

Улсын математикийн XXVI олимпиадын

III ангийн гурвн давааны бодлого

В.Адьясүрэн

А1. $bc(a+d)(b-c) - ac(b+d)(a-c) + ab(c+d)(a-b)$

илэрхийллийг үржигдэхүүн болгон задал.

А2. Аливаа бодит x, y -ийн хувьд $x^2 + 5y^2 = 1$ байвал xy үржвэрийн хамгийн их утгыг ол.

А3. $ABCD$ төгш өнцөгтийн AB, BC талууд дээр харгалзан M, N цэгүүдийг авчээ. $2 \cdot AN < MD + MN + ND$ болохыг батал.

В1. Автобусны билет 000001 -ээс 999999 хүртэлх дугаартай. Хэрэв билетиin эхний 3 цифрийн нийлбэр сүүлчийн 3 цифрийн нийлбэртэй тэнцүү байвал түүнийг азтай билет гэдэг. Азтай билетиin дугаарын нийлбэр 1001 -д хуваагдахыг батал.

В2. Хэрэв $x \neq y$, $xy = -1$ ба $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} = \frac{2}{1+xy}$ бол $xy = 1$ болохыг батал.

В3. ABC гурвалжны α, β өнцгүүд болон $h_a + h_b + h_c$ өндрүүдийн нийлбэрээр байгуул.

Бодолтууд.

А1 бодлогын бодолт: $bc(a+d)(b-c) - ac(b+d)(a-c) + ab(c+d)(a-b) = bc(a+d)(b-c) - ac(b+d)[(a-b) + (b-c)] + ab(c+d)(a-b) = [bc(a+d)(b-c) - ac(b+d)(b-c)] + [ab(c+d)(a-b) - ac(b+d)(a-b)] = (b-c)cd(b-a) + a(a-b) \cdot d(b-c) = (a-b)(b-c)(a-c) \cdot d.$

А2 бодлогын бодолт:

Аливаа бодит a, b тоонуудын хувьд $a^2 + b^2 \geq 2ab$ тэнцэтгэл биш биелэнэ гэдгийг ашиглавал $1 = x^2 + 5y^2 \geq 2\sqrt{5}xy$ буюу $xy \leq \frac{1}{2\sqrt{5}}$ Сүүлчийн тэнцэтгэл биш $x = \sqrt{5}y$ үед тэнцэтгэл болно. Иймд xy үржвэр-

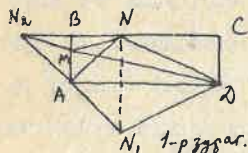
рийн хамгийн их утга $\frac{1}{2\sqrt{5}}$ -тай тэнцүү.

2.

АВ бодлогын бодолт:

$$S_{A\mathcal{D}}(N) = N_1, S_{AB}(N) = N_2$$

байг./I-р зураг/



$$\left. \begin{array}{l} S_{A\mathcal{D}}(N) = N_1 \\ S_{AB}(A) = A \end{array} \right\} \Rightarrow S_{A\mathcal{D}}([NA]) = [N_1, A] \Rightarrow NA = N_1A$$

$$\left. \begin{array}{l} S_{A\mathcal{D}}(N) = N_1 \\ S_{A\mathcal{D}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D} \end{array} \right\} \Rightarrow S_{A\mathcal{D}}([N\mathcal{D}]) = [N_1, \mathcal{D}] \Rightarrow N\mathcal{D} = N_1\mathcal{D}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_{AB}(N) = N_2 \\ S_{AB}(\mu) = \mu \end{array} \right\} \Rightarrow S_{AB}([N\mu]) = [N_2, \mu] \Rightarrow N\mu = N_2\mu$$

$$\left. \begin{array}{l} S_{AB}(A) = A \\ S_{AB}(N) = N_2 \end{array} \right\} \Rightarrow S_{AB}([AN]) = [AN_2] \Rightarrow AN = AN_2$$

$$N_1N_2 < N_2\mu + \mu\mathcal{D} + \mathcal{D}N_1$$

байх нь илт.

$$N_1N_2 = AN_1 + AN_2 = AN + NA = 2 \cdot AN, N_2\mu = \mu N, \mathcal{D}N_1 = N\mathcal{D}$$

байх учраас

$$2 \cdot AN < \mu N + \mu\mathcal{D} + N\mathcal{D}$$

болно.

ВI бодлогын бодолт:

Хэрэв N нь азтай дугаар бүхий билет байвал $999999-N$ нь азтай билет байна. Иймд азтай билетүүдийн дугаарын нийлбэр $S = 999999k$, k -натурал тоо. $999999 = 1001 \cdot 999$ учраас S' -нь 1001 -д хуваагдана.

$$\begin{aligned} \text{В2 бодлогын бодолт: } & \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} = \frac{2}{1+xy} \Rightarrow \frac{2}{1+xy} = \\ & = \frac{2+x^2+y^2}{1+x^2+y^2+x^2y^2} \Rightarrow \frac{2}{1+xy} = \frac{(x-y)^2 + 2(1+xy)}{(1+xy)^2 + (x-y)^2} \Rightarrow 2(1+xy)^2 + 2(x-y)^2 = \\ & = (x-y)^2(1+xy) + 2(1+xy)^2 \Rightarrow 2(x-y)^2 = (x-y)^2(1+xy) \end{aligned}$$

$x \neq y$ гэдгийг тооцвол сүүлчийн тэнцэтгэлээс $2 = 1+xy$ буюу

$xy = 1$ гэж гарна.

В3 бодлогын бодолт:

Анализ: Өндрүүдийн нийлбэр $h_a + h_b + h_c = a$ нөхцлийг орхөөд

α, β өнцгүүдтэй өгөгдсөн гурвалжинтай төсөөтэй A, B, C

гурвалжныг байгуулъя. Дараа нь B, B_2 өндрийг агуулсан шулуун дээр $B_2D=a$ (нь A, B, C гурвалжны өндрүүдийн нийлбэр) байх D , цэгийг авч, B, D шулуунтай параллель ямар нэг шулуун дээр $BD=a$ байх B_2 хэрчмийг байгуулна. Энэст нь BB_1, DD_1 шулуунуудын огтлолцлын O цэгт төвтэй A, B, C гурвалжныг B, B_2 өндөр нь BE дээр очихоор гомотет хувиргалт авч үзье. Энэ гомотетоор A, B, C гурвалжин бидний байгуулах гурвалжинд шилжинэ. Байгуулалт болон баталгаа нь илт.

Шинжилгээ: $BB_1 \parallel DD_1$, бол $B, D_1 = BD = a$ учир A, B, C нь бидний байгуулах гурвалжин мөн. BB_1, DD_1 нь параллель биш үед O цэг нэг утгатай олдох учир бодлого ганц шийдтэй байна.

Улсын математикийн XXII олимпиадын

III ангийн гурвын давааны бодлого

В.Адьяасхүрэн

A1. a, b нь $a^7 + b^7 = ab$ нөхцлийг хангадаг рациональ тоонууд бол $1 - 4a^5b^5$ нь рациональ тооны квадрат болохыг батал.

A2. $(x^2 - 3)(x - 1)^2 + x^2 = 0$ тэгшитгэлийг бод.

A3. S талбайтай $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн дотор P цэгийг авч ABP, BCP, CDP, ADP гурвалжингуудын хүндийн төвийг A_1, B_1, C_1, D_1 -ээр тэмдэглэв. A_1, B_1, C_1, D_1 дөрвөн өнцөгтийн талбайг ол.

B1. 35×35 хэмжээтэй таблицын нүд бүрт $+1, -1$ тоонуудыг аль нэгийг бичжээ. Багана бүрийн дор уул багананд бичигдсэн тоонуудын үржвэрийг, мөр бүрийн ард уул мөрт бичигдсэн тоонуудын үржвэрийг бичжээ. Эдгээр 70 тооны нийлбэр тэг байж болохгүй гэж батал.

B2. $\sqrt{2} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \dots + \sqrt[10]{\frac{10}{9}} < 9,9$ тэнцэтгэл бишийг батал.

B3. ABC ($BC = AB$) адил хажуут гурвалжныг багтаасан тойргийн AB нумын аливаа K цэгийн хувьд

$$AK \cdot KC = AB^2 - KB^2$$

болохыг батал.

Бодолууд:

A1 бодлогын бодолт:

Бодлогын өгөгдсөн нөхцлөөс $\frac{a^7 + b^7}{ab} = 1$ гэж олно. Иймд $1 - 4a^5b^5 = 1^2 - 4a^5b^5 = \left(\frac{a^7 + b^7}{ab}\right)^2 - 4a^5b^5 = \left(\frac{a^7 - b^7}{ab}\right)^2$ ийн.

