-n$ өнцөгтийн орой байх, (б) аль нэг нь (тухайлбал M_4 нь) бусад гурав дээр нь оройтой (M_1, M_2, M_3) гурвалжны дотор орших;

(а) тохиолдол уг 4 өнцөгтийн диагоналуудыг огтлолцол нь дөрвөн дүрсийн огтлолцлод орно; (б) тохиолдолд M_4 нь бүгдэд нь харьяалагдана / F_i бүр гүдгэр гэдгийг анхаар/. $4 \leq n-1$ -н ийн хувьд үнэн болог.

n -ийн хувьд үнэн гэх батлан

$F_1, F_2, \dots, F_{n-1}, F_n$ — үүд өгсөн гээ. $F_{n-1} = F_n \cap F_n$ тэмдэглээд

$F_n, F_{n-1}, \dots, F_{n-k}, F_{n-k-1}$ — үүд Халлийн теоремийн нөхцлийг хангахыг батлах. Үүнийн тулд F_i, F_j, F_{i+j} гурав л ерөнхий цэгтэйг батлах шаардлагатай. Гэтэл

F_i, F_j, F_{n-k}, F_n дөрөв $n=4$ -ийн хувьд баталснаар ерөнхий цэгтэй, энэ нь $F_i, F_j, F_{i+j} = F_{n-k}, \cap F_n$ хуурын ерөнхий цэг болно. $n=4$ үед шалгахгүйн учир үүхэ байгаа юм! / Ийнхүү индукцийн таамаглал ёсоор

$n-1$ дүрс $F_i, F_{i+1}, \dots, F_{n-2}, F_{n-1}$ үүд ерөнхий цэгтэй, тэр нь $F_i, F_{i+1}, \dots, F_n$ — үүдийн ерөнхий цэг гэсэн үг.

Халлийн теоремийг ашиглаад дараах бодлогыг бод.

Бодлого 3.2. Б. Хавтгайд өгсөн төгсгөлөг тооны цэгүүдийн аль ч гурвыг нь нэгж радиустай тойрогт багтаах боловч бол бүгдийг нь нэгж радиустай тойрогт багтаах болно. / Санаж. Ацэг O -д төвтэй нэгж радиустай тойрогт багтана гэдэг нь Оцэг A -д төвтэй нэгж радиустай тойрогт багтана гэд эгтэй адил юм/.

3.3. n, k -ууд нь натурал тоонууд ба $k > 1$ байг. Энэ үед

$n = a_m \cdot k^m + a_{m-1} \cdot k^{m-1} + \dots + a_1 k + a_0$ ба $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ бүрийн хувьд $a_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ бол n -ийг K -тын системд $a_m a_{m-1} \dots a_0$ бичлэгтэй байна гэж ардаг. a_m -ийг n -ийн ахмад цифр гэнэ. Хэрэв энэ үед $a_m \neq 0$ бол n -ийг $m+1$ оронтой тоо / K -тын системд/ гэнэ. / 0 -ийг нэг оройтой гэж үзнэ/ / $K=10$ үед эрдийн аравтын систем /.

$a_m \neq 0$ байх бичиглэлийг эхитгэгдсэн бичиглэл гэж / $0 = \bar{0}$ -ийг тэгийн эхитгэгдсэн бичиглэл гэж үзнэ /.

Бодлого 3.3. А. $k > 1$ байх натурал тоо K өгчээ. Аливаа натурал тоо n -ийг K -ны системд бичиж болох ба түүний эхитгэгдсэн бичиглэл нь цор ганц байна/ ө.х. $n = a_m \cdot k^m + \dots + a_1 k + a_0 = \bar{a}_m \cdot k^m + \dots + \bar{a}_0$ ба

$a_m \neq 0 \Rightarrow i$, бол $m=5$ ба $a_m = \bar{a}_m, \dots, a_0 = \bar{a}_0$ ба"на.

Бодолт $n=0$ -ийн хувьд илэрхий. $n \geq 1$ ба n -ээс бага бүх натурал тоонд үнэн гэж үзнэ. Одоо n -ийн

хувьд б.тлал. /Энд $(n-1)$ -д үнэн. гээд n -д үнэн гэдэг Теорем I.I дахь зарчмаар батлахад тохиромжгүй/
 $k^0=1, k, k^2, k^3, \dots, k^s, \dots$ гэсэн дараалал S -ээ ихсэх бүр урьд авсан ямар ч тооноос их болж чадах учир

$k^s \leq n < k^{s+1}$ байх S олдоно. Мэдээж энэ S нь n -ийн хувьд цор ганц юм.

n -ийг k^s -д үлдэгдэлтэйгээр хуваая /бодлого 3.3 Б-г үз /.

$n = a_s \cdot k^s + \gamma$. Үүнд $0 \leq \gamma < k^s$ ба a_s, γ -үүд нь өгсөн n, k^s -ийн хувьд ганц ганц байна. Тэгвэл $1 \leq a_s \leq k$ ба $\gamma < k^s \leq n$ буюу $\gamma < n$. Иймүү индукцийн таамаглал ёсоор

$\gamma = \overline{a_m a_{m-1} \dots a_0}$ гэсэн, $a_m \neq 0$ байх цор ганц эмхтгэгдсэн бичиглэлтэй. Тэгвэл дээрх тэнцлээс

n нь $n = \overline{a_s a_{s-1} \dots a_m a_{m-1} \dots a_0}$ гэсэн бичиглэлтэй болно. Үүнд a_s, a_m -ийн хоорондох тэгүүдийн тоо нь $S-m-1$ -тэй тэнцүү. ($m < S$ гэдэг нь нэрхийн). Одоо эмхтгэгдсэн бичиглэлийн цор ганц байхыг батлая.

$n = \overline{a_m a_{m-1} \dots a_0} = \overline{b_s b_{s-1} \dots b_0}$ ба $a_s \neq 0 \neq b_s$ болог. Тэгвэл

$n = a_m \cdot k^m + \overline{a_{m-1} \dots a_0} = b_s \cdot k^s + \overline{b_{s-1} \dots b_0}$ байна.

Ер нь $\overline{c_n c_{n-1} \dots c_0} = c_n \cdot k^n + \overline{c_{n-1} \dots c_0}$ ба

$\overline{c_{n-1} \dots c_0} \leq (k-1) \dots (k-1) = (k-1) \cdot (k^{n-1} + \dots + k + 1) = k^n - 1 < k^n$.

Иймд дээрх тэнцэл болон үлдэгдэлтэй хуваалтын нэг утгатай-гээс

$a = b, a_m = b_s$ ба $\overline{a_{m-1} \dots a_0} = \overline{b_{s-1} \dots b_0}$ болно.

Сүүлийн тэнцлийн хоёр тал дахь эхний O цифруудийг
 / хэрэв байвал / хаяхад эхитгэгдсэн бичлэгүүд гарах ба
 $a_{n-1} \dots a_0 < n$ учир индукцийн таамаглал ёсоор,
 үлдсэн цифруудийн тоо нь тэнцүү /иймд өмнө дарагдсан
 O -үүд ажил тоотой. Учир нь $a = t/$ ба харгалзах
 цифрууд нь тэнцүү. Ийнхүү n -ийн хувьд ч уг бичиглэл
 ганц байх нь батлагдав.

Бодлого 3.3.Б. / M дахь үлдэгдэлтэй хуваалтын
 дүрэм / Аливаа натурал тоо n ба m -үүдийн
 хувьд $m \neq 0$ бол $n = m \cdot q + r$, $0 \leq r < m$

байх q, r гэсэн натурал тоонууд олдох ба тухайн
 n, m -үүдийн хувьд эд нь тус тусдаа цор ганц байна гэд-
 гийг батал / Z ин хувьд мөн адил /

Бодлого 3.3.В. / Олон гишүүнтийн хувь: дахь үлдэг-
 дэлтэй хуваалтын дүрэм /. Аливаа бодит тоон коэффициент-
 тай олон гишүүнт $f(x)$ ба $g(x)$ - үүдийн хувьд
 $g(x) \neq 0$ бол

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x), \quad \deg(r(x)) < \deg(g(x))$$

байх $q(x), r(x)$ олон гишүүнтүүд олдох бөгөөд
 эдгээр нь нэг утгатай олдоно

$\deg(g(x))$ -ээр $s(x)$ олон гишүүнтийн эергийг
 тэмдэглэдэг/

Дээр үзсэн бодлого 3.1.А, 3.2.А, 3.3.А — ууд нь
 индукц хэрэглэж бодоход тохиромжтой бодлогуудын түгээмэл
 хэлбэртэй төдийгүй эдгээр нь нэлээд бодлого бодоход
 хэрэглэгддэгээрээ онцгойлон сонгогдсон юм. Харин одоо
 зарим онцлог бүхий " индукцлэл " хэрэгтэй бодлогуудын
 жишээ авч үзье.

3.4. теорем 1.3; 1.4. дахь индукцийн зарчмыг ашиглахдаа заримдаа n -ийн нэлээд хэдэн эхний утгуудад хэлэ шалгах хэрэг гарнаг. Учир нь n үед батлахын тулд $n-1, n-2, \dots$ гэх нэг нэлээд хэдэн өмнөх утгууд дээрх үзвэлийг нь ашиглах хэрэгтэй. Байдаг юм.

Бодлого 3.4.А. ([1], 17, 18).

$a_1=1, a_2>1$ ба аливаа $n \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд $a_{n+1}^3+1=a_n \cdot a_{n+2}$ байхыг бүхэл тоон дараалал цор ганц оршин байгаа гэдгийг батал.

Бодолт. Аливаа n -ийн хувьд $a_n > 0$ гэдгийг хялбархан баталж болно. Ингэж батлахын зорилго нь тодорхойлогч тэнцлийг $a_{n+2} = (a_{n+1}^3+1)/a_n$ -ээр солих явдал байсан юм. $a_1=1$ -ийг a_3, a_4 - үед бүхэл тоо гэдгээс олох зорилт тавьж.

$$a_3 = (a_2^3+1)/a_1 = a_2^3+1.$$

$$a_4 = (a_3^3+1)/a_2 = ((a_2^3+1)^3+1)/a_2 = ((a_2^9+3a_2^6+3a_2^3+1)+1)/a_2$$

Иймд a_4 бүхэл байхын тулд $1/a_2$ бүхэл буюу $a_2 > 1$ учир $a_2=2$ байх ёстой гэж ойлгоо. a_1, a_2 -уудаар дээрх рекурент/өмнөх гинүүдээр нь дараах гинүүдийг нь тодорхойлсон / томьёоны дагуу өнө дараагийн бусад бүх гинүүд нэг утгатай олноо. Одоо $1 \leq n$ -ээр индукцэн a_n бүр бүхэл тоо гэдгийг баталъя. $n=1,2,3,4$ үед баталсан. Одоо $n \geq 5$ ба n -ээс бага дугаартай гинүүд бүр бүхэл тоо гэж үзье / Тухайлбал $a_{n-4}, a_{n-3},$

a_{n-2}, a_{n-1} - үүд бүхэл тоонууд гэж / Тэгвэл

$$a_{n-1}^3+1 = (a_{n-2}^3+3 \cdot a_{n-3}^3+3 \cdot a_{n-4}^3+1+a_{n-5}^3)/a_{n-2}$$

$$a_n = (a_{n-2}^3+3 \cdot a_{n-3}^3+3 \cdot a_{n-4}^3+1+a_{n-5}^3)/a_{n-2} \cdot a_{n-3}^3$$

$$\text{ба } (a_{n-2}^3+3a_{n-3}^3+3a_{n-4}^3+1+a_{n-5}^3)/a_{n-2} =$$

$$= a_{n-2}^3+3a_{n-3}^3+3 \cdot a_{n-4}^3+a_{n-5}^3 \text{ учир } a_n \text{ -ийг}$$

илэрхийлсэн. ноогдворын хүртвэр нь a_{n-2}, a_{n-3}^3 -д тус тус хуваагдах байна. Нөгөө талаас

$a_{n-1} = (a_{n-2}^3 + 1) / a_{n-3}$ тэнцлээс a_{n-1}, a_{n-2}^3 хоёр хоорондоо харилган анхны гэдэг нь гарна. Иймд уг хүртвэр

$a_{n-2} \cdot a_{n-3}^3$ үржвэрт мөн хуваагдах тул a_n бүхэн тоо болно.

Бодлого 3.4.Б. (II), 23.9). $\{a_n\}$ нь Фибоначчийн дараалал гэдгээрхдэх

$$a_1 = a_2 = 1 \text{ ба } a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{гэсэн}$$

рекурент томъёогоор өгөгдсөн дараалал болог. Мөн $P(k)$ нь 990 зэргийн олон гишүүнт ба $k=992, \dots, 1992$ үед $P(k) = a_k$ байдаг бол

$$P(1993) = a_{1993} - 1 \quad \text{гэдгийг батал.}$$

Санаамж. Зарим үед хийм хэлбэрийн бодлогын ерөнхий томъёолонг олж /1982 гэх мэт онцгой тоон холбогдлоос нь салж/ ерөнхий бодлогыг бодлод тухайн тохиолдол болгон өгсөн бодлогоо шууд бодох нь эвтэй байдаг. Тухайлбал энэ бодлогыг $k=n+2, \dots, 2n+1$ үед $P(k) = a_k$ ба

$P(k)$ -ийн зэрэг n бол $P(2n+1) = a_{2n+1} - 1$ байна" гэх ерөнхийлөн $1 \leq n$ -ээр теорем 1.3. дахь зарчмаар индукцанг бодож болно.

