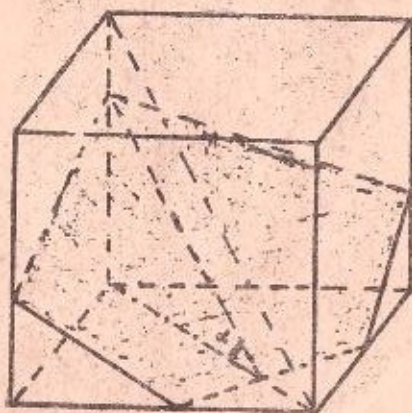


БНМАУ-ЫН АРДЫН БОЛОВСРОЛЫН ЯАМ
УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАДЫГ
ЗОХИОН БАЙГУУЛАХ ХӨРӨӨ.

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН XXV ОЛИМПИАД



Улаанбаатар хот
1990 он

БНМАУ АРДЫН БОЛОВСРОЛЫН ИЛМ
УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАДЫГ
ЗОХИОН БАЙГУУЛАХ ХОРОО

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХҮҮ ОЛИМПИАД

/ УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАДАД
ОЗЛӨГӨГЧДЭД ТУСНАМЬ /

X

Редактор доц. А.Менд

Улаанбаатар 1990 он

Ө м н ө х ү г

Улсын болон олон улсын математикийн олимпиадад бэлтгэгчид, математикийн хүсэл сонирхолтой сурагч, оюутан, багш нар болон хүмүүст зориулсан цуврал гарын авлагыг "Улсын математикийн XXV олимпиад" нэртэй дугаарыг хэвлэлд бэлтгэн гаргав. Тус гарын авлагыг бэлтгэхэд УМО-г зохион байгуулах хөрсний гишүүд, бусад багш нар, оюутнууд идэвхтэй оролцсон. Улсын математикийн XXV олимпиадыг зохион байгуулах үед ББДС-ийн багш нар, М/ИС, УБДС-ийн оюутнууд олон төрлийн бодлого зохион дэвшүүлсэн нь тэмдэглүүштэй болоосаа ба тэдгээр бодлогыг зохиогчийн хамт тус гарын авлагад оруулсан. Тэдгээрийн бодолтны тухай тө бүхэн зохиогчтой нь шууд харилцах болно.

Иг номыг тамаарлах талаар, иен зарим бодлогыг боловсруулж, тогч, гоё бодолтоо ирүүлж байхыг хүсье. Түүнчлэн УМО-ыг зохион байгуулах хөрсний гишүүдэд өөрийн зохиосон бодлогоо ирүүлж байгаа бид гүнээ талархах болно.

Редактор

Доп. А. МЫКЕВ

Д.БАТХҮҮ

А-1. 2, 3, 4, 5, 6-д тус тус хуваахад 1 үлдэгдэл гардаг 7-д хуваагддаг хамгийн бага натурал тоог ол.

А-2. $ABCD$ параллелограммын BC, AD талууд дээр түүний гадна орших BEC, AFD зөв гурвалжуудыг байгуулав. $ABCD$ параллелограммын диагоналуудын огтлолцсон цэг, EF хэрчмийн дундаж болно гэж батал.

А-3. Дэлгүүрт 1 төгрөгний бал, 3 ба 5 төгрөгний дөвтөр, 7 төгрөгний будаг байв. Сурагч эдгээр зүйлээс 61 төгрөгөнд 17 зүйл худалдан авав. Ингэхэд төр 3 төгрөгний дөвтөр худалдан аваагүй байх болох уу?

В-1.
$$\frac{a^2 + a^2 + 1}{(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)}$$
 илэрхийллийг хялбарчил.

В-2. ABC гурвалжны AB, BC, CA талууд дээр харгалзан G, A_1, B_1 цэгүүдийг $\frac{AG}{GB} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \lambda$ байхаар авчээ. Тэгвэл λ -ийн ямар утганд A, B, C гурвалжны талбай хамгийн бага байх вэ?

В-3.
$$\begin{cases} a+b=cd \\ ab=c+d \end{cases}$$
 нөхцлийг хангах хос хосоороо ялгаатай натурал a, b, c, d тоонуудыг ол.

БОЛОВЛУУ

А-1. Бодлогын бодолт

Сүхбаатар аймгийн хөнххэн сумын 8 жилийн дунд сургуулийн 7-р ангийн сурагч Д.Даваачерэнгийн бодолтыг сийрүүлэв.

хавтгай дүрийн шинэ чанарыг ардмн шинэ чанар гэнэг.

Түүнд шулуунуудын параллель байх чанар, хэрчиглэлийн харьцан, цагийн булуудад харьцалгатай чанар зэрэг ордог.

Аливаа гурвалжин бүрийг түүний дүр нь өгөгдсөн гурвалжинтай төстэй гурвалжин байхаар хавтгай руу проекцлогддог. /З.Г.Потман, З.А.Скопец "Задача одна - решение разные" Киев "Радиська школа" 1998 ном үз./

Ийм дээрх бодлогыг зөв гурвалжны хувил бодоход 4 хангацтайг тэмдэглэе. 1

В-3. Бодлогын бодолт

$$(a-1)(b-1) = ab - a - b + 1 = c + d - c - d + 1 = 2 - (c-1)(d-1)$$

$$\text{буюу } (a-1)(b-1) + (c-1)(d-1) = 2$$

болно. a, b, c, d натурал тоо учир зүүн гарын нэмэгдэхүүн хууль бүр 1-тэй зовоо аль нэг нь 0 нөгөө нь 2-той тэнцүү байх а боломжтой. Эхний тохиолдолд $a=b=c=d=2$ болоход хурх учир бодлогын нөхцөл хөршнэ.

$$\text{Харин } \begin{cases} (a-1)(b-1) = 0 \\ (c-1)(d-1) = 2 \end{cases} \text{ системээс}$$

$$1. a=1, b=5, c=3, d=2$$

$$2. a=1, b=5, d=3, c=2$$

$$3. a=5, b=1, c=2, d=2$$

$$4. a=5, b=1, c=2, d=3 \quad \text{гэсэн 4 шийд гарна.}$$

$$\begin{cases} (a-1)(b-1) = 2 \\ (c-1)(d-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-1)(b-1) = 2 \\ (c-1)(d-1) = 0 \end{cases}$$

системээс гүнтэй аргаар 4 шийд, нийтлээ уг бодлого 8 шийдтэй.

В.Адъяасурэн

А1. $x^2 + y^2 = 1989^2$ тэгшитгэлийн явах нэг натурал тоон шийдийг ол.

А2. $x^2 + p_1x + q_1 = 0$, $x^2 + p_2x + q_2 = 0$

бүхэл тоон коэффициенттэй бөгөөд бүхэл тоо биш ерөнхий язгууртай бол $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$ гэх батал.

А3. Гурвалжны АВ, ВС талуудад буулгасан медианууд

m_c , m_a болон $\angle ABC = \beta$ өнцгөөр АВС гурвалжныг байгуул.

В1. Куб нь 1989-оор төгсөх натурал тоо байх уу?

В2. S талбайтай АВС гурвалжинд АЕ, СF медианууд татах, эдгээр медиан дээр М, N цэгийг $ME = 2 \cdot AM$, $FN = NC$ сайхаар авчээ. АМNC дөрвөн өнцөгтийн талбайг ол.

В3. a, b, c, d натурал тоонуудын хувьд $a + c < 1989$,

$$S = 1 - \frac{a}{b} - \frac{c}{d} > 0 \quad \text{бол}$$

$$S > \frac{1}{1989^3} \quad \text{болохыг батал}$$

Бодолтууд

А1. Бодлогын бодолт.

Өгөгдсөн тэгшитгэлийг

$$\left(\frac{x}{1989^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{1989^2}\right)^2 = 1989$$

хэлбэрт оруулж, $x_1 = \frac{x}{1989^2}$, $y_1 = \frac{y}{1989^2}$ оруулж

хлйвэл $x_1^2 + y_1^2 = 1989$ болно.

$$15^2 + 42^2 = 1989 \quad \text{учраас} \quad x_1 = 15, \quad y_1 = 42$$

✓

Ийнхүү $x = 15.1989^e$, $y = 42.1989^2$ нь өгөгдсөн
төгшитгэлийн шийд мөн.

А2. Бодлогын бодолт.

Эхлээд бүх тоон коэффициенттэй $x^2 + bx + c = 0$ төгшитгэл
рационал язгууртай байвал тэр нь заавал бүхэл байна гэж
баталъя. $\frac{p}{q}$ үл хураагдах бутархай $x^2 + bx + c = 0$
төгшитгэлийн язгуур нь байг.

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b \cdot \frac{p}{q} + c = 0 \quad \text{тул} \quad \frac{p^2}{q^2} = -(bp + c \cdot q) \quad \text{болж}$$

бутархай бүхэл тоотой тэнцэхэд хүрн байна. Иймээс q
заавал 1-тэй тэнцүү байна. x_0 нь өгөгдсөн төгшитгэлүү-
дийн бүхэл бие ерөнхий язгуур байг.

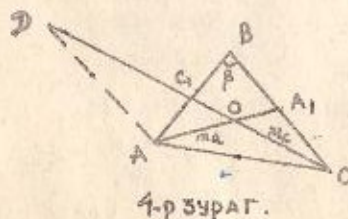
Тэгвэл $x_0^2 + p_1 x_0 + q_1 = 0$, $x_0^2 + p_2 x_0 + q_2 = 0$ болно.

Эндээс $(p_1 - p_2) x_0 + (q_1 - q_2) = 0 \quad (1)$

Дээр баталснаар x_0 нь рационал байж болохгүй учраас
/1/-ээс $p_1 - p_2 = 0$, $q_1 - q_2 = 0$ буюу $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$ гэж
гарна.

А3. Бодлогын бодолт.

вдэвэл $\triangle ABC$ гурвалжныг байгуулагдсан гэж үзье. (4-р зураг)



С цэгийг C_1 цэгийн хувьд
тэгш хэмээр хувиргал.

$$Z_{C_1}(C) = D \quad \text{байг.}$$

$\angle DAB = \angle ABC = \beta$ байх нь илт.

А нэгжээс DO_1 хэрчим β өнцгөөр
харагдах ба $AO = \frac{2}{3} m_2$ байна.

Ийнхүү ABC гурвалжинг байгуулах арга олдог.

Байгуулалт. $2C = m_c$ хэргийг сонгон авч, уул хэргийн β өнцгөөр харагдах цэгийн геометр байрлыг олно. Дараа нь

DO_1 цанраг дээр $CO = \frac{1}{3} m_c$ байх O цэгийг сонгон авч, O цэгт төвтэй $\frac{2}{3} m_a$ радиустай тойрог татаж. Игэхэд гурвалжин

A орой гарна. A цэгийг O_1 цэгийн хувьд тэгш хэмээр хувиргахад B орой гарна. DO_1 цанраг дээр $CO = m_c$ байхаар C оройг олсно. Ийнхүү ABC гурвалжинг байгуулагдана.

Баталгаа, ширхилгээг бие дааж хийгдгээ.

VI. Бодлогын бодолт.

Куб нь 89-өөр төгсөх 2 оронтой тоо олъё. Хэрэв n^3 тоо

9-өөр төгсөх байвал n^3 тоо 9-өөр төгсөнө. Ийм олох тоо

$n = 10k + 9$ дүртэй байна. $1000k^3 + 2700k^2 + 2430k + 729 = 9(100k^3 + 270k^2 + 243k + 81)$

$$n^3 = 1000k^3 + 2700k^2 + 2430k + 729 =$$

$$= 100k + 10(3k+2) + 9 \quad 100(10k^3 + 27k^2 + 24k + 7) + 10(3k+2) + 9$$

Хэрэв n^3 тооны арагтын цифр 8 байвал $3k+2$ нь эсвэл 8, эсвэл

18, эсвэл 28-тэй тэнцүү. Эндээс $k=2$. Куб нь 589-өөр төгсөх

3 оронтой тоо олъё. Бидний олох тоо $n = 100s + 29$ дүртэй байна.

$$n^3 = 100^3 s^3 + 3 \cdot 29 \cdot 100^2 s^2 + 3 \cdot 29^2 \cdot 100 s + 29^3 =$$

$$= 1000s + 100(35s+3) + 89$$

Хэрэв n^3 тооны зуутын цифр 9 байвал $35s+3$ нь эсвэл 9, эсвэл 19,

эсвэл 29-тэй тэнцүү. Эндээс $s=2$.

Куб нь 1989-өөр төгсөх 4 оронтой тоо олъё. Бидний олох

тоо $n = 1000r + 229$ дүртэй байна.

$$35s+3$$

$$n^3 = 1000^3 p^3 + 3 \cdot 1000^2 p^2 \cdot 229 + 3 \cdot 229^2 \cdot 1000 p + 229^3 =$$

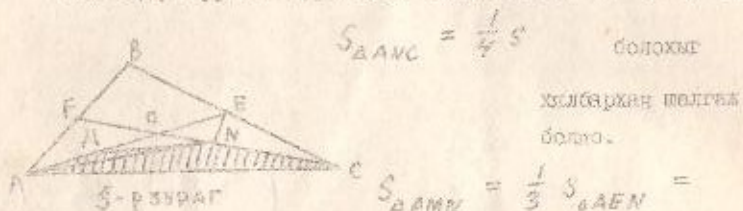
$$= 100000 p + 1000 (3p \cdot 2) + 989.$$

Хэрэв n^3 тооны мянгатын цифр I байвал $3p+2$ нь эсвэл II, эсвэл XI, эсвэл XI-тэй тэнцнэ. Үүнийг $p=1$.

Хийнхү 1229 тооны куб нь 1969 өөр төгсөнө.

12. Бодлогын бодолт.

Холбогдох зургийг зурж зохио тэмдэглээрээ хийе /б-р зураг/



$$= \frac{1}{3} (S - S_{\triangle ABE} - S_{\triangle AEC} - S_{\triangle ANC}) =$$

$$= \frac{1}{3} (S - \frac{1}{2} S - \frac{1}{2} S - \frac{1}{4} S) = \frac{1}{24} S$$

$$\text{Мөнхү } S_{\triangle AMN} = S_{\triangle AMN} + S_{\triangle AEN} = \frac{1}{24} S + \frac{1}{4} S = \frac{7}{24} S \text{ байна.}$$

13. Бодлогын бодолт.

$$a, b, c, d \text{ хөрөг, } a, b, c, d \text{ хөрөг, } a, b, c, d \text{ хөрөг}$$

$$s = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd} > 0 \text{ гэдгээр}$$

$$s = \frac{ad - bc}{bd} > \frac{1}{2d}$$

Хэрэв $bd < 1989^2$ байвал $\frac{1}{2d} > \frac{1}{1989}$ байхыг тогтооно.

$$s > \frac{1}{1989} \text{ байхыг тогтооно.}$$

(10)

$bd \geq 1989^3$ байг. $b \leq d$ гэж үзэхэд лундуурахгүй.

1/ $b \geq 1989$ байг.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \leq \frac{a+c}{b} \leq \frac{1988}{1989} \quad \text{байх учраас}$$

$$S = 1 - \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) \geq 1 - \frac{1988}{1989} = \frac{1}{1989} > \frac{1}{1989^3}.$$

2/ $b < 1989$ байг. Энэ үед $d > 1989^2$ байна.

Энэ тохиолдолд $\frac{c}{d} < \frac{1988}{1989^2}$, $\frac{a}{b} < \frac{1988}{1989}$ 71.

байх учраас $S = 1 - \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \geq 1 - \frac{1988}{1989} - \frac{1988}{1989^2}$

$$= \frac{1}{1989^2} > \frac{1}{1989^3}.$$

$1989^2 = 1988 \cdot 1989 + 1989$
бодлого бодогдов.

$$b \cdot d \geq 1989^3$$

$$\left(\begin{array}{l} b < 1989 \\ \frac{1}{b} > \frac{1}{1989} \end{array} \right)$$

$$\frac{1}{b} > \frac{1}{1989}$$

$$d > 1989^2$$

$$\frac{a}{b} < \frac{1988}{1}$$

$$\frac{1988}{1989}$$

н.

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХУ ОЛИМПИАДЫН
IX АНГИЙН ДӨРӨЙН ДАВААНЫ БОДЛОГО

А.Хамбаатар

А.Ганбаатар

1988-1989 онм хичээлийн жилд IX ангийн олимпиадыг анх удаа дөрвөн даваатайгаар явууллаа. Дөрвийн даваа нь 1989онм 5-р сарын 13,14-ний өдрүүдэд МУИС дээр явагдсан ба түүнд хот,хөдөөгөөс шалгарсан нийт 35 сурагч оролцжээ. Сурагчид хоёре өдөрт тус бүр нь 6 оноотой 6 бодлого бодсон болно.Сурагчид эдгээр бодлогуудыг хэрхэн бодсоныг хүснэгтээр харуулъя.

	A1	A2	A3	B1	B2	B3	Бүгд
Бодлого тус бүрээр авбал зохих оноо	210	210	210	210	210	210	1260
Сурагчдын авсан онооны нийлбэр	52,5	23,5	17,5	57	10	29,5	190
Бодлогыг бүрэн бодсон сурагчдын тоо /6 оноо авсан	1		1	4			6
ББодлогыг бүрэн биш бодсон сурагчдын тоо 2-5,5 оноо	19	7	3	9	1	5	44
Бодоогүй боловч зарим зөв бодлого хийсэн сурагчдын тоо 0,5-1,5 оноо	2	5	7	13	9	26	62

Хүснэгтээс үзэхэд A2, B2, B3 бодлогуудыг бодсон сурагч нагч гарсангүй.Сурагчдын бодолтоос геометрийн A2,B2 болон

Комбинаторикын бодлого бодох чадвар сулавтар байгаа нь харгалдвал.

Одоо дөрвийн даваанд бодуулсан бодлогууд болон бодолтуудтай нь танилцъя.

$$A1. \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{xy}}$$

Тэгшитгэлийн бүх натурал шийдийг ол. / А.Меней, МУИС /

A2. ABC гурвалжны AC тал дээр X цэг авч түүнээс BA, BC талууд дээр буулгасан перпендикуляруудыг суурийг харгалзан M, N гэв. $XMUN$ дөрвөн өнцөгт параллелограмм байх U цэгийг байгуулав.

a/ $BU \perp MN$ гэж батал.

б/ X цэг BC тал дээгүүр гүйхэд U цэгийн үүсэх геометр байрыг ол.

/А.Ганбаатар МУИС/

A3. 1, 2, 3 цифруудийг ашиглан цифруудийн шийлбэр нь 25 байх тоо хэдийг бичиж болох вэ?

/ Баярцогт Дархан /

B1. Хэрвэ нэрэг x, y, z гурван тоо

$$x > 5, 14; \quad x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

нөхцлүүдийг

хэрхэдэг бод эдгээрийн яг нэг нь нэгээс бага гэж батал.

/ Даасай

B2. Гурвалжны талбай $S = \frac{3}{4} R^2 \sin 2\gamma$ байдаг бод түүнийг сагтаасан R радиустай тойрог гурвалжны γ өнцгийн оройг өндүүдийн огтлолцолтой холбосон хэрчмийн дундажлыг дайрна гэж батал.

/А.Ханбаатар МУИС /

B3. $A, A_2, \dots, A_n$ гэсэн ялгаатай долоон цэг тойрог дээр өгөгдсөн аливаа ялгаатай A_i, A_j хоёр цэгийг $A_i A_j$ эсвэл $A_j A_i$ вектороор холбос.

а/ Нийт хичнээн ялгаатай холболт байх вэ?

2/ нэг бүрээс яг гурван вектор эхлэлтэй байх
хичнээн ялгвцатай хойболт байх вэ?

/ П.Баттоттох МУНО/

II бодлогын бодолт.

1 арга / МУНО-ийн математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалт-
тай 9-р ангины сурагч Б.Батнямын бодолт /:

$$(*) \quad \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{1989}}$$

тэгшитгэл нь x, y -ийн хувьд тэгш
хэмтэй учир $y \in X$ гэж эрэмбэлнэ. Тэгвэл

$$\frac{1}{\sqrt{y}} < \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} < \frac{2}{\sqrt{y}} \quad \text{буюу} \quad \frac{1}{\sqrt{y}} < \frac{1}{\sqrt{1989}} < \frac{2}{\sqrt{y}}$$

түүнчлэн тэнцэл биелэлт бэрээр $(*)$ $1989 < y < 4 \cdot 1989$
гэж бичиг болно. Одоо $(*)$ тэгшитгэлээр x -ийг олбол

$$x = \frac{1989y}{y + 1989 - 2\sqrt{1989y}}$$

болох нь нэгэнт $x, y \in M$ учир $1989y$ нь бүтэн
квадрат байх ёстой. $1989 = 9 \cdot 13 \cdot 17$ учир y нь $13 \cdot 17$
гэсэн үржигдэхүүнүүд агуулах ёстой. Бэрээр хэлбэл

$$y = 13 \cdot 17 k^2 = 221k^2, \quad k \in M \quad \text{байх ёстой.}$$

$$(n=) \quad \text{--одоо } 1989 < 221k^2 < 4 \cdot 1989$$

Эндээс $k_1 = 4, k_2 = 5, k_3 = 6$ гэсэн гурван шийд
байх болох нь. $k=5$ хэд нь x нь натурал байх чухалгүй.

$$k=4, k=5 \quad \text{--хэрэглэнэ--} \quad x_1 = 144 \cdot 221, y_1 = 16 \cdot 221;$$

$$x_2 = 36 \cdot 221, y_2 = 36 \cdot 221$$

гэсэн хоёр хос шийд гарна. Эцэст нь $(*)$ тэгшитгэл x, y
--ийн хувьд тэгш хэмтэй учир $x_2 = 144 \cdot 221, y_2 = 144 \cdot 221$
гэсэн яг хос шийд нэмэгдэнэ.

$$x_3 = 16 \cdot 221, y = 144 \cdot 221$$

II арга / бодлогын бодлогын А.Мендеев бодолт /:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{1989}} \right) \Rightarrow \left(\sqrt{1989x} + \sqrt{1989y} = \sqrt{1989} \right) \Rightarrow$$

13.

*1989 y = y
y натурал*

$$(2) 1989(x+y) + 2 \cdot 1989 \sqrt{xy} = xy$$

ху үргээр нь бүтэн квадрат байхаас гадна 1989 -д хуваагдах ёстой болно. Иймд $(**) xy = 1989 \cdot 221 \cdot 5^2$ хэлбэртэй байна. Үүнийг $(*)$ -д орлуулбал

$$1989(x+y) + 2 \cdot 1989 \cdot 3 \cdot 221 \cdot 5 = 1989 \cdot 221 \cdot 5^2 \quad / : 1989$$

$$(***) x+y = 221 \cdot 5 (s-6)$$

$$(s > 6)$$

$x+y \in \mathbb{N}$ учир $s > 6$ болж өсөхөд өөрчлөгдөхгүй болно.

$(**)$ ба $(***)$ тэнцвээс Виетийн теорем ёсоор x, y нь $t^2 - 221s(s-6)t + 9 \cdot 221^2 s^2 = 0$ тэгшитгэлийн шийдүүд болно.

$$\Delta = \sqrt{221^2 s^2 (s-6)^2 - 36 \cdot 221^2 s^2} = 221s \sqrt{s^2 - 12s}$$

$$s^2 - 12s = m^2 \quad \text{үед } \Delta \text{ нь бүхэл тоо байна. Эндээс}$$

$$s = 6 \pm \sqrt{36 + m^2} \quad \text{Нэгэнт } s > 6 \text{ учир } s = 6 + \sqrt{36 + m^2}$$

$$36 + m^2 = n^2 \quad \text{байх бүх } m \text{ тоо } s \text{ -ийг тодорхойлно.}$$

$$36 = n^2 - m^2 = (n-m)(n+m) \quad \text{Эндээс } n_1 = 10, m_1 = 8;$$

$$n_2 = 6, m_2 = 0 \quad \text{гэсэн 2 хос шийд олдоно.}$$

$$1/ \quad n=6, m=0 \quad \text{бол } s=12. \text{ Энэ үед}$$

$$x=y=1989 \cdot 4$$

$$2/ \quad m=8, n=10 \quad \text{бол } s=16. \text{ Энэ үед}$$

$$\Delta = 221 \cdot 16 \cdot 8; \quad t_1 = 221 \cdot 16 \cdot 9; \quad t_2 = 221 \cdot 16$$

$$\text{буюу } x = 221 \cdot 16 \cdot 9; \quad y = 221 \cdot 16$$

$$x = 221 \cdot 16; \quad y = 221 \cdot 16 \cdot 9$$

III арга. Сигнелийн адил $\sqrt{xy}$ нь бүхэл тоо байхыг харуулна.

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \alpha \quad \text{гэвэл} \quad \sqrt{x} = \alpha \sqrt{y} \quad \text{буюу} \quad \sqrt{xy} = \alpha y$$

болно. Нэгэнт $\sqrt{xy}$ бүхэл тоо учир α рационал болно.

$$(m, n) = 1$$

$$(m+n, n) = 1$$

$$((m+n)^2, n^2) = 1$$

$$\sqrt{y} = \frac{\sqrt{x}}{\alpha} \quad \text{тэнцлээс} \quad \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\alpha}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{1989}} \quad \text{буюу}$$

$$x = 1989(\alpha+1)^2, \quad \text{мөн} \quad y = \frac{x}{\alpha^2} \quad \text{учир}$$

$y = 1989(1 + \frac{1}{\alpha})^2$ гэж гарна. α рационал учир түүнийг $\frac{m}{n}$ хэлбэртэй үл хураагдах бутархай/харилцан анхны/ маягтайгаар илэрхийлж болно. Энэ үед $(\alpha = \frac{m}{n})$

$$x = 1989 \frac{(m+n)^2}{n^2}; \quad y = 1989 \frac{(m+n)^2}{m^2}$$

болох ба

m, n харилцан анхны учир $(m+n)^2, n^2$ болон

$$(m+n)^2, m^2$$

, мөн харилцан анхны байх бөгөөд. Иймээс

$$1989 = 9 \cdot 13 \cdot 17$$

$$m^2, n^2 \text{ мөн}$$

хувьд хэлбэртэй

$$m = n = 1$$

$$m = n = 3$$

сөр дүр
болохгүй,
м.

$$1989 \mid m^2, \quad 1989 \mid n^2$$

$$\text{буюу } m=1, m=3,$$

$$n=1, n=3$$

байх болно.

$$a/ (m=n=1) \Rightarrow \alpha=1, \quad x=1989 \cdot 4, \quad y=1989 \cdot 4$$

$$b/ (m=1, n=3) \Rightarrow \alpha=3, \quad x=1989 \cdot 16, \quad y=221 \cdot 16$$

$$b/ (m=3, n=1) \Rightarrow \alpha=\frac{1}{3}, \quad x=221 \cdot 16, \quad y=1989 \cdot 16$$

$$r/ (m=3, n=3) \Rightarrow \alpha=1, \quad x=1989 \cdot 4, \quad y=1989 \cdot 4$$

А2. Бодлогын бодолт

Бодлогын а/ хэсгийг нэлээд сурагчид зөв бодсон боловч б/ хэсгийг бүрэн зөв бодсон сурагч нэг ч гараагүй юм. Иймд зөвхөн зохиогчийн бодолтыг харуулъя.

A, B, C оройнуудаас буулгасан өндүүдийн суурийг харгалзан Q, R, P гэв. AB талын хувд төгсхөнгөй хувиргахад гарах C, X, R цэгүүдийн дүрийг харгалзан

C', X', R' мөн BC талын хувд төгс хэмтэй хувиргахад гарах A, R, X цэгүүдийн дүрийг харгалзан A', R', X' гэв. Төгсгөө R', P, Q, R'' цэгүүд нэг шулуун дээр оршино.

Учир нь $\angle RQC = \angle CQR$,

$$\angle RQC = \angle PRQ$$

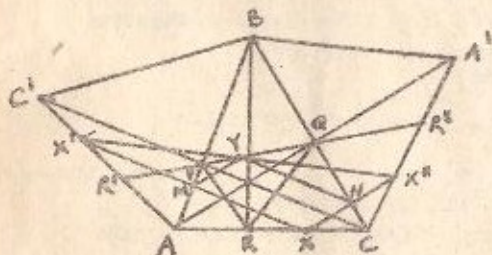
тэнцүүдээс $\angle PRQ = \angle CQR$ буюу R, Q, R'' цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэдэг гарна. Үүнтэй адил A, Q, A'

цэгүүд нэг, шулуун дээр оршихыг харуулна.

а/ MY ба NY нь $X'X''$ гурвалжны дундаж нутаг-
мууд болох учир Y цэг $X'X''$ хэрчмийн дундаж дээр
оршино. $BX = BX'$, $BX = BX''$ учир $BX' = BX''$. Эндээс
 $BY \perp X'X''$ гэж гарах ба $X'X'' \parallel MN$ учир $BY \perp MN$.

б/ Y цэг PQ хэрчим дээр оршино гэж харуулъя.

$\angle ARP = \angle CRQ$ учир AC нь QR, PR шулуунууд-
даар үүсэх өнцгийн биссектрис болно. Иймд X цэг PR, QR
шулуунуудаас ижил зайнд алслагдана. Эндээс X' цэгээс PR'
хүртэлх зай X'' цэгээс QR'' хүртэлх зайтай тэнцүү



X', X'' цэгүүд PQ шулуун хойр талд түүгээс ижил зайнд
алслагдан орших учир $X'X''$ хэрчмийн дундаж цэг болох
 Y нь PQ дээр оршино. X цэг A -тай давхцахад
 Y цэг Q -тэй давхцах ба X цэг C -тэй давхцахад
 Y цэг P -тэй давхцана. Иймд X цэг A -аас C
хүртэл AC хэрчмийг зурахад Y цэг Q -ээс P хүртэл
 QP хэрчмийг зурах болно. Эцэст нь PQ хэрчмийн бүх цэг
 Y цэгийн геометр байрт харьяалагдана гэж харуулах хэрэг-
тэй. Үүнийг эсрэгээр нь хялбархан харуулж болно.

13 бодлогын бодолт

Энэ бодлогыг Улаанбаатарын 1-р сургуулийн сурагч
О.Зоригт ганцаараа зөв боджээ.

1 ярг. О.Зоригтын бодолт

$A_{m,n}$ -ээр аравтын бичлэгтэй m ширхэг 3, n ширхэг 2 агуулсан ба бодлогын нөхцөл хангасан тоог тэмдэглэе. Тэгвэл $A_{m,n}$ тоо нь $25-3m-2n$ ширхэг 1-ийн цифр агуулах ба $m+n+(25-3m-2n)$ буюу $25-2m-n$ оронтой тоо байна. $A_{m,n}$ тоонм цифруудийн нийлбэр 25 учир $0 \leq m \leq 8$ ба

$$0 \leq n \leq \left[\frac{25-3m}{2} \right]$$

нөхцлүүд биелэх ёстой. $A_{m,n}$ -тэй ижил m ширхэг 3, n ширхэг 2 агуулсан тоонуудын нийт тоо нь

$C_{25-3m-n}^m \cdot C_{25-3m-n}^n$ -тэй тэнцүү. Учир нь $25-2m-n$ оронгийн m нь 3, үлдэх $25-3m-n$ оронгийн n нь 2-ийн цифр байна. Эцэст нь бодлогын нөхцөл хангах тоонуудын нийт тоог олбол

$$N = \sum_{m=0}^8 \sum_{n=0}^{\left[\frac{25-3m}{2} \right]} C_{25-2m-n}^m \cdot C_{25-3m-n}^n$$

болно.
 .П арга. / Зохлогчийн бодолт/Зөвхөн 1, 2, 3 гэсэн цифруудийн тусламжтайгаар бичигдсэн, цифруудийн нийлбэр нь n -тэй тэнцэх тоонуудын нийт тоог F_n гэвэл

$$F_1 = 1, F_2 = 2, \{11; 2\}$$

$$F_3 = 4 \{111, 12, 21, 3\}$$

ба $n \geq 4$ үед $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3}$ байна. Учир нь дээрх нөхцлийг хангах цифруудийн нийлбэр нь n -тэй тэнцүү тооны сүүлчийн цифр нь 1, 2 эсвэл 3 байна. Сүүлчийн цифр нь 1 байх тийм тоонууд нь цифруудийн нийлбэр нь $n-1$ -тэй тэнцэх ба зөвхөн 1, 2, 3 гэсэн цифруудийн тусламжтай бичигдсэн тоонуудын төгсгөлд 1 -ийн цифр нэмж бичихэд үүснэ. Иймд

18.

$$F_4 = F_3 + F_2 + F_1 = 4 + 2 + 1 = 7$$

$$1111, 112, 121, 13, 21, 211, 22$$

сүүлчийн цифр нь 1 байх тийм тоонуудын нийт тоо нь F_{n-1}

-той тэнцүү. Үүнтэй адил сүүлчийн цифр нь 2 ба 3 байх тийм тоонуудын нийт тоо нь харгалзан F_{n-2} ба F_{n-3} -тай тэнцэнэ. Эндээс

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3}$$

гэсэн рекуррент томьёо гарна. Эцэст нь энэхүү томьёог ашиглан $F_{25} = 2555757$ болохыг төвөггүй гаргаж болно.

