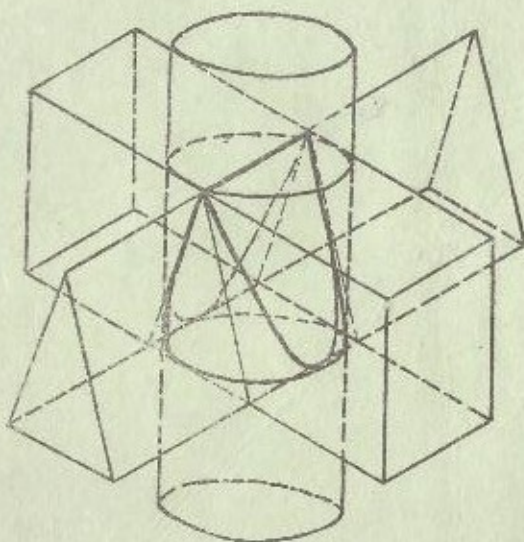


АРДЫН БОЛОВСРОЛЫН ЯАМ
УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАДЫГ
ЗОХИОН БАЙГУУЛАХ ХОРОО

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН XXIV ОЛИМПИАД



Улаанбаатар хот
1998 он

БНМАУ-ын Ардын боловсролын яам,
Улсын математикийн олимпиадыг зохион
байгуулах хороо

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАДАД
БЭЛТГЭГЧДЭД ТУСЛАМЖ

№ II

Редактор

доц. А. МЕКЕИ

УЛААНБААТАР

1969 он

Улсын математикийн ХХIY олимпиад гарын авлага нь математик физикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийн сурагчид, Улсын ба олон улсын математикийн олимпиадад бэлтгэгчид, математикт ооирхолтой, энэ талаар мэдлэгээ гүнзгийрүүлэхийг хүссэн сурагчид, математик физикийн багш нарт зориулсан цугралын гурав дахь ном юм.

Энэ гарын авлагад улсын математикийн ХХIY олимпиадын гурав, дөрвийн давааны II, IV, IX, X ангийн бодлогуудын бодолт, олон улсын математикийн ХХIX олимпиадын бодлогуудын бодолт, бие дааж уншиж судлах боломж гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийн хичээлд ашиглахад зориулсан өгүүлэл, бодлогууд орсон юм.

Гарын авлагыг бэлтгэхэд Ц.Дамдорж, А.Мекей, А.Хамбаатар, Д.Ламжав, А.Ганбаатар, Л.Хадхүү, В.Адъяасүрэн, Л.Чойжосванчиг, Н.Батхүү, Б.Чимэддорж нар оролцлоо.

Хүндэт багш, сурагчид аа! Өөрсдийн зохиосон бодлого /Хэрэв улсын боломж олон улсын математикийн олимпиадад зориулсан бол / хэдийн даваанд гэдгээ / өгүүлэлт, бодлогуудын бодолтын талаар санал, өөрсдийн товч, оновчтой бодолтоо дараах хаягаар : "МУИС-ийн ФМФ-ийн алгебр геометрийн тэнхимд" - ирүүлж байхыг хүсье.

Редактор

А.МЕКЕЙ

УЛСЫН БА ОЛОН УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАДЫН ТҮҮНЭЭС

А.Мөхөй, Б.Чимэддорж, Х.Шагдар

I. ОУМО-ын тухай

Олон улсын математикийн олимпиад нь Румын улсын санаачлагаар анх 1959 онд болж, түүнд Румын, Венгер, Чехословак, Болгар, Польш, Зөвлөлт Холбоот улс, Ардчилсан Герман улсын баг оролцсон байна. Тэнд Румыны баг I, Венгериийн баг II, Чехословак улсын баг III байранд оржээ. Түүнээс хойш ОУМО аль оронд болж, хэдэн орон оролцсон, ямар ямар орон шинээр оролцсоныг толилуулбал:

Хэдүгээр олимпиад	Хэдэн онд	Олимпиад болсон орон	Оролцсон орон тоо	Шинээр оролцсон орон
II	1960	БНСЧСУ	5	
III	1961	БНУАУ	6	
IV	1962	БНСЧСУ	7	
V	1963	БНПАУ	8	
VI	1964	ЗХУ	9	Б Н М А У, ХБНСКУ
VII	1965	БНАГУ	10	Финлянди улс
VIII	1966	БНБАУ	9	
IX	1967	ХБНСКУ	13	Франц, Швед, Итали, Англи
X	1968	ЗСБНКУ	12	
XI	1969	БНСРУ	14	Нидерланд, Бельги
XII	1970	БНУАУ	14	Австрия

ХII	1971	БНСЧСУ	15	Куба
ХIУ	1972	БНПАУ	14	
ХУ	1973	ЭСБНХУ	16	
ХУI	1974	БНАГУ	18	АНУ, БНСВУ
ХУII	1975	БНУАУ	17	Греци
ХУIII	1976	АВСТРИ	19	ХВНГУ /БНМАУ оролцоогүй /
ХIХ	1977	ХВНСКУ	21	Алжир
ХХ	1978	БНСРУ	17	Турк
ХХI	1979	Англи	23	Люксембург, Бразил, Израил. /Манай улсын баг оролцоогүй
ХХII	1981	АНУ	27	Тунис, Мексик, Венесуел, Колумб, Австрали. /Манай улсын баг оролцоогүй /
ХХIII	1982	БНУАУ	30	Кубейт
ХХIУ	1983	Франц	32	Марокко, Испани, Канад. /Манай улсын баг оролцоогүй /
ХХV	1984	БНСЧСУ	34	Норвег, Кипр
ХХVI	1985	Финлянд	38	Хятад, Иран
ХХVII	1986	БНПАУ	37	
Х ХУIII	1987	Куба	42	Перу
ХХIХ	1988	Австрали	49	^{Соломонс} Сингапур, Шинэ Зеланди, Индонези, Гонконг /Манай баг оролцоогүй /

Манай орны сурагчдын баг 1964 оноос хойш ОУМО-ад 5 удаа оролцсоогүй. ОУМО-ын гүйцэтгэх хороо 1980 онд ОУМО-ыг манай улсад хийхээр шийдвэрлэсэн боловч манайх хүлээх аваагүй. ОУМО-аас манай сурагчид 4 мөнгө, 9 хүрэл бүгд 18 медаль авчээ.

Багийн амжилтаар эхний 5 байранд ихэвчлэн орж байсан орнуудыг дурьдвал:

О р н н нэр	Эзэлсэн байр				
	I	II	III	IV	V
ЗСБНХУ	13	5	2	2	
АНУ	3	4	3	1	2
БНСУУ	5	2	7	1	5
БНАГУ	1	4	5	1	2
БНЛАУ	6	8	7	2	1

Олон хилийн баримтаас үзэхэд эхний арван байранд социалист орны багууд ихэвчлэн орж байжээ. ОУМО -ад манай сурагчдын багийн ахлагч ба жирийн гишүүдээр Х.Санжмятов 12 удаа, Д.Ишдэрэн 1 удаа, Г.Гүнжээ 1 удаа, Д.Шагдар 1 удаа, Р.Гончигдорж 1 удаа, А.Меней 3 удаа оролцжээ.

II. Улсын математикийн олимпиадын тухай

Манай оронд математикийн анхны олимпиад 1960 онд Улаанбаатар хотын сурагчдын дунд явагдсан байна. Уг олимпиадыг проф. Л. Шагдар, доцент Д. Ишдэрэн нар санхүүчлэн зохион байгуулжээ.

Ардын боловсролын яамны шийдвэрээр улсын математикийн олимпиад албан ёсоор 1964 оноос эхлэн дөрвийн дараатайгаар, ББДС-ийн бүх сурагчдыг хамран жил бүр тогтмол уламжлал болон явагдаж байна.

УМО тогтмол явагдах оолсон нь математикт авьяас сонирхолтой сурагчдын авьяасыг хөгжүүлэх, нийт сурагчдыг математикт дур сонирхолтой болгоход чухал үүрэг гүйцэтгэнэ.

байна.

УМО-ад амжилттай оролцож байсан сурагчдаас математик, физик болон техник, эдийн засаг, философийн ухааны олон эрдэмтэн төрж гарсан нь манай оронд шинжлэх ухааны сэтгэлгээг хөгжүүлэхэд зохих үүрэг гүйцэтгэсний баталгаа юм. Одоо математик физикийн мэргэжлээр МУИС, УБДС, ХААДС, ПДС-д багш, эрдэм шинжилгээний ажилтнаар, ШУА-д эрдэм шинжилгээний ажилтнаар, хваарилагдан ажиллаж буй хүмүүсийн ихэнх нь сурагч байхдаа математикийн олимпиадад амжилттай оролцож байсан байна.

УМО болон ОУМО-ад амжилттай оролцож байсан сурагчдаас математик, физикийн ухаанаар Ц.Баясгалан, Н.Жадамбаа, Ц.Дашдорж /МУИС/, Ц.Дашдорж /ПДС/, Х.Цоохүү, Р.Гончигдорж, Б.Жадамбаа, П.Бэгэжав, Д.Бямбажав нарын зэрэг авьяаслаг олон эрдэмтэд төрөн гарсан байна.

Олимпиад явагддаг болсноос хойш сурагч багш нарт зориулсан цуврал гарын авлага, "Мэргэд гарах сурвалж" сэтгүүл гардаг боллоо. Сурагч, багш нарт зориулан Унгарын математикийн олимпиад, Польшийн математикийн олимпиад, математикийн эцнээ олимпиад номууд орчуулагдан гарлаа. Мөн Ц.Дашдоржийн УМО-ын бодлогуудыг эмхтгэн зохиосон ном гарах юм. Энэ бүхэн нь математик сургалтанд зохих нөлөө үзүүлж байна.

Олимпиад явагдсан энэ 20 гаруй жилд БНМАУ-ын гавьяат багш С.Цагаан, С.Шарав, Д.Буянхүү, Ү.Маам, А.Нямринчин /Архангай/, Д.Наранхүү, Д.Пүрэвдорж, Дашдоцдог /Ховд/, Д.Амгалан /Дархан/, Л.Цэрэнбямба /Дундговь/, М.Баасай /Эрдэнэт/, Э.Эрхэмбаяр /Увс/ зэрэг олон багш нар сурагчдаа олимпиадад амжилттай бэлтгэж санаачлагатай ажиллаж байсныг тэмдэглэж байна. Мөн олимпиадын анхны арваад жилд сурагчдыг амжилттай бэлтгүүлж байсан багш нарын тухай СХУ сэтгүүлийн 1987. № 1-ээс үзнэ үү/.

УМО-ыг анх БНМАУ-ын АБН, МХЗЭ-ийн Төв Хороо, МПБ-ийн

Төв Зөвлөлийн хамтарсан хурлы н тогтоолоор баталсан Олимпиадыг зохион байгуулах хороо удирдан явуулдаг байсан юм. УМО нь эдүгээ БНМАУ-ын АБН, МТЭ-ийн Төв Зөвлөл, МХЗЭ-ийн Төв Хороо, МИБ-ийн Төв зөвлөл, УЛТБЗ-ын Хороо, МРТУ-ын Хороо зэрэг хороо, яам, газруудын тусламж дэмжилгээр нэлээд хөгжих, Олимпиадыг зохион байгуулах хорооны бүрэлдэхүүн болон олимпиадыг зохион явуулах журмыг дээрх газруудын хамтарсан хурлын тогтоолоор батлан иердеж байна.

УМО-ад оролцож шагналт байранд орсон сурагчид, сурагчдаа амжилттай бэлтгүүлсэн багш нар дээрх газруудын урамшил шагналаар шагнагдаж байна. Тухайлбал олимпиадын IY-УH ангийн аварга сурагчдад аваргын диплом, МИБ-ийн Төв Зөвлөлийн шагналтаа гадаад орны пионерын зусланд амрах эрхийн бичгээр; IX ангийн аварга сурагчийг аваргын диплом, МХЗЭ-ийн Төв Хорооны "Тэргүүний сурагч" алтан медалиар шагнаж байна. Олимпиадын IY даваанд шалгаран оролцсон сурагчдын дотроос олимпиадын аварга I, дэд аварга 3, шагналт байранд 5 сурагч шалгаруулж, диплом үнэ бүхий зүйлээр шагнахын дээр УЛТБЗ-ын Хорооны 1988 онд баталсан элсэлтийн журмын дагуу шагналт байранд орсон эдгээр 9 сурагч математикийн мэргэжлээр МУИС, УБДС, ХБДС -д суралцах хүсэлтэй бол элсэлтийн шалгалтгүй элсэж байна. /Зурам өөрчлөгдөхгүй бол хойшид ч хэвээр байх болно/ Олимпиадын IY даваанд шалгаран оролцсон бусад сурагчдыг олимпиадын баярын бичиг, үнэ бүхий зүйлээр шагнагдахын дээр математик мэргэжлээр дээрх сургуульд суралцах хүсэлтэй бол элсэлтийн суурь шалгалтаа онц дүнтэй өгсөн тохиолдолд бусад шалгалтаас чөлөөлөгдөх болсон юм. УМО-ад сурагчдаа амжилттай бэлтгүүлж оролцуулсан багш нарт АБН, УМО-ыг зохион байгуулах хорооны баярын бичиг, мөнгөн шагнал олгохын дээр 9 багшийг МТЭ-ийн Төв Зөвлөлийн шуганаар 14 хоногийн амрах эрхи ил бичгээр шагнаж байна.

Сүүлийн жилүүдэд УМО-ын IY даваанд аймаг хот бүрээс хоёр сурагч, дасгалжуулагч багшийн хамт ирж оролцож, аймаг

хотуудын авсан оноогоор нь байр эзлүүлэн дүгнэж байна. Олимпиадын төгсгөлд их дээдд сургуулийн багш нарын баг, БВДС-ийн багш нарын баг, оюутны баг, сурагчдын баг хоорондоо бодлогын уралдаан /бага олимпиад/ зохиож байгаа нь улам сонирхолтой болж байна.

С. олимпиадыг зохион байгуулах хороо цаашид IX ангийн сурагчдын олимпиадыг ч IY даваатай болгох нь ач холбогдолтой гэж үзэж байна.

УМО-ыг зохион байгуулах бүх төрлийн ажилд Д.Ишцэрен, У.Санжимятов, Л.Шагдар, Д.Шагдар, Х.Гэлдэншамц, Г.Загдрагчаа, У.Довд, Х.Дүгэр, А.Меней, Д.Ламжав, Л.Өвгөн, Ц.Дамдорж, Р.Гончигдорж, Ч.Раднаа, С.Цагаан, Ц.Мам, А.Хамбаатар, Н.Баатар, Д.Гүржав, Г.Датва, Х.Шагдар, Ц.Цэнд-Аюуш, Б.Чимэддорж, Б.Наранхүү нарын бусад хүн идэвх зүтгэл үр бүтээлтэй ажилласныг тэмдэглэж байна.

УМО-ын даваа бүрийг сурагчдын идэвх санаачлагыг, өрчүүлсэн байхаар улам сонирхолтой, чанартай зохион байгуулаа явуулах шаардлагатай байна.

Эрийн гурван наадамд хурдан хөлгөө уяж, нээдэм эхлэх бүрийг явган хүлээдэг уяачид шиг оюун ухааныхаа самбаа зориг хүч чадлаа сорин уралдах мөвийнхөө амжилтыг итгэл төгс хүнээх суух математикийн багш нарын тэр баярын өдөр- УМО улам улам наашилсаар байна.

1989 онд болох УМО-ын 25 жилийн ойг угтах сурлага хөдөлмөртөө өндөр амжилт гаргахыг нийт сургууль, эцэг эх, математикийн сонирхогчид болон сурагчид, математикчдад уриалж байна.

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХХ ОЛИМПИАДЫН
УН АЛГИЙН ГҮРЭЙН ДАВААНЫ БОДЛОГО

Л.Чойжоованчиг

Б.Адъяасүрэн

A1. Зөв гурвалжинд багтсан зөв гурвалжны төвүүд давхцахыг батал.

A2.
$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+y^2=7 \end{cases}$$
 тэгшитгэлийн системийг бүхэл тоон олонлогт бод

A3. $1, 2, 3, \dots, 1988$ тоонуудаас 995 ширхэг тоо авахад нэг нь нөгөөдөө хуваагдах хоёр тоо олдохыг батал.

B1. $\sqrt[3]{x+1} = \sqrt{x-3}$ тэгшитгэлийг бод.

B2. 1988 тоог хамгийн бага ерөнхий хуваагдагч нь их байхаар хоёр натураль тооны нийлбэрт тавь.

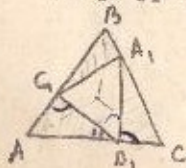
B3. "S" талбайтай ABC гурвалжны EK медиан дээр M-цэгийг EM=6 МК байхаар авчээ. AM-шулууны ЕС талтай огтлолдох цэг нь N бол ANC гурвалжны талбайг ол.

Бодолтууд:

A1. Бодлогыг бодолт.

Өгөгдсөн зөв гурвалжныг ABC, түүний төвийг O-гэж тэмдэглэе. A, B, C₁ нь энэ гурвалжинд багтсан дугуйн зөв гурвалжин байг.

/1-р зураг/



1-р зураг.

$$\angle AC_1B_1 + \angle C_1B_1A = \angle A_1B_1C + \angle C_1B_1A = 180^\circ$$

байх учир $\angle AC_1B_1 = \angle A_1B_1C$

Иймд $\angle C_1B_1A = \angle B_1A_1C$ болно.

Гурвалжны тэнцүүлгийн ӨТӨ шийж

ёсоор ийнхүү $\angle AC_1B_1 = \angle B_1A_1C$

Үүнтэй адилгаар $\Delta B, A, C = \Delta A, B, C$, болохыг баталж болно.

Тэгвэл $\Delta A, C, B = \Delta B, C, A = \Delta A, B, C$, болно.

Цаашилбал $R_0^{120^\circ}$ эргүүлэлтээр $\Delta A, B, C$, нь

еерөө еертөө буух нь тодорхой бөгөөд энэ нь аливаа

зөв ABC гурвалжинд багтоан зөв гурвалжин төв нь O цэг

болно гэдгийг харуулж байна. Бодлого бодогдов.

A2. Бодлогын бодолт.

Системийн нэгдүгээр тэгшитгэлээс X-ийг олоод хоёрдугаар тэгшитгэлд оруулбал:

$$6 - y - z + ye = 7 \quad \text{буюу} \quad z = \frac{y+1}{y-1} = 1 + \frac{2}{y-1} \quad \text{болно.}$$

$(y-1)$ нь 2-ийн хуваагч байх зөвхөн тэр үед л z нь

нь бүхэл тоо байна. Эндээс $y = 2, 3, -1, 0$ болох

ба харгалзан $z = 3, 2, 0, -1$, $x = 1, 1, 7, 7$.

A3. Бодлогын бодолт.

Аливаа натураль тоо n -ийг $(1 \leq n \leq 1987)$, $n = 2^k m$

хэлбэрээр дүрсэлж болно. Энд m нь $1 \leq m \leq 1987$ байх

өөндөгй тоо. Бидний сонгон авсан 995 тооны дотор

$n_1 = 2^{k_1} m$, $n_2 = 2^{k_2} m$ байх хоёр ширхэг тоо

заавал олдоно. Гэтэл энэ хоёр тооны нэг нь нөгөөдөө

хуваагдана.

E1. Бодлогын бодолт.

$$\sqrt[3]{2x+1} = u, \quad \sqrt{x-3} = v \quad \text{гэвэл} \quad x = u^3 - 1, \quad x = v^2 + 3$$

гэх гарна. Иймд $u^3 - 1 = v^2 + 3$ Гэтэл $u = v$

тул $u^3 - u^2 - 4 = 0$ болох ба

$$u^3 - u^2 - 4 = (u-2)(u^2+u+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u-2=0 \\ u^2+u+2=0 \end{cases}$$

БОЛГО.

а. $x^2 + x + 2 = 0$ тэгшитгэл бодит шийдгүй.

б. $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ Иймээс $x = 2^3 - 1 = 7$

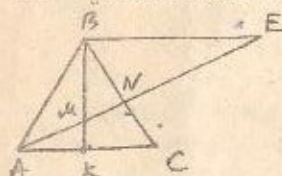
Б2. Бодлогын бодолт.

1988=4·497-гоог хоёр натураль тооны нийлбэр дүрэт $2n+2n, (2n-1)+(2n+1), \dots, 1+(4n-1), (n=497)$ гэсэн хэлбэрүүдийн аль нэгээр тавьж болно. Гэхдээ эдгээр нэмэгдэхүүнүүдийн үржвэр буурах бөгөөд

$$2n = \chi БЕХ(2n, 2n) < \chi БЕХ(2n-1, 2n+1) = (2n-1)(2n+1)$$

болох тул бодлогын шийд нь $1988 = 993 + 995$.

Б3. Бодлогын бодолт.



Б-цэгийг дайруулж AC шулуунтай паралель шулуун татъя. Энэ шулуун AN шулуунтай E цэгт огтлолцож байг /2-р зураг/.

2-р зураг.

$$\triangle MBE \sim \triangle MAK \text{ учир } \frac{BE}{AK} = \frac{BM}{MK}$$

$$\text{Өгөгдсөнөөр } \frac{BM}{MK} = 6, AK = \frac{AC}{2} \text{ учир } \frac{BE}{AC} = 3$$

$$\triangle BNE \sim \triangle CNA \text{ учир } \frac{BN}{NC} = \frac{BE}{AC} = 3$$

$$\text{Оуку } BN = 3 \cdot NC \text{ Иймд } \frac{S_{\triangle ANC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{NC}{BC} = \frac{NC}{BN+NC} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Оуку } S_{\triangle ANC} = \frac{1}{4} S$$

н

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХІҮ ОЛИМПИАДИЙН
ҮН АНГИЙН ГҮРВЫН ДАВААНЬ БОДЛОГО

Б.Адьяасүрэн

А1. $4x^2 + ax + 9 = 0$ квадрат тэгшитгэл a -ийн ямар бүхэл утганд рационал язгууртай бөгөөд язгууруудын нийлбэр нь бүхэл байх вэ?

✓ А2. Дурйн дэс дараалсан 79 натурал тоон дотор цифруудийн нь нийлбэр 13-д хуваагддаг тоо заавал байна гэж батал.

А3. ABC гурвалжинд CD биссектрис татав.

$$CD^2 = BC \cdot AC - AD \cdot BD \quad \text{болохыг батал.}$$

Б1. $y = \frac{|x+1|}{x+1} + \frac{x-1}{|x-1|} - x|x|$ функцийн графикийг байгуул.

Б2. Аливаа 13 ширхэг бүхэл тоо авахад тэдний дотроос квадратуудын ялгавар нь 23-д хуваагддаг хоёр тоо олж болно гэх батал.

Б3. Тойргийн гадна орших O цэгээс тойргийг A, B цэгүүдэд шүргэх шүргэгчүүд татав. O цэгийг дайруули AB -д перпендикуляр татаж огтлолцлын цэгийг K гэв. OK нулуун тойрогтой огтлолцох цэгүүд M, N бол

$$\frac{K}{OK} = \frac{1}{OM} + \frac{1}{ON} \quad \text{гэж батал.}$$

А1. Бодлогын бодолт

Хэрэв $a^2 - 144 = n^2, n \in \mathbb{Z}$ байвал тэгшитгэлийн язгуурууд рационал байна.

Тэгшитгэлийн язгууруудыг x_1, x_2 гэв. Виетийн теоремын $x_1 + x_2 = -\frac{a}{4}$. Язгууруудын нийлбэр бүхэл гэдгээс

$$a = 4k, k \in \mathbb{Z} \quad \text{гэж гарна. Ийнхүү } 16k^2 - 144 = n^2$$

болно. Эндээс $n = 4p, p \in \mathbb{Z}$ хэлбэрийн тоо байх ёстой гэж гарна. Иймд $k^2 - p^2 = 9$ буюу $(k+p)(k-p) = 9$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 9 \\ \hline 144 \\ \hline -a^2 \quad \sqrt{a^2 - 144} \\ \hline 0 \end{array}$$

k, p нь бүхэл учраас дараах тохиолдлууд боломжтой.

$$1. \begin{cases} k+p=9 \\ k-p=1 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} k+p=1 \\ k-p=9 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} k+p=-9 \\ k-p=-1 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} k+p=-1 \\ k-p=-9 \end{cases} \quad 5. \begin{cases} k+p=3 \\ k-p=3 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} k+p=-3 \\ k-p=-3 \end{cases}$$

Эдгээр тэгшитгэлүүдийг бодвол $k=\pm 3, k=\pm 5$ гэж гарна. Иймд $a=\pm 12, a=\pm 20$

Сурагч Ө.Зоригт /УБ/, Б.Баттөр /Эрдэнэт/, Б.Батням /Ховд/, И.Мөнхбат /Өмнөговь/, Т.Мөнхжаргал /Хөвсгөл/, М.Баярмагнай /Баянхонгор/ нар энэ аргаар бодсон байв.

12. Бодлогын бодолт

Энэхүү бодлого нь нэлээд овормоц сэтгэлгээ шаардах хүндэвтэр бодлого байсан тул бараг бүх сурагч бүтэн оноо авсангүй. Харин 8-р ангийн олимпиадын улсын аварга Эрдэнэт хотын 1-р 10 жилийн сурагч М.Баттөр ганцаараа энэ бодлогыг гүйцэд бодож авбал зохих 6 оноог авлаа. Гэвч сурагч М.Баттөрийн бодолт нэлээд нуршуу байсан тул энд өөр бодолтыг сийрүүлэе.

$n, n+1, n+2, \dots, n+78$ гэсэн дэс дараалсан 79 натурал тоо авъя. Эдгээр 79 натурал тооны эхний 40 натурал тоон дотор тэгээр тэгсн нь тоо 4 ширхэг байх бөгөөд тэдгээрийн ядаж нэгний нь сүүлчээсээ хоёр дахь цифр 6-аас хэтрэхгүй байна. Тэр тоог N , түүний цифрүүдийн нийлбэрийг a гээ.