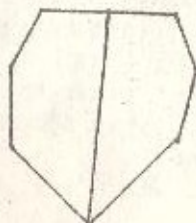
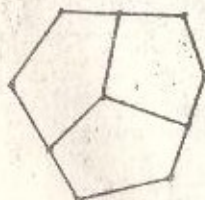
Бодлого 3.4. В /1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 13, 13, 14, 14, 15, 15, 16, 16, 17, 17, 18, 18, 19, 19, 20, 20, 21, 21, 22, 22, 23, 23, 24, 24, 25, 25, 26, 26, 27, 27, 28, 28, 29, 29, 30, 30, 31, 31, 32, 32, 33, 33, 34, 34, 35, 35, 36, 36, 37, 37, 38, 38, 39, 39, 40, 40, 41, 41, 42, 42, 43, 43, 44, 44, 45, 45, 46, 46, 47, 47, 48, 48, 49, 49, 50, 50, 51, 51, 52, 52, 53, 53, 54, 54, 55, 55, 56, 56, 57, 57, 58, 58, 59, 59, 60, 60, 61, 61, 62, 62, 63, 63, 64, 64, 65, 65, 66, 66, 67, 67, 68, 68, 69, 69, 70, 70, 71, 71, 72, 72, 73, 73, 74, 74, 75, 75, 76, 76, 77, 77, 78, 78, 79, 79, 80, 80, 81, 81, 82, 82, 83, 83, 84, 84, 85, 85, 86, 86, 87, 87, 88, 88, 89, 89, 90, 90, 91, 91, 92, 92, 93, 93, 94, 94, 95, 95, 96, 96, 97, 97, 98, 98, 99, 99, 100, 100, 101, 101, 102, 102, 103, 103, 104, 104, 105, 105, 106, 106, 107, 107, 108, 108, 109, 109, 110, 110, 111, 111, 112, 112, 113, 113, 114, 114, 115, 115, 116, 116, 117, 117, 118, 118, 119, 119, 120, 120, 121, 121, 122, 122, 123, 123, 124, 124, 125, 125, 126, 126, 127, 127, 128, 128, 129, 129, 130, 130, 131, 131, 132, 132, 133, 133, 134, 134, 135, 135, 136, 136, 137, 137, 138, 138, 139, 139, 140, 140, 141, 141, 142, 142, 143, 143, 144, 144, 145, 145, 146, 146, 147, 147, 148, 148, 149, 149, 150, 150, 151, 151, 152, 152, 153, 153, 154, 154, 155, 155, 156, 156, 157, 157, 158, 158, 159, 159, 160, 160, 161, 161, 162, 162, 163, 163, 164, 164, 165, 165, 166, 166, 167, 167, 168, 168, 169, 169, 170, 170, 171, 171, 172, 172, 173, 173, 174, 174, 175, 175, 176, 176, 177, 177, 178, 178, 179, 179, 180, 180, 181, 181, 182, 182, 183, 183, 184, 184, 185, 185, 186, 186, 187, 187, 188, 188, 189, 189, 190, 190, 191, 191, 192, 192, 193, 193, 194, 194, 195, 195, 196, 196, 197, 197, 198, 198, 199, 199, 200, 200, 201, 201, 202, 202, 203, 203, 204, 204, 205, 205, 206, 206, 207, 207, 208, 208, 209, 209, 210, 210, 211, 211, 212, 212, 213, 213, 214, 214, 215, 215, 216, 216, 217, 217, 218, 218, 219, 219, 220, 220, 221, 221, 222, 222, 223, 223, 224, 224, 225, 225, 226, 226, 227, 227, 228, 228, 229, 229, 230, 230, 231, 231, 232, 232, 233, 233, 234, 234, 235, 235, 236, 236, 237, 237, 238, 238, 239, 239, 240, 240, 241, 241, 242, 242, 243, 243, 244, 244, 245, 245, 246, 246, 247, 247, 248, 248, 249, 249, 250, 250, 251, 251, 252, 252, 253, 253, 254, 254, 255, 255, 256, 256, 257, 257, 258, 258, 259, 259, 260, 260, 261, 261, 262, 262, 263, 263, 264, 264, 265, 265, 266, 266, 267, 267, 268, 268, 269, 269, 270, 270, 271, 271, 272, 272, 273, 273, 274, 274, 275, 275, 276, 276, 277, 277, 278, 278, 279, 279, 280, 280, 281, 281, 282, 282, 283, 283, 284, 284, 285, 285, 286, 286, 287, 287, 288, 288, 289, 289, 290, 290, 291, 291, 292, 292, 293, 293, 294, 294, 295, 295, 296, 296, 297, 297, 298, 298, 299, 299, 300, 300, 301, 301, 302, 302, 303, 303, 304, 304, 305, 305, 306, 306, 307, 307, 308, 308, 309, 309, 310, 310, 311, 311, 312, 312, 313, 313, 314, 314, 315, 315, 316, 316, 317, 317, 318, 318, 319, 319, 320, 320, 321, 321, 322, 322, 323, 323, 324, 324, 325, 325, 326, 326, 327, 327, 328, 328, 329, 329, 330, 330, 331, 331, 332, 332, 333, 333, 334, 334, 335, 335, 336, 336, 337, 337, 338, 338, 339, 339, 340, 340, 341, 341, 342, 342, 343, 343, 344, 344, 345, 345, 346, 346, 347, 347, 348, 348, 349, 349, 350, 350, 351, 351, 352, 352, 353, 353, 354, 354, 355, 355, 356, 356, 357, 357, 358, 358, 359, 359, 360, 360, 361, 361, 362, 362, 363, 363, 364, 364, 365, 365, 366, 366, 367, 367, 368, 368, 369, 369, 370, 370, 371, 371, 372, 372, 373, 373, 374, 374, 375, 375, 376, 376, 377, 377, 378, 378, 379, 379, 380, 380, 381, 381, 382, 382, 383, 383, 384, 384, 385, 385, 386, 386, 387, 387, 388, 388, 389, 389, 390, 390, 391, 391, 392, 392, 393, 393, 394, 394, 395, 395, 396, 396, 397, 397, 398, 398, 399, 399, 400, 400, 401, 401, 402, 402, 403, 403, 404, 404, 405, 405, 406, 406, 407, 407, 408, 408, 409, 409, 410, 410, 411, 411, 412, 412, 413, 413, 414, 414, 415, 415, 416, 416, 417, 417, 418, 418, 419, 419, 420, 420, 421, 421, 422, 422, 423, 423, 424, 424, 425, 425, 426, 426, 427, 427, 428, 428, 429, 429, 430, 430, 431, 431, 432, 432, 433, 433, 434, 434, 435, 435, 436, 436, 437, 437, 438, 438, 439, 439, 440, 440, 441, 441, 442, 442, 443, 443, 444, 444, 445, 445, 446, 446, 447, 447, 448, 448, 449, 449, 450, 450, 451, 451, 452, 452, 453, 453, 454, 454, 455, 455, 456, 456, 457, 457, 458, 458, 459, 459, 460, 460, 461, 461, 462, 462, 463, 463, 464, 464, 465, 465, 466, 466, 467, 467, 468, 468, 469, 469, 470, 470, 471, 471, 472, 472, 473, 473, 474, 474, 475, 475, 476, 476, 477, 477, 478, 478, 479, 479, 480, 480, 481, 481, 482, 482, 483, 483, 484, 484, 485, 485, 486, 486, 487, 487, 488, 488, 489, 489, 490, 490, 491, 491, 492, 492, 493, 493, 494, 494, 495, 495, 496, 496, 497, 497, 498, 498, 499, 499, 500, 500, 501, 501, 502, 502, 503, 503, 504, 504, 505, 505, 506, 506, 507, 507, 508, 508, 509, 509, 510, 510, 511, 511, 512, 512, 513, 513, 514, 514, 515, 515, 516, 516, 517, 517, 518, 518, 519, 519, 520, 520, 521, 521, 522, 522, 523, 523, 524, 524, 525, 525, 526, 526, 527, 527, 528, 528, 529, 529, 530, 530, 531, 531, 532, 532, 533, 533, 534, 534, 535, 535, 536, 536, 537, 537, 538, 538, 539, 539, 540, 540, 541, 541, 542, 542, 543, 543, 544, 544, 545, 545, 546, 546, 547, 547, 548, 548, 549, 549, 550, 550, 551, 551, 552, 552, 553, 553, 554, 554, 555, 555, 556, 556, 557, 557, 558, 558, 559, 559, 560, 560, 561, 561, 562, 562, 563, 563, 564, 564, 565, 565, 566, 566, 567, 567, 568, 568, 569, 569, 570, 570, 571, 571, 572, 572, 573, 573, 574, 574, 575, 575, 576, 576, 577, 577, 578, 578, 579, 579, 580, 580, 581, 581, 582, 582, 583, 583, 584, 584, 585, 585, 586, 586, 587, 587, 588, 588, 589, 589, 590, 590, 591, 591, 592, 592, 593, 593, 594, 594, 595, 595, 596, 596, 597, 597, 598, 598, 599, 599, 600, 600, 601, 601, 602, 602, 603, 603, 604, 604, 605, 605, 606, 606, 607, 607, 608, 608, 609, 609, 610, 610, 611, 611, 612, 612, 613, 613, 614, 614, 615, 615, 616, 616, 617, 617, 618, 618, 619, 619, 620, 620, 621, 621, 622, 622, 623, 623, 624, 624, 625, 625, 626, 626, 627, 627, 628, 628, 629, 629, 630, 630, 631, 631, 632, 632, 633, 633, 634, 634, 635, 635, 636, 636, 637, 637, 638, 638, 639, 639, 640, 640, 641, 641, 642, 642, 643, 643, 644, 644, 645, 645, 646, 646, 647, 647, 648, 648, 649, 649, 650, 650, 651, 651, 652, 652, 653, 653, 654, 654, 655, 655, 656, 656, 657, 657, 658, 658, 659, 659, 660, 660, 661, 661, 662, 662, 663, 663, 664, 664, 665, 665, 666, 666, 667, 667, 668, 668, 669, 669, 670, 670, 671, 671, 672, 672, 673, 673, 674, 674, 675, 675, 676, 676, 677, 677, 678, 678, 679, 679, 680, 680, 681, 681, 682, 682, 683, 683, 684, 684, 685, 685, 686, 686, 687, 687, 688, 688, 689, 689, 690, 690, 691, 691, 692, 692, 693, 693, 694, 694, 695, 695, 696, 696, 697, 697, 698, 698, 699, 699, 700, 700, 701, 701, 702, 702, 703, 703, 704, 704, 705, 705, 706, 706, 707, 707, 708, 708, 709, 709, 710, 710, 711, 711, 712, 712, 713, 713, 714, 714, 715, 715, 716, 716, 717, 717, 718, 718, 719, 719, 720, 720, 721, 721, 722, 722, 723, 723, 724, 724, 725, 725, 726, 726, 727, 727, 728, 728, 729, 729, 730, 730, 731, 731, 732, 732, 733, 733, 734, 734, 735, 735, 736, 736, 737, 737, 738, 738, 739, 739, 740, 740, 741, 741, 742, 742, 743, 743, 744, 744, 745, 745, 746, 746, 747, 747, 748, 748, 749, 749, 750, 750, 751, 751, 752, 752, 753, 753, 754, 754, 755, 755, 756, 756, 757, 757, 758, 758, 759, 759, 760, 760, 761, 761, 762, 762, 763, 763, 764, 764, 765, 765, 766, 766, 767, 767, 768, 768, 769, 769, 770, 770, 771, 771, 772, 772, 773, 773, 774, 774, 775, 775, 776, 776, 777, 777, 778, 778, 779, 779, 780, 780, 781, 781, 782, 782, 783, 783, 784, 784, 785, 785, 786, 786, 787, 787, 788, 788, 789, 789, 790, 790, 791, 791, 792, 792, 793, 793, 794, 794, 795, 795, 796, 796, 797, 797, 798, 798, 799, 799, 800, 800, 801, 801, 802, 802, 803, 803, 804, 804, 805, 805, 806, 806, 807, 807, 808, 808, 809, 809, 810, 810, 811, 811, 812, 812, 813, 813, 814, 814, 815, 815, 816, 816, 817, 817, 818, 818, 819, 819, 820, 820, 821, 821, 822, 822, 823, 823, 824, 824, 825, 825, 826, 826, 827, 827, 828, 828, 829, 829, 830, 830, 831, 831, 832, 832, 833, 833, 834, 834, 835, 835, 836, 836, 837, 837, 838, 838, 839, 839, 840, 840, 841, 841, 842, 842, 843, 843, 844, 844, 845, 845, 846, 846, 847, 847, 848, 848, 849, 849, 850, 850, 851, 851, 852, 852, 853, 853, 854, 854, 855, 855, 856, 856, 857, 857, 858, 858, 859, 859, 860, 860, 861, 861, 862, 862, 863, 863, 864, 864, 865, 865, 866, 866, 867, 867, 868, 868, 869, 869, 870, 870, 871, 871, 872, 872, 873, 873, 874, 874, 875, 875, 876, 876, 877, 877, 878, 878, 879, 879, 880, 880, 881, 881, 882, 882, 883, 883, 884, 884, 885, 885, 886, 886, 887, 887, 888, 888, 889, 889, 890, 890, 891, 891, 892, 892, 893, 893, 894, 894, 895, 895, 896, 896, 897, 897, 898, 898, 899, 899, 900, 900, 901, 901, 902, 902, 903, 903, 904, 904, 905, 905, 906, 906, 907, 907, 908, 908, 909, 909, 910, 910, 911, 911, 912, 912, 913, 913, 914, 914, 915, 915, 916, 916, 917, 917, 918, 918, 919, 919, 920, 920, 921, 921, 922, 922, 923, 923, 924, 924, 925, 925, 926, 926, 927, 927, 928, 928, 929, 929, 930, 930, 931, 931, 932, 932, 933, 933, 934, 934, 935, 935, 936, 936, 937, 937, 938, 938, 939, 939, 940, 940, 941, 941, 942, 942, 943, 943, 944, 944, 945, 945, 946, 946, 947, 947, 948, 948, 949, 949, 950, 950, 951, 951, 952, 952, 953, 953, 954, 954, 955, 955, 956, 956, 957, 957, 958, 958, 959, 959, 960, 960, 961, 961, 962, 962, 963, 963, 964, 964, 965, 965, 966, 966, 967, 967, 968, 968, 969, 969, 970, 970, 971, 971, 972, 972, 973, 973, 974, 974, 975, 975, 976, 976, 977, 977, 978, 978, 979, 979, 980, 980, 981, 981, 982, 982, 983, 983, 984, 984, 985, 985, 986, 986, 987, 987, 988, 988, 989, 989, 990, 990, 991, 991, 992, 992, 993, 993, 994, 994, 995, 995, 996, 996, 997, 997, 998, 998, 999, 999, 1000, 1000, 1001, 1001, 1002, 1002, 1003, 1003, 1004, 1004, 1005, 1005, 1006, 1006, 1007, 1007, 1008, 1008, 1009, 1009, 1010, 1010, 1011, 1011, 1012, 1012, 1013, 1013, 1014, 1014, 1015, 1015, 1016, 1016, 1017, 1017, 1018, 1018, 1019, 1019, 1020, 1020, 1021, 1021, 1022, 1022, 1023, 1023, 1024, 1024, 1025, 1025, 1026, 1026, 1027, 1027, 1028, 1028, 1029, 1029, 1030, 1030, 1031, 1031, 1032, 1032, 1033, 1033, 1034, 1034, 1035, 1035, 1036, 1036, 1037, 1037, 1038, 1038, 1039, 1039, 1040, 1040, 1041, 1041, 1042, 1042, 1043, 1043, 1044, 1044, 1045, 1045, 1046, 1046, 1047, 1047, 1048, 1048, 1049, 1049, 1050, 1050, 1051, 1051, 1052, 1052, 1053, 1053, 1054, 1054, 1055, 1055, 1056, 1056, 1057, 1057, 1058, 1058, 1059, 1059, 1060, 1060, 1061, 1061, 1062, 1062, 1063, 1063, 1064, 1064, 1065, 1065, 1066, 1066, 1067, 1067, 1068, 1068, 1069, 1069, 1070, 1070, 1071, 1071, 1072, 1072, 1073, 1073, 1074, 1074, 1075, 1075, 1076, 1076, 1077, 1077, 1078, 1078, 1079, 1079, 1080, 1080, 1081, 1081, 1082, 1082, 1083, 1083, 1084, 1084, 1085, 1085, 1086, 1086, 1087, 1087, 1088, 1088, 1089, 1089, 1090, 1090, 1091, 1091, 1092, 1092, 1093, 1093, 1094, 1094, 1095, 1095, 1096, 1096, 1097, 1097, 1098, 1098, 1099, 1099, 1100, 1100, 1101, 1101, 1102, 1102, 1103, 1103, 1104, 1104, 1105, 1105, 1106, 1106, 1107, 1107, 1108, 1108, 1109, 1109, 1110, 1110, 1111, 1111, 1112, 1112, 1113, 1113, 1114, 1114, 1115, 1115, 1116, 1116, 1117, 1117, 1118, 1118, 1119, 1119, 1120, 1120, 1121, 1121, 1122, 1122, 1123, 1123, 1124, 1124, 1125, 1125, 1126, 1126, 1127, 1127, 1128, 1128, 1129, 1129, 1130, 1130, 1131, 1131, 1132, 113