Б1. Бодлогын бодолт.

Б1 бодлого нь бусдыгаа бодвол харьцангуй амархан байсан учир нэлээд сурагчид зөв бодсон байна.

1 арга. Улаанбаатар хотын 1-р сургуулийн Б.Доржсүрэнгийн бодолт:

x, y, z нь бодлогын нөхцлийг хангадаг тоонууд байг. x, y, z нь зөрөг тоонууд учир дуудлуудын тухай теорем ёсоор

$$x + y + z > 3\sqrt[3]{xyz} > 3\sqrt[3]{5,14} > 3 \quad \text{Нэгэнт}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > x + y + z \quad \text{учир} \quad \text{мөн} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 3$$

тэнцэл бие биелэх ёстой.

$$(x-1)(y-1)(z-1) = xyz - (xy + yz + xz) + x + y + z - 1 =$$

$$= xyz - xyz\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + x + y + z - 1 <$$

$$< xyz - xyz\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1 =$$

$$= xyz - (xyz - 1)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 1 <$$

$$< xyz - (xyz - 1) \cdot 3 - 1 = 2 - 2xyz < 2 - 2 \cdot 5,14 < 0.$$

$$(x-1)(y-1)(z-1) < 0$$

тэнцэл бие гурван үржигдэхүүн гурвуулаа сөрөг эсвэл яг нэг нь сөрөг үед биелнэ. Эсвэл $x-1 < 0$, $y-1 < 0$, $z < 0$

Бод $xyz < 1$ болоход хурч бодлогын нөхцөлд хариулаа. Иймд x, y, z -ийн яг нэг нь нэгээс бага байна.

Дарга. ИИС-ийн математикийн гүйцэтгүүлсэн сургалттай 5-р ангийн сурагч н.Латинны бодолт /:

Хэрэв x, y, z тоснууд нь бодлогын нөхцөлийг хангаж бая тунгуулаас нэгэн зэрэг 1-ээс их эсвэл нэгэн зэрэг 1-ээс бага байх болохгүй нь элэрхий. Иймд хоёр нь нэгээс бага, нэг нь 1-ээс их байх болохгүй гэх заруулаас хяналттай. Зэрэгтээ нь $x > 1 > y > z$ ойлдог гэв. Тэгвэл

$x y z > 5,14$ тэнцэл бишээс $x > \frac{5,14}{yz}$ буюу $\frac{1}{x} < \frac{yz}{5,14}$ гэж гарна.

$$\left. \begin{aligned} z < 1 &\Rightarrow y > yz \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{yz} \\ y < 1 &\Rightarrow z > yz \Rightarrow \frac{1}{z} < \frac{1}{yz} \end{aligned} \right\} \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{2}{yz} < \frac{5,14}{yz} < x$$

$$\left. \begin{aligned} y > yz \\ z > yz \end{aligned} \right\} y + z > 2yz > \frac{yz}{5,14} > \frac{1}{x}$$

Сүүлийн хоёр тэнцэл бишээс

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{x} + \frac{1}{z} < x + \frac{1}{x} < x + y + z$$

боях бодлогын нөхцөл хариулав. Ийм бодлогын нөхцөлийг хангасан x, y, z тоснууд олддог л нь бая зарчгийн яг нэг нь нэгээс бага байна.

Эд бодлогын бодолтын бодлогыг нэг ч сурагч боддог учир зохиогчийн бодолтыг хяруулав.

Гурвалжин өндөр /үргэлжлэл нь бие/ багтасан тойрогтой огтлолох нь уг гурвалжин нохойс өмцөгтэй байх гарцалгүй бөгөөд хүрэнцрэгтэй нөхцөл байдаг. Гэтэл нохойс өмцгийн оройгоос буусан өндөр багтасан тойрогтой огтлолдоггүй тул $\oint$ өмцгийг мөхөөс гэхэд бодолт ливцуурдах жигүй.

Гурвалын оройг A, B, C гээд тэдгээр орой дахь дотоод өнцгийг харгалзуулан α, β, γ ; өндүртэйг өггөснийг H , C оройгоос татсан өндрийн суурийг M , CH хэрчимийн тойрогтой огтлолцсон цэгийг N гэвэл $CH = NH$ гэж батлах ёстой байна.

Харилцан перпендикуляр талтай өнцгийн чанараар $\angle ANC = \pi - \beta$; тойрог дээр оройтой өнцгийн чанараар $\angle ABC = \angle ANC$ тул $\angle ANC = \pi - \beta$. Ийнхүү $\triangle ANH$ адил хахуутай болохоор AM өдөр нь мөн цөмийн болно. Тэгвэл

$$HM = MN$$

$$\text{буюу } NH = 2HM \quad (1)$$

$\triangle AMC$ -ын M оройн өнцөг

$$\frac{\pi}{2} \text{ учраас}$$

$$\angle MCA = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Мөн зөрчөөр

$$\angle CAM = \frac{\pi}{2} - \gamma$$

Гэтэл гурвалжын өндрүүдийн огтлолцол H , A, C оройг дайрсан тойргийн радиус мөн R байх учраас

$$CH = 2R \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = 2R \cos \gamma \quad (2)$$

Тэгш өнцөгт гурвалжын $\triangle AMC$ -ээс

$$CM = b \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = b \sin \alpha = 2R \sin \beta \sin \alpha \quad (3)$$

Бодлогын нөхцөл $S = \frac{3}{4} R^2 \sin 2\gamma$ байсан тул

$$2R^2 = \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{3}{4} R^2 \sin 2\gamma,$$

$$\sin 2\gamma = 2 \sin \gamma \cos \gamma$$

байгаарай

$$4 \sin \alpha \sin \beta = 3 \cos \gamma$$

Гүйцэтгэвэл (2) (8) нөхцлөөс

$$\frac{CH}{CM} = \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{4}{3}$$

Буюу

$$3CH = 4CM$$

(1) нөхцлийг өмгөглөхөд

$$3(CN + NH) = 4(CN + NM) = 4(CN + \frac{1}{2}NH)$$

Эндээс

$$3CN + 3NH = 4CN + 2NH$$

тул

$$NH = CN$$

Б 3. Бодлогын бодолт.

Б3 бодлогыг мөн нэг ч зурагч гүйцэд бодоогүй учир зохиогчийн бодолтыг харуулъя.

а/ 7 цэгийг хос хосоор нь холбосон хэрчимийн нийт тоо нь

$$C_7^2 = 21 \quad \text{байна. } A_i, A_j \text{ хэрчиг бүрээс ялгаа-}$$

тай хоёр вектор $(\vec{A_i}, \vec{A_j}, \vec{A_j}, \vec{A_i})$ үүсгэж болох учир нийтдээ 2^{21} ширээг ялгавтай холболт байх болно.

б/ Бодлогын өгүүлбэрийг дараах маягаар өөрчлөхөд танарын ялгаа гарахгүй. Долоон натарчин төмдөөн хийв. Натарчбур нь гурав хожих, гурав хожигдсон байх нийт болох хийх тоог ол. Энд бид цэгүүдийг натарчнаар сольсон ба хэрвэ A_i, A_j цэгүүд $\vec{A_i}, \vec{A_j}$ векторуор холбогдсон бол A_i натарчина A_j натарчинад хожигдсон гэдгээр тус тусад нь хэрэглэв.

Бодлогын нөхцөл босоор аль ч хоёр натарчин нь хоорондоо хайшлаггүй байх бэртэй. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5

матарчдын хоорондын тогтолтыг авч үзвэл 0 ба 4 оноо авсан нэг ч матарчин байх болохгүй. Хэрвээ Энэ таван матарчдын хоорондын тоглолтонд хэн нэг нь 0 оноо авбал тэр матарчин эцсийн дүнд 2-оос илүү оноо авч чаднахгүйд хүрнэ. Иймд энэ таван матарчдын хоорондын тоглоглолтоос гарах онооны үзүүлэлт нь 2, 2, 2, 2, 2 эсвэл 1, 2, 2, 2, 3 эсвэл 1, 1, 2, 3, 3 байх болно.

1/ A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 матарчинд бүгдээрээ 2 оноо авсан байх

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1		1	0		
A_2	0		1		
A_3	1	0			
A_4					
A_5					

бүх боломжийн тоог олж. Хэрвээ A_1, A_2, A_3 матарчдын хоорондын тоглоглолтын дүнд тус бүр нь 1 оноо авсан бол A_5 мөрөнд хоёр 1, хоёр 0 -ийг дураар тавьж болно. Энэ үед бусад мөр бичигдэж үзгэж утгатай бөгөөд дөнгө. A_1, A_2, A_3 матарчдын тоглоглолтонд тус бүр нь 1 оноо авах 2 боломж. A_5 мөрийг

бэллэх C_4^2 ширхэг болох байх учир энэ тохиолдолд нийтдээ $2 \cdot C_4^2 = 12$ боломж байна.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1		0	0	1	1
A_2	1		0		
A_3	1	1		0	0
A_4	0		1		
A_5	0		1		

A_1, A_2, A_3 матарчдын хоорондын тоглоглолтоос нэг нь 0, нэг нь 1, урва дахь нь 2 оноо авсан байх 6 боломж өгнө. A_4 нь 0, A_5 нь 1, A_3 нь 2 оноо авсан байх. Энэ үед A_1, A_2 мөрийд яууд нэгэн утгатай бөгөөд дөнгө.

A_2 - мөрийг бэллэх хоёр боломж байх, тухай бүр нь A_4, A_5 мөрийд нэгэн утгатай бөгөөд дөнгө.

Иймд энэ тохиолдолд нийтдээ $6 \cdot 2 = 12$ боломж байна. Дээрх тохиолдлуудыг нэгтгэвэл A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 матарчинд тус бүр нь 2 оноо авсан байх боломж нийтдээ 24 байх нь. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 матарчинд хоорондын

тогмолтоосоо ижил 2 оноо авсан үед A_7 мөрөнд гураван 1,

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_1	■	0	0	1	1		
A_2	1	■		0	1	0	
A_3	1	1	■	0	0		
A_4	0	0	1	■	1		
A_5	0	1	1	0	■		
A_6						■	
A_7							■

гураван 0-ийг дурдвар тавьх болох
ба энэ үед бусад хүднүүд нэгэн
утгатай бөгөөдөгдөнө. Иймд энэ
тохиолдлоос гарах нийт боломжийн
тоо нь

$$24 \cdot C_6^3 = 480$$

болно.

2/ A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 хатарчдын
нэг нь 1, гурав нь 2, нэг нь 3
оноо авсан тохиолдлуудыг авч үзье.

Нийтдээ 20-ийн тохиолдол бий. Туухийн тохиолдолд A_1 нь 1,
 A_2, A_3, A_4 нь 2, A_5 нь 3 оноо авах боломжийн
тоог олъё.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	■	1	0	0	0
A_2	0	■	1		
A_3	1	0	■		
A_4	1			■	
A_5	1				■

Хэрэв A_1, A_2, A_3 хатарчдын хоорондын
тогмолтийн дүнд тус бүр нь 1 оноо
авсан бол 1-ийн хоёр тохиолдол бий/
 A_1 мөрийн үлдэх хоёр нүд нэгэн
утгатай бөгөөдөгдөнө. Энэ үед A_5
мөрөнд бөгөөдөгдөөгүй 3 нүд үлдэх
ба эдгээрийн нэгэнд нь 0-ийг,
хоёрт нь 1-ийг дурдвар тавихад
үлдэх хүднүүд нэгэн утгатай бөгөөд-
дөнө. Иймд энэ тохиолдлод нийтдээ

$$2 \cdot C_3^2 = 6$$

болох байна.

Үүнтэй адиллаар A_1, A_2, A_3 хатарчдын хоорондын тогмолтод
 A_1 нь 0, нөгөө хоёрын нэг нь 1, нөгөө нь 2 оноо авсан
үед нийт 6 боломж, ийм A_1 нь 1, нөгөө хоёрын нэг нь
0, нөгөө нь 2 оноо авсан үед нийт 6 боломжтойг хийсвэр-
хэн олно. Дээрх тохиолдлуудад нэгтгэвэл $6 + 6 + 2 = 14$
болох ба эцсийн дүнд $14 \cdot 20 = 280$ болохыг гаргаж. Хэрэв
 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 хатарчдын хоорондын тогмол-
тоос A_1 нь 1, A_2, A_3, A_4 нь 2, A_5 нь 3 оноо авсан
бол A_1 мөрийн үлдэх хоёр нүдэнд 1, A_2 мөрийн үлдэх

хоёр нүдэнд 0 байх

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_1	1	0	0	0	1	1	
A_2	0	1	0	1	1		
A_3	1	1	1	0	0		
A_4	1	0	1	1	0		
A_5	1	0	1	1	1	0	0
A_6	0				1	1	
A_7	0				1		1

бөтөн болно. Энэ үед A_7 мөрөнд бөглөгдөөгүй 4 нүд үлдэх ба үүний хоёрт нь 0, хоёрт нь 1-ийг дураар тавихад бусад бүх хоосон нүд нэгэн утгатай бөглөгдөнө. Иймд энэ тохиолдолд

$$C_1^6 = 6$$

боломж байна.

Дээрхтэй адил 280 тохиолдол байх учир эцсийн дүнд

$$280 \times 6 = 1680$$

боломж байх нь.

3/ A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 шатарчдын хоёр нь 1, нэг нь 2, хоёр нь 3 оноо авсан тохиолдлуудыг авч үзье. Иийгдээ 36-ийн тохиолдол байх.

Тухайн тохиолдолд A_1, A_2 нь 1, A_3 нь 2, A_4, A_5 нь 3 оноо авсан байх боломжийн тоог олъё.

A_6, A_7, A_8 шатарчдын хоосронд тоглогдсоор тус бүр нь 1 оноо авсан байх тохиолдолд нийт 4 боломж, A_5 нь 2 нөгөө хоёр нь нэг нь 0, нөгөө нь 1 оноо авсан үед мөн 4 боломж байна. Иймд нийтдээ

$$8 \times 30 = 240$$

боломж байна. A_1, A_2 нь 1, A_3 нь 2, A_4, A_5 нь 3 оноо авсан үед үлдэх хоосон нүдүүдийг бөглөх 2 боломж байна. Иймд дээрх тохиолдолд нийтдээ $240 \times 2 = 480$ боломж байх нь эцэст нь бүх 1, 2, 3 тохиолдлуудыг нэгтгэнэл

$$480 + 1680 + 480 = 2640 \text{ болно.}$$

25

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_1	1	0	0	0	1	1	
A_2	0	1	0	0	1	1	
A_3	1	0	1	0			
A_4	1	1	0	1	0	0	
A_5	1	1	1	0	1	0	0
A_6	0	0		1	1	1	
A_7	0	0		1	1		1

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХҮҮ ОЛИМПИАДЫН
Х АНГИЙН В ДАВАЛЫН БОДЛОГУУД

Ц.Дашдорж, А.Хадзуу

- А1. $|1+x| - |1-2x| + |1+3x| = 1$ тэгшитгэлийг бод.
 А2. 52 модтой хэврээс 10-ыг авахад түүнд өнгө бүрээс мод орсон байх боломжийн тоог ол.

- А3. ABC гурвалжны хавтгайд орших P, Q цэгүүдийн хувьд

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{BP}{BQ} = \frac{CP}{CQ}$$

тэнцэл биелдэг бол PQ шулуун ABC гурвалжинг багтаасан тойргийн тэвийг дайсна гэж батал.

Б1.

$$1989 \frac{1}{1000} + 1991 \frac{1}{1000} + 1993 \frac{1}{1000} + 1995 \frac{1}{1000}$$

ба

$4 \cdot 1992 \frac{1}{1000}$ тоонуудыг жин.

- Б2. 16 радиустай дугуйд 650 цэг өгчээ. Эдгээрээс 10 цэгийг нь дотод радиус нь 2, гадаад радиус нь 3 байх цагиргаар бүрхэж өслөхийг батал.
 Б3. O нь $SABC$ тетраэдр багтоон биембэргийн төв ба AS нэмэг OS шулуунд перпендикуляр бол SOB, SOC хавтгайнуудын хоорондох өнцгийг ол.

Бодвал

$$\begin{aligned} \text{А1. } & |x+1| - |(-2) \cdot (x - \frac{1}{2})| + |3(x + \frac{1}{3})| = \\ & = |x+1| - 2|x - \frac{1}{2}| + 3|x + \frac{1}{3}| \quad (*) \\ & x - \frac{1}{2} < x + \frac{1}{3} < x+1 \end{aligned}$$

учир дараах тохиолдлуудыг авч үзье.

а/ (*) -ын бүх нэмэгдэхүүн сөрөг $\Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$ бол

$$-x-1-2\left(-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)-3\left(x+\frac{1}{3}\right)=1$$

$$-2x-3=1, \quad x=-2 \quad \text{ба} \quad x < -1 \quad \text{учир}$$

$$\boxed{x=-2}$$

б/ (*) -ын их нь сөрөг бий бусад нь сөрөг $\Leftrightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} x+1 \geq 0 \\ x+\frac{1}{3} < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow -1 \leq x < -\frac{1}{3} \quad \text{бол}$$

$$x+1-2\left(-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)-3\left(x+\frac{1}{3}\right)=1$$

$$-1=1$$

эерчил

в/ бага нэмэгдэхүүн нь сөрөг бусад нь сөрөг бий $\Leftrightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} x-\frac{1}{2} < 0 \\ x+\frac{1}{3} \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2} \quad \text{бол}$$

$$x+1+2x-1+3x+1=1$$

$$6x=0, \quad x=0 \quad \text{ба} \quad -\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2} \quad \text{учир}$$

$$\boxed{x=0}$$

г/ бүх нэмэгдэхүүн сөрөг бий $\Leftrightarrow$

$$x-\frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$x+1-2x+1+3x+1=1$$

$$2x=-2, \quad x=-1 \quad \text{ба} \quad x \geq \frac{1}{2} \quad \text{учир} \quad \text{эерчил}$$

• Иймд иймд нь $\{-2, 0\}$ болно.

12. I бодолт. Сонгох явсан 10-тэй бүтэн нь

$$(1,1,1,7), (1,1,2,6), (1,1,3,5), (1,1,4,4), \dots$$

хэлбэртэй байх болно. Энд $(1,1,2,6)$ нь явсан 10-тод нэг өнгөөс нь 6, нөгөө өнгөөс нь 2, үлдэх хоёр өнгөөс нь 1, 1 код бүрэн тийм бүтцийг авана. Тэгвэл яам бүтцийг 10-тэй тоо

$$P(1,1,2,6) = C_4^1 C_3^1 C_2^2 (C_1^1)^2$$

Үүний адилар $P(1,1,1,7) = C_4^1 C_3^2 (C_1^1)^3$ болно.

$$P(1,1,4,4) = C_4^2 (C_3^1)^2 (C_1^1)^2, \dots$$

Нягцтай бүтэц бүхий 10-тууд үн огтлолцох тул энэ бүгдийг хооронд нь нэмж бүх боломжоо олно. Бүтцийн тоо нь 4 яам хайрцагт 6 адил бөмсөгнийг сайруулах боломж болно.

II бодолт. Одоо тооцох ба энэ тооцох зарчим хэрэглэн яам бодохыг үзүүлнэ.

$S = \{x_1, \dots, x_{10}\} = \sigma \mid i \neq j \text{ бол } x_i \neq x_j, x_i = \overline{i, 5i}\}$ - сонгох болох бүх 10-туудыг тогтох универсал олонлог $|S| = C_{10}^{10}$

$$X_1, X_2, X_3, X_4$$

нь буудан, дөрвөлжин, цэцэг, гүмүүлийн олонлог байг.

$$|X_i| = 13$$

$$A_i = \{\sigma \in S \mid \exists x_j \in \sigma, x_j \in X_i\}$$

тухайлсал A_3 нь

цэцэг агуулсан 10-туудын олонлог байг.

Иймд манай олбол зохих бүх 10-туудын олонлог нь $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ - таа давхцана.

$$|\bar{A}_i| = C_{39}^{10}, |\bar{A}_i \cap \bar{A}_j| = C_{26}^{10} \quad \text{байх үед}$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = |S \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)| =$$

$$= |S| - |\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3 \cup \bar{A}_4| = |S| - \sum |\bar{A}_i| +$$

$$+ \sum |\bar{A}_i \cap \bar{A}_j| - \sum |\bar{A}_i \cap \bar{A}_j \cap \bar{A}_k| + |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4| =$$

$$= C_{52}^{10} - C_4^1 \cdot C_{39}^{10} + C_4^2 \cdot C_{26}^{10} - C_4^3 \cdot C_{13}^{10} + C_4^4 \cdot C_0^{10}$$

болно.

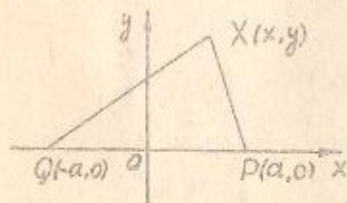
28. Эхлээд дараах туслах чанарын лемм батлан.

Лемм. Хавтгай дээр P, Q нэгүүд ба $\lambda > 0$ тоо өгөгдсөн гэе. Тэгвэл $\frac{PX}{QX} = \lambda$ нөхцлийг хангах X нэгүүдийн геометр байр нь

(a) $\lambda \neq 1$ үед тойрог гарах ба тойргийн төв нь PQ шулуун дээр оршино. (b) $\lambda = 1$ үед шулуун гарна.

Баталгаа. Тэгш өнцөгт координатын системийг абсолют тэнхлэг нь PQ шулуунтай давхцсан ба координатын эх PQ хөрчмийн дундаж дээр байхаар сонгоё. / Зүрэг хар $P(a, 0), Q(-a, 0), X(x, y)$ гэдгээр тэмдэглэв.

Тэгвэл $PX = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$, $QX = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$



болно.

Эдгээрийг өгөгдсөн нөхцөл орлуулбал

$$(x-a)^2 + y^2 = \lambda^2 (x+a)^2 + \lambda^2 y^2$$

буюу

$$(\lambda^2 - 1)x^2 + 2(\lambda^2 + 1)ax + (\lambda^2 - 1)y^2 + \lambda^2 a^2 - a^2 = 0$$

(a) $\lambda \neq 1$ бол $x^2 + 2 \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1} ax + y^2 + a^2 = 0$

$$(x+a_0)^2 + y^2 = R_0^2$$

29.

гэх тойргийн тэнгитгэл гарч байна.

$$(Энд \quad a_0 = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1} a, \quad R_0 = \frac{2\lambda a}{\lambda^2 - 1})$$

Тойргийн төв $(-a_0, 0)$ нь OX тэнхлэг дээр өөрөөр хэлбэл PQ шулуун дээр оршино.

$\langle (a_0, 0), R_0 \rangle$ тойрог дээр A, B, C бүгд оршино. Гэтэл энэ тойргийн төв нь PQ дээр оршино.

(б) $\lambda = 1$ бол $4ax = 0$ буюу $x = 0$ гэх шулуун гарч байна.

Одоо бодлого бодъё.

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{BP}{BQ} = \frac{CP}{CQ} = \lambda \quad \text{гэвэл } \lambda \neq 1 \quad \text{байна.}$$

Эсрэг тохиолдолд A, B, C цэгүүд 1 шулуун дээр оршиод хүрнэ. Иймд эмнэх жемнээс бодлого шууд бодогдоно.

($X=A, X=B, X=C$ гэх ав)

VI. Дүрэм. $0 < a < b$ ба $a + b =$ тогтмолын үед a, b нь

$$\text{ойртоход } a^k + b^k = \begin{cases} \text{еснө, Хэрэв } 0 < k < 1 \\ \text{буурна, Хэрэв } k > 1 \end{cases}$$

Энэ дүрмийг угсарч хэрэглэвэл ($k = \frac{1}{1000}$ гөл)

$$a_1 = 1989, a_2 = 1991, a_3 = 1993, a_4 = 1995 \quad \text{байх}$$

үсийн утга нь $a'_1 = a'_2 = a'_3 = a'_4 = 1992$ гээ ойлгоон үсийн утгавсаа бага байх ёстой. Иймд

$$1989^{\frac{1}{1000}} + 1991^{\frac{1}{1000}} + 1993^{\frac{1}{1000}} + 1995^{\frac{1}{1000}} < 4 \cdot 1992^{\frac{1}{1000}} \quad \text{болно.}$$

82. Цэг бүр дээр төвтэй $(2, R) = (2, 2)$
 радиустай бүхий цагирагуудыг байгуулъя. Тэгвэл и-
 гэхэд үүссэн дүрс нь 19 радиустай дугуйд багтах
 ба

$$9\pi 49^2 < 650\pi(3^2 - 2^2) = 5 \cdot 650\pi$$

болно.

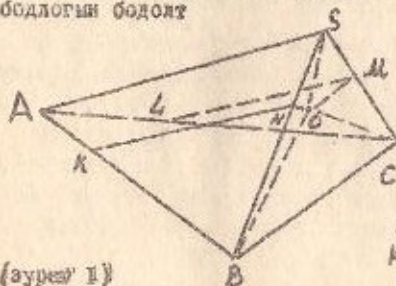
Эндээс 10 цагирагт орсон X цэг олдоно. Эдгээр
 цагирагууд нь M_i ($i = 1, 70$) дээр төвтэй байна,
 гэвэл

$$2 \leq M_i X \leq 3$$

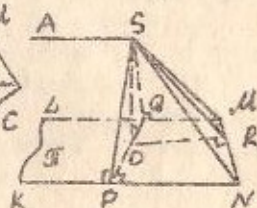
байна. Иймд X дээр төвтэй

$(2, R) = (2, 3)$ цагирагт M_i бүр орно.

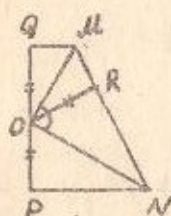
89 бодлогын бодолт



(Зураг 1)



(Зураг 2)



(Зураг 3)

OS -д перпендикуляр, O
 цэгийг дайрсан π хавтгай
 татъя.

π ба OBS , π ба DCS ,

π ба ABS , π ба ACS

хавтгайнуудын огтлолд харгалзан

ON , OM , NK , ML

шулуунууд гарсан гэе. /Зураг 1-г
 хар /

Тэгвэл $(AS) \parallel (LM) \parallel (KN)$ байх нь илт.

Бидний олох өндөр нь $\angle NOM$ болно. S цэгээс

KN , LM , NM шулуунууд дээр буулгасан перпен-
 дикуляруудын суурийг харгалзан P, Q, R гээ.

1

31.

/ зураг 2-ыг хар / Тэгвэл P, O, Q цэгүүд нэг шулуун дээр орших ба OPS, OQS, ORS тэгш өнцөгт гурвалжууд тэнцүү болно. Учир нь эдгээр гурвалжуудын OS катет ерөнхий, O цэгээс PS, QS, RS хэрчмүүд хүртэлх зайнууд тэнцүү бэлээ. / Энэ зай нь пирамидад багтсан сөмбөрцгийн радиус болохыг анхаар /

Иймд $OQ = OP = OR$ болно. Эндээс OQM ба ONR , OPN ба ORN гурвалжууд хос хосоороо тэнцүү болох ба / зураг 3-ыг хар / түүнийг тооцвол

$$\angle QOM = \angle MOR, \angle RON = \angle NOR \text{ гэж гэрнэ. Иймд}$$

$$\angle QOM + \angle MOR + \angle RON + \angle NOR = \pi$$

буюу

$$2\angle MON = \pi \Rightarrow \angle MON = \frac{\pi}{2}$$

болно.

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХУ ОЛИМПИАДЫН
Х АНГИЙН IY ДАВААНЫ БОДЛОГУУД

Ц.Дамдорж, Л.Хадхүү

Улсын математикийн ХХУ олимпиадын IY даваа 1989 оны 5-р сарын 10-17-нд Улаанбаатар хотноо боллоо. Х ангийн 37 сурагч авьяас, чадвар, эрдэм ухаанаа сорин уралдсанаас сурагч Чадраагийн Эрдэнэбаатар /МҮИС/ 25 оноогоор I байр, Хандын Энхтайван /48-р сургууль, Лхаасүрэнгийн Батхүү /МҮИС/ нар 21,5 ба 19,5 оноогоор II байр, Дүгэржанцангийн Мөнхбат /Дархан I.10 жил/, Цэнд-Аюушийн Батмөнх /МҮИС/, Лхагважавын Загдрагчаа /I-р сургууль/, Цэдэндамбын Хүрэл-Очир /МҮИС/, Дамбын Лхагва-сүрэн /Ховд I. 10 жил / нар 15,5; 15,5; 15,5; 14,13 оноогоор III байр тус тус эзэллээ.

Багш А.Ганбаатар /МҮИС/, М.Алтай /48-р сургууль/, Л.Бадцогт /Дархан/, Амарбаясгалан /I сургууль/, Дамдондог /Ховд/ нар сурагчдаа сайн бэлтгэн оролцууллаа.

Олимпиад зохион байгуулах хорооны гишүүд, багш нар, оюутнуудын зохион дэвшүүлсэн 66 бодлогоос нь шийдэн сонгох авсан дараах 6 бодлогыг бодуулсан юм.

I ӨДӨР. / 5-р сарын 13/

A1. /Б.Ганболд СХУХ/

$$2 \cdot 2^{\lfloor \log_2 x \rfloor} - x = 1989,25$$

Тэгшитгэлийг бод.

A2. /В.Адъяасүрэн УБДС/

ABC зөв гурвалжныг багтаасан тойргийн A өнцөгт тулсан BC нууны гадна талаас нь шүртэсэн тойрог татав. B, C цэгүүдээс энэ тойрогт татсан шүртгэгчүүдийн уртын нийлбэр нь A цэгээс мөн тойрогт татсан шүртгэгчийн урттай тэнцэхийг батал.

A3. /Б.Баасандорж/ МҮИС-ийн оюутан /

Волейболын тэмцээнд 25 баг оролцов. Баг бүр хоорон-

доо нэг удаа тоглох ёстой. Тэгвэл энэ үед хойроос илүү хожигдохыг батал. Энд $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq 62$

II ӨДӨР /5-р сарын 14/

B1. /В.Адьяасүрэн УБДС /

$\frac{a_1 a_2 \dots a_{62}}{a_1 a_2 \dots a_{62}}$ тоо 3367 -д хуваагддаг бол
 $\frac{a_1 a_2 \dots a_{62}}{a_1 a_2 \dots a_{62}}$ тоо мөн 3367 -д хуваагдахыг
 батал. Энд $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq 62$

B2. /Ц.Батхүү УБДС/

Дурын бодит x тоонм хувьд

$$f(x) + f(x+1) = \sqrt{2} \cdot f\left(\frac{2x+1}{2}\right) \quad \text{ба} \quad f(1989,514) = 25$$

бол $f(2001,514)$ -ийг ол

B3. /Г.Хүрелсаатар. ШУА-ийн математикийн хүрээлэн /

Хэрэв $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ ба

$b_1, b_2, \dots, b_n$ - үүд нь $a_1, a_2, \dots, a_n$ тоонуудын ямар нэг
 сэлгэмэл бол

$$\sum_{k=1}^n \frac{b_1 + \dots + b_k}{k} \geq \frac{n^2}{2n-1} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{a_1 + \dots + a_k}{k^2}$$

болохыг батал.

/Бодлого бүр 6 оноотой. Өдөр бүр 4 нэг бодно/

Б О Д Л О Г О Н Ё Б О Д О Л Т

A1. $x > 0$ байх нь ит. Хэрэв $0 < x < 1$ бол $[\log_2 x] < -1$

учир

$$1 \geq 2 \cdot 2^{[\log_2 x]} = 1989,25 + x > 1989,25$$

болж харилал болно. Иймд $x \geq 1$ байна.