A2 бодлогын бодолт:

$x = 1$ нь өгөгдсөн тэгшитгэлийн шийд болохгүй. Иймд өгөгдсөн тэгшитгэл $x^2 - 3 + \frac{x^2}{(x-1)^2} = 0$ тэгшитгэлтэй тэнцүү бай.

$$\begin{aligned}
 x^2 - \frac{x^2}{(x-1)^2} + 3 &= 0 \Leftrightarrow \left[x^2 + 2x^2 \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{x^2}{(x-1)^2} \right] - 2 \cdot \frac{x^2}{x-1} - 3 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{x}{x-1} \right)^2 - \frac{2x^2}{x-1} - 3 = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-1} \right)^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{x-1} - 3 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{x-1} = y \\ y^2 - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{x-1} = y \\ \begin{bmatrix} y=3 \\ y=-1 \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{x-1} = 3 \\ \frac{x^2}{x-1} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

АВ бодлогын бодолт:

$ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн талуудын дундаж цэгүүдийг холбох үүсэх дөрвөн өнцөгтийг $QRTK$ гээ. Энэ дөрвөн өнцөгт нь параллелограмм байна. Одоо $S_{QRTK} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ /I/ болохыг баталъя.

$S_{BQR} = \frac{1}{4} S_{ABC}$, $S_{QKT} = \frac{1}{4} S_{ACD}$ байх нь илт. Эдгээр тэнцэтгэлүүдийг нэмээд $S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ABCD}$ гэдгийг тооцвол

$S_{BQR} + S_{QKT} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$ /I/ болно. Үүнтэй адилаар

$S_{AQR} + S_{KCT} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$ /2/ болохыг баталж болно. /I/ ба /2/ тэнцэтгэлээс $S_{BQR} + S_{QKT} + S_{AQR} + S_{KCT} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ гэж гарна

Иймээс $S_{QRTK} = S_{ABCD} - \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ болно.

$H_p^{2/3}(Q) = A_1$, $H_p^{2/3}(R) = B_1$, $H_p^{2/3}(T) = C_1$, $H_p^{2/3}(K) = D_1$ байх учраас

$H_p^{2/3}(QRTK) = A_1 B_1 C_1 D_1$. Эндээс $S_{A_1 B_1 C_1 D_1} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 S_{QRTK} = \frac{4}{9} S_{QRTK}$ гэж гарна. /I/-ийг тооцвол $S_{A_1 B_1 C_1 D_1} = \frac{2}{9} S_{ABCD} = \frac{2}{9} S'$ болно.

ВI бодлогын бодолт:

Бодлогын нөхцөлд дурдсан 70 тооны үржвэрийг авч үзье. Энэ үржвэрт табицлын нүд бүрэн бичигдсэн тоо яг хоёр удаа орох учраас энэ үржвэр нь 1-тэй тэнцүү. Иймд бодлогын нөхцөлд дурдсан 70 тоонд тэгш тооны /I/ оролцоно. Иймээс 70 тооны нийлбэр тэгтэй тэнцэж болохгүй.

В2 бодлогын бодолт:

Арифметик геометрийн дундажийн тухай теоремийг хэрэглэвэл:

$$\sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 1} < \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 + 1 - \frac{1}{2}$$

3.

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 1} < \frac{\frac{3}{2} + 1 + 1}{3} = \frac{7}{2 \cdot 3} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\sqrt[4]{\frac{4}{3}} = \sqrt[4]{\frac{4}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} < \frac{\frac{4}{3} + 1 + 1 + 1}{4} = \frac{13}{3 \cdot 4} = 1 + \frac{1}{3 \cdot 4} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\sqrt[10]{\frac{10}{9}} = \sqrt[10]{\frac{10}{9} \cdot \underbrace{1 \cdot \dots \cdot 1}_{9 \text{ ширхэн}}} < \frac{\frac{10}{9} + 9}{10} = \frac{91}{9 \cdot 10} = 1 + \frac{1}{9 \cdot 10} = 1 + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$$

эдгээр тэнцэтгэл бийшгдийг нэмээд хялбар хувиргалт хийсний эцэст

$$\sqrt{2} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \dots + \sqrt[10]{\frac{10}{9}} < 10 - \frac{1}{10} = 9,9 \quad \text{болно.}$$

ВЭ бодлогын бодолт:

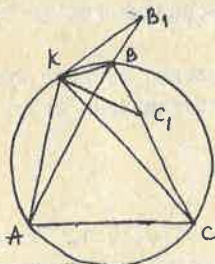
Батлах зүйлийг $AK \cdot KC = (AB + KB)(AB - KB)$ буу

$$\frac{AB + KB}{KC} = \frac{AK}{AB - KB} \quad /I/ \text{ хэлбэрт хувиргая. } AB \text{ шулуун дээр}$$

B , цэгийг $B_1 = KB$ байхаар, BC хэрчим дээр C_1 цэгийг $BC_1 = KB$ байхаар

авъя. /I-р зураг/ /I/-ийг батлахын тулд $\triangle AKB, \triangle KC_1C$

гэж батлавал хангалттай.



I-р зураг

$$\angle KAB = \angle KCB \quad \text{байх нь илт}$$

$$\angle B_1KB = \angle KB_1B = \alpha$$

$$\angle BAC = \angle BCA = \beta \quad \text{гээ.}$$

AKB нь тойрогт багтсан

дөрвөн өнцөгт учраас

$$\angle BKA + \angle BSA = 180^\circ. \quad \text{Эндээс}$$

$$\angle BAK = 180^\circ - \beta \quad \text{гэж гарна.}$$

$$\text{Иймд } \angle B_1KA = \angle BKA + \angle B_1KB = 180^\circ - \beta + \alpha \quad /I/ \text{ болно.}$$

$$\angle KC_1C = 180^\circ - \angle KC_1B = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle KB_1C_1) =$$

$$= 90^\circ + \frac{1}{2}\angle KB_1C_1 = 90^\circ + \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle KBC_1) =$$

$$= 90^\circ + \frac{1}{2}(180^\circ - 2\beta + 2\alpha) = 180^\circ - \beta + \alpha \quad /2/$$

/I/ ба /2/ тэнцэтгэлээс $\angle B_1KA = \angle KC_1C$ гэж гарна.

Иймд $\Theta\Theta$ шинжээр $\triangle AKB_1 \sim \triangle KC_1C$

Улсын математикийн XXVI олимпиадийн
IX ангийн гурвын давааны бодлогууд

А.Хашбаатар

Л.Хадхүү

А.1 0,1,2,3,4,5 цифруудийн тусламжтайгаар 3-д хуваагдах 3 оронтой тоо хичнээнийг бичиж болох вэ?

А.2 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ тоонууд өгөгджээ.
$$b_1 \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i, b_2 = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i \cdot a_j$$
 гэж тэмдэглэе.

$$a_1 \leq b_1 - \sqrt{b_1^2 - b_2} \leq b_1 + \sqrt{b_1^2 - b_2} \leq a_n$$

тэнцэтгэлсийг батал. Хэдийд тэнцэл биелэх вэ?

А.3 ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв O, радиус $\sqrt{2}$ байжээ. $AB+AC=3BC$ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\angle OAB = \angle OBC = \angle OCA$ гэж батал.

В.1 Кубын орой бүр дээр I юмуу -I тоонуудыг бичжээ. Талс бүр дээр энэ талсын оройнууд дээр бичсэн тоонуудын үржвэрийг бичье. Эдгээр 14 тооны нийлбэр

а/ 7-той тэнцүү

б/ 0-тэй тэнцүү

байж болох уу?

В.2 $a_1=2, a_2=3, a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2+5}{a_n} (n=1,2,\dots)$

рекуррент томъёогоор өгөгдсөн дарааллын гишүүн бүр натурал тоо байхыг батал.

В.3 Хурц өнцөгт гурвалжны аль нэг өндрийн сууриас нөгөө 2 өндөр ба талд буулгасан перпендикуляруудын суурь нэг шулуун дээр оршдогийг үзүүл.

Бодлого бүр 6 оноотой.

Бодолт

А.1 3-д хуваахад гарах үлдэгдлээр нь 0,1,2,3,4,5 тоонуудыг $\{0,3\}, \{1,4\}, \{2,5\}$ гэсэн 3 ангид хуваах. Ингээд 3 оронтой тооны эхний 2 орон $\overline{xy}$ гэвэл, үүнийг 3-д хуваахад 0,1,2 үлдэгдлүүдийн нэг нь гарах учир сүүлчийн цифр z нь дээрх гурван ангийн зөвхөн нэгд нь орно. Өөрөөр хэлбэл гурван оронтой тооныхоо эхний 2 цифрийг сонгосон тохиол-

долд суулчийн шийрийг хоёр аргаар л сонгох боломжтой.
/Анги тус бүр хоёр элементтэй байгааг анхаар /

Нөгөө талаас y -ийг сонгох бүх боломж 6, x -ийг сонгох бүх боломж 5 учир дурьдсан чанартай 3 оронтой тоо нийт $5 \cdot 6 \cdot 2 = 60$ ширхэг байна.