$N, N+1, N+2, N+3, N+4, N+5, N+6, N+7, N+8, N+9, N+19, N+29, N+39$ тоонууд бидний авсан 79 натурал тоон дотор орно. Эдгээр тоонуудын цифрүүдийн нь нийлбэр харгалаан

$$a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5, a+6, a+7, a+8, a+9$$

$$a+10, a+11, a+12$$

байна.

Эдгээр дэс дараалсан 13 натурал тоон дотор 13-д хуваагдах тоо заавал байх тул бодлого бодогдөв.

АЗ бодлогын бодолт

I арга. Косинусын теоремоор $AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cos \alpha$

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos \alpha$$

байна. / I-р зураг / . I-р тэгшитгэлийн хоёр талыг BC -ээр
2-р тэгшитгэлийн 2 талыг AC -ээр үржүүлээд гишүүнчлэн
хасаад хувиргасны эцэст

$$CD^2 \cdot (AC - BC) = AC \cdot BC (AC - BC) + AC \cdot BD^2 - BC \cdot AD^2 \quad /I/ \text{ болно.}$$

CD- Биссектрис: учир

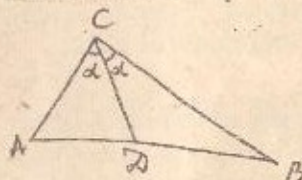
$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$$

буюу $AC \cdot BD = AD \cdot BC$

байна. Иймд /I/ тэн-
цэтгэлээс $CD^2 \cdot (AC - BC) =$

$$= AC \cdot BC \cdot (AC - BC) +$$

$$+ AD \cdot BC \cdot BD - AC \cdot BD \cdot AD$$



1-р зураг.

буюу $CD^2 = AC \cdot BC - AD \cdot BD$ тэнцэтгэл мөрдөн гарна.

Энэ бодлогыг хэд хэдэн сурагч зөв бодсоны дотор ихэнх нь энэ аргаар бодсон байв.

2-р арга. Никснэлийн 12-р дунд сургуулийн 8-р ангийн
сурагч Наранбаатарын бодолтыг авч үзье.

CD шулуун ABC гурвалжныг багтаасан тойрогтой M
цагт огтлолцож байг / 2-р зураг /



м 2-р зураг.

$$\angle CAD = \angle BMC, \angle ACD = \angle CMB$$

учраас $\triangle ACD \sim \triangle CBM$

Иймээс

$$\frac{CD}{CB} = \frac{AC}{CM}$$

буюу

$$CD \cdot CM = AC \cdot BC \quad \text{байна.} \quad CM = CD + DM$$

тул

сүүлийн тэнцэтгэлээс

$$C\bar{D}^2 = AC \cdot BC - C\bar{D} \cdot \bar{D}M \quad /1/ \text{ тэнцэтгэлээ мөрдөн гарна.}$$

Нөгөө талаас $\triangle ACD \sim \triangle BDM$ гэдгээс

$$C\bar{D} \cdot \bar{D}M = AD \cdot BD \quad /2/ \text{ Ийнхүү /1/ ба /2/ тэнцэтгэлээс}$$

$$C\bar{D}^2 = AC \cdot BC - AD \cdot BD \quad \text{гэх гарна.}$$

VI бодлогын бодолт

Суратч Б.Өсөхсүрэн /Дархан /, М.Баттөр /Эрдэнэт/,
М.Билэгт /УБ/ нар бүрэн гүйцэт бодсон байв.

Энэ функцийн графикийг шууд байгуулах боломжгүй. Иймд
модулийн тодорхойлолтыг ашиглан.

$$1. \quad x < -1 \quad \text{үед} \quad y = \frac{-(x+1)}{x+1} + \frac{x-1}{-(x-1)} - x \cdot (-x) = x^2 - 2$$

$$y = x^2 - 2$$

$$2. \quad -1 < x \leq 0 \quad \text{үед} \quad y = \frac{x+1}{x+1} + \frac{x-1}{-(x-1)} - x \cdot (-x) = x^2$$

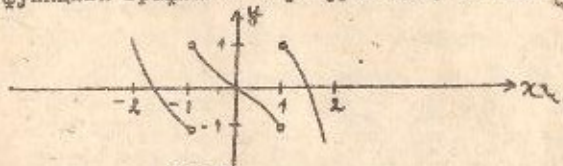
$$3. \quad 0 < x < 1 \quad \text{үед} \quad y = \frac{x+1}{x+1} + \frac{x-1}{-(x-1)} - x \cdot x = -x^2$$

$$4. \quad x > 1 \quad \text{үед} \quad y = \frac{x+1}{x+1} + \frac{x-1}{x-1} - x \cdot x = 2 - x^2$$

Ийнхүү

$$y = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{хэрвээ } x < -1 \\ x^2, & \text{хэрвээ } -1 < x \leq 0 \\ -x^2, & \text{хэрвээ } 0 < x < 1 \\ 2 - x^2, & \text{хэрвээ } x > 1 \end{cases} \quad \text{болно.}$$

Энэ функцийн графикийг 3-р зураг дээр байгуулав.



3-р зураг

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХІҮ ОЛИМПИАДЫН
9-Р АНГИЙН ГҮРВЭЙН ДАВАЛЫН БОДЛОГО

Д.ЛАМЖАВ

А.ХАМБААТАР

А.ГАНБААТАР

А.1 $y = \frac{x^2 + x + 2}{x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 20}$ функцийн хамгийн их
утгыг ол.

А.2 Аравтын бичлэгт нь тэг цифр ороогүй эхний ба сүүл-
чийн гурван цифрийн нийлбэрүүд нь хоорондоо тэнлүү ба
10-аас бага байдаг 8 оронтой тоо хэд байх вэ?

А.3 ABC гурвалжны гурван оройгоос нэг нэг шоргоолж
нэгэн зэрэг гарч AB, BC, CA замыг нэгж хугацаанд тус
бүр тогтмол хурдтай явжээ. $0 \leq t < 1$ өгшин дахь шор-
гоолжнуудын байрлалыг хэргэлзэн $A(t), B(t), C(t)$ гэвэл
 $\triangle A(t)B(t)C(t) \sim \triangle A(t_0)B(t_0)C(t_0)$ байх $0 \leq t_0 < 1, t \neq t_0$
өгшин олдохыг батал.

В.1 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $\frac{bc}{ad} = 9$ ба $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
тэгшитгэл гурван зэрэг язгууртай бол эдгээр язгууруудыг
тэнлүү гэх батал.

В.2 $a_1 = \frac{2}{3}, b_1 = \frac{1}{3}, a_{n+1} = 2a_n - b_n, b_{n+1} = a_n + 4b_n$
рекуррент тэнбицлөөр өгөгдсөн хоёр дарааллын ерөнхий
тэнлүүдийг ол.

В.3 ABC гурвалжны талбай S , бэгтсэн тойргийн
радиус z , A', B', C' нь ABC -д гадуур бэгтсэн тойр-
гуудын төв, $A'B'C'$ гурвалжны талбай S' , бэгтээсэн тойр-
гийн радиус R' бол $zS' = R'S$ болохыг батал.

А.1, В.3 бодлогуудыг А.Хамбаатар, А.2, В.2 бодлогуудыг
Д.Ламжав, А.3, В.1 бодлогуудыг А.Ганбаатар нар дэвшүүлэн.
Бодлого тус бүрийг 6 оноогоор үнэлсэн бөгөөд бүх бодлогыг
зөв бодсон сурагч 36 оноо авах боломжтой байв. Аймаг, хо-
туудаас шалгарч ирсэн нийт 21 сурагчийн материалыг шал-
гах эцсийн дүнг гаргахад сурагч Х.Бямбасүрэн / Дундговь /
27 оноогоор I-р байранд шалгарлаа.

Хүлэ хүснэгт- ийн дугаар	5 оноо	4 оноо	3 оноо	2 оноо	1 оноо	0 оноо	Суралц- лын ба- сан бүх оноо
A.1	13	1	2	-	1	-	93
A.2	2	2	3	1	4	3	44
A.3	-	-	-	-	-	-	0
B.1	7	-	-	1	4	4	57
B.2	1	1	4	1	2	3	37
B.3	4	-	1	-	-	1	29

Дээрх хүснэгтээс харахад A.1 бодлогыг олон сурагчид зөв бодсон, харин A.3 бодлогыг нэг ч сурагч бодож чадсангүй.

A.1 бодлогын бодолт

Аливаа бодит x -ийн хувьд $x^2 + x + 2 > 0$ учир

$$\frac{x^2 + x + 2}{x^2 + 2x^5 + 5x^2 + 4x + 20} \text{ бутархайн хуртвэр, хуваарийг}$$

$$x^2 + x + 2 \text{ -т хуваавал } \frac{1}{x^2 + x + 2 + \frac{16}{x^2 + x + 2}}$$

гэсэн нэрхийлэл гарна. Нэгэнт $x^2 + x + 2 + \frac{16}{x^2 + x + 2} \geq 8$

$$\text{учир } \frac{1}{x^2 + x + 2 + \frac{16}{x^2 + x + 2}} \leq \frac{1}{8} \text{ болох ба } x^2 + x + 2 =$$

$$= \frac{16}{x^2 + x + 2} \text{ буюу } x_1 = -2, x_2 = 1 \text{ үед тэнцэл биелнэ. Эндээс } y_{\max} = \frac{1}{8} \text{ болох нь харагдаж байна.}$$

A.2 бодлогын бодолт

Лемм. $x_1 + x_2 + x_3 = n$ тэгшитгэлийн натурал шийдийн тоо нь C_{n-1}^2 -той тэнцүү. / Ерөнхий тохиолдолд $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ тэгшитгэлийн натурал шийдийн тоо нь C_{n-1}^{n-1} -той тэнцүү гэж баталж болно / Өм $x_1 + x_2 + x_3 = n$

тэгшитгэлийн натурал шийдийн тоо нь $x_1 + x_2 \leq n-1$ тэнцэтгэл биений натурал шийдийн тоотой тэнцүү. $x_1 + x_2 = k$ тэгшитгэлийн натурал шийдийн тоо нь $k-1$ -тэй тэнцүү $(1, k-1); (2, k-2), \dots, (k-1, 1)$ / учир $x_1 + x_2 \leq n-1$

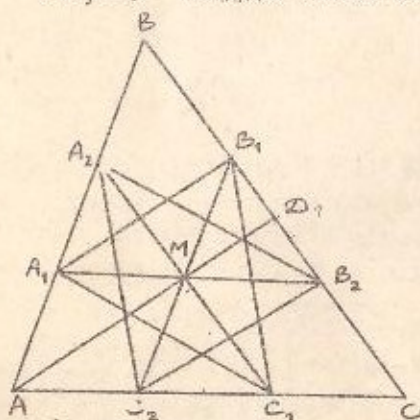
тэнцэтгэл бийийн бүх натурал шийдийн тоо нь $1+2+\dots+n-2$ буюу $\frac{1+n-2}{2} \cdot (n-2) = C_{n-1}^2$ болно. ■

Өмнөх лемм ёсоор гурван цифрийн нийлбэр $3, 4, 5, \dots, 9$ байх боломжийн тоо харгалзан $C_2^3, C_2^4, \dots, C_2^9$ байна. Одоо бид бодлогын нөхцөлийг хангах 8 оронтой тоо хичнээн байх болохыг амархан олж болно. Голын хоёр цифр нь 1-ээс 9 хүртэлх дурын тоо байх болох учир энэ хоёрын хувьд нийт 81 боломж бий. Харин эхний ба сүүлчийн гурван цифрийн нийлбэр тэнгүү бөгөөд 10-аас бага байх нийт боломжийн тоо нь $(C_2^3)^2 + (C_2^4)^2 + \dots + (C_2^9)^2$ болох учир бидний эрж буй тоо нь $81(1^2+3^2+6^2+10^2+15^2+21^2+28^2) = 129276$ байна.

А.3 бодлогын бодолт

Хэрэв $t=0$ бол $t_0 = \frac{1}{2}$, хэрэв $t = \frac{1}{2}$ бол $t_0 = 0$ гэж авэхад хангалттай. Иймд бид цаашид $t \neq 0$ ба $t \neq \frac{1}{2}$ гэж үзэх болно.

I арга $0 < t < \frac{1}{2}$ байг / $\frac{1}{2} < t < 1$ үед бодолт нь яг ижилхэн / $A(t) = A_1, B(t) = B_1, C(t) = C_1$, ABC гурвааны хүндийн төвийг M, $(A, M), (B, M), (C, M)$ шулуунууд BC, CA, AB талуудыг огтлох цэгүүдийг харгалзан B_2, C_2, A_2



/зургар хар/, BC талын дундаж цэгийг D гээ.

$\frac{|AB_1|}{|AA_2|} = k$ гэвэл өгөгдсөн ёсоор $\frac{|AC_1|}{|AC_2|} = \frac{1}{1-t}, \frac{|A_2B_1|}{|AM|} = \frac{3}{2}$

учир $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{1-t} \right)$ болно.

/ Улсын математикийн XXIII олимпиадын 9-р ангийн гурвын давааны А.1 бодлогыг хар / Эндээс $x = 3 - \frac{1}{1-t} =$

$= \frac{2-3t}{1-t}$ буюу $|AA_2| =$

$\frac{1-t}{2-3t} |AB_1|$ болно. Үүнтэй адилаар $|BB_2| = \frac{1-t}{2-3t} |BC_1|,$

$$|CC_1| = \frac{1-t}{2-3t} |CA| \quad \text{байх нь ойролцоотой.} \quad t_0 = \frac{1-t}{2-3t}$$

гэвэл A_2, B_2, C_2 нэгүүд нь шоргоолжнуудын t_0 агшин дэх байрлал болно. Одоо $\triangle A_1 B_1 C_1 \sim \triangle A_2 B_2 C_2$ ба $t_0 \neq t$ гэж харуулбал хангалттай. $t_0 = \frac{1-t}{2-3t}$ гэдгээс $0 < t <$

$< \frac{1}{2}$ үед $\frac{1}{2} < t_0 < 1$ болох учир $t \neq t_0$ байх нь илэрхий. $\vec{AC}_1 = (1-t) \vec{AC}$, $\vec{AM} = \frac{2}{3} \vec{AZ} = \frac{2}{3} \left(\frac{\vec{AC} + \vec{AB}}{2} \right) =$

$$= \frac{1}{3} \vec{AC} + \frac{1}{3} \vec{AB}, \quad \vec{AA}_2 = \frac{1-t}{2-3t} \vec{AB}. \quad \text{Эндээс } \vec{MA}_2 = \vec{AA}_2 - \vec{AM} =$$

$$= \frac{1-t}{2-3t} \vec{AB} - \frac{1}{3} \vec{AB} - \frac{1}{3} \vec{AC} = \frac{1}{3(2-3t)} \vec{AB} - \frac{1}{3} \vec{AC};$$

$$\vec{MC}_1 = \vec{AC}_1 - \vec{AM} = (1-t) \vec{AC} - \frac{1}{3} \vec{AC} - \frac{1}{3} \vec{AB} = -\frac{1}{3} \vec{AB} +$$

$$+ \frac{2-3t}{3} \vec{AC}. \quad \text{Сүүлчийн хоёр тэнцлээс } \vec{MA}_2 = -\frac{1}{2-3t} \vec{MC}_1,$$

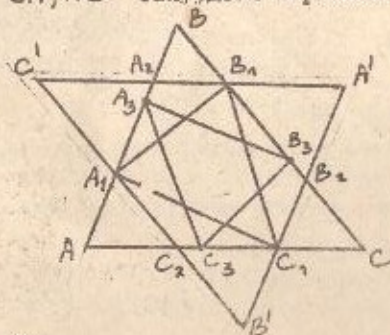
тэнцэл гарна. Үүнтэй адилаар $\vec{MB}_2 = -\frac{1}{2-3t} \vec{MA}_1$, $\vec{MC}_2 =$

$$= -\frac{1}{2-3t} \vec{MB}_1 \quad \text{болохыг тогтоож болно. } M \quad \text{нэг дээр төвтэй}$$

$k = -\frac{1}{2-3t}$ коэффициенттай гомотетээр A_1, B_1, C_1 гурвалжин B_2, C_2, A_2 гурвалжинд буюна. Энэ нь $\triangle A_1 B_1 C_1 \sim \triangle B_2 C_2 A_2$ буюу $\triangle A(t) B(t) C(t) \sim \triangle B(t_0) C(t_0) A(t_0)$ болохыг харуулж байна.

II арга Өмнөхтэй адил $0 < t < \frac{1}{2}$ үед бодлогыг бодно.

/ $\frac{1}{2} < t < 1$ үед бодолт адилхан / $A(t) = A_1, B(t) = B_1, C(t) = C_1$ гэе. A_1, B_1, C_1 нэгүүдийг дайруулан харгалзан BC, CA, AB талуудтай параллель шулуунууд татахад үүсэх гурвалжныг $A'B'C'$ гэе.



/ Зураг хар / $A'B', B'C', C'A'$ талууд харгалзан BC, CA, AB талуудыг огтлох нэгүүдийг B_2, C_2, A_2 гэе. Өгөгдсөн ёсоор $|BC_1| = t|BC|$, $|CC_1| = t|CA|$, $|AA_1| = t|AB|$, $\frac{|B_2C_1|}{|BC_1|} =$

$$= \frac{|C_1 C_2|}{|C_1 A|}, \frac{|C_2 A|}{|C_1 A|} = \frac{|A A_2|}{|A B|}, \frac{|A_2 B|}{|A B|} = \frac{|B B_2|}{|B C|} \quad \text{тэнцлүүдээс}$$

$$|B_2 C| = \pm |B C| = |B B_2|, |C_2 A| = \pm |C A| = |C C_1|, |A_2 B| = \pm |A B| = |A A_1|$$

гэж гарах ба сүүлчийн тэнцлүүдээс $|B_2 B_2| = |B C| - |B B_2| - |B_2 C| =$
 $= |B C| - 2\pm |B C| = (1-2\pm)|B C|, |C_1 C_2| = (1-2\pm)|C A|, |A_1 A_2| =$
 $(1-2\pm)|A B|$ гэж гарна. $\frac{|A' B_2|}{|B_2 C_1|} = \frac{|B_2 B_2|}{|B_2 C_1|} = \frac{(1-2\pm)|B C|}{\pm |B C|} = \frac{1-2\pm}{\pm},$
 $\frac{|B' C_1|}{|C_1 B_2|} = \frac{|C_2 C_1|}{|C_1 C_1|} = \frac{(1-2\pm)|C A|}{\pm |C A|} = \frac{1-2\pm}{\pm}, \quad \frac{|A' C_1|}{|A' B'|} = \frac{|A' B_2| + |B_2 C_1|}{|A' B_2| + |B_2 C_1| + |C_1 B_2|} =$
 $\frac{1-2\pm |B_2 C_1| + |B_2 C_1|}{1-2\pm |B_2 C_1| + |B_2 C_1| + \frac{1-2\pm}{\pm} |B_2 C_1|} = \frac{1-\pm}{2-\pm}$

$$\text{буюу } |A' C_1| = \frac{1-\pm}{2-\pm} |A B|. \quad \text{Үүнтэй адилаар } |B' A_1| = \frac{1-\pm}{2-\pm} |B C|,$$

$$|C' B_1| = \frac{1-\pm}{2-\pm} |C A| \text{ гэж олно. } \pm_0 = \frac{1-\pm}{2-\pm} \text{ гээд } \pm_0 \text{ агшин}$$

дахь шоргоолзнуудын байрлалыг $A_2 = A(\pm_0), B_2 = B(\pm_0), C_2 = C(\pm_0)$

$$\text{гэв. } \triangle A' B' C' \sim \triangle A B C \quad \text{ба } \frac{|A A_2|}{|A B|} = \frac{|A' C_1|}{|A' B'|}; \frac{|B B_2|}{|B C|} =$$

$$= \frac{|B' A_1|}{|B' C'|}, \frac{|C C_2|}{|C A|} = \frac{|C' B_1|}{|C' A'|} \quad \text{гэдгээс } \triangle A_2 B_2 C_2 \sim \triangle C, A, B,$$

буюу $\triangle A(\pm_0) B(\pm_0) C(\pm_0) \sim \triangle C(t) A(t) B(t)$. $\pm_0 \neq \pm$
 болохыг үүнийг өмнө харуулсан.

В.І бодлогын бодолт

$a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$ тэгшитгэлийн шийдүүдийг x_1, x_2, x_3

гэв. Виетийн теорем ёсоор (1) $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$, (2) $x_1 x_2 +$

$x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{c}{a}$, (3) $x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}$ тэнцлүүд биелнэ. (2)

тэнцлийг (3) тэнцэлд тал талаар нь хуваавал $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} =$

$$= -\frac{c}{d} \quad \text{болох ба энэ тэнцлийг (1) тэнцлээр мөн тал}$$

$$\text{талаар нь үржүүлбэл } (x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = \frac{6c}{ad}$$

$$\text{буюу } (x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = 9 \quad \text{болно. Нэгэнт}$$

$x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$ гэсэн учир сүүлчийн тэнцлийн зүүн
 талд арифметик, геометрийн дундын тухай теорем хэрэглэвэл

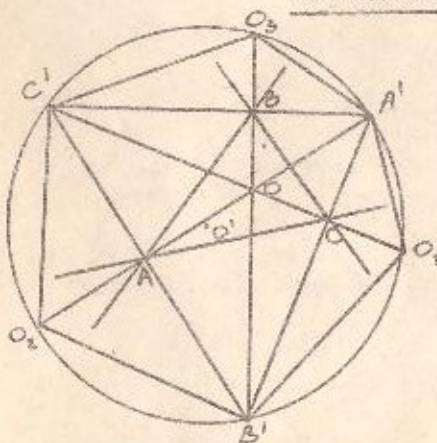
$$(x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) \geq 3 \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{1}{x_1 x_2 x_3}} = 9$$

болох ба тэнцэлцээ зөвхөн $x_1 = x_2 = x_3$ үед хүрнэ.

В.2 бодлогын бодолт

$c_n = a_n + b_n$ дараалал авч үзье. $c_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_n - b_n + a_n + 4b_n = 3(a_n + b_n) = 3c_n$ Эндээс бид $c_n = 3^{n-1}$ болохыг амархан тогтоом болно. $b_n = c_n - a_n = 3^{n-1} - a_n$ гэдгээс a_n дарааллын рекуррент томьёо нь $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_{n+1} = 2a_n - b_n = 2a_n - 3^{n-1} + a_n = 3a_n - 3^{n-1}$ болно. $x_n = \frac{1}{3^n} a_n$ дараалал авч үзье. Тэгвэл $x_1 = \frac{2}{9}$, $x_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}} a_{n+1} = \frac{1}{3^n} a_n - \frac{1}{9} = x_n - \frac{1}{9}$ болно. Эндээс $x_{n+1} = x_1 - \frac{n}{9}$ / арифметик прогресс / буюу $x_{n+1} = \frac{2}{9} - \frac{n}{9}$ болно. Энэст нь бид $a_{n+1} = 3^{n+1} x_{n+1} = 2 \cdot 3^{n-1} - n \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1} (2-n)$ гэж a_n дарааллын ерөнхий гишүүнийг оллоо. Эндээс $b_{n+1} = c_{n+1} - a_{n+1} = 3^n - 3^{n-1} (2-n) = (n+1) 3^{n-1}$ болно.

В.3 бодлогын бодолт



AB' нь A оройн гаднаад өнцгийн биссектрис, AA' нь A оройн дотоод өнцгийн биссектрис учир $\angle A'AB' = 90^\circ$. Үүнтэй адилмаар $\angle A'AC' = 90^\circ$ болно. Энэ нь A цэг $A'B'C'$ гурвалжны A' оройн өндрийн суурь болохыг хөрүүлж байна. Эндээс бид A, B, C цэгүүд нь $A'B'C'$ гурвалжны өндрүүдийн суурь болох ба ABC гурвал-

жинд багтсан тойргийн төв O нь $A'B'C'$ гурвалжны ортоцентр болно гэсэн дүгнэлтэнд хүрнэ. O цэгийг $A'B'$, $B'C'$ ба $C'A'$ талуудын хувьд тэгшхэмтэй хувиргахад гарах цэгүүдийг O_1, O_2, O_3 гээ. O_1, O_2, O_3 цэгүүд $A'B'C'$ гурвалжныг багтээсэн тойрог дээр оршино. $A'B'C'$ гурвалжныг багтээсэн тойргийн төвийг O' гээ. $2S' = S' + S_{AO_1B'} + S_{BO_2C'} + S_{CO_3A'} = S' + S_{AO_1B'} + S_{BO_2C'} + S_{CO_3A'} =$

$$= S_{A'O_2B'O_2C'O_2} = S_{O_1B'O_2O_1} + S_{O_2C'O_2O_1} + S_{O_2A'O_2O_1} =$$

$$= R^1 (|CA| + |AB| + |BC|) = R^1 \cdot \frac{2S}{r} \quad \text{буюу} \quad S'_{12} = SR^1$$

болж батлах зүйл батлагдав. $/O_1B'O_2O_1$ дөрвөн өнөгтийн диагональд перпендикуляр. Учир нь $|O_1O_2| = |O_1O_2|$.

$$|B'O_2| = |B'O_1| = |B'O_2|. \text{ Иймд } S_{O_1B'O_2O_1} = \frac{1}{2} |O_1O_2| \cdot |O_1B'| =$$

$$= |AC| \cdot R^1. \text{ Үүнтэй адил } S_{O_2C'O_2O_1} = |AB| \cdot R^1 \text{ ба } S_{O_2A'O_2O_1} = |BC| \cdot R^1 \text{ болно. /}$$

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХҮҮ ОЛИМПИАДИЙН
ГҮРВЫН ДАВААНЫ Х АНГИЙН БОДЛОГО,
ТҮҮНИЙ БОДОЛТ

Ц.Дамдорж, Л.Хадхүү

А1. $AB=AC$ хэрчмүүд нь кубийн ирмэгүүд. Δ цэгээс, B оройд төгсгөлтэй (кубийн) гол диагональ ба AC ирмэгийн дундажийг дайрч гарсан хавтгай хүртэлх зай нь h бол кубийн ирмэгийг ол. (4 оноо)

А2. (a_n) дараалал нь $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{a_n}$ гэж өгөгдсөн бол $0 < 2 - a_n < \left(\frac{3}{4}\right)^n$ болохыг батал. (6 оноо)

А3. a, b, c нь зэрэг тоонууд ба $n \in \mathbb{N}$,
 $2S = a + b + c$
бол $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} S^{n-1}$ болохыг батал. (6 оноо)

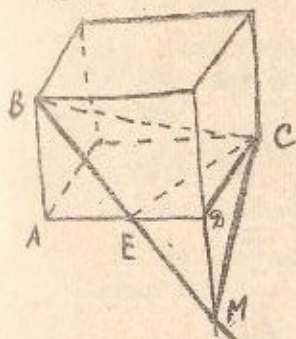
В1. $\frac{2^{x+1} - 7}{x-1} < \frac{10}{3-2x}$ тэнцэл бишийг бод. (4 оноо)

В2. $3^n + 55$ нь натурал тооны квадрат байх бүх n -г ол. (6 оноо)

В3. Тойргийн гадна орших O цэгээс тойргийн A, B цэгүүдэд мургэгчүүд ба O цэгийг дайруулж AB -г K цэгт тойргийг M, N цэгт огтлох шулуун татав.