Өгсөө тунгитгэлээс

$$(x) \quad x = 2^{[\log_2 x]} - 1989,25 = 2^z - 1989,25, \quad z \in \mathbb{N}$$

Энд $AB=BC=AC$ гэдгийг төгсгөл батлах зүйл гарна.

Санамж. Кезлийн теоремд 1, 2, 3, 4 тойргуудыг нэг болгон хувиргахад Паскалийн теорем гарна.

И одоо. ABC гурвалжныг бэгтээсэн тойргийн радиусыг R гээд, ординат тэнхлэг нь A цэгийг дайрах, O дээр өхтэй координатын систем авч үзвэл

$$B(-\frac{R\sqrt{3}}{2}, -\frac{R}{2}), C(\frac{R\sqrt{3}}{2}, -\frac{R}{2}), A(0, R), S(x, y)$$

болно. Иймд

$$\omega_{BS} = \sqrt{CS^2 - SB^2} = \sqrt{(\frac{R\sqrt{3}}{2} - x)^2 + (y + \frac{R}{2})^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2} = \\ = \sqrt{Ry - Rx\sqrt{3} + 2R \cdot OS}, \quad \omega_{SS} = \sqrt{Ry + Rx\sqrt{3} + 2R \cdot OS},$$

$$\omega_{AS} = \sqrt{AS^2 - SD^2} = \sqrt{x^2 + (y - R)^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2} = \sqrt{2R(OS - y)}$$

болно. Эдгээрээс батлах тэнцэл ялбархан гарна.

И одоо. Зохиогчийн бодолтыг тогтоолуулъя. BOK гурвалзнаас $BK^2 = 2R^2 = 2R^2 \cos \alpha$ буюу

$\cos \alpha = 1 - \frac{BK^2}{2R^2}$ болно. Иймд BOO_1 гурвалжны хувьд косинусын теоремыг бичвэл:

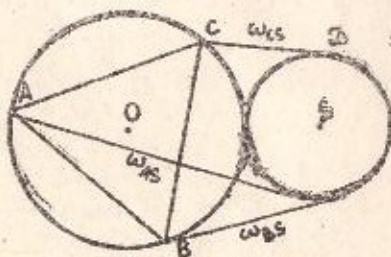
$$BO_1^2 = R^2 + (R + R_1)^2 - 2R(R + R_1) \cos \alpha =$$

$$= R^2 + (R + R_1)^2 - 2R(R + R_1) \left(1 - \frac{BK^2}{2R^2}\right) =$$

$$= R_1^2 + \frac{R + R_1}{R} \cdot BK^2$$

болно. Өм O_1 тэгш өнцөг гурвалзнаас

$$B^2 = BO_1^2 - R_1^2 = \frac{R + R_1}{R} \cdot BK^2 \quad \text{буюу}$$



$$\beta = \frac{BK}{R} \sqrt{R(R+R_1)} \quad (1) \quad \text{гэж гарна. Үүнтэй адилжаар}$$

$$\alpha = \frac{AK}{R} \sqrt{R(R+R_1)} \quad (2) \quad C = \frac{CK}{R} \sqrt{R(R+R_1)} \quad (3)$$

болно. ABC нь зөв гурвалжин гэдгээс $BK + CK = AK$ байхыг хялбархан баталж болох учраас (1), (2), (3)

$$\text{гэвчлүүдээс} \quad \beta + \epsilon = \alpha \quad \text{гэж гарна.}$$

13. Энэ бодлогыг бусад бодлогтой харьцуулахад нэлээд олон суралч бодсон байна.

Нийт хожмын тоо тоглогтын тоотой тэнцүү байна. Бүг бүр 2-оос доошгүй хожигдолтой учир энэ үед нийт тоглогтын тоо 50-аас багатай байх ёстой. Харин тоглогтын тоо 50-аас их бол Дирихлейн зарчим ёсоор 3 хожигтой 1 баг садоно. Иймээс бүг бүр 3-аас багца хожигтой байхын тулд нийт тоглогтын тоо 50 байна. Эндээс бүг бүр 4 тоглогч хийх бэ 2 хожиг, 2 хожигдолтой байх нь нлт. Эдөө 5 багийн хувьд нйм тоглогчын жингээ олоход хялгаралтай.



Энд $\vec{A_i A_j}$ вектор нь A_i баг A_j багийнг хөрсөнөг үзүүнэ.

$$VI. \quad A = \overline{a_1 a_2 \dots a_{6n}}, \quad B = \overline{a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{6n} a_1 a_2 \dots a_n}, \quad C = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$$

гэж тэмдэглэв. Тэгвэл

$$B = \overline{a_{n+1} \dots a_{6n}} \cdot 10^n + \overline{a_1 \dots a_n} = 10^n (10^{6n-n} \cdot \overline{a_1 \dots a_n} + \overline{a_{n+1} \dots a_{6n}}) -$$

$$- (10^{6n} \cdot \overline{a_1 \dots a_n} - \overline{a_1 \dots a_n}) = 10^n A - (10^{6n} - 1) C = 10^n A -$$

$$- (10^6 - 1) (10^{6(n-1)} + 10^{6(n-2)} + \dots + 1) \cdot C = 10^n A - 3367 \cdot 297 (10^{6(n-1)} + \dots + 1) \cdot C$$

ба $A:3367$ гэж өгөгдсөн учир $B:3367$ байх нь нлт.

В2. Хүрэл-Очирын бодолтыг өгье.

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \sqrt{2} f\left(x+\frac{1}{2}\right) - f(x) = \sqrt{2} \left(\sqrt{2} f(x) + f\left(x-\frac{1}{2}\right) \right) - f(x) = \\ &= f(x) - \sqrt{2} f\left(x-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} f\left(x-\frac{1}{2}\right) - f(x-1) - \sqrt{2} f\left(x-\frac{1}{2}\right) = -f(x-1) \end{aligned}$$

Ойлон. Иймд $f(x+1) = -f(x-1) = f(x-3)$ бүх
 f нь 4 үетэй гэж гарна. Эндээс

$$f(2001,514) = f(1989,514) = 25$$

В3. Энэ бодлогыг гүйцэд бодсон сурагч сайгаагүй тул зохиогч Г. Хүрэлбаатарын бодолтыг өгье.

Өгөгдсөн нөхцлөөс

$$\sum_{k=1}^n \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{k} \geq \sum_{k=1}^n \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k}.$$

гэж гарах нь ойлгомжтой. Иймд бид

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n \frac{a_1 + \dots + a_k}{k} \geq \frac{n}{2n-1} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{a_1 + \dots + a_k}{k^2}$$

Тэнцэтгэл бишлээ. Өзтлэхэд хялгалттай. (1) дараах
 тэнцэтгэл биштэй адил чанартай:

$$(1') \quad \frac{2n-1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{a_1 + \dots + a_k}{k} \geq n \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \cdot \frac{a_1 + \dots + a_k}{k}$$

$$(2) \quad \frac{2n-1}{n} = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

байна. Нөгөө талаас

$$l \leq k \quad \text{үед} \quad \frac{a_1 + \dots + a_l}{l} \leq \frac{a_1 + \dots + a_k}{k} \quad \text{св} \quad \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{l^2}$$

байх нь илэрхий тул

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{1} &\leq \frac{a_1 + a_2}{2} \leq \dots \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} & \text{ба} \\ \frac{1}{1^2} &> \frac{1}{2^2} > \dots > \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

гэсэн 2 эрэмбэлэгдсэн дарааллын хувьд Чебышев тэнцэтгэл
 бишийг бичвэл

$$(3) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{a_1 + \dots + a_k}{k} \geq n \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \cdot \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

гэх гарна. (3) ба (2) оос (1') буюу (1) гарна.

ОЛОН УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХХ
ОЛИМПИАДЫН ДҮН, БОДЛОГУУДЫН БОДОЛТ

А.Меней

Олон улсын математикийн ХХХ олимпиад /ОУМО / 1969 оны 7-р сарын 13-14 ид ХВНГУ-ын Брауншвейг хотод болж 50 орон оролцсон байна. Багийн дүнгээр Хятад 137 оноо / А-4, А-2 медаль/-оор 1, Румын 228 оноогоор / А-2; В-4/ П.Завлент лелосот улс 217- оноогоор /А-3, А-2, Х-1/ И, БНАГУ 216 оноогоор / А-3, В-2, Х-1/ ИУ, АНУ 207 оноогоор /А-1, В-4, А-1/ У, Чехословак 202 оноогоор /А-2, А-1, А-3/ И1, Болгар 195 оноогоор /А-1, В-3, А-2/ УН, ХВНГУ 187 оноогоор /А-1, В-3, Х-2/ У2, Вьетнам 183 оноогоор /А-2, В-1, Х-3/ ИХ, Унгар 175 оноогоор /В-4, Х-1/ Х байр эзэлжээ. Дараагийн байранд Югослав, Польш, Франц, Иран, Сингапур, Турк, Гонконг, Итали, Канада гэх нэг орнууд оржээ. 20 орны баг 81-ээс дээш оноо авсан байна.

ОУМО-дод 191 сурагч орсон байна. Үүнээс 75 сурагч 1988 оны, 3 сурагч 1987 оны, 4 сурагч 1986 оны 1 сурагч 1985 оны ОУМО-д оролцогчид байжээ.

ОУМО-д оролцогчдоос 20 сурагч алт, 55 сурагч мөнгө, 72 сурагч хүрэл медаль авчээ. Бодлого бүр дээр хичнээн сурагч, хэдэн оноо авсныг дараах хүснэгтээр үзүүлэв:

ОНОО	Бодлого бүрд хичнээн оноо авсан сурагчдын тоо					
	В1	В-2	В3	В-4	В-5	В-6
0	109	42	168	65	112	143
1	31	23	27	37	3	23
2	29	9	19	12	3	13
3	4	49	13	23	3	6
4	4	14	2	8	2	11

5	8	28	7	9	8	15
6	15	15	3	5	8	11
7	91	108	32	132	142	69
аундаж	3,0	4,2	1,3	4	3,8	2,5

Эндээс үзэхэд 3,6, 1-р боллогуудыг цөөн тооны сурагчид бодсон байна.

Олон улсын математикийн XXX олимпиадад сурагчид дараах 6 боллогыг бодож урамджээ.

Б1. $\{1, 2, \dots, 1989\}$ олонлогийг аль ч хоёр нь ерөнхий элементгүй бөгөөд дараах чанарыг хангах A_i

$i=1, 2, \dots, 117$ олонлогуудын нэгдэл дүрээр тавьж болохыг батал. Үүнд: а/ A_i бүр 17 элементтэй;

б/ альч i, j -ийн хувьд, $i+j, ,$

A_i ба A_j -ийн бүх элементүүдийн нийлвэр хоорондоо тэнцүү.

Б2. Тойрогт багтсан хури өнцөгт ABC гурвалжны A өнцгийн биссектрисийн тойрогтой огтлолцох нэг A_1 байг.

B_1 ба C_1 нэг мөн адил тодорхойлогдоно. A_0 нь AA_1 шулуун болон B ба C өнцгийн гадаад өнцгийн биссектрисүүдийн огтлолцох нэг байг. B_0, C_0 үүний адил тодорхойлогдоно. Тэгвэл:

а/ AC, BA, CB , зургаан өнцөгтийн талбай ABC гурвалжны талбайгаас 2 дахин их;

б/ $A_0 B_0 C_0$ гурвалжны талбай ABC гурвалжны талбайг 4 дахин асанаас багагүй болохыг батал.

Б3. n ба k натурал тоонууд, S нь хавтгай дээрх дараах чанартай n цэгээс тогтсон олонлог. Үүнд:

а / S -ийн аль ч гурван нэг нь коллежээр бин / нэг мушгунд ул оршино/ ;

б/ S -ийн аль ч P цэгийг авахад, түүнээс адил зайд алслагдсан ядаж k цэг S олонлогоос олддог;

Тэгвэл $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$ байхыг батал.

Б4. $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн AB, AD, BC талууд

$AB = AD + BC$ нөхцлийг хангана. Энэ дөрвөн өнцөгт дотор $AP = h + AD$; $BP = h + BC$ байхаар CD талаас h зайд орших P цэг олддог байг. Тэгвэл

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$$

байхыг батал.

Б. n натурал тоо бүрийн хувьд, нэг нь ч анхны тооноо эерэг биш байх дараалсан M -нэрхэг натурал тоонууд олохыг батал.

Б. $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ олонлог өгчээ. Үүнд n натурал тоо. Энэ олонлогийн $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ сэлгэмэлийн хувьд ядах нэг $i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ дугаар олдох $|x_i - x_{i+1}| = n$ бол уг сэлгэмэлийг P чанартай сэлгэмэс гээ. Анх ч n тооны хувьд P чанартай бүх сэлгэмэлийн тоо, P чанаргүй бүх сэлгэмэлийн тооноос их байхыг батал.

Бодлогуудын бодолтыг бид үзээгүй. Олон багш оюутнууд янз бүрээр бодсон ам. Энд тэдгээрийн дотор аль хялбар дөхөм бөгөөд оновчтой гэсэн бодолтуудыг оруулсан байна. Зарим хүний бодолтын санааг дурьдсан. Хялбарыг бодож БЗ бодлогын бодолтыг энд оруулсангүй. Та бүхэн өөрсдөө бодож үзээрэй.

Б1 бодлогын бодолт. /Энд оутан Батхүү /М-Ф /-гийн бодолтыг тавив. $A_i = \{x_i, \dots, x_{n,i}\}$ гэвэл

$$x_{1,i} + \dots + x_{n,i} = \frac{1999 \cdot 1990}{2 \cdot 199} = 17.995$$

$\{1, 2, 3, \dots, 1999\}$ -

-ийн элементүүдийг нийлбэр нь 1990 байхаар (995-х, 995+х) гэсэн хосуудад хуваах. (995 сондийхыг анхаар). Тэгэхээр

A_i - бид адгээр хосоос ялваа 7 хосыг хийх, үлдсэн 3 тоогийг нь тэдгээрийн нийлбэр нь 3.995 байхаар сонгох аргаар зорь. Тэр гурвалыг 995+y, 995+z, 995+z хүрстэй эрвэ. Гэхдээ x, y, z нь бүхэл тоо бөгөөд

$$(995+x) + (995+y) + (995+z) = 3 \cdot 995$$

нөхцлийг хангахгаар олно. Энэ нөхцлөөс

$$1 \leq |x|, |y|, |z| \leq 994 \quad \text{ба} \quad x+y+z=0$$

байх нь гарна.

$$\text{Эндээс } 3/ \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z < 0$$

$$0/ \quad x < 0 \quad y < 0 \quad z > 0$$

байх боломжтой.

Ийнхүү үзэхэд ерөнхий байдал алдагдахгүй.

$x+y=-z$ тэгшитгэлд $x=a, y=b, -z=c$ гэж оруулбал $a, b, c > 0$ ба $a+b=c$ тэгшитгэл гарна. Энэ тэгшитгэл $(a, b, c), (-a, -b, -c)$ гэсэн хоёр шийдтэй. Тэхээр анхны тэгшитгэл $(a, b, -c), (-a, -b, c)$ гэсэн хоёр шийдтэй болно. Энэ хоёр шийд

$$(995+a, 995+b, 995-c); (995-a, 995-b, 995+c)$$

гэсэн хоёр гурвал орно. $995-k_0, 995; 995+k_0$ - гурвалыг нэг олонлогт авъя. Тэгээд A_1 бүрд бид 7 хосыг, мөн нэг о. олонлог нь саяах. гурвал тоог хийсэн гэвэл бидний нийтэд $1188-3-2 \cdot 7 \cdot 117 = 348$ тоо үлдэх болно. Үүн учраас эхлээд энэ хосуудаас 174 хосоо сонгон авч тэдгээрээ нөхцлөөд тохиох II6 гурвалуудыг сонгон авсны дараа, энэ гурвал бүрд бусад хосуудаас аль ч долоогий нь нэгтгэх замаар бүх A_1 -г байгуулж болно. $a+b=c$ тэгшитгэлийн хувьд аль ч хоёр шийд $\{a, b, c\}$ гурвалууд огтлоцхохгүй. Шийд $(a, b, c), (-a, -b, -c)$ хоёр

$$(995-a, 995-b, 995+c); (995+a, 995+b, 995-c)$$

гэсэн хоёр гурвалыг тодорхойлно. Тэдгээрийг өөр өөр A_1 -д оруулна. Иймд $a+b=c$ тэгшитгэлийн нэг шийд (a, b, c) -г олон хэрэгтэй.

Ийнхүү $\frac{348}{2 \cdot 3} = 58$ ширлэг C тоо байх ёстой, $c \geq 0$ Энэ C тоог дараах маягаар олё. $1 \leq a, b, c \leq 994$ тул

$$a = 8m+1; \quad b = 8m-1; \quad c = 16m, \quad 1 \leq m \leq 58,$$

$$(995 \mp (8m+1), 995 \mp (8m-1), 995 \pm 16m);$$

43.

БЭ бодлогын бодолт. Эср гэвч нь $k > \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$ тоо.
 S олонлогос P цэг авахад түүнээс адил зайд байх цэгүүд
 k -ээс цөөнгүй. Эдгээр цэгүүдээс $AP = BP$ байх (A, B)
хосуудыг үүсгэнэ. Ийм хосын тоо ганц P цэгийн хувьд C_n^2 шээ
цөөнгүй болно. Энэ тооноор S олонлогийн цэг бүрийн хувьд
хэбээ. Ингэхэд үүсэх бүх хосын тоо $n C_n^2$ шээ багартүй болно.

Харин (A, B) хос цэг өөр нэг R цэгийн хувьд $AR = BR$
болж дахин гарч болно. $(P, R \in S)$. Иймд зарим
хосууд дахин тоологдох болно. Инд P, R нь AB хэрчимийн
дундах цэгт перпендикуляр шулуунд оршино. Ер нь бидний үүс-
гэсэн бүх хос, уг хосыг холбосон хэрчимийн дундах цэгт дийр-
сэн, түүнд перпендикуляр шулуун S -ээс ядаг ганц цэг
эргүүлж чаартай юм.

Одоо

$$n C_n^2 = n \cdot \frac{n(n-1)}{2} > \frac{n}{2} \left(\sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right) \left(\sqrt{2n} - \frac{1}{2} \right) = \\ = \frac{n}{2} \left(2n - \frac{1}{4} \right) = n \left(n - \frac{1}{8} \right) > n(n-1) = 2 C_n^2$$

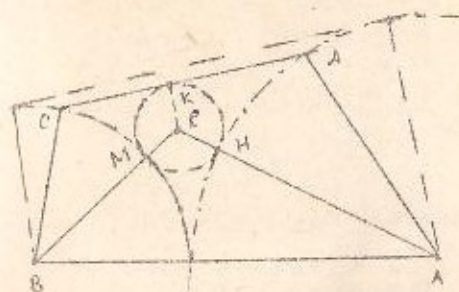
C_n^2 нь S -г харьяалагдах бүх цэгүүдээс үүсгэсэн хосын
тоо юм. Ингэхэд хос бүрийг холбосон хэрчимийн дундах цэг
буулагдсан перпендикуляр шулуун бүрд S -ээс зөвхөн 2
цэг байсан бол бүх хосын тоо $2 C_n^2$ болж бөтөн. Гэтэл

$$n C_n^2 > 2 C_n^2$$

туд зарим ийм перпендикулярт гурав
бүр түүнээс өмнө цэг оршиход хүрнэ. Энэ бол / нөхцөлд
хара. $\square$

БЭ бодлогын бодолт.

$AB = BC + AD$ - энэ
үндэслэн A төвтэй AD
радиустай, B төвтэй
 BC радиустай тойрог ~~ингэ~~
төтөн ~~(в-р зураг /~~ P
цэгийн хувьд $PK = l =$
 $= PM = PN$.



1-р зураг

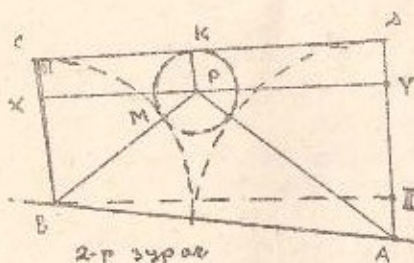
байх ёстой. Тэгэхээр
Р төвтэй тойрог тус
хоёр тойргийг хүргэхээс
гадна CD нь энэ
тойрогт хүргэгч байх ёс-
той. Иймээс

$$PK = h - m$$

хэмжийн их утга нь CD
уг гурван тойрогт ерөнхий
хүргэгч байх үед гарна.
/ 1-р зурагыг хар. /

Бусад утга нь энэ үеийн утгаас бага ам. $h - m$ энэ
захын утгыг h_0 гэж авч, h_0 -ыг бодож олъё. $h \leq h_0$
болно / Өдөө харгалзах зураг байгуулъя. / 2-р зураг /.

Тэгвэл:



2-р зураг

$$AB = CB + AD;$$

$$BL = CD$$

$$AL = AD - CB \text{ тул}$$

$$CD = \sqrt{(AD + CB)^2 +} \\ = \sqrt{(AD - CB)^2 +} \\ = 2\sqrt{AD \cdot CB} \text{ болно.}$$

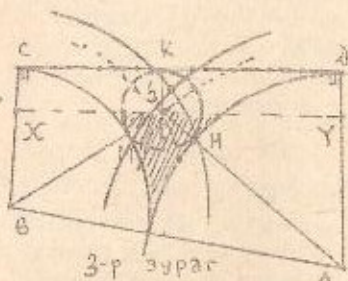
$$MP = PH = PK = h_0. \text{ юм. } CK = XP = \sqrt{(BC + h_0)^2 - (BC - h_0)^2} \\ = 2\sqrt{BC \cdot h_0}; \quad KD = PY = \sqrt{(AD + h_0)^2 - (AD - h_0)^2} = 2\sqrt{AD \cdot h_0}.$$

Иймд $CD = CK + KD$ учир олоон утгуудыг энд оруули
хооцоо хийхэд

$$\frac{1}{\sqrt{h_0}} = \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}} \text{ болно.}$$

$$h \leq h_0 \text{ учир } \frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{h_0}} = \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}} \text{ гарна.}$$

Одоо h -ийн хэмжийн их утга h_0 -дээр хэлсэн үед
гарахыг оутган Чойсүрэнгийн /М Н / бодолтоор баталъя.



Дарнах 3-р зургийг хял
/ 3-р зураг / дараа h -аас
их утга $h = h_1, \dots, h_n$, ба h_n
радиустай тойргийн төв ХҮ
шугарнаас эзэн орших мушги
оршино.

АВСД дөрвөн өнцөгтийн
CD тал нь 3-р зураг
дахь тасархай шугамаар зурсан

"CD" - талаас үргэлж доош
оршин бууу дахиацна.

Иймээс ВС, АД радиустай хоёр тойрог ба CD талыг шүргэ-
сэн h , радиустай тойрыг оршин байдаг бид, тэр тойрогт
CD-тэй параллель шүргэгч татаж, тус тойргийн төв ХҮ-ээс
доош зурагдсан мушги оршихы олно. Энэ бол зөрчил мөн.
Олутан Батхүү /М-Т/ энэ байдлыг тэнцэтгэл бий үнэлэх
замнаар баталсан.

Ү бодлогын бодолт. $K+1, K+2, \dots, K+n$ бүгд
зохиомол тоо байхаар, бүр $K+1$ -н $2-m$, $K+2$ -н $3-j$,

с.м $(K+n)$ -н $(n+1)-j$
хугаандахаар K тоог сонгоё. Тэгэхээр K - тоо тооны факто-
риалтай уялдах бстой нь харагдана. Иймд

$K = (n+1)!^2 + 1$ гэж авъя. Үүнд $n=1, 2, 3, \dots$ тооны
аль нэг. Тэгвэл $K+1, K+2, \dots, K+n$
бүгд зохиомол тоо болох нь ойлгомжтой. $K+q$ тоо

1) $1 \leq q \leq n$ бол $q+1$ тоонд хуваагдана.
Тэгэхээр аль нэг $K+q = p^m$ - анхны тооны зэрэг бол
түүний хуваагч $q+1 = p^2$, $1 \leq q \leq n$ дүртэй
болно. $1 \leq q \leq n$ учир $p \leq n+1$ байна. Иймд

$p \mid (n+1)!$ м.

$$k+q = \frac{(n+d)!}{(q+1)!} + (q+1) = p^m \quad (1)$$

8y10y

$$p^m - \frac{(n+d)!}{(q+1)!} = q+1 = p^2 \quad (2)$$

$q+1 \leq n+d$ учир $\frac{(n+d)!}{(q+1)!} - n \leq q+1 = p^2 - q$ хувиардана. Иймд $p^{2k} \mid \frac{(n+d)!}{(q+1)!}$ болно. Тэхээр

(2) -ийн зүүн гар тал нь p^{2k+1} зэрэгт хуваагдана. Эндээс

$p^{2k+1} \mid (q+1)!$ болж зөрчил гарч байна. $d=1, 2, 3, \dots$ авч болох учир уг бодлого маш олон шийдтэй байна.

Олутан Батхүү Үүнийг арай өөр гэдгээ үүнтэй төсөөтэй санаагаар бодсон бөгөөд

$\frac{(n+d)!}{(q+1)!}$ -ийн оронд $(n+1)!$ & дүрсийн тохирох B эвсвэр үржигдэхүүнтэй бодсон юм. $\square$

ББ бодлогын бодолт. $k, z \in \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ хоёр тооны хувьд $|k-z| = n$ бол k, z хоёрыг n -икэр хос гэж. n -икэрүүд $1, n+1; 2, n+2; \dots; n, 2n$ юм. $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ сэлгэмэл нэг n i -дугаарын хувьд P чанаргүй бол түүнийг P_0 -терлийн, эсвэлс гэнц i -дугаарын хувьд P чанартай бол P_i -терлийн сэлгэмэл гэж. $P_0(n)$ -ээр бүх P_0 -терлийн, $P_i(n)$ -ээр бүх P_i -терлийн сэлгэмэлийн тоог тэмдэглэв. Дурьд нэг $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ гэсэн P_0 -терлийн сэлгэмэл авч түүний x_{2n} ба n -икрийг нь дараг. Тэгвэл $z(n-1)$ элементтэй үүссэн сэлгэмэл гарах ба энэ сэлгэмэл нэг бол P_0 -терлийн, нэг бол P_z -терлийн сэлгэмэл болно. Сүүлчийн тохиолдолд зэргэлдээ орших n -икэр хос илсэж гарсан x_{2n} -ийг икэрээрээ хоорондоо тусгаарлагдсан хоёр хос байх юм. Үүсн гарсан P_0 -терлийн нэг сэлгэмэл x_{2n} сүүлчийн байранд n -икэр нь дусад $2n-2$ байранд байх бүгд $2n-2$ икэрээр сэлгэмэлээр гарна. Иймд

$(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ хэлбэрийн сэлгэмэл x_{2n} сүүлчийн байранд байрлалдсан үед $(2n-2) \cdot P_z(n-1)$ болно. 4*

Одоо энэ алхмыг $x_1, x_2, \dots$ Тэмцэг бүрийн хувьд хийх болох учир, сүүлчийн элемент ба ихрийг нь дарахад $2n-2$ элементээс зохиосон P_0 төрлийн сэлгэмэл өгөх

P_0 төрлийн бүх сэлгэмэл ян. $(2n-2) P_0(n-1)$ болно.

2) Одоо x_{2n} ба түүний ихрийг нь дарахад P_1 төрлийн $2n-2$ элементийн сэлгэмэл гарах үеийг авч үзье. Энд нэг P_1 төрлийн сэлгэмэлээс P_0 төрлийн бөгөөд $2n$ элементийн сэлгэмэл авахын тулд x_{2n} -ийн ихрийг л саяаа зэргэлдээ ихрийн дунд, x_{2n} -ийн сүүлчийн байранд тавих ёстой. Ингэхэд $P_1(n-1)$ -тэй адил тооны сэлгэмэл гарна. Энэ процессыг $2n$ тэмдэг бүрийн хувьд хийх учир $P_1(n-1)$ төрлийн сэлгэмэл өгөх $P_0(n)$ төрлийн сэлгэмэл $2n \cdot P_1(n-1)$ байна.

$$\text{Иймд } P_0(n) = 2n(2n-2)P_0(n-1) + 2n P_1(n-1) = \\ = 2n((2n-2)P_0(n-1) + P_1(n-1)) \quad (1)$$

Одоо P_1 төрлийн бүх сэлгэмэлийг авъя. Түүний дотроос зэргэлдээ орших n - ихэр хос нь (x_i, x_{i+1}) байх бүх сэлгэмэлийг авч үзье. Энэ бүгдэд (x_i, x_{i+1}) хосыг орхиход мөн зөвөл P_0 төрлийн $((2n-2)$ -элементээс зохиосон), эсвэл P_1 төрлийн сэлгэмэл үүсэх юм. Сүүлчийн тохиолдолд зэргэлдээ орших ихэр хос нь саяаа хосоор хоорондоо ялгарах хоёр ихэр хос болно. Одоо 1-р тохиолдолд P_0 төрлийн $(2n-2)$ -элементийн сэлгэмэлээс P_1 төрлийн сэлгэмэлд дахин шилжихэд (x_i, x_{i+1}) хосыг саяаа P_0 төрлийн шинэ сэлгэмэлийн элементүүдийн ард^{зрл} бууу хооронд бүгд $(2n-1)$ байранд тавьж үүсгэсэн сэлгэмэлээс 1-р тохиолдлын ганц сэлгэмэл үүсэх учир бид $(2n-1) P_0(n-1)$ ширхэг P_1 төрлийн сэлгэмэл авна. Энд x_i ба x_{i+1} хоёрын байрлаас ламбаран гарах сэлгэмэл 2 дахин өснө. Иймд 1-р тохиолдлын нэг сэлгэмэлээс бид $2n$ элементийн $2(2n-1) P_0(n-1)$ сэлгэмэл авна. Үүнийг

n - ихэр хос тус бүрд хийх учир нийтлээс нь $2(2n-1) P_0(n-1) = 2n(2n-1) P_0(n-1)$

сэлгэмэл авна. Одоо 2-р тохиолдлыг авч үзье. Энэ үеийн нэг сэлгэмэл P_1 төрлийн зөвхөн хоёр сэлгэмэлээс гарна. Учир нь зэргэлдээ ихэр хосын хооронд (x_i, x_{i+1}) бууу

(x_{2n}, x_i) хоёрыг л тавьж P_1 -төрлийн сэлгэмэл гарган авна.

иймд нэг бэхлэгдсэн хосын үед $2P_1(n-1)$ сэлгэмэл авна.
Одоо энэ алхмыг ихэр хос бүрд хийх учир бүгд

$$2 \cdot 2 P_1(n-1) = 2n P_1(n-1) \quad \text{сэлгэмэл авна.}$$

иймд

$$\begin{aligned} P_1(n) &= 2n(2n-1)P_0(n-1) + 2n P_1(n-1) = \\ &= 2n [(2n-1)P_0(n-1) + P_1(n-1)] \quad (2) \end{aligned}$$

$$(I) \text{ ба } (2) \text{ ооос } P_1(n) = P_0(n) + 2n P_0(n-1) \quad (3)$$

гарна. Энд $n \rightarrow (n-1)$ -ээр соливол

$$P_1(n-1) = P_0(n-1) + 2(n-1)P_0(n-2) \quad (4)$$

болно. Үүнийг (I)-д ордуулан тавьх

$$P_0(n) = 2n [(2n-1)P_0(n-1) + (2n-2)P_0(n-2)] \quad (5)$$

Реккурент томьёо гаргын авна.

Одоо:

$$A_n = \frac{P_0(n)}{(2n)!} \quad \text{хартцаа } \frac{1}{2} \quad \text{ээс бага гэж харуулбал хангалттай.}$$

$$P_0(n) < (2n)! \quad \text{учир } A_n < 1 \quad \text{байх нь илт. Цааш нь}$$

$$A_n = \frac{2n[(2n-1)P_0(n-1) + (2n-2)P_0(n-2)]}{2n!} =$$

$$= \frac{P_0(n-1)}{(2n-1)!} + \frac{P_0(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-2)!} =$$

$$= A_{n-1} + \frac{A_{n-2}}{(2n-1)(2n-3)} < A_{n-1} + \frac{1}{(2n-1)(2n-3)}$$

$$\text{буюу } A_n - A_{n-1} < \frac{1}{(2n-1)(2n-3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} \right) \quad (6)$$

б

болно. (6)-г дэс дараалан бууруулан бичиж нэмье.

$$+ \left\{ \begin{array}{l} A_n - A_{n-1} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} \right) \\ A_{n-1} - A_{n-2} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-5} - \frac{1}{2n-3} \right) \\ \vdots \\ A_2 - A_1 < \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) \\ A_1 = 0 \end{array} \right.$$

$$A_n < \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) < \frac{1}{2} \quad \text{болно,}$$

ИИНХҮҮ: $\rho_0(n) < \frac{(2n)!}{2}$ тул

P_0 - терлийн бич бүх сэлгэмлийн тоо $P_0(n)$ - нас эрх-их ба байна.