A.2 а/

$$b_1^2 - b_2 = b_1^2 - (n^2 b_1^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2) \frac{2}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2 - b_1^2 \right) \geq 0$$

б/Бид $a_1 \leq b_1 - \sqrt{b_1^2 - b_2}$ буюу $a_1^2 - 2a_1 b_1 + b_2 \geq 0$ гэж батлахад л хангалттай. Үүний тулд

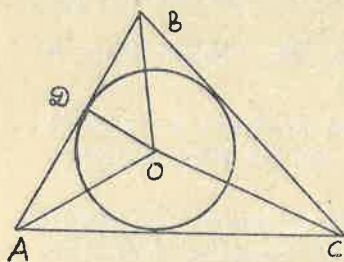
$$b_i = a_{i+1} - a_1 \quad (i=1, 2, \dots, n-1), A = \sum_{i=1}^{n-1} b_i, B = \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} b_i b_j \geq 0$$

гэж тэмдэглэвэл:

$$\begin{aligned} a_1^2 - 2a_1 b_1 + b_2 &= a_1^2 - 2a_1(b_1 - a_1 + a_1) + \frac{2}{n(n-1)} \left[a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (a_1 + b_i) + \right. \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} (b_i + a_1)(b_j + a_1) \left. \right] = a_1^2 - 2a_1 \left(\frac{A}{n} + a_1 \right) + \frac{2}{n(n-1)} \left[(n-1)a_1^2 + \right. \\ &+ a_1 A + B + (n-2)a_1 A + \frac{(n-1)(n-2)}{2} a_1^2 \left. \right] = \frac{2B}{n(n-1)} \geq 0 \end{aligned}$$

болж батлах зүйл гарлаа. Эндээс үзэхэд тэнцэл биелэхийн тулд $B=0$ буюу $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ байх ёстой болж байна.

A.3



$$BC = a, CA = b, AB = c$$

ба $\triangle BOC, \triangle AOC$ гурвалжнуудыг н талбайг харгалзан S_1, S_2 гэж тус тус тэмдэглэе. Тэгвэл

$$S_1 = \frac{1}{2} a \cdot r = \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin \frac{\pi + \hat{A}}{2} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot r \cdot OA \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\hat{A}}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot OA \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2} = \frac{1}{2} AO \cdot r = \frac{1}{2} (p$$

Солох ба эдгээрээс

$$\cos \frac{\hat{A}}{2} = \frac{a \cdot r}{OB \cdot OC} = \frac{(p-a)r}{r \cdot OA}$$

болно. Эндээс $r \cdot OA = OB \cdot OC$ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэллээ-
тэй нөхцөл нь $a \cdot r = (p-a) \cdot r$ буюу $b+c=3a$

болж батлах зүйл гарна.

В.1 Кубын найман оройд бичсэн тоонуудыг $x_1, x_2, \dots, x_8$ талсууд
дээр бичсэн тоонуудыг $P_1 = x_1 x_2 x_3 x_4, \dots, P_6 = x_5 x_6 x_7 x_8$
гэж тэмдэглэвэл нийт 14 тооны үржвэр

$$P = x_1 x_2 \dots x_8 \cdot P_1 \cdot P_2 \dots P_6 = x_1^7 x_2^7 \dots x_8^7 > 0$$

байна. Иймд энэ 14 тооны дотор -1 тэгш тоотой орно. Иймээс
эдгээрийн нийлбэр 7 болон 0 гарах боломжгүй. /Учир нь
нийлбэр 0 байхын тулд -1-ийн тоо 7 байх ёстой./

В.2

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

байхыг индукцээр баталъя. $n=1$ үед дээрх тэнцэл биелэх нь
илэрхий. Одоо

$$a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}, \quad a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$$

гэж үзвэл $\frac{a_{n+1}^2 + 5}{a_n} = a_{n-2}$ байхыг тооцвол

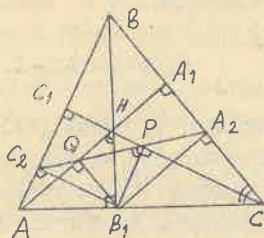
$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{a_{n+1}^2 + 5}{a_n} = \frac{9a_n^2 - 6a_n a_{n-1} + a_{n-1}^2 + 5}{a_n} = 9a_n - 6a_{n-1} + \frac{a_{n-1}^2 + 5}{a_n} = \\ &= 9a_n - 6a_{n-1} + a_{n-2} = 3(3a_n - a_{n-1}) - (3a_{n-1} - a_{n-2}) = 3a_{n+1} - a_n \end{aligned}$$

болж батлагдана.

Энэст нь өмнөх томъёо болон $a_1 = 2, a_2 = 3$ гэдгийг
тооцвол дарааллын бүх гишүүн натурал тоонууд болно.
/Дарааллын өснө гэдэг нь илт/

В.3 А, В, С оройнуудаас эсрэг талд нь буулгасан перпендикуляр
суурийг харгалзан A_1, B_1, C_1 , ABC гурвалжин өндрүүдийн
огтлоллын нэгийг Н; B_1 нэгээс АВ, ВС, АА₁ СС₁ шулуунуудад
буулгасан перпендикуляруудын суурийг харгалзан $C_2, A_2, Q,$
 P гэж тус тус тэмдэглэе.

Одоо A_2, P, Q нэгүүд нэг шулуун дээр оршихыг баталъя.



Мөн аргаар C_2, Q, P нэгүүд нэг шулуун дээр орших нь батлагдана.

B, PC, B, A_2C нь ерөнхий гипотенузтэй тэгш өнцөгт гурвалжнууд учир B, PA_2C дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. Иймд $\angle B, PA_2 + \angle C = \pi$

Харилсан перпендикуляр талтай өнцгийн чанараас $\angle AHB_1 = \angle C$ болно.

Мөн $AH \perp B, Q, CP \perp B, P$ тул B, Q, H, P дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. Тиймээс нэг нумд тулсан өнцгийн чанараар

$$\begin{aligned} \angle QPB_1 &= \angle QHB_1 = \angle AHB_1 = \angle C \Rightarrow \\ \angle A_2PQ &= \angle A_2PB_1 + \angle QPB_1 = \angle B, PA_2 + \angle C = \pi' \end{aligned}$$

болж A_2, P, Q нэгүүд нэг шулуун дээр оршино.

Улсын математикийн XXVI олимпиадын
IX ангийн IV давааны бодлогууд

А.Хамбаатар, Л.Халхуу

Улсын математикийн XXVI олимпиадын IV даваа 1990 оны 5-р сарын II-12-нд Улаанбаатар хотноо болж, хот, хөдөөнөөс шалгарсан IX ангийн 41 сурагч авьяас чадвар, эрдэм ухаанаа сорилоо. / Амжилттай оролцсон сурагчид, сурагчдаа амжилттай бэлтгэсэн багш нарын талаар оршил хэсгээс тодруулан харна уу? /

Олимпиадын зохион байгуулах хорооны гишүүд, багш нар, оюутнуудын дэвшүүлсэн 70-аад бодлогоос сонгосон, тус бүр нь 6 оноотой 6 бодлогыг сурагчид 2 өдөр бодлоо. Сурагчид эдгээр бодлогыг хэрхэн бодсон, тэдний ололт, дутагдал мунд сайггаа зэргийг талаар дараахь хүснэгтээс зохих дүгнэлт хийн болно.

	A 1	A 2	A 3	B 1	B 2	B 3	Бүгд
Бодлого тус бүрээр авбал зохих оноо	246	246	246	246	246	246	2076
Сурагчдын авсан онооны нийлбэр	31	58	5	3	15	46	158
Бодлого бүрэн бодсон сурагчдын тоо / 6 оноо авсан /	3	9	-	-	-	2	14
Бодлого бүрэн биш бодсон сурагчдын тоо / 2,5-5,5 оноо	3	-	1	-	2	6	12
Бодоогүй боловч зарим зөв оролдлого хийсэн сурагчдын тоо / 0,5-2 оноо /	-	3	1	5	6	8	23

Одоо дөрвийн даваанд бодуулсан бодлогууд болон бодолтуудтай нь танилцъя.

A 1 /Д.Батсүх. Увс/

26¹⁹⁹⁰ тооны эхний цифрийг дарж, үлдсэн тоон дээр нэмэх үйлдлийг 10 оронтой тоо үүсгэл үргэлжлүүлбэ. Үүссэн 10 оронтой тооны дор хаяж 2 цифр ижилхэн гэдгийг батал.

A 2 / Г.Хүрэлбаатар. ШУА-ийн математикийн хүрээлэн /
а, в, с -- зэрэг бодит тоонууд бол

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

тэнцэтгэл бишийг батал.

A 3 / Б.Өлзийсайхан. Хөвсгөл. Галт, 10 жилийн дунд сургуулийн сурагч /

ABC гурвалжинд багтсан тойрог AF, EC, AC талуудыг M, N, K нэгүүдэд шүргэнэ. MK, NK шулуунууд С ба А оройн биссектрисүүдтэй харгалзан H, L нэгт огтлолцно. Тэгвэл [HL] хэрчим дундаж шугам дээр оршихыг батал.

B 1 / К.Имаммагзам. Хо. УБИС /

$$0 < q < 1 \text{ бол } q^{m-1} < \frac{1+q}{(1-q)^2 m^2} \quad (\forall m \in \mathbb{N})$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

B 2 / Н.Лайвий-Од. УБИС-ийн оюутан /

Хавтгайн нэг бүрийг 1990 өнгийн аль нэгээр будаа. Хоёр тал нь хоорондоо 26° өнцөг үүсгэх 1 өнгөөр будагдсан оройнуудтай параллелограмм олдохыг батал

B 3 / Д.Гунгаасаяр. МУИС-ийн оюутан /

Тойргийн өгсөн 2 диаметр дээр хоорондох зай нь тогтмол а байх нэгүүдээс перпендикуляр босгож, огтлолцлын нэгүүдийн геометр байрыг ол.