$\frac{3}{OK} = \frac{1}{OM} + \frac{1}{ON}$ болохыг батал. (6 оноо)

AI.



$AB = x$ байг.

BEC хавтгайгаа цаан үргэлжлүүлж, кубийн талсуудтай огтлолцуулахад $MDCE$ пирамид үүснэ. Түүний эзэлхүүнийг V гээд 2 янзаар олбол $MD = x$,

$$ED = \frac{x}{2}, \quad DC = x$$

$$\text{тул } V = x \cdot \frac{x}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{x^3}{12}$$

$$\text{ба } EC = \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{5}}{2} = EM, \quad MC = x\sqrt{2}$$

$$S_{EMC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{x(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{2} \cdot \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$\cdot \frac{x(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{2}} = \frac{x^2\sqrt{6}}{4},$$

$$V = \frac{x^2\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{h}{3} = \frac{x^3}{12}, \quad x = \sqrt{6}h$$

$$12. a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + \frac{1}{a_n} \geq 2\sqrt{\frac{3}{4} a_n \cdot \frac{1}{a_n}} = \sqrt{3}$$

тул $n \geq 1$ үед $a_{n+1} \geq \sqrt{3} > 1$, $n \geq 1$ гэд $a_n \geq 1$

гэх гарч байна.

$$\begin{aligned} 2 - a_{n+1} &= \frac{3}{4} (2 - a_n) + \frac{1}{2} - \frac{1}{a_n} = \\ &= \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2a_n} \right) (2 - a_n) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2a_n} = \frac{3}{4a_n} \left(a_n - \frac{2}{3} \right) > 0 \quad \text{учир}$$

(1) -ээс $2 - a_n$ ба $2 - a_{n+1}$ нь адил тэмдэгтэй гэх гарч байна.

$2 - a_1 = 1 > 0$ тул эндээс дурын $n \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд

$2 - a_n > 0$ гэх гарна. Үүнийг анхаарвал

$$2 - a_{n+1} = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2a_n} \right) (2 - a_n) < \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2 \cdot 2} \right) (2 - a_n) = \frac{1}{2} (2 - a_n)$$

буюу

$$(2 - a_n) < \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} (2 - a_1) = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \quad \text{боллоо.}$$

Одоо

Энэхүү тэнцэл бий нь

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \leq \left(\frac{3}{4} \right)^n \quad \text{гэдгийг баталъя.}$$

$$2^n = 2^{n-1} \cdot 2 \quad \text{үргэлжлүүлэв}$$

$$2 < \left(\frac{3}{2} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{2} \right)^n$$

-тэй эквивалент ба

Бернуллийн тэнцэл бийгээр

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{2} \geq 2$$

тул батлах зүйл батлагдвал,

С а н а м и. Баялагдсан явцаас батлах тэнцэтгэл бийийг

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \leq 2 - a_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{гэх сайжруулж болох нь}$$

харагдаж байна.

АЗ. Өгөгдсөн тэнцэл бийд a, b, c -үүд нь тэгш өрхтэй орсон тул $a \geq b \geq c$ гэх үзэж болно.

Энэ үед мөн $\frac{a^n}{b+c} \geq \frac{b^n}{a+c} \geq \frac{c^n}{a+b}$ болох нь илэрхий. n -ээр нь индукцее. $n=1$ үед

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

гэсэн тэнцэтгэл бий гарч

байна. Чебышевийн тэнцэл бий ба индукцэд үзэж байгаагаар

$$\frac{\frac{a^{n+1}}{b+c} + \frac{b^{n+1}}{a+c} + \frac{c^{n+1}}{a+b}}{3} \geq \frac{\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{a+c} + \frac{c^n}{a+b}}{3},$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \cdot S^{n-1}}{3} \cdot \frac{2S'}{3} =$$

$$= \frac{S^n \cdot 2^{n-1}}{3^n}$$

болж бодлого бодогдов.

ВІ. Өгсөн тэмцэл бие нэ

$$(1) \begin{cases} 2^{x+1} - 7 < \frac{10}{3-2x}(x-1) \\ x-1 > 0 \end{cases} \quad \text{ба} \quad \begin{cases} 2^{x+1} - 7 > \frac{10}{3-2x}(x-1) \\ x-1 < 0 \end{cases} \quad (2)$$

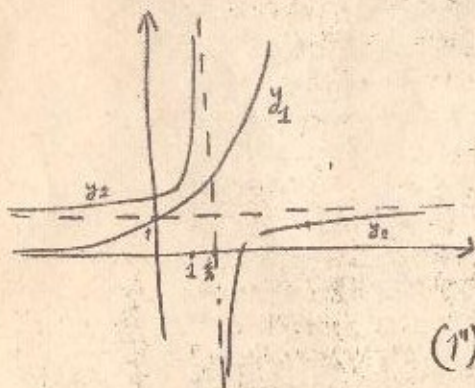
өгсөн 2 системийн нэгдэлтэй эквивалент.

Эдгээрийг

$$(1') \begin{cases} x > 1 \\ 2^x < 1 - \frac{5}{4(x-\frac{3}{2})} \end{cases} \quad \text{ба} \quad \begin{cases} x < 1 \\ 2^x > 1 - \frac{5}{4(x-\frac{3}{2})} \end{cases} \quad (2')$$

хэлбэртэй бичиж болно.

$y_1 = 2^x$, $y_2 = 1 - \frac{5}{4(x-\frac{3}{2})}$ функцуудийн графикийг байгуулах замаар (1') ба (2') -г бодъя. Графикаас харвал:



$$-\infty < x < \frac{3}{2} \quad \text{үед}$$

$$y_1 < y_2 \quad \text{ба}$$

$$\frac{3}{2} < x < \infty \quad \text{үед} \quad y_1 > y_2$$

болох нь харагдах байна.

Гэтэл (1), (2') нь

$$(1'') \begin{cases} x > 1 \\ y_1 < y_2 \end{cases} \quad \text{ба} \quad \begin{cases} x < 1 \\ y_1 > y_2 \end{cases} \quad (2'')$$

хэлбэртэй болох тул (2'') нь хэзээ ч биелэхгүй.

$$(1'') \quad \text{--ээс} \quad 1 < x < \frac{3}{2}$$

гэх ггарна.

В2. $3^n + 55 = A^2$, $A \in \mathbb{N}$ байдаг гэж үзье. Үүнийг
 $\text{mod } 4$ эер бичвэл $(-1)^n - 1 \equiv A^2 \pmod{4}$
ба $A^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ гэдгээс $A^2 \equiv 0 \pmod{4}$ 1
байж болох боломжтой ба энэ нь $n = 2k$ тэгш тоо
байхад харагджана. Эндээс

$$55 = A^2 - 3^{2k} = (A + 3^k)(A - 3^k) = 1 \cdot 55 = 5 \cdot 11$$

буюу

$$\begin{cases} A - 3^k = 1 \\ A + 3^k = 55 \end{cases}, \quad \begin{cases} A - 3^k = 5 \\ A + 3^k = 11 \end{cases}$$

болно.

Эдгээрээс $k=1$ ба 3 , $n=2$ ба 6 гэж олно.

В3. $\angle$ нь MN хөвчийн дундах цэг байг.

Огтлогч ба шүргэгчийн тухай теоремыг ашиглан:

$$\frac{2}{OK} = \frac{OM + ON}{OM \cdot ON} = \frac{OM + ON}{OA^2}$$

$$OA^2 = OK \cdot \frac{OM + ON}{2} = OK \cdot OL$$

$$\frac{OA}{OK} = \frac{OL}{OA} \quad (1)$$

гэж бичиж болно. Үүгээр манай бодл огыг бодох асуудал
нь (1) тэнцэл ийг батлах асуудалд шилжлээ. (1)-г
батлахын тулд $\triangle OAK \sim \triangle OAL$ гэж баталбал хан-
галттай.

OP-ийн дундах дээр
төвтэй тойрог дээр

L, A, B

цэгүүд орших тул

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН XXII ОЛИМПИАДЫН
ДӨРВИЙН ДАВААНЫ БОДЛОГУУД

Н.Дашдорж
Л.Хадхүү

Улсын математикийн XXII олимпиадын IY даваа 1988 оны Y сарын 7,8-ны өдрүүдэд МУИС дээр явагдаж, III даваанаас шалгарсан 52 сурагч өөрсдийн авъяас чадварыг сорилоо. Дөрвийн даваанд нийт 86 оноо бүхий 6 бодлого өгснөөс Зулын Соёл-Эрдэнэ /УБ I 10 жил / 26,5 оноогоор I-р байранд, Дашдоржийн Чинзориг /УБ 48-р 10 жил/ 18,5, Баттогтохын Чойжилсүрэн /Увс II 10 жил/ 17,5 оноогоор II байранд, Доржготовын Батсайхан /Дархан I 10 жил / 14,5, Шагдарын Болдсайхан /УБ 52-р 10 жил / 14, Цэнзэвээнчигийн Баярсайхан 51-р 10 жил/ 13,5, Рагчаабазарын Чойсүрэн /УБ 52-р 10 жил/ 12,5, Лхаасүрэнгийн Батхүү /МУИС-ийн 9-р анги / 12 оноогоор III байранд шалгарлаа. Д.Нарангэрэл /УБ I сургууль/, А.Доржпалам /УБ 48-р сургууль/, С.Эрхэмбаяр /Увс. II 10 жил/, Д.Баярцогт /Дархан I 10 жил/, Д.Раах /УБ 51-р сургууль/, Б.Марина /УБ 52-р сургууль/, Л.Ганбаатар /МУИС/, С.Нанжидсүрэн /Сэлэнгэ I 10 жил/ зэрэг багш нар сурагчдаа олимпиадад амжилттай бэлтгэн оролцууллаа.

Улсын математикийн XXII олимпиадад аймаг, хотуудын
багийн эзэлсэн байр

№	Аймаг, хотуудын нэр	Баг ийн гшшүүдийн тоо	Бүх оноо	Байр
1	Увс	2	$17,5 + 6,5 = 24$	I
2	Дархан	2	$14,5 + 7 = 21,5$	2
3	Баянхонгор	2	$11 + 10 = 21$	3
4	Хөвсгөл	2	$11 + 8,5 = 19,5$	4

5	Өвөрхангай	2	$7 + 4,5 = 11,5$	5
6	Сэлэнгэ	1	$11,5$	6
7	Архангай	2	$6,5 + 4 = 10,5$	7
8	Зовд	2	$6,0 + 3,5 = 9,5$	8
9	Сүхбаатар	2	$8,5 + 0,5 = 9$	9
10	Өмнөговь	2	$7 + 1,5 = 8,5$	10
11	Булган	2	$4 + 3,5 = 7,5$	11
12	Төв	2	$5 + 1,5 = 6,5$	12-13
13	Хэнтий	2	$5,5 + 1 = 6,5$	12-13
14	Дундговь	2	$3,5 + 1,5 = 5$	14-15
15	Эрдэнэт	2	5	14-15
16	Говь-Алтай	2	$2,5 + 2 = 4,5$	16-18
17	Дорнод	2	$3,0 + 1,5 = 4,5$	16-18
18.	Завхан	1	4,5	16-18
19.	Дорнод оговь	2	$3 + 1 = 4$	19
20	Баян-Өлгий	2	$2 + 0,5 = 2,5$	20

Улсын математикийн XXIV олимпиадын IV даваанд сонгогдсон бодлогууд, тэдний бодолтыг доор сийрүүлэв.

I өдөр

А.И. /А.Мекей, /МУИС/.

$$\begin{cases} x^3 - y^2 - z^3 = 3xyz \\ x^2 = 4(y+z) \end{cases}$$

системийн бүх сөрөг бич, бүхэл шийдийг ол. /5 оноо /

А 2. /А.Хашбаатар, /МУИС/.

Хавтгай дээр тойр ог ба А цэг өгөгддээ. А цэгийг дайрсан огтлогчийн тойрогтой огтлолцсон цэгүүдэд татсан шүрлэгчүүдийн огтлолцлын геометр байрыг ол.

/ 6 оноо /

А 3. / Б.Баясгалан УБДС / Хэвтгэй дээр
 ерөнхий гайршмал $2n$ ($n \geq 4$) ширхэг цэг өгөгджээ.
 Аль ч цэг нь яг нэг хэрчимийн үзүүр байхаар эдгээр цэгийг
 n ширхэг хэрчимээр, бүх хэрчмийг нэг шулуунаар огтоли
 а/ болдог б/ болдоггүй байхаар холбож болохыг тус тус батал / 7 оноо /

II өдөр

В 1. / Л.Хадхүү МУИС /
 $X_1 = 4, X_{n+1} = 7X_n + 4\sqrt{3X_n^2 + 1}$ ($n \geq 1$) дарааллын
 гишүүн бүр тэгш натурал тоо байхыг батал. / 6 оноо /

В 2 / Г.Хүрэлбаатар МУИС оюутан /
 ABC гурвалжны AB, BC талууд дээр
 $\angle BCN = \frac{1}{3} \angle BCA, \angle BAM = \frac{1}{3} \angle BAC$ байхаар
 N ба M цэгийг сонгон авчээ. Хэрэв $CN = AM$ бол
 ABC гурвалжин адил хахуут гэх батал. / 6 оноо /

В 3. / Б.Баясгалан УБДС / 5^n ($n \geq 1$) радиустай
 тэйрог дээр аль ч хойрын нь хоорондох зай бүхэл байхаар
 $n+1$ ширхэг цэг сонгон авч болохыг батал. / 6 оноо /

Бодолт.

А.1. Энэ бодлогыг Н.Энхболд / Сэлэнгэ / Ч.Эрдэнэ-
 баатар, З.Соёл-Эрдэнэ нар хамгийн товч аргаар, бүрэн бодсон
 байлаа. Н.Энхболд, Ч.Эрдэнэбаатар нарын бодолтыг үзүүлье.

$$x^3 - y^3 - z^3 = (x - y - z)(x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz - yz) \quad \checkmark$$

учир өгөгдсөн систем

$$\begin{cases} (x - y - z)(x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz - yz) = 0 \\ x^2 = 4(y + z) \end{cases}$$

хэлбэртэй болно. Эндээс дараах хоёр боломж гарна.

$$a/ \begin{cases} x-y-z=0 \\ x^2=4(y+z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y+z \\ x^2=4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

Эсвэл

$$\begin{cases} x=4 \\ y+z=4 \end{cases}$$

болно.

Эндээс

$$(0,0,0), (4,0,4), (4,1,3), (4,2,2), (4,3,1), (4,4,0)$$

гэсэн шийд гарна.

$$b/ \begin{cases} x^2+y^2+z^2+xy+xz-yz=0 \\ x^2=4(y+z) \end{cases} \quad (2)$$

тохиолдлыг авч үзье. Эхний тэгшитгэлийг

$$(x+y)^2 + (y-z)^2 + (z+x)^2 = 0$$

хэлбэртэй бичиж болох учир: эсдээс $x=y=z=0$ ✓
гэсэн өмнө олсон шийд гарч байна. Иймд анхны тэгшитгэл

$$(0,0,0), (4,0,4), (4,1,3), (4,2,2), (4,3,1), (4,4,0)$$

гэсэн 6 сөрөг биш бүхэл шийдтэй байна.

Одоо зохиогчийн санаарт товч бичье.

Системийн эхний тэгшитгэлээс $x \geq y, x \geq z$
дараагийн тэгшитгэлээс $x=2x_1$ (x_1 - сөрөг биш бүхэл тоо/
байх нь гарна. Иймд $4x_1^2 \leq 16x_1$ буюу $0 \leq x_1 \leq 4$

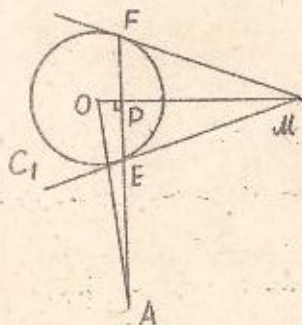
болно. Цаашид тохиолдолд салган бодож, бидний өмнө гаргасан
шийдүүдийг хялбар гарган авна. Энэ санаагаар уг бодлогыг
өргөтгөн

$$\begin{cases} x^3-y^3-z^3=kxyz \\ x^2=m(y+z) \end{cases} \quad (k, m \in \mathbb{N})$$

хэлбэртэй болгон бодож болох юм.

$$4x_1^2$$

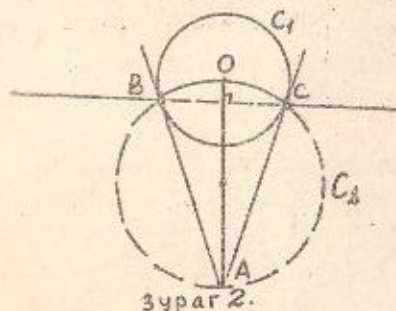
А 2. Энэ бодлогыг Л.Батхүү /МУИС/, Э.Соёл-Эрдэнэ нар бодсон байлаа. Л.Батхүү инверс амиглан сайхан бодолт гаргасныг энд сийрүүлэе. /Инверс, түүний чанаруудын тухай "Улсын математикийн XXIII олимпиад" УБ хот 1987 он. номын "Инверс" /А.Хамбаатар / өгүүллээс тодруулан уявина уу/.



Зураг 1.

P нь EF хэрчийн дундаж цэг учир $\triangle OAP$ нь тэгш өнцөгт гурвалжин болно. Өөрөөр хэлбэл P нь OA диаметртэй C_2 тойрог дээр оршино. Инверсээр туйлын / тойргийн төв O -ыг / дайрсан тойрог OA шулуунд перпендикуляр шулуунд буудаг билээ. Одоо дараах тохиолдлыг авч үзье.

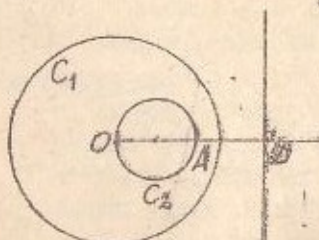
a/A цэг C_1 тойргийн гадна оршдог гэе.



Зураг 2.

Тэгвэл P цэгийн геометр байр нь C_2 тойргийн C_1 тойргийн дотор орших BOS нумын цэгүүд / B ба C цэгүүд орохгүйгээр / болно. Энд B, C нь A цэгээс C_1 тойрогт татсан шүргэгчийн цэгүүд юм. /Зураг 2/.

C_1 тойргийн хувьд $В$ ба C цэгүүд ертөө буух учир $ВOC$ нуман дүр нь E, C цэгүүдийг дайрсан шулуун тойргийн гадна орших хэсэг нь болно. /Инверсээр тойргийн дотор орших цэг $В$ -аас орших цэгт буудаг билээ/. Өөрөөр хэлбэл бидний эрж буй цэгүүдийн геометр байр нь (BC) шулуунаас $[BC]$ хэрчийг хасахад гарна.



зураг 3.

д). A цэг C_1 тойргийн дотор оршдог гэв. Тэгвэл P цэгүүдийн геометр байр нь OA диаметртай тойрог гарах учир M цэгүүдийн геометр байр нь (OA) шулуунд перпендикуляр, O цэгээс

$d = \frac{R^2}{|OA|}$ зайнд орших шулуун гарна. /зураг 3/

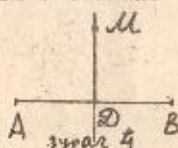
в / $A \in C_1$ бол M цэгүүдийн геометр байр нь C_1 тойргийн A цэгт татсан шүргэгчийн A -аас бусад цэгүүд болох нь өмнөх тохиолдлуудтай ижил гарна.

г / $A = O$ бол M цэгүүдийн геометр байр хоосон олонлог гарах нь илэрхий юм.

Санааж. г / тохиолдолд M цэгүүдийн геометр байр нь хоосон бий байхавар хавтгайн цэгүүдийг өргөтгөх болдог юм.

Одоо зохиогчийн бодолтыг үзүүлбэ.

Эхлээд туслах бодлого бодъё. Өгсөн A, B хоёр цэг хүртлэх зайн квадратын ялгавар тогтмол байх цэгийн геометр байр AB шулуунд перпендикуляр шулуун байдлыг батлая.



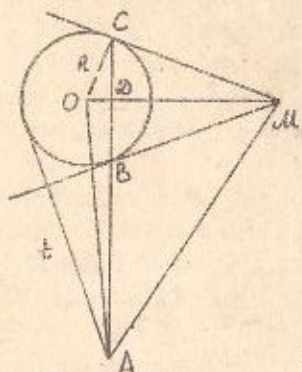
зураг 4

(AB) шулуунд перпендикуляр l шулууны M цэгийг авч $(AB) \cap l = D$ гэвэл

$$MA^2 - DA^2 = MB^2 - DB^2$$

буюу $MA^2 - MB^2 = DA^2 - DB^2 = \text{const}$

Хэрвэ $MA^2 - MB^2 = k = const$ бол AB шулуун дээр $DA^2 - DB^2 = k = const$ байх цэг ордох нь илэрхий. Иймээс D цэгийг дейрсан (AB) -д перпендикуляр шулуун бүх цэг энэ нөхцлийг хангана. [Зураг 4]



Зураг 5

Одоо анхны бодлогоо бодъя. A цэг тойргийн гадна оршдог бол

$$MA^2 - MO^2 = const$$

гэж харуулъя. [Зураг 5]

$$\begin{aligned} MA^2 - MO^2 &= DA^2 + DM^2 - (CM^2 + R^2) = \\ &= DA^2 - (CM^2 - DM^2) - R^2 = DA^2 - CD^2 - \\ &- R^2 = (AD + DC)(AD - DC) - R^2 = \\ &= AC \cdot (AD - DB) - R^2 = AB \cdot AC - R^2 = \\ &= t^2 - R^2 = OA^2 - 2R^2 \end{aligned}$$

A цэг тойргийн дотор оршиход $MA^2 - MO^2 = 2R^2 - OA^2$ байхыг өмнөхийн адил тогтоож болно.

A цэг тойрог дээр оршвол

$$MA^2 - MO^2 = R^2 - 2R^2 = -R^2$$

Ийнхүү аль ч тохиолдолд $MA^2 - MO^2 = const$

байх тул M цэг OA шулуунд перпендикуляр шулуун дээр оршино.

Тойргийн огтлогч, тойрогтой ганц өрөнхий цэгтэй байх болохгүй, ямарч хоёр шүргэгч нь тойрог дотор огтлолцдоггүйг санавад бодлого бодогдох гүйцнэ.

А 3. Олон зурагч бодлогын а/ хэсгийг бодсон байв. Бодлогын б/ хэсгийг Ц.Баярсайхан багтасан олон өнцөгтийн оройн хоогоор тохиолдолд салган бараг бүрэн бодсон байв.

Хавтгайд өгөгдсөн ерөнхий байршилтай n цэгийн алийг нь ч дайраагүй, нэг талдаа эдгээрийн k , нөгөө талдаа $n-k$ ширхэг цэгийг нь агуулсан шулуун татаж болох нь илт. /Баталгааг бие дааж хийцгээ /.

а/ Дээр тэмдэглэсэн ёсоор өгөгдсөн $2n$ цэгийн алийг нь ч дайраагүй, хоёр талдаа n ширхэг цэг агуулсан

1 шулуунг татаж, $2n$ цэгийг үүсэх хэрчимийн үзүүрүүд

1 шулуун 2 талд байхаар хос хосоор нь холбоход 1

шулуун үүссэн бүх хэрчимтэй огтлолцож байна.

б/ Өгөгдсөн $2n$ цэгүүдээс дотроо эдгээрийн алины нь ч агуулаагүй гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн орой болох 4 цэг олдохыг харуулья.

Өгөгдсөн цэгүүдийн алиныг ч дайраагүй, нэг талдаа $2n-5$, нөгөө талдаа 5 цэг агуулсан шулуунг татаж, эдгээр 5 цэгээс дээрх 4 цэгийг олб. Аль нэг гуранг нь A, B, C гэж тэмдэглэв ABC гурвалжин байгуулбал дараах боломжууд үүснэ. Үүнд:

I/ Үлдсэн 2 цэг ABC гурвалжны дотор оршино.