Бодлого 3.4.Г / [1], 25.11 / $P, P_1, \dots, P_{n-1}$ гэсэн хотуудын заримуудын нь хооронд нисэх онгоцны $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ гэсэн багууд нислэг хийдэг байв. Аль ч хоёр хотын хооронд шууд нислэг байдаг ба тухайн хоёр хотын хоорондох нислэгийг хоёр чиглэлд нь зөвхөн тогтсон ганц баг л байгаа гүйцэтгэдэг байна. Багуудын тогтсон хувиар яаж ч хийгдсэн байлаа гэсэн нэг хотоос гараад сондгой тооны нислэгийг зөвхөн ганц багийнхантайгаа хийсээр уг хотдоо буцаж ирж чадахаар нэг хот, нэг багийг сонгон авч болно гэдгийг батал.

3.5. Зарим бодлогыг индукцийн зарчим ашиглан бодоход индукцийн шилжилтийг батлах үед хэрэглэгдэх зүйл тогтоол нь тодорхой n -ээс эхлэх тал бий. Энэ үед n -оос бага холбогдлуудад ямар нэг аргаар шалгах хэрэгтэй болдог.

Бодлого 3.5.А. ([2], 24.40). $n \geq 6$ үед ямарч гүдгэр n өнцөгтийг гүдгэр таван өнцөгтүүд болгон огтлон хувааж болно гэдгийг батал.

Бодолт. Энд индукцийн шилжилтийн зүй тогтоол нь: n -ээс бага 5-аас багагүй оройтой гүдгэр өнцөгтүүдийн хувьд бодлого үнэн ба n өнцөгтөөс диагоналаар нь /гурван орой алгассан/ гүдгэр 5 өнцөгтийг огтлоход гүдгэр $n-3$ өнцөгт үүсэх ба $n-3 \geq 5$ бол индукцийн таамаглалаар үлдсэн $n-3$ өнцөгт цааш гүдгэр таван өнцөгтүүдэд хуваагдана, гэсэнд оршино. Ийнхүү $n=6, n=7$ үед шалгах ёстой болно. ($n \geq 8$ бол $n-3 \geq 5$). Энэ нь дараах зураг 2-оос ойлгомжтой.



зураг 2

Бодлого 3.5. Б ([I], 24.3). $n > 3$, $k = \lfloor \frac{1}{2} n(n+1) \rfloor$

гэсэн натурал тоонууд (x) нь X -ийн бүхэл хэсэг/
болон $n(n+1)/2$ ширхэг элементтэй олонлог X_n
өгчээ. Хэрэв X_n -ийн k ширхэг элемент нь хөх, бас
нэг k ширхэг нь улаан, бусад үлдсэн бүх элементүүд нь
цагаан өнгөтэй бол X_n -ийг хос хосоороо үл огтлол-
цох $A_1, A_2, \dots, A_n$ гэсэн дэд олонлогуудад,

$m = 1, 2, \dots, n$ бүрийн хувьд дэд олонлог A_m нь
зөвхөн нэг л өнгийн m ширхэг элементтэй б: Үхээр гувааж
болно гэдгийг батал.

Бодолтын нэг хялбархан гол санаа: $3 < n$ -ээр
индукцэхад индукцийн шилжилтийн зүй тогтоол нь $(n-6)$ -д
үнэн бол n -д үнэн гэсэн шилжилтэнд байгаа юм, энэ нь
 K -г илэрхийлсэн бүхэл хэсэгтэй холбоотой юм. Ийнхүү теорем
1.3. дахь индукцийн зарчмыг энд хэрэглэх ба харин $n-6 > 3$
буюу $n > 9$ байх n -ийн хувьд индукцийн шилжилт
хийх ёстой болно. Иймд эхлээд $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ үед
уг бодлогыг гардан бодох хэрэгтэй, дараа нь $n \geq 9$ үед
 n -ээр индукцэлээ. / $n = 9$ нь индукцийн үндэснэл болно /.

3.6. Теорем 1.3. болон теорем 2.4. -ийг харвал
Эдгээр тохиолдолд индукци йн зарчим амиглаж бодох нь
бодлогыг асрагээс нь батлах аргатдй шууд холбоотой байгааг
хэлж байна. Индукцээр батлахдаа энэ батдлыг амиглах нь
автэй үе бий. Энэ нь n -ээс бага бүх k -ийн хувьд (зсвэл
 $(n-1)$ -) бүхэн боловч n нь E чанаргүй " гэдгээс зерчилд
оруулах явдал юм.

Бодлого 3.6 А. ([I], 23.12). $Q(x)$ нь тэг, бие ол n
гшүүнт болог. Аливаа натурал тоо $n \in N$ -ийн хувьд

$P(x) = (x-1)^n$, $Q(x)$ нь $n+1$ -ээс цөөнгүй тэг бие коэффи-
циенттэй гэдгийг батал. / $f(x) = a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$

бол $a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0$ — уу дгь $f(x)$ -ийн коэффициент
гэдгийг сануулъя/.

Бодолт. $0 \leq n$ -ээр индукцее. $n=0$ үед

$p(x) = q(x) \neq 0$ нь ямар нэг тэг бий коэффициенттэй. Одоо

$n \geq 1$ ба $(x-1)^{n-1} \cdot q(x)$ нь n -ээс багагүй тэг бий коэффициенттэй гэе. Гэвч, эсрэгээр, $p(x) = (x-1)^n \cdot q(x)$ нь n -ээс ихгүй тэг бий коэффициенттэй гэе. Одоо индукцийн таа магналд зөрчүүлэх олонгитүүнийг олзй. Олон гишүүнтийн уламжлалын чанар, давхар яагуурын чанарыг, тэдгээрийн холбоог санавал $p(x)$ —ийн уламжлал $p'(x)$ -ийг авч үзэх санаа шууд төрөх ба харин сул гишүүнгүй тохиолдолд тэг бий гишүүдийн тоо нөөрөхгүй тул маанх зорион байгуулах шинэ хэрэгсэл болохыг хэрэглэе. Үүнийг

$q(x) = x^n \cdot q_0(x)$ хэлбэртэй бичээд. / Үүнд $q_0(x)$ нь тэг бий сул гишүүнтэй / $R(x) = (x-1)^n \cdot q_0(x)$ гэвэл $p(x), R(x)$ — үүдийн тэг бий гишүүдийн тоо адилхан ба n -ээс ихгүй. Иймд $R'(x)$ —ийн тэг бий гишүүдийн тоо нь нэгээр нөөрч $(n-1)$ -ээс хэтрэхгүй болох ба нөгөө талаар $R'(x) = n(x-1)^{n-1} \cdot q_0(x) + (x-1)^n \cdot q_0'(x) = (x-1)^{n-1} \cdot (n(x-1)q_0(x) + q_0'(x))$

хэлбэртэй ба хялтанц тэг бий олон гишүүнт байгаа учир нь $R(x)$ нь тогтмол бий байсан / Энэ нь индукцийн таамаглалд зөрчих байна.

Бодлого 8.6.Б ([1], 25.9). Хавтгайд аль ч гурвал нь нэг шулуун дээр үл орших. $2n$ цэг ($n > 1$) ба тэдгээрийн заримыг хооронд нь холбосон $n^2 + 1$ хэрчим өгчээ. Тэгвэл өдгээр цэгүүдийн аль нэг гурвал дээр нь оройтой гурвалын нүрэгдчихсэн байгаа / ө.х. талууд нь өгсөн хэрчим дотор байна / гэж батал. Харин ийм гурвалын байхгүй байхаар $2n$ цэгийг n^2 хэрчимээр холбох болохыг үзүүн.

Бодолт. $1 \leq n$ -ээр индукцее.

$n=2$ үед хялбархан шалгагдана. $n > 2$ ба $(n-1)$ -ийн хувьд бодлогын дүгнэлт үнэн байт. Одоо эсрэгээр нь

n -ийн хувьд бодлогын дүгнэлт худлаа байдаг. $2n$ цэг тэдгээрийг холбосон n^2+1 хэрчим байдаг гэв. Өгсөн цэгүүдээс хэрчимээр холбогдсон хоёр цэгийг авч нийт хэрчмийг тоолъёо. Хэрэв $2 \cdot (n-1)$ цэгүүдийг холбосон хэрчмүүд $(n-1)^2$ -аас хэтрэхгүй байх ёстой. / Эс тэгвэл индукцийн таамаглалаар тэнд гурвалжин байхад хүрнэ. / Эдгээр $2 \cdot (n-1)$ цэгийн аль нь ч авч нийт хоёр цэгийн нэгээс олонгүйтэй нь холбогдсон байж болно. Иймд ийн хэрчмүүд $2 \cdot (n-1)$ -ээс олонгүй. Ийнхүү нийт хэрчмийн тоо

$(n-1)^2 + 2 \cdot (n-1) + 1 = n^2$ зэс хэтрэхгүй. Энэ нь n^2+1 хэрчим байгаа гэдэгт зөрчнө. Эхний хэсэг батлагдлав. Хэрэв

$2n$ цэгийг n, n -ээр нь хоёр хэсэг болгоод өөр хэсэгт орсон хоёр цэг бүрийг холбохон n^2 хэрчим татагдах ба энд гурвалжин үүсэхгүй / аль ч гурван цэг авахад Дарижлейн зарчмаар ядаг хоёр нь нэг ижил хэсэгт орно, иймд хэрчимээр холбогдохгүй /

Үүнээс ерөнхий бодлого ч бодож болно.