Бодолт

A 1 Энэ бодлогыг А.Түвшинтулга / Дархан /, Л.Гантөмөр / Увс /, В.Батмөнх / Увс / нар бүрэн бодож, Д.Гантулга / /, Д.Хашбаяр / МУИС / нар нилээд дөхүүлсэн байлаа.

I Бодолт / А.Түвшинтулгын бодолтыг бага зэ

өөрчлөн үзүүлэв.

n оронтой тооны эхний цифрийг a гэвэл, түүнийг $10^{n-1}a+b$ хэлбэртэйгээр бичиж болно. Энэ тоон дээр зохих үйлдлийг хийхэд $a+b$ тоо гарах ба

$$10^{n-1}a+b \equiv (a+b) \pmod{9}$$

учир өгөгдсөн үйлдлийн инвариант нь 9-д хуваахад гарах үлдэгдэл юм. Иймд

$$26^{1990} \equiv (-1)^{1990} \pmod{9} \equiv 1 \pmod{9}$$

гэдгийг тоонвол хамгийн элээст гарах 10 оронтой тоо N -ийг 9-д хуваахад 1 үлдэнэ.

Нөгөө талаас N тооны бүх цифр ялгаатай гэж зэрэгцээ нь авч үзвэл түүнд 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 цифрууд нэг нэг орох ба

$$0+1+2+\dots+9=45 \equiv 0 \pmod{9}$$

учир N тоо 9-д хуваагдах болж харшлал үүснэ.

А 2. Өгөгдсөн бодлогууд дотроос энэ бодлого хамгийн хялбар нь сайсан учир 9 сурагч бүрэн бодов.

I бодолт (Сурагч Д. Хүрэлшагай (Архангай), Л. Гантөмөр (Увс), Ж. Волзаяа (Ховд), А. Тувшинтулга (Дархан), П. Цэрэнбат (У.Б. 12-р сургууль), Р. Батмөнх (Увс) нар энэ санаагаар бодсон юм.)

Арифметик ба геометрийн дунджуудын тухай тэнцэтгэлбэрийн 2 удаа ашиглавал:

$$\frac{1}{ab+1} + \frac{1}{bc+1} + \frac{1}{ca+1} \leq \frac{1}{2\sqrt{ab}} + \frac{1}{2\sqrt{bc}} + \frac{1}{2\sqrt{ac}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} + \sqrt{\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} + \sqrt{\frac{1}{c} \cdot \frac{1}{a}} \right) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

болж батлагдлаар. Баталгааны явцаас $a=b=c=1$ үед л тэнцэл биелэгдэх нь харагддаг байна.

II бодолт. Сурагч Р. Батбаяр (МУИС), Б. Балрмагнай (Завхан) нарын бодолтыг үзүүлэв.

p, q нь зэрэг бодит тоонууд бол

$$p(q-1)^2 + q(p-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow p(q^2+1) + q(p^2+1) \geq 4pq \Leftrightarrow$$

$$(p+q)(1+pq) \geq 4pq \Leftrightarrow \frac{1}{p+1} \leq \frac{p+q}{4pq} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right)$$

болно. Энэ тэнцэтгэлбишийг ашиглавал:

$$\frac{1}{ab+1} + \frac{1}{bc+1} + \frac{1}{ca+1} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

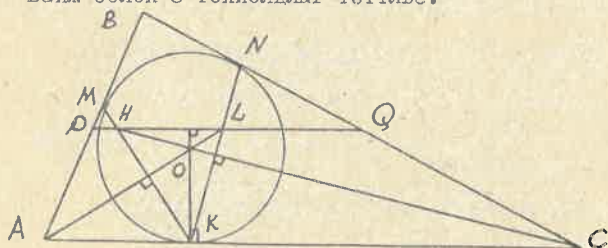
болж батлах зүйл гарв.

Сурагч А.Энхбаяр/У.Б 52-р сургууль/ эрэмбэлэх аргаар энэ тэнцэтгэлбишийг баталжээ.

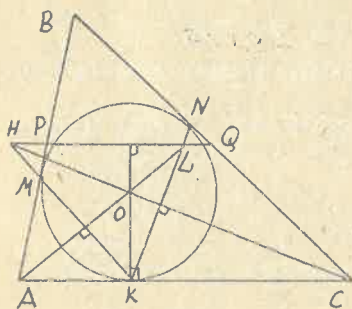
Энд зориуд тэмдэглэхэд ганц ч сурагч энэ тэнцэтгэлбиш хэдийд тэнцэлдээ хүрэх тухай асуудлыг авч үзсэнгүй. Сурагчдаа тэнцэтгэлбишийг батлаад, дараа нь энэ нь хэдийд тэнцэлдээ хүрэхийг авч үздэг, өөрөөр хэлбэл уг асуудлыг бүрэн шийддэг болгон сургах талаар багш нар цаашид анхаарах хэрэгтэй юм.

А 3 Энэ бодлогыг ганц ч сурагч бодож чадсангүй. Иймд сурагч Н.Батзаяагийн (МУИС) бодолтыг үзүүлье. /Энэ сурагч олимпиадын IY даваанд оролцоогүй юм./

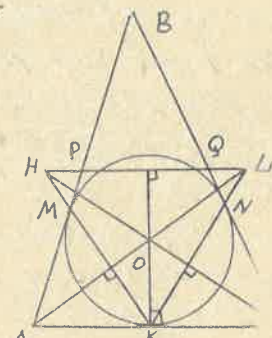
Байж болох 3 тохиолдлыг үзүүлье.



1-р зураг



2-р зураг



3-р зураг

в/Аль ч тохиолдол KHL гурвалжин AL, KH, HL байгаа тул ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв O нь KHL гурвалжны өнцгүүдийн огтлолцоо болно. Иймд $KO \perp HL$ байх ёстой. Нөгөө талаас $KO \perp AC$ байагийн сэнхвэл $AC \parallel HL$ гэж гарна.

б/Өдөр $AC = b = 2 \cdot PQ$ гэж бэтлэхийг хангалттай.

$\triangle AMK$ оо $\triangle PMH$, $\triangle SKN$ оо $\triangle QNL$ ба $AM = AK = p - a$, $SK = SN = p - c$ учир $PM = PH = x$, $QN = QL = y$ болно. Мөн $\angle PLA = \angle LAK = \angle PAL$ тул APL гурвалжин өнцл хажуутай байна. Үүнтэй нт иймээр CHQ гурвалжин өнцл хажуутай гэж гарна. Ийнхүү өмнө баталсан зүйлс бодон хийсэн тэмдэглэлээр ашиглавал:

I/Эхний тохиолдол /1-р зургийг хар/

$$\left. \begin{aligned} (p-a) - x &= AP = PL = x + HL \\ (p-c) - y &= CQ = QN = y + HL \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$(p-a) + (p-c) = 2(x + HL + y) \Rightarrow b = 2 \cdot PQ$$

II/Дөрөвдүгээр тохиолдол /2-р зургийг хар/

$$\left. \begin{aligned} (p-a) + x &= PQ - y \\ (p-c) - y &= PQ + x \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2p - (a+c) = 2 \cdot PQ \Rightarrow b = 2 \cdot PQ$$

III/Сүүлчийн тохиолдол /3-р зургийг хар/

$$\left. \begin{aligned} (p-a) + x &= PQ + x \\ (p-c) + y &= PQ + y \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = 2 \cdot PQ$$

Гэж аль ч тохиолдолд батлах зүйл гарч байна.

В I Энэ бодлогыг бүх сурагч болох чаднаагүй учир зохиогчийн бодолтыг танилдуулъя.

$$\begin{aligned} q &= x^2 \text{ гэвэл } 1+3+5+\dots+(2m-1) = m^2 \text{ байхыг тооцвол} \\ m^2 \cdot q^{m-1} &= (1+3+5+\dots+(2m-1))x^{2m-2} < 1+3x^2+5x^4+\dots+ \\ &+ (2m-1)x^{2m-2} = (x+x^3+x^5+\dots+x^{2m-1})' = \left(\frac{x-x^{2m}}{1-x^2}\right)' = \\ &= \frac{(1-2mx^{2m-1})(1-x^2) + 2x(x-x^{2m})}{(1-x^2)^2} < \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+q}{(1-q)^2} \end{aligned}$$

Энэ гаднах зууны дараа, Батгалууны талд $x^2 > 0$ учир
тэнгэл биеэлэхүүн гэдэг нь харгалзах байна.

В 2 Энэ бодлогыг Г.Батзориг (З.Б 45-р сургууль), Г.Хамбаар
(МУС) нар нилээд дэхүүлсэн байна. Энэ Г.Хамбаарын бо-
долтот бара-зарар өөрчлөн шинэ.