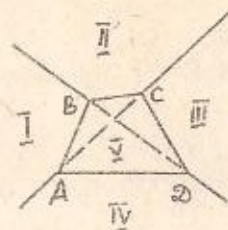
Энэ хоёр цэгийг D, E гэж тэмдэглэе. $(AD), (BE), (CE)$

шулуунуудаар гурвалжныг 6 хэсэгт хуваавал E цэг аль ч хэсэгт байхад гүдгэр 4 өнцөгтийн орой болох 4 цэг сонгон авч болох нь илт. /Зураг 6/



II/ Ядаж нэг нь тухайлбал D цэг ABC гурвалжны гадна оршино. Энэ үед A, B, C, D цэгүүдээр үүсэх 4 өнцөгт гүдгэр байна. Ийнхүү гүдгэр 4 өнцөгтийн орой болох 4 цэг олдож байна. Түүнийг $ABCD$ гэж тэмдэглэе. Хэрэв E цэг

$ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн гадна оршвол бидний олох 4 цэг нь A, B, C, D болно. E цэг $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн дотор оршдог бол тэр нь эсвэл $\triangle ABC$ -ийн дотор эсвэл $\triangle CDA$ -ийн дотор оршино. Эхний тохиолдолд бид мэдэх буй 4 цэг нь A, E, C, D дараагийн тохиолдолд A, B, C, E болно.



Ийнхүү өгөгдсөн цэгүүдээс дотроо эдгээрийн алины нь 4 агуулаагүй, гүдгэр 4 өнцөгтийн орой болох 4 нэг олдох нь батлагдав. Эдгээр 4 цэгийг цаашид A, B, C, D гэж тэмдэглэе. Хавтгайг зурагт зааснаар 5 хэсэгт хуваавал байгууламт ёсоор V хэсэгт ганц ч цэг байхгүй. (Өгөгдсөн цэгүүдийн нэг шүү!)

Хэрэв I, II, III, IV хэсгүүдийн ядаж нэгэнд нь, тухайлбал I хэсэгт өгөгдсөн цэгүүдээс 2 нь оршиж байвал /эдгээрийг E, F гэе / EF, BC, AD хэрчмүүдийг 1 шулуунаар огтоож болохгүй. Нөгөө тохиолдолд I, II, III, IV мужуудад тус бүр нэг нэг цэг оршино. Эдгээрийг харгалзан E, F, G, H гэвэл AE, BF, CG, DH хэрчмүүдийг 1 шулуунаар нэгэн зэрэг огтоож болохгүй.

2. I . Энэ бодлогыг З.Соёл-Эрдэнэ, Б.Чойжилсүрэн, Д.Эрдэнэменх /Баянхонгор/, А.Хангал /Өмнөговь / нарын 10 сурагч бодсон байлаа. Бодсон ихэнх сурагч өгөгдсөн дарааллын дараалсан 3 гишүүн $X_{n+2} = 14X_{n+1} - X_n$ томъёогоор хялбогдохыг харуулсан байлаа. Одоо энэ бодлогыг хамгийн товчхон бодсон З.Соёл-Эрдэний бодолтыг эвд үзүүлбэ. Өгөгдсөн ёсоор $X_{n+1} - 7X_n = 4\sqrt{3X_n^2 + 1}$ буюу

$$X_{n+1}^2 - 14X_n X_{n+1} + X_n^2 = 16 \quad \text{болно. Эндээс}$$

$$49X_{n+1}^2 - 14X_{n+1}X_n + X_n^2 = 16(3X_{n+1}^2 + 1) \quad \text{болох ба } X_{n+1} - 7X_n > 0$$

гэдгийг тооцвол

$$7X_{n+1} - X_n = 4\sqrt{3X_{n+1}^2 + 1}$$

гарна. Иймд

$$X_{n+2} = 7X_{n+1} + 4\sqrt{3X_{n+1}^2 + 1}$$

$$X_{n+2} = 14X_{n+1} - X_n - (7X_{n+1} - X_n) + 4\sqrt{3X_{n+1}^2 + 1} =$$

$$= 14X_{n+1} - X_n$$

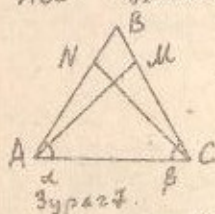
болно.

$$7X_{n+1} - X_n = 2 \text{ нэмж хавд. } 39$$

$x_1 = 4, x_2 = 56$ учир дараагийн бүх гишүүд тэгш натурал утга / бүр 4-д хуваагдах натурал утга / авах нь илэрхий би.

В 2. Энэ бодлогыг 4.Эрдэнэ билэг AMB, CNB гурвалжуудын хувьд синусын теорем бичих замаар, Д.Чинзориг

ABC гурвалжны талбайг 2 янзаар бичих тэнцүүлэх



замаар тус тус тригонометрийн тэнцэтгэл гарган авч, түүнийггээ бодож $\alpha = \beta$ гэсэн тэнцэлд хүрчээ. Мөн Б.Чойжилсүрэн Д.Сойл-Эрдэнэ нар нэлээд дөхүүлсэн байлаа. /зураг 4/

Одоо арай хялбар нэгэн бодолтыг үзүүлье. Хэрэв

A, N, M, C

цэг нэг тойрог дээр оршдог бол ижил урттай хавчид тулсан өнцгүүд болохын хувьд /зураг 2-н хэсг/:

$$\angle BAC = \angle ACB$$

болж бодлого бодогдох юм.



Зураг 2.

Иймд A, N, M, C цэгүүд нэг тойрог дээр оршдоггүй тухайлбал A, N, C цэгүүдийг дайрсан тойргийн гадна

M цэг оршдог / M нь уг тойргийн

дотор орших үед бодолт нь ижлээр хийгдэнэ./ гэж эсрэгээс нь үзье.



Тэгвэл нэг талаас $\overline{NM'} < \overline{NN'}$

учир $\frac{1}{3}\alpha < \frac{1}{3}\gamma$ буюу $\alpha < \gamma$ болно.

Нөгөө талаас $\angle NC' = \angle AM' > \angle AM'$

учир $\overline{AM'} < \overline{NC}$ байх нь мэт. Эндээс

$\overline{AN} < \overline{MC}$ болж $\frac{2}{3}\gamma < \frac{2}{3}\alpha$ гэж гарна.

Энэ нь $\alpha < \frac{\pi}{2}$ үндэстэй бийд харшилдаг.

Санаж, Энэ бодолтын явцаас анхны бодлогын нөхцөлд

$\frac{1}{3}$ коэффициентийг $\frac{1}{k}$ ($k > 1$) хэлбэрийн дурын бутархайгаар сольж болох нь харагдаж байна.

В 3. Энэ бодлогыг бодох үндсэн санааг ганицхан Д.Ганзориг л гаргаж чадсан байлаа. Д.Ганзоригийн бодолтыг бага зэрэг засварлан энд сийрүүлэе.

Эхлээд R радиустай тойрог дээр орших 2 цэгийн хоорондох зай $2R \sin \frac{\varphi}{2}$ -тай тэнцүү байдгийг

сануулъя. Энд φ нь эдгээр цэгүүдийн радиус векторуудын хоорондох өнцөг. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

байх $k\alpha$ өнцөг авч өгөгдсөн $R = 5^n$ радиус бүхий тойрог дээр дурын зэрэгцээ хоёрынх нь радиус векторуудын хоорондох өнцөг 2α байхаар $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ цэгийг авъя. Энд A_1, A_{n+1} хоёрыг зэргэлдээ цэгүүд гэж үзэхгүй.

Муаврийн томьёоноос

$$(*) \quad \begin{cases} \cos nx = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \cdot \sin^4 x - \dots \\ \sin nx = C_n^1 \cos^{n-1} x \cdot \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \cdot \sin^3 x + \dots \end{cases}$$

болоыг хялбархан гаргадаг билээ / (*) томьёот мөн индукцээр шууд баталсан ч бас болно/. Тэгвэл A_i, A_j цэгүүдийн хоорондох зай нь ($1 \leq j-i = k \leq n$)

$$\begin{aligned} |A_i A_j| &= 2 \cdot 5^n \cdot \sin k\alpha = \\ &= 2 \cdot 5^n \left(k \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} - C_k^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{k-3} + \dots \right) = \\ &= 2 \cdot 5^{n-k} \left(k \cdot 3 \cdot 4^{k-1} - C_k^3 \cdot 3^3 \cdot 4^{k-3} + \dots \right) \end{aligned}$$

гэж бүхэл тоо гарч байна.

Одоо эдгээр цэгүүдийн аль ч хоёр нь давхцахгүй гэдгийг харуулъя. Үүний тулд дараах туслах бодлогыг бодъя.

Бодлого Хэрэв $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\sin \alpha = \frac{m}{n}$, $\cos \alpha = \frac{k}{n}$ ($m, n, k \in \mathbb{N}$)

бол $\ell \cdot \alpha = 2\pi s$ ($\ell, s \in \mathbb{Z}$) байх болохгүй.

Бодолт $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ -ээс $(m, n) = (k, n) = (m, k) = 1$

гэм үзэх болох нь гарна. Эсрэгээс нь $\ell \cdot \alpha = 2\pi s$, $\ell, s \in \mathbb{Z}$ байна гэж үзье.

а/ ℓ - сондгой тоо бол (*) -оос

$$\begin{aligned} \sin \ell \alpha &= \sin 2\pi s = 0 = C_\ell^1 \cos^{\ell-1} \alpha \cdot \sin \alpha - \\ &- C_\ell^3 \cos^{\ell-3} \alpha \cdot \sin^3 \alpha + \dots \pm C_\ell^\ell \sin^\ell \alpha \end{aligned}$$

буюу

энд хамгийн сүүлчийн нэмэгдэхүүн $\sin^\ell \alpha$ - өөс бусад нь $\cos \alpha$ -ийг агуулах тул $m^{\ell-1} k$, $m^i k$ гэж зөрчил гарна.

б/ ℓ - тэгш тоо байг, өөрөөр хэлбэл

$$\ell = 2^t q \quad / \quad q \text{ - сондгой } / \text{ байг.}$$

Тэгвэл $\sin \ell \alpha = \sin 2\pi s = 0 = \sin 2^t q \alpha =$

$$= 2^t \cos 2^{t-1} q \alpha \cdot \cos 2^{t-2} q \alpha \cdot \cos 2^{t-3} q \alpha \cdot \sin q \alpha - \text{ээс эсвэл } \cos 2^t q \alpha = 0 \quad (0 < t < \ell)$$

эсвэл $\sin q \alpha = 0$ гэж гарна. Хэрэв $\sin q \alpha = 0$

бол а/ тохиолдлоор бодлого бодогдоно. Үлдэх тохиолдолд хэрэв $q > 0$ бол (*) ёсоор

$$\begin{aligned} 0 &= \cos 2^t q \alpha = \cos^{\ell-2} \alpha - C_{\ell-2}^2 \cos^{\ell-4} \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \\ &+ C_{\ell-4}^4 \cos^{\ell-6} \alpha \cdot \sin^4 \alpha + \dots \pm C_{\ell-1}^1 \sin^{\ell-1} \alpha \end{aligned}$$

болох тул мөн а/ тохиолдлын адил зөрчил гарна. Энд

$$l_1 = 2^{\frac{1}{2}} q_1 -$$

Хэрэв $l = 0$ бол $\cos q\alpha = 0$ буюу

$\sin q\alpha = \pm 1$ болох ба мөн (*) ёсоор

$$\begin{aligned} \sin q\alpha = \pm 1 &= C_q^1 \cos^{q-1} \alpha \cdot \sin \alpha - \\ &- C_q^3 \cos^{q-3} \alpha \cdot \sin^3 \alpha + \dots \pm C_q^q \sin^q \alpha \end{aligned}$$

$$\pm n^q = C_q^1 k^{q-1} m - C_q^3 k^{q-3} m^3 + \dots \pm m^q \quad \text{буюу}$$

буюу $n : m$ гэсэг зөрчилд

хүргэнэ. Туслах бодлого бодогдлоо. Үүгээр манай 83
бодлого бүрэн бодогдов.

ОЛОН УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХІХ
ОЛИМПИАДЫН БОДЛОГО

А.Мекей

ОУМ-ийн ХХІХ олимпиад 1988 оны 7-р сарын 9-ээс 21-ний өдрүүдэд Австрали улсын Канберра Сидней хотуудад болж 49 орин баг, 268 сурагч оролцов. ЗСБНХУ-ын баг 217 оноогоор I, БНХАУ ба БНСРУ-ын баг 201 оноогоор II-ш, ХБНГУ-ын баг 174 оноогоор IY, БНСВУ-ын баг 166 оноогоор Y, АНУ-ын баг 153 оноогоор YI, БНАГУ-ын баг I 45 оноогоор XII, БНБАУ-ын баг 144 оноогоор YIII байр, Франц улсын баг 128 оноогоор IX, Англи улсын баг 121 оноогоор X байранд тус тус налгарчээ. 17 сурагч алт, 48 сурагч мөнгө, 67 сурагч хүрэл медаль авчээ. Төргүүн гурван байр эзэлсэн ЗСБНХУ-ын багийн 6 сурагчийн 4 нь алт, 2 нь мөнгө; БНХАУ-ын багийн 6 сурагчийн 2 нь алт, 4 нь мөнгө, БНСРУ-ын багийн 6 сурагчийн 2 нь алт, 4 нь мөнгөн медаль авчээ. ХХІХ олимпиадад манай улсын баг оролцоогүй.

ОУМ ХХІХ олимпиадад сурагчид дараах 6 бодлогыг бодож, авхаалх самбаагаа сорьж уралдсан байна.

1. Нэг хавтгай дээр орших бөгөөд R ба z ($R > z$) радиустай концентр/төвүүд нь давхцсан / хоёр тойрог өгчээ. P нь бага тойрог дээрх бэхлэгдсэн, B нь их тойрог дээрх хувьсах / хөдлөх / цэг байг. BP шулуун том тойрогтой C цэг дээр огтлолцоно. BP шулууны P цэг дээр босгосон перпендикуляр l -шулуун бага тойрогтой A цэг дээр огтлолцоно / хэрэв l -шулуун тойргийг P цэг дээр шүргэж байвал $A \equiv P$ гэж тооцох км / Тэгвэл:

1° / $BC^2 + CA^2 + AB^2$ -ны утгуудыг ол.

2° / AB хэрчмийн дундаж цэгүүдийн геометр байрыг тодорхойл.

2. n - натурал тоо, $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ нь B олонлогийн д эд олонлогууд бөгөөд дараах чанаруудыг хангадаг байг.

(1°) A_i бүхэн яг $2n$ элементтэй; (2°) $A_i \cap A_j$ нь

$1 \leq i < j \leq 2n+1$ үед, зөвхөн ганц элементээс тогтоно.

(3'). B -ийн элемент бүр ядаж хоёр A_i -д харьяалагдана.

n - ямар тоо бол A_i бүрийн яг n элементэд O тэмдэг оноогдсон байхаар B -ийн элемент тус бүрд $0; 1$ тэмдгийн аль нэгийг оноох болох вэ?

3. f - функц бүх эерэг бүхэл n - тоонуудад тодорхойлогдсон бол

$$f(1) = 1, \quad f(3) = 3$$

$$f(2n) = f(n)$$

$$f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n)$$

$$f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$$

байг.

$n \leq 1988$ бөгөөд $f(n) = n$ байх бүх эерэг бүхэл n тоонуудын тоог / ширхэгийг/ ол.

$$4. \sum_{k=1}^{20} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$$

тэнцэтгэл ойний хангах x - бодит тоонуудын олонлог, ур-туудынхна нийлбэр 1988 байх үл огтлолцох / интервал / завсруудын нэгдэл байхыг үзүүл.

5. ABC гурвалжны A - өнцөг нь тэгш ба A - оройгоос буулгасан өндрийн суурь D байг. ABD ба ACD гурвалжинд багтсан тойргуудын төвийг дайруулан татсан шулуун AB ба AC талыг харгалзан K ба L цэгүүд дээр огтлоно.

ABC ба AKL гурвалжны талбайг харгалзан S ба T гэж тэмдэглэе.

$S \geq 2T$ байхыг батал.

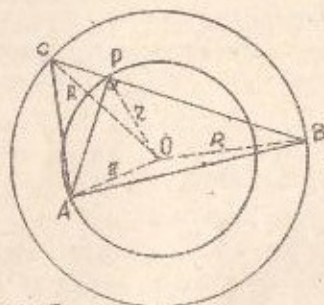
6. a ба b эерэг бүхэл тоонууд ба $a^2 + b^2$ нь $ab+1$ -д хуваагдана. Тэгвэл

$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ - бүхэл тооны квадрат байна гэж үзүүл.

Бодлогуудын бодолт. Бидний гарт бодлогуудын зохиогчийн бодолт байхгүй учир энд өг сөн бодолтууд оновчтой би ш

урт байж болохгүй. Иймээс та нар бодлого бүрийг энд өгснөөс өөрөөр / товч аргаар / бодохыг зөвлөж байна. Тийм бодолт олбол бидэнд бичиж илгээхийг хүсье.

I бодлогын бодолт / Зураг I-ийг үз /



Зураг I

$$\angle AOP = 2\alpha$$

гэж тэмдэглэв.

$$AP^2 = z^2 + z^2 - 2z^2 \cos 2\alpha =$$

$$= 2z^2 (1 - \cos 2\alpha) =$$

$$= 4z^2 \sin^2 \alpha$$

$$\angle APO = \angle OAP = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} =$$

$$= 90^\circ - \alpha$$

$$\angle CPO = 180^\circ - \alpha,$$

$$\angle OPB = \alpha$$

Мөн косинусын теорем ёсоор CPO ба BPO гурвалжинуудад

$$R^2 = z^2 + CP^2 + 2zCP \cos \alpha$$

$$R^2 = z^2 + PB^2 - 2zPB \cos \alpha$$

болно. Эндээс

$$CP = \sqrt{R^2 - z^2 \sin^2 \alpha} - z \cos \alpha > 0$$

$$BP = \sqrt{R^2 - z^2 \sin^2 \alpha} + z \cos \alpha$$

болно. Иймд

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 + BC^2 &= AP^2 + PB^2 + CP^2 + (CP + PB)^2 = \\ &= 2(AP^2 + PB^2 + PC^2 + PB \cdot PC) = 2[AP^2 + (PB + PC)^2 - PB \cdot PC] = \\ &= 2[4z^2 \sin^2 \alpha + 4R^2 - 4z^2 \sin^2 \alpha - (R^2 - z^2 \sin^2 \alpha - z^2 \cos^2 \alpha)] = \\ &= 2(4R^2 - R^2 + z^2) = 2(3R^2 + z^2) \end{aligned}$$

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 6R^2 + 2z^2$$

байна.

буюу

6/ 1-р зургаг дээрх O цэг дээр координатын эх,
 OP цэнхрэг абсцисс тэнхлэгийн зэрэг чиглэл болж бай-
хаар эсгн өндөгт координатын системийг авбал P цэгийн
координатууд $(2,0)$ бо лмо. A, B, D цэгүүдийн координа-
туудыг харгалзан $(x, y), (u, v), (z, w)$ гэж
тэмдэглэвэл:

$$x+u=2x, \quad y+v=2y, \quad x^2+y^2=z^2, \quad u^2+v^2=R^2$$

болно. Эхний хоёр тэгшитгэлийн хоёр талыг квадрат зэрэг дэвшүүлж, хоёронд нь нэмээд сүүлийн хоёр тэгшитгэлийг тооцвол:

$$z^2 + 2(xu + yv) + R^2 = 4x^2 + 4w^2 \quad \text{буду}$$

$$xu + yv = 2(x^2 + w^2) - \frac{z^2 + k^2}{2} \quad (*)$$

$\vec{PB} = \{u-z, v\}$, $\vec{PA} = \{x-z, y\}$ векторууд перпендикуляр учир
 $(\vec{PB}, \vec{PA}) = (u-z)(x-z) + vy = (ux+vy) - (u+x)z + z^2 = 0$
 болно. Энд (*) -г тооцвол

$$2(z^2 + w^2) - \frac{z^2 + R^2}{2} - 2zw + z^2 = 0 \quad \text{или} \quad \left(z - \frac{z}{2}\right)^2 + w^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

гэж гарна. Эндээс $\frac{R}{2}$ цэг O, P цэгүүдийн дундаж цэг радиустай тойрог дээр орших нь харагдаж байна.

Цаам нь тус тойрог дээр орших цэг бүхэн, бодлогын нөхцлийг хаягах APB гурвалжны AB талын дундаж цэг болох сайхаар B цэгийг том тойргоос олж болохыг хялбархан шалгаж болно. Үүнийг та бүхэнд дасгал болгон үлдээе.

Савант. Координатын эхийг O цэг дээр, гэхдээ тэнхлэг заавал OP -г дайраагүй байхаар ч сонгон авч бодож болно.

П.Бадлогын бодолт, Нэхцэл ёсоор $A_i \cap A_j = A_j \cap A_i, i \neq j$

Үед ганц элементтэй олонлог учир гэр элементийг нь,
аль алинд нь байгааг харуулахын тулд $a_j = a_k$ гэх тэмдэг-
лээ. Энэ байдлыг тусгах.

$$A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{i, i-1}, a_{i, i+1}, \dots, a_{i, 2n+1}\}$$

Үүнд $\{a_{ik}\} = A_i \cap A_k$ юм. $i = 1, 2, \dots, 2n+1$

Энд тэнцэтгэлийн тэмдэг биелнэ:

$$A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i, i-1}, a_{i, i+1}, \dots, a_{i, 2n+1}\} \quad (1)$$

гэх үзүүлье.

B -ийн элемент бүр зөвхөн хоёрхон A_i -д орно гэх харуулбал (1) биелэх нь харагдана. Ямар нэг $b \in B$ элемент

$$b \in A_i \cap A_j \cap A_k \quad i \neq j, j \neq k, i \neq k$$

гэх үзье. Тэгвэл $b = a_{ij} = a_{ik} = a_{jk}$ болно. $a_{ij} = a_{ik}$ ба $|A_i| = 2n$ учир A_i -д дээр заасан a_{ij} -ээс ялгаатай 2 - гэсэн элемент ($\neq b$) байх болно. Гэтэл $2 \in A_j \cap A_i$; байх p -дугаар олдоно. Энэ нь $2 = a_{ip}$ гэсэн үг болно. Энэ бол 2 бүх a_{ij} -ээс ялгаатай гэсэнд зөрчилдөв. Ийнхүү $A_i \cap A_j \cap A_k$ хоосон олонлог ба (1) үнэн болно.

A_i -ийн элементийг i -р мөр болгон, бүх A_i -ийн элснийг дараах байдлаар матриц / хүснэгт/ болгон бичье:

$$\begin{pmatrix} * & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1, 2n} & a_{1, 2n+1} \\ a_{21} & * & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2, 2n} & a_{2, 2n+1} \\ a_{31} & a_{32} & * & a_{34} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3, 2n} & a_{3, 2n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{2n, 1} & a_{2n, 2} & a_{2n, 3} & a_{2n, 4} & \dots & a_{2n, i} & \dots & * & a_{2n, 2n+1} \\ a_{2n+1, 1} & a_{2n+1, 2} & a_{2n+1, 3} & a_{2n+1, 4} & \dots & a_{2n+1, i} & \dots & a_{2n+1, 2n} & * \end{pmatrix} \quad (2)$$

(2) дахь $a_{ij} = a_{ji}$ учир "гол диагоналийн" дээд /доод / талын бүх элементүүд B олонлогийн бүх элементийг өгнө. Иймд B нь $2n^2 + n$ элементтэй болно.

Одоо, A_i бүрийн яг n элементэд 0 , тэмдэг, үлдсэн n элементэд нь 1 / Оноогдсон байхаар B -ийн элементүүд 0 ба 1 тэмдгүүд оноог, ингэхдээ B -ийн бүх элементэд, өөрөөр хэлбэл (2) матрицын бүх элемент 0 ба 1 гэж тэмдэглэгдсэн байхаар тэмдэг оноох юм. Ийм байхаар B -ийн элемент нэг бүрд 0 ба 1 тэмдгийн аль нэгийг оноож чадсан гэвэл, B -ийн нэг элемент зөвхөн хоёрхон A_i -д орох учир, (2) хүснэгт дэх элемент бүрийг, түүнд оноосон тэмдгээр солиход, тэнд 0 -ийн тоо 1 -ийн тоотой яг адил болно. $a_{ij} = a_{ji}$ учир (2)-ын диагоналийн дээд талд хичнээн 0 байвал доод талд мөн тэцнэс. тэг байх юм. Энэ сэтгэлтээ I -ийн хувьд мөн адил үнэн юм. Ийнхүү (2) -ын диагоналийн дээд талд x -тэмдгийг 0 -аар y -тэмдгийг 1 -ээр сольсон гэвэл $2x = 2y$ буюу $x = y$ болно. Иймд $x + y = 2x = 2n^2 + n = |B|$ болох юм. Энэ нь B -тэгий тооны элементтэй байна гэсэн үг юм. Тэхээр дээрх нөхцөл биелэх тэмдэг оноолт зөвхөн n -тэгий тоо үед боломжтой юм. Ийм тэмдэг оноолтыг n -тэгий тоо үед дараах байдлаар хийж болно. Жишээ нь: $n = 2$ бол $2 \cdot 2 + 1 = 5$ тул A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 олонлог бүр 4-элементтэй ба (2) матриц

$$\begin{array}{ccccc|c} * & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} & -a_{15} & 0 - \text{тэмдэг} \\ a_{12} & * & a_{23} & a_{24} & a_{25} & I - \text{тэмдэг} \\ a_{13} & a_{23} & * & a_{34} & a_{35} & I - \text{тэмдэг} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & * & a_{45} & \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & * & 0 - \text{тэмдэг} \end{array} \quad (3)$$

Гол диагональтай. Параллель мөрний бүх элементэд нэг адил 0 буюу 1 оноог. Ингэхдээ оноогдсон элементийн тоо I - оноогдсон элементүүдийн тоотой тэнцүү байхаар бодъё.