Бодлого 3.6.В. Хавтгайд аль ч гурав нь нэг шулуун дээр оршихгүй $3 \leq n$ цэг ба тэдгээрийг холбосон

$\left[\frac{n^2}{4}\right] + 1$ хэрчимэгчээ. Тэгвэл эдгээр цэгүүд дээр оройтой гурвалжин зурагдчихсан байгаа гэдгийг батал. Харин ийн гурвалжинг байхгүй байхаар $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ хэрчим татаж болохыг үзүүл. Үүнд $[X]$ нь X -ийн бүхэл хэсэг.

Бодлого 3.6.Г. $4 \leq n$ тооны хүн цугларахад тэдгээрийн заримчууд нь хоорондоо гар барьж мэндэлжээ. Хэрэв нийт гар барилтын тоо $\left[\frac{n^2}{3}\right] + 1$ —с цөөнгүй байсан бол эдгээр хүмүүс дотроос харилцан бие биетэйгээ гар барьсан 4 хүн олдоно гэж батал. Харин яг $\left[\frac{n^2}{3}\right]$ гар барилт болохон бол дээрх дүгнэлт ерөнхийдөө худлаа гэдгийг үзүүл.

3.7. Индукцээр бодлогоо бодоход гол хүндрэл индукцийн шилжилтийг батлахад байдаг. Индукцийн таамаглал хир их сайн таамаглал өгнө вэ төдий хэмжээгээр шилжилт хялбар батлагддаг. Гэхдээ мөн ийм хэмжээгээр батлах зүйлийн

хэмжээ n ихэсдэг. Гэсэн ч эхний хөнгөлөлт нь хоёрдахь хүндрэлтээс хавьгүй их байхаар бодох индукцээр бидэнд хэрэгтэйгээсээ илүү хүчтэй шуу эсвэл бидэнд хэрэгтэйгээс илүү мэдээлэл өгөх зүйлийг батлах нь ашигтай байдаг. Ийм аргыг нэмэлт нөхцөлтэйгээр индукцлэх гэж нэрлэж болох юм. Хүний гол санаа нь $n \in M$ -үүд E чанартайг батлахын тулд эсвэл E нь C -ийн шууд мөрдлөгөө болох, гэхдээ индукцэд "сайн ажилладаг" C чанарыг батлах, эсвэл M -ийн n -ээс бага тоонууд E, C чанаруудыг зэрэг хангадаг гэдгээс C чанарыг n хангажээ, гэдэг нь төвөгтэй бий батлагддаг ба n нь E чанартай гэдгийг батлах шилжилт хялбар хийгддэг, байх C - гэсэн нэмэлт нөхцөлийг сонгон олж C, E чанарыг бүх $n \in M$ - үүд хангана гэдгийг батлах явдал юм.

Дараах бодлогуудад энэ аргыг хэрэглээ.

M -ийн төгсгөлөг, хоосон бий дэд олонлог $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ -ийн хувьд (үүнд $a_1 < a_2 < \dots < a_n$) A' -ээр $\{a_n - a_{n-1}, a_n - a_{n-2}, \dots, a_n - a_2, a_n - a_1\}$

гэсэн M -ийн дэд олонлогийг тэмдэглэе. Бидэнд $A' = \{a_n - a_{n-1}, a_n - a_{n-2}, \dots, a_n - a_2, a_n - a_1\}$ Бидэнд M -ийн төгсгөлөг дэд олонлогуудын $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k, \dots$

гэсэн дараалал өгөгдсөн үед M -ийн дэд олонлогуудын $F_1, F_2, F_3, \dots, F_k, \dots$

гэсэн дарааллыг индукцээр байгуулъя. F_1 -ээр A_1 -ийн дурьд дэд олонлогийг авъя: $F_1 \subset A_1$ /байгуулалтын эхлэл/; Хэрэв F_i байгуулагджисан бол F_{i+1} -ийг дараах дүрмээр байгуулна / индукцээр байгуулах шилжилт/ :

$$F_{i+1} = F_i' \cap A_{i+1}$$

Тэгвэл өмнөх дараалал хэдэн гишүүнтэй байсан Φ ,
төчнөөн гишүүнтэй дарааллыг байгуулчихлаа.

Бодлого 3.7.А. $A_1, A_2, A_3, \dots$ гэсэн N -ийн
төгсгөлөг дэд олонлогуудын дараалал өгсөн ба эдгээрийн
аль нь ч дотроо $a+b=c$ байх ялгаатай гурван элемент
 a, b, c -г агуулдаг байв. Тэгвэл дээр байгуулагдсан
дараалал $F_1, F_2, F_3, \dots$ -ийн аль ч гишүүн F_i -ийн
хувьд F_i' нь $A_1, A_2, \dots, A_i$ үүдээс нэг нэгээс хэтрэхгүй элемент
агуулна гэдгийг батал.

Бодолт. $1 \leq i$ -ээр индукцлэн: дараах хоёр чана-
рыг баталъя: Ямарч дараалал $A_1, A_2, A_3, \dots$ -ийн хувьд
байгуулагдсан $F_1, F_2, F_3, \dots$ -ийн

а/ F_i' нь $1 \leq s \leq i$ байх s бүрийн хувьд A_s -
ээс нэгээс олонгүй элемент агуулна / Манай бодлогын
батлах ёстой чанар E /

б/ F_i' -ийн элемент бүр нь $a_s - a_t$ гэсэн хэлбэртэй,
(үүнд k, l хоёрын аль нэг нь F_i' -ийн хувьд бэхлэгдсэн
ба $a_k, a_l \in F_i \subseteq A_i = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

/нэмэлт нөхцөл C /). / Нагаад ийм нөхцөл нэмж авах болс-
ныг индукцийн шилжилтийн баталгааг сайн задлен шинж-
лээд олж харах хэрэгтэй /.

$i=1$ толог. Тэгвэл б/ чанар F_1' -ийн тодорхой-
лолтоос шууд гарна, энэ үед $l=n_1$ нь бэхлэгдсэн
байна. а/ чанарыг шалгая: Хэрэв $F_1' \ni a_k - a_l = a \in A_1$
бол $a_{n_1} = a + a_k$ болох ба A_1 -ийн чанараар.

$a = a_k = \frac{a_{n_1}}{2}$ байх ёстой, иймд a_{n_1} бэхлэгдсэн учир ийм
 a нэгтэ. C -ийн алсгүй.

Одоо $1 \leq i$ -ийн хувьд а/, б/ чанарууд биелдэг гэх
үзвэл $(i+1)$ -ийн хувьд эдгээрийг батал.

Индукцийн шилжилтийн зүй тогтоол нь F_{i+1}' -ийг

$\bar{A}_1 = A_2, \bar{A}_2 = A_1, \bar{A}_3 = A_4, \dots$ дарааллын хувьд $\bar{F}_i = F_i' \cap A_i \subseteq \bar{A}_i$,
гэх эхлүүлсэн $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots$ дарааллын i -дүгшүүн
 $\bar{F}_i$ -ийн штрих нь $\emptyset$ -х. $F_{i+1}' = \bar{F}_i' /$ гэж үзэх болно
гэдэгт байгаа юм. Энэ үндсэн дээр эхлээд d -г батлая.

$\bar{F}_i'$ нь $\emptyset$ / чанартай тул түүний элемент бүр нь $\bar{v}_j - \bar{v}_k$
хэлбэртэй ба үүнд $\bar{v}_j, \bar{v}_k \in \bar{F}_i = F_i' \cap A_i$ ба j, k хоёрын
аль нэгт нь бэхлэгдсэн утгатай. Нөгөө талаас F_i' -ийн
элемент болохын хувьд $\bar{v}_j = a_{i_1} - a_j, \bar{v}_k = a_{i_2} - a_{k'}$
ба иймд $\bar{v}_j - \bar{v}_k = a_{i_1} - a_{j'}$, үүнд k', j' хоёр аль нэг нь
бэхлэгдсэн, $a_{k'}, a_{j'} \in F_i$ юм. Ийнхүү $F_{i+1}' = \bar{F}_i'$ -ийн хувьд
 $\emptyset$ / чанар шалгардав. F_{i+1}' -ийн хувьд a / чанарыг баталъя.

Мөн F_i' нь индукцийн таамаглалаар a / чанартай учир

$F_{i+1}' = F_i'$ нь $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_i$ -уудад буюу $A_2, A_3, \dots, A_{i+1}$
-үүдээс нэг нэгээс ихгүй элемент агуулна. Иймд F_{i+1}' нь
 A -ээс гаднаас олонгүй элемент агуулдгийг батлах үлднэ.

$f \in A, f \in F_{i+1}'$ болог. Тэгвэл $i+1$ үедэх $\emptyset$ / нөхцлөөс

$f = a_j - a_k$ ба j, k хоёрын аль нэг нь бэхлэгдсэн утга-
тай. Нөгөө талаас $a_j = f + a_k$ тэнцэл A_i -д биелэгдэн
байгаа учир $f = a_k = \frac{a_1}{2}$ байх ёстой. Ийнхүү f
нь бэхлэгдсэн элементээр нэг утгатай илэрхийлэгдэх учир
батлах зүйл батлагдав.

Энэ бодлогыг амийглаж манай улсаас олон улсын 26-р
олимпиадад /Хельсинки / дэвшигдэж байсан дараах 2^{10} одоо.

Бодлого 3.7.Б. $A = \{1, 2, 3, \dots, 49\}$ олонлог дурын
маягаар гурван хэсэгт хуваагджээ. Тэгвэл ядаж нэг хэсэгт нь
 $a+b=c$ байх илгээтэй гурван тоо a, b, c бий
гэж батал.

Бодолт. Эсрэгээс нь аль ч хэсэгт нь тийм гурван
элемент байхгүй гэе. Эдгээрээс хамгийн олон элементтэйг нь
 A_i гэвэл $|A_i| \geq 17$. /Дирихлейн зарчим / үүнд

$|X|$ -ээр X олонлогийн элементийн тоог тэмдэглэв,
үлдсэн хоёр хэсгээс A_1' -ээс хамгийн олон элемент агуулс-
ныг нь A_2 , нөгөөг нь A_3 гэж тэмдэглэв. Штрих өмнөх
бодлогод тодорхойлогдсаныг сануулав. A_1, A_2, A_3
дарааллын хувьд $F_1 = A_1$ гэж эхлүүлсэн F_1, F_2, F_3
дарааллыг авч үзье. Үрвэх бодлогыг үз. Тэгвэл бодлого
3.7.А-г ашиглан $i = 1, 2, 3$ бүрийн хувьд

$$A_i, F_i, F_i' \subseteq S \text{ гэдгийг анхаарвал } |F_i| = |A_i| \geq 17 \Rightarrow \\ \Rightarrow |F_i'| \geq 16 \Rightarrow |F_i' \setminus A_i| \geq 15 \Rightarrow F_2 \geq 8 \Rightarrow |F_2'| \geq 7 \Rightarrow \\ \Rightarrow |F_3| \geq 5 \Rightarrow |F_3'| \geq 4.$$

гэх бие биеэсээ мөрдөн гарна / $X \setminus Y$ -ээр X -ийн

Y -д ордоггүй элементүүдийг тэмдэглэдэг билээ/.

Тэгээд $F_3' \subseteq S = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ учир $|F_3'| \geq 4$ гэдгээс F_3' -ийн
нэг A_i -ээс хоёроос цөөнгүй элемент агуулна. Энэ нь
бодлого 3.7. А -ийн дүгнэлтэнд зөрчих байна. Энэ зөрчил
бодлого 3.7. В -ийн дүгнэлт үнэн байсныг баталж байна.

Энэ бодлогыг Д.Мөхтөр / сурагч байхдаа/ анх бодоон
бөгөөд С.Хөдөлмөр /очутак байхдаа / $A = \{1, 2, \dots, 24\}$ -ийн
хувьд ч үнэн гэдгийг тооцоолон бодох машин ашиглан
баталсан юм. $A = \{1, 2, \dots, 13\}$ -ийн хувьд ерөнхий-
дөө бодлого худлаа болохыг жишээгээр үзүүлэхэд хүчл
бин /шалгах үзээрэй/

Бодлого 3.7.В / [3] 8.6. (2). Фибоначчийн дараа-
лал /бодлого 3.4. В-г үз / $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ -ийн
хувьд $(a_{n-1} + a_{n-2}) \cdot a_n = a_{2n}$ тэнцэл аливаа $1 \leq n$ -ийн
хувьд биелэгддэгийг батал.