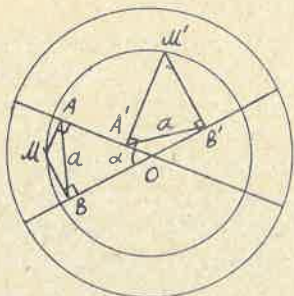
Хавтгайн нэг бүрийг n өнгийн аль нэвээр бүрд. Нон
 $l_1, l_2, \dots, l_n, q_1, q_2, \dots, q_n$ гэхээр $l_1, l_2, \dots, l_n, q_1, q_2, \dots, q_n$ гэсэн
дугуйнууд татаа, эдгээрийн огтлолцлын нэгүүдийг
сонирхъя. q_i дуулууд дээр орох $n+1$ нэгнийг $(n+1)^2$ агаар
будах болох ба q_i дуулууд тос $(n+1)^2 + 1$ учир Дирхлейн зар-
чим ёсоор огтлолын нэгүүд нь нилээр будагдсан q_i, q_j гэсэн
2 дуулууд олддог. Гэтэл q_i, q_j дуулууд $n+1$ нэгнийг n өнгөөр
будсан учир түүн дээр ижил өнгөөр будагдсан 2 нэг олноо.
Энэ 2 нэгт харгалзах q_i, q_j дуулууд 2 нэгт өнгө адгээрийг
холбосон ижил өнгийн оройтой параллелограмм гарна.



Тухайн тохиолдолд $n=1990$ ба l_i, q_j дуулуудуудын
хоорондох өнөр 26° байх үед манай бодлогын хариу гарах
юм.

В 3 Энэ бодлогыг суралч М.Чамалдорж (МУС), С.Батмөнх (Сэлэн-
гэ) нар голд, Ч.Могойзуул (З.Б 1 сургууль), Г.Хамбаар (МУС)
нар нилээд дэхүүлсэн байна. Суралч С.Батмөнх дараах эр-
гэлт тодор.

Өгөгдсөн 2 диаметрийн хоорондох өнөргийг α гэв. Энэ 2
диаметр дээр хоорондоо α нэгт A, B гэсэн дугуйн 2 нэг
авч, эдгээр дээр босгосон нормандиудлуучин огтлолцлын
нэгнийг M гэв. $\angle OAM = \angle OBM = 90^\circ$ учир $AMBO$ нь



тойрогт багтсан дөрвөн өнцөгт,
 OM нь түүнийг багтаасан тойр-
 гийн диаметр болно. Иймд синусын
 теорем ёсоор

$$OM = \frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \alpha} = \text{const}$$

болно. (A, B нь аль нэг диаметр
 дээр орших үед ч $OM = \frac{a}{\sin \alpha}$ байна.)
 Өөрөөр хэлбэл M цэг нь өгөгдсөн
 тойргийн төв дээр төвтэй, $\frac{a}{\sin \alpha}$
 радиустай тойрог дээр оршино.

Нөгөө талаас шинээр байгуулагдсан тойргийн аль ч M'
 цэгийг авч, түүнийг өгөгдсөн 2 диаметр рүү проекцлоход гарах
 цэгүүдийг A', B' гэвэл $A'B' = a$ байх нь илт юм.

Ийнхүү үүсэх цэгүүдийн геометр байр нь өгөгдсөн тойргийн
 төв дээр төвтэй, $\frac{a}{\sin \alpha}$ радиус бүхий тойрог болно.

Сурагч Н. Наранзул мөн иймэрхүү санаагаар бодсон.

Энэ бодлогыг бодсон сурагч бүрд байгаа нэг дутагдал бол
 M цэгийг тойрог дээр оршихыг үзүүлсэн мөртлөө буцаагаад энэ
 тойргийн цэг бүр бодлогын нөхилийг хангана гэдгийг харуулаа-
 гүй байсанд оршино. Багш бид энэ талыг цаашид нилээд анхаарах
 хэрэгтэй юм байна.

Ц.Дашдорж, А.Ганбаатар

1. $x_i > 0$, $i = \overline{1, 44}$, $\sum x_i = \sum x_i^2 = 44$ бол

$\sum x_i^{44} \geq 44$ батал.

2. Талстуудын талбай нь S_1, S_2, S_3, S_4 - тай =
тетраэдр олддог байхын тулд S_i тоонууд
ямар зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцлийг хангах вэ?

3. Цэг бүр нь өгөгдсөн хоёр өнгийн нэгээр будагдсан
ба нэгэм талбайн аливаа зөв гурвалжны оройнууд нэг ижил
өнгөөр будагдаагүй байхаар хавтгайн бүх цэгийг будав.

а/ $\sqrt{3}$ талбай ба бүх орой нь ижил өнгөөр будагдсан
зөв гурвалжин олдохыг батал.

б/ бодлогын нөхцөлд зааснаар будах аргыг ол.

4. $f(f(x) + y) = f(x + y) + 1$ нөхцөл
хангах бүх эрс өсөх $f: R \rightarrow R$ функцуудийг ол.

5. p анхны тоо ба $a_i, b_i, i = \overline{1, p-1}$
бүхэл тоонууд өгөгдөв. Хэрэв $a_i - b_i, i = \overline{1, p-1}$
ялгаврууд p -д хуваагддаггүй бол $\{a_i, b_i\}$ хос бүрээс
 x_i тост $x_1 + \dots + x_{p-1}$ нийлсээр p -д хуваагддаг байхаар
сонгон авч болохыг батал.

6. $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ бол

$$x^n + (x+1)^{n+1} = y^{2n} + (y+1)^{2n}$$

тэгшитгэл төгсгөлөг тооны бүлэг шийдтэй гэж батал.

7. а/ $AB = BC = 1$ ба A, C нь өөр
өнгөтэй байх 3 цэг оддоно гэдгийг харуулъя.

Ийм биш гэв. $A(x)$ оууу A нь хар өнгөтэй цэг байг.

• E

A — B — C

• F

А цэг дээр төвтэй 2 радиустай тойрог $(A, 2)$ -ийг авч үзвэл түүний бүх цэг нь хар өнгөтэй байна. Бодлогын нөхцлөөс $(A, 2)$ дотор $\partial(y)$ цэг олдох ба $(B, 2)$ тойргийн бүх цэг нь мөн улаан байна. Эндээс $(A, 2)$ ба $(B, 2)$ -ийн огтлолын цэг нь нэгэн зэрэг хар ба улаан өнгөтэй болоход хүрч зөрчил гарас. $\delta(x)$ бон $E(y), F(y)$ болох учраас CEF нь олбол зохих гурвалжин болно.

о/ Хавтгай $\sqrt{3}/2$ өргөнтэй зурвсуудад хувааж завсруудын хар ба улаанаар салаавчлан будья. Тэхдээ зурвас бүрийн дээд тал нь нөгөө өнгөө авна гэж үзэхэд манайд тохирох будалт болно.

5. Энэ бодлого нь 23-р Олимпиадын товхимолын 72-р хуудасны бодлого 3.6 "нас хялбархан мөрдөгдөнө."

6. Б.Батцэнгэлийн бодолтыг толилуулъя.

Бид x, y нь зэрэг бүхэл тоо байдаг шийдийн тоог төгсгөлөг гээд баталчихвал хангалттай.

$$a, b \geq 0 \text{ үед } \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \quad \text{байдаг. Эндээс}$$

$x > y^2 + y - \frac{1}{2}$ болохыг хялбархан харж болно. Мөн $x < y^2 + 2y$ хэрэв $a_0 > 0$ бол $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \leq 0$ тэнцэл бий төгсгөлөг тооны натурал шийдтэй байдаг. Үнэхээр

$$a_0 x^n + \dots + a_n = f(x) \quad \text{функц нь тасралтгүй ба}$$

$$f(+\infty) = +\infty \text{ тун ямар нэг заагаас цааш дайдаа } f(x) > 0$$

болох юм.

Энэхүү үр дүнг ашиглаад

$$\left(y^2 + y + \frac{n}{2}\right)^n + \left(y^2 + y + \frac{n}{2} + 1\right)^n \leq y^{2n} + (y+1)^{2n}$$

бих төгсгөлөг натурал шийдтэйг харуулъя. Энэ нь манай тэгшитгэл

$$x \geq y^2 + y + \frac{n}{2}$$

байх төгсгөлөг тооны натурал шийд-
тэйг харуулж байгаа юм.

$$\left(y^2 + y + \frac{n}{2}\right)^n + \left(y^2 + y + \frac{n}{2} + 1\right)^n$$

олон гишүүнтийн задралын
шинжүүртэй

y^{2n} -ын өмнөх коэф. 2 , y^{2n-1} -ын өмнөх
коэф. 2n , y^{2n-2} -ын өмнөх коэф.

$$n(n-1) + n \left(\frac{n}{2} + \frac{n}{2} + 1 \right) = 2n^2$$

юм.

Харин $y^{2n} + (y+1)^{2n}$ олон гишүүнтийн задралын y^{2n} -ын
өмнөх коэф. 2 , y^{2n-1} -ын өмнөх коэф. 2n , y^{2n-2} -ын
өмнөх коэф. $n(2n-1)$ юм.

Иймд дээр тэмдэглэсэн зүйлээс

$$\left(y^2 + y + \frac{n}{2}\right)^n + \left(y^2 + y + \frac{n}{2} + 1\right)^n - y^{2n} - (y+1)^{2n} \leq 0$$

тэнцэл биш нь төгсгөлөг тооны эсрэг бүхэл шийдтэй юм.

Одоо $y^2 + y - \frac{1}{2} < x < y^2 + y + \frac{n}{2}$ байх шийдүүд төгсгөлөг
гэдгийг харуулах үлдэв.