Энэ бодлогыг бэгш Л.Хадхүү, оруулалт Ц.Баттогтох нар
өөр байдлаар бодсон.д.Баттогтох рекуррент томьёо биниж
дараа нь явдууцийн арга. харгэлсан нь.

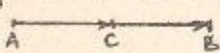
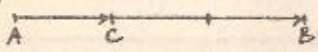
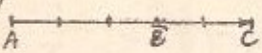
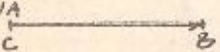
Энэхүү өгүүллийг унших ойлгохын тулд урьдчилан буулгалт, хувиргалт, урвуу хувиулгалт, хувиулгалтуудын үрхвэр зэрэг ойлголтуудтай танилцсан байх шаардлагатай.

A, B ялгаатай цэгүүд байг. AB шулуунд харьяалагдах амьваа C цэгийн хувьд, хэрэв $C \neq B$ бол $\vec{AC} = \lambda \vec{CB}$ тэнцэл хангах λ тоо нэгэн утгатай тодорхойлогдоно.

Тодорхойлолт I. A, B, C ($B \neq C$) нэг шулуун дээр орших эрэмбэлэгдсэн гурван цэг бол $\vec{AC} = \lambda \vec{CB}$ тэнцэл хангах λ тоог A, B, C гурван цэгийн харьнаа гээд (AB, C) гэж тэмдэглэнэ.

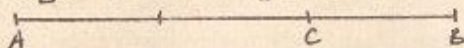
Тодорхойлолт ёсоор хэрэв $\vec{AC} = \lambda \vec{CB}$ бол $(AB, C) = \lambda$.

Жишээ I. A, B, C гурван цэгийн харьнааг зарим тохиолдолд олж, зургаар дүрслэн харуулъя.

- 1)  $\vec{AC} = \vec{CB}$, $(AB, C) = 1$
- 2)  $\vec{AC} = \frac{1}{2} \vec{CB}$, $(AB, C) = \frac{1}{2}$
- 3)  $\vec{AC} = -\frac{1}{4} \vec{CB}$, $(AB, C) = -\frac{1}{4}$
- 4)  $\vec{AC} = -\frac{5}{2} \vec{CB}$, $(AB, C) = -\frac{5}{2}$
- 5)  $A = C \Rightarrow \vec{AC} = 0 \cdot \vec{CB}$, $(AB, C) = 0$

Нэг шулуун дээр орших гурван цэгийг зургаан янзаар эрэмбэлж болно. Тухай бүр нь гурван цэгийн харьцаа өөр өөр гарч болохыг анхаархад хэрэгтэй.

Жишээ нь: $(AB, C) = 2$ бол $(BA, C) = \frac{1}{2}$; $(AC, B) = -3$;
 $(CA, B) = -\frac{1}{3}$; $(BC, A) = -\frac{5}{2}$; $(CB, A) = -\frac{2}{5}$.



Ласгал 1. Шулуун дээр хоорондоо ялгаатай $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ ($|A_0 A_1| = |A_1 A_2| = \dots = |A_{n-1} A_n|$) цэгүүд өгөгдөв.

$(A_m A_k, A_l)$ харьцааг ол. ($0 \leq m, k, l \leq n$; $k \neq l$)

Ласгал 2. A, B ялгаатай цэгүүд ба λ ($\lambda \neq -1$) дурин бодит тоо бол $(AB, C) = \lambda$ нөхцөл хангах C цэг норгаш оршин байна гэж батал.

Ласгал 3. $C \in AB$ бол

а/ C ($C \neq B$) цэг AB хэрчимд харьяалагддаг байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $(AB, C) > 0$

б/ C ($C \neq B$) цэг AB хэрчмийн B -ээс цаашхи үргэлжлэл дээр оршиж байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $(AB, C) < -1$

в/ C ($C \neq B$) цэг AB хэрчмийн A -аас цаашхи үргэлжлэл дээр оршиж байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $-1 < (AB, C) < 0$ болохыг тус тус батал.

Ласгал 4. $A \neq B$ бол $(AB, C) = -1$ нөхцөл хангах C цэг олдохгүй гэж батал.

Ласгал 5. а/ Хэрэв C цэг AB хэрчимд харьяалагдаж байвал $(AB, C) = \frac{|AC|}{|CB|}$ б/ C цэг AB хэрчмийн үргэлжлэл дээр оршиж байвал $(AB, C) = -\frac{|AC|}{|CB|}$ гэж тус тус батал.

Е хавтгайн бүх цэгийн олонлог ба λ -уг хавтгайн

хувиргалт ($\frac{1}{2}: E \rightarrow E$) байг. Хэрэв $\frac{1}{2}$ хувиргалтаар A цэг A' цэгт / Φ дүрс Φ' дүрсэд / буул байвал A' цэгийг A цэгийн дүр / Φ' дүрсийг Φ дүрсийн дүр / гэдэг. Иймд $A, B, C, \dots$ цэгүүдийн дүрийг харгалзан $A', B', C', \dots$ гэж тэмдэглэж байх болно.

Тодорхойлолт 2. Хэрэв $\frac{1}{2}$ хувиргалтаар аливаа коллинеар A, B, C гурван цэгийн дүр A', B', C' нь мөн коллинеар байдаг ба $(AB, C) = (A'B', C')$ нөхцөл биелэгддэг бол түүнийг шугаман хувиргалт гэнэ.

Санамж. Хэрэв гурав буруу түүнээс олон тооны цэг нэг шулуун дээр оршиж байвал тэдгээрийг коллинеар байна гэдэг. Мөн гурав буруу түүнээс олон тооны шулуун нэг цэгт огтлолцон байвал тэдгээрийг конкуррент байна гэдэг.

Жишээ 2. Аливаа хөдөлгөөн / тухайн тохиолдолд параллель зөөлт, тэнхлэгийн тэгшхэм, төвийн тэгшхэм, эргүүлэлт / шугаман хувиргалт мөн.

Энэ $\frac{1}{2}$ -хөдөлгөөн; A, B, C дүрн коллинеар нэгүүд, ба A', B', C' эдгээрийн дүр болог. C цэг A, B цэгүүдийн хооронд оршино гэж үзэхэд ерөнхий байдал явуурахгүй. Энэ үед $|AC| + |CB| = |AC|$ тэнцэтгэл биелнэ. Нэгэнт хөдөлгөөнөөр аливаа хоёр цэгийн хоорондох зай өөрчлөгддөггүй учир $|A'C'| = |AC|, |C'B'| = |CB|, |A'B'| = |AB|$ байх ба эндээс $|A'C'| + |C'B'| = |A'B'|$ гэж гарна. Энэ нь A', B', C' цэгүүд нэг шулуун дээр оршихыг өөрөөр хэлбэл коллинеар болохыг баталж байна. Мөн $(AB, C) = \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|A'C'|}{|C'B'|} = (A'B', C')$ учир $\frac{1}{2}$ -шугаман хувиргалт болно.

Жишээ 3. Аливаа төсөөтэй хувиргалт / тухайн тохиолдолд гомотет / мөн шугаман хувиргалт болно.

■ φ^k нь k коэффициенттэй тессетэй хувиргалт; A, B, C дурин коллинеар цэгүүд; A', B', C' эдгээрийн дүр болог. Амнэхтэй адил C цэгийг A, B цэгүүдийн хооронд оршдог гэж үзье. Энэ үед $|AC| + |CB| = |AB|$ тэнцэтгэл биелнэ. Тессетэй хувиргалтын тодорхойлолт ёсоор $|A'C'| = k|AC|$, $|C'B'| = k|CB|$, $|A'B'| = k|AB|$ ба эндээс $|A'B'| = k|AB| = k(|AC| + |CB|) = k|AC| + k|CB| = |A'C'| + |C'B'|$ буюу A', B', C' - коллинеар. Мөн $(A'B', C') = \frac{|A'C'|}{|C'B'|} = \frac{k|AC|}{k|CB|} = (AB, C)$ болж φ^k шугаман хувиргалт болох нь батлагдав. ■

Хөдөлгөөн болон тессетэй хувиргалтаас өөр шугаман хувиргалтын жишээ олныг гаргаж болно. Эдгээрээс цавинд бичигдэж байгааг шаардлагад зарим нэгэн хувиргалттай одоо танилцъя.

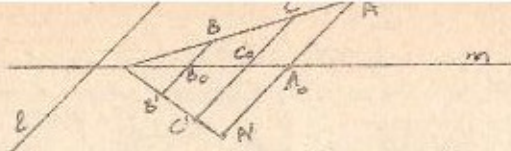
Хавтгай дээр хоорондоо параллель биш ℓ, m шулуунууд өгөгдсөн байг. Дурин P цэг авч, түүний m шулуун дээрх

ℓ -тэй параллель проекцийг P_0 гээд $\vec{P_0P} = -\vec{P_0P}$ нөхцөл хангах P' цэгийг байгуулъя. Хавтгайн аливаа P цэгийг дээрх аргаар тодорхойлогдох P' цэгт буулгадаг хувиргалтын налуу тэгшхэм гэнэ. Энэ үед m -ийг тэнхлэг, ℓ -ийг чиглүүлэгч шулуун гэдэг. Тэнхлэг дээр орших цэгүүд өөртөө бууна. / Өөрөөр хэлбэл тэнхлэг дээр орших цэгүүд нь энэ хувиргалтын үл хөдлөх цэгүүд болно / Тодорхойлолт ёсоор, хэрэв P цэгийн дүр P' бол $PP' \parallel \ell$ байх ба PP' хэрчмийн дундаж цэг m шулуун дээр оршино.

Жишээ 4. Налуу тэгшхэм нь шугаман хувиргалт мөн.

■ ℓ, m параллель биш шулуунууд байг. m -тэнхлэгтэй,

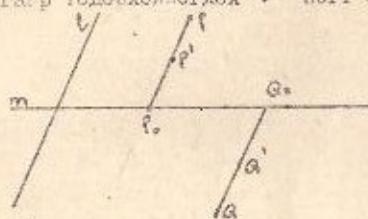
ℓ -чиглүүлэгчтэй налуу тэгшхэм авъя. A, B, C коллинеар цэгүүд ба $(AB, C) = \lambda$ гэе. A, B, C цэгүүдийн m шулуун дээрх ℓ -тэй параллель проекцийг харгалзан A_0, B_0, C_0 гэвэл Фалесийн теорем ёсоор $(A_0B_0, C_0) = \lambda$ байна. A, B, C цэгүүдийн дүрийг харгалзан A', B', C' гэе. $\vec{A_0A'} = -\vec{A_0A_0}$, $\vec{C_0C'} = -\vec{C_0C}$ тэнцэтгэлүүдээс $\vec{A'C'} = 2\vec{A_0C_0} - \vec{AC}$ гэж гарна. $(\vec{A_0A'} + \vec{A_0C_0} + \vec{C_0C'}) = -\vec{A_0A_0} + \vec{A_0C_0} - \vec{C_0C} = 2\vec{A_0C_0} - (\vec{A_0A} + \vec{A_0C_0} + \vec{C_0C}) = 2\vec{A_0C_0} - \vec{AC}$ / Үүнтэй адил $\vec{C'B'} = 2\vec{C_0B_0} - \vec{CB}$. $(AB, C) = \lambda$, $(A_0B_0, C_0) = \lambda$ буюу $\vec{AC} = \lambda\vec{CB}$, $\vec{A_0C_0} = \lambda\vec{C_0B_0}$ учир $\vec{A'C'} = 2\vec{A_0C_0} - \vec{AC} =$



$$= 2\lambda \vec{C_0B_0} - \lambda \vec{C'B'} = \lambda (2\vec{C_0B_0} - \vec{C'B'}) = \lambda \vec{C'A'}$$

Энэ нь A', B', C' цэгүүд коллинеар ба $(A'B', C') = \lambda$ гэсэн үг. Үүнийг нэлдүү тэгшхэм шугаман хувиргалт болох нь батлагдай.

l, m параллель бич шулуунууд ба эерэг k тоо өгөгдсөн байг. Лурин P нэг авч түүний m шулуун дээрх l -тэй параллель проекцийг P_0 гээд $P_0P' = k P_0P$ нөхцөл хангах P' цэгийг байгуулъя. Хавтгайн аливаа P цэгийг дээрх аргасар тодорхойлогдох P' цэгт буулгадаг хувиргалтыг ашиглан



гэнэ. l -ийг чиглүүлэгч шулуун, m -ийг ашиглантын тэнхлэг, k -г ашиглантын коэффициент гэж нэрлэдэг. Ашиглантын тэнхлэг дээрх цэгүүд нь энэ хувиргалтын үл хөдлөх цэгүүд байна. P' цэг,

а/ $k < 1$ бол P_0, P цэгүүдийн хооронд, б/ $k > 1$ бол P_0, P хэрчимийн P -ээс нэгийг үргэлжлэл дээр оршино.

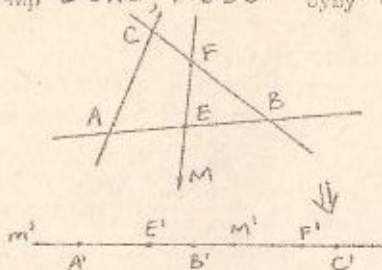
Ласгал 6. Ашиглантын шугаман хувиргалт мөн гэл батал / 4-р эгшээр баталсантай адилхнаар гүйцэтгэ /.

Одоо шугаман хувиргалтын үндсэн чанаруудтай нь танилцъя.

1. Коллинеар бич гурван цэгийн дүрүүд мөн коллинеар бич цэгүүд байна.

■ A, B, C цэгүүд коллинеар бич ба эдгээрийн дүр харгалзан A', B', C' байг. Эсрэгээс нь A', B', C' цэгүүдийг коллинеар гэж үзээд эдгээрийг агуулсан шулуунг m' гэе. Энэ үед хавтгайн аливаа M цэгийн M' шулуунд харьяалагдахад хүрнэ гэж харуулъя. Хэрэв $M \in AB / M \in BC$ эсвэл $M \in AC / M \in AB$ бол шугаман хувиргалтын тодорхойлолт ёсоор $M' \in A'B' / M' \in B'C'$ эсвэл $M' \in A'C'$ / буюу $M' \in m'$. M цэг $AB, BC,$

СА шулуунуудын алиг дээр нь ч оршдоггүй тохиолдолд түүнийг дайруулан AB, BC шулуунуудыг огтлогч шулуун татаж, огтлолцлын нэгүүдийг харгалзан E, F гэе. $EE \perp AB, FF \perp BC$ учир $E' \in AE, F' \in BF$ буюу $E' \in m, F' \in n$. Ийм нь $MEEF$ учир $M'E'E'F'$ буюу $M'E'm'$ болно. Ийнхүү хавтгайн аливаа M нэгний дүр m' шулуунд харьяалагдах болж хавтгайн хувиргалтын тодорхойлолтонд харвицна. Иймд A', B', C' нэгүүд коллинеар байх болохгүй. $\square$



2°. Хувиргалтын хувиргалтын урвуу нь мөн шугаман хувиргалт байна.

$\square$ f -шугаман хувиргалт ба f^{-1} түүний урвуу хувиргалт байг. A', B', C' нь дурны коллинеар нэгүүд ба элгээрийн f^{-1} хувиргалтаарх дүр нь харгалзан A, B, C гэвэл углуур хувиргалтын тодорхойлолт ёсоор f хувиргалтаар A, B, C нэгүүдийн дүр харгалзан A', B', C' байна. Үерэл A, B, C коллинеар биш бол f^{-1} -наар ёсоор A', B', C' нэгүүд коллинеар биш болоход х рнэ. Иймд A, B, C нэгүүд коллинеар ба өнө нь f^{-1} шугаман хувиргалт болохыг баталж байна. $\square$

3°. Шугаман хувиргалтуудын урвуур мөн шугаман хувиргалт байна.

$\square$ g, f -шугаман хувиргалтууд ба $h = g \circ f$ байг. A, B, C коллинеар нэгүүд ба $f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C', g(A') = A'', g(B') = B'', g(C') = C''$ гэе. Энэ нь $h(A) = A'', h(B) = B'', h(C) = C''$ гэсэн үг: g, f шугаман хувиргалтууд учир A', B', C' коллинеар, нэшилбэл A'', B'', C'' коллинеар байна. Иймд h мөн шугаман хувиргалт болно. $\square$

4°. Шулуун дүр шулуун байна.

$\square$ m дурны шулуун; A, B түүн дээр орших ялгаатай нэгүүд ба элгээрийн дүр харгалзан A', B' байг. A', B' нэгүүдийг дайрсан шулуунг m' гэе. Үерэл $M \in m$ ба M

нэгийн дүр M' бол шугаман хувиргалтын тодорхойлолт ёсоор $M' \in m'$. Иймд m' шулуун дүр m' шулуун байна. ■

5°. a, b шулуунуудын дүр харгалзан a', b' байг.

а/ хэрвэ $a \parallel b$ бол $a' \parallel b'$, б/ хэрвэ a, b шулуунууд огтлолцон байвал a', b' шулуунууд мөн огтлолцох ба a, b -ийн огтлолын нэгийн дүр a', b' -ийн огтлолын нэг байна.

■ 2/ $a \nparallel b$ ба a', b' шулуунууд M' нэгт огтлолцног гэе.

M' нэгийн эх дүрийг M гавал $M \in a, M \in b'$ нөхцлүүдээс $M \in a, M \in b$ бол $a \parallel b$ нөхцөлд харгалдана. Иймд $a' \parallel b'$.

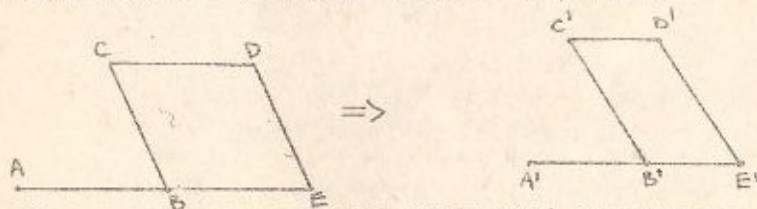
б/ a, b шулуунууд M нэгт огтлолцног ба M нэгийн дүрийг M' гавал $M \in a, M \in b$ нөхцлүүдээс $M' \in a', M' \in b'$ буюу a', b' шулуунууд M' нэгт огтлолцоно гэж гарна. ■

6°. Хэрчимийн дүр хэрчим байна.

■ A, B илгээтэй цэгүүд ба эдгээрийн дүр харгалзан A', B' байг. AB хэрчимд харьяалагдах дурын M цэг ач түүний дүрийг M' гавал $(AB, M) > 0$ ба $(AB, M) = (A'B', M')$ учир $(A'B', M') > 0$. Энэ нь M' цэг $A'B'$ хэрчимд харьяалагдана гэсэн үг. Үүнтэй ажил $A'B'$ хэрчимд харьяалагдах дурын нэгийн эх дүр AB хэрчимд харьяалагдана. ■

7. Шугаман хувиргалтаар параллель хэрчмүүдийн уртнь харьцаа өөрчлөгдөхгүй.

■ AB, CD параллель хэрчмүүд өгөгдсөн байг. AB, CD шулуунууд дараахгүй тохиолдолд ач хэе. AB хэрчимийн



B -ээс нэгийг хүргэлтэл дээр $|BE| = |CD|$ нөхцөл хангах E цэг байгуулж, A, B, C, D, E цэгүүдийн дүрийг харгалзан A', B', C', D', E' гэе. $BCDE$ параллелограмм учир $B'C'D'E'$ мөн параллелограмм байна / ченар 5°. Иймд

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|BE|} = (AB, B) = (A'E', B') = \frac{|A'B'|}{|B'E'|} = \frac{|A'B'|}{|C'D'|}.$$

Хэрэв AB, CD шулуунууд дөрхөн байвал AB шулуун гадна CD хэрчимтэй параллель бөгөөд тэнцүү урттай хэрчим байгуулж өмнөхний адил $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A'B'|}{|C'D'|}$ болохыг батална.

Тасгал 7°. Шугаман хувиргалтаар наираг, хагас хэвтгэй, өнцгийн дүр хэргэлсэн наираг хагас хэвтгэй, өнцөг болохыг батал.

Тасгал 8. Параллелограмм, трапецийн дүр хэргэлсэн параллелограмм, трапец байхыг батал.

Тасгал 9. A, B, C коллинеар биш гурван цэг ба элгээрийн дүр нь хэргэлсэн A', B', C' байг. ABC гурвалжны дотоод, гадаад мужийн дүр хэргэлсэн $A'B'C'$ гурвалжны дотоод, гадаад муж байна гэм батал.

Тасгал 10. Шугаман хувиргалтаар аливаа параллелограммыг квадратад буулган болно гэж батал / Хоёрдоо илүүгүй тосон агшаалтаар параллелограммыг квадратад буулган болохыг үзүүл/.

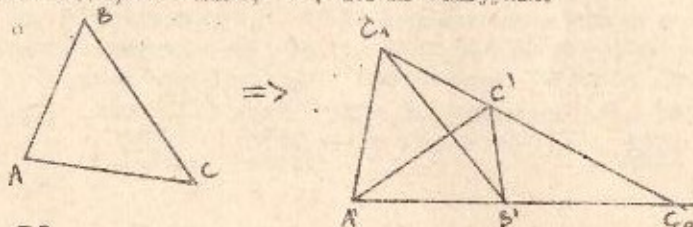
Тасгал 11. $\frac{1}{2}$ налуу тэгших ба $\frac{1}{2}$ хувиргалтаарх ABC гурвалжны дүр $A'B'C'$ бол $S_{A'B'C'} = S_{ABC}$ гэж батал.

Тасгал 12. K коэффициенттай агшаалтаар ABC гурвалжин $A'B'C'$ гурвалжинд буусан бол $S_{A'B'C'} = K S_{ABC}$ гэж батал.

Одоо шугаман хувиргалтын онолын үндсэн теоремуудтай танилцъя.

Теорем I. ABC ба $A'B'C'$ нь хэвттай дээрх дүрн гурвалжнууд байг. A, B, C цэгүүдийн дүр хэргэлсэн A', B', C' байх шугаман хувиргалт нэг ганц оршин байна.

$\triangle ABC \cap \triangle A'B'C' = \emptyset$ ба C_1, C_2 цэгүүд $A'B'$ шулууны нэг талд оршиг байхаар C_1 цэгийг байгуулъя.



$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|C'A'|}{|CA|} = k$ гавал A, B, C нэгүүдийн дүр харгалзан A', B', C' байх k коэффициенттэй φ^k төсөөтэй хувиргалт олдоно. C, C' шулуун $A'B'$ шулуунтай C_0 нэгт огтлолцдог байх. Энэ үед $A'B'$ тэнхлэгтэй, C, C' чиглүүлэгчтэй, $k_1 = \frac{|C_0 C'|}{|C_0 C|}$ коэффициенттэй агшаалтаар A', B', C' нэгүүд харгалзан A', B', C' нэгүүдэд бууна. Шуулцрын хувиргалтыг g гавал $f = g \circ \varphi^k$ үривэр теоремын нөхцөлт хангана. Хэрэв C, C' шулуун $A'B'$ шулуунтай параллель бол $A'B'$ тэнхлэгтэй $k_1 / k_1 + 1$ ба $\frac{1}{k_1}$ коэффициенттэй хоёр агшаалтын үривэрээр C_1 нэгийг C' нэгт буулгас болох ба энэ үед A', B' нэгүүд өөртөө бууна.

Одоо теоремын нөхцөл хангах шугаман хувиргалт нэр танил байхыг батлан. f, g хувиргалтууд A, B, C нэгүүдийг харгалзан A', B', C' нэгүүдэд буулгадаг байх. M дурин нэг ба $f(M) = M', g(M) = M''$ гэв. Хэрэв $M \in AB$ бол $(AB, M) = (A'B', M')$ ба $(AB, M) = (A'B', M'')$. Эндээс $(A'B', M') = (A'B', M'')$ буюу $M' = M''$ / Багсал 2 /. Үүнтэй адил $M \in BC$ эсвэл $M \in CA$ тохиолдлуудад $M' = M''$ байна. Хэрэв M нэг AB, BC, CA шулуунуудын алиан дээр явч оршдоггүй бол t -нийг дайруулан AB, AC шулуунуудыг огтлогч шулуун татаж огтлолын нэгүүдийг харгалзан E, F гэв. Эмне баталсан ёсоор $f(E) = g(E) = E'$; $f(F) = g(F) = F'$ байна. $(EF, M) = (E'F', M')$; $(EF, M) = (E'F', M'')$ тэнцүүдээс $(E'F', M') = (E'F', M'')$ буюу $M' = M''$. Ийнхүү аливаа M нэгийн хувьд $f(M) = g(M)$, өөрөөр хэлбэл $f = g$.

Нердлөг, Аливаа шугаман хувиргалтыг төсөөтэй хувиргалт ба хоёроос илүүгүй агшаалтын үривэрээр илэрхийлж болно.

■ f дурин шугаман хувиргалт байх. A, B, C коллинеар биш нэгүүд ба эдгээрийн дүрийг харгалзан A', B', C' гэв.

A, B, C нэгүүдийг харгалзан A', B', C' нэгүүдэд харгалзан төсөөтэй хувиргалт ба хоёр агшаалтын үривэрээр буулгас болно / теорем I-н баталгааг үз /. Энэ үривэрийг $g \circ g \circ \varphi^k$ гавал теорем I ёсоор $f = g \circ g \circ \varphi^k$ / хэрэв A, B, C нэгүүдийг A', B', C' нэгүүдэд төсөөтэй хувиргалт ба нэг агшаалтын үривэрээр буулгас болж байвал хоёрдахь агшаалтын коэффициентийг

$k_2 = 1$ гэв авна /

Теорем 2. Шугаман хувиргалтаар хоёр гурвалжны талбайн харьцаа өөрчлөгдөхгүй.

■ $\frac{1}{2}$ дүрвэ шугаман хувиргалт бол теорем 1-ийг мөрддөг ёсоор $\frac{1}{2}$ -ийг тусгаартай хувиргалт ба хоёр агшаалтын тусмаар илэрхийлж болно. Тусгаартай хувиргалтын коэффициентийг K , агшаалтуудын коэффициентийг K_1, K_2 гэв. ABC дүрвэ гурвалжны ба түүний дүр $A'B'C'$ бол $S_{A'B'C'} = K^2 K_1 K_2 S_{ABC}$

тэнцэл биелнэ. Учир нь K коэффициенттэй тусгаартай хувиргалтаар агшваа дүрсийн талбай K^2 дахин ихэсдэг / эсвэл багасана /. Мөн дасгал 12 ёсоор K_1 / K_2 / коэффициенттэй агшаалтаар гурвалжны талбай K_1 / K_2 / дахин ихэснэ / эсвэл багасана. Иймд $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = K^2 K_1 K_2$. Эндээс дүрвэ ABC, MNC гурвалжнуудын хувьд $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{S_{MNC}}{S_{MNC}}$ буюу $\frac{S_{ABC}}{S_{MNC}} = \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}$

Мөрдлөг. Шугаман хувиргалтаар олон өнцөгтүүдийн талбайн харьцаа өөрчлөгдөхгүй.

■ Аливаа олон өнцөгтийн гурвалжнуудад хуваан болдог билээ

Шугаман хувиргалтын бодлого бодоход

хэрэглэх

Геометрийн дүрсүүдийн шугаман хувиргалтаар үл хувирах чанарыг шугаман хувиргалтын инвариант гэнэ. Ийм чанаруудад шулуунуудын параллель ба параллель биш байх / чааар 5° /; Цэгүүдийн колинеар байх, шулуунуудын конкурент байх, нэг шулуун дээр орших гурван цэгийн харьцаа, параллель харчмүүдийн уртны харьцаа / чааар 7° /; дүрсүүдийн талбайн харьцаа / теорем 2 / зэрэг орно. Геометрийн бодлого бодох явцад бидний олох буюу батлах зүйл нь шугаман хувиргалтын инвариант байвал холбогдох дүрсийг шугаман хувиргалтаар хялбар дүрсэд буулгах замаар болох болдог.

Бодлого I. ABC - гурвалжны хүчлийн төв M -ийг дайруулан шулуун татахад AB, BC талуудыг харгалзан R, S цэгээр, AC талын үргэлжлэлийг T цэгээр тус тус огтлов. Хэрвэ S, T цэгүүд M цэгийн нэг талд орших бол

$$\frac{1}{|MR|} = \frac{1}{|MS|} + \frac{1}{|MT|}$$

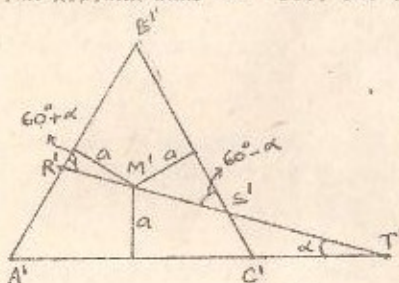
боло.

гэх батал.

$$\square \quad \frac{1}{IMR_1} = \frac{1}{IMS_1} + \frac{1}{IMT_1} \quad \text{тэнцэтгэлийг өөрөөр} \quad \frac{IMR_1}{IMS_1} +$$

$$+ \frac{IMR_1}{IMT_1} = 1 \quad \text{гэж бичиж болно.} \quad \frac{IMR_1}{IMS_1} \quad \text{ба} \quad \frac{IMR_1}{IMT_1} \quad \text{харь-$$

цанууд нь шугаман хувиргалтын инвариантууд мөн. Иймд ABC гурвалжныг $A'B'C'$ эсв гурвалжинд буулгахад M нэг $A'B'C'$ гурвалжны хядайн төнд буух ба $\frac{IMR_1}{IMT_1} = \frac{IMR_1}{IMS_1}$ харьцаанууд өөрчлөгдөхгүй. R, S, T цэгүүдийн дүрийг харгалзан R', S', T' ; $\angle A'T'M' = \alpha$ ба M' цэгээс $A'B'C'$ гурвалжны тал хүртэлх зайр a гэе. Энэ үед $\angle A'C'B' = 60^\circ$ учир



$$\angle M'S'B' = 60^\circ - \alpha, \text{ мөн}$$

$$\angle C'A'A' = 60^\circ \text{ учир}$$

$$\angle M'R'B' = 60^\circ + \alpha \text{ байна.}$$

$$\text{Эндээс } IM'T' = \frac{a}{\sin \alpha}; IM'S' =$$

$$= \frac{a}{\sin(60^\circ - \alpha)}; IM'R' = \frac{a}{\sin(60^\circ + \alpha)}$$

$$\text{гэж гарна. Цэвэр нь } \frac{IM'R'}{IM'S'} +$$

$$+ \frac{IM'R'}{IM'T'} = \frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin(60^\circ + \alpha)} +$$

$$+ \frac{\sin \alpha}{\sin(60^\circ + \alpha)} = 1.$$

$$\text{Тэгвэл } \frac{IMR_1}{IMS_1} = \frac{IM'R'}{IM'S'} \text{ ба } \frac{IMR_1}{IMT_1} = \frac{IM'R'}{IM'T'} \text{ учир } \frac{IMR_1}{IMS_1} + \frac{IMR_1}{IMT_1} = 1 \quad \square$$

Бодлого 2. / Ивд 1982 / $ABCD$ дөрвөн өнцөгт дотор O цэг оршино. Хэрэв ABO, BCO, CDO, DAO гурвалжуудын талбай тэнцүү бол O цэг AC, BD диагоналуудын ядаж нэг дээр нь оршихыг батал.

□ $O \notin AC$ бол $O \in BD$ гэж харуулахад хангалттай.

$O \notin AC$ байг. Бодлогын нөхцөл / $S_{ABO} : S_{BCO} : S_{CDO} : S_{DAO} = 1:1:1:1$ / болон батлах зүйл / $O \in BD$ / нь шугаман хувиргалтын инвариантууд байна. AO тэнхлэгтэй, $k = \frac{TAO}{IOC}$

коэффициенттэй, чиглүүлэгч нь OC шулуун байхаар агшав.