Одоо нэмэлт нөхцөлтэй индукцэллийн өөр нэг хэлбэрийг
бодлогоор хайлбарлая.

Бодлого 3.7.Г [13], 8.10. 1). $n \geq 1$ үед

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

тэнцэл үнэн гэдгийг батал.

Бодолт. Эхлээд ердийн аргаар n -ээр индукцлэх

гээд үзье. $n=1$ үед үнэн нь илэрхий. Хэрэв n -ийн хувьд уг тэнцэл биш үнэн гээд $(n+1)$ -ийн хувьд батлах гэвэл мэдээх

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} < \frac{1}{\sqrt{3n}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)}$$

гэх

индукцийн таамаглалыг ашиглаад дараа нь

$$\frac{1}{\sqrt{3n}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)}}$$

гэдгийг батлах гэх

оролдох билээ. Гэтэл сүүлчийн тэнцэл биш худлаа гэдгийг хялбархан / хийвэ нь түүнтэй тэнцүү занартай

$$\frac{3 \cdot (n+1)}{3n} \leq \frac{4 \cdot (n+1)^2}{(2n+1)^2}$$

-ийг худлаа гэх/шалгах болно.

Ингээд мухардал, орох байсан! Ийм байдал хэт бүдүүвчлэлтэй тэнцэл биш батлахад элбэг тааралддаг.

Одоо бодлогод өгснөөс хүчтэй тэнцэл бишийг сонгом авч түүнийгээ индукцээр батлах: Тэнцэл бишийн баруун тал $\frac{1}{\sqrt{3n}}$ -ийг түүнээс илүү хүчтэй зааглан

$\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ -ээр солиод шинэ тэнцэл бишээ дээр оролдсони-
йг адилаар индукцээр хялбархан баталчихна.

Бодлого 3.7.Д

$n \geq 2$ үед

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 \quad \text{тэнцэл бишийг батал.}$$

3.8. Эцэст нь бид төгсгөлөг натурал тоон олонлогоор

болон теорем 2.3; 1.4. -д гарсан эрэмбэлэгдсэн олонлогуудаар индукцлэх бодлогын ганц ганц хийвэ үзье. Харин уншигчдад маань ийм бодлогууд олон олон тааралдана гэдэгт эргэлзэхгүй байна.

Бодлого 3.8.А. Анхны тоо p ба $1 \leq m \leq p-1$ өгсөн болох. Мөн p -д хуваагддаггүй m ширхэг бүхэл тоо өгчээ. Тэгвэл p -д хуваахад илгээтэй, тэг биш үлдэгдлүүд өгдөг

m ширхэг нийлбэр-ийг эдгээр бүхэл тоонуудаас / нэг нийл-
бэрт ялгаатай нэмэгдэхүүнүүд байхаар / зохиож болно
гэдгийг батал / ганц тоог ч зөвхөн ганц нэмэгдэхүүнтэй
нийлбэр гэж үзэх болно/.

Бололт. $m \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ — эер индукцээс.

$m = 1$ бол илэрхий. $1 \leq m \leq p-2$ -ийн хувьд үнэн
байг. $(m+1)$ -ийн хувьд баталъя. $a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}$ -
үүд нь p -д үл хуваагдах бүхэл тоонууд болог. Тэгвэл

$a_1, a_2, \dots, a_m$ — үүдээс зохиогдсон $S_1, S_2, \dots, S_m$
гэсэн p -д хуваахад ялгаатай, тэй бич үлдэгдэл өгдөг
нийлбэрүүд олдоно. Дараах $(m+1)$ нийлбэрийг авъя:

$S_1 + a_{m+1}, S_2 + a_{m+1}, \dots, S_m + a_{m+1}, a_{m+1}$. Тэгвэл
эд бүгд ялгаатай үлдэгдэлтэй / p -д хуваахад / Иймд
эд бүгд p -д хуваагддаггүй бо" батлах зүйл батлагдана.
/ Эдгээр нийлбэрийг л бид сонгогчино/. "эг нь p -д
хуваагддаг байг / тэр нь a_{m+1} бич, иймд $S_1 + a_{m+1}$
байна гэхэд буруудах эмгүү /Хэрэв $S_1, S_2, \dots, S_m$ — үүдээс

$S_2 + a_{m+1}, \dots, S_m + a_{m+1}, a_{m+1}$ — үүдийн ялгаатайг p -д
хуваахад өөр үл, эг дэл өгдөг S_j байвал олох S_j
нийлбэрүүд маань $S_1, S_2 + a_{m+1}, \dots, S_m + a_{m+1}, a_{m+1}$ —

үүд болно. Эсрэг тохиолдолд $S_1, S_2, \dots, S_m$ — үүдийн p -д
хуваахад гарах үлдэгд үүдийн олонлог

$S_2 + a_{m+1}, \dots, S_m + a_{m+1}, a_{m+1}$ — үүдийн үлдэгдлүүдийн олонлогтой
давхцах ба иймд $S_1 + S_2 + \dots + S_m$ ба

$(S_2 + a_{m+1}) + \dots + (S_m + a_{m+1}) + a_{m+1}$ нийлбэрүүд p -д хуваа-
хад адил үлдэгдэл өгнө, иймд эдний ялгааар

$S_1 - m \cdot a_{m+1} = S_1 + a_{m+1} - (m+1) \cdot a_{m+1}$ p -д хуваагдана. Бидний
үзсэн ёсоор $S_1 + a_{m+1}$ нь p -д хуваагдах тул

$(m+1) \cdot a_{m+1}$ нь p -д хуваагдана.

Гэтэл $1 < m+1 \leq p-1$ ба a_{m+1} нь p -д
 үл хуваагдах ба p анхны тоо учир ийн б-ийн болохгүй.
 Энэ зөрчил нь сүүлийн боломжийг үгүйсгэж байна. Ийн-
 хүү заавал дурьдсан чанартай $m+1$ ширхэг нийлбэр
 олдоно.

Бодлого 3.8 Б. ([3] 8.10). $2 \leq n \in \mathbb{N}$ ийн хувьд
 ямар ч $2n-1$ ширхэг бүхэл тоонууд дотроос нийлбэр
 нь p -д хуваагддаг n ширхэг тоог олж болно гэдгийг
 батал.

Бодолт. Эрэмбэлэгдсэн, минималийн нөхцөлтэй олонлог

$\{2, 3, 4, \dots, p\}$ олонлогоор индукцлэн батлая
 / Теорем 2.3. -ийг үз /.

Эхлээд уг олонлогийн минималь элементүүдийн хувьд
 ө.х. анхны тоонуудын хувьд бодлого үнэн гэж шалгая.

p -анхны тоо ба $a_1, a_2, \dots, a_{2p-1}$ нь өгсөн бүхэл
 тоонууд ба эдгээр нь p -д хуваахад гарал үлдэгдлүү-
 дийнхээ өсөлтөөр жагсаагдсан гэе / ингэж ямагт болно/.
 Хэрэв $S = a_1 + a_2 + \dots + a_p$ нь p -д хуваагддаг бол
 шууд боллоо. Тийм бий болог. Одоо энэ нийлбэрт зарим

a_k -г нь a_{p+k-1} -аар солих замаар дурьдсан
 чанартай нийлбэрээ олохыг зорьёо. Энэ солилт нь S дээр

$(a_{p+k-1} - a_k)$ -г нэмнэ гэсэн үгтэй адил юм. Одоо $a_{2p-1} - a_p$
 гэсэн

$a_{2p-2} - a_{p-1}, \dots, a_{p+1} - a_2, a_{p+1} - a_2$

$(p-1)$ ширхэг тоог авч үзье. Хэрэв аль нэг $a_{p+k-1} - a_k$ нь
 p -д хуваагдвал $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{p+k-1}$ -үүд бүгд p -д
 хуваахад адил үлдэгдэл өгөх тул $a_k + a_{k+1} + \dots + a_{p+k-1}$

нь p -д хуваагдах p нэмэгдэхүүнтэй нийлбэр гарч
 p -ийн хувьд бодлого батлагдана. Иймд дээрх $(p-1)$ ширхэг
 тооны аль нь ч p -д хуваагдахгүй гэж үзье. Тэгвэл
 бодлого 3.8.А ёсоор эдгээрээс тэг бий ялгаатай үлдэгд-
 лүүд өгдөг $p-1$ ширхэг нийлбэр зохиож болно, Иймд

эдгээр нь бүх $1, 2, \dots, p-1$ гэсэн тэг биш үлдэгд-
лүүдийг өгнө. Тухайлбал $S = a_1 + a_2 + \dots + a_p$ дээр нэмэхэд
 p -д хуваагддаг нийлбэр гаргах $a_{p+k-1} = a_k$ хэлбэрийн
хэлбэрийн тоонуудын нийлбэр олдох болно. Энэ нь S -д
зохио бодилт хийгээд p -д хуваагддаг p ширхэг
нэмэгдэхүүнтэй нийлбэрийг гаргах өгдөө.

Одоо индукцийн шалхилтийг батлая. Энэ нь n -ийг
хуваа даг $1 < k < n$ байх k бүрийн хувьд бодлого
үнэн гэдгээс n -ийн хувьд бодлого үнэн гэж баталъя,
гэсэн үг. Үүнд n нь анхны тоо биш.

$n = \chi \cdot k$, $1 < \chi$, $k < n$ болог. Тэгвэл $2k-1$ ширхэг
бүхэл тоо бүрээс χ ширхэг, нийлбэр нь χ -д хувааг-
дах тоонууд авч болно. Иймд $2 \leq \chi$ -ээр индукцлал $\chi k-1$
ширхэг бүхэл тоонуудаас тус бүр нь χ -д хуваагддаг ба
тус бүр нь χ ширхэг нэмэгдэхүүнтэй, нэг тоо нэгээс
олонгүй нийлбэрт χ нэмэгдэхүүн болж орсон байхаар $\chi k-1$
ширхэг нийлбэр зохиож болно гэдгийг хялбархан батална.
Ийнхүү өгсөн $a_1, a_2, \dots, a_{2k-1}$ гэсэн $2k-1 = \chi \cdot k-1$
ширхэг тоонуудаас $2k-1$ ширхэг тус бүр нь χ нэмэг-
дэхүүнтэй, χ -д хуваагддаг нийлбэр $S_1, S_2, \dots, S_{2k-1}$
үүдийг зохиож болно.

$\theta_1 = \frac{S_1}{\chi}$, $\theta_2 = \frac{S_2}{\chi}$, $\dots$, $\theta_{2k-1} = \frac{S_{2k-1}}{\chi}$
гэвэл k -ийн хувьд бодлого үнэн учир/индукцийн таамаг-
/ ий / $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2k-1}$ үүдээс нийлбэр нь k -д
хуваагдах k ширхэг тоог авч чадна. тэр нь $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_k$
гээд үзэхэд буруудахгүй / дахин дугаарлаж болно/. Тэгвэл
 $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_k = k\ell$ ба иймд $S_1 + S_2 + \dots + S_k = \chi k\ell = n\ell$

болох төгөөд S_i бүр χ ширхэг нэмэгдэхүүнтэй учир
сүүлийн нийлбэр нийт $\chi \cdot k = n$ нэмэгдэхүүнтэй
/ анхны $a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}$ -үүдийн хувьд / Иймд
бидний олох гэсэн нийлбэр олдоо.

Бодлого 3.8.В /УМО 1987 / натурал тоон дараалал

$n_{10}, n_{11}, n_{12}, \dots$ -г дараах дүрмээр байгуулжээ:
 n_k нь өгсөн натурал тоо ба хэрэв n_k байгуулагдсан ба
 $n_k > 0$ бол $n_{k+1} - 1$ -ийг k -тын системд

$n_{k+1} = a_m k^m + \dots + a_1 k + a_0$ гэж бичвэд / 3.3-ийг үз/.

$n_{k+1} = a_m (k+1)^m + \dots + a_1 (k+1) + a_0$ гэж n_{k+1} -ийг байгуулна. Хэрэв $n_k = 0$ бол байгуулалт зогсоно. Тэгвэл ингэх байгуулагдсан ямар ч натурал тоон дараалал төгсгөлөг гэж батал.

Бодолт. $a \leq m$ бэхлэгдсэн натурал тоо болог.

$(N^{(m+1)}, \leq) \ni (a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0)$ -өөр индукцлан
 "Аливаа $1 < k$ -ийн хувьд k -тэй системд

$n_k = a_m k^m + \dots + a_1 k + a_0$ гэж бичигдсэн n_k -аас эхлэн бодлого 3.8.В дахь дүрмээр байгуулагдсан дараалал $n_k, n_{k+1}, \dots$ нь төгсгөлөг элементтэй" гэж батлан.

Индукцийн үндэслэл: $(a_m, \dots, a_1, a_0) = (0, 0, \dots, 0)$ бол уг дараалал гүйц элемент $n_k = 0$ -той.

Индукцийн таамаглал: $(0, \dots, 0, 0) < (a_m, \dots, a_1, a_0)$ ба $(a_m, \dots, a_1, a_0)$ — өөс эрс бага $N^{(m+1)}$ -ийн элемент бүрийн хувьд дээрх өгүүлбэр үнэн болог.