$x = y^2 + y + a$, $a = 0, 1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]$, a бүрийн хувьд $y^2 + (y+1)^{2n}$
 $-(y^2 + y + a)^n - (y^2 + y + a + 1)^n$ олон гишүүнт нь $2n-2$ - оос ихгүй
зэрэгтэй олон гишүүнт гарах тул $2n-2$ - оос хэтрэлгүй тооны
шийдтэй юм. Нэгэнт ийм a -ын тоо нь бас төгсгөлөг байгаа

тул $y^2 + y - \frac{1}{2} < x < y^2 + y + \frac{n}{2}$ байх эсрэг бүхэл шийдийн
тоо бас төгсгөлөг гэж гарлаа. Үүгээр батлах зүйл батлагдлаа.

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХҮИ ОЛИМПИАДЫН
Х АНГИЙН ЭЦСИЙН ДАВЛАНЫ БОДЛОГУУД

Ц.Дашдорж

I өдөр

А1. / Адьяасүрэн / УБДС /

$$4x^2 - 14xy + y^2 + 261 = 0$$

тэгшитгэл нь төгсгөлгүй олон натурал тоон шийдтэй гэж батал.

А2. / Д.Баярцогт, Эрдэнэт /

n -ийг 3 натурал тооны нийлбэрт / эрэмбэ анхаарахгүй / задлах боломжит тоог $P_3(n)$ гээ.

$$P_3(6k+4) = 3k^2 + 4k + 1 \quad \text{гэж батал.}$$

А3. / Баясгалан, УБДС / Хавтгайд ерөнхий байршилтай, тэдгээрийн аль ч хэд дээр нь оройтой гүдгэр олон өнцөгтийн талбай нь бүхэл тоо байдаг төгсгөлгүй олон цэг олдохыг батал.

II өдөр

Б1. / Дайвий-Од, УБДС оюутан /

Хавтгайн цэг бүрийг 2 өнгөөр будав. Өгсөн гурвалжилтай төсөөтэй гурвалжны оройнууд болох нэг өнгийн гурван цэг олдохыг батал.

Б2. / Нэргүй, УБДС /

$2k-1$ -талстад k -радиустай бөмбөрцөг багтаажээх $N \geq k \geq 2$. Тэгвэл хоорондох зай нь $2k+1$ ээс их байх 2 цэг уг талст дээрээс олдоно гэж батал.

Б3. / Р.Батдэлгэр, ЦУА /

$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $x=0$ цэг дээр уламжлалтай, дурын $x, y \in \mathbb{R}$ -ийн хувьд

$$f(x+y) = f(x)^{2^y} f(y)^{2^x}$$

байх бүх $f(x)$ - функцүүдийг ол.

/Бодлого бүр 6 оноотой, өдөр бүр 4 цаг бодно/

БОДЛОГЫН БОХОМТ

А1. Энэ бодлогыг бодсон хүүхэд гараагүй. y - ийн хувьд тэгшитгэлийг бодвол

$$y = 7x \pm 3\sqrt{5x^2 - 29}$$

болно. Эндээс $5x^2 - 29 = z^2$ тэгшитгэл төгсгөлгүй олон натурал тоон шийдтэй бол манай бодлого бодогдоно.

Лемма . $a^2 - 5b^2 = 1$ тэгшитгэл төгсгөлгүй олон шийдтэй.

Баталгаа. $a=9, b=4$ нь энэ тэгшитгэлийн нэг шийд болно.

$$9^2 - 5 \cdot 4^2 = (9 - \sqrt{5} \cdot 4)(9 + \sqrt{5} \cdot 4) = 1$$

тэнцлийн хоёр талыг дурын k зэрэг дэвшүүлбэл

$$(9 - \sqrt{5} \cdot 4)^k (9 + \sqrt{5} \cdot 4)^k = 1 \quad \text{ба} \quad (9 + \sqrt{5} \cdot 4)^k = a_k + \sqrt{5} \cdot b_k$$

бол

$$(9 - 4\sqrt{5})^k = a_k - b_k \cdot \sqrt{5} \quad \text{болохыг хялбархан баталж болох тул}$$

$a_k^2 - 5b_k^2 = 1$ буюу (a_k, b_k) нь $a^2 - 5b^2 = 1$ тэгшитгэлийн натурал тоон шийдүүд болов. Лемма батлагдав.

$$\text{Бидэнд } 5x^2 - z^2 = 29$$

$$\text{тэгшитгэлийн } x = 11,$$

$$z = 24 \quad \text{гэсэн шийд байна.}$$

$$(\sqrt{5} \cdot 11 - 24)(a_k - \sqrt{5} b_k) = \sqrt{5} x_k - z_k \quad \text{гэвэл}$$

$$(\sqrt{5} \cdot 11 + 24)(a_k + \sqrt{5} b_k) = \sqrt{5} x_k + z_k \quad \text{болно.}$$

$$\text{Тэгвэл } 5x_k^2 - z_k^2 = (\sqrt{5} x_k - z_k)(\sqrt{5} x_k + z_k) =$$

$$= 29(a_k^2 - 5b_k^2) = 29 \cdot 1 = 29 \quad \text{болож } 5x^2 - z^2 = 29$$

тэгшитгэлийн төгсгөлгүй олон шийд (x_k, z_k) -г олно.

Тэмдэглэл. d нь бүтэн квадратад хуваагддаггүй тоо бол $x^2 - dy^2 = 1$ -г Пеллийн тэгшитгэл гэдэг ба энэ нь ямагт төгсгөлгүй олон шийдтэй байна. Харин

$x^2 - dy^2 = c, c \notin \mathbb{Z}$ тэгшитгэл нь нэг л шийдтэй бол төгсгөлгүй олон шийдтэй байдаг гэсэн онол бий.

А2. Энэ бодлогыг Батням, Г. Зоригт хоёр л гүйцэд бодсон.

$$P_3(n) \quad \text{нь} \quad x_1 + x_2 + x_3 = n \quad /1/$$

тэгшитгэлийн $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3$ нөхцлийг хангах шийдийн тоо болох нь илэрхий. Харин

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + (x_3 - 1) = n - 3 \quad \text{гэж бичээд}$$

$$x_i - 1 = y_i, \quad i = \overline{1, 3} \quad \text{гэж орлуулбал}$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = n - 3 \quad /2/$$

тэгшитгэлийн $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3$ нөхцлийг хангах шийдийн тоо $P_3(n)$ нь

$$P_3(n) = P_3(n-3) + P_2(n-3) + 1 \quad (*)$$

болно гэдгийг хялбархан харж болно.

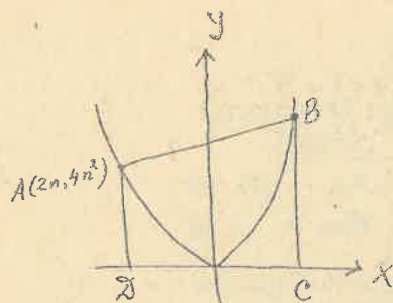
$$P_1(m) = 1$$

ба

$$P_2(m) = \begin{cases} \frac{m}{2}, & m - \text{тэгш үед} \\ \frac{m-1}{2}, & m - \text{сондгой үед} \end{cases}$$

болох нь илэрхий. (*) томъёог

$$6k+4-3s, \quad s = \overline{1, 2k+1} \quad \text{-үүдийн хувьд бичиж}$$



$y = x^2$
дээрээс

парабол

$(2n, 4n^2)$ цэгүүдийг авъя.

Ямар ч шулуун нь параболыг
2-оос ихгүй тооны цэгээр
огтолдог тул эдгээр цэгүүд
ерөнхий байршилтай юм.

$A(2n, 4n^2), B(2m, 4m^2)$

бол

$$S_{ABCD} = (m-n)(4n^2 + 4m^2)$$

бүхэл тоо юм. Эдгээр
цэгүүд дээр оройтой дурын гүдгэр олон өнцөгтийн талбайг
ийм тэгш өнцөгт трапецуудын талбайн нийлбэр, ялгавраар
илэрхийлж болох тул уг олон өнцөгтийн талбай нь бүхэл
болно.

VI. Олимпиадын аварга Ц.Пүрэвбаярын бодолтыг
танилцуулъя.

Лемма. Ямарч шулуун дээр төгсгөлийн ба дундаж
цэгүүд нь адил өнгөтэй байх хэрчим олдоно.

Баталгаа. Өгсөн L шулуун дээр адил өнгийн 2 цэг
олдоно. Тэр нь A_x, B_x гэсэн хөх өнгийн цэгүүд болог.
Тэгвэл A_x дундаж нь байх CB_x хэрчмийн C цэг нь
улаан өнгөтэй сайна, эсрэг тохиолд лемма батлагдана. Мөн
үүний адилаар B_x дундаж байх $A_x D$ хэрчмийн D цэг нь
улаан байна, өөрөөр хэлбэл C_y, D_y болно. Тэгвэл $A_x B_x,$

$C_y D_y$ хэрчмүүдийн дундаж нь давхцах тул тэр цэг
ямарч өнгөтэй байсан лемма батлагдав. Одоо бодлогынхоо
бодолт руу орё.

Лемма ёсоор AB -хэрчмийн дундаж цэг K ба
 A, B -үүд нь хөх өнгөтэй байг. Тэгвэл ABC гурвалжин
өгсөн гурвалжинтай төстэй байх C цэгийг олж болно.

M ба N нь AC ба BC -ийн дундчууд байг. C_y байх ёстой ба мөн M_y, N_y болно. Иймд $\triangle CMN \cong \triangle ABC$

тул бодлого бодогдов.