B, C, D цэгүүдийн дүрийг

харгалзан B', C', D' гэвэл

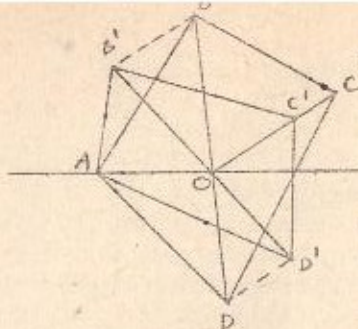
$$S_{AB'O} = S_{B'C'O} = S_{C'D'O} = S_{D'A'O}$$

/ теорем 2 / байх ба $IOC' =$

65.

65.

65.



$$K_{10C1} = \frac{10A1}{10C1} \cdot 10C1 = 10A1 \text{ болно.}$$

$$S_{C'D'O} = S_{D'A'O} \text{ тэнцэтгэлээс}$$

$$10A1D'O1 \sin \angle A'D'O = 10A1D'O1 \sin \angle C'D'O$$

$$\text{буюу } \sin \angle A'D'O = \sin \angle C'D'O. \text{ Эндээс}$$

$$\angle A'D'O = \angle C'D'O \quad / \quad \angle A'D'O =$$

$$\pi - \angle C'D'O \text{ байх болохгүй,}$$

$$\text{унир нь } A, O, C' \text{ коллинеар биш/}$$

$$\text{Үүнтэй адилаар } \angle AOB' = \angle B'OC'$$

$$\text{болохыг харуулна. } \angle AOD' =$$

$$\angle C'OD' \text{ ба } \angle AOB' = \angle B'OC',$$

$$\angle AOB' + \angle B'OC' + \angle C'OD' + \angle D'OA = 2\pi \text{ тэнцэтгэлүүдээс } \angle D'OB' =$$

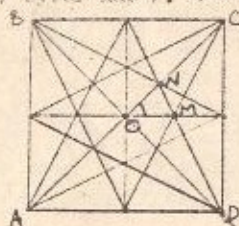
$$\angle D'OA' + \angle AOB' = \pi \text{ болж } O \text{ нэг } B'D' \text{ диагональ дээр}$$

орших ёстой. ■

Бодлого 3 / Угослав 1972 / Параллелограммын орой тус бүрийг уг оройг агуулаагүй хоёр талын дундагтай шугуунаар холбой. Эдгээр найман шугуунаар үүсэх 8-өнөгтийн талбай параллелограммын талбайн $\frac{1}{6}$ -тай тэнцүү гэх батал.

■ Өгөгдсөн параллелограммыг шугуулан хувиаргалтгаар квадрат болгож болно. Мэнд энэ бодлогыг өгөгдсөн параллелограммын квадрат байх тохиолдолд болоход хангалттай. a талтай

$ABCD$ квадратад авч, түүний төвийг O , бодлогын нөхцөлөөр тодорхойлогдох 8-өнөгтийн зэргэлдээ хоёр оройг M, N гэдэг / зураг хар /. $\angle NOM = 45^\circ$, $OM = \frac{1}{4}a$, $ON =$



$$\frac{1}{6} a \quad \text{болж үүнээ}$$

$$S_{ONM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} a \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} a \sin 45^\circ = \frac{a^2}{48}$$

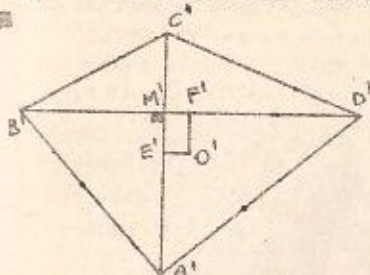
Үүсэх 8-өнөгтийн талбай

$$S = 8 \cdot S_{ONM} = \frac{1}{6} a^2 \quad \blacksquare$$

Бодлого 4 / Маррибонь орнуудын олимпиад 1986 /

$ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнөгтийн AC диагоналийн дундагийг дайрсан BD диагональтай параллель шугуун, BD

диагоналийн дунжийг дайрсан AC диагональтай параллель шулуунтай O нэгт огтлолцоно. $OABC, OBCD, OCDA, ODAB$ дөрвөн өнцөгтүүд тэнцүү талбайтай болохыг батал.



$AC \cap BD = O$ ба AC, BD диагоналуудын дунжийг харгалзан E, F гэе. AMB гурвалжныг тэгш өнцөгт $A'M'B'$ / $\angle A'M'B' = 90^\circ$ / гурвалжинд шугаман хувиргалтаар буулгав. C, D, E, F, O цэгүүдийн дүрийг харгалзан C', D', E', F', O' гэвэл $A'C' \perp B'D'$ ба $O'E'M'F'$

тэгш өнцөгт байна. O' нэг $A'M'D'$ гурвалжны дотор оршдог гэж үзэхэд ерөнхий байдал явцуурахгүй. $S_{O'A'B'C'} = S_{O'A'C'} + S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} |O'E'| \cdot |A'C'| + \frac{1}{2} |B'E'| \cdot |A'C'| = \frac{1}{2} (|O'E'| + |B'E'|) \cdot |A'C'| = \frac{1}{2} |B'D'| \cdot |A'C'| = \frac{1}{2} S_{A'B'C'D'}$.

$$S_{O'C'D'A'} = S_{A'B'C'D'} - S_{O'A'B'C'} = \frac{1}{2} S_{A'B'C'D'}$$

Үүнтэй адил $S_{O'B'C'D'} = S_{O'D'A'B'} = \frac{1}{2} S_{A'B'C'D'}$ болно. Эндээс $S_{OABC} = S_{OBCD} = S_{OCDA} = S_{ODAB} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ гэж гарна.

Нараах бодлогуудыг бие дааж бод.

1. Трапецийн хамуу талуудын огтлолын нэг, диагоналуудын огтлолын нэг болон сууриудын дундаж цэгүүд нэг шулуун дээр оршихыг батал.

2. ABC гурвалжны дотор орших P цэгийг дайруулан харгалзан AB, BC, CA талуудтай параллель ℓ, m, n шулуунууд татав. Хэрэв $\ell \cap BC = A_1, m \cap AC = B_1, n \cap AB = C_1$ бол

$$\frac{|PA_1|}{|AB|} + \frac{|PB_1|}{|BC|} + \frac{|PC_1|}{|CA|} = 1$$

гэж батал.

3. Гурвалжны орой тус бүрийг дайруулан эсрэг талыг нь гурван тэнцүү хэсэгт хуваах хоёр хоёр шулуун татъя. Энэ зургаан шулуунаар үүсэх 6-өнцөгтийн эсрэг оройнуудыг холбосон диагоналууд нэг нэгт огтлолцохыг батал.

4. ABC гурвалжин BC, CA, AB талуудын дундийг харгалзан D, E, F гэе. Хэрэв M хавтгайн дурин нэг бол $MA D, MBE, MCF$ гурвалжнуудын аль нэгийг нь талбай нөгөө хоёрын талбайн нийлбэртэй тэнцүү гэл батал.

5. ABC гурвалжин BC, CA, AB талууд дээр харгалзан A_1, B_1, C_1 нэг авав. Хэрэв $|AC_1| = \frac{1}{3} |AB|$, $|BA_1| = \frac{1}{3} |BC|$, $|CB_1| = \frac{1}{3} |CA|$ бол $S_{A_1 B_1 C_1} = \frac{1}{7} S_{ABC}$ гэл батал.

6. $ABCD$ параллелограммын A оройг дайрсан шулуун ED диагональ ба BC, CD талуудыг / зовоо үргэлжлэлийг нь / харгалзан M, N, P цэгүүдээр огтолно.

$$\frac{1}{|AM|} = \frac{1}{|AN|} + \frac{1}{|AP|}$$

гэл батал

АШИГЛАСАН НОМ, ХЭВЛЭЛ

1. В.В. Прасолов
"Задачи по планиметрии"
Часть II
2. П.С. Моденев, А.С. Пархоменко
"Геометрические преобразования"
3. И.М. Яглом, В.Г. Ашкингузе
"Идеи и методы аффинной
и проективной геометрии"
Часть I
4. "Зарубежные математические
олимпиады"

§ 1. КОМПЛЕКС ТОО, ТҮҮН ДЭЭРХ ҮЙЛДЭЛ

Сүрэнхорлоо /ХБДС /

Фиемтэ Техникийн бодлогуудыг бодох явцад сөрөг дискриминанттай квадрат тэгшитгэл бодох шаардлага элбэг тохиолддог. Эдгээр тэгшитгэлүүд нь бодит тоон олонлогт шийдгүй боловч физикийн хувьд тодорхой утгатай байдаг. Энэ нь бидний сайн мэдэх бодит тоон олонлогийг өргөтгөн комплекс тоон олонлог гэж нэрлэгдэх шинэ тоон олонлог байгуулах асуудалд хүргэдэг юм. Комплекс тооны зарим чанар, түүнийг бодлого бодоход хэрэглэх талаар товч өгүүлэе. $X^2 + 1 = 0$ тэгшитгэл нь бодит тоон олонлогт шийдгүй юм. Учир нь $X^2 = -1$ байх X - бодит тоо оршин байхгүй. Квадрат нь 1 тэй тэнцүү байх X тоог хуурмаг нэгж гэж нэрлээд i - үсгээр тэмдэглэе. Тэгвэл $i^2 = -1$ буюу $i = \sqrt{-1}$ болно. Ингэж хуурмаг нэгж гэсэн ойлголтыг оруулснаар сөрөг дискриминанттай квадрат тэгшитгэлийн шийдийг олж болно. Жишээ нь $X^2 + 8X + 25 = 0$ тэгшитгэлийн шийдийг олбол: $X_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 - 25} = -4 \pm \sqrt{-9} = -4 \pm \sqrt{9(-1)} =$

$$= -4 \pm 3\sqrt{-1} = -4 \pm 3i \quad \text{болно. } -4+3i, -4-3i.$$

хэлбэрийн тоонуудыг комплекс тоо гэж нэрлэх юм.

Тодорхойлолт: a, b - бодит тоонууд болон i - хуурмаг нэгжийн тусламжтайгаар зохиогдох $a+ib$ хэлбэрийн тоог комплекс тоо гэнэ. a -г $a+ib$ комплекс тооны бодит хэсэг, ib -г $a+ib$ комплекс тооны хуурмаг хэсэг гэж тус тус нэрлэнэ. Ийнхүү i - хуурмаг нэгжийн тусламжтайгаар (a, b) хос бүрт $a+ib$ хэлбэрийн комплекс тоог нэгэн утгатай харгалзуулж болно. Үнэхээр $Z = a+ib$; $Z = c+id$ бол $a+ib = c+id$ буюу $a-c = i(d-b) \Rightarrow c = \frac{a-b}{2}$ бодит тоо болоход хүрнэ. Энэ нь комплекс тоо бүхэн $a+ib$ хэлбэрээр нэг утгатай бичигддэгийг харуулна. Өөрөөр хэлбэл $a+ib = c+id$ бол $a=c$ ба $b=d$ байна. Ингэж хавтгайн $A(a, b)$ цэг бүрт $Z = a+ib$ комплекс тоог нэгэн утгатай харгалзуулж байгаа нь $Z = a+ib$ тоог хавтгай дээр $A(a, b)$ цэгээр дүрсэлж болохыг гэрчилнэ. $Z = a+ib$ тоогоор дүрсэлэгдэх $A(a, b)$ цэгийг $A(z)$ гэх тэмдэглэн Z -ийг A - цэгийн аффикс гэж 65.

нэрлэдэг. Комплексо тоонуудын олонлогийг $\mathbb{C}$ -ээр, бодит тооны олонлогийг $\mathbb{R}$ -ээр тэмдэглэвэл:

$$\mathbb{C} = \{a+ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\} \quad \text{болно.}$$

$\theta=0$ үед $a+ib=a+i0=a$ боллох учир $\mathbb{R}$ нь $\mathbb{C}$ -ийн дэд олонлог байх нь харагдана.

Комплексо тоон дээр хийх үйлдлүүд

$$1. z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2 \quad \text{комплексо тоонуудын хувьд}$$

$$(a_1 + ia_2) + i(b_1 + b_2) \quad \text{комплексо тоог тэдгээрийн нийлбэр гэнэ.}$$

$a+ib$ ба $a-ib$ тоонуудыг хосмог комплексо тоонууд гэнэ.

$a+ib + a-ib = 2a \in \mathbb{R}$ учир хоёр хосмог тооны нийлбэр бодит тоо байна. $a+ib, -a-ib$ тоонуудыг эсрэг комплексо тоонууд гэнэ. $a+ib + (-a-ib) = 0$ байна.

$$2. (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2) \quad \text{комплексо тоог}$$

$z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2$ комплексо тоонуудын ялгавар гэж нэрлэнэ.

$$3. z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ia_2 + ib_1 + b_2) + i(b_1 a_2 + a_1 b_2) \quad \text{тоог } z_1 = a_1 + ib_1$$

$$z_2 = a_2 + ib_2 \quad \text{комплексо тоонуудын үржвэр}$$

гэдэг. Өөрөөр хэлбэл: $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(b_1 a_2 + a_1 b_2)$ байна. Үүд $i^2 = -1$ гэдгийг ашиглан хаалт нээх, үржүүлэх, гишүүдийг эхлгэх замаар комплексо тоонуудын үржвэрийг хялбархан олж болно. Цааш нь $i^2 = -1$ гэдгээс $i^{4k} = 1; i^{4k+1} = i;$

$$i^{4k+2} = -1; i^{4k+3} = -i$$

байхыг тооцон $(a+ib)^n$ -ийг

Ньютоны биномын томьёогоор задалж

$$(a+ib)^n = \sum_{k=0}^n i^k C_n^k a^{n-k} b^k \quad \text{-ийг цааш нь}$$

$A+ib$ хэлбэрт шилжүүлж болно. Үүнд A нь $(a+ib)^n$ -ийн бодит хэсэг, B нь хуурмаг хэсгийн өмнөх коэффициент болно.

$$\text{Нөн } (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R} \quad \text{байдгийг ашиглан}$$

$z_1 = a+ib; z_2 = a-ib$ тоонуудын ноогдворыг хялбархан олж болно.

$$4. \frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{a+ib}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \text{ болно.}$$

Комплекс тооноос $1 \leq n$ зэргийн язгуур гаргах үйлдлийг илгээ гүйцэтгэж болох бөгөөд язгуур нь мөн комплекс тоо байна. Энэ үйлдлийг комплекс тоог тригонометр хэлбэрт илжүүлсний дараа гүйцэтгэх нь илүү тохиромжтой.

4.8. Комплекс тооны тригонометрийн хэлбэр

Өмнө ярьсан ёсоор $z = a+ib$ комплекс тоо нь хавтгай дээр $A(a, b)$ цэгийг дүрсэлдэг / зураг 1 /.

$\overline{OA}$ радиус векторын уртыг

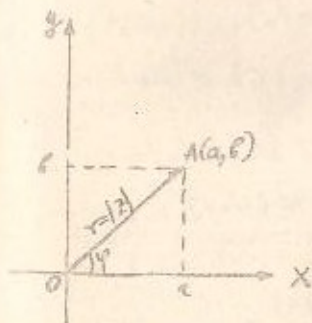
$z = a+ib$ тооны модуль гэж нэрлээд $|z|$ гэж тэмдэглэнэ.

$$|z| = |OK| = r \quad \text{Ийнхүү}$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{болно.}$$

OA - радиус векторын OK -ийн /тэнхлэгийн / зэрэг чиглэлтэй үүсгэх φ өнцгийг $z = a+ib$ тооны аргумент гэж нэрлээд

$\arg z = \varphi$ гэж тэмдэглэнэ.



$\arg z = \varphi = \arctg \frac{b}{a}$ байна. Тэгш өнцөгт координатын систем дэх $A(a, b)$ цэгийн координатуудыг r, φ гүйцэтгэн координатаар илэрхийлбэл

$$\left. \begin{aligned} b &= r \sin \varphi \\ a &= r \cos \varphi \end{aligned} \right\}$$

болно. Эндээс

$z = a+ib = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ болно. Энэ бичлэгийг комплекс тооны тригономет хэлбэрдэх бичлэг гэнэ.

$$\cos(\varphi + 2\pi k) = \cos \varphi, \quad \sin(\varphi + 2\pi k) = \sin \varphi$$

ойдгийг санавал модуль нь тэнцүү, аргумент нь 2π өнцгийн бүхэл тоон давтамжаар илгээгдэх комплекс тоонууд давхцана.

67.

Ийнхүү комплекс тоо бүрийг аргументын $2\pi k$ -ийн нарийвчлалтайгаар тригонометр хэлбэрт нэгэн утгатай бичим болно. Үүнээ нь: $1+i = z$ комплекс тоог тригонометр хэлбэрт тавь.

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \arg z = \varphi = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

болно.

Иймд

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{болно.}$$

Тригонометр хэлбэрээр өгөгдсөн комплекс тооны үржүүлэх үйлдэл:

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \quad \text{бол}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \\ &- \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)] \end{aligned}$$

болно. Тухайн тохиолдолд $r_1 = r_2 = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$

бол $z^2 = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$ болно. Энэ сэтгэлгээр үргэжлүүлнэ

$$z^n = [r (\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n [\cos n\varphi + i \sin n\varphi]$$

томъёог гарган авч болно. Үүнийг Муаврын томъёо гэнэ. Тригонометр хэлбэрээр өгөгдсөн комплекс тооны хуваах үйлдэл.

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \quad \text{бол}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{\cos \varphi_1 - i \sin \varphi_1}{\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2} \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2))}{1}$$

болно. Эдгээрээс хоёр комплекс тооны үржвэрийн модуль нь үржигдэхүүн тус бүрийн модулиудын үржвэртэй, аргумент нь үржигдэхүүн тус бүрийн аргументүүдийн нийлбэртэй, ноогдворын модуль нь тэдгээрийн модулиудын ноогдвортой, аргумент нь хуваагдагчийн аргументаас хуваагчийн аргументыг хассан ялгавартай тэнцүү байна гэсэн дүгнэлт хийн болно.

Комплексо тооноос язгуур гаргах

Бодит тооноос язгуур гаргахад тэр бүр бодит тоо байх чаддаггүй. Жишээ нь: $i = \sqrt{-1}$ нь бодит тоо биш гэдгийг бид сайн мэднэ. Харин комплекс тоо бүрээс дурын бүхэл зэрэгт тоон зэргийн язгуур гаргах болох бөгөөд тэр нь комплекс тоо байдаг. Энэ үр дүнг язгуурын тодорхойлолт болом Муаврын томьёог ашиглан хялбархан нотолж болно.

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ тооноос n зэргийн язгуур гаргахад $z' = z(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ комплекс тоо гардаг гэвэл язгуурын тодорхойлолт ёсоор $(z')^n = z$ буу.

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{байна.}$$

Эндээс Муаврын томьёо болон комплекс тоо тригонометр хэлбэрт нэг утгатай бичигддэгээс $r^n = r$, $\cos n\varphi = \cos \varphi$,

$$\sin n\varphi = \sin \varphi \quad \text{болно. Эндээс } \varphi = \sqrt[n]{r}$$

$$n\varphi = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{буу} \quad \varphi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots \quad \text{болно.}$$

k - тоог $k = \lambda_1 + i\lambda_2$ хэлбэрт бичвэл 2 - үлдэгдэл тул $0 \leq \lambda_2 \leq n-1$ байна.

$$\varphi_0 = \frac{\varphi}{n}, \quad \varphi_1 = \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \quad \varphi_2 = \frac{\varphi + 4\pi}{n}, \dots, \quad \varphi_{n-1} = \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} \quad \text{гэсэн } n \text{ ширхэг}$$

хоорондоо ялгаатай тоо: олдох бөгөөд $j > n-1$ үед

φ_j бүр нь эдгээр тооноос 2π -ийн бүхэл давтамжаар ялгагдана. Өөрсөөр хэлбэл $\varphi_j = \varphi_k + 2\pi m$

$$k = 0, 1, \dots, n-1, \quad \varphi_m \in \mathbb{Z} \quad \text{байна.} \quad \cos(\varphi_k + 2\pi m) = \cos \varphi_k$$

$$\sin(\varphi_k + 2\pi m) = \sin \varphi_k \quad \text{тул}$$

$$\rho = (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt[n]{r} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt[n]{r} (\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k) =$$

$$= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (1)$$

69. болно.

Энэхүү комплекс тооноос n зэргийн язгуур гаргахад ялгаатай n ширхэг комплекс тоо гарах бөгөөд тэр нь (1) томъёогоор олдоно. Тухайн тохмолдолд $(z=1)$ нэгжийн n -зэргийн язгуурууд (1) томъёогоор олдоно. Тэдгээрийг

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1} \quad \text{гэвэл} \quad 1 = \cos \theta + i \sin \theta$$

тул $\varepsilon_0 = \cos \theta + i \sin \theta = 1, \quad \varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n},$

$$\varepsilon_2 = \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n}, \quad \dots, \quad \varepsilon_r = \cos \frac{2rk\pi}{n} + i \sin \frac{2rk\pi}{n},$$

$$\dots, \quad \varepsilon_{n-1} = \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

болно.

$$\text{Үүнд } \varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^k = \varepsilon_1^k, \quad k=0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

байна. Эндээс үзвэл $\varepsilon_k = \sqrt[n]{1}$ -ийн утгууд нь нэгх тойрогт багтсан зөв n онцгойн оройн цэгүүд байх нь харагдаж байна.

Хослог комплекс тоонууд

$z = a + ib, \quad \bar{z} = a - ib$ тоонуудыг хослог комплекс тоонууд гэдгийг өмнө ярьсан ам. Тэдгээрийн хувьд дараах чанарууд хүчинтэй.

1°. $|z| = |\bar{z}|, \quad \arg \bar{z} = -\arg z$ байна. Өөрөөр хэлбэл $z, \bar{z}$ тоонууд Ox тэнхлэгийн хувьд тэгш хэлтэй байна.

$$2. \quad z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R} \quad \text{байна.}$$

$$3. \quad \bar{\bar{z}} = z \quad \text{байна. Үүнээр}$$

$$\bar{z} = a - ib, \quad \bar{\bar{z}} = \overline{a - ib} = a + ib = z \quad \text{болно.}$$

$$4. \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad \text{байна.}$$

$$5. \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

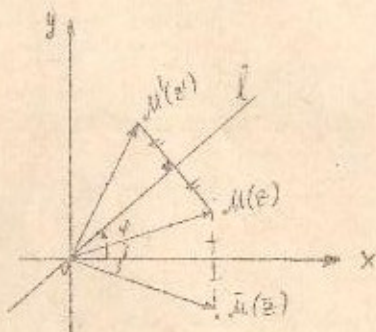
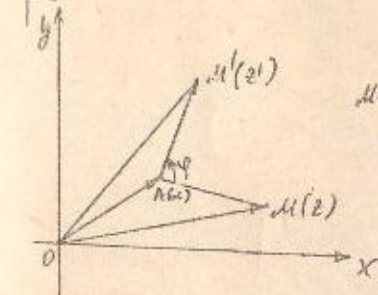
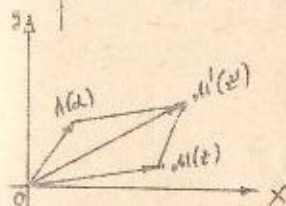
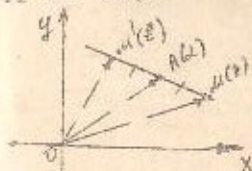
КОМПЛЕКС ТООНЫ ТУСЛАМЖТАЙГААР
ГЕОМЕТРИЙН ХУВИРГАЛТЫГ ГҮЙЦЭТГЭХ НЬ

1. Тэнхлэгийн тэгш хэм

$M(z)$ цэгийн координатыг
эхийг дайрсан ℓ булуун
хувьд тэгш хэмтэй хуви-
ргахад $M'(z')$ цэг гардаг бол

$$z' = \bar{z} (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$$

байна. Үүнд φ нь ℓ
булуун OX тэнхлэгтэй
үүсгэх өнцөг



2. Төвийн тэгш хэм
 $M(z)$ цэгийг $A(\alpha)$ цэгийн
хувьд тэгш хэмтэй хуви-
ргахад $M'(z')$ цэг гардаг бол

$$z' = \alpha \bar{z} - \bar{\alpha} \quad \text{байна.}$$

3. $M(z)$ цэгийг $\vec{OA}$
векторын тусламжтайгаар парал-
лель зөөхөд $M'(z')$ цэг гардаг
бол $z' = z + \alpha$ байна. Үүнд α
нь A цэгийн аффикс болно.

4. Эргүүлэлт

$M(z)$ -цэгийг φ - өнцгөөр $A(\alpha)$
цэгийг тойруулан эргүүлэхэд
 $M'(z')$ цэг гардаг бол

$$z' = \alpha + (z - \alpha)(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

байна.

5. Гомомет. $A(\omega)$ нэгийн хувь дээр K -коэффициент-
той гомомет нь $Z' = K(z \cdot \omega) + c$ төмбөрөөр
үүхцэтгэгддэг.

Комплекс тоот бодлого бодоход
ашиглах

Энд комплекс тоо хэрэглэн бодлого бодох бүх боломжит
бүрэн хамрах чадваргүй гэдгийгхэеэ үүний өмнө зөвхөн зөвхөн
жишээ үзэх болно.

Бодлого 1. Нийлбэрийг ол:

$$\begin{aligned} \text{а/ } & \sqrt[3]{j^2 10^\circ} + \sqrt[3]{j^2 50^\circ} + \sqrt[3]{j^2 90^\circ} \\ \text{б/ } & \sqrt[3]{j^2 1^\circ} + \sqrt[3]{j^2 3^\circ} + \sqrt[3]{j^2 5^\circ} + \dots + \sqrt[3]{j^2 89^\circ} \end{aligned}$$

Бодвол а/ $3 \cdot 10^\circ = 30^\circ$, $3 \cdot 50^\circ = 150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$,

$$3 \cdot 90^\circ = 270^\circ = 180^\circ + 90^\circ$$

байна. Ийм нь $\sqrt[3]{j^2 30^\circ}$ тэгшитгэлд $\varphi_1 = 10^\circ$, $\varphi_2 = 30^\circ$, $\varphi_3 = 10^\circ$

үүд нь ийм болохыг хяруулж байна. Одоо $\sqrt[3]{j^2 30^\circ}$ -ийг

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{j^2 30^\circ} \\ \text{зэр} & \text{ажархайлъя. } \sqrt[3]{j^2 30^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} ; \cos 30^\circ + i \sin 30^\circ \\ & = (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^3 = (\cos^3 30^\circ - 3 \cos 30^\circ \sin^2 30^\circ) + i (3 \cos^2 30^\circ \sin 30^\circ - \sin^3 30^\circ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Болохыг тооцвол } \sqrt[3]{j^2 30^\circ} &= \frac{3 \cos^2 30^\circ \sin 30^\circ - \sin^3 30^\circ}{\cos^3 30^\circ - 3 \cos 30^\circ \sin^2 30^\circ} = \\ &= \frac{\cos^3 30^\circ (3 \tan 30^\circ - \tan^3 30^\circ)}{\cos^3 30^\circ (1 - 3 \tan^2 30^\circ)} = \frac{3 \tan 30^\circ - \tan^3 30^\circ}{1 - 3 \tan^2 30^\circ} \end{aligned}$$

Болох ба

$$\sqrt[3]{j^2 30^\circ} = \sqrt[3]{j^2 30^\circ} = \frac{j^2}{3} ; \sqrt[3]{j^2 30^\circ} = \sqrt[3]{j^2 30^\circ} = \frac{j^2}{3} ; \sqrt[3]{j^2 30^\circ} = \sqrt[3]{j^2 30^\circ} = \frac{j^2}{3}$$

байна.

$$\text{Үүнд } \sqrt[3]{j^2 30^\circ} = x \quad \text{хэрхэл} \quad \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{j^2}{3} \quad \text{буюу}$$

$$3x^3 - j^2 x^2 - 3x + j^2 = 0 \quad \text{хэрхэл} \quad x_1 = \sqrt[3]{j^2 10^\circ}, \quad x_2 = \sqrt[3]{j^2 50^\circ}, \quad x_3 = \sqrt[3]{j^2 90^\circ}$$

$$\begin{aligned} 9x^3 - 3x^2 &= \sqrt{3} - 3\sqrt{3}x^2 \\ 3x^3 - 3\sqrt{3}x^2 &= 9x + \sqrt{3} = 0 \end{aligned}$$

-УДА нь шийд болно. Иймдээ биеийн тохироо бичиж

$$\begin{cases} \lg 10^\circ - \lg 50^\circ + \lg 70^\circ = \sqrt{3} \\ \lg 10^\circ \cdot \lg 70^\circ - \lg 10^\circ \lg 50^\circ - \lg 50^\circ \lg 70^\circ = -3 \end{cases}$$

байна.

Иймд $\lg^2 10^\circ + \lg^2 50^\circ + \lg^2 70^\circ =$

$$= (\lg 10^\circ - \lg 50^\circ + \lg 70^\circ)^2 - 2(\lg 10^\circ \lg 70^\circ - \lg 10^\circ \lg 50^\circ - \lg 50^\circ \lg 70^\circ) = 3 - 2(-3) = 9$$

болно.

У/ $\varphi_k = (k-1) \cdot \frac{2\pi}{n}$, $k=1, 2, \dots, n$ $\varphi_0=1^\circ, \varphi_1=2^\circ, \varphi_2=3^\circ, \dots, \varphi_n=55^\circ$

ба. $\lg 45 \varphi_k = \lg(50^\circ + 5^\circ)$ болох тус $\lg 45 \varphi - 1$ тэгшитгэлд $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ууд нь шийд болно. $\lg 45 \varphi - 1$ -ийг $\lg \varphi - 1$ ба, өмнөхтэй адилхан хялбарчилсан гэрээ тэгшитгэлд $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ ууд нь шийд болно. Иймд дүгнэж буйг олгох хялбарчилсан биеийн хялбарчилсан

$\lg^2 1^\circ + \lg^2 2^\circ + \dots + \lg^2 55^\circ + \lg^2 55^\circ$ -ийг хялбарчилсан баж болох нь зарчмын хувьд илэрхийлэл учир үлдэв.

Бодлого 6.

$$b. S = \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \cos 4^\circ + \dots + \cos 55^\circ$$

$$c. T = a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2 + \dots + a_n \cos \varphi_n$$

хялбарчилсан хувьд. Тусгай: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ хялбарчилсан геометрийн прогресс $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ - дүгнэж буйг арифметик прогресс үүсгэнэ.

Бодвол $-1/L = \sin 3^\circ + \sin 4^\circ + \sin 5^\circ + \dots + \sin 55^\circ$ гэвэл

$$S + iL = (\cos 1^\circ + i \sin 1^\circ) + (\cos 2^\circ + i \sin 2^\circ) + \dots + (\cos 55^\circ + i \sin 55^\circ) =$$

$$= (\cos 1^\circ + i \sin 1^\circ) + (\cos 2^\circ + i \sin 2^\circ)^2 + (\cos 3^\circ + i \sin 3^\circ)^3 + \dots + (\cos 55^\circ + i \sin 55^\circ)^{55}$$

болно.

$$\cos 1^\circ + i \sin 1^\circ = e^{i \cdot 1^\circ}$$

ийг оруулбал:

$$\begin{aligned}
S + iL &= d + d^2 + d^3 + \dots + d^n = \frac{d(d^{12}-1)}{d^{12}-1} = \frac{d^{12}-1}{d-d^{12}} = \\
&= \frac{(\cos 18^\circ + i \sin 18^\circ)^{12} - 1}{\cos 18^\circ + i \sin 18^\circ - (\cos 3^\circ + i \sin 3^\circ)} = \frac{\cos 36^\circ - 1 + i \sin 36^\circ}{d i \sin 3^\circ} = \\
&= \frac{-2 \sin^2 18^\circ + 2 i \sin 18^\circ \cos 18^\circ}{2 i \sin 3^\circ} \cdot \frac{i}{i} = \frac{2 \sin 18^\circ (\cos 18^\circ + i \sin 18^\circ)}{2 i \sin 3^\circ} = \\
&= \frac{\sin 18^\circ \cos 18^\circ}{\sin 3^\circ} + i \frac{\sin^2 18^\circ}{\sin 3^\circ} = \frac{\sin 36^\circ}{2 \sin 3^\circ} + i \frac{\sin^2 18^\circ}{\sin 3^\circ}
\end{aligned}$$

Эндээс $S = \frac{\sin 36^\circ}{2 \sin 3^\circ}$, $L = \frac{\sin^2 18^\circ}{\sin 3^\circ}$ байна.