Нийгэхэд :

$$\begin{array}{rcll} A_1 & : & 0 & 1 & 1 & 0 \\ A_2 & : & 0 & 0 & 1 & 1 \\ A_3 & : & 1 & 0 & 0 & 1 \\ A_4 & : & 1 & 1 & 0 & 0 \\ A_5 & : & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

болно.

$n=4$ бол $2 \cdot 4 + 1 = 9$ тул $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_9$ олонлог бүр 8 элементтэй болно. $n=6$ бол $2 \cdot 6 + 1 = 13$ тул $A_1, A_2, \dots, A_{13}$ бүр 12 элементтэй, гэх мэтээр $n=2k$ бол онд $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ олонлогтой байх ба тэд бүр $4k$ элементтэй болно. Тэхлээр эдгээрт харгалзсан (2) матрицын гол диагональтай параллель мөрийн тоо $4k$ ширхэг болно.

Параллель 4 мөр бүрийн элементүүдэд яг (3) шиг тэмдэг онооё. Тухийлбал эхний мөрд 0-оноовол, дараагийн хоёр мөрд 1, 4-р мөрд 0, цааш нь дараагийн 4 мөрийг мөн адилгаар 0, 1, 1, 0 ; 0, 1, 1, 0 гэх мэт үргэлжлүүлнэ. Үүгээр бүх элемент 0, буюу 1 тэмдгээр тэмдэглэгдэнэ. 1 жишээ нь

$$A_1: 0, 1, 1, 0; 0, 1, 1, 0; 0, 1, 1, 0; \dots, 0, 1, 1, 0$$

болно. Цааш нь A_2 -ийн тэмдэг оноолт нь A_1 -ийн тэмдэг оноолт дахь сүүлчийн тэгийг эхэнд авч ирснээр, A_3 -ийн тэмдэг оноолт нь A_2 -рт харгалзах тэмдэг оноолтын сүүлчийн тэгийг эхэнд авч ирэх гэх мэт замаар гарна:

$$\begin{array}{rcll} A_1 & : & 0, 1, 1, 0; & 0, 1, 1, 0 & \dots & 0, 1, 1, 0 & \dots & 0, 1, 1, 0 \\ A_2 & : & 0, 0, 1, 1 & 0, 0, 1, 1 & \dots & 0, 0, 1, 1 & \dots & 0, 0, 1, 1 \\ A_3 & : & 1, 0, 0, 1 & 1, 0, 0, 1 & \dots & 1, 0, 0, 1 & \dots & 1, 0, 0, 1 \\ A_4 & : & 1, 1, 0, 0 & 1, 1, 0, 0 & \dots & 1, 1, 0, 0 & \dots & 1, 1, 0, 0 \\ A_5 & : & 0, 1, 1, 0 & 0, 1, 1, 0 & \dots & 0, 1, 1, 0 & \dots & 0, 1, 1, 0 \end{array}$$

гэх мэт.

3-р бодлогын бодолт. / Р.Гончигдоржийн бодолт /

Лемма 1. $n = a_1 a_2 \dots a_k$ нь n -ийн 2-тн систем дахь
ошигчлал бол $f(a_1 a_2 \dots a_k) = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1}$ байна.

Баталгаа. $n = a_1 a_2 \dots a_k$ бол $n^* = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1}$
гэх тэмдэглээ. $k = 1, 2, 3$ үед илэрхий үнэн. $n \geq 4$
ба n -ээс бага s бүрийн хувьд тэнцэл үнэн гээ.

а) $n = 2s$ ба $s = \overline{a_1 \dots a_k}$ бол

$n = a_1 \dots a_k 0$ ба

$f(n) = f(s) \stackrel{*}{=} \overline{a_k \dots a_1} = \overline{0 a_k \dots a_1} = n^*$ болж батлагдана.

($\stackrel{*}{=}$ нь индукцийн таамаглал ёсоор тэнцүү гэсэн үг.)

б) $n = 4s + 1$ ба $s = a_1 \dots a_k$ бол $n = a_1 \dots a_k 01$

та $f(n) = 2f(2s + 1) - f(s) = 2f(a_1 \dots a_k 1) - f(a_1 \dots a_k) \stackrel{*}{=}$

$\stackrel{*}{=} \overline{1 a_k \dots a_1 0} - \overline{a_k \dots a_1} = \overline{10 a_k \dots a_1} = n^*$

болж батлагдана. Учир нь $a0 - a = \overline{a}$ юм.

в) $n = 4s + 3$ ба $s = a_1 \dots a_k$ бол $n = a_1 \dots a_k 11$ ба

$f(n) = 3f(s + 1) - 2f(s) = 3f(a_1 \dots a_k 1) - 2f(a_1 \dots a_k) \stackrel{*}{=}$
 $\stackrel{*}{=} 3 \cdot \overline{1 a_k \dots a_1} - 2 \cdot \overline{a_k \dots a_1} = \overline{1 a_k \dots a_1} + \overline{1 a_k \dots a_1 0}$
 $- \overline{a_k \dots a_1 0} = \overline{11 a_k \dots a_1} = n^*$

болж батлагдана. Нэгэнт аливаа n нь дээрх гурван
тохиолдлын нэгд хамаарах учир лемма бүргн батлагдана.

Мөрдлөгөө $f(n) = n$ байх зайлшгүй ба хүрэл-
цээтэй нөхцөл нь $n = n^*$ байх явдал юм.

Лемма 2. $2^k \leq n < 2^{k+1}$ байх n -үүд дотроос
 $n = n^*$ байхууд нь $2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$ хөрөг юм.

Баталгаа. $n = \overline{1 a_1 \dots a_k}$ бичигдээтэй байна.

а) $k = 2m + 1$ бол дурын $\overline{1 a_1 \dots a_m}$ тоог авч
/бүгд 2^m хөрөг бий / $n = \overline{1 a_1 \dots a_m a_m a_{m-1} \dots a_1 1}$

гэж зохиох бүрд $n = n^*$ ба өмнөх $n = n^*$, $2^k \leq n < 2^{k+1}$

байх n - үүд мавхагдана. Энэ үед

$$m = \left\lfloor \frac{2m+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \text{ км.}$$

б/ $k = 2m$ бол дурын $1a_1 \dots a_{m-1}$ ба $a \in \{0,1\}$ -ийг авч

$$n = 1a_1 \dots a_{m-1} a a_{m-1} \dots a_1 \quad \text{гэвэл } n = n^*$$

ба өдгээрээр $n = n^*$, $2^k \leq n < 2^{k+1}$ байх n -үүд мавхагдана. Энэ үед ийм тооны тоо нь

$$2^{m-1} \cdot 2 = 2^m = 2^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \quad \text{ширхэг байна. Лемм 2 батлагдав.}$$

Мөрдлөгөө. $n < 2048 = 2^{11}$ ба $f(n) = n$ байх бүх n -үүдийн тоо нь 94 байна.

Баталгаа. Лемм 1,2 -оос дээрх тоонуудын тоо нь

$$\begin{aligned} 2^{\left\lfloor \frac{11}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{10}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor} + \dots + 2^{\left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor} &= 2(2^0 + 2^1 + \dots + 2^5) + 2^5 = \\ &= 2 \cdot \frac{2^5 - 1}{2 - 1} + 2^5 = 3 \cdot 32 = 96 \end{aligned}$$

Болж батлагдав.

Бодлогын бодолтын тэгсгөл. $\overline{11 \dots 1} = 2047$.

$$1111101111 = 2015, \quad 1111010111 = 1967 \quad \text{үүд нь}$$

2048 - аас бага $n = n^*$ байх сүүлийн гурван тоо юм.

$1967 < 1988 < 2015$ учир $n < 1988$ байх $f(n) = n$ байх тоо

92 ширхэг байна.

19. Бодлогын бодолт / С.Мэндсайханы бодолт /

$$f(x) = \sum_{k=1}^x \frac{k}{x-k} = \frac{5}{4} \quad (1)$$

функц авч үзье. Тэгвэл батлах зүйл маань, (1) функцийг тодорхойлогдох мужийн ямар завсрууд дээр эсрэг утгатай байхыг олж, тийм завсруудын уртын нийлбэр олохтой адил юм. Функцийн утга эсрэг завсар олохын тулд уг функцийг уламжлалын тусламжтай шинжилж, барагтгажсан график байгуулах ёстой билээ.

$$\mathcal{D}(f) =]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup \dots \cup]69, 70[\cup]70, \infty[$$

жм.

$$f'(x) = - \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{(x-k)^2} \quad (2)$$

1.2) -аас үзэхэд, тодорхойлогдох мужийн бүх цэгүүдэд $f'(x) < 0$ учир буурах функц байна. Харин

$$]i, i+1[\quad i = 1, 2, \dots, 69; \quad \& \quad]-\infty, 1[,]70, \infty[$$

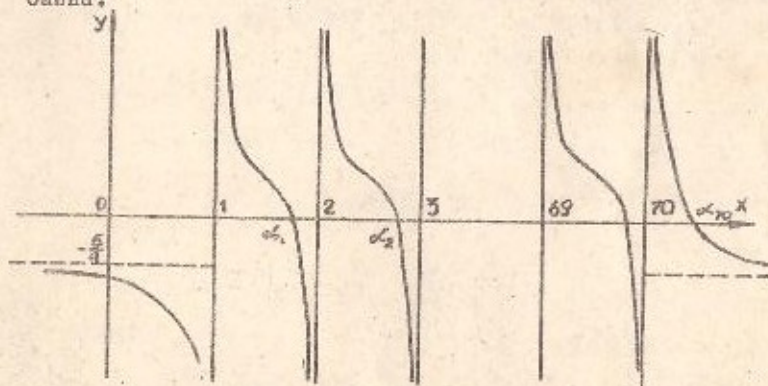
завсар бүрд (I) тасралтгүй функц юм.

$$\lim_{x \rightarrow k-0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow k+0} f(x) = +\infty$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, 70 \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{5}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{5}{4} \quad \text{жм.}$$

Ийнээс $f(x)$ -ийн график баригцаалбал дараах дүрстэй байна:



$f(x) = 0$ - байх x -үүдийг $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{70}$ гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $f(x) > 0$ завсрууд:

$$]1, \alpha_1],]\alpha_1, 2], \dots,]70, \alpha_{70}] \quad \text{болно.}$$

Эдгээрийн ℓ -дугаарны урт нь $\alpha_i - \ell$ тул бүгдийн

$$\begin{aligned} \text{урт нь: } \ell &= \sum_{i=1}^{70} (\alpha_i - \ell) = \sum_{i=1}^{70} \alpha_i - \sum_{i=1}^{70} \ell = \sum_{i=1}^{70} \alpha_i - 70\ell \\ &= \sum_{i=1}^{70} \alpha_i - 2485 \end{aligned} \quad (3)$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} - \frac{5}{4} = \frac{4 \sum_{k=1}^{70} k(x-1) \cdots (\widehat{x-k}) \cdots (x-70) - 5(x-1) \cdots (x-70)}{4(x-1)(x-2) \cdots (x-70)} \quad \text{болно.}$$

(4)

Үүнд $(\widehat{x-k})$ нь уг үржигдэхүүн оролцсохгүй гэсэн үг.

$f(\alpha) = 0$ бол (4) -ын уртвар тэг байх ёстой.

Иймд $\alpha_1, \dots, \alpha_{70}$ - нь (4) -ын хүртвэр дахь 70-зэргийн $\varphi(x)$ олон гишүүнтийн язгуурууд байх ба түүний язгууруудын нийлбэр нь x^{69} зэргийн өмнөх коэффициент байх ёстой билээ. Ийнхүү бид

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -5(x-1)(x-2) \cdots (x-70) + 4[(x-2) \cdots (x-70) + \\ &+ 2(x-1)(x-3) \cdots (x-70) + \dots + 70(x-1)(x-2) \cdots (x-69)] = \\ &= -5(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \cdots (x-\alpha_{70}) \end{aligned}$$

Эндээс

$$\begin{aligned} 5(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{70}) &= 5(1+2+\dots+70) + \\ &+ 4(1+2+\dots+70) \end{aligned} \quad \text{буюу}$$

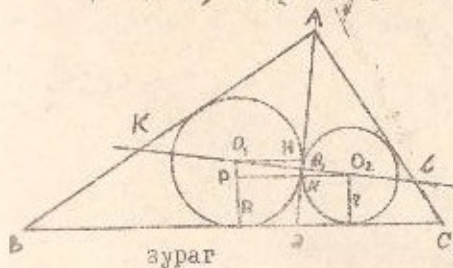
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{70} = 2485 + 4 \cdot \frac{2485}{5} = 2485 + 1988$$

Ийнхүү (3) ёсоор $\ell = 1988$ болно.

Ү бодлогын бодолт.

Тэг тэмдэглээ. / Зураг 2/ $\angle ABB = \alpha$, $\angle MCQ = \beta$
 $O_1M = R$, $O_2N = r$ тул

$$O_1P = R - r, \quad PO_2 = R + r \quad \text{БЭ} \quad O_1O_2 = \sqrt{2(R^2 + r^2)}$$



$AD = h$ гэж тэмдэглэе. Тэгш өнцөгт гурвалжинд багтсан тойргийн радиусыг олох томъёо ёсоор

$$R = \frac{BD + AD - AB}{2}$$

$$r = \frac{AD + DC - AC}{2}$$

$$BD = h \operatorname{ctg} \alpha, \quad AB = \frac{h}{\sin \alpha} \quad \text{учир} \quad R = \frac{h(\sin \alpha + \cos \alpha - 1)}{2 \sin \alpha} \quad (1)$$

$$DC = h \operatorname{ctg} \alpha, \quad AC = \frac{h}{\cos \alpha} \quad \text{учир} \quad r = \frac{h(\sin \alpha + \cos \alpha - 1)}{2 \cos \alpha}$$

болно. Эндээс $r = R \operatorname{tg} \alpha$ гарна. Иймд

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{R} \quad (2)$$

$$\triangle O_1MQ \cong \triangle O_2NQ - \text{ЭЗ}$$

$$\frac{QN}{r} = \frac{(R-r)-QN}{R} \quad \text{буюу} \quad QN = \frac{r(R-r)}{R+r} \quad \text{болно.}$$

$$MQ = (R-r) - QN = \frac{R(R-r)}{R+r} \quad \text{ба}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{MQ}{QM} = \frac{R-r}{R+r} \stackrel{(2)}{=} \frac{1-\operatorname{tg} \alpha}{1+\operatorname{tg} \alpha} \quad (3)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \stackrel{(3)}{=} 1 \quad \text{болно. Эндээс}$$

$\alpha + \beta = 45^\circ$ буюу AKL гурвалжин адил хажуут тэгш өнцөгт болно. Эндээс $\triangle AKO_1 = \triangle ADO_2$ буюу $AK = AD$

гарна. Үүний адил сэтгэхэд $AL = AD$ болно.

Иймд:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{AD^2}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{AD^2}{\sin 2\alpha} \quad (4)$$

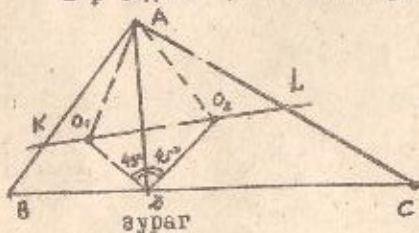
$$T = \frac{1}{2} AK \cdot AL = \frac{1}{2} AD^2 \quad (5)$$

(4) ба (5)-аас:

$$S = \frac{2T}{\sin 2\alpha} \geq 2T \quad \text{болно.}$$

$\alpha = 45^\circ$ үед $S = 2T$ Ойелно.

2-р бодолт / А.Ганбаатарын бодолт / Зурал 3 /



O_1 ба O_2 нь AB ба AC гурвалжинд багтсан хоёр тойргийн төв байг.

$\triangle ADO_1 \cong \triangle CDO_2$ -гээс $DO_1 : DO_2 = DA : DC$ болно. Эндээс мөн $\triangle DO_1O_2 \cong \triangle DAC$ болно. Иймд

$\angle DO_1O_2 = \angle DAC$ ба D, O_1, A, L цэгүүд нь тойрог дээр оршино. Эндээс

$$\angle ALO_1 = \angle ADO_1 = 45^\circ = \angle ADO_2 \quad \text{болно.}$$

Цааш нь $\triangle ALO_2 = \triangle ADO_2$ болно.

Иймд $AL = AD$. Үүний адилаар, тэгш хэмтэй сэтгэлгээ хийхэд $AD = AK$ гэж гарна.

$$T = \frac{1}{2} AK \cdot AL = \frac{1}{2} AD^2$$

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \left(\frac{AD}{\sin \beta} \right) \left(\frac{AD}{\cos \beta} \right) = \frac{AD^2}{\sin 2\beta}$$

$$S = \frac{2T}{\sin 2\beta} \quad \text{буюу} \quad 2T = S \sin 2\beta$$

Иймд $2T \leq S$ ба тэнцэтгэл $\beta = 45^\circ$ үед биелнэ.
 А.Хамбаатар энэ бодлогыг биссектрисийн чанар ашиглан,
 А.Булган Маналейн теорем ашиглан үүнээс арай өөр байдлаар
 бодсон км. ■

II бодлогын бодолт / А.Ганбаатарын бодолт /
 $a > b > 1$ гэж авахад ерөнхийлөн алдагдахгүй. ($a < b$
 үед яг адилгаар бодно.)

$$\frac{a}{b} - 1 < \frac{a^2 + b^2}{ab + 1} < \frac{a}{b} + 1 \quad (I)$$

биелэхийг хялбар шалгах болно. Энэ нь

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} < \frac{a^2 + b^2}{ab} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

гэсэн тэнцэтгэл бишээс гарна.

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} - \text{бүхэл тоо учир (I) - ээс} \quad \left[\frac{a}{b} \right] \leq \frac{a^2 + b^2}{ab + 1} \leq \left[\frac{a}{b} \right] + 1$$

$$\text{болно. Иймд} \quad \frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = \left[\frac{a}{b} \right], \quad \text{эсвэл} \quad \frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = \left[\frac{a}{b} \right] + 1$$

$$\text{1) } \left[\frac{a}{b} \right] = k \quad \text{гэвэл} \quad a = bk + r \quad 0 \leq r < b \quad \text{болох}$$

$$\text{ба} \quad \frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = k - \text{аас} \quad a - r \text{ н оронд} \quad bk + r.$$

$$\text{-ийг тавьж бодоход} \quad k(b^2 - 1) + b^2 + r^2 = 0 \quad \text{гарна.}$$

$$\text{Энэ нь зөвхөн} \quad r = 0, \quad k = b^2 \quad \text{үед л биелнэ. Иймд}$$

$$a = kb = b^3, \quad \frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = b^2 \quad \text{болно.}$$

2) $\left[\frac{a}{b}\right] + 1 = k$
 дүртэй бичиж болно.

гэвэл $a = kb - c$, $0 \leq c < b$

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = k \quad \text{эвс} \quad a = kb - c \quad - \text{байхыг тооцвол:}$$

$$b^2 + c^2 = (bc + 1)k \quad \text{буюу} \quad \frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = \frac{b^2 + c^2}{bc + 1} = k$$

$a \geq b > c \geq 0$ гэж гарна. Одоо

$$\frac{b^2 + c^2}{bc + 1} = \left[\frac{b}{c}\right] \quad \text{эвсвэл} \quad \frac{b^2 + c^2}{bc + 1} = \left[\frac{b}{c}\right] + 1$$

гэж өмнөхийн адил сэтгэж болно. Нэгдүгээр тохиолд

$a = kb - c = c^5 - c$ гэж гарна. Хоёрдугаарт, мөн
 адилаар

$$\frac{b^2 + c^2}{bc + 1} = \frac{c^2 + d^2}{cd + 1}, \quad b = mc - d, \quad 0 \leq d < c < b \leq a$$

гэж гарна. Иймд

$$\frac{a^2 + b^2}{ba + 1} = \frac{b^2 + c^2}{bc + 1} = \frac{c^2 + d^2}{cd + 1} \quad \text{бүхэл тоо гэсэн}$$

$d < c < b \leq a$ тэнцэлд хүрнэ. Энэ явц төгсгөлөг
 алхамд зогсох нь илэрхий. Тухайлбал, ямар нэг n -тооны
 хувьд:

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = \frac{b^2 + c^2}{bc + 1} = \frac{c^2 + d^2}{cd + 1} = \dots = \frac{n^2 + n^2}{nn + 1} = n^2$$

болно. ■

$\mathbb{R}, \mathbb{Z}$ ба $\mathbb{N}$ нь бодит, бүхэл ба натурал тооны олонлог. $x \in \mathbb{R}$ -ийн зүүн талд түүнд хамгийн ойр орших бүхэл тоог x -ийн бүхэл хэсэг гээд $[x]$ гэж тэмдэглэдэг. Эндээс

$0 \leq x - [x] = \{x\} < 1$ гэж гарах ба $\{x\}$ -ийг x -ийн бутархай хэсэг гэдэг. $x = [x] + \{x\}$ байна.

Жишээ. нь $[0,3] = 0$, $[-0,3] = -1$,

$\{0,3\} = 0,3$, $\{-0,3\} = 0,7$ болно.

Чанар а/ $x, y \in \mathbb{R}$ бол $[x] + [y] \leq [x+y]$

б/ $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ бол $n[x] \leq [nx]$,

$[n+x] = n + [x]$, $\{n+x\} = \{x\}$

в/ $n, q \in \mathbb{N}$ бо л

$$\left[\frac{n}{q}\right]q \leq n < \left(\left[\frac{n}{q}\right] + 1\right)q$$

г/ $y \leq x$ бол $[y] \leq [x]$

д/ $[x] = y \iff y \in \mathbb{Z}$, $0 \leq x - y < 1$

е/ $[x] = [y] \iff \begin{cases} t \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq x - t < 1 \\ 0 \leq y - t < 1 \end{cases}$

$$a): x = [x] + \{x\}, y = [y] + \{y\}, x+y = [x] + [y] + \{x\} + \{y\}$$

$$\text{тул } [x+y] = \begin{cases} [x]+[y], & \text{хэрэв } \{x\} + \{y\} < 1 \\ [x]+[y]+1, & \text{хэрэв } \{x\} + \{y\} \geq 1 \end{cases} \quad \text{бүрү}$$

аль ч тохиолдолд $[x] + [y] \leq [x+y]$ болно.

$$\delta): n+x = n + [x] + \{x\}, [n+x] = \\ = [n + [x] + \{x\}] = n + [x].$$

$$[nx] = [n([x] + \{x\})] = [n[x] + n\{x\}] = \\ = [n[x] + [n\{x\}] + \{n\{x\}\}] =$$

$$= n[x] + [n\{x\}] \geq n[x], \quad \text{энэх нь мөн а)-аас г харна.}$$

е): $\left[\frac{n}{q}\right] \leq \frac{n}{q} = \left[\frac{n}{q}\right] + \left\{\frac{n}{q}\right\} < \left[\frac{n}{q}\right] + 1$, -г $q \in \mathbb{N}$ -ээр үргүүлэхэд гарна.

г): $[x] = y$ бол $y \in \mathbb{Z}$, $0 \leq x - y < 1$ байх нь илэрхий. Одоо урвуу ньч хүчинтэй гэж харуулъя.

$$0 \leq x - y < 1, y \in \mathbb{Z} \quad \text{бол}$$

$$y \leq x < y + 1, y \in \mathbb{Z} \quad \text{тул } [x] = y \text{ болно.}$$

$$\text{Бодлого I. } \left[\frac{8x+19}{7}\right] = \frac{16(x+1)}{11} \quad \text{тэгшитгэлийг бод.}$$

$$\left[\frac{8x+19}{7}\right] = \frac{16(x+1)}{11} = k \in \mathbb{Z} \quad \text{болно.}$$

Одоо бодитгоо x -ийн оройд $k \in \mathbb{Z}$ -г агууссан илэрхийлэл гаргах авъя.

$$x = \frac{11k}{16} - 1 \text{ ба } \left[\frac{8\left(\frac{11k}{16} - 1\right) + 19}{7} \right] = \left[\frac{11k + 22}{14} \right] = k \text{ болно.}$$

Энэхүү бүүдчийн тэгшитгэл нь бүхэл тоо k -ийн хувьд бичигдсэн боловч анхны тэгшитгэлтэй эквивалент тэгшитгэл юм. Үүнийг чанар д/ ёсоор бодвол

$$0 \leq \frac{11k + 22}{14} - k < 1, k \in \mathbb{Z} \text{ буюу } k = 3, 4, 5, 6, 7$$

гэж олно. $k = 3$ үед өгсөн тэгшитгэл нь

$$\left[\frac{8x + 19}{7} \right] = \frac{16(k+1)}{11} = 3 \text{ болно.}$$

$$\frac{16(k+1)}{11} = 3 \text{ - аас } x = \frac{17}{16} \text{ гэх гарах ба энэ}$$

утгад

$$\left[\frac{8 \cdot \frac{17}{16} + 19}{7} \right] = 3 \text{ болно.}$$

k -ийн үлдсэн утгуудын хувьд мөн ийм замаар бодож x -ийг олно.

Бодлого 2. $\left[\frac{2x-1}{3} \right] = \left[\frac{x+1}{2} \right]$ - тэгшитгэлийг бод.