Б 2. Олимпиадын аварга Л. Пүрэвбаярын бодолтыг авч үзье. Уг олон талстйн оройг $A_1, \dots, A_n$ гэж тэмдэглэе. Тэгээд эсрэгээс нь бодлогын нөхцөл хангах 2 цэг олдохгүй гэж үзээд зерчилд оруулъя. O нь багтсан бөмбөрцгийн төв байг. Тэгвэл

$|OA_i| < k+1, i = 1, n$ байх нь илэрхий. Олон талстйн дурын нэг талс нь α ба O -оос α -д буулгасан перпендикулярын суурийг M гэе. Тэгвэл $MO = k$ ба

α нь $\sqrt{(k+1)^2 - k^2}$ - радиустай тойрогт багтана. Энэ тойргийн талбай α -ийн талбайгаас их буюу

$\pi(2k+1)$ - тэй тэнцэнэ. Иймд олон өнцөгтийн гүйцэд гадаргуугийн талбайг

$S_{гр}$ гэвэл $S_{гр} < \pi(2k+1)(2k-1) = \pi(4k^2-1)$

болно. Гэтэл бөмбөрцгийн гадаргуугийн талбай

$S_{\delta} = 4\pi k^2$ тул $S_{гр} < \pi(4k^2-1) < 4\pi k^2 = S_{\delta}$ гэсэн

зерчилд хүрлээ. Бодлого бодогдов.

Б 3. 1. Зохиогчийн бодолт.

$x=y=0$ гэвэл $f(0)=1$ ба $x=y=\frac{\pi}{2}$ гэвэл

$f(z) = \left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^{2 \cdot 2^{\frac{z}{2}}}$ болно. Нэгэнт $f(x) > 0$ тул

$\ln f(z) = 2 \cdot 2^{\frac{z}{2}} \ln f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ гэж бичиж болох ба

$\ln f(z) = g(z)$ гэвэл $g(0) = 0$ ба

$$\begin{aligned}
 g(z) &= 2 \cdot 2^{\frac{z}{2}} g\left(\frac{z}{2}\right) = 2 \cdot 2^{\frac{z}{2} + \frac{z}{4}} g\left(\frac{z}{4}\right) = \\
 &= 2^n \cdot 2^{\frac{z}{2} + \frac{z}{4} + \dots + \frac{z}{2^n}} g\left(\frac{z}{2^n}\right) = \\
 &= z \cdot 2^{\left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)} \frac{g\left(\frac{z}{2^n}\right) - g(0)}{\frac{z}{2^n}}
 \end{aligned}$$

болно.

$f(x)$ нь $x=0$ дээр уламжлалтай тул $g(x)$ нь мөн $x=0$ дээр уламжлалтай байх бөгөөд сүүлчийн тэнцэтгэлээс

$$n \rightarrow \infty$$

гэж хязгаар авбал $g(z) = z \cdot 2^z g'(0)$ болно.

$g'(0) = C$ гэвэл $f(z) = e^{Cz} 2^z$ гэсэн ерөнхий шийд гарна.

2. Одоо олимпиадын аварга Л.Пүрэлбаярын бодолтыг сонирхуулъя.

Өгсөн тэнцлийн 2 талыг $2^{-(x+y)}$ зэрэг дэвшүүлбэл

$$\begin{aligned}
 f(x+y) 2^{-(x+y)} &= f(x) 2^{-x} \cdot f(y) 2^{-y} \\
 \text{болно. } f(x) 2^{-x} &= \varphi(x)
 \end{aligned}$$

гэвэл $\varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ болно.

Лемма. $\varphi(x)$ нь дурын $x, y \in \mathbb{R}$ -ийн хувьд

$\varphi(x+y) = \varphi(x) \varphi(y)$ байх $x=0$ дээр уламжлалтай функц бол $\varphi(x) = a^x$ байна.

Баталгаа. $x=y=0$ гэвэл $\varphi(0) = \varphi(0)^2$ оос
 $\varphi(0) = 1$ гэж гарах ба $\varphi(x)$ нь $x=0$ дээр
 уламжлалтай учраас $x=0$ дээр тасралтгүй өөрөөр хэлбэл

$\lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi(\delta) = 1$ байна. Тэгвэл $x \in \mathbb{R}$ - бүрийн хувьд

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi(x+\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi(x) \varphi(\delta) = \varphi(x) \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi(\delta) = \\ = \varphi(x)$$

учраас $\varphi(x)$ нь дурын x цэг дээрээ тасралтгүй функц юм.
 Одоо $\alpha \in \mathbb{R}$ бүрийн хувьд

$\varphi(x^\alpha) = \varphi(x)^\alpha$ гэдгийг батлая. Үүний тулд
 эхлээд $n \in \mathbb{N}$ бол $\varphi(nx) = \varphi^n(x)$ дараа нь

$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ бол $\varphi(\frac{p}{q}x) = \varphi(x)^{\frac{p}{q}}$ гэж батлаад

$\alpha \in \mathbb{R}$ -ийн хувьд $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ байх $\{a_n\}$
 рационал тоо дараалал авч үзэхэд $\varphi(x)$ нь тасралтгүй
 функц учраас

$$\varphi(\alpha x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(a_n x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi(x))^{a_n} = \varphi(x)^\alpha$$

Энэ нь $\varphi(x_0) = a$ гэвэл $\varphi(kx_0) = a^k$ буюу kx_0 болно

гэхэд $\varphi(x) = a^k = a^{\frac{x}{x_0}} = a_0^x,$

Энд $a_0 = a^{\frac{1}{x_0}}$

болж лемма батлагдав.

$$f(x) 2^{-x} = \varphi(x) = a^x$$

гэдгээс $f(x) = a^{x \cdot 2^x}$,

энд a ямар нэг бодит тоо.

Бодлого бодогдсв.

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН БАГЦ НАРЫН
АНХДУГААР ОЛИМПИАДЫН БОДЛОГУУД

Г.Хүрэлбаатар /ША/

Бодлого 1. / П.Алтанцог, ША /

$$\frac{1}{x^2+8x-5} + \frac{2}{2x^2+10x-13} = \frac{1}{x^2+4x-7} \quad \text{тэгшитгэлийг бод}$$

/ 8 оноо /

Бодлого 2. / П.Алтанцог, ША /

50000 -аас хэтрэхгүй дэс дараалсан 5 ширхэг зохиомол натураль тоо олдохыг батал.

/ 10 оноо /

Бодлого 3. / Р.Батдэлгэр, ША, /

Нэгдэл нь 1990 эзлэхүүнтэй биет үүсгэх төгсгөлөг ширхэг куб огторгуйд өгөгджээ. Тэгвэл эдгээрээс нийт эзлэхүүн нь $26 + \sqrt{37}$ -ээс багагүй байх харилцан үл огтлолцох хэдэн куб сонгож болохыг батал.

/ 10 оноо /

Бодлого 4. / Ц.Батхүү, ШДС /

a, b, c ($a \leq b \leq c$) талтай гурвалжны хувьд $P^2 = 2bc$ бол b ба c талыг дайрсан уг гурвалжны талбай ба периметрийг нэгэн зэрэг таллан хуваадаг-шулуун A талд татсан биссектрисэд перпендикуляр болохыг батал.

Үүнд: $P = \frac{a+b+c}{2}$

/ 8 оноо /

1. бодлогыг ихэнх багш нар нэг янзаар бодсон. Бусад бодлогыг бодвол харьцангуй хялвар тул бодогчдыг орилдоо.

II бодлогыг З.Чулуунбаатар ганцаараа зөв гүйцэд бодсон байна. Түүний бодогчдыг өнгөрүүлэе.

Бид олох гэж байгаа 15 тоогоо $X; X+1; X+2; \dots; X+12$
гээд $X=2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot K=2310 K$ гэж авбал

$X+1$ -ээс бусад 13 тоо нь бүгд зохиомол болно. Иймд

$X+1$ -г зохиомол байлгах тийм K тоог олохыг эрхэй.
Тодруулбал: $X+1, X-1$ тоонууд харгалзан 17, 13-г
хуваагдаж байхаар K тоог сонгоё.

$4K \equiv -1 \pmod{13}, 2K \equiv 1 \pmod{17}$ болохыг хялбархан харах
болно. Өөрөөр хэлбэл $K=13s+3$, нөгөө талаас
 $K=17t+9$ байна.

$13s+3=17t+9$ Эндээс $t=7, s=5$ гэж авъя.
/Бид K -г аль болох бага байхаар авах ёстой/. Ингээд

$$K=94, \quad X+12=2310 \cdot 94+12 < 250000$$

Болж бидний олох гэсэн 15 тоо олдож байна.

III бодлогын бодолтыг хийсэн багш байгаагүй тул
зохиогчийн бодолтыг өгье.

Бодолт.

Хамгийн их эзэлхүүнтэй нэг куб сонгоё. Түүнтэй ерөнхий
цэгтэй болгоныг авч хаяя. Үлдсэн кубуудээ мөн хамгийн
их эзэлхүүнтэй нэгийг авч, түүнтэй ерөнхий цэгтэй болгоныг
авч хаях гэх мэтээр гүйцэтгэвэл бид хэзээ нэг цагт энэ
процессоо дуусгаж нэг буруу хэд хэдэн куб сонгосон байх
болно. Одоо эдгээр нь бодлогын нөхцлийг хангахыг харуулъя.
Процесс ёсоор эдгээр кубууд харилцан ерөнхий цэггүй.