В) $\{a_n\}$ геометр прогрессын хуваарийг q , $\{q_n\}$ арифметик прогрессын d , $\alpha = \cos \varphi + i \sin \varphi$ гэж тэмдэглэвэл:

$$T = a_1 \cos \varphi_1 + a_1 q \cos(\varphi_1 + d) + \dots + a_1 q^{n-1} \cos[\varphi_1 + (n-1)d] \quad \text{болно.}$$

$$M = a_1 \sin \varphi_1 + a_1 q \sin(\varphi_1 + d) + \dots + a_1 q^{n-1} \sin[\varphi_1 + (n-1)d] \quad \text{гэвэл}$$

$$\begin{aligned}
T + iM &= a_1 \{(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) + q_1 [\cos(\varphi_1 + d) + i \sin(\varphi_1 + d)] + \dots + q^{n-1} [\cos(\varphi_1 + (n-1)d) + i \sin(\varphi_1 + (n-1)d)]\} = \\
&= a_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \{1 + q_1 (\cos d + i \sin d) + \dots + q^{n-1} (\cos(n-1)d + i \sin(n-1)d)\} = \\
&= a_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \{1 + q_1 (\cos d + i \sin d) + q_1^2 (\cos d + i \sin d)^2 + \dots + q_1^{n-1} (\cos d + i \sin d)^{n-1}\} = \\
&= a_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (1 + q_1 d + q_1^2 d^2 + \dots + q_1^{n-1} d^{n-1}) = \frac{a_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (q_1^n d^n - 1)}{q_1 d - 1}
\end{aligned}$$

болно. Ийнхүү $T + iM = a_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot \frac{q_1^n (\cos d + i \sin d)^n - 1}{q_1 \cos d + i q_1 \sin d - 1} =$

$$= a_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot \frac{q_1^n (\cos d + i \sin d)^n - 1}{q_1 \cos d - 1 + q_1 i \sin d} \cdot \frac{(q_1 \cos d - 1) - i q_1 \sin d}{(q_1 \cos d - 1) - i q_1 \sin d} =$$

$$= \frac{a_0 [q^{n+1} \cos((n+1)d + \varphi_0) - q^n \cos(nd + \varphi_0) - q \cos(\varphi - d) + \cos \varphi]}{q^2 - 2q \cos d + 1}$$

$$+ i \frac{a_0 \cdot A(q, d, \varphi, n)}{q^2 - 2q \cos d + 1}$$

бую

$$T = \frac{a_0 [q^{n+1} \cos((n+1)d + \varphi_0) - q^n \cos(nd + \varphi_0) - q \cos(\varphi - d) + \cos \varphi]}{q^2 - 2q \cos d + 1}$$

болно.

Мөн

$$M = \frac{a_0 \cdot A(q, d, n, \varphi)}{q^2 - 2q \cos d + 1} =$$

$$= \frac{a_0 [q^{n+1} \sin((n+1)d + \varphi_0) - q^n \sin(nd + \varphi_0) - q \sin(\varphi - d) + \sin \varphi]}{q^2 - 2q \cos d + 1}$$

болно.

Бодлого 3. $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Олон гишүүнийг квадрат гурван гишүүнийн үржвэр эвчлэл.

Бодолт:

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x^5 - 1}{x - 1}; x \neq 1$$

байх тул

$x^5 - 1$ -ийн $x_0 = 1$ -оос ялгаатай гүйцүүл нь $f(x)$ -ийн язгуурууд болно. $x^5 - 1 = 0$ буюу $x^5 = 1$ -ээс $x_k = \sqrt[5]{1}$ болно.

$$1 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ \quad \text{эсв} \quad x_k = \sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ}$$

$$\cos \frac{2\pi k}{5} + i \sin \frac{2\pi k}{5}; \quad k = 0, 4$$

болно.

$$\text{Үүнд: } x_0 = 1, x_1 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}, x_2 = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5} =$$

75

$$= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2} =$$

$$= \overline{x_3} \Rightarrow x_3 = \overline{x_2}, \quad x_4 = \overline{x_1};$$

байна.

$$\text{Иймд } f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = (x - x_1)(x - \overline{x_1})(x - x_2)(x - \overline{x_2}) =$$

$$= (x^2 - (x_1 + \overline{x_1})x + x_1 \overline{x_1}) \cdot (x^2 - (x_2 + \overline{x_2})x + x_2 \overline{x_2}) =$$

$$= (x^2 - 2\cos\frac{2\pi}{7}x + 1)(x^2 - 2\cos\frac{4\pi}{7}x + 1) \text{ болно. Энэ боллогын бодолт нь}$$

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n$$

хэлбэрийн олон гишүүнийг үржигдэхүүнд задлах аргыг эвсж байгаа хэрэг нь.

Бодлого 4:

$$a) \sin^2 \frac{\pi}{7} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{7} \cdot \sin^2 \frac{3\pi}{7} = \frac{7}{64}$$

$$a) \cos^2 \frac{\pi}{7} \cdot \cos^2 \frac{2\pi}{7} \cdot \cos^2 \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{64}$$

Амлитгануудыг батал.

Бодолт: $f(x) = x^7 - 1$ -ийг бодит коэффициенттэй үл задрах үржигдэхүүнд задалъя. $x^7 - 1 = 0$ тэгшитгэлийн шийдүүд нь $x_k = \cos \frac{2k\pi}{7} + i \sin \frac{2k\pi}{7}$;

$$x = \overline{x_6}$$

$$\text{ба } \overline{x_k} = \cos \frac{2k\pi}{7} - i \sin \frac{2k\pi}{7} =$$

$$= \cos\left(2x - \frac{2k\pi}{7}\right) - i \sin\left(2x - \frac{2k\pi}{7}\right) = \cos \frac{2x(7-k)}{7} =$$

$$-i \sin \frac{2x(7-k)}{7} = \overline{x_{7-k}}, \quad k = 1, 3$$

тул

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = (x-1) \prod_{k=1}^2 (x^2 - 2\cos\frac{2\pi k}{3}x + 1) \quad \text{болно.}$$

$$\text{Индээс } x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 = \prod_{k=1}^3 (x^2 - 2\cos\frac{2\pi k}{3}x + 1) \quad \text{болно.}$$

$$\text{Энэ тэнцэлд } x=1 \text{ гэвэл } 7 = \prod_{k=1}^3 (2 - 2\cos\frac{2\pi k}{3}) = 2^3 \prod_{k=1}^3 (1 - \cos\frac{2\pi k}{3}).$$

$$= 8 \cdot 8 \cdot \prod_{k=1}^3 \sin^2\frac{\pi k}{3} \quad \text{болно.}$$

$$\sin^2\frac{\pi}{3} \cdot \sin^2\frac{2\pi}{3} \cdot \sin^2\frac{4\pi}{3} = \frac{7}{64}$$

Болох нь батлагдана. Мөн үүвчлэн $x^6+x^5+\dots+x+1=0$ тэгшитгэлийн шийдүүд ба коэффициентүүдийн холбоог /Биетийн тогбөгт / санавал

$$\sum_{k=1}^6 x_k = -\frac{6}{x_7} (\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = -1 \quad \text{байх ба}$$

$$\text{Эндээс } \sum_{k=1}^6 \cos\frac{2\pi k}{3} = -1, \sum_{k=1}^6 \sin\frac{2\pi k}{3} = 0 \text{ буюу } x_k = \bar{x}_{7-k}, k=1,3$$

$$\text{Сайхыг тооцвол } \cos\frac{4\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \sin\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} = 0$$

адиатгалууд батлагдана.

Бодлого 5. R радиустай тойрогт зөв n -энцэгт $A_1, A_2, \dots, A_n$

багтээс.

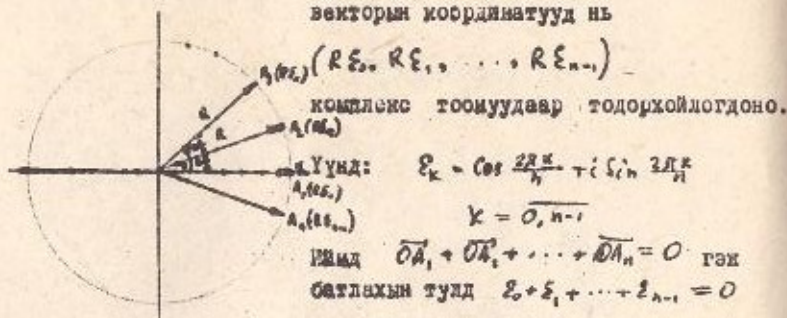
а/ $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$ болохыг батал. Үүнд O нь тойргийн төв.

б/ Тойргийн дурын M цэгээс зөв n -энцэгтийн оройнууд хүртэлх зайн квадратуудын нийлбэрийг ол.

а/ Бодолт. Тойргийн төв O -г координатын эхлэлтэй, OM_1 цагираг OX тэнхлэгийн эерэг чиглэлтэй давхцсан гэх.

үзвэл $\vec{OA}_1, \vec{OA}_2, \dots, \vec{OA}_n$

векторын координатууд нь



гэх батлахад хангалттай.

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^k = \varepsilon_1^k$$

$$k = 0, n-1, (\varepsilon_1^0 = \varepsilon_1^{n-1} = 1)$$

байгаа учир

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_1^0 + \varepsilon_1^1 + \varepsilon_1^2 + \dots + \varepsilon_1^{n-1} = \frac{\varepsilon_1^n - 1}{\varepsilon_1 - 1} = \frac{1 - 1}{\varepsilon_1 - 1} = 0$$

болж а/ өгүүлсээр батлагдана.

6/ M цэгийг Z -комплекс тоо тодорхойлдог гэвэл $\vec{OA}_i$ векторыг $(\varepsilon_i - z)$ комплекс тоо тодорхойлно.

$|OM| = |z| = R$ тул $Z = R\eta, |\eta| = 1$ гэж бичиж болно. Иймд

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |MA_i|^2 &= \sum_{i=1}^n |R\varepsilon_i - R\eta|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} (R\varepsilon_i - R\eta)(\overline{R\varepsilon_i - R\eta}) \\ &= R^2 \sum_{i=0}^{n-1} (\varepsilon_i - \eta)(\overline{\varepsilon_i - \eta}) = R^2 \sum_{i=0}^{n-1} (\varepsilon_i - \eta)(\overline{\varepsilon_i} - \bar{\eta}) = R^2 \sum_{i=0}^{n-1} [\varepsilon_i \bar{\varepsilon}_i \\ &\quad - \eta \bar{\varepsilon}_i - \varepsilon_i \bar{\eta} + \eta \bar{\eta}] = R^2 \sum_{i=0}^{n-1} (|\varepsilon_i|^2 + |\eta|^2) - R^2 \eta \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\varepsilon}_i - \\ &\quad - R^2 \bar{\eta} \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \end{aligned}$$

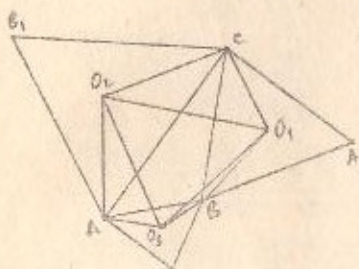
78

$$-R^2 \bar{\eta} \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i = R^2 \varepsilon_n - R^2 \bar{\eta} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \right) - R^2 \bar{\eta} \cdot 0 =$$

$$= 2R^2 \varepsilon_n - R^2 \bar{\eta} \cdot 0 = 2R^2 \varepsilon_n$$

болно.

Бодлого 6. Дурин ABC гурвалжны BC, CA, AB талууд дээр A_1, B_1, C_1 зөв гурвалжнууд байгуулагджээ. O_1, O_2, O_3 нь A_1BC, AB_1C, ABC_1 гурвалжнуудын төв /медиануудын огтлолцол бол $\Delta O_1O_2O_3$ нь зөв гурвалжин болохыг батал.



Бодолт. O_1, O_2, O_3 цэгүүдэд төвтэй 120° арг эргүүлэх эргүүлэлтийн композицийг авч үзье. O_2 -ийг тойруулан A -г 120° эргүүлэхэд C цэгт, O_1 -ийг тойруулан C -г 120° эргүүлэхэд B цэгт, O_3 -г тойруулан B эргүүлэхэд A цэгт шилжинэ. Эдгээр ркийг композикт тоо шингэн

гүйцэтгэвэл:

$$\left. \begin{aligned} C &= O_2 + \eta(A - O_2) \\ B &= O_1 + \eta(C - O_1) \\ A &= O_3 + \eta(B - O_3) \end{aligned} \right\}$$

болно. Эдгээр тэнцэтгэлд A, B, C, O_1, O_2, O_3 үсгүүд нь хөрвөжээд эдгээр цэгүүдийг тодорхойлогч комплекс тоог тэмдэглэсэн ба

$$\eta = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \eta^3 = 1$$

Эндээс $A = O_3 + \eta(O_1 + \eta(O_2 + \eta(A - O_2) - O_1) - O_3)$ буюу

$$A = O_3 + \eta O_1 + \eta^2 O_2 + \eta^3(A - O_2) - \eta^2 O_1 - \eta O_3$$

болно.

$$\eta^3 = 1 \text{ -ийг тооцвол } (-\frac{1}{2})O_3 + \eta(1-\eta)O_1 = (1-\eta^2)O_2, \quad \eta \neq 1 \text{ буюу}$$

$$O_3 + \eta O_1 = (1+\eta)O_2 \Rightarrow O_3 = (1+\eta)(O_2 - O_1) + O_1$$

Үүнд $i + \eta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$ тул

O_1 -ийг тойруулан $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ өнцгөөр O_2 -ийг эргүүлэхэд O_2 гарах юм. Иймд $\triangle O_1 O_2$ нь зөв гурвалжин болно.

Бодлого 7. Нэгж радиустай тойрогт багтсан $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4$ зөв таван өнцөгтийн хувьд $(|A_0 A_1| |A_0 A_2| |A_0 A_3| |A_0 A_4|)^2 = 5$ тэнцэтгэл биелэхийг батал.

Бодолт: $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4$ зөв таван өнцөгтийн оройнууд нь хэргэлзэн $\xi_0 = 1, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ комплекс тоонуудаар тодорхойлогддог. Үүнд: $\xi^5 = 1$ тэнцэтгэлийн шийдүүд болно.

$$\begin{aligned} \chi^5 - 1 &= (\chi - 1)(\chi^4 + \chi^3 + \chi^2 + \chi + 1) = (\chi - 1)(\chi - \xi_1)(\chi - \xi_2)(\chi - \xi_3)(\chi - \xi_4) = \\ &= (\chi^4 + \chi^3 + \chi^2 + \chi + 1) = (\chi - \xi_1)(\chi - \xi_2)(\chi - \xi_3)(\chi - \xi_4) \end{aligned}$$

болно. Энэ тэнцэлд $\chi = 1$ гэвэл $5 = (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)(1 - \xi_4)$ болно. Энд $\bar{\xi}_1 = \xi_4, \bar{\xi}_2 = \xi_3$ / Бодлого 4-ийг үз / ба

$|1 - \xi_1| = |\bar{1} - \bar{\xi}_1| = |1 - \xi_4| = |A_0 A_1|, |1 - \xi_2| = |\bar{1} - \bar{\xi}_2| = |1 - \xi_3| = |A_0 A_2|$ гэдгийг тооцвол

$$|(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)(1 - \xi_4)| = 5 \quad \text{буюу} \quad |1 - \xi_1|^2 |1 - \xi_2|^2 = 5 \quad \text{байна.}$$

$|1 - \xi_1| = |A_0 A_1|, |1 - \xi_2| = |A_0 A_2|$ учир $(|A_0 A_1| |A_0 A_2|)^2 = 5$ болох нь батлагдав.

Бие даах бодох бодлогууд

1. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ нь 1-ийн n -зэргийн 1-ээс ялгаатай язгуурууд бол дараах өгүүлбэрүүдийг батал.

а/ $(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \dots (1 - \xi_{n-1}) = n$

б/ $(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) \dots (1 + \xi_{n-1}) = 0$ хэрвэ n -сондгой
 $(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) \dots (1 + \xi_{n-1}) = 1$ хэрвэ n -тэгш

в/ $(q - \xi_1)(q - \xi_2) \dots (q - \xi_{n-1})$ нь бүхэл тоо, Энд $\forall q \in \mathbb{Z}$.

2. Дараах адилтгалуудыг батал.

а/ $\sum_{k=1}^n \frac{\xi_k}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{\bar{\xi}_k}{k} + \dots + \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)\xi_k}{k} = \frac{n}{2^{n-1}};$

$$a) \cos \frac{\pi}{n} \cdot \cos \frac{2\pi}{n} \cdot \dots \cdot \cos \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$b) \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \cdot \dots \cdot \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

$$r) \sin \frac{\pi}{2n+1} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \dots \cdot \sin \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

$$3. a) \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{n} = 0$$

$$b) \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = 0$$

$$a) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (x + \epsilon_k y) = x$$

Үүнд ϵ_k нь 1 -ийн n -эргийн язгуурууд

$$a) \frac{1}{1-\epsilon_1} + \frac{1}{1-\epsilon_2} + \dots + \frac{1}{1-\epsilon_{n-1}} = \frac{n-1}{2}$$

единицталууныг бичвэл, $\epsilon_i \neq 1$ ба $1-\epsilon_i$ нь n -эргийн язгуурууд

4. Дараах бодлогуудыг бод

$$a) \sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{7}} = ?$$

$$b) \operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7} \cdot \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} = ?$$

$$b) \sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{9}} = ?$$

5. Дараах олон гишүүнүүдийг үржигдэхүүн болгон задал.

$$a) x^4 + 1$$

$$b) x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$$

$$6. f(x) = x^{3n} + x^{3n+1} + x^{3p+2} \quad \text{нь} \quad g(x) = x^3 + x^2 + 1$$

олон гишүүнтэд үлдэгдэлтэйгээр хуваагдаг бол тоонуудын хамаарлыг ол.

m, n, p

7. Дараах нийлбэрүүдийг ол.

$$a/ \cos^2 9^\circ + \cos^2 27^\circ + \cos^2 63^\circ + \cos^2 81^\circ + \cos^2 99^\circ$$

$$b/ 2 + 3 \sin 3^\circ + 6 \sin 5^\circ + 12 \sin 7^\circ + \dots + 3 \cdot 2^{\frac{1}{2}n} \sin 17^\circ$$

$$в/ \cos^2 2^\circ + \cos^2 13^\circ + \cos^2 15^\circ + \cos^2 24^\circ + \dots + \cos^2 85^\circ$$

8. $A_1, A_2, \dots, A_n$

нь нэгж радиустай тойрог

дээр орших цэгүүд, O нь тойргийн төв бөгөөд

$$\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \dots + \vec{OA}_n = 0$$

нөхцөл биелдэг бол

$|\vec{OA}_1| + |\vec{OA}_2| + \dots + |\vec{OA}_{n-1}| + |\vec{OA}_n| \geq n$ тэнцэлбис биелэхийг батал. B -н тойрог дээр орших ду.нь цэг.

9. Дурин гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн гадна талууд дээр

квадратууд байгуулагдээ. Эсрэг орших квадратуудын төвүүдийг холбосон хэрчмүүд тэнцүү урттай бөгөөд хоорондоо перпендикуляр байхыг батал.

10. Хавтгай дээр $\Delta A_1 A_2 A_3$ гурвалжин ба P_k цэг өгөгджээ. $A_3 - A_{3-2} \cdot 3 \geq 4$ боловч. A_{3-1} цэгийг тойруулан цагийн эрүүний дагуу 120° -аар P_k цэгийг эргүүлэхэд цэг $(k=1, 2, \dots)$ гарсан байхавч $P_1, P_2, P_3, \dots$ цэгүүдийн дараалан байгуулал. Хэрэв $P_{1977} = P_0$ бол $\Delta A_1 A_2 A_3$ нь зөв гурвалжин болохыг батал.

11. $A_1, A_2, \dots, A_n$ гүдгэр n - өнцөгтийн оройнууд нь $z_1, z_2, \dots, z_n$

комплекс тоонуудаар тодорхойлогддог байг.

Хэрэв $\frac{1}{z_1 - z_2} + \frac{1}{z_2 - z_3} + \dots + \frac{1}{z_n - z_1} = 0$ бол $A(z)$ цэг

энэ олон өнцөгтийн дотор оршихыг батал.

12. $A_1, A_2, \dots, A_n$ нь тойрогт сэгтсэн зөв n - өнцөгт, M нь A_1, A_n нум дээр байрлах дурин цэг, байг. Тэгвэл

$$a/ \frac{1}{d_1 d_2} + \frac{1}{d_2 d_3} + \dots + \frac{1}{d_{n-1} d_n} = \frac{1}{d_1 d_n}$$

б/ n - сондгой үед $d_1 + d_3 + d_5 + \dots + d_n = d_2 + d_4 + \dots + d_{n-1}$, тэнцлүүд биелэгдэхийг батал. Энд $|MA_i| = d_i$ ($i=1, n$)

ГЕОМЕТРИЙН БАЙГУУЛАХ БОСЛОГО.

н.Бидон

Геометрийн аливаа дүрсийг байгуулах нь ямар бичгэм ашиглахаас хамалч тухайн дүрсээс муу ху өгөгдсөн үед байгуулалтыг уг багахуудаар гүйцэтгэх болох вэ? гэсэн асуудалд хариулахнаас эхэлнэ.

Байгуулалтад ашиглагдах хамгийн түгээмэл багах болох хуваарьгүй / нэг талт / шугам ба гортигоор хийх байгуулалтын хувьд: цэгийг өгөгдсөн, эсвэл өгөгдсөн буюу байгуулагдсан шугамуудын огтлолцол болж байдаг;

Хэрчимийг төгсгөлийн цэгүүд нь өгөгдсөн буюу байгуулагдсан үед;

Шулуунг ялгаатай хоёр цэг нь өгөгдсөн буюу байгуулагдсан үед;

Өнцгийг орой ба талууд дээр байгуулах нэг нэг цэг өгөгдсөн буюу байгуулагдсан үед;

Гурвалжныг оройн цэгүүд өгөгдсөн буюу байгуулагдсан үед;

Тойргийг төв ба тойрог дээрх нэг цэг эсвэл радиустай хэмцүү хэрчим өгөгдсөн үед;

Тойргийн нумыг тойргийн төв ба нумын төгсгөлийн цэгүүд өгөгдсөн буюу байгуулагдсан үед тус тус байгуулагдсанд тооцон болно.

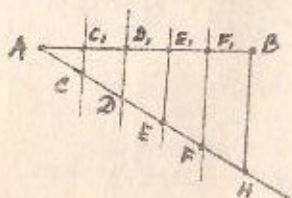
Байгуулалт хийх явцад олонтаа тохиолддог дараах хялбар дүрсүүдийг байгуулах аргыг сайтар нээмжээд цаашид аливаа тайлбаргүйгээр хялбар байгуулалт гээд шууд байгуулдаг юм. Үүнд: Хэрчмийн дундах цэгийг дайруулан перпендикуляр татах, шулуун гадна цэгээс шулуун перпендикуляр буулгах, шулуун цэгээс шулуун перпендикуляр босгох, өгөгдсөн өнцгийн биссектрис байгуулах, өгөгдсөн өнцөгтэй хэмцүү өнцөг байгуулах, тойргийн өгөгдсөн цэгт шүртэгч татах, тойргийн гаднах цэгээс тойрогт шүртэгч татах, шулуун гаднах цэгийг дайруулан уг шулуунтай параллель шулуун татах, хэрчмийг M хэмцүү хэсэгт хуваах, өгөгдсөн хоёр хэрчмийн дундах пропорциональ хэрчмийг байгуулах, гурвалжныг гурван талаар нь байгуулах, гурвалжныг хоёр тал хоорондох өнцгөөр байгуулах, гурвалжныг хоёр өнцөг хоорондох талаар байгуулах, төгс өнцөгт

гурвалжныг катет, гипотенузаар нь байгуулах гэх мэт.

Эдгээр хялбар байгуулалт ихэнх сурах онцигт байдгийг харгалзан зарим нэг хийгээ авч үзье.

Хийгээ 1. Өгөгдсөн AB хэрчмийг таван тэнцүү хэсэгт хуваа.

Бодолт. AB хэрчимтэй ямар нэг өнцөг үүсгэсэн, A цэгт эхтэй цацраг татаад түүн дээрээ эхнээс нь нэг ижил урттай таван хэрчим дараалуулан тасалж сүүлчийн хэрчмийн төгсгөлийг B цэгтэй холбоно. / 1-р зураг /

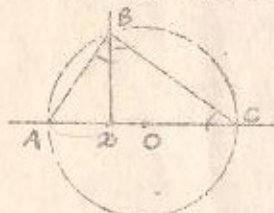


1-р зураг.

Дараа нь BH шулуун гадна орших A, C, D, E, F цэгүүдийг дайруулан түүнтэй параллель шулуунууд татаж AB -тай огтолцуулахад үүсэх $C1, D1, E1, F1$ цэгүүд Фалесийг теорем ёсоор AB хэрчмийг таван тэнцүү хэсэгт хуваана.

Хийгээ 2. Өгөгдсөн a, b хэрчмүүдийн дундаж пропорциональ хэрчмийг байгуул.

Бодолт: a, b хэрчмүүдээ нэг шулуун дээр дараалуулан авч тэдгээрийн "нэгдэл" диаметр нь болох тойрог байгуулна / 2-р зураг /. Дараа нь a, b хэрчмүүдийн өрөнхий төгсгөл



2-р зураг.

d эсвэл диаметрт перпендикуляр босгон тойрогтой огтлолцох цэгийг B гэвэл

ABC гурвалжны тэгш өнцөгтэй учир

BD нь тэгш өнцөгтийн оройгоос гипотенузад буулгасан өндөр болох AD, DC хэрчмүүдийн дундаж пропорциональ хэрчим болно.

Байгуулах бодлого бодох үе шат:

Байгуулах бодлого бодох сэтгэлгээний явц бодлогод анализ хийж төлөвлөгөө боловсруулах, байгуулаагт хийх, баталгаа, бодлогын шийдийг шинжлэх гэсэн дөрвөн үе явчанд хувааж болно.

1. Анализ хийх матад уг дүрсээ байгуулагдсан гэх үзэх судууч зургаг үйлдээд түүний ямар хэсгүүд нь өгөгдсөн, уг хэсгээр байгуулах шаардлагатайг тогтооно. Өгөгдсөн зүйлсээр бусдыг байгуулах арга шууд харагдахгүй байвал уг дүрсийн ямар дэд хэсгийг байгуулчихсан байхад олох дүрс байгуулагдах вэ, энэ дэд хэсгийг байгуулахад өгөгдсөн зүйлс ямар үүрэг гүйцэтгэх вэ, гэдгийг тогтоохыг зорино. Мөн анализын явцад туслах чанар, шүлүүн, хэрчим авч нэмэлт байгуулалт хийх, уг дүрсийн элементүүдийн хамаарлыг илэрхийлсэн теоремууд, урьд өмнө хийгдсэн байгуулалт зэргийг ашиглах шаардлага гардаг. Энэ шат нь уг дүрсийг өгөгдсөн зүйлсээр байгуулах дээд дарааллыг тогтоосон төлөвлөгөө зохиосноор дуусна.

2. Байгуулалт хийхдээ зохиосон төлөвлөгөөний дагуу ашиглахыг зөвшөөрсөн багажуудаараа олох дүрсээ цэвэр нийс бай зурна.

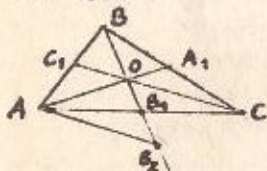
3. Баталгааны матад байгуулагдсан дүрс бодлогод өгөгдсөн бүх нөхцөлд тохирно гэдгийг үзүүлнэ.

4. Шийдийг шинжлэх: Байгуулалт нь бодлогын нөхцлийг хангасан нэг дүрс байгуулснаар зогсоно. Гэтэл энэ байгуулалт үргэлж боломжтой уу, хэдэн шийд гарч болох вэ, өөр төлөвлөгөөгөөр байгуулалт хийхэд шийд нэмэгдэх үү гэх мэт асуудалд хариулах шаардлагатай. Эдгээрийг байгуулалтын явцыг шинжлэх замаар хариулж болдог.

Одоо байгуулалтын үе матуудыг тодорхой бодлогуудын хувьд авч үзье.

Жишээ 3. Өгөгдсөн гурван медианаар нь гурвалжныг байгуул.

Анализ: Өгөгдсөн гурван хэрчим m_a, m_b, m_c медиан нь болох ABC гурвалжин байгуулагдсан, байна гэх үзье /3-р зургаг /.



3-р зургаг.

Медианууд оройгоос 2:1 харьцаагаар огтлолцох учир

$$BO = \frac{2}{3} m_c, \quad OB_1 = \frac{1}{3} m_c,$$

$$AO = \frac{2}{3} m_a, OA_1 = \frac{1}{3} m_a, CO = \frac{2}{3} m_c, OC_1 = \frac{1}{3} m_c$$

болох ба бид ийм урттай хэрчмүүд байгуулж чадна. Гурвалжны нэг оройг хаана ч сонгон авч болох ба өөр нэг оройг олчихвол O нэг олдоно. Дараа нь байгуулсан хоёр оройг холбосон талын дундаж ба O -г ашиглаад гуравдахь оройг олж болно гэсэн санаа төрж байна. Гэтэл A оройгоос гарсан хоёр талын дундаж цэгүүдийн аль нэгийг мэдвэл өөр нэг оройгоо олж болох юм. AC хэрчнийн дундаж цэг B_1 -г олох зорилго тавь. BB_1 медианы үргэлжлэл дээр

$OB_1 = B_1B_2$ байх ба B_2 цэг альбад диагоналиудынхаа огтлолцлоор таллан хуваагдсан $AOCB_2$ дөрвөн өнцөгт параллелограмм учир

$AB_2 = \frac{2}{3} m_c, OB_2 = \frac{2}{3} m_c, AO = \frac{2}{3} m_a$ талуудтай гурвалжныг байгуулж чадна. Ийнхүү байгуулалтын дараах төлөвлөгөө гарна:

1/ AOB_2 гурвалжныг гурван тал $\frac{2}{3} m_a, \frac{2}{3} m_c, \frac{2}{3} m_c$

-аар нь байгуулах.

2/ OB_2 хэрчнийг таллан хувааж суй B_1 цэг байгуулах.

3/ AB_1 зулуун дээр $AB_1 = B_1C$ байх C цэг олох.

4/ OB_2 зулуун дээр $OB_2 = OB$ байх B цэг байгуулах.

5/ B -г A, C цэгүүдтэй холбох.

Баталгаа: $AO = \frac{2}{3} m_a, OB_2 = \frac{2}{3} m_c, AB_2 = \frac{2}{3} m_c,$

$$OB_1 = B_1B_2 = \frac{1}{3} m_c, OB_2 = OB = \frac{2}{3} m_c,$$

$$AB_1 = B_1C$$

байхаар байгуулалт хийгдсэн учир BB_1 хэрчин ABC гурвалжны m_c медиан бөгөөд $BO : OB_1 = 2 : 1$ гэдгээс O нь медиануудын огтлолцлын цэг юм. Ийнхээс A, C -г O той холбоход зулуунуудын гурвалжинд харьцалгарах хэрчмүүд ABC гурвалжны медианууд юм.

Нөгөө тавиг $AO = \frac{2}{3} m_a$, $CO = \frac{2}{3} m_c$

тэдгйг анхарахад эдгээр модны урт нь харгалзан m_a, m_c болж батлах үүл батлагдана.

Шинжилгээ: Өгөгдсөн m_a, m_b, m_c хэрчмүүдийн хоёр богмог нь нийлээд урт дэрчнээсээ богино, тухайлбал

$$m_a + m_b < m_c \quad \text{байвал} \quad \frac{2}{3} m_a + \frac{2}{3} m_b < \frac{2}{3} m_c$$

бодох учир AOB_2 гурвалжин байгуулагддаггүй болж бодлого шийдгүй. Бусад тохиолдолд AOB_2 гурвалжин оршин байх ба B_1, C, B цэгүүд нэг утгатай олдох учир бодлого гавч шийдтэй болно.

Жишээ 4. Өгөгдсөн энцгийн гадна орших өрсөн цэгийг дайруулан уг энцгөөс $2r$ периметртэй гурвалжин огтлох шулуун тат.

Анализа: Энцгийн гадна өрсөн M цэгийг дайруулан уг энцгөөс гурвалжин огтлох нмр нэг шулуун татъя. /4-р зураг /.