Бодолт. $\left[\frac{2x-1}{3} \right] = \left[\frac{x+1}{2} \right] = k \in \mathbb{Z}$ гэвэл чанар $f)$ ёсоор өгөгдсөн тэгшитгэл нь

$$(I) \begin{cases} 0 \leq \frac{2x-1}{3} - k < 1 \\ 0 \leq \frac{x+1}{2} - k < 1 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2x-1-3k < 3 \\ 0 &\leq x+1-2k < 2 \\ 0 &\leq 2x-3k < 4 \\ -1 &\leq x-2k < 1/2 \\ -2 &\leq -2x+4k < 2 \end{aligned}$$

гэсэн системтэй эквивалент болно. (I) -аас бодит тоо x -ийг зайлууулж бүхэл тоо k -ийн хувьд бичвэл

$$0 \leq k \leq .5$$

гэж олно, $k = 0$ үед

$$-1 \leq k < 6$$

$$k = 0, 5$$

мөн тэгшитгэл нь

$$\left[\frac{2x-1}{3} \right] = \left[\frac{x+1}{2} \right] = 0$$

болох ба үүнийг чанар $g)$ ёсоор

бодвол

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{2x-1}{3} - 0 < 1 \\ 0 \leq \frac{x+1}{2} - 0 < 1 \end{cases} \iff x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right)$$

гэх гарна.

$$k=1 \quad \text{үед} \quad \left[\frac{2x-1}{3} \right] = \left[\frac{x+1}{2} \right] = 1 \quad \text{буу}$$

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{2x-1}{3} - 1 < 1 \\ 0 \leq \frac{x+1}{2} - 1 < 1 \end{cases} \quad \text{буу} \quad x \in [2, 3)$$

болно, гэх мэт цааш бодно.

$$\text{Бодлого 8: } [-x^2 + 3x] = \left[x^2 + \frac{1}{2} \right] \quad \text{тэгшитгэлийг бод.}$$

$$\text{Бодолт: } [-x^2 + 3x] = \left[x^2 + \frac{1}{2} \right] = t \in \mathbb{Z} \quad \text{гээ.}$$

$$x^2 + \frac{1}{2} \geq 0 \quad \text{гэдгээр} \quad t = \left[x^2 + \frac{1}{2} \right] \geq 0 \quad \text{гэх гарна.}$$

$$\text{Нөгөө талаас} \quad t = [-x^2 + 3x] = \left[-\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \right] \leq \left[\frac{9}{4} \right] = 2$$

гэдэг нь 2) -ээс гарна. Иймд $t = 0, 1, 2$ болдоо.
Энэ утгуудад өгсөн тэгшитгэл нь 2) -ийн үндсэн дээр дараахь системүүдийг бодоход шилжинэ.

$$\begin{cases} 0 \leq -x^2 + 3x < 1 \\ 0 \leq x^2 + \frac{1}{2} < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq -x^2 + 3x - 1 < 1 \\ 0 \leq x^2 + \frac{1}{2} - 1 < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq -x^2 + 3x - 2 < 1 \\ 0 \leq x^2 + \frac{1}{2} - 2 < 1 \end{cases}$$

Эдгээр системүүдийн шийдийн нэгдэл нь манай шийд болно.

Бодлого 4. (1) $[x] = x^3 - 21$ тэгшитгэлийг бод.

Бодолт. $x^3 - 21 = [x] = t \in \mathbb{Z}$ гэв. $x = \sqrt[3]{t+21}$ ✓

буюу бүхэл хувьсагч t -ийн хувьд өгсөн тэгшитгэлийг
бичвэл

$$\left[\sqrt[3]{t+21} \right] = t \quad (2) \quad \text{байна. Өөрөөр}$$

хэлбэл бодит тооны олонлогт (1) -г бодох асуудал нь
бүхэл тооны олонлогт (2) -г бодохтой эквивалент болно.

(2) нь 9) хэлбэрийн тэгшитгэл учраас

$$1/3/ \quad \begin{cases} 0 \leq \sqrt[3]{t+21} - t < 1 \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

-тэй эквивалент болно.

Үүнийг бодъё.

(3) нас

$$t^3 \leq t+21 < (t+1)^3 \quad \checkmark \quad \text{болно.}$$

$t \geq 3$ бол $t^3 > t+21$, гэдгийг тус
 $t \leq 1$ бол $(t+1)^3 < t+21$ буюу
тус батааг болох нь илэрхий учраас $1 < t < 3$

$$t = 2 \quad \text{л байх боломжтой. Иймд} \quad t = 2 = x^3 - 21$$

$$\text{буюу} \quad x = \sqrt[3]{23}$$

Бодлого 5. (1) $\{x^2\} = \{x\}^2$ тэгшитгэлийг бод.

Бодолт. $x = [x] + \{x\}$ гэв бичиг болох тул $\{x\}$ -ийн
үндсэн дээр

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow \{x^2\} &= \{[x]^2 + 2[x]\{x\} + \{x\}^2\} = \\ &= \{2[x]\{x\} + \{x\}^2\} = \{x\}^2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2[x]\{x\} \in \mathbb{Z}$$

болно.

$$2[x]\{x\} = m \in \mathbb{Z} \text{ гээ. Эндээс } [x] \neq 0 \text{ үед}$$

$$0 \leq \{x\} = \frac{m}{2[x]} = \frac{|m|}{2|[x]|} < 1 \text{ байх учраас}$$

$$x = [x] + \{x\} = [x] + \frac{|m|}{2|[x]|}, \text{ энд}$$

$$0 \leq |m| < 2|[x]| \text{ болно.}$$

$$[x] = 0 \text{ бол } 2[x]\{x\} = 0 \in \mathbb{Z} \text{ байх учраас}$$

$$2[x]\{x\} = m \in \mathbb{Z} \text{ мөн биелж байна.}$$

Иймд манай бодлогын хариу нь $0 \leq x < 1$ ба

$$[x] \neq 0 \text{ бол } x = [x] + \{x\} = [x] + \frac{|m|}{2|[x]|},$$

$$\text{Энд } 0 \leq |m| < 2|[x]| \text{ болно.}$$

Бодлого 6. $x \geq 0$ ба $n \in \mathbb{N}$ бол

$$[x] + [x + \frac{1}{n}] + \dots + [x + \frac{n-1}{n}] = [nx] \quad (*)$$

батал.

Бодолт

Хэрэв $(*)$ нь $x \in \mathbb{R}$ -ийн хувьд хүчинтэй бол 2.1

$$y = x + \frac{1}{n} \text{ -ийн хувьд мөн хүчинтэй гэдг баталъя. } f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} [x + \frac{i}{n}]$$

$$\text{мөн } f(y) = f(x) + 1 = [nx] + 1 = [nx + 0 + \frac{n-1}{n}] = [nx].$$

Нэгэвч $(*)$ нь $x \in [0, \frac{1}{n})$ -ийн хувьд биелэх нь илэрхий тул

$$[0 + \frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n}) = [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \text{ -ийн хувьд мөн биелнэ.}$$

гэх нэг, $0 \leq x$ бүрийн хувьд биелэх нь гарнаа.

Бодлого 7. $n \in \mathbb{Z}$ бүрийн хувьд

$$[n\alpha] + [n\beta] = [n(\alpha + \beta)] \quad (1)$$

бол эсвэл $\alpha \in \mathbb{Z}$, эсвэл $\beta \in \mathbb{Z}$ гэж батал.

Бодолт. Эсрэгээс нь $\alpha \notin \mathbb{Z}$ ба $\beta \notin \mathbb{Z}$ гэж үзье.

Тэгвэл $0 < \alpha, \beta < 1$ гэж үзэж болохыг баталъя.

(1) -д $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$, $\beta = [\beta] + \{\beta\}$ -г оруулбал

$$[n\{\alpha\}] + [n\{\beta\}] = [n(\{\alpha\} + \{\beta\})] \quad (1')$$

(1') нь (1) -д $\alpha \rightarrow \{\alpha\}$, $\beta \rightarrow \{\beta\}$ эх авахад гарсан тул

(1) -д $0 < \alpha, \beta < 1$ гэж үзэж болно.

(1) -д $n = 1$ гэвэл $0 + 0 = [\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta]$ буюу

$$0 < \alpha + \beta < 1 \quad (2) \text{ болно.}$$

(1) -д $n = -1$ гэвэл (2) -ийн үндсэн дээр

$$-1 = [-(\alpha + \beta)] = [-\alpha] + [-\beta] =$$

$$= [-1 + (1 - \alpha)] + [-1 + (1 - \beta)] = -1 - 1 = -2$$

гэсэн зөрчил гарна. Иймд эсвэл $\alpha \in \mathbb{Z}$ эсвэл $\beta \in \mathbb{Z}$

болно.

Бодлого 8. $[x+y] = [x-y]$ нөхцлийг хангах

(x, y) цэгүүдийг хавтгай дээр байгуул.

Бодолт. t ёсоор

$$t = [x+y] = [x-y] \iff \begin{cases} t \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq x+y-t < 1 \\ 0 \leq x-y-t < 1 \end{cases} \quad (*)$$

болно.

(*) -оос нийлбэр ба ялгаврыг авч үзсэнээр

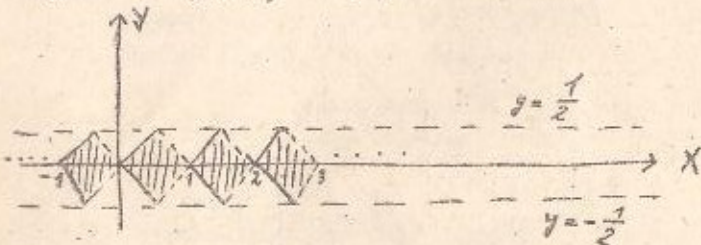
$$-\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}, [x] = t \quad \text{болохыг олно. Нөгөө талаас}$$

$y \rightarrow -y$ гэж бодиход анхны тэгшитгэл үлээрчлөгдөх тул

$0 \leq y < \frac{1}{2}$ гэж үзээд бодиход болно. Мөн $0/-$ -ийн үүссэн дээр $0 \leq x < 1$ гэж үзэж болно. Иймд

$$[x+y] = [x-y] = [x] = 0 \quad \text{боллоо.}$$

Эндээс $x+y < 1, x-y \geq 0$ гэж гарна.



Бие дааж бодох бодлогууд

Цараах тэгшитгэлийг бод.

$$1. \left[\frac{5+6x}{8} \right] = \frac{15x-7}{5} \quad \checkmark$$

$$2. \left[\frac{2x-1}{3} \right] = \left[\frac{2x+5}{5} \right]$$

$$3. [x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x] \quad \text{болохыг батал.}$$

$$4. 3-2 \text{ ациллаи } \left[\frac{2x-1}{3} \right] + \left[\frac{4x+1}{6} \right] = \frac{5x-4}{3} \text{ -г бод.}$$

$$5. [x^2] = [x]^2$$

66

$$\left[\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \right] + \left[\frac{2}{3}x + \frac{1}{6} \right] =$$

$$\left[\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \right] + \left[\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right] = \left[2 \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \right) \right] = (x)$$

$$6. \begin{cases} [x+y-8] = 6-x \\ [x-5] + [y-4] = 1-x-y \end{cases}$$

$$7. [x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 12345$$

$$8. [x]\{x\} < x-1 \quad \text{тэнцэл бишийг бод.}$$

$$9. n \in \mathbb{N} \quad \text{бол } n! \text{ нь } 2^n \text{ -д үн хуваагдахыг батал.}$$

$$10. [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \dots + [\sqrt{n^2-1}] \quad \text{-ыг бодож ол.}$$

$$11. x > 1 \quad \text{бол ямар } [\sqrt{[\sqrt{x}]}] = [\sqrt{\sqrt{x}}] \quad \text{байх уу?}$$

$$(*) = \frac{5x-4}{3}$$

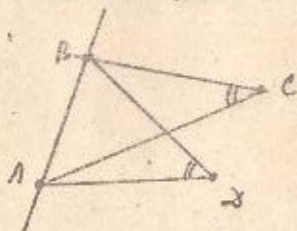
Улсын болон олон улсын олимпиадад гүдгэр дөрвөн өнцөгтийг тойрогт багтах, дөрвөн цэг нэг тойрогт орших, тойрогт багтсан гүдгэр дөрвөн / олон / өнцөгтийн чанарыг амиглан бодох бодлого олонтоо ирдэг юм. Сурагчид олимпиадад бэлтгэх болон бие дааж бодлого бодоход зөвлөх зорилгоор энэхүү тэмдэглэлийг илчилээ.

Тодорхойлолт. Гүдгэр олон өнцөгтийн бүх орой нэгэн тойрог дээр орших байвал, уг олон өнцөгтийг багтсан олон өнцөгт гэнэ.

Та нар хавтгайд байгаа, нэгэн шулуунд үл орших, гурван цэгийг дайруулан тойрог татаж / дурын гурвалжныг тойрогт багтааж / болдгийг мэднэ. Харин хавтгайд байгаа, аль ч гурав нь нэг шулуунд орших дөрвөн цэгийг / дурын гүдгэр дөрвөн өнцөгтийг тойрогт багтааж / дайруулан тойрог татах тэр бүр болдоггүй. Имар үед гүдгэр дөрвөн өнцөгт тойрогт багтах түүхийг бодлогод амиглах тухай энд товч үзье.

Лемма 1. Хавтгайд ерөнхий байрлалтай A, B, C, D дөрвөн цэгийг дайруулан тойрог татах болох зайлсгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл $\angle ACB = \angle ADB$ юм.

Баталгаа. Зурагт 1-ээс илэрхий.



Леммы баталгаанд дараах өгүүлдөр ашиглагдана.

зураг 1

Теорема 1. Тойрогт багтсан ABC гурвалжны хувьд

$$\angle ABC = \frac{AC}{2}$$

байна.

теорема 2. $ABCD$ -гүдгэр дөрвөн өнцөгт тойрогт багтах зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл:

$$\angle A + \angle C + \angle D = \angle B + \angle A + \angle C = 180^\circ$$

мөн.

теорема 3. $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтөл тойрогбагтах зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл $AB + CD = BC + AD$ юм.

теорема 4. /Птолемей/ $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгт тойрогт багтах зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD \quad (1) \text{ юм.}$$

Санамж. Птолемейн теоремын түүх судар, түүний өргөтгөлийн тухай та бүхнийг "Математика в школе" сэтгүүлийн 1987 оны 2-т дээр З.А.Скопец мөн И.М.Яглом нарын бичсэн хоёр өгүүллийг уншихыг зөвлөе. Птолемейн теорем Архимедийн үед /м.в.т өмнөх 87-112 он/ мэдэгдэж байсан байна.

$ABCD$ -тэг өнцөгт бол Птолемейн теорем Пифагорин теорем болон хувирна. Учир нь $AB = CD$; $BC = AD$; $AC = BD$ билээ. Иймд Птолемейн теорем Пифагорин теоремын өргөтгөл бийнэ. Птолемейн теоремын бусад өргөтгөлийг /Бретинейдерийн теорем /И.Ф.Еаригины "Задачи по геометрии" - планаметрия номноос танилцахыг зөвлөх байна. Птолемейн теорем буюу сайхан бодлого бодоход ашиглагдана. Жишээ болгон дараах бодлогуудыг бодож үзээрэй /И.М.Яглом /.

Бодлого 1. Хавтгайн дурын A, B, C, D цэгүүдийн хувьд

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$$

болохыг батал. Тэнцэтгэл

зөвхөн уг дөрвөн цэг нэг тойрогт орших үед биелэгдэнэ гэх үзүүл.

2. $ABCD$ зөв гурвалжныг багтаасан S тойргийн AB нум дээр орших P цэг сонгон авъя. Тэгвэл $PA + PB = PC$ байхыг батал / $PACD$ -д теорем 4-ийг хэрэглэ/.

3. $ABCD$ адил хилуут гурвалжин (үүнд $AC = BD$).

P - нь түүнийг багтаасан тойргийн $\bar{AB}$ дээр орших дурин цэг байг. Тэгвэл

$$\left\{ \begin{aligned} PA \cdot CB + AC \cdot PB &= PA + PB \\ &= PC \cdot AB \\ CB &= AC \end{aligned} \right. \Rightarrow \frac{PA + PB}{PC} = \frac{AB}{AC} \quad \text{байхыг батал.}$$

4. $ABCD$ - квадратыг багтаасан S тойргийн $\bar{AB}$ дээр орших P цэгийн хувьд

$$\left\{ \begin{aligned} PC \cdot BD &= PB \cdot CD + PC \cdot PD \\ PD \cdot AC &= PA \cdot CD + PC \cdot AD \end{aligned} \right. \Rightarrow \frac{PA + PC}{PB + PD} = \frac{PD}{PC}$$

хэрэгцэн хэрэгцэн

$$BD = AC$$

$$CD = BC = AD$$

тууль
алхоёр.

байхыг батал. (теорем 4-ийг $PA \cdot CE$, $PBCD$ -д хэрэглэ /

5. $ABCE$ зөв таван өнцөгтийг багтаасан S тойргийн $\bar{AB}$ -дээр орших P -цэгийн хувьд

$$PA + PB + PD = PC + PE \quad \text{байхыг батал.}$$

6. $ABCE$ зөв таван өнцөгтийг багтаасан S тойргийн $\bar{AB}$ -дээр орших P цэгийн хувьд

$$PD + PE = PA + PB + PC + PF \quad \text{байхыг батал.}$$

Багтсан гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн хувьд янз бүрийн бодлого оодоход ашиглагдах хоёр теоремыг мөн баталгаагүй дурьдъя.

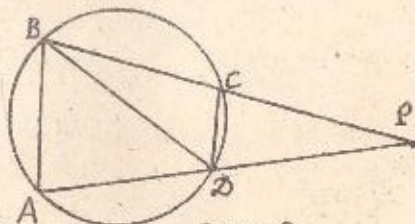
Теорема 5. Багтсан дөрвөн өнцөгт $ABCD$ -ийн диагоналууд P цэг дээр огтлолцсон байг / Зураг 2 / Тэгвэл дараах тэнцэтгэлүүд үнэн:

$$a/ \quad AP \cdot PC = BP \cdot PD;$$

$$b/ \quad APB = \frac{1}{2} (\bar{AB} + \bar{CD})$$



зураг 2



Зураг 3

Теорема 6. $ABCD$ багтсан гүдгэр дөрвөн өнцөгт бийг / зураг 3 /

Тэгвэл :

1/ $AB = CD$ байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл бол $AB = CD$ им.

2/ AD ба BC талын үргэлжлэл P цэг дээр огтлолцсон ба P , CD хэрчимтэй AB шулуун нэг талын хагас хавтгайд оршиж байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл $AB > CD$ им. Энэ тохиолдолд / зураг 3-ыг хар ! /

$$a/ AP \cdot DP = BP \cdot CP$$

$$b/ \angle APB = \frac{1}{2} (\angle B - \angle C) \text{ тэнцэтгэлүүд үнэн.}$$

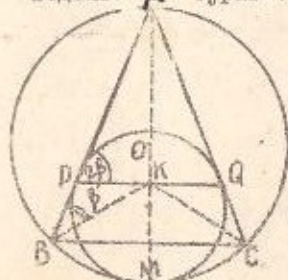
Бодлого 1-6-р теоремыг дас гал болгон батал.

Дээрх лем теоремуудад дурьдсан энгийн баримт улсын олон олон улсын олимпиадын олон санхан бодлогыг бодох үндсэн түүхтүүр оосон түүхтэй. Үүнийг дараах жишээнүүдээр харуулъя.

1. 1978 / ОУМО / 4-р бодлого ABC гурвалжны

$AB = BC$ багт. ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг дотоод шүргэсэн тойрог AB ба AC талыг харгалзан P ба Q цэгүүд дээр шүргэжээ. PQ хэрчмийн дундаж цэг ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв болохыг батал.

Бодолт. A Зураг 4



Зураг 4

Багтсан тойргийн төв гурвалжны биссектрисүүдийн огтлолцол байх учир BK, CK, AK нь ABC -ийн биссектрисийн хэрчмүүд гэж үзүүлэх нь хангалттай. Гурвалжны ABC адил дагуут учраас AM нь $\angle A$ ба

$\angle PMQ$ - өнцгийн биссектрис ба $PQ \parallel BC$.

PQ -ийн дундаж цэгийг K ; $\angle APQ = 2\beta$ гэж тэмдэглэе. Иймд $\angle ABC = 2\beta$ болно. Тойрог дээр оролтой өнцөг, тулсан нумын хагасаар хэмжигдэх учир / теорем 1 /:

$$\angle APQ = \angle PMQ = 2\beta = \frac{\widehat{PQ}}{2}$$

$$\text{Иймд } \angle KMP = \frac{\angle PMQ}{2} = \beta.$$

AM диаметр тул $\angle ABC = 90^\circ$; $PQ \perp AM$ тул

$\angle PKM = 90^\circ$. Иймд PKM -ийг тойрогт цагтааж болох нь өнцөг:

$$\angle PKB = \angle PMK = \frac{\widehat{PK}}{2} = \beta$$

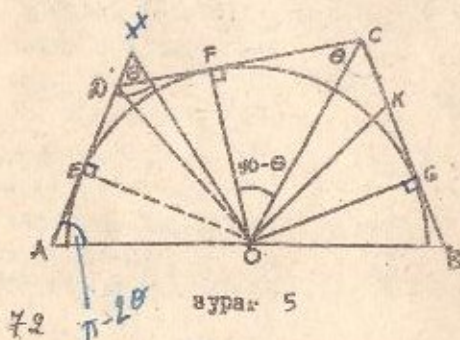
болно. Иймээс BK биссектрисстэй давхцана. Тэгн хэвтэйгээр сартгээхэд CK биссектрис байх нь харагдана. ■

П. 1985 / УИМО / багтсан гүдгэр дөрвөн өнцөгт $ABCD$ -ийн AB тал дээр тэгш тойрог өгчээ. Энэ тойрог түүний цусад гурван талыг шүргэдэг бол

$$AD + BC = AB$$

байхыг батал.

Бодвал. Зураг байгуулъя. /Зураг 5/



Унд зохиогч
члн бодолтыг
өгье. Зурагч
Батсод арай
еерээр оодих байс-
ныг тэмдэглэе.

$\triangle FOC$ -г

O цэгийн дагуу
 F -ийг E -д

дээрх аргүүмб. Тэгвэл $\angle EHO$ гурвалжин гарна.

$$\begin{aligned} \angle HAO &= \pi - 2\theta & \text{Учир нь } \angle C + \angle A &= \pi \\ \angle C &= 2\theta, \quad \angle AOH = \pi - (\pi - 2\theta + \theta) = \\ &= \pi - \pi + \theta = \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Иймд } \angle H &= \angle O. \Rightarrow \angle O = \angle E + \angle H = \angle E + \angle C = \\ &= \angle E + \angle G \end{aligned}$$

Ийм сэтгэлгээг $\triangle FDO$ -ийн хувьд гүйцэтгэвэл

$$OB = BK = BG + KG = BG + FD \quad \text{болно.}$$

$$\begin{aligned} AB &= AO + OB = (AE + CG) + (BG + FD) = \\ &= (AE + FD) + (BG + GC) = AD + BC \end{aligned}$$

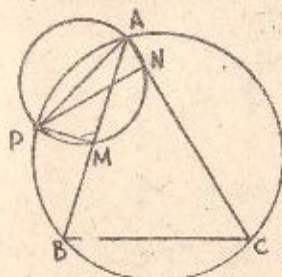
3. /Залуу-ийн БХУ 1979-1980 олимпиад/

$\triangle ABC$ нь өгөгдсөн тойрогт багтсан $\triangle$ байг. Энэ багтаасан тойрогт орших P цэгээс /хувьсах цэг үүх/ AB ба AC тал дээр нь харгалзан PM ба PN перпендикуляр буулгав. /Үүнд P цэгийн байрлалаас хамааран M ба N цэг тойргийн гадна ч байж магадгүй/ MN -хэмийн урт бийх P цэгийн байрыг ол. Энэ MN хэрчмийн хамгийн урт үе дэх уртыг ол.

Бодолт /Зураг 6/. AP - диаметр оухий тойрог татвал M, N цэг үүд тус тойрогт оршино. Учир нь $\angle ANP =$

$$= \angle PMN = 90^\circ.$$

Тэхээр MN нь AP -ийн гүдгэр дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. Энэ тойргийн диаметр AP хичлээн том бол уг тойрог татвалон том болох бөгөөд M, N $\nearrow 3$.



ЗУРАГ 6

нэг мөн $\angle A, \angle C$ хэрхэн $\angle B$ -ооно. Энэ тойргийг $\mathcal{L}$ гэвэл MM' нь тус тойрог дээр оройдон өнцөг $\angle BAC$ -д тулсан нун бо: ю. P цэгийг хувьсгахад M, N цэгүүд мөн өөрчлөгдөх боловч өнцөг $\angle MAN$ үргэлж тогтмол хэвээрээлдэнэ. Иймээс $\mathcal{L}$ тойрог хамгийн том бол MM' хөвч хамгийн урт болно. Энэ нь AP диаметр хамгийн урт үед харгалзана. Тойргийн хөвч AP хамгийн урт байхын тулд AP нь тойргийн диаметр байх хэрэгтэй. Энэ үед M цэг B -тэй N цэг C -тэй давхцана. Иймд $\max MN = BC$ (гурвалжны гурав дахь талтай) /-тэй тэнцүү байна. ~~тэнцүү~~



IV. ОУМО /1987/ Хурц өнцөгт ABC гурвалжны AL ($L \in BC$) биссектрисийн үргэлжлэл түүнийг багтаасан тойргийг N ($N \neq A$) цэг дээр огтолно. L цэгээс AB ба AC талуудад харгалзан LK, LM перпендикуляр буулгажээ. $AKNM$ дөрвөн өнцөгт ба ABC гурвалжны талбай тэнцүү байхыг батал.

Бодолт. „Улсын математикийн ххм олимпиад“ гарын авлагын 39, 40 дүгээр хуудсанд бий ([33]-ийн 43).

$AKLM$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийг тойрогт багтаах болно гэсэн үзлээс цаашдын бүх бодолтын санаа мөрдөн гарна. ~~тэнцүү~~

V. ОУМО /1986. 4/ A, B зөв n -өнцөгтийн ($n \geq 5$) дараалсан хоёр орой, O - түүний төв байг.

XZY гурвалжны OAB гурвалжинг XY тэнцүү бөгөөд эхлээд тэд давхцаж байв. дараа нь Y, Z орой нь n өнцөгтийн хил дээгүүр, X ороо нь n өнцөгтийн дотор нь байхаар, уг гурвалжин n өнцөгтийн хавтгай дээр хөдөлдөг. Y, Z цэг хамжаараа n өнцөгтийн хил дээгүүр бүтэн тойроод ирэхэд X цэг хавтгайд ямар дүрс зурах вэ?