Индукцийн шилжилт: $(a_m, \dots, a_1, a_0)$ —ийн хувьд уг өгүүлбэр үнэн гэж баталъя. $a_m, \dots, a_1, a_0$ —уудаас хамгийн сүүлчийн тэг биш нь a_i болох. Тэгвэл

$$n_{k+1} = a_m k^m + \dots + a_{i+1} k^{i+1} + \theta_i k^i + \dots + \theta_0$$

$$\theta_i = a_i - 1 < a_i \text{ байна.}$$

$$\text{Иймд } n_{k+1} = a_m (k+1)^m +$$

$$+ \dots + a_{i+1} (k+1)^{i+1} + \theta_i (k+1)^i + \dots + \theta_0.$$

ба $(a_m, \dots, a_{i+1}, \theta_i, \dots, \theta_0) < (a_m, \dots, a_{i+1}, a_i, \dots, \theta_0)$ нийцүү индукцийн таамаглал ёсоор n_{k+1} -ээс эхэлсэн

дараалад төгсгөлөг элементтэй, иймд мөн n_k — аас
 ахэлсэн дараалад төгсгөлөг элементтэй оолх батлах зүйл
 батлагдав. Тухайлбал P_{10} аас ихэлсэн дараалад төгсгөлөг.

Бодлого сонгоход ашигласан ном

- [1] Зарубежные математические олимпиады, - М.:
 Наука, 1987.
- [2] В.В.Прасолов, Задачи по планиметрии, часть II.
 -М.: Наука, 1986
- [3] М.И.Башмаков и др. Задачи по математике,
 алгебра и анализ, -М.: Наука,
 1982 / Библиотека
 "Квант", вып. 22.

ШҮБЭГС

А.Хамбаатар

Ул хөдлөх хавтгай дээр O төвтэй, r радиустай C тойрог өгсөн байхад:

Энэ хавтгайн аливаа P цэгт, OP наврагийн

$$OP \cdot OP' = r^2 \quad (I)$$

явцол хангадаг P' цэг харгалзуулдаг хуанргалтыг C тойргийн хувьд хийсэн инверс гэдэг.

O цэгийг инверсийн төв (туйл), P' -цэгийг P цэгийн дүр гэнэ.

(I) ёсоор P' цэгийн дүр нь P цэг болно. Тиймээс P, P' хоёрыг харилцан урвуу гэж нэрлэдэг юм. P цэг туйлд ойртох тусам P' цэг туйлаас холддог учраас туйлын дүрийг хязгааргүй алсн цэг гээд, оух шулуун, хавтгай өөрөө туйлтай урвуу алсн цэгт октүүрдэг ингээр үзэх нь зохимжтой байдаг. Энэ үзлээ баримталж хэрэгцээтэй үзлээ шулуунг хязгааргүй радиустай тойрог гэж тооцно.

Одоо инверсийн зарим чанарыг үзье.

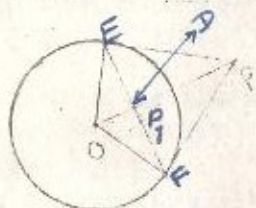
1°. Туйл O -г дайрсан шулуун өөртөө буудаг.

◀ Аливаа P цэг, түүний дүр P', O гурав ямагт нэг шулуун дээр оршдог тул P цэг O -г дайрсан шулуун цэг байвал P' мөн шулуун цэг байна. ▶

2°. Инверсийн тойргийн дотоод муж гадаад; гадаад муж дотоод мужид нь бууна. Харин тойргийн али ч цэг үл хувирна.

◀ (I) ёсоор: $OP < r$ бол $OP' > r$; $OP > r$ бол $OP' < r$; харин $OP = r$ бол $OP' = r$. ▶

3°. Хэрэв P цэг C тойргийн гадна байвал дүр нь P цэгээс тойрогт татсан хоёр шүргэгчийн тойргийг шүргэсэн цэгүүдийг холбосон хэрчмийн дундаж байна. P цэг C тойргийн дотор байвал P' цэг, тойргийн P цэгээр таллан хуваагдах хэрчмийн хоёр үзүүрт татсан шүргэгчийн огтолцсон цэг байна.



1. зураг

« P цэгээс татсан хоёр шүргэгчийн, тойргийг шүргэсэн цэг E, F оол

(1. зураг)

$$PE = PF,$$

$$OE = OF = r$$

Иймээс O, P цэгүүд EF хэрчмийн дундаж перпендикуляр болно. EF - хэрчмийн дундажийг D гэвэл

$$\triangle OPE \sim \triangle OED \text{ тул}$$

$$\frac{OP}{OE} = \frac{OE}{OD} \text{ буюу } OP \cdot OD = OE^2 = r^2.$$

Гэтэл $OP \cdot OP' = r^2$ байгаа учраас $D = P'$. Нөгөө тохиолдол, саяаг баталгаанаас харагдана. »

4. Хэрэв A, B хоёр цэгийн дүр харгалзан A', B' оол

$$A'B' = \frac{r^2 \cdot AB}{OA \cdot OB} \quad (2)$$

« O, A, B гурав нэг шулуун дээр оршихгүй гэвэл (2. зураг) , $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = r^2$

иймдөөс $\frac{OA'}{OB} = \frac{OB'}{OA}$, $\triangle OA'B' \sim \triangle OBA$ бөгөөд

$$\frac{OA'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} \text{ гэж гарч байгаа тул } A'B' = \frac{OA' \cdot AB}{OB} \text{ .}$$

OS - туйлаас K тойргийн төв хүртлэх за".
Огтолцсон хоёр тойргийн хоорондох өнцөг $\sin$, тэдгээрийн огтолцлын цэгт татсан шүргэгчүүдийн хоорондох өнцгийг хэлдэг.

Огтолцсон хоёр тойргоос тогтсон дүрс, тэдгээрийн төвийг дайрсан шулуун хувьд тэгш хэмтэй байдлаас хоорондох өнцөг огтолцлын цэгээс хамаарахгүй.

Огтолцсон шулуун, тойрог хоёрын хоорондох өнцөг гэж, тэр шулуун, огтолцлын цэгт татсан тойргийн шүргэгч хоёрын хоорондох өнцгийг хэлдэг. Цаашдаа эдгээр өнцгийг

$\frac{\pi}{2}$ -аас хэтрэхгүй гэж үзнэ.

7°. Инверсээр хоёр шулуун хоорондох өнцөг тэдгээрийн дүрийн хоорондох өнцөгтэй тэнцүү байна.

« Хоёр шулуун туйл дээр огтолцсон бол (1° ёсоор) дурьдсан чанар илэрхий. Хэрэв туйлаас ялгаатай P цэгт огтолцсон бол дүр нь туйл дээр огтолцсон тойрог болно. Хоорондох өнцөг нь тэдгээрийн туйлыг дайрсан шүргэгчдийн хоорондох өнцөг болно. Тэгээд P' цэг дээрх өнцөгтэй тэнцүү. Мөрдлөгөө I ёсоор энэ өнцөг уг хоёр шулуун хоорондох өнцөгтэй тэнцэнэ. »

8°. Инверс хийхэд хоёр тойргийн хоорондох өнцөг тэдгээрийн дүрийн хоорондох өнцөгтэй тэнцүү.

« Ерөнхий P цэгтэй K_1, K_2 тойргуудын шүргэгч харгалзан l_1, l_2 шулуун байсан гэв. Инверс хийхэд P цэг P' цэгт, l_1, l_2 шулуунууд l'_1, l'_2 тойрог болсон бол хоорондох өнцөг нь эдгээр тойргийн O цэгт татсан шүргэгчийн хоорондох өнцөг болно. Энэ нь мөрдлөгөө I ёсоор l_1, l_2 шулуунуудын хоорондох өнцөг болно. »

Дараах гурван чанарыг баталгаажгүй дурдана:

9°. Хэрэв K_0, K хоёр тойрог ортогональ (хоорондох өнцөг нь $\frac{\pi}{2}$) бол K тойргийн хувьд инверс хийхэд K_0 тойрог еертөө бууна.

Урвуу чанар нь мөн үнэн. Тодруулбал:

Имар нэг K_0 тойргийн хувьд инверс хийхэд K_0 -тэй давхцаагүй K тойрог өөртөө бууж байвал K_0, K хоёр тойрог ортогональ байдаг.

10°. Өггөлдөөгүй хоёр тойргийг ерөнхий төвтэй тойргуудад буулгадаг инверс олддог.

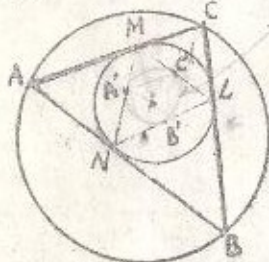
11°. Аливаа хоёр тойргийг бие биед нь буулгах инверс ндэх нэг олддог.

Одоо бодлого бодоход инверс хэрэглэх зарим жишээ үзье.

Жишээ 1. Гурвалжинд багтсан тойргийн төв, тэр гурвалжны багтаасан тойргийн төвөөс

$$d = \sqrt{R^2 - 2Rr} \quad \text{зайтай байдгийг (Эйлериин теорем)}$$

батал. Үүнд: r - багтсан, R - багтаасан тойргийн радиус.



5. зураг.

△ABC-д багтсан тойргийн BC, CA, AB талууд бүртгэсэн цэгийг харгалзуулан L, M, N гэв. (5. зураг).

Багтсан тойргийн хувьд инверс хийхэд A, B, C орой харгалзан MN, NL, LM хөрчмийн дундаж A', B', C' цэгт бууна.

(3° чанар). Ийнхээс $\triangle LMN \sim \triangle A'B'C'$ бөгөөд

$$\frac{LM}{A'B'} = \frac{MN}{B'C'} = \frac{NL}{C'A'} = \frac{1}{2}$$

Ийнхээс багтсан тойргийн дүр бол $\triangle A'B'C'$ -г багтаасан тойргийн радиус $R' = \frac{R}{2}$ болно.

Нөгөө талаас $\odot$ ёсоор $R' = \frac{r^2 R}{|d^2 - R^2|}$

МАН тойргийн төвөөс
тойрог нь ABC-д багтсан
тойрог-ийн гурвалжинд багтсан
тойрог-ийн хувьд
инверс

Манай бодлогоод $d < R$ учраар $|d^2 - R^2| = R^2 - d^2$

$$\text{Ийнхүү } \frac{\gamma}{2} = \frac{2^2 R}{R^2 - d^2} \quad \Rightarrow$$

Жишээ 2. A, B, C, D дөрвөн цэг нэг хавтгай дээр байвал $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$ байдгийг батал. Тэнцэх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцлийг тогтоо.

4 A төвтэй инверс хийхэд B, C, D цэгүүд хэргэлвэл B', C', D' цэгт буусан гэдэг турвижны тэнцэл бий. Эсвэл $B'C' + C'D' \geq B'D'$, B', C', D' гурван цэг нэг шулуун дээр байхад C' нь $B'D'$ хэрчим дээр оршихоос бусад тохиолдолд тэнцэл бий хэвээр байна.

Харин A, B, C, D цэгүүд нэг тойрог дээр орвол эдгээр цэгийн байрлалас үл хангааран $B'C' + C'D' = B'D'$ (*) нөхцөл биелэхээр тохируулж болох тул өмнөх тэнцэл

$AB \cdot CD$ дөрвөн өндөгт тойрогт багтах зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл (*) болно.

(2) -ийг өмнөх тэнцэл

$$\frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AC \cdot AD} \geq \frac{BD}{AB \cdot AD}$$

Эндээс

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD \geq AC \cdot BD.$$

$AB \cdot CD$ дөрвөн өндөгт тойрогт багтсан байхад

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

Үүнийг Птоломейн теорем гэдэг. Үгээр томъёолбол:

Тойрогт багтсан дөрвөн өндөгтийн өсрөг талуудын үржвэрийн нийлсээр диагоналиудын үржвэртэй тэнцдэг. $\Rightarrow$

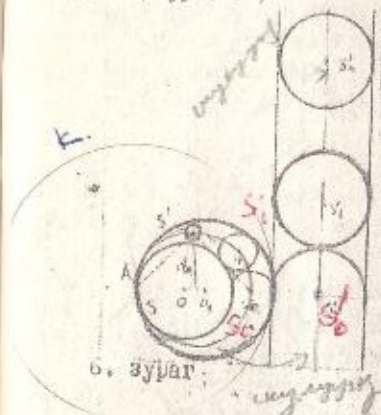
Жишээ 3. O, O_1 төвтэй дотуур шүргэсэн

S, S_1 хоёр тойргийн S -тойргийг гадуур, S_1 тойргийг дотуур шүргэсэн $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n$ радиустай n эвэрхэг $S_0, S_1, \dots, S_n$ тойрог байгуулав. Хэрэв S_0 тойргийн төв O, O_1 шулуун дээр орших бөгөөд S_1 тойрог

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (|\vec{a}| |\vec{b}|) \cdot \cos 90^\circ$$

и S_{i-1}, S_{i+1} тойргуудыг шүргэсэн бол S_n тойргийн төвөөс OO_1 шулуун хүртэлх зай $2n \cdot \frac{r_n}{2}$ байдагийг эхлэл. /Зураг 6/



б. зураг.