Энэ шулуун ба энцгийн талуудыг шүргэсэн эадгай мужид нь байрлах тойрог авч үзвэл:

$$DF = DK, \quad EF = ES$$

/Тойргийн гаднах цэгээс татсан шүргэгчийн хэрчмүүд тэнцүү / учир BDE гурвалжин периметр

$$BK + BS - \text{тэй}$$

тэнцэнэ. Иймээс

$$BK = BS = r$$

байх K, S цэгүүд авч энцгийн

талуудад перпендикуляр өссөн огтолцуулж O цэгийг олоод OK радиустай тойрог байгуулна. Энцэт нь M цэгээс энэ тойрогт шүргэгч шулуун татна. (нмр нэлтгэвчээр заавал

$$BK = BS = r \quad \text{байхаар авдгийн учрыг өөрсдөө ол}.$$

Шүргэгчийн хэрчмүүдийн тухай дээрх теоремээс огтлогдсон гурвалжин периметр $BS + BK = r + r = 2r$ болно.

Инжилтэй: Энэ бодлого явцт шийдтэй байх ба M цэ-
рээс тойрогт доор шүргэгч татагдах бодлогч нэг нь шийд
болохгүй. Ийнхүү бодлого ганц шийдтэй байна.

Зарим бодлогын хуудал явцтай нэгээд авчирмаг шийдтэй
хийгддэг нь энэхүү жишээгээр харгалд.

Байгуулалт хийх аргууд

Байгуулах бодлогыг болоход аналцныг зөв хийн сурах нь
шийдвэрлэх үүрэгтэй бөгөөд түүнийг хэрхэн хийх байдлаар
байлаар нь байгуулалт хийх аргуудыг ангилж болно. Ангилж
хийх зарим түгээмэл аргуудыг авч үзье.

1. Цэгүүдийн байрны арга. Геометрийн дүрсүүдийг тодор-
хой шинжтэй цэгүүдийн байр гэж үздэг. Ангилж хийхэд цэгүү-
дийн байрны ангилалд цагын өөрөө нь оле биеэс $\dots$ үн хамга-
рах хоёр нөхцөлд тохирох цэг олохын тулд нөхцлүүдийг дэн
дэлгээр нь авч түүнд тохирох цэгүүдийн байрруудыг байгуу-
лаад тэдгээрийн огцлолцооор хаяа байгаа цэгээ олоход ор-
шино.

Ниймээ энэ аргаар байгуулалт хийхийн тулд нэг бүрийн
нөхцлөөр тодорхойлогдох цэгүүдийн байрны нэгдэг байх шаар-
длагатай нь. Бид зарим хялбар бөгөөд түгээмэл шинжтэй, хаат-
гайн цэгүүдийн байрныг дурдвал.

O цэгээс R зайд байрлах цэгүүдийн байр нь O ~
цагт төвтэй R радиустай тойрог,

A, B цэгүүдээс ижил зайд аслагдсан цэгүүдийн байр нь
 AB хэрчимийн дундах перпендикуляр гэгдэх шулуун,

Огцолцсон хоёр шулуунаас ижил зайд байх цэгүүдийн
байр нь тэдгээр шулуунуудтай байгуулагдсан өнцгийн биссек-
трисууд болох перпендикуляр хоёр шулуун,

AB хэрчмийг гэгч өнцгөөр харах цэгүүдийн байр нь
 AB диаметртэй тойргийн A, B -ээс бусад цэгүүд байна
гэх мэт.

Жишээ 5. Өгөгдсөн тойрог ба шулууныг шүргэсэн өгөгд
сэн радиустай тойрог байгуул.

Ангилж: Өгөгдсөн тойргоо O төвтэй R_1 радиустай,
олон тойргийг R_2 радиустай, өгөгдсөн шулуунаа A гэж

1310. /5-р зуураг/. Тойрог байгуулалын тухд тэг цагийг олох хэрэгтэй.



5-р зуураг.

хоёр хүргэлцдэг байна. Иймээс O цэгээс $Z_1 + Z_2$, a шулуунээс Z_2 зайд байрлах A цэг олж, O -оос $Z_1 + Z_2$ зайд байрлах цэгүүдийн байр нь O төвтэй $Z_1 + Z_2$ радиустай тойрог, a шулуунээс Z_2 зайд байрлах цэгүүдийн байр нь a -тай параллель түүнээс Z_2 зайд орших шулуунууд байна. Үүгээрнээг байгуулж огтлолцуулаад огтлолцолын A цэг дээр төвтэй Z_2 радиустай тойрог байгуулна /5-р зуураг /.

Анхныгээ: O цэгээс a шулуун хүрэх зайг d гэвэл $d > Z_1 + Z_2$ үед бодлого шийдэгүй, $d = Z_1 + Z_2$ үед ганц шийдтэй, $d < Z_1 + Z_2$ үед хоёр шийдтэй байна.

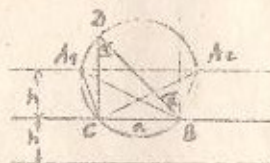
Анхныгээ 6. Гурвалжны α өнцөг, түүний перет a тал, энэ талд буусан h ондрөөр нь байгуул.

Анхныгээ: ABC гурвалжин байгуулж $BC = a$, $\hat{A} = \alpha$ $AD = h$ байна гэж үзье /6-р зуураг /. A цэгээс a талыг харах өнцөг α , BC шулуун хүрэх зай h болно. $BC = a$ байх B, C цэгүүд авснм дараа өмнөх хоёр нөхцөл биелэхээр A цэгийг олох ёстой.

Хэрэв A цэгээс BC шулуун хүрэх зай h байна, гэсэн нөхцлийг дангаар нь авч үзвэл ийм цэгүүдийн байр нь шулуунээс h зайд түүнтэй параллель байрлах шулуунууд байх бөгөөд тэдгээрийг b, b' гэж тэмдэглэе.

Дараа нь BC хэрчим α өнцгөөр харагдах нөхцлийг дангаар нь авч үзвэл BC хэрчим хавч нь болох тодорхой

тойргийн BC -д тулж бартсан өнцгүүдийн оройн байр болох юм байна. Энэ тойргийг байгуулахын тулд эхлээд $\alpha \neq 90^\circ$ үед α өнцөгтэй, $\alpha > 90^\circ$ үед $180^\circ - \alpha$ өнцөгтэй түүний эсрэг тал нь a байх тэгш өнцөгт гурвалжин BCB' байгуулна. Энэ гурвалжийн бартсан тойрог бидний байгуулах тойрог юм.



6-р зураг

Эдгээр цэгүүдийн байрны огтлолцоор A цэг олдоно. 6-р зурагт байгуулалтыг $\alpha < 90^\circ$ үед хийв.

Баталгаа: Тойргийн нэг нийд нүд тулж бартсан өнцгүүд тэнцүү учир A оройд α өнцөг үүснэ.

Шинжилгээ: Тойрог 6 шулуунтай огтлолцохгүй $h > a$ үед бол бодлого шийдгүй, шүргэнээ ганц хийдэг байна.

$\alpha > 90^\circ$ үед BCB' гурвалжин a катетийн эсрэг $180^\circ - \alpha$ өнцөг үүсэх ээр байгуулалт хийх бөгөөд тойргийн B' шулуунтай огтлолцоход A цэг гарна. $\alpha = 90^\circ$ үед байгуулах гурвалжин тэгш өнцөгтэй учир байгуулалт илэрхий.

2°. Гесметрийн хувиаргалт амтлах арга. Энэ аргын мөн чанар нь анализ хийх явцдаа байгуулах дүрс буюу түүний хэсгийг хувиаргалтаар хувиаргал гаргах дүрсийг олох дүрстэйгээ хамтруулан авч үзэхэд оршино. Бид эврийн түгээмэл тохиолдлуудыг авч үзье.

1. Параллель зөөлтийг амтлан өгөгдсөн салсангид хэсгүүдийг зөөж нийлүүдэн авч үзнэ.

Эхлээд 7. Трапецийг хоёр дэвсгэрийн a, b ба тэдгээрийн хоорондох өнцөг α нэг хатуу тал c -ээр байгуул.

Анализ: $ABCD$ нь бодмж байгуулах трапец гээ үзээд өгөгдсөн зүйлийг тэмдэглэн / 7-р зураг /.

BD -г параллель зөөж CE -г байгуулснаар ACE гурвалжин хоёр тал a, b тэдгээрийн хооронд үүсэх өнцөг нь $180^\circ - \alpha$ болох учир түүнийг байгуулж болно. Иймгээр



7-р зураг.

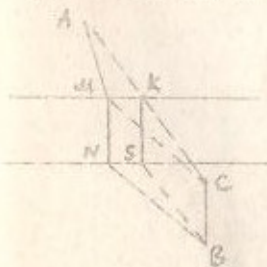
Баталгаа: $CE \parallel BD$ гэдгээс $\angle COE = \alpha$ нон $AE \parallel CB$ гэдгээс $BCEO$ дөрвөн өнцөгт параллелограмм болж $EO = b$ байна.

Байгуулалт ёсоор $AO = a$, $BO = c$ учир $ABCO$ нь бодний байгуулалт транш юм.

Бичлэгээ: CAE гурвалжин өндөр b нь C -ээс их бол бодлого шийдэгүй, $C = A$ үед тэнц шийдтэй, $C > A$ үед хоёр шийдтэй байна.

Бичээ 8. Сууцгийн хоёр талд байгаа A, B тосгонүүдийн хооронд хамгийн богино зайгаар зорчихын тулд суваг дээр гүүрийг хаана байгуулах вэ?

Анализ: Сууцгийн хоёр эргийг a, b гэсэн параллель шулуунууд, гүүр нь тэдгээрт перпендикуляр AN хэрчим гэх үзвэл / 6-р зураг /



8-р зураг

Ийнхүү KS хэрчим дээр гүүр байгуулна.

Байгуулалт: B цэгээс b шулуунд перпендикуляр

трапецийн A, C оройнууд олдоно. AE шулуунтай параллель, C -г дайрсан шулуун татаж A цэг дээр тоотой C радиустай тойрогтой огтлолцуулснаар B орой гарна. B -г дайруулан CE шулуунтай параллель шулуун татаж, D -г олно.

Нанай бодлого $AMNB$ тахир нугам хамгийн бага урттай байхаар M цэгийг a шулуун дээр олох асуулт далай шийлэх ба AN хэрчмийн урт хана ч тогтмол учир AM, BN хэрчмүүдийн аймлаар хамгийн богино байх нөхцлөөр болигдоно. Иймд NB хэрчмийг параллель зөөж ML хэрчим байгуулъя. AKC тахир нугамны урт нь A, M, C цэгүүд нэг шулуун дээр өөрөөр хэлбэл M цэг K -тэй давхцах байхад хамгийн богино байна.

шулуун татах түүн дээр $BC=MN$ байх C нэг аяаа түүнийгээ A тай холбож a шулуунтай огтлолцох K цэгийг олно. Дараа нь K цэгээс B шулуунд перпендикуляр буулгах S цэгийг байрлуулна.

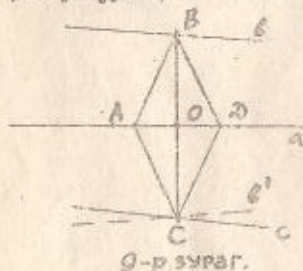
Баталгаа: $MN=BC=KS$ ба $KS \parallel BC$ учир

$BSKC$ нь параллелограмм аж. Иймээс $SB=KC$ болж $AM+MC > AC=AK+SB$ байна. Бодлого (гэнэ) ямагт шийдтэй.

б) Өгөгдсөн зүйлс буюу түүний хэсгийг хувиргалтаар хувиргаж / эргүүлэлт, тэнхлэгийн тэгнэхэм г.м / гарсан дүрсээ өгөгдсөн дүрстэй огтлолцуулж зарим чухал цэг олж болно.

Анхээ 9. a, b, c шулуунууд өгөгдсөн үед a шулуун дээр z урттай нэг диагональ нь b, c шулуунууд дээр нөгөө хоёр орой нь байрлах ромбо байгуул.

Анализ: $ABAC$ нь бидний олох ромбо, $z=AC$ байг. / 9-р зураг /.

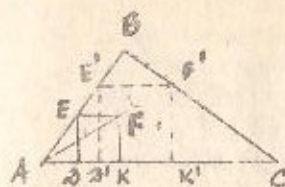


9-р зураг.

BC хэрчимийн дундаж цэг O дээр төвтэй $\frac{z}{2}$ радиустай тойрог татаж A, z цэгүүдийг байрлуулна.

Шинжилгээ: $c \parallel b'$ бол бодлого шийдгүй, c, b' шулуунууд давхцвал бодлого тоо томигүй олон шийдтэй, c, b' шулуунууд a шулуун гадна огтлолцвал бодлого ганц шийдтэй, a шулуун дээр огтлолцсон үед бодлого шийдгүй байна.

в) Заримдаа өгөгдсөн нөхцлүүдээс аль нэгийг орхиж бусад нөхцөлг тохирох дүрс байгуулаад түүнийгээ орхисон нөхцөл дийлэхээр хувиргаж олох дүрсээ байгуулна.

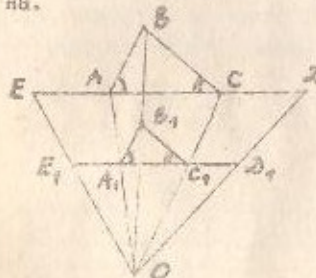


11-р зурагт гурвалжинд
квадрат байгааг
үзүүлб.

Анхны 12. Гурвалжин хоёр өнцөг
 α, β ба периметр P -өөр нь
байгуул.

II -р зураг

/Зураг 12/. Дараа нь A, C талын үргэлжлэл дээр $A, B, = A, E,$
 $C, B, = C, D,$ байх E, D цэгүүд авч, E, D шулуунтай парал-
лель ямар нэг шулуун дээр $ED = P$ байх ED хэрчим байгуул-
на.



12-р зураг

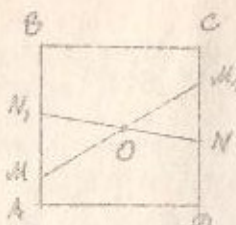
Эцэст нь EE', DD' шулуунуудын
огтлооллын O цэгээс A, B, C гур-
валжныг суурь нь ED дээр оч-
лоор тесөөтэйгээр хувиргахад
 ABC гурвалжин гарна. Баталгаа
мэдэхий.

Бичихдээ: DD', EE' оол
 $DE = D'E, = P$ учир A, B, C нь
олоний байгуулах гурвалжин болох
ба DD', EE' шулуунууд параллель
бич үед O цэг нэг угтгатай олох
учир ганц шийтэй байна.

2/ Заримдаа байгуулах дүрс ямар нэг хувиргалтаар өөрөө
өөртөө шилдэг бол тэр хувиргалтыг хэрэглэхээр өгөгдсөн
зүйлс хоёр дахин нэмэгдэх байгуулалт хялбар болдог.

Жишээ 1. Квадратиг төв нэг ба параллель талууд дээр
нэг нэгтгэлд байгаа хоёр цэгээр байгуул.

Жишээ 2. ABC нь байгуулах квадрат, O түүний төв,
 M, N нь өгөгдсөн цэгүүд байт (13 дүгээр зураг). O төвтэй
талын тэгнэхээр ABC квадратыг өөртөө шилжих ба M цэгийн
дүр M , нь CD тал дээр, N цэгийн дүр N , нь AB тал дээр
байна. Хэвдээ AB, CD шулуунд байгуулагдах ба дараа нь
 O цэгийн орчимд 90° өнцгөөр өргүүлэхэд эцгээр шулуун
 BC, AD шулуунд байх $ABCD$ квадратыг байгуула-
гдах.



13-р зураг.

3°. Алгебрын арга: Энэ аргаар байгуулах бодлого бодохдоо байгуулах хэрчийн урт олуу цэгийг байрыг тодорхойлох бол хэмжигдэхүүнийг үл мэдэгдэхээр тэмдэглэж өгөрсөн зүйлийг ашиглан тэгшитгэл зохион бодож, эцэст нь үл мэдэгдэхийг илэрхийлсэн томъёогоор байгуулалт хийж дүрсээ зураж, Эцэст нь өмнө томъёогоор байгуулалт хийж олж, зуурын аргуудыг ашиглан шалбардагтай.

1. $x = \frac{K}{N}a$, $K, N \in \mathbb{N}$ хэрчим байгуулахдаа a хэрчмийг N тэнцүү хэсэгт хувааж түүний нэгийг K удаа угарсан байгаа.

2. $x = \frac{ab}{c}$ хэрчим байгуулахдаа $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$ байхыг өөр нэг өнцгийн талууд дээр пропорциональ хэрчүүд байгуулан / 14-р зураг/.



14-р зураг.

3. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, $(a > b)$ хэрчмийг a гипотенузын b катеттэй тэгш өнцөгт гурвалжин катет гэж байгуулна.

4. $x = a\sqrt{n}$ хэрчмийг $n = p \cdot q$, $p, q \in \mathbb{N}$ үед $x = \sqrt{(pa)^2 + (qa)^2}$ гэж дуудаж пропорциональ хэрчимээр,

$n = p^2 + q^2$, $p, q \in \mathbb{N}$ үед $x = \sqrt{(pa)^2 + (qa)^2}$ гэж

5/, 6/ тохиолдлоор тус тус байгуулна.

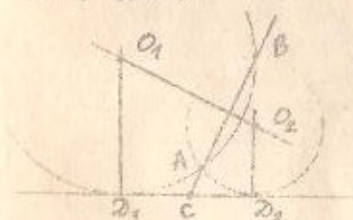
8/ $x = \frac{abc}{de}$ хэрчийн байгуулахын тулд эхлээд $y = \frac{ab}{d}$ хэрчийг, дараа нь $x = \frac{bc}{e}$ хэрчийг 2/ тохиолдлоор байгуулах ба ерөнхийдөө энэ аргаар $x = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{b_1 b_2 \dots b_{n-1}}$ хэрчийг байгуулж болно.

9/ $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, ($a > b$) хэрчийг байгуулахдаа эхлээд $y = \sqrt{a^2 - b^2}$, $z = \sqrt{a^2 + b^2}$ хэрчмүүдийг байгуулаад дараа нь $x = \sqrt{yz}$ хэрчийг байгуулна.

Жишээ 14. Өгөгдсөн хоёр цэгийг дайрч өгөгдсөн шулуунг шүргэх тойрог байгуул.

Анализ: A, B өгөгдсөн цэгүүд, a өгөгдсөн шулуун байг. /15-р зураг /.

Тойргийн төв нь AB хэрчийн дундаж перпендикуляр ба a шулуунд тойрогтой шүргэх цэгт нь боогдсон перпендикулярын огтлолцож байна. Иймээс зүүн өмнө тойрог шулуунтай шүргэх цэгийг олох хэрэгтэй.



15-р зураг.

Тойргийн гаднаа цэгээс тойрогт татсан огтлолцож ба шүргэчийн холбоот шигшлэл зориалсоор A, B цэгүүдийг дайрсан шулуун a шулуунд огтлолцож цэгээс C тойрог a шулуунг шүргэх цэгийг D гээд $CA = a$, $CB = b$, $CD = x$ тэмдэглэж хийвээс $x^2 = ab$ болно. Иймээс $x = \sqrt{ab}$ хэрчийг тусал нь байгуулаад D -г олно.

Бижиулгээ: $AB \parallel a$ бол C цэг гаднахгүй ба AB хэрчийн дундаж перпендикуляр a шулуунтай огтлолцож цэгээр тойрог шулуун хоёр шүргэлжих учир энэ гурван цэгээр нь тойргийг нэг утгатай байгуулна. $AB \nparallel a$ үед D цэг C цэгийн хувиар татгалхмтэйгээр хоёр янзаар олдох учир бэлдэж хоёр ашигтай байна.

ДАРГАА БОДЛОГУУДЫГ ҮНЭ ДААХ БОЛ!

1. Гурвалжинг хоёр өнцөг тэдгээрийн бодот талуудын $a/$ нийлбэрээр, $e/$ ялгаараар байгуул.

2. Нэг орой нь өгөгдсөн цэг дээр нөгөө хоёр орой нь өгөгдсөн параллель хоёр шулуун дээр байх тэнцүү талт гурвалжин байгуул.

3. Гурвалжны гурван өндрөөр нь байгуул.

4. Өнцөг, түүний дотор M цэг өгчээ. Нэг орой нь M цэг дээр нөгөө хоёр орой нь өгөгдсөн энгийн талууд дээр байх хамгийн бага периметртэй гурвалжин байгуул.

5. Ромбын тал ба диагоналуудын нийлбэрээр нь байгуул.

6. Паралелограммын нэг тал, түүн дээр буулган өндөр, диагоналуудын хэрчлэсгээр нь байгуул.

7. Нэг тал нь өгөгдсөн хэрчим болдог, нөгөө хоёр орой нь өгөгдсөн тойргууд дээр байх параллелограммын байгуул.

8. Өгөгдсөн тойрогт h өлдөртэй, сууриудын ялгавар нь d байх трапец байгаа.

9. Дөрвөн өнцөгтийг гураван тал ба өгөгдөөгүй талын тэгсгөлийн оройнуудад үүсэх хоёр өндрөөр нь байгуул.

10. Өгөгдсөн шулуун ба тойрогтой шүргэсэн тэгхдээ тойргийг өгөгдсөн цэгээр нь шүргэх тойрог байгуул.

11. a шулуун, M цэг өгөгджээ. M цэгийг дайрч a шулуунд өгөгдсөн урттай хамч огтлох өгөгдсөн радиустай тойрог байгуул.

12. Өгсөн цэгийг дайрч өгөгдсөн хоёр тойрогтой шүргэлцэх тойрог байгуул.

13. Өгсөн P цэгийг дайруулан өгөгдсөн хоёр тойргоор хязгаарлагдсан хэрчим нь P цэгээр таллан хуваагдах шулуун тат.

14. AOB өнцөг дотор өгөгдсөн M, N цэгүүдийг дайруулан өнцгийн талуудаар хязгаарлагдсан хэрчмүүд нь $1:3$ харьцаатай байх параллель хоёр шулуун тат.

15. Өгсөн тойргийн гадна өгсөн цэгээс гаднах хэрчим нь хөвчөөсөө 3 дахин урт байх огтлогч шулуун тат.

16. Гурвалжин дотор талуудыг харах өнцөг нь ижил байх нэг өд.

17. a шулууны хоёр талд M, N цэг өгчээ. a шулуун

дээр $MPQN$ талар бүтэнхэ урт хамгийн богино байх PQ хэрчимийг $PQ = MN$ байхнаар багтруул.

18. Өгдөг хуви өнцгийн нэг тал дээр A, B цэгүүд өгчээ. Өнцгийн нөгөө тал дээр ACB өнцгийн хэмжээ хамгийн их байх C цэг ол.

19. Өндөр түүний дотор M цэг өгчээ. M цэгийг дайруулсан өнцгийн талуудыг өргөх хэрчимүүдийн нийлбэр нь хамгийн бага урттай байх нуруу тат.

20. Өгөгдсөн тохирот өгөгдсөн нэмэгдэлтэй хэм чануу тэгш өнцөгт бартал.

Улсын математикийн XXV олимпиадын
сүүхчийн даваанд бодуулахаар
дэвшүүлсэн бодлогууд

Д.Хадхүү

1 (Д.Баярцогт Дархан. $\bar{X}$) 1, 2, ..., 19 тоонуудыг ямарч аргаар 3 аагид хуваахад аль нэг ангиас нь эсвэл $x+y=3$, эсвэл $y=2x$ нөхцлийг хангах x, y, z 3 тоо олдохыг батал.

2 (Д.Баярцогт Дархан. $\bar{IX}$) 1, 2, 3 цифрүүдээр бичигдэх, цифрүүдийнх нь нийлбэр 25 байх натурал тоо хэд байх вэ?

3 (Д.Баярцогт Дархан. $\bar{X}$) Хамттай дээр өгөгдсөн, эрөнхий байрлалтай, 66 цэгийг хооронд нь ямарч аргаар 4 өнгийн хэрчлээр холбоход бүх талууд нь ижил өнгийн ядаж нэг гурвалжин олдохыг батал.

4 (Д.Баярцогт Дархан. $\bar{X}$) $SABC$ гурвалжин пирамидын AB, SAC, SBC талсуудыг багтаасан тойргуудын радиус харгалзан R_1, R_2, R_3 ; SC, SB, SA кривууд дэх талст өнцгүүд харгалзан $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ бол ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн радиусыг ол.

5 (С.Баазандорж, МУИС, онуган. $\bar{IX}$) Волейболын тэмцээнд 25 баг оролцов. Баг бүр хоорондоо нэг удаа тоглох ёстой. Тэмцээн өхцөөд нилээд хугацаа өнгөрсний дараа баг бүр хоёроос доошгүй хожигдолтой байв. Тэгвэл энэ үед хоёроос илүү хоний байх баг олдохгүй байх болох уу?

6 (Т.Багбаир, МУИС. $\bar{X}$) $A, A_1A_2A_3$ тетраэдрийн A_2 оройн эсрэг бүлх талсын талбайг S_1 , тетраэдрийн дотор орших дурин P игээсээ A_2 оройн эсрэг орших талст дээр буулгасан перпендикулярийн суурийг A'_1 гэж тус тус тэмдэглэв. Тэгвэл

$$\frac{S_1}{PA_1} + \frac{S_2}{PA_2} + \frac{S_3}{PA_3} + \frac{S_4}{PA_4}$$

нийлбэр хамгийн бага утгаа авах P цэгийн байрыг ол.

7 (Т.Багбаир, МУИС. $\bar{IX}$) Таван хумуу (зураг хар) хэлбэртэй $A_1A_2A_3A_4A_5$ дүрс өгөгджээ. Хэрэв

$$A_1A_3 = A_1A_4 = A_2A_4 = A_2A_5 = A_3A_5 = \alpha$$

бол



$$XA_1^2 + XA_3^2 = XA_2^2 + XA_4^2 + XA_5^2$$

байх X цэгийн геометр байрыг ол.

8/Г.Батбаяр.МУИС. $\bar{X}$)

$$\sin 2(\arctg \frac{1}{5} - 2\arctg \frac{1}{239} - \arctg 5) = \frac{5}{13}$$

тэнцлийг батал.

9/М.Баясан. Эрдэнэт. $\bar{X}$)

$$\frac{5}{16} \cos 5^\circ + \cos 5^\circ > \frac{25}{1989}$$

тэнцэтгэлийг батал.

10/М.Баасай.Эрдэнэт. $\bar{X}$)

$$[2x-3] - \frac{1}{[2x-3]} = [2x-3] - \frac{1}{[2x-3]}$$

тэгшитгэл бод.

11/Р.Баярцогт.Өвөрхангай. $\bar{X}$) Хавтгай дээр R ба $2R$ радиустай, дотоод байдлаар нүртэлцсэн 2 тойрог өгөгдөв. Иймг тойргийн $\frac{2}{3}$ нумыг будвал том тойрог дээгүүр өнхрүүлэхэд будагдах үлдэх хэсгийн талбайг ол.

12/Ц.Батхүү.УБДС. $\bar{X}$) $f(x)$ нь бүхэл коэффициенттэй олон гишүүнт болог. $f(1), f(2), \dots, f(n), \dots$ дарааллын гишүүдийг 30 оронтой m тоонд хуваахад эсвэл 0, эсвэл 1 үлддэг бол m тоо эсвэл 4 илин цифр агуулна, эсвэл 3^n хэлбэртэй байна гэж батал.

13/Р.Баярцогт.Өвөрхангай. $\bar{X}$) Талсууд нь харгалзан параллель 2 кубын хоёрдугаарынх нь нэг орой нь нэгдүгээрийнхээ төв дээр байрлана. Эдгээрийн ерөнхий двоганалийг тойруухан $\bar{II}$ кубыг 45° -аар эргүүлэхэд гарах куб болон I кубийн ерөнхий хэсгийн эзэлхүүнийг ол.

14/В.В.Ботирев. $\bar{X}$) $n \times m$ хэмжээтэй тэгн өнцөгт хүснэгт өгөгдөв ($m > n > 2$). Хэрэв K нүдэнд -1 , үлдсэн нүдэнд $+1$ тоог бичив. Ямар нэг мөрийн, эсвэл ямар нэг баганын бүх тоонуудын тэмдгийг эсрэгээр нь өөрчлөх үйлдлийн тусламжтайгаар бүх

тооно тэмдгийг нийл болгон болохгүйг батал.

15 (А. Гансатар, МУИС. $\overline{IX-X}$) ABC гурвалжин AC тал дээр авсан X цэгээс AB , BC талууд дээр буулгасан перпендикуляруудын суурийг харгалзан M , N гэв. XM YN дөрвөн өнцөгт параллелограмм байх Y цэгийг байгуулан.

(а) $B Y \perp MN$ гэж батал.

(б) X цэг AC тал дээгүүр A -гаас C хүртэл хөдлөхөд Y цэгийн үүсгэх геометр байрыг ол.

16 (Б. Ганболд, СКУХ. $\overline{IX}$)

$$2 \cdot 2^{\lfloor \log_2 x \rfloor} - x = 1989, 25$$

тэгшитгэлийг бод.

17 (В. Адьяасүрэн, УБДС. $\overline{X}$) 1, 2, ..., 1989 тоонуудыг дурив аргаар 6 хэсэгт хуваажад аль нэг хэсгээс нь $a+b=c$ түүс $c-2a$ байх a , b , c гурван тоо олдохыг батал.

18 (Ш. Батхилиг, УБДС. оюутан. $\overline{IX}$) Гурвалжин B оройг харгалзан эсрэг орших талууд дээр нь, гадна талд нь байгуулсан квадратуудын төвүүдийг холбоход үүсэх B хэрчим нэг цэгт огтлолцсоныг батал.

19 (Р. Гончигдорж, ШУА. $\overline{IX-X}$) Нэг хүн n ($n \leq 1989$) тоо санахээ. Тавигч аль ч m тоог сонгон авч санасан хүнээс $n+m$ анхны тоо мөн, бинийг мэдэх чаддаг бол 1987, 1988-аас илүүгүй асуугаад тэр тоог мэдэх болох арга байхыг батал.

20 (Д. Гунганбаяр, МУИС. оюутан. $\overline{IX-X}$) Горьтог нугамын тусламжтайгаар

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{bc + ca - a^2}{c^2 - ca - ac}$$

байх φ энцгийнг байгуул. Энд a , b , c нь өгөгдсөн зэрэг тоонууд ба $b > a$ болно.

21 (Д. Батдэлгэр, ШУА. $\overline{IX-X}$) a , b , c , d өгөгдсөн зэрэг тоонууд бол

$$\frac{a+b}{(c+d)^{1989}} > \frac{\min \left\{ \frac{a}{c^{1989}}, \frac{b}{d^{1989}} \right\}}{2^{1989}}$$

тэгцэтгэлийг батал.

22 (Г. Хүрэлбаатар, ШУА. $\overline{IX-X}$) $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ ба

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x(y+1)} + \frac{1}{y(z+1)} + \frac{1}{z(x+1)}$$

бол

$$f(x, y, z) + f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right) \geq 3$$

тэнцэтгэлбичийг батал. Хэдийд тэнцэлдээ хүрэх вэ?

23 (Д. Пүрэвсүрэн, МУИС, о.у.т.а.и., $\overline{IX-X}$) a, b, c нь гурвалжин талууд бол

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 2 + \frac{1}{3} \left(\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab} \right)$$

тэнцэтгэлбичийг батал. Хэдийд тэнцэлдээ хүрэх вэ?

24 (Б. Адъяасүрэн, УБДС, $\overline{IX-X}$) ABC зөв гурвалжныг багтаасан тойргийн A өнцөгт тулсан BC нуми гадна талаас нь шүргэсэн тойрог татав. B, C цэгүүдээс энэ тойрогт татсан шүргэгчүүдийн уртын нийлбэр нь A цэгээс мөн тойрогт татсан шүргэгчийн урттай тэнцэхийг батал.

25 (Ж. Нямхэл, Хөлсгөл, $\overline{IX-X}$) Гүдгэр 1989 онцогтийн талууд нь $a_1, a_2, \dots, a_{1989}$ ба периметр нь P бол

$$\frac{3a_1 - P}{P - 2a_1} + \frac{a_2}{P - 2a_2} + \dots + \frac{a_{1989}}{P - 2a_{1989}} + \frac{3a_{1989} - P}{P - 2a_{1989}} \geq \frac{1985}{1989}$$

тэнцэтгэлбичийг батал.