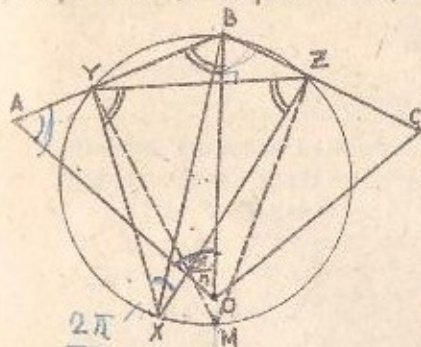
~~тэнцүү~~ Өгөгдсөн нөхцөл ёсоор :

$$\angle BAO = \angle ABO = \angle YZX = \angle ZYX,$$

$$\angle AOB = \angle YXZ.$$

74

Үерой АВ, Z өрөй ВС тал дээр байхаар



2π/n
Зураг 7

XYZ гурвалжныг
бодлогонд дурьдсан ёсоор :
хөдөлгөөнд Хорой ОВ
шулууны дагуу хөдөлнө гэж ха
харуулъя / зураг 7 /.

$$\angle ABC + \angle YXZ = \pi$$

✓

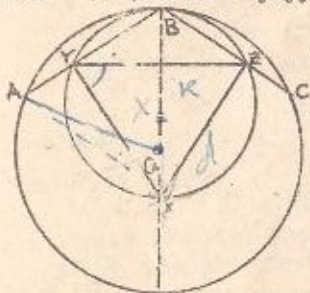
учир XYBZ

дөрвөн өнцөгт тойрогт
багтана. $\widehat{YX} = \widehat{XZ}$.

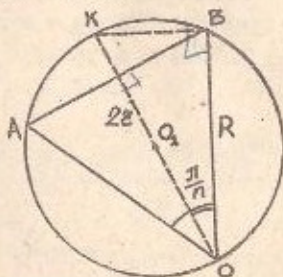
$$\angle YBO = \angle YBM = \angle YZX \quad \text{--- ээс}$$

$$\angle YZX = \frac{\widehat{XZ}}{2} = \angle YBO$$

Иймээс $X \equiv M$ ба B, O, X цэгүүд нэг шулуун дээр оршино.
Иймээс X цэг BO шулууны дагуу хөдөлнө.



зураг 8



зураг 9

$\triangle XYZ$ -ыг багтаасан тойрог заавал B цэгийг дайрна.
(Зураг 8). Энэ тойрог ABO гурвалжныг багтаасан тойргийн
адил байна. $\angle AOB = \frac{2\pi}{n}$ байх нь мэт.

$OB = OA = R$, $OO_1 = r$ гэж тэмдэглэвэл:

25

$$R = 2r \cos \frac{\pi}{n}, \quad z = \frac{R}{2 \cos \frac{\pi}{n}} \quad / \text{ зураг 9 } /$$

$$d = OX = 2r - R = \frac{R(1 - \cos \frac{\pi}{n})}{\cos \frac{\pi}{n}} \quad (1)$$

Хэрэв BX нь YXZ гурвалжныг багтаасан тойргийн диаметр байсан бол OX хамгийн (их) урт болно. Эсрэг тохиолдолд BX диаметр биш бол $2r > BX$ ба $d = 2r - R > BX - R$ болно. Иймд

$$\max(OX) = d = 2r - R = \frac{R(1 - \cos \frac{\pi}{n})}{\cos \frac{\pi}{n}} \quad \text{болно.}$$

Энэ байрлал Y ба Z цэгүүд AB ба BC талын дундах цэг үед харгалзана. Иймээс X цэг

$$d = R \cdot \frac{(1 - \cos \frac{\pi}{n})}{\cos \frac{\pi}{n}}.$$

урт бүхий, төгөөс K өнцөгтийн орой уруу чиглэсэн хэрчмүүд букуу од дүртэй цэгүүдийн олонлогийг зурна.

Харилцан перпендикуляр диагональтай багтсан гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн чанарын тухай [4] -ийн 50-р хуудсан дахь И. Крайсманы өгүүллийг уншиж, бодлогыг бодохыг зөвлөе.

Бодлогууд

I/ [2] номын 225, 126 ба 244-255 дугаар бодлогуудыг бод.

Санамж. Дараах бодлогуудыг бодоход тэр бүр амар гарахгүй байх магадгүй. Олон хоног оролдож, зааван бие дааж бодохыг зөвлөж байна. Хэрэв 2-3 долоо хоног оролдоод бодож чадахгүйд хүрвэл [5] номын § 10, § 11, § 13, § 14-өөс ~~аж~~ бодолтыг олж үзээрэй.

2. /Хори. 1979. Вьетнам / M цэг тэнцүү талтай ABC гурвалжныг багтаасан тойрог дээр оршино.
 $MA^4 + MB^4 + MC^4$ - хэмжигдэхүүн M цэгийн сонголтооо ул хамаарахыг батал. 10.11

3. / БНАГУ -ий үндэсний олимпиад 1973 / $AB = AD$ ба $CB = CD$ байх гүдгэр дөрвөн өнцөгт $ABCD$ өгөгджээ. Дараах өгүүлбэрүүдийг батал:

а/ Энэ олон өнцөгтөд тойрог багтааж болно.

б/ Түүнийг тойрогт багтааж болох гарцаагүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл $AB \perp BC$ юм.

в/ Хэрэв $AB \perp BC$ бол, тус олон өнцөгтөд багтсан (r -радиус) ба багтаасан R -радиустай / тойргийн төвүүдийн хоорондох зайн квадрат $R^2 + r^2 - 2\sqrt{r^2 + 4R^2}$ - 10.12
 тай тэнцүү.

4. /Хори. 1979. АНУ / ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн BC нум дээр байгаа P цэгээс BC , AC ба AB шулуунуудад харгалзан PK , PL ба PM перпендикуляр буулгажээ.

$$\frac{BC}{PK} = \frac{AC}{PL} + \frac{AB}{PM}$$
10.17

байхыг батал.

5. / БНАГУ -ий 1970; ХБНКУ-ий 1972 оны үндэсний олимпиад/

а/ O -цэг ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв, AO шулуун уг гурвалжныг багтаасан тойрогтой огтолцсон A -аас ялгаатай цэг нь D байг. Тэгвэл $AB = DC = DO$ байхыг батал. 10.18

б/ $ABCD$ багтсан дөрвөн өнцөгт байг. BCD ; CDA ; DAB , ABC гурвалжуудад багтсан тойргуудын төв харгалзан A_1 , B_1 , C_1 , D_1 бол эдгээр цэгүүд тэгш өнцөгтийн орой болно гэж батал. 77

6. / Жюри. 82. АНУ / Багтсан гурвалжин дөрвөн өнцөгтийн диагональ түүнийг хоёр гурвалжинд хуваана. Эдгээр гурвалжинд багтсан хоёр тойргийн радиусын нийлбэр диагоналийн сонгогдоос үл хамаарахыг батал. 10, 20

7. / БНАУ. 78 оны үндэсний олимпиад / Мохго өнцөггүй гурвалжны хамгийн их өндөр нь түүнийг багтаасан ба түүнд багтсан тойргийн радиусуудын нийлбэрээс багагүйг батал. Хэдийд тэнцэтгэл биелэхийг батал.

8. / БНАУ. 76 оны үндэсний олимпиад / $ABCD$ параллелограммын гадна орших P цэгийн дараах нөхцлүүд биелсэн байхаар авчээ. Үүнд : $a / \angle PAB = \angle PCB$
 b / A ба C цэг PB шулуун хувьд өөр өөр хатас хавтгайд оршино. Тэгвэл $\angle APB = \angle BPC$ байхыг батал.

9. / БНСУ. 1974 оны, БНСУ-ын 82 оны олимпиад / Өгөгдсөн ABC гурвалжны дотор орших аливаа T цэгийн хувьд TA, TB, TC хэрчмүүдийн уртуудын хамгийн багш $m(T)$, хамгийн ихийг $M(T)$ -ээр тэмдэглэе.

$a / m(T)$ хэмжигдэхүүнүүд хамгийн их утга авах, бүх T цэгүүдийг ол. (ABC - гурвалжин дотроос)

$b /$ Хэрэв $\angle BAC \geq 90^\circ$ бол дурын T цэгийн хувьд ABC -ийн дотор орших /

$$m(T) \leq \frac{BC}{2} \leq M(T)$$

байхыг батал.

10 / Жюри. 77 он. БНСУ / Талуудын урт a, b, c ба талбай нь S байх гурвалжны хувьд 13, 17

$$\frac{ab+ac+bc}{4S} \geq \sqrt{3}$$

байхыг батал.

11. / Австрали улсын 82 оны үндэсний олимпиад / ABC гурвалжны A, B, C өнцгүүдийн биссектриссүүдийн үргэлжлэл багтаасан тойргийг харгалзан A_1, B_1 ба C_1 цэгүүд дээр огтолбол

$AA_1 + BB_1 + CC_1 > AB + BC + AC$ байхыг батал.

1. Математика в школе № 1. 1987 .
2. И.Ф. Шарыгин, Задачи по геометрии " Наука " 1986
3. Улсын математикийн XXIII олимпиад УБ. 1987
4. Математика в школе № 1988. стр. 50
5. За рубежные математические олимпиады, 1987

ЦЭГ, ШУЛУУНЫ БАЙРНЫН ТУХАЙ ЗАРИМ ТEOPEM

А. ХАМБААТАР

Доор батлах зарим теоремыг дунд сургуульд геометрийн хичээлээр үздэг аргуудаар баталж болох боловч, вектор аргаар бол олон янзын тухайн тохиолдол бүрийг салган үзэх шаардлагагүй бөгөөд бага хэмжээний энэ өгүүлэлд багтаж, нь дээр гэн үзлээ. Ер нь вектор арга физик болон математикийг түгээмэл хэрэглэгддэг аргуудын нэг болохоор түүнийг санааг ойлгоход туслах хялбар дасгал болохын хувьд ч бас амигтай гэн үзлээ.

Вектор гэх нь болох, тэдгээрийн тэнцэл, үйлдэл, шугаман хамаарлын тухай сурах бичигт байдгийг давтан нуршихгүй шууд хэрэглэснээс нь эхэллээ. Үзэх теоремын үндэс болгон өөр хоорондоо туйлын уялдаатай нэг бодлого, хоёр теоремээс эхэллээ.

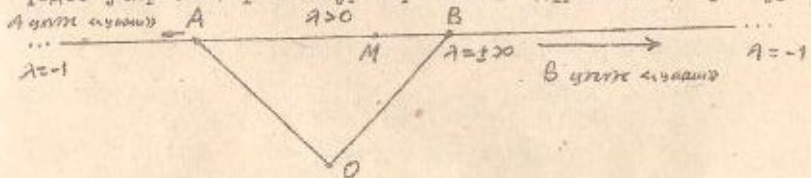
I. Хэрчмийг өгсөн харьцаагаар хуваах бодлого.

$\vec{AM} = \lambda \vec{AB}$ нэхцэл хангадаг аливаа M цэгийг AB хэрчмийг λ харьцаагаар хуваасан цэг гэнэ. Энэ өгүүлбэрийг товчлон $(AB, M) = \lambda$ гэн тэмдэглээ.

Векторыг тоотгоор үржүүлэх үйлдлийн тодорхойлолт ёсоор $\vec{AM}$, $\vec{MB}$ хоёр вектор ямар нэг шулуунтай параллели. Тиймээс A, B, M гурван цэг нэг шулуун дээр оршино. Тэгэхлээр M цэг нэг бол AB хэрчим дээр, нэг бол түүний гадна оршино. Эхний тохиолдолд $\vec{AM} \uparrow \uparrow \vec{MB}$ байдгаас $\lambda > 0$, нөгөө тохиолдолд $\vec{AM} \uparrow \downarrow \vec{MB}$ байдгаас $\lambda < 0$. Тэхдээ

$|\lambda| < 1$ бол $|\vec{AM}| < |\vec{MB}|$ байх учраас M цэг AB хэрчмийн гадна алмаа A цэгт, B цэгээс илүү ойр оршино. Түүнийг бид M цэг A цэгээс «цааш» оршино гэх ярьж байв.

гэх ярих байн. $| \lambda | > 1$ тохиолдолд бол M цэгийг B цэгээс «цааш» оршино гэж ярина. $| \lambda |$ хичнээн бага бол M цэг A цэгт төгсөөн ойрхон, харин хичнээн их бол B цэгт төгсөөн ойрхон оршино. Ийнхээс хязгаарын утгаар $\lambda = 0$ бол M цэг A цэгтэй, $\lambda = \pm \infty$ бол B цэгтэй давхцсан гэнэ. Гэтлэхүү $\lambda = -1$ байхад тохирох цэг зааж болохгүй байна. Гэвч A -ийн бодит утга бүхэнд шулуун цэг харгалздаг болбхын үүднээс шулуунд $\lambda = -1$ утганд харгалзах "алсын" цэг нэмсэн гэж үздэг учир бий. Үүнийг зургаар тоймлон дүрсэлбэл /1-р зураг/.



1-р зураг

Бодлого A, B хоёр цэг, λ тоот өгсөн бол M цэгийг ол. Үүнийг бид хэрчмийг өгсөн харьцаагаар хуваах бодлого гэж нэрлэдэг.

« M цэгийг олох вектор томъёо гаргахын тулд, ямар ч хамааргүй, тиймээс, тухайн зорилгодоо хамгийн тохиромжтой нэг цэг сонгож O гэе /манай бодлогод O цэгийг хаана ч авсан болно/. Өгсөн A, B ба олох M цэгийн вектор-радиус

$\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OM}$ -ийг товчлон $\vec{A}, \vec{B}, \vec{M}$ гэе. Цаашд бүх цэгийн вектор-радиусын эх ижил байхаар бол зөвхөн аль цэг болохыг тэмдэглэсэн үсгээр нь саян адил тэмдэглэж байгаа. Үүнд:

$$\vec{AM} = \lambda \vec{MB}$$

тэнцэл $\vec{OM} - \vec{OA} = \lambda (\vec{OB} - \vec{OM})$ сан тохирсноор бол

$$\vec{M} - \vec{A} = \lambda (\vec{B} - \vec{M})$$

хэлбэртэй болно. Энэ тэнцлээс

$$\vec{M} = \frac{\vec{A} + \lambda \vec{B}}{1 + \lambda}$$

Энэ томьёо A, B, M гурван цэг нэг шулуун дээр орших нөхцөл болох нь илэрхий.

Хэрэв $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$ хэлбэртэй байсан бол

$$\vec{M} = \frac{\alpha \vec{A} + \beta \vec{B}}{\alpha + \beta} \quad (A)$$

Түүнийг үгээр AB хэрчмийг $\frac{\beta}{\alpha}$ харьцаагаар хуваасан M цэг гэж уншина. Эсвэл өмнө тохирсноор $(AB, M) = \frac{\beta}{\alpha}$ гэх тэмдэглэнэ.

Саваны $(AB, M) = \frac{\beta}{\alpha}$ бол (A) томьёоны хуваарьт, харьцааны хүртвэр хуваарийн нийлбэр $\alpha + \beta$ байгааг анхаар.

Хэрэв $\frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \lambda, \frac{\beta}{\alpha + \beta} = M$ гэх тэмдэглэвэл

$$\begin{cases} \vec{M} = \lambda \vec{A} + M \vec{B} \\ \lambda + M = 1 \end{cases} \quad (A')$$

хэлбэртэй бичиг болно. Зарим үед энэ хэлбэрийн бичлэг илүү тохиромжтой байдаг. $(AB, M) = \frac{M}{\lambda}$ байгааг харахад хялбархан.

Теорем

$$\begin{cases} \alpha \vec{A} + \beta \vec{B} + \gamma \vec{C} = \vec{O} \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \quad (B)$$

Нөхцөл хангагддаг α, β, γ гурван тоо олддог байх нь A, B, C гурван цэг нэг шулуун дээр орших зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл өндөрхөн мөн.

« A, B, C гурван цэг нэг шулуун дээр оршвол C нь AB хэрчмийг ямар нэг харьцаагаар хуваана. Түүнийг $\frac{\beta}{\alpha}$ гэе.

Үүнд $\frac{\beta}{\alpha}$ нь $0, \infty, -1$ утга авахгүй / яагаад?/. Тийнхүү

$\alpha, \beta, \alpha + \beta$ гурван тооны аль нь $\vec{O}$ тэг биш болохоор

$\gamma = -(\alpha + \beta)$ гэвэл $\alpha + \beta + \gamma = 0$ бөгөөд (A) томьёоноос

$\alpha \vec{A} + \beta \vec{B} + \gamma \vec{C} = \vec{0}$ бол (B) нөхцөл бүрдэнэ. Харин $\alpha \beta \gamma \neq 0$ байхад (B) нөхцөл биелдэг байвал

$$-\frac{\alpha}{\gamma} = 1, \quad -\frac{\beta}{\gamma} = \mu$$

гэх орлуулахад (B) нөхцөл

$$\begin{cases} \lambda \vec{A} + \mu \vec{B} = \vec{C} \\ \lambda + \mu = 1 \end{cases}$$

хэлбэртэй болж (A') гарна.

(B) нөхцлөөс

$$(AB, C) = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{төдийгүй} \quad (BC, A) = \frac{\gamma}{\beta},$$

$(CA, B) = \frac{\alpha}{\gamma}$ байхыг хялбархан харж болно. Ийнхүү

$$(AB, C) \cdot (BC, A) \cdot (CA, B) = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} = 1$$

байдаг ажээ.

Теорем 2.

$$\begin{cases} \alpha \vec{A} + \beta \vec{B} + \gamma \vec{C} + \delta \vec{D} = \vec{0} \\ \alpha \beta \gamma \delta \neq 0 \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \end{cases}$$

нөхцөл хангадаг $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ дөрвөн тоо олддог байх нь

A, B, C, D дөрвөн цэг нэг хавтгай дээр орших зайлгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл биелдэг болно.

Хэрэв A, B, C, D дөрвөн цэг нэг хавтгай дээр ордог бол: $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$, буюу $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$. Тэхлээр $\vec{B} - \vec{A} = \lambda(\vec{D} - \vec{C})$ байх $\lambda \neq 0$ олдоно. Хавтгыг задалж эмхтгэсний дараа

$$\vec{B} - \vec{A} - \lambda \vec{D} + \lambda \vec{C} = \vec{0} \quad \text{болохын зэрэгцээ}$$

$$1 - 1 - \lambda + \lambda = 0 \quad \text{бөгөөд} \quad 1 \cdot (-1) \cdot (-\lambda) \cdot \lambda \neq 0 \quad \text{тул}$$

(B) нөхцөл бүрдэнэ.

$\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ Тэхлээр AB, CD хоёр шулуун

A, B, C, D дөрвөн цэгийн аль алианаас ялгаатай / яагаад? / P цэгт огтлолцоно. Тиймээс

$$\vec{P} = \frac{\vec{A} + \lambda \vec{B}}{1 + \lambda} = \frac{\vec{C} + \mu \vec{D}}{1 + \mu}$$

бөгөөд λ, μ хоёр

$0, -1$ утгын алийг ч авахгүй / яагаад? /. Тийнхүү сүүлчийн тэнцэтгэлийг эмхтгэсний дараа

$$(1+\mu)\vec{A} + \lambda(1+\mu)\vec{B} - (1+\lambda)\vec{C} - \mu(1+\lambda)\vec{D} = \vec{0}$$

болохын эзрэгцээ $(1+\mu) + \lambda(1+\mu) + (-1-\lambda) + (-1-\lambda)\mu = 0$,

$$(1+\mu) \cdot \lambda(1+\mu) \cdot (-1-\lambda) \cdot \mu(-1-\lambda) \neq 0$$

тул мөн (В) нөхцөл бүрдэнэ. Харин (В) нөхцөл биелдэг бол:

1) $\alpha + \beta = 0$. Тиймээс $\gamma + \delta = 0$. Эндээс $\beta = -\alpha$, $\delta = -\gamma$ буюу $\alpha(\vec{A} - \vec{B} + \beta(\vec{C} - \vec{D})) = \vec{0}$. Өөрөөр хэлбэл

$\alpha \vec{AB} = \beta \vec{CD}$. Ийнхүү $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ байгаагаас AB, CD хоёр шулуун параллель буюу A, B, C, D цэгүүд нэг хавтгайхн байна. 2) $\alpha + \beta \neq 0$, тиймээс мөн $\gamma + \delta \neq 0$

тул (В) нөхцлөөр

$$\frac{\alpha \vec{A} + \beta \vec{B}}{\alpha + \beta} = \frac{\gamma \vec{C} + \delta \vec{D}}{\gamma + \delta}$$

буюу AB хэрчийг $\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ харьцаагаар хуваасан $\frac{\alpha \vec{A} + \beta \vec{B}}{\alpha + \beta}$ цэг

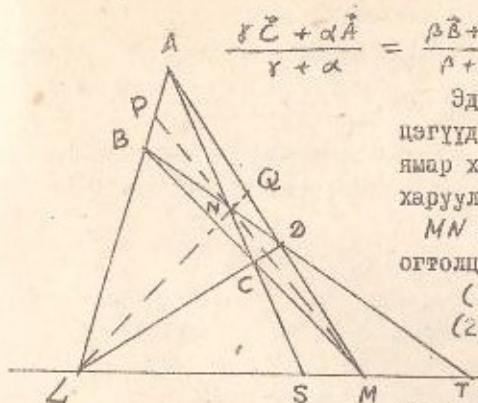
CD хэрчийг $\frac{\gamma}{\gamma + \delta}$ харьцаагаар хуваасан $\frac{\gamma \vec{C} + \delta \vec{D}}{\gamma + \delta}$ цэгтэй давхцсан байгаа тул AB, CD хоёр шулуун тэр цэгт огтолцоно. Ийм хоёр шулуунг дайруулж ганц хавтгай татах болдог билээ. ►

(В) томиёог багцаад зогсвол хэтэрхий хомс болох билээ. Тиймээс нэмж тайлбарлах шаардлагатай. $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$ нөхцөл A, B, C, D дөрвөн цэгийн аль ч гурав нь нэг шулуун дээр оршихгүй гэдгийг харуулна. Ийм дөрвөн цэгийг товчоор ерөнхий байрлалын дөрвөн цэг гэдэг. Тэдгээрийг хос хосоор нь дайрсан AB, AC, AD, BC, BD, CD зургаан шулуун татаж болно. Энэхүү 4 цэг 6 шулуунаас тогтсон дүрсийг бүтэн дөрвөн оройт гэдэг.

Дөрвөн цэгийг орой, зургаан шулуунг тал гэнэ. Нэг орой дайраагүй хоёр талыг эсрэг тал гэнэ. Эсрэг талууд гурван хос байна. Тэдгээрийн огтлолцлыг диагональ цэг гэнэ. Диагональ цэг гурав байх нь мэдээж. Тэдгээр нь:

$$\frac{\alpha \vec{A} + \beta \vec{B}}{\alpha + \beta} = \frac{\gamma \vec{C} + \delta \vec{D}}{\gamma + \delta} = \vec{L} \quad (I)$$

$$\frac{\beta \vec{B} + \gamma \vec{C}}{\beta + \gamma} = \frac{\alpha \vec{A} + \delta \vec{D}}{\alpha + \delta} = \vec{M} \quad (C)$$



С. 2 хоёртой найраг хос байхыг үзүүл.

3. $\angle C, \angle M$ хоёр шулуун огтолжол S ; $B2, \angle M$ хоёр шулуун огтолжол T -гээд $(\angle M, S) = -(\angle M, T)$ байдгийг үзүүл.

4. ①, ②, ③ тэнцэлд 2 бусдаасаа олцгой байгаа. Түүний оронд A, B, C -г харгалзуулсан авч тэдгээр томъёог гарга.

Одоо теоремуудаа баталъя.

1. Чевийн теорем. $\triangle ABC$ -ны BC, CA, AB талыг дайрсан гурван шулуун A', B', C' цэг авахад AA', BB', CC' гурван шулуун нэг (2) цэгт огтолцсон байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл

$$(BC, A') \cdot (CA, B') \cdot (AB, C') = 1 \quad \text{т.м.}$$

Баталгаа.