Бичилгээ товчлохын тулд S_i тойргийн төвийг S_i гэе. S_n тойргийн төвөөс OO_1 шулуун хүртэлх зайг d_n ; S_i, S' хоёр тойргийн шүргэцтэй цэгийг A гэе.

A төвтэй S' тойргийн диаметртай тэнцүү k радиустай тойргийн хувьд инверсийвал S' тойргийн дүр OO_1 шулуунд перпендикуляр S' тойргийг шүргэсэн шулуунд, харин S тойрог

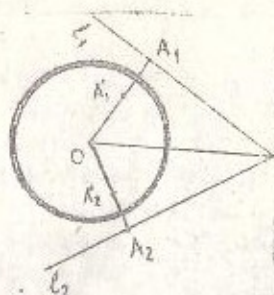
саяин шулуунтай параллель шулуунд бууна. Харин $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ тойргууд ижил радиустай саяин хэсэр шулууныг шүргэсэн $S'_0, S'_1, \dots, S'_n$ тойрогт бууна. Тэгдээ S_i тойрог S'_{i-1}, S'_{i+1} хоёр тойргийг шүргэнэ. Иймээс $S'_0 S'_n = 2nr$ болно. Мөн $S_0, S_1, \dots, S_n$ цэгүүд A цэгт S, S' хоёр тойргийг шүргэсэн тойрог дээр оршино. Иймээс $A S_0 S_n$ тэгш өнцөгт гурвалжин болох бөгөөд d_n тэгш өнцгийн оройгоос буусан өндөр болно. Иймд

$$\frac{d_n}{S'_0 S'_n} = \frac{A S_n}{A S'_n} = \frac{r_n}{r} \quad \text{буюу} \quad d_n = \frac{r_n}{r} S'_0 S'_n$$

$$d_n = \frac{2nr}{2} r_n = 2nr_n$$

Хянаа 4. Инверсээр хоёр шулуун тэнцүү тойрогт буух зайлангуй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцлийг тэгтгөө.

« О төвтэй r радиустай тойргийн инверсээр r_1, r_2 шулуунууд тэнцүү тойрогт буусан гэхэд тэдгээрийн радиусууд r_1, r_2 -д буулгасан



7. зураг

перпендикулярын стүүлэгт харгалзуулан A_1, A_2 Тэдгээрийн дүрийг

A_1', A_2' гэвэл, өвсөн нөхцөл ёсоор хоёр тойргийн диаметр тэнцүү:

$$OA_1' = OA_2'$$

буюу

$$\frac{z^2}{OA_1} = \frac{z^2}{OA_2}$$

$$\text{Эндээс } OA_1 = OA_2$$

Ийнхүү:

Хоёр шулуун тэнцүү радиустойрогт бузвал туйл т дгээрээс ижил зайтай байна. Хэрэв l_1, l_2 шулуун огтлолцсон бол туйл тэдгээр шулууны хоорондох өнцгийн биссектрис дээр байна.

Мөн нөхцөл хүрэлцээтэй гэдэг нь илэрхий. »

Яншээ 5. $A_1, A_2, \dots, A_n$ оройтой зөв n -өнцөгтийг багтаасан тойргийн $A_1 A_n$ нум дээр орших M цэгээс $A_1, A_2, \dots, A_n$ оройнууд хүртэлх зайг $d_1, d_2, \dots, d_n$ гээ.

$$\frac{1}{d_1 d_2} + \frac{1}{d_2 d_3} + \dots + \frac{1}{d_{n-1} d_n} = \frac{1}{d_1 d_n}$$

байдгийг батал.

« M төвтэй инверс хийвал өгсөн тойрог шулуун болж, оройнууд нь A_1', A_n' үзүүртэй хэрчим дээр буух тул

$$A_1' A_2' + A_2' A_3' + \dots + A_{n-1}' A_n' = A_1' A_n'$$

Эндээс

$$\frac{z^2 A_1 A_2}{MA_1 \cdot MA_2} + \frac{z^2 A_2 A_3}{MA_2 \cdot MA_3} + \dots + \frac{z^2 A_{n-1} A_n}{MA_{n-1} \cdot MA_n} = \frac{z^2 A_1 A_n}{MA_1 \cdot MA_n}$$

$$A_1 A_2 = A_2 A_3 = \dots = A_1 A_n \quad \text{сөгөөд} \quad MA_i = d_i \quad (i = 1, n).$$

гэдгийг сана. ►

Жишээ 6. Нэг шулуун дээр орших A, B, C, D дөрвөн цэгийн давхар харьцаа гэж $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ тоог нэрлэдэг. Инверс дөрвөн цэгийн давхар харьцаа хувирдаггүйг батал.

■ O төвтэй инверс хийвэл

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \left(\frac{z^2 A'C'}{OA' \cdot OC'} : \frac{z^2 B'C'}{OB' \cdot OC'} \right) : \left(\frac{z^2 A'D'}{OA' \cdot OD'} : \frac{z^2 B'D'}{OB' \cdot OD'} \right) = 1$$

$$= \frac{A'C'}{B'C'} \cdot \frac{OB'}{OA'} : \frac{A'D'}{B'D'} \cdot \frac{OB'}{OA'} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'}. \triangleright 28, 26$$

Б о л о х ж и ш э э

1. Квадратуудын дундах дээр оройтой квадратыг багтаасан тойргийн хувьд инверс хийв.

Квадратуудын дүрийг ол.

2. ABC гурвалжин өгчээ. BC, CA, AB шулуунууд тэнцүү тойрогт орууц цагүүдийг ол.

3. A, A' хоёр цэг K тойргийн хувьд тэгш хэлтэй (K -н хувьд хийсэн инверсээр A -цэгийн дүр A') байдаг бол энэ тойргийн аливаа M цэгийн хувьд $AM : A'M$ харьцаа тогтмол байдгийг батал.

4. $AM : MB$ харьцаа тогтмол байх M цэгийн олонлогийг ол. Үүнд A цэг B цэгтэй данхцахгүй гэж үзвэл.

5. Дөрвөн өнцөгтөд багтсан тойрог Z , багтаасан тойрог R радиустай бөгөөд төвүүд нь хоорондоо d зайтай бол

$$\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{r^2}$$

гэж батал.

6. ABC гурвалжны хамгийн их тал нь AC бол M цэг гурвалжны орших хавтгай дээр байхад

$$AM + CM \geq BM \quad \text{байдгийг батал.}$$

7. $A_1, A_2, \dots, A_n$ оройтой n -энцэрт багтаасан тойм-гийн A, A_n цууны M нэгээс $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ тулуурууд хүртэлх зай $d_1, d_2, \dots, d_n, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ талуудын урт $a_1, a_2, \dots, a_n$ бол

$$\frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{d_{n-1}} = \frac{a_n}{d_n}$$

байдгийг батал.

8. $ABC\mathcal{D}$ дөрвөн өнцөгтийн эсрэг орших A, C өнцгүүдийн нийлбэр $\frac{\pi}{2}$ бол

$$A^2 \cdot C^2 + A^2 \cdot B^2 = A^2 \cdot \mathcal{D}^2$$

гэм батал.

1926

Ашигласан ном:

1. В.А. Прасолов, Задачи по планиметрии I, II, Наука 1996.
2. М.Ф. Барыгин, Задачи по геометрии планиметрии Наука 1996.
3. А.С. Кокстер, Введение в геометрию "Наука" 1966.

ОЛИМПИАДАД БЭЛТГЭХЭД ЗОРИУЛСАН
БОДЛОГУУД

А.Ганбаатар

1. Нэгэн натурал тооны аравтын бичлэгт 1, 3, 7 ба 9-ийн цифрууд оролцсон бол энэ тооны цифруудийн байрыг солих замаар 7-д хуваагддаг тоо гарган авч болохыг батал.

2. 4444^{4444} тооны цифруудийн нийлбэр А-тэй тэнцүү. А тооны цифруудийн нийлбэр В-тэй тэнцүү бол В тооны цифруудийн нийлбэрийг ол.

3. Дурма дэс дараалсан арван натурал тоон дотор бу-
сэдтайгаа харилцан анхны байх тоо олдono гэдгийг батал.

4. $\sqrt{8-2\sqrt{5}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{8+2\sqrt{7}-2\sqrt{5}-2\sqrt{6}} = 1$
тэнцлийг батал.

5. Сургуулийн үдэмжлэгт 42 сурагч оролцов. Оролцсон бүх
хөндлүүдийг $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ гэв. A_1 охин 7 хөвгүүнтэй,
 A_2 охин 8 хөвгүүнтэй гэх мэтчилэн A_n охин бүх хөв-
гүүнтэй бүхиглэсэн бол үдэмжлэгт хичнээн хөвгүүн оролцсон
бэ?

6. $x^3 - mx^2 + mx - (m^2 + 1) = 0$ тэгшитгэл бүхэл шийдтэй
байх бүх m тоог ол. (m - бүхэл тоо)

$$7. \begin{cases} 2(x+y-2) = y(x-y+2) \\ x^2(y-1) + y^2(x-1) = xy-1 \end{cases}$$

системийн бүх шийдийг ол.

$$8. (1-9x+8x^2-7x^3)^{1987} \text{ ба } (1+9x-8x^2+7x^3)^{1987}$$

$$(a, a_{i+k})^* = 1$$

$$k = \pm 1, \dots$$

олон гишүүнтэйг x^{1984} -н өмнөх коэффициентүүдийг эхл.

9. $f(x)$ ба $g(x)$ нь нэмл зэргийн олон гишүүнтүүд (бүхэл коэффициенттэй) байг. Хэрэв дурын натурал n -ийн хувьд $g(n)$ нь $f(n)$ -д хуваагдах бол $g(x) = c \cdot f(x)$ байх бүхэл тоо c олдохыг батал.

10. $0 < x \leq \frac{1}{2}$ ба $0 < y \leq \frac{1}{2}$ бол

$$\frac{(x+y)^2}{xy} \geq \frac{(2-x-y)^2}{(1-x)(1-y)}$$

тэнцэл бишийг батал.

11. $x_1, x_2, \dots, x_n$ нь аравтын бичлэгтээ 9-ийн цифрийг агуулаагүй ялгаатай натурал тоонууд бол

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} < 30$$

тэнцэл биш биелэхийг батал.

12. $\sqrt{\lg^2 1^\circ + \lg^2 2^\circ + \dots + \lg^2 44^\circ} < \sqrt{2} - 1 < \frac{\lg 1^\circ + \lg 2^\circ + \dots + \lg 44^\circ}{44}$

давхар тэнцэл бишийг батал.

13. $[-1, 1]$ хэргийм харьяалагдах бөгөөд нийлбэр нь 0 байх дөрвөн тоо сонгог яваз. Эдгээр тоонуудыг $0 \leq a_1 \leq 1, 0 \leq a_1 + a_2 \leq 1, 0 \leq a_1 + a_2 + a_3 \leq 1$ байснаар a_1, a_2, a_3, a_4 гэж дугаарнах болохыг батал.

14. $a_1, a_2, \dots, a_n$ бодит тоонуудын тэгсгөмөл дараалал бөгөөд түүний дараалсан 7 гишүүн бүрийн нийлбэр сөрөг, дараалсан 11 гишүүн бүрийн нийлбэр эерэг бол энэ дарааллын гишүүдийн тоо хамгийн ихдээ хэд бай болох вэ?

15. $\{x_n\}$ дараалал: $x_0 = 13, x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) гэж тодорхойлогдов. Хэрэв $n \geq 1974000 \Rightarrow x_n \geq 1984$ гэж батал.

16. Бүх бүхэл тоон олонлог дээр тодорхойлогдсон f функц зөвхөн эерэг утга авдаг ба

$$f(n) \geq \frac{1}{2}(f(n-1) + f(n+1)) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

бол f тогтмол функц гэж батал.

17. f натурал тоон олонлог дээр тодорхойлогдсон

натурал тоон утга авдаг функц байг. Хэрэв дурын натурал n -ийн хувьд

$$f(n+1) > f(f(n))$$

нөхцөл биелдэг бол $f(n) = n$ гэж батал.

18. f - бодит тоон олонлог дээр тодорхойлогдсон бөгөөд

$$f(x) = (7+x)^{2\sqrt{41-3x}}$$

бол f функцийг хамгийн их утгыг ол.

19. f - натурал тоон олонлог дээр тодорхойлогдсон ба өсөх функц ба $f(k \cdot m) = f(k) + f(m)$ (k, m дурын натурал тоонууд / нөхцөл биелдэг бол

$f(n) = \log_p n$ ($n=1, 2, \dots$) байх бодит тоо p олдоно гэж батал.

$$20. f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x+y) = f(x^2+y^2) \quad (x, y \in \mathbb{R}^+)$$

нөхцлүүдийг хамгадаг бүх функцийг ол. Энд $\mathbb{R}^+$ зэрэг бодит тоон олонлог.

21. $a_{31}, a_{20}, \dots, a_1$ өгөгдсөн бодит тоонууд бол $f(x) = \cos 32x + a_{31} \cos 31x + \dots + a_2 \cos 2x + a_1 \cos x$ функц өө, эг ба сөрөг утгууд авна гэж батал.