26 (Б. Бат, ШУА, $\overline{X}$) Горьлог, шугамны тусламжтайгаар зөв 15 өнцөгтийг байгуул.

27 (А. Мекен, МУИС, $\overline{IX-X}$)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1989}$$

тэгшитгэлийн натурал тоон шийдийг ол.

28 (Д. Намсүрэн, Дундговь, $\overline{IX-X}$) ABC гурвалжин CH өндөртэй O өнцөг үүсгэд C оройг дайрсан шулуун дээр A, B оройнуудаас буулгасан перпендикулярын буурийг харгалзан K, L гэв. Хэрэв ABC гурвалжин талбай S бол CH гурвалжин талбайг ол.

29 (Д. Намсүрэн, Дундговь, $\overline{IX}$) p нь 3-аас их анхны тоо бол $4p^2 - 5p^2 + 1 : 360$

гөн батал.

30 (Д. Намсүрэн, Дундговь, $\overline{IX-X}$) ABC гурвалжинд багцдөн тойргийн төв O бол AOB, BOC, COA гурвалжнуудыг багтаасан

тойргуудын тэвүүдийг дайрсан тойргийн гэв ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн төвтэй давхцахыг батал.

31(В.В.Ботмров. $\overline{IX-X}$) Хэрвэ гүдгэр n ($n \geq 5$) егцэгтийн орой бүрээс гарсан $n-3$ диагоналийн аль ч зэргэлдээ хоёр нь хоорондоо нэгэн ижил өнцөг үүсгэдэг бол эгцэгдсэн олон өнцөгт зөв гэх батал.

32(Н.Одбаяр. МУИС. оюутан. $\overline{IX-X}$) $14p-9 < n$ байх дурын p, q тоонуудын хувьд $141, 151, \dots, n$ гэж насстай харгалзан $14, 15, \dots, n$ ширхэг бөмбөгөөс нийтдээ $(q! - p!)$ г нийтэй бөмбөгүүдийг хэдэн янзаар сонгон авч болох вэ?

33(Ц.Баттогтох МУИС. оюутан. $\overline{IX}$) Тойрог дээр $A_1, A_2, \dots, A_n$ гэсэн ялгаатай n цэг өгөгдөв. Аливаа ялгаатай A_i, A_j хос цэгийг $A_i A_j, A_j A_i$ векторуудын аль нэгээр холбоно.

(a) Нийтдээ хичнээн ялгаатай холболт байх вэ?

(б) Цэг бүрээс яг 3 вектор эхлэлтэй байх хичнээн ялгаатай холболт байх вэ?

34 (Э.Санчир. МУИС. оюутан. $\overline{IX}$)

$$(5 + \sqrt{26})^{1989} + (25 + \sqrt{626})^{1989}$$

тооны тасланаас хойших 1988 цифрийг ол.

35(Э.Санчир. МУИС. оюутан. $\overline{IX-X}$) Хэрвэ $a+b+c = \pi$, $d+e+f = \pi$ ба $n+m = k+2$ бол $abcde$ тоот "сайн тоо" гэв. 6 оронтой бүх "сайн тоо"-ны тоог ол.

36(Э.Санчир. МУИС. оюутан. $\overline{X}$) Параллелограммын түүний хурц өнцөг, талуудын харьцаа болон зөвхөн 4 тал дээр орших 4 цэгээр, зөвхөн 4 талын үргэлжлэл дээр орших 4 цэгээр байгуул.

37(А.Далагийн. Дорнод. $\overline{IX-X}$) Нэгж талтай 1989 зөв олон егцэгтийн талуудыг дотогшоо болон гадагшаа нэгж зийнд шилжүүлэхэд үүсэх дүрсийн талбайг ол.

38(Д.Цэндбаяр. МУИС. оюутан. $\overline{IX}$) $9^x + 1 = 10^y$ тэгшитгэлийн $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ байх бүх шийдийг ол.

39 (Д.Цэндбаяр. МУИС. оюутан. $\overline{X}$)

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1989^x + 1) \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k}}$$

интегралыг бод.

$$40) \text{ Р. Баярцогт. Өвөрхангай. } \underline{\text{IX}})$$

$$f(x) - 0.5 f(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$$

тэгшитгэлийн бүх үетэй шийдийг ол.

$$41) \text{ Р. Баярцогт. Өвөрхангай. } \underline{\text{IX}}) \quad x^6 - [x] = 3$$

тэгшитгэлийг бод.

42) (Н. Эрдэнэ. МУИС. оюутан. $\underline{\text{IX}}$) $SABC$ гурвалжин пирамидын A, B, C оройнууд, AC, SC ирмэгүүд дээр орших N, M цэгүүд өгөгджээ.

8 N, M гурвалжин пирамидын эзэлхүүнийг

$$(a) \quad 3:1$$

$$(б) \quad 2^n - 111$$

харьцаатай хуваасан байхыг S оройг байгуул.

43) (Н. Эрдэнэ. МУИС. оюутан. $\underline{\text{X}}$) Дунд 1989 бүхэн тооноос нийдбэр нь 995-д хуваагдах 995 явцыг тус олдлыг батал.

44) (Н. Эрдэнэ. МУИС. оюутан. $\underline{\text{X}}$) $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ хуучин дотор орших M цэг өгчээ. Хэрвэ A, D, M ба D, C, M хавтгайнууд харталзан DDA_1, D, C, CD талстүүдтэй 90° өнцөг, MCB ба MAB хавтгайнууд $ABCD$ талстай 15° өнцөг тус тус үүсгэдэг бол $AM = BM = CM = DM$ гэдг батал.

$$45) \text{ Н. Баасай. Эрдэнэт. } \underline{\text{IX}})$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \\ x^4 + y^4 + z^4 + 2x &= -1 \\ x^5 + y^5 + z^5 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

үйсэлтийг бод.

$$46) \text{ Н. Баасай. Эрдэнэт. } \underline{\text{X}}) \quad x, y, z \text{ зөрөг тоонууд,}$$

$$xy + z > 5, 14; \quad x + y + z < \frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Эсвэл x, y, z тоонуудын яг нэг нь 1-ээс бага гэж батал.

47) (Н. Дагвийр-Од. УБДС. оюутан. $\underline{\text{X}}$) α, β, γ нь гурвалжны өнгууд байх бол

$$\frac{1}{1 + 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} + 4\sin^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{1 + 2\sin^2 \frac{\beta}{2} + 4\sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{1 + 2\sin^2 \frac{\gamma}{2} + 4\sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2}} = 1$$

тэнцэтгэлийн биелэхийг батал.

48) (Т. Батбаяр. МУИС. $\underline{\text{IX-X}}$) O нь гурвалжны багтаасан тойргийн төв, A', B', C' нь O -г даяарх хэвцэнуудийн тануудтай

өгтөлснх цэгүүд бол:

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} = \frac{6}{R}$$

тэнцэтгэл биийг батал.

50 (Т. Батбаяр, МУИС. $\bar{X}$) $ABCD$ дөрвөн өнцгийн дотор орших P цэгээс AB, BC, CD, AD талууд дээр буулгасан перпендикуляруудын суурийг харгалзан M, N, Q, L гэв.

Хэрэв $AD + BC = AB + CD$ бол

$$\frac{AB}{AM} + \frac{BC}{BN} + \frac{CD}{CQ} + \frac{AD}{DL}$$

илэрхийллийн утга хамгийн бага байх P цэгийг байгуул.

51 (Т. Батбаяр, МУИС. $\bar{X}$) $A_1A_2A_3A_4$ пирамид ба түүнд багтсан бөмбөрцөг өгөгджээ. S_i -гээр A_i оройн эсрэг орших талсын талбайг тэмдэглэв. Бөмбөрцөг дээр орших дурын P цэгийн хувьд

$$S_1 \cdot PA_1^2 + S_2 \cdot PA_2^2 + S_3 \cdot PA_3^2 + S_4 \cdot PA_4^2$$

илэрхийллийн утга тогтмол байхыг батал.

52 (Т. Батбаяр, МУИС. $\bar{X}$) S талбайтай ABC гурвалжин AB, BC, CA талууд дээр харгалзан M, N, K цэгүүдийг

$\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{CK}{CA} = \frac{1}{x}$ байхыг авчээ. AN, BK, CM шулуунуудын огтлолд үүсэх гурвалжин тангуйг ол.

53 (Ө. Зоригт, Б. Доржсүрэн, УБ I сургуулийн суралч. $\bar{X}$)

$\{a_n\}, \{b_n\}$ дарааллууд

$$a_1 = 0, a_n = m a_{n-1} + (n+1), b_n = a_n + \left\{ \frac{1989}{n^2+1} \right\} \quad (n \geq 0)$$

хэлбэрээр өгөгджээ. $\{b_n\}$ дараалал геометрийн прогресс үүсгэх $m \neq 1$ тоог ол.

54. (Д. Пүрэвсүрэн, МУИС. оюутан. $\bar{X}$) $SABC$ пирамидын AS ирмэг ABC хөнгтэй перпендикуляр ба SAC, SAB, ABC, SBC талстууднаас тусдаа харгалзан S_1, S_2, S_3, S_4 бол

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2$$

байхыг батал.

55. (А. Хамбаатар, МУИС. $\bar{X}$) $S = \frac{1}{4} R^2 \sin 2\alpha$ хэлбэртэй гурвалжинг багтаасан R радиустай тойрог гурвалжны α өнцгийн орой ба эхдрүүдийн огтлолцсон цэг хоёрыг холбоосон хэрчимийн дундгийг дайрч гэх батал.

56 (А. Хамбаатар, МУИС. $\bar{X}$) ABC гурвалжин хавтгайн дурын P цэг өгөгдсөн гэв. CP, AP шулуунууднаас хоорондох өнцгийг α гээд C цэг дээр тэгтэй α өнцгөөр эргүүлэх хувиргалт

ба $\frac{CP}{CA}$ коэффициенттэй гомотетийг B цэгт дараалан хийхэд B' цэг гарсан гэв.

(а) AP ба BB' шулуунуудын огтлолцлын геометр байрыг ол.

(б) PA, PB, PC хэрчмүүд гурвалжин үүсгэх нөхцлийг ол.

(с) $PA = PB + PC$ байх нөхцлийг ол.

57 (Г. Хүрэлбаатар. ШУА. $\bar{X}$) Хэрэв $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ ба $b_1, b_2, \dots, b_n$ -үүд нь $a_1, a_2, \dots, a_n$ тоонуудын ямар нэг сэлгэмэл бол

$$\sum_{k=1}^n \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{k} \geq \frac{n^2}{2n-1} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k^2}$$

болохыг батал.

58 (Г. Хүрэлбаатар. ШУА. $\bar{X}-\bar{X}$) 2 галт мугамын тусламжтайгаар $30^\circ 45'$ өнцгийг байгуул.

59 (В. Адьяасүрэн. УБДС. $\bar{X}$) $a_1 a_2 \dots a_{6n}$ тоо 3867-д хуваагддаг бол $a_{6n+1} a_{6n+2} \dots a_{6n+6n} a_1 a_2 \dots a_k$ тоо мөн 3867-д хуваагдахыг батал. Энд

60 (Д. Баярцогт. Дархан. $\bar{X}$) Ямар ч 8 хүн авахад дараах 2 нөхцийн зөвхөн 1-ийг хангах эсвэл 5, эсвэл 6 хүн сонгон авч болохыг батал. Үүнд:

(а) Сонгон авсан хүмүүсийн аль ч 3-ыг авахад ядаж хоёр нь танил

(б) Сонгон авсан хүмүүсийн аль ч 3-ийг авахад ядаж 2 нь танил бий

61 (Ц. Батхүү. УБДС. $\bar{X}$) Дурин бодит X тооны хувьд

$$f(x) + f(x+1) = \sqrt{x} f\left(\frac{2x+1}{2}\right) \text{ ба } f(1989, 514) = 25$$

бол $f(2001, 514)$ -ийг ол.

62. (С. Мэндсайхан. МУИС. $\bar{X}$) $\{x_n\}$ дараалал $x_0 = 3, x_1 = 1$ ба

$$\frac{1}{\sqrt{x_{2k+1}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{x_{2k-1}}}; \quad \frac{1}{\sqrt{x_{2k}}} = \frac{1}{\sqrt{x_{2k-1}}} + \frac{1}{\sqrt{x_{2k+1}}}$$

тогтмолгоор өгөгдсөн бол

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{1988}^2 < \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{6}$$

гэж батал.

64 (И. Нямжав, Хэвсгэл. $\overline{IX-X}$) Гүдгэр олон өнцөгтийн диагоналуудын огтлолцоор үүсэх цэгийн тоо диагоналийн тоогоор ооо $12^{2k+1} - 12^k$ ($k \in \mathbb{N}$) дахин их байн болох уу? (Орскг диагоналийн огтлолцолд тооцохгүй)

65 (Л. Хадхүү, МУИС. $\overline{IX}$) $\forall]a, \varepsilon[\subset \mathbb{R}$ интервал авахад $a_n \in]a, \varepsilon[$ байх $n \in \mathbb{N}$ олдоно гэж болох уу? Энд:

$$(a) a_n = \frac{2n^2 - n + 1}{n^2 - n + 1} \quad (b) a_n = \frac{3n^3 - 4n^2 + 3n - 1}{n^2 - n + 1}$$

66 (Б. Батцэнгэл, МУИС. оруулал. $\overline{IX-X}$) $\{P_n(x, y)\}$ гэсэн олон гишүүнтүүдийн дараалал

$P_0(x, y) = 1$, $P_m(x, y) = y(x+y)P_{m-1}(x, y) - y^2P_{m-1}(x, y)$ ($m \geq 1$) томъёогоор өгөгджээ.

(a) $P_m(x, y) = P_m(y, x)$ тэнцэл бүх m, x, y -ийн хувьд үнэн гэж батал.

(б) $P_{21}(0, 1989)$ -ийг бод.

АЛБАН, ЁСЫН БУС БАГИЙН ТЭМЦЭЭН

Б.Батцэвгэн

Албан ёсын бус багийн тэмцээнийг анх 23-р олимпын дунд үеэс эхлэн зохион байгуулсан бөгөөд тэр үед түүнийг "ЕОНО" гэж нэрлэж байсан билээ.

Энэ жилийн хувьд тэмцээнд оролцогчдын хүрээ тэд комисс, математикийн хүрвэлэн /М/А/, бага нэр, УБДС-ийн оюутнууд, IX ангийн сурагчид, X ангийн сурагчид, МУИС-ийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай IX-X ангийн сурагчид, МУИС-ийн оюутнууд гэсэн 8 багт оролцож, баг тус бүр нэг нэг бодлого дэвшүүлсэн бөгөөд зөвхөн бүрэн бодсон тохиолдолд л уг бодлогонд 6 оноо өгч, бусад тохиолдолд 0 оноо өгч байв.

Багуудын дэвшүүлсэн бодлогууд, аль ч баг бодом чаваргүй 2,8-р бодлогуудын бодолт болоод тэмцээний дүнг дор үзүүлэв:

1. /Комисс / n -ээс бага эергийн,

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i P(i) = 0$$

адилтгааныг хангадаг

бүх $P(x)$ олон гишүүнүүдийг ол.

2. Хүрвэлэн / $x_1, x_2, \dots, x_n$ -үүд эерэг тоонууд болохад

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{x_1(x_1+1)} + \frac{1}{x_2(x_2+1)} + \dots + \frac{1}{x_n(x_n+1)}$$

бүх дүрвн $n \geq 3$ натурал тоог хувиар

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) + f\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}\right) \geq n$$

гэх батал.

3. /Баг / S талбайтай ABC гурвалжин BC тал дээр EG = 3 · EC байх Э нэг тэмдэглээ. АН нь өндөр бөгөөд $\angle HAE = 30^\circ$ бол,

$$3,4 \cdot S < 2(AC^2 - AB^2) + BC^2 < 5,4 \cdot S \quad \text{гэм батал.}$$

4. /УБДС-ийн оюутнууд / ABC дөрвөн өнцөгтийн AC диагональ d урттай бөгөөд энэ диагоналийг агуулсан шулуун дээр төвтэй, уг дөрвөн өнцөгтийн гадна орших хэргийн A, C цэгүүдийг дайрсан ижил R радиустай 2 тойрог татна. Энэ хоёр тойрогт, B, D цэгээс татсан шүрүүтийн уртууд $k, l; m, n$ болно. Хэрэв

$$k^2 + l^2 = m^2 + n^2 = 2dR + R^2$$

тэнцэл биелдэг бол ABC, ADC өнцгүүдийг ол.

5. / IX ангийн сурагчид / Тойрог дээр 1989^{25} цэвр өгөгджээ. Ямар нэг цифрээс эхлэх цагийн зүүний дагуу уншихад үүсэх 1989^{28} оронтой тоо 37-д хуваагддаг бол дурын өөр цифрөөс " цагийн зүүний дагуу уншихад үүсэх 1989^{25} оронтой тоо мөн 37-д хуваагдахыг батал.

6. / X ангийн сурагчид / $a_1, a_2, \dots, a_n$ талтай олон n өнцөгтийн периметр P бол

$$\frac{a_1}{P-2a_1} + \frac{a_2}{P-2a_2} + \dots + \frac{a_n}{P-2a_n} \geq \frac{n}{n-2} \quad \text{болохыг батал.}$$

7. / МУИС-ийн IX, X анги / ABC гурвалжинд багтсан тойргийн радиус r байг. OA, OB, OC шулуунуудыг гурвалжин талуудыг огтлох цэгүүдийг A', B', C' гэв.

Тэгвэл $OA' \cdot OB' \cdot OC' \leq \frac{r^3 \cdot R}{2}$ гэм батал.

8. /МУИС-ийн оюутнууд / $f(n), g(n)$ дарааллуудыг

хувьд

$$1/ \quad f(1) = 1$$

$$2/ \quad g(n) = na - 1 - f(n) \quad \text{энд } a \text{ нь } k \text{-өөс их бүхэл тоо}$$

$$3/ \quad f(n+1) \quad \text{нь} \quad f(1), \dots, f(n), g(1), \dots, g(n) -$$

үлдээс нэгэстэй хамгийн бага натураль тоо байна. Тэгвэл

$$\text{хуримт } M \text{ -ийн хувьд} \quad f(n) = [a \cdot n], \quad g(n) = [B \cdot n]$$

байх a, B гэсэн иррациональ тоонууд олгохыг үзүүл.

104

БАГУУЛМЫН ХОӨРӨНДӨХ ТЭМЦЭЭНИЙ ДҮН

№	Баг	1	2	3	4	5	6	7	8	Оноо	Бэлд
1.	Комисс	.	0	6	6	6	6	6	0	30	I
2.	Мат.хүрвэлэн	0	.	6	6	6	6	0	0	24	II-III
3.	Багш нар	6	0	.	0	6	6	0	0	18	IX-YI
4.	УБИС /омутан /	0	0	6	.	6	6	0	0	18	IY-YI
5.	Сурагчид IX	0	0	0	0	.	6	6	0	12	YII
6.	Сурагчид X	0	0	0	0	6	.	0	0	6	YIII
7.	МУИС IX-X	0	0	6	0	6	6	.	0	18	IY-YI
8.	МУИС омутан	6	0	6	0	6	6	0	.	24	II-III
	Дүн	12	0	30	12	42	42	12	0		

Зарим бодлогын бодолт

$$2. \quad A = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad B = f\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}\right) \text{ гэж}$$

тэмдэглээ. x_i -үүдийг хооронд нь сольж, шинээр дугаарлан,
 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ гэж үзэж болох бөгөөд энэ үед

$$A = \frac{1}{x_1(y_1+1)} + \frac{1}{x_2(y_2+1)} + \dots + \frac{1}{x_n(y_n+1)}; \quad (y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ нь}$$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -ийн ямар нэгэн сэлгэмэл байх юм. Мөн

$$B = \frac{x_1 y_1}{y_1+1} + \frac{x_2 y_2}{y_2+1} + \dots + \frac{x_n y_n}{y_n+1} \quad \text{болно. Нэгэнт}$$

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \quad \text{тул} \quad \frac{1}{x_1} \geq \frac{1}{x_2} \geq \dots \geq \frac{1}{x_n};$$

$$\frac{1}{1+x_1} \geq \frac{1}{1+x_2} \geq \dots \geq \frac{1}{1+x_n} \quad \text{болох ба өрөмбөлөх арга}$$

Босоор $A \geq \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{1+x_{n-1}} + \dots + \frac{1}{x_{n-1}} \cdot \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{x_n} \cdot \frac{1}{1+x_1}$
 байна. Учир нь эрэмбэнэх арга босоор баруун тал тал дахь
 явзгийлал нь A -ийн, бүх боломжит $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -ийн

$(y_1, y_2, \dots, y_n)$ сэлтгэмжүүдэд авх хамгийн бага урга
 болдог. Мөн үүнтэй адил

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n ;$$

$$\frac{x_1}{x_1+1} \leq \frac{x_2}{x_2+1} \leq \dots \leq \frac{x_n}{x_n+1} \quad \text{байдаг тул}$$

$$B \geq x_1 \cdot \frac{x_1}{x_1+1} + x_2 \cdot \frac{x_2}{x_2+1} + \dots + x_{n-1} \cdot \frac{x_2}{x_2+1} + x_n \cdot \frac{x_1}{x_1+1}$$

болно.

Эндээс ,

$$A+B \geq \left[\frac{1}{x_1(x_n+1)} + \frac{1}{x_n(x_1+1)} + \frac{x_1 x_n}{x_1+1} + \frac{x_1 x_n}{x_n+1} \right] +$$

$$+ \left[\frac{1}{x_2(x_{n-1}+1)} + \frac{1}{x_{n-1}(x_2+1)} + \frac{x_2 x_{n-1}}{x_2+1} + \frac{x_2 x_{n-1}}{x_{n-1}+1} \right] + \dots$$

болох бөгөөд ерөөсөө дурш эерэг a, b тоонуудын хувьд

$$\frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{b(a+1)} + \frac{ab}{b+1} + \frac{ab}{a+1} \geq 2$$

$A+B \geq n$ болно. Сүүлийн тэнцэтгэл бишийг хялбар
 баталж болох билээ.

8. 1/ - 3/ нөхцлөөр тодорхойлогдох $f(n), g(n)$
 дараалалууд тухайн a бүрийн хувьд цор ганц байх тул ямар
 нэгэн иррациональ α, β тоонуудад $[a\alpha], [b\beta]$
 дарааллууд 1/ - 3/ нөхцлийг хангахыг харуулбал бодлого
 бодогдоно.

a, β нь $x^2 - ax + a = 0$ тэгшитгэлийн
 шийдүүд байхаар авъя: a, β нь $a > 4$ тул бодит,

α натурал тоо тул иррациональ тоонууд юм. $\alpha < \beta$, болог.

$\alpha + \beta = a$, $\alpha\beta = a$ тул $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ болно.
 Эндээс $1 < \alpha < 2$, $\beta > 2$ гэх гарч байна Цаашил-
 бай 1/ нэхцел $[\alpha \cdot 1] = 1$ биеэлээ. Мөн $n \geq 1$ бол

$[\beta \cdot n] = [(a - \alpha) \cdot n] = na - 1 - [\alpha \cdot n]$ болж 2/ биеэлж байна.

Ямар нэгэн n, m -ийн хувьд $[\alpha \cdot n] = [\beta \cdot m] = k$
 байдаг гэе. Тэгвэл $\alpha \cdot n = k + \epsilon_1$, $\beta \cdot m = k + \epsilon_2$; $0 < \epsilon_1, \epsilon_2 < 1$

байх ба эндээс $n + m =$

$$= \frac{k}{\alpha} + \frac{k}{\beta} + \frac{\epsilon_1}{\alpha} + \frac{\epsilon_2}{\beta} = k + \frac{\epsilon_1}{\alpha} + \frac{\epsilon_2}{\beta}$$

болно.

$0 < \frac{\epsilon_1}{\alpha} + \frac{\epsilon_2}{\beta} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ тул энэ нь боломжгүй билээ.
 Өгөөр хэлбэл дурьд натурал n, m -ийн хувьд

$[\alpha \cdot n] \neq [\beta \cdot m]$ байжээ.

Дурьд натураль k тоо авъя. $n = [\frac{k+1}{\alpha}]$ байг.

Тэгвэл хэрэн $n > \frac{k}{\alpha}$ бол $k < \alpha n < \alpha \cdot \frac{k+1}{\alpha} = k+1$

буюу $[\alpha \cdot n] = k$ юм. Хэрэн $n < \frac{k}{\alpha}$ бол

$$\beta(k-n) > \beta k - \frac{\beta}{\alpha} k = \beta k (1 - \frac{\epsilon}{\alpha}) = k$$

$$\beta(k-n) < \beta k - \beta(\frac{k+1}{\alpha} - 1) = k+1$$

буюу $[\beta(k-n)] = k$ болноо. Урьд болоод сая баталсан
 үгүйсгдээс ямар ч натурал тоо k нь $[\alpha \cdot n]$, $[\beta \cdot n]$

дарааллуудтай яг нэгэнд нь харгалзахдаг гэж гарч байна. Иймд $[a \cdot (n+1)]$ нь

$[a \cdot 1], [a \cdot 2], \dots, [a \cdot n], [\beta \cdot 1], [\beta \cdot 2], \dots, [\beta \cdot n]$ -үүдээс нилгавтай хамгийн бага натурал тоо мөн. Өөрөөр хэлбэл 3/ нөхцөл биеллээ.

Бэгуудын тэмцээн цомтой болм, энэ жилийн цомыг " КОМИСС " баг авч хадгаллаа.

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХҮ ОЛИМПИАДЫН ТУХАЙ ТОВЧ МЭДЭЭ

Н. Шагдала.

Улсын математикийн ХХҮ олимпиад 1989 оны 5 дугаар сарын 10-18- нь өдрийнхөө дараах IX ангийн 36, X ангийн 37 сурагч оролцсоны дотроос олимпиадад амжилттай оролцогчид, олимпиадын аварга, дэд аваргууд диплом, үнэ бүхий зүйлээр шагнагдан.

Энэ жилийн олимпиадад IX ангийн сурагчид анх удаа IY дараанд өйнаг, хотууддаа шаалгаран ирч урьддаг.

Улсын математикийн ХХҮ олимпиадын өмнөхөн зохион явуулсан " Улсын математикийн олимпиадын тухай үзэлэлт " хураалд ХМӨ-д оролцож зохион байгуулах байсан хүмүүс, олимпиадын аварга, дэд аварга болон оролцогчид зэрэг олон хүн олимпиадын удаа дараа зохион явуулах ажлын ач холбогдол, тохиромжтой бүрэлдэл, гарсан алдаа дутагдлуудыг танин, дэлгэрэнгүй, илээ дэлгэргүй ярихдаа, нөхөрсөн зурчигч дүүмэлэн өрнүүлсэн нь өмнөдмд эхнэлд чухал ач холбогдолтой болов.

Үүнд нь манай оронд математикийг хөгжүүлэх, математикийг аяллас сонирхонтой сурагчдын ихрүүлэх хөгжүүлэх нэгэн хөмүүрэг болж байна.

Олимпиадад өйнаг хотын бэгуудын амжилтын хүнлээр байр эзлүүлсэн хүснэгт № I, олимпиадуудын аваргад нөрсийт хүснэгт № 2/ гаргах хэмэаргаа.

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХҮҮ ОЛИМПИАДЫН II ДАВААНД
ОРОЛЦСОН БАЙДАЛАГ НЬ АЯМАГ, ХОТУУДЫГ БАЙР
ЭЗЭЛҮҮЛЭВЭЛ:

№	Аймаг, хот	IХ анги	Х анги	дүн	байр
1.	Дархан	5	13,5	20,5	1
2.	Увс	5	12	17	2
3.	Ховд	3	13	16	3
4.	Баянхонгор	4,5	11	15,5	4
5.	Өмнөговь	1,5	12,5	14	5
6.	Сүхбаатар	3,5	7	10,5	6
7.	Сэлэнгэ	0,5	9,5	10	7-9
8.	Баян-Өлгий	2,5	7,5	10	7-9
9.	Өвөрхангай	6	4	10	7-9
10.	Архангай	2	7	9	10
11.	Төв	5	3	8	11-12
12.	Дундговь	6	2	8	11-12
13.	Эрдэнэт	7	0,5	7,5	13
14.	Хөвсгөл	3,5	1	4,5	14
15.	Дорнод	0,5	3,5	4	15-16
16.	Хэнтий	1,5	2,5	4	15-16
17.	Завхан	3,5	0	3,5	17
18.	Говь-Алтай	1,5	1	2,5	18
19.	Дорноговь	0,5	1	1,5	19
20.	Булган		1	1	20

УЛСНЫ МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАДЫН АВАРГУУД

1965 он	Д.Агваанцэрэн	ХААДС математикийн бага
	Ц.Баясгалан	МУИС математикийн бага, д/э
1966	С.Оюун	УТК ЭЕМ мэргэжилтэн
1967	О.Энэбий	ПДС бага
1968	Г.Батнасан	ТБЭМ мэргэжилтэн
1969	Д.Халтар	ШУА математикийн хүрээлэн э/м ажилтан, д/э
1970	Р.Гончигдорж	ШУА математикийн хүрээлэн- гийн захярал, д/э
1971	С.Ганбаатар	БОХЯ мэргэжилтэн
1972	Ц.Дэмбэрэл	ШУА математикийн хүрээлэн э/м ажилтан
1973	Л.Энхтайван	
1974	Д.Амгалан	хуульч
1975	П.Энхболд	МУИС математикийн бага
1976	А.Ганбаатар	МУИС математикийн бага
1977	Г.Цогтоо	цаг уурын инженер
1978	Г.Цогтоо	МУТДБХ-нд ажилтан
1979	Б.Түмэндэмбэрэл	АБН Хөвлөлийн нэгдсэн редакц, математики
1980	Б.Баасандорж	МУИС. математикийн IY анги оюутан
1981	Б.Болдсайхан	оюутан
1982	Эрдэнэбаяр	МУИС. бага, физикч
1983	Г.Хүрэлбаатар	ШУА математикийн хүрээлэн э/м ажилтан
1984	Батдэлгэр	ШУА математикийн хүрээлэн э/м ажилтан
1985	Б.Батцэнгэл	МУИС математикийн Y анги оюутан
1986	Л.Батболд	оюутан
1987	С.Батболд	оюутан
1988	З.Соёл-Эрдэнэ	Мос.УИС. математикийн II курс, оюутан
1989	Ч.Эрдэнэбаатар	МУИС. Математикийн I

Т а р ч и г

хууцаг

1. Н. БАТХҮҮ	Улсын математикийн XXV олимпиадын IV ангийн III давааны бодлого	8.
2. Д. ЛЫМАСҮЭРЭН	Улсын математикийн XXV олимпиадын IV ангийн II давааны бодлого	7.
3. А. ХАНБААТАР, А. ГАНБААТАР	Улсын математикийн XXV олимпиадын IX ангийн IV давааны бодлого	12
4. Ц. ДАМДОРЖ, Л. ХАДХҮҮ	Улсын математикийн XXV олимпиадын X ангийн II давааны бодлогууд	26
5. Ц. ДАМДОРЖ, Л. ХАДХҮҮ	Улсын математикийн XXV олимпиадын X ангийн IV давааны бодлогууд	33.
6. А. МЕНЕИ	Олон улсын математикийн XXX олимпиадын бодлогуудын бодолт	40
7. А. ГАНБААТАР	Бугааны хуяргалт	51
8. СҮРЭНХОРЛОО	Комплекс тоо, түүн дээр хийх үйлдэл	65
9. Н. БИДОН,	Байгуулах бодлого	85.
10. Л. ХАДХҮҮ,	Улсын математикийн XXV олимпиадын сүүлчийн даваанд бодуулахаар дэвшүүлсэн бодлогууд	98.
11. Б. БАТЦЭНГЭЛ,	Албан ёсны бүс Свигийн тэмцээн	107.
12. Х. МАГДАР,	Улсын математикийн XXV олимпиадын тухай мэдээ	112.

БАЙГАЛЬ, ОРЧНЫГ ХАМГААЛАХ ЯАМНЫ ХАРЬЦА
ФОТО ОФСЕТ ХЭВЭЭЛЭЙН ГАЗАР ~~2200~~ ХЭВЭЭН
ЦААСНЫ ХЭМЖЭЭ 60Х90 1 15

ЭЛ № 622-20

Улаанбаатар хот

Басга тойрон 11