« AA', BB', CC' гуравны огтолцол 2 бол $A, B, C, 2$ дөрвөн цэг нэг хавтгайны учраас

$$\begin{cases} \alpha \vec{A} + \beta \vec{B} + \gamma \vec{C} + \delta \vec{2} = \vec{0} \\ \alpha \beta \gamma \delta \neq 0 \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \end{cases}$$

①, ②, ③ -г олонх үлгэрээр олоход

$$(BC, A') \cdot (CA, B') \cdot (AB, C') = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

Хэрэв

$$(BC, A') \cdot (CA, B') \cdot (AL, C') = 1$$

байсан бол

$$(BC, A') = \lambda, (CA, B') = \mu, (AB, C') = \nu$$

гэвэл

$$\begin{cases} \vec{A}' = \frac{\vec{B} + \lambda \vec{C}}{1 + \lambda}, \quad \vec{B}' = \frac{\vec{C} + \mu \vec{A}}{1 + \mu}, \quad \vec{C}' = \frac{\vec{A} + \nu \vec{B}}{1 + \nu}, \\ \lambda \mu \nu = 1 \end{cases}$$

AA' , BB' хоёр шулуун огтолдог AA' , BB' хэрчмийг хуваасан цэг байх учраас $\vec{A}$, $\vec{A}'$, $\vec{B}$, $\vec{B}'$ векторыг холбоосон илэрхийлэл олох хэрэгтэй. Эдгээрийг эхний хоёр тэнцэлд $\vec{C}$ холбож байгаа учир тэдгээрээс $\vec{C}$ -г зайлуулбал болно. Үүнд:

$$(1+\lambda)\vec{A}' - \lambda(1+\mu)\vec{B}' = \vec{B} - \lambda\mu\vec{A}$$

буюу

$$\lambda\mu\vec{A} + (1+\lambda)\vec{A}' = \vec{B} + \lambda(1+\mu)\vec{B}'$$

BB' , CC' шулуун огтолцыг олохдоо саяны зарчмыг баримтлахад

$$\vec{C} + \mu(1+\lambda)\vec{C}' = \mu\lambda\vec{B} + (1+\mu)\vec{B}'$$

Сүүлчийн тэнцлийг λ -аар үржүүлж $\lambda\mu\lambda = 1$ нөхцлийг ашиглахад

$$\lambda\vec{C} + (1+\lambda\mu)\vec{C}' = \vec{B} + \lambda(1+\mu)\vec{B}'$$

болж

$$\lambda\mu\vec{C} + (1+\lambda)\vec{A}' = \vec{B} + (\lambda+\lambda\mu)\vec{B}' = \lambda\vec{C} + (1+\lambda\mu)\vec{C}'$$

Ийнхүү

$$\frac{\lambda\mu\vec{A} + (1+\lambda)\vec{A}'}{1+\lambda+\lambda\mu} = \frac{\vec{B} + (\lambda+\lambda\mu)\vec{B}'}{1+\lambda+\lambda\mu} = \frac{\lambda\vec{C} + (1+\lambda\mu)\vec{C}'}{1+\lambda+\lambda\mu} \quad \blacktriangleright$$

2. Менелайн теорем. $\triangle ABC$ -ны BC , CA , AB талыг дайрсан гурван шулуун дээр харгалзуулан авсан A' , B' , C' гурван цэг нэг шулуун дээр орших зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл

$$(\overline{BC}, A') \cdot (\overline{CA}, B') \cdot (\overline{AB}, C') = -1. \quad \text{IOM}$$

.Баталгаа.

◀ Хэрэв нөхцөлд дурьдсан A' , B' , C' гурвыг авбал

$$\vec{A}' = \frac{\vec{B} + \lambda\vec{C}}{1+\lambda}, \quad \vec{B}' = \frac{\vec{C} + \mu\vec{A}}{1+\mu}, \quad \vec{C}' = \frac{\vec{A} + \lambda\vec{B}}{1+\lambda} \quad 87$$

Бичиглэл хэмнэхийн тулд A цэгийг радиус-векторын эх болговол $\vec{A} = \vec{OA} = \vec{O}$ болж дээрх нөхцлүүдийг

$$\begin{cases} (1+\lambda)\vec{A}' = \vec{B} + \lambda\vec{C} \\ (1+\mu)\vec{B}' = \vec{C} \\ (1+\nu)\vec{C}' = \vec{A} \end{cases}$$

хэлбэртэй бичиж болно. Нэгдүгээрийг λ -ээр, хоёрдугаарыг $\lambda\lambda$ -ээр үрхүүлж гарсан нөхцлийн эхнийхээс үлдсэн хоёрыг хасвал

$$\lambda(1+\lambda)\vec{A}' - \lambda\lambda(1+\mu)\vec{B}' - (1+\lambda)\vec{C}' = \vec{O}$$

Хэрэв $\vec{A}', \vec{B}', \vec{C}'$ цэг нэг шулууных бол

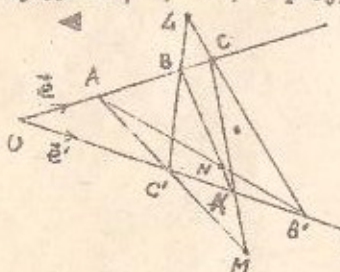
$$\lambda(1+\lambda) + [-\lambda\lambda(1+\mu)] + [-(1+\lambda)] = 0$$

байна. Эндээс $\lambda\mu\lambda = 1$

Харин $\lambda\mu\lambda = -1$ бvйсн бол

$$\lambda(1+\lambda) + [-\lambda\lambda(1+\mu)] + [-(1+\lambda)] = \lambda + \lambda\lambda - \lambda\lambda - \lambda\mu\lambda - 1 - \lambda = -\lambda\mu\lambda - 1 = -(-1) - 1 = 0. \blacktriangleright$$

3. Паскалийн теорем. O цэгт огтолцсон хоёр шулуун нэг дээр A, B, C ; нөгөө дээр A', B', C' гурван цэг оршино. Хэрэв $BC', CB'; CA', AC'; AB', BA'$ хос шулуунууд харгалзан L, M, N гурван цэгт огтолцвол эдгээр цэг нэг шулуун дээр оршино / 3-р зураг /.



3-р зураг.

OA, OA' шулуун харгалзуулан $\vec{e}, \vec{e}'$ нэгж вектор авбал өгсөн зургаан цэгийн вектор-радиус $\vec{A} = \alpha\vec{e}, \vec{B} = \beta\vec{e}, \vec{C} = \gamma\vec{e};$
 $\vec{A}' = \alpha'\vec{e}', \vec{B}' = \beta'\vec{e}', \vec{C}' = \gamma'\vec{e}'. (*)$

гэх илэрхийлэгдэнэ. L, M, N цэгийг олох аргыг L цэгээр жишээлэн зарчмын хуягд харуулъя.

(A')

ёсоор

$$\begin{cases} \lambda \vec{B} + \mu' \vec{C}' = \mu \vec{C} + \lambda' \vec{B}' = \vec{L} \\ \lambda + \mu' = 1, \quad \mu + \lambda' = 1 \end{cases}$$

- (*) - ийг амиглавал

$$\begin{cases} \lambda \beta \vec{E} + \mu' \gamma' \vec{E}' = \mu \gamma \vec{E} + \lambda' \beta' \vec{E}' = \vec{L} \\ \lambda + \mu' = 1, \quad \mu + \lambda' = 1 \end{cases}$$

 $\vec{E}, \vec{E}'$ вектор шугаман хамааралгүй утгир: вектор- тэнцлээс

$$\lambda \beta = \mu \gamma, \quad \mu' \gamma' = \lambda' \beta'$$

гэж гарна. Ийнхүү

$$\begin{cases} \lambda \beta = \mu \gamma, \quad \mu' \gamma' = \lambda' \beta' \\ \lambda + \mu' = 1, \quad \mu + \lambda' = 1 \end{cases}$$

системээс

$$\lambda = \gamma \cdot \frac{\gamma' - \beta'}{\gamma \gamma' - \beta \beta'}, \quad \mu' = \beta' \cdot \frac{\gamma - \beta}{\gamma \gamma' - \beta \beta'}$$

$$\mu = \beta \cdot \frac{\gamma' - \beta'}{\gamma \gamma' - \beta \beta'}, \quad \lambda' = \gamma' \cdot \frac{\gamma - \beta}{\gamma \gamma' - \beta \beta'}$$

гэж олдоно. Бусад M, N цэгийг мөн зарчмаар олно. Тэгсний дараа

$$\alpha \alpha' (\gamma \gamma' - \beta \beta') \vec{L} + \beta \beta' (\alpha \alpha' - \gamma \gamma') \vec{M} + \gamma \gamma' (\beta \beta' - \alpha \alpha') \vec{N} = \vec{O}$$

байгааг шалгавал хамгаалттай

Дасгал

1. $\vec{OA}' = \alpha \vec{OA}$, $\vec{OB}' = \beta \vec{OB}$ бол $AB, A'B'$ хоёр шулуун огтлолцсон цэг α, β -ийн ямар утгад:а/ $AB, A'B'$ хэрчимийн гадна; б/ AB хэрчимийн гадна,

$A'B'$ хэрчим дээр; в/ AB хэрчим дээр $A'B'$ хэрчийн гадна; г/ $AB \parallel A'B'$ байхыг тус тус тогтоо.

2. AB, CD суурьтай $ABCD$ трапецийг $AB = CD$ тэнцлээр гч болохыг гадна, хахуу талуудынх нь огтолцол M бол $AM = MC$, $MD = MC$ хоёр тэнцлээр өгч болохыг тогтоогоод, диагоналуудын огтолцол, хоёр суурийн дундаж бүгд нэг шулуун дээр орчихыг батал.

3. Гурвалжны гурван медиан/гурван биссектрис; гурван өндөр ~~хэрчим~~/нэг цэгт огтолцогийг батал.

4. $\triangle ABC$ -д багтсан тойрог, түүний BC, CA, AB талуудыг харгалзан A', B', C' цэгт шүргэсэн бол AA', BB', CC' шулуунууд нэг цэгт огтолцохыг батал.

5. $\triangle ABC$ -ны BC, CA, AB талууд дээр харгалзуулан A', B', C' цэг авахад AA', BB', CC' шулуунууд нэг цэгт огтолцсон бол тэдгээртэй харгалзах өнцгийн биссектрисийн хувьд тэгш хэмтэй орших шулуунууд мөн нэг цэгт огтолцохыг батал.

6. $\triangle ABC$ -ыг багтаасан тойрог дээр орших P цэгээс BC, CA, AB талууд ыг дайрсан шулуунд буулгасан перпендикулярын суурь харгалзан A', B', C' бол эдгээр цэгийг нэг шулууных гэж батал.

7. AA_1, BB_1, CC_1 гурван шулууны нэг O цэгт огтолцсон бол AB, A_1B_1 ; BC, B_1C_1 ; CA, C_1A_1 хосуудын огтолцол нэг шулууных байдгийг батал.

8. K цэгт огтолцсон дөрвөн шулуунтай нэг шулуун A, B, C, D цэгт, нөгөө шулуун A_1, B_1, C_1, D_1 цэгт огтолцсон бол

$$\frac{(AB, C)}{(AB, D)} = \frac{(A_1B_1, C_1)}{(A_1B_1, D_1)} \quad \text{байхыг батал.}$$

9. $\triangle ABC$ -ны CA талыг B оройн дотоод өнцгийн биссектрис B_1 , гадаад өнцгийн биссектрис B_2 цэгт; AB талыг C оройн дотоод өнцгийн биссектрис C_1 , гадаад өнцгийн биссектрис C_2 цэгт огтолжээ. C_1B_2, C_2B_1 шулуунууд A оройн дотоод өнцгийн биссектрис дээр огтолцохыг батал.

Д.Ламжав

Эдгээр бодлогуудыг зохиогчийнх нь нэрийг заан, 25-р олимпиадад бэлтгэж байгаа сурагч, багш нарт зориулан эмхтгэв.

1. /А.Мекей /

$$\left. \begin{aligned} x^3 - y^3 - z^3 &= 3xyz \\ x^2 &= 4(y+z) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{тэгшитгэлүүдийн сис-} \\ \text{темийн сөрөг биш бүхэл} \\ \text{шийдүүдийг ол.} \end{array}$$

2. /В.Адьяасүрэн/ $f(0)=1$, дурын x, y утгуудын хувьд
 $f(x+y) - f(x-y) = (y+1)f(x) - y$
 байх $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцуудийг ол.

3. /Э.Санчир м II/ $1000 \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_{2n}| \leq 1988$
 $x_k \neq 0 \quad k=1, 2, \dots, 2n$ байх $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ бүхэл
 шийдийн тоог ол.

4. /А.Ганбаатар/ A цэг болон түүнийг дайраагүй
 l, m шулуунууд өгөгджээ. ABC гурвалжныг B, C орой нь
 l шулуун дээр, B, C оройгоос буулгасан өндрүүдийн
 суурьд m шулуун дээр байхаар байгуул.

5. /Б.Гансгалан / Хавтгай дээр $2n$ ($n \geq 4$) ширхэг
 цэг өгөгджээ. Аль ч цэг нь яг нэг хэрчмийн үзүүр байхаар
 эдгээр цэгийг n ширхэг хэрчмээр, бүх хэрчмийг нэг шулуу-
 наар огтоолж

а/болдог, б/ болдоггүй байхаар холбож болохыг тус
 тус батал.

6. /Б.Чулуундорж/ $\{1, 2, 3, \dots, 1988\}$ олонлогоос
 эцэст нь үүсэх олонлогийнх нь аль ч гурван тоо натурал
 тоон хуваарьтай геометрийн прогресс үүсгэхгүй байхаар

хамгийн цөөн тооны a ширхэг элементийг дарав.

$$316 \leq a \leq 346$$

байхыг батал.

7. / Р. Гончигдорж / . Дурын α -ийн хувьд $\{f(x)\} = \{f(x)\}$, $\{f(x)\} = \{f(x)\}$ байх $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцуудийг ол.

8. / Г. Хүрэлбаатар М У / ABC хурц өнцөгт гурвалжинг багтаасан тойргийн төв ба өндрүүдийн огтолцлын цэгийг холбосон хэрчим BC талтай параллель бол

$$\frac{AD}{BC} = \frac{AD}{BC}$$

харьцааг ол. Бодлогын нөхцлийг хангасан гурвалжин төгсгөлгүй олон байх уу ?

9. / Г. Хүрэлбаатар М У / . A, B цэгүүдээр огтолцох S_1 ба S_2 тойргуудад A цэгийг дайруулан C_1, C_2 шүргэгчүүдийг татвээ. S_1 ба S_2 тойргуудын төвөөс E_1, E_2 шулуунуудад татсан перпендикуляруудын огтолцлын цэгийг P гэдэг $\angle AEP = 90^\circ$ болохыг батал.

10. / Санчир М У / . ABC гурвалжны талууд дээр харгалаан C_1, A_1, B_1 цэгүүдийг $B_1C_1 \perp AB$, $A_1B_1 \perp BC$, $A_1C_1 \perp AC$ байхаар авчээ. B оройн медиан CA_1 -д перпендикуляр байхыг батал.

11. / Б. Баясгалан / . 5^n ($n \geq 1$) радиустай тойрог дээр аль хоёрын нь хоорондох зай бүхэл тоо байхаар $n+1$ ширхэг цэг сонгон авч болохыг батал.

12. / Б. Баясгалан / . 7^n ($n \geq 1$) радиустай тойрог дээр аль хоёрын нь хоорондох зай бүхэл байх гурван цэг олдохгүйг батал.

13. / Г. Хүрэлбаатар / . ABC гурвалжны AB, BC талууд дээр $\angle CEN = \frac{1}{3}(\angle BCA)$, $\angle BAM = \frac{1}{3}(\angle BAC)$

байхаар N ба M цэгийг сонгон авчээ. Хэрэв $CN = AM$ бол $\triangle ABC$ адил хажуут болохыг батал.

14. / Р.Хүрэлбаатар И У/. $AB = BC$ байх ABC гурвалжны A оройгоос буулгасан медианы суурийг H гэе. ABH гурвалжны медиануудын огтлолцлын цэгийг O_1 , ABC гурвалжныг сэгтээсэн тойргийн төвийг O_2 гэвэл $O_1 O_2$ хэрчим AH -д перпендикуляр болохыг батал.

15. / Р.Гончигдорж /.

$$C_{1988}^{23} \cdot C_{1988}^{25} - C_{1988}^{22} \cdot C_{1988}^{26} + \dots + C_{1988}^1 \cdot C_{1988}^{97} - C_{1988}^0 \cdot C_{1988}^{98}$$

нийлбэрийг ол.

16. / Р.Гончигдорж / . n урттай $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ бүхэл тоон дарааллууд дээр: а/ аль нэг координатыг бүхэл тоогоор үрхүүлж нөгөө координат дээр нэмэх, б/ аль ч координатыг нь эсрэгээр нь солих хоёр үйлдлийг зөвшөөрнө. Дурын $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дарааллын төгсгөлөг алхмын дараа $(m, 0, \dots, 0)$ хэлбэрт оруулж болохыг батал.

17. /Т.Батбаяр / . $a = 4 \arctg \frac{1}{5} - \arctg \frac{1}{25}$

бол $\log_9 9$ иррациональ болохыг батал.

18. / Гунгаабаяр МП / . A мохоо өнцөгтөй ABC гурвалжны B, C оройг дайрсан; AB, AC талуудад перпендикуляр шулуун мөн талуудын үргэлжлэлтэй харгалзан P, Q цэгт огтлолцов. P, Q цэгүүдийг дайрсан CP, BQ хэрчмүүдэд перпендикуляр шулуунууд нь T цэгт огтлолцсон бол AT шулуун BC талд перпендикуляр болохыг батал.

19. / Т.Ладхүү / . $x_1 = 4$, $x_{n+1} = 7x_n + 4\sqrt{3x_n^2 + 1}$ дарааллын гишүүн бүр тэгш натурал тоо болохыг батал.

20. /В.Адьяасүрэн / . S талбайтай $A, A_2, \dots, A_n$ гүдгэр олон өнцөгт өгөгджээ. Дурын M цэгийн хувьд

$R_i^a(M) = M_i \quad (i=1, n)$ гэвэл $M, M_1, \dots, M_n$ олон өнцөгтийн талбайг ол.

21. /А.Мажей/. Тойрог дээр A, B, C, D дөрвөн цэг өгөгджээ. AB, BC, CD, DA нумууд дээр харгалзах P, Q, R, S цэгүүдийг $APBQCRD SA$ олон өнцөгтийн периметр хамгийн их байхаар сонгон авч болохон уруу.

22. /А. Алтанцог/.

$$a_1 = \sqrt{1981}, \quad a_{n+1} = \sqrt{1988 \cdot a_n + \sqrt{1989 a_n^2 - 1989}}$$

дарааллын бүхэл гишүүдийг ол.

23. /А.Хамбаатар/. Хавтгай дээр тойрог ба A цэг өгөгджээ. A цэгийг дайрсан огтлогчийн тойрогтой огтлолцсон цэгүүдэд татсан шүргэгчүүдийн огтлолцлын геометр байрыг ол.

24. / Батцэнгэл М.Б./ $[\sqrt{2} \cdot x] = [(2 + \sqrt{2}) \cdot y]$

тэгшитгэлийн бүхэл шийдийг ол.

25. / Ц.Ганбат УБДС М.1/. Биссектрисүүдийн огтлолцлын цэгүүд нь давхцан байхаар хоёр гурвалжны нэгийг нь нөгөөд нь багтаажээ. Батгсан тойргуудын харьцаа нь

$$\frac{1}{2} < \frac{r_1}{r_2} < 1 \quad \text{болохыг батал.}$$

26. / М.Баасай.Эрдэнэт /.

$$\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}^2 5^\circ + 19 \operatorname{tg}^4 5^\circ + 15 \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}^6 5^\circ + 11 \operatorname{tg}^8 5^\circ > \sqrt{3}$$

тэнцэл бишийг батал.

27. / М.Баасай /. Тус бүрийнх нь цифруудийн нийлсэр 53-д хуваагддаг дэс дараалсан нутурал хоёр тоо хяагааргүй олон болохыг батал.

28. /До. Нямсүрэн Дундговь / $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн AD, CB талууд M, N цэгүүдийг харгалзан $|DM| \cdot |MA| = |CN| \cdot |NB| = 3:2$ байхаар авахад (MN) шулуун ACD -г таллан хуваадаг бол AD, CB талуудыг.

дундажийг хэлбэрөөн хэрчим $ABCD$ -ийн талбайг ямар харьцаагаар хуваах вэ?

29. /Доржийн Нямсүрэн Дундговь / O төвтэй тойргийг A цэгт дотоод тойрог OA радиусыг D цэгт огтойж, OB радиусыг C цэгт шүргэнэ. Хэрэв $(DC) \cap (AB) = E$ ба $|OC| = |CE|$ бол OAE гурвалжны багтаасан тойргийн радиусуудын теометр дундаж болохыг батал.

30. /Д.Пүрэвсүрэн И.Ц / ABC гурвалжны гадаад мужид түүний талууд дээр ABC , BCA , ACB , зөв гурвалжнуудыг байгуулав. $BA_1, A_1C, CB_1, B_1A, AC_1, C_1B$ талуудын дундажийг харгалзан M, N, E, F, K, L гэвэл MF, KN, LE хэрчмүүдийн огтлолцод зөв гурвалжин үүссэнийг батал.

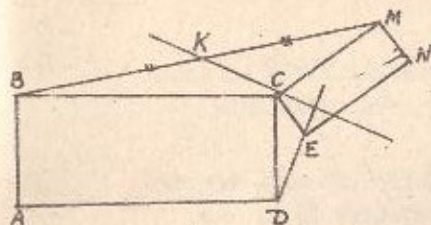
	Б		О		К		С		ОНОО	БЭМР
	Б1	Б2	О1	О2	К1	К2	С1	С2		
Б			+	:				+	2	IY
О	.	+			+	+	.	+	4	II
К	+	+	+	+			+	+	6	I
С	+	+	+						3	III

23-р олимпиадын үеэр энэ тэмцээнийг анх санаачлан зохиосон билээ. 24-р олимпиадын программд багийн тэмцээнийг тусг агүй байсан боловч багш, сурагчдын хүсэлтээр энэ тэмцээнийг явуулсан. Багш, орутан, комисс, сурагчдын багууд оролцсон энэхүү "Б О К С" тэмцээнийг цаашид уламжлал болгон явуулж байх нь зүйтэй нэт санагдана. Тэмцээний бодлогуудыг дор нийтлэв. Хүснэгтэд байгаа цэгийн учрыг тайлсарлаа: Лишээ нь "сурагч" баг "багш" багаас дэвнүүлсэн I-р бодлогыг хоёр удаа шалгуулахад тооцоогүй ба харин гуравдах удаагаа шалгуулахад бүрэн бодсон байна.

Б1. Дурын натурал тоо n -ын хувьд, n -д хуваагддаг, n^3 -ээс үл этрэх аравтын бичлэгт нь 3, 4, 5, 6 гэсэн цифрууд ордоггүй натурал тоо олдох уу?

Б2. Нэгж радиустай бөмбөрцөгт багтсан хамгийн их эзэлхүүнтэй 5 оройтой олон талстн эзэлхүүнийг ол.

О1. ABCD, CMNE төсөөтэй тэгш өнцөгтүүд өгөгджээ/зураг/



BM -ийн дундаж цэг
K бол KC, DE
шүлүүнүүд перпендикуляр
болохыг батал.

02. $[\sqrt{2} m] = [(2 + \sqrt{2}) n]$

тэгшитгэл нь натурал тоон
олонлогт шийдгүй гэж батал. / $[x] = \text{хүр } x$ - эзэ
хэтрэхгүй хамгийн их бүхэл тоо тэмдэглэдэг /

K1. Огторгуйд A, B, C_0, C_1, C_2 цэгүүд өгөгдөв.

$|AC_i| = 2|BC_i|$ ($i = 0, 1, 2$) ; $|C_1 C_2| = \frac{4}{3} |AB|$ бол

$\widehat{C_1 C_0 C_2} = \frac{\pi}{2}$ ба A, B, C_0, C_2 цэгүүд нэг хавтгай
дээр оршихыг батал.

K2. 1, 2, ..., 1988 тоонуудаас ямарч n ширхэгийг нь
авахад тэдгээрийн дотроос 29-н гишүүнтэй арифметикийн
прогресс үргэлж олддог бол $n > 1788$ гэж батал.

C1. Тойрогт зөв 1988 өнцөгт багтвээ. Тойргийн аль ч цэгээс
энэ олон өнцөгтийн орой хүртэлх зайнууд нь бүгд рацио-
наль тоо байж чадахгүйг батал.

02. $A_0 B_0 C_0$ гурвалжны медиануудад A, B, C гурвалжинг гэх
мэтээр энэ процессыг 1988 удаа үйлдэв. Хэрэв $|B_0 C_0| = a$,

$|A_0 C_0| = b$, $|A_0 B_0| = c$ бол $A_{1988} B_{1988} C_{1988}$

гурвалжны талбай болон багтаасан тойргийн радиусыг ол.

Г а р ч г э

1. ӨМНӨХ ҮГ
2. А.МЕКЕЙ, Б.ЧИМЭДДОРЖ, Х.ШАГДАР, Улсын ба олон улсын математикийн олимпиадын түүхээс
3. Л.ЧОЙЖООВАНЧИГ, В.АДЬЯАСҮРЭН, Улсын математикийн ХХІҮ олимпиадын ҮП ангийн гурвын давааны бодлого
4. В.АДЬЯАСҮРЭН, Улсын математикийн ХХІҮ олимпиадын ҮШ ангийн гурвын давааны бодлого
5. Д.ЛАМЖАВ, А.ХАШБААТАР, А.ТАНБААТАР, Улсын математикийн ХХІҮ олимпиадын ІХ ангийн гурвын давааны бодлого
6. Ц.ДАШДОРЖ, Л.ХАДХҮҮ, Улсын математикийн ХХІҮ олимпиадын гурвын давааны Х ангийн бодлого, түүний бодолт
7. Ц.ДАШДОРЖ, Л.ХАДХҮҮ, Улсын математикийн ХХІҮ олимпиадын дөрвийн давааны бодлогууд
8. А.МЕКЕЙ, Олон улсын математикийн ХХІХ олимпиадын бодлого
9. Ц.ДАШДОРЖ, Тооны бүхэл ба бутархай хэсэг
10. А.МЕКЕЙ, Тойрогт багтсан гүдгэр дөрвөн өнцөгт
11. А.ХАШБААТАР, Цэг, шулуун байршлын тухай зарим теорем
12. Д.ЛАМЖАВ, ХХІҮ олимпиадын сүүлчийн даваанд бодуулах ар дэвшигдсэн бодлогууд
13. Д.ЛАМЖАВ, Албан ёсны буюу багийн тэмцээн

БАЙГАЛЬ, ОРЧНЫГ ХАМГААЛАХ ЯАМНЫ ХАРЪЯА
ФОТО ОФСЕТ ХЭВЛЭЛИЙН ГАЗАР 2200 Ш. ХЭВЛЭВ
ЦААСНЫ ХЭМЖЭЭ 60X90 1/16

ЗЛ №24- 39

Улаанбаатар хот

Бага тойрог 11