22. Олонлог болгон нь 40 элементтэй 1978 ширхэг олонлог өгөгдөв. Эдгээрийн аль ч хоёрыг авахад яг нэг ерөнхий элементтэй бол бүх 1978 олонлогт нэгэн зэрэг харьяадаг даг элемент олдоно гэж батал.

23. Огторгуйд аль ч дөрөв нь нэг хавтгайд үл орших 7 цэг өгөгдөв. Өгөгдсөн цэгүүд дээр төгсгөлтэй бүх боломжит хэрчмүүдийг татав. Эдгээрээс дураар 6 хэрчим сонгон авахад пирамидын ирмэгүүд байх магадлалыг ол.

24. Хавтгай дээр аль ч хоёрынх нь хоорондох зай нэгтгэс бага байх цэгүүд өгөгдөв. Эдгээр бүх цэгүүдийг агуулсан



Handwritten notes and calculations on the right margin:

- $a < 1$
- $R = \frac{1}{3} \sqrt{3} a$
- $1 = \frac{a}{\sqrt{3}}$
- $\frac{1}{3} = \frac{a}{\sqrt{3}}$
- $\sqrt{3} - 2a$
- $2\sqrt{3}$
- $\sqrt{3} - 2a > 0$
- $\frac{\sqrt{3}}{2} > a$

1 диаметртэй тойрог олох уу?

25. C_n^k ($k=0, 1, \dots, n$) бүр нь сондгой байх бүх натурал n -ийг ол.

26. Аливаа u он гинүүнт $P(x, y)$ бүрийг

$P(x, y) = P_1(x, y) + P_2(x, y)$ хэлбэртэй бичих болно, гэх
батал. Энд $P_1(x, y) = P_1(y, x)$, $P_2(x, y) = -P_2(y, x)$

27. ABCD пирамидийн D оройг ABC гурвалжны хүндийн төвтэй холбосон хэрчмийг пирамидийн ирмэгүүдээс ханаарсан функц хэлбэртэйгээ p илэрхийл.

28. Нэгж радиустай бөмбөрцөгт багтсан a) зөв 12 талстын b) зөв 20 талстын ирмэгийн уртыг ол.

29. a, b, x, y, α — эерэг эсвэл тоонууд бол

$$\frac{a^{x+1}}{x^2} + \frac{b^{x+1}}{y^2} > \frac{(a+b)^{x+1}}{(x+y)^2}$$

тэнцэл биш биелэхийг батал.

30. Тойрогт багтсан ABC гурвалжны медиануудын үргэлжлэл өгөгдсөн тойргийг A_1, B_1, C_1 цэгүүдээр огтолно. A, B, C , гурвалжны талбай ABC гурвалжны талбайгаас багагүйг батал.

31. Бүхэл коэффициенттай олон гинүүнт ялгаатай 4 бүхэл цэг дээр 1 гэсэн утга авдаг бол ямар ч бүхэл цэг дээр -1 гэсэн утга авахгүй болохыг батал.

32. Ялгаатай a, b, c бүхэл тоонууд ба дурын натурал тоо n -ийн хувьд

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^n}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^n}{(c-a)(c-b)}$$

илэрхийлэл бүхэл тоо байхыг батал.

33. Нэгж радиустай бөмбөрцгийн гадаргуу дээр 13 цэг тэмдэглэв. Эдгээрээс хоорондох зай нь $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ -аас бага

байх 2 нэг өөрөөр адил олонлог батал.

34. Рационал тоон олонлогийн дэд олонлог S нь дараах хоёр чанартай: а) $a \in S, b \in S$ бол $a+b \in S$
 б) a нь тэгээс ялгаатай рационал тоо бол зөвхөн a , эсвэл $-a$ нь S олонлогт харьяалагдана. Ийм чанартай бүх S олонлогийг ол.

35. $\lg \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \lg \frac{2\sqrt{2}}{2} \cdot \lg \frac{3\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ тэнцлийг батал.

36. Дурин бодит $x_1, x_2, \dots, x_n$ тоонуудын хувьд

$$x_1, x_2, \dots, x_n \leq \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} + \dots + \frac{x_n^2}{2} + \frac{1}{2n}$$
 тэнцэл биш биелэхийг батал.

37. Огторгуйд ω бөмбөрцөг, түүний гадна A, B цэгүүд өгөгдөв. Хэрэв AB хэрчим ω бөмбөрцөгийг огтоолдог бол AP, BP хэрчимүүд бөмбөрцөгийг нургах чанартай бүх P цэгүүд нэг хавтгай дээр оршихыг батал.

38. Хэрэв a, b бодит тоо нууд ба $ax^3 - ax^2 + 9bx - b$ олон гишүүнт гурван эерэг нягтаартай бол эдгээр нь хоорондоо тэнцүү гэх батал.

39. ABC гурвалжинд тойрог багтасв. Багтсан тойрог дээр P цэг авахад $a \cdot |PA|^2 + b \cdot |PB|^2 + c \cdot |PC|^2$ илэрхийллийн утга P цэгийн байрлалаас хамаарахгүй гэх батал. Энд $a = |BC|, b = |AC|, c = |AB|$

40. Хэрэв тойрогт багтсан найман өнцөгтийн дэс дараалсан 4 нь талын урт нь I -тэй, нөгөө дөрвөн талын урт 2 -той тэнцүү байв. Талбайг нь ол.

41. Дурин натурал тоо n -ийн хувьд

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$$
 тэгшитгэл $a > n, b > n, c > n$ байх натурал шийдүүдтэй болсхийг батал.

42. Дурин натурал n -ийн хувьд

$$\sum_{i=1}^{2n} 2^{2n-i} \cdot C = 2^{2n}$$

тэнцэл биелэхийг батал.

43. Натурал тоон гиншүүдтэй гурван тэгсгөлгүй арифметик прогресс өгөгдөв. Хэрэв 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 тоо бүр дээрх гурван прогрессийн ядаж нэгийнх нь гиншүүн байдаг бол 1980 тоо мөн адгээр прогрессийн ядаж нэгийнх нь гиншүүн болохыг батал.

44. $\{x_n\}$ натурал тоон дарааллын хувьд

$$a/ \quad 1 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots$$

$$b/ \quad x_{n+1} \leq 2x_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

нахцлууд биелдэг бол дурьд натурал k -ийн хувьд

$x_2 - x_1 = k$ байх дарааллын хоёр гиншүүн x_1, x_2 олдохыг батал.

45. Аливаа пирамидын дотор орших цэгээс түүний крие-гүүд харагдах өнцгүүдийн нийлбэр 540° аас их гэж батал.

46. $\{a_n\}$ бодит тоон дараалал өгөгдөв. Хэрэв дурьд натурал k, m -ийн хувьд

$$|a_{k+m} - a_k - a_m| < 1$$

нөхцөл биелдэг бол дурьд натурал p, q -ийн хувьд

$$\left| \frac{a_p}{p} - \frac{a_q}{q} \right| < \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

тэнцэтгэл биелэхийг батал.

47. Дурьд натурал $1 < n$ -ийн хувьд

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2$$

тэнцэл биелэхийг батал.

48. $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a) = c$ ($a, c \in \mathbb{R}, c \geq 0$)

тэгшитгэл бодит шийдтэй гэж батал.

49. Хэрэв гүдгэр 6 өнцөгтийн өсрөг талууд дараалель ба өсрөг оройнуудыг хойноос хэрчим тэнцрх урттай бол уг

а өнцөгтийг тойрогт багтсан болно гэнэ батал.

50. P - өгөгдсөн өнхны тоо байв.

$$\frac{11}{P} \frac{122}{P} \frac{2}{P} \dots \frac{99}{P} \frac{9}{P} - 123456789$$

хуваагдахыг батал.

$P \neq$

51. Дурин бодит x ба дурин натурал n -ийн хувьд

$$1 \cos x + 1 \cos 2x + \dots + 1 \cos 2^n x \geq \frac{n}{2}$$

тэнцэл биш биелэхийг батал.

52. Дурин натурал n ($n \geq 2$) -ийн хувьд

$$\log_2 2 \cdot \log_2 4 \cdot \log_2 6 \cdot \dots \cdot \log_2 (2n-2) \leq 1$$

тэнцэл биш биелэхийг батал.

53. P зэрэг бөгөөд тэгш тоо бол дурин натурал n -ийн хувьд

$$P^{(P+1)^n} + 1, \quad (P+1)^{n+1} \text{ -д хуваагдах ба}$$

$$(P+1)^{n+2} \text{ -д хуваагдахгүй гэнэ батал.}$$

54. n охин ба n хөвгүүн дугуй ширээ тойрон сууцгаав.

d_n нь хоёр хөвгүүний хооронд суугаа охидуудын тоо, c_n нь хоёр охины дунд суугаа хөвгүүдийн тоо бол $d_n - c_n$ тоо хамгийн их байхуйцаар охид, хөвгүүдийг хэрхэн суулгах хэрэгтэй вэ?

55. Тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн AB талын дундаж ба диагоналиудын огтлолцлын цэгийг дайрсан шулуун CD талд перпендикуляр байв. Тэгвэл AB ба CD талууд параллель эсвэл дөрвөн өнцөгтийн диагоналиуд перпендикуляр гэнэ батал.

56. a, b өгөгдсөн зэрэг тоснууд бол

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \\ x^3 + y^3 = a^3 + b^3 \end{cases}$$

системийн бүх зэрэг шийдүүдийг ол.

57. $(n+1)^P - n$ ба $(n+1)^{P+3} - n$ тоснуудын хамгийн их

ерөнхий хяллагач 1 ээс их байх бүх натурал тоо n, p үүдийг ол.

$$58. S_n = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{j^2 + k^2}} \quad \text{бол ялгавар натурал}$$

$n (n \geq 3)$ -ийн хувьд

$$n \leq S_n \leq C \cdot n$$

тэнцэл биш биелэх C тоог ол.

59. Ирмэгийн урт нь 1 -тай тэнцүү зөв гурвалжин пирамид $ABCD$ өгөгдөв. $d(x, AB)$ -ээр X цэгээс (AB) шулуун хүртэлх зайг тэмдэглэв. Хэрвэ X нь пирамидын дотоод цэг бол

$$d(x, AB) + d(x, AC) + d(x, AD) + d(x, BC) + d(x, BD) + d(x, CD) \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

тэнцэл биш биелэхийг батал.

60. Зөв зургаан өндөрт $ABCDEF$ -ийн AC, CE диагоналууд дээр харгалзан M, N цэгүүдийг тэмдэглэв. Хэрвэ $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = z$ ба B, M, N цэгүүд нэг шулуун дээр орших бол z -ийг ол.

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХХ ОЛИМПИАДАД АЙМАГ, ХОТУУДЫН
БАГЦИЙН ЭЗЭЛСЭН БАЙР

Аймаг, хотын нэр	Багцын гүнзүүдийн нэр	БУХ ОНОО	Эзэлсэг байр
1. Увс	2	28,5	I
2. Архангай	2	17,5	"
3. Дархан	2	16	III
4. Дундговь	2	13	IY
5. Дорноговь	2	13	IY
6. Ховд	2	10	YI
7. Баянхонгор	2	9,5	YII
8. Хөвсгөн	2	9	YIII
9. Сүхбаатар	2	8,5	IX
10. Төв	2	8	X
11. Говь-Алтай	2	7,5	XI
12. Хэнтий	2	7	XII
13. Сүхбаатар	2	7	XIII
14. Баян-Өлгий	2	6,5	XIV-XV
15. Эрдэнэт	2	6,5	XIV-XV
16. Булган	2	6	XVI
17. Дорнод	2	6	XVII-XVIII
18. Завхан	1	2	XIX-XX
19. Сэлэнгэ	1	2	XIX-XX
20. Биеговь	2	2	XIX-XX

Г а р ч и г

1. Б.Чудуундорж , Улсын математикийн XXII олимпиадын ҮН ангийн гурвын давааны бодлогын бодолт . . .	3
2. В.Адьяасүрэн,Ц.Батхүү, Улсын математикийн XXII олин- пиадын ҮН ангийн гурвын давааны бодлогын бодолт . . .	7
3. А.Хамбаатар, А.Ганбаатар, Л.Хадхүү , Улсын математикийн XXII олимпиадын IX ангийн гурвын давааны бодлогын бодолт . . .	12
4. Ц.Дашдорж, Улсын математикийн XXII олимпиадын X ангийн гурвын давааны бодлого, түүний бодолт . . .	20
5. Ц.Дашдорж, Д.Ламжав, Улсын математикийн XXII олимпиадын дөрвөн давааны бодлогууд . . .	25
6. А.Мөхөй , Олон улсын математикийн XXII олимпиадын бодлогын бодолт	35
7. В.Адьяасүрэн, Ц.Батхүү, Инвариант	44
8. Р.Гончигдорж, Математик индукц	49
9. А.Хамбаатар, Инверс	78
10. А.Ганбаатар, Олимпиадад оэлтгэхэд зориулсан бодлогууд	89
II. Улсын математикийн XXII олимпиадын дүнгийн үзүүлэлтүүд	97