Сонгосон дарааллын даруу кубуудийн эзэлхүүнүүдийг
 $V_1, V_2, \dots, V_K$ гэе. $W_i \ (i=\overline{1, K})$ - нь i -р

кубтэй ерөнхий цэгтэй ба V_i -ээс хэтрэлгүй эзэлхүүнтэй
бүх боломжит кубуудийн нэгдэл болох ямар нэг B_i олонтийн
эзэлхүүн болог. Тэгвэл $\bigcup_{i=1}^K B_i$ нь анхнаас өгөгдсөн бүх
кубуудийг агуулна. Иймд

$$\sum_{i=1}^K W_i \geq 1990$$

Одоо бидний зорилго бол $W_i = K \cdot V_i$ байх ямар нэг K олдо-

хыг харуулаад дээрх тэнцэтгэл бишийг

$$\sum_{i=1}^K K \cdot V_i \geq 1990 \quad \text{буюу} \quad \sum_{i=1}^K V_i \geq \frac{1990}{K} \quad \text{гэж}$$

бичиж $\sum_{i=1}^K V_i$ нийлбэрийн үнэлгээг олох явдал юм. Үүнд

V_i нь i -р кубээс $\sqrt[3]{V_i} \cdot \sqrt{3}$ эс хэтрэхгүй зайд аяслалдсан цэгүүдийн олонлог

$\sqrt[3]{V_i} \cdot \sqrt{3}$ нь i -р кубийн их диагональ, мөн их диагональ нь куб дээрх ямарваа хоёр цэгийн хоорондох хамгийн их зай гэдгийг санавал энэ нь ойлгомжтой болно.

Одоо V_i нь i -р куб, 6 ширхэг $\sqrt[3]{V_i} \times \sqrt[3]{V_i} \times \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{V_i}$ размерийн тэгш өнцөгт параллелепипед $\sqrt[3]{V_i}$ өндөртэй ба суурь нь $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{V_i}$ радиустай дугуйн дөрвний нэгт болох 12 цилиндр, $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{V_i}$ радиустай бөмбөрцгийн наймны нэгт 8 ширхэг биет эд бүгдийн нэгдэл болно. Үүнээс

$$W_i = V_i + 6 \sqrt{3} V_i + 12 \cdot \frac{3}{4} \pi V_i + 8 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi V_i = (1 + 6\sqrt{3} + 9\pi + 4\sqrt{3}\pi) V_i \Rightarrow$$

Үүнээс $K = 1 + 6\sqrt{3} + 9\pi + 4\sqrt{3}\pi < 61,8$

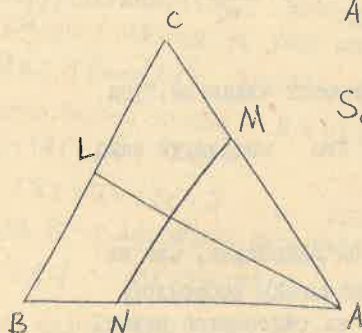
$$\sum_{i=1}^K V_i \geq \frac{1990}{K} > \frac{1990}{61,8} > 32 > 26 + \sqrt{31}$$

буюу $\sum_{i=1}^K V_i > 26 + \sqrt{31}$

болно.

Иү бодлогыг багш нарын ихэнх нь бүрэн, зөв бодсон.
Тэдний хийсэн нийтлэг нэг бодолтыг өгье.

$$a = |BC|, \quad b = |CA|, \quad c = |AB|$$



AL — биссектрис.

Бодлогын нөхцөл ёсоор

$$S_{CMNB} = S_{NMA} \quad (1); \quad P_{CMNB} = P_{NMA} \quad (2)$$

S — талбай, P — периметр

(1) тэнцлээс

$$2|AN| \cdot |AM| = b \cdot c \quad (3)$$

(2) тэнцлээс

$$(|AN| + |AM|)^2 = 2bc \quad (4)$$

гэж тус тус гарна. (3) -г (4)-д ордуулбал

$$(|AN| - |AM|)^2 = 0 \quad \text{буюу} \quad |AN| = |AM| \quad \text{болно.}$$

Ингээд $\triangle AMN$ гурвалжинг адил хажуут болж

$AL \perp NM$ болох нь батлагдав.

БАГУУДЫН ТЭМЦЭЭН

Б. Батцэцгэл (МУИС)

Энэ жилийн сурагчуудын тэмцээнд урьд жилүүдэд оролцож байсан багууд өөрчлөгдөж ^{Сурагчид} багш нарыг, УБДС, МУИС, математикийн хүрээлэн гэсэн таван баг оролцлоо.

Багуудын дэвшүүлсэн бодлогууд, тэдгээрийн заримын бодолт болох тэмцээний дүнг дор бичлээ.

Багуудын дэвшүүлсэн бодлогууд:

1. / Сурагч баг /

$$a_1 = \frac{1}{2} ;$$

$$a_n = \frac{2n-3}{2n} a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

гэж тодорхойлогдсон дарааллын хувьд дурьд натурал тоо n -ийг алаад

$$\sum_{k=1}^n a_k < 1,15$$

байна гэж батал.

2. / Багш нарын баг / . Дөрвөн ^{дөрвөн} ~~шагайгаар~~ бэрх орхидог. Шагайны бүрэлдэхүүн яах байхад хамгийн цөөн дөрвөн бэрх тусах вэ?

3. / УБДС-ийн баг / хавтгай дээр 1990 ширлэг ерөнхий байршилтай шулуун егөгдөв. Тэгвэл эдгээр шулуунуудаар огтлогдсон хавтгайн хэсгүүд дотор дор хаяж 1988 ширлэг гурвалжин бий болохыг батал.

4. / МУИС-ийн баг / . 33, 34, ..., 73 тоонуудыг урвуугуудынх нь нийлбэр i байдаг натурал тоонуудын нийлбэрт задалж болдог. 1990 гэсэн тоог мөн урвуугуудынх нь нийлбэр i байдаг натурал тоонуудын нийлбэрт дор хаяж 26 аргаар задалж болохыг батал.

5. / математикийн хүрээлэнгийн баг / $n \times n$ таблицын нүд бүрт ялгаатай натурал тоонуудыг бичив. Тэгвэл дотор нь бичигдсэн тоонуудын ялгаврын абсолют хэмжигдэхүүн нь k гэс баягүй байдаг зэргэлдээ хоёр нүд заавал олдохыг баг зарим бодлогын бодолт: / i ба j -р бодлого бусда арай хялбар тул тэдгээрийг уншигч танд орхилос /.

2. Эр шагайт / морь шагай / орхиод морь буух магадлал p_1 ,
эм шагайт орхиод морь буух магадлал q_1 болог. Үүнтэй ад-
илар p_2, p_3, p_4 ; q_2, q_3, q_4 нь эр, эм шагай тэмээ, хонь,
ямаа буух магадлал болог. Дөрвөн эр шагайгаар дөрвөн бэрх
орхих магадлал нь $a_1 = 24 \cdot p_1 p_2 p_3 p_4$ болно. Учир нь
эрэмбөөрсөн дөрвөн шагай дөрвөн бэрх буух ялгаатай боломжийн
тоо нь $4! = 24$ ойлгов. Гурван эр, эм шагайгаар дөрвөн бэрх
орхих магадлал нь

$$a_2 = 3! \cdot 1! (p_1 p_2 p_3 q_4 + p_1 p_2 q_3 p_4 + p_1 q_2 p_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 p_4)$$

км.

Хоёр эр, хоёр эм шагайгаар дөрвөн бэрх орхих магадлал нь

$$a_3 = 2! \cdot 2! (p_1 p_2 q_3 q_4 + p_1 q_2 p_3 q_4 + p_1 q_2 q_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 p_4 + q_1 q_2 p_3 p_4)$$

км. Лэг эр, гурван эм шагайгаар дөрвөн бэрх орхих магадлал нь

$$a_4 = 1! \cdot 3! (p_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 p_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 p_4)$$

болно. Дөрвөн эм шагайгаар дөрвөн бэрх орхих магадлал нь

$$a_5 = 4! q_1 q_2 q_3 q_4$$

км.

Бид a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 магадлалуудын хамгийн багзыг
олох ёстой. a_1, a_5 -ын аль бага нь эдгээрийн хамгийн багзыг
боломт баталъя. Тэгвэл эсвэл дөрвөн эр, эсвэл дөрвөн эм шагай-
гаар хамгийн цөөн дөрвөн бэрх тусна гэж оатлагдах юм.

$$a_1 \geq a_5 \text{ гэж үзье. Тэгвэл } \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \cdot \frac{p_3}{q_3} \cdot \frac{p_4}{q_4} \geq 1$$

Болох ба геометр дундаж нь арифметик дундажаас бага байдгийг
аниглавал

$$\frac{a_4}{a_5} = \frac{1}{4} \left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3} + \frac{p_4}{q_4} \right) \geq \sqrt[4]{\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \cdot \frac{p_3}{q_3} \cdot \frac{p_4}{q_4}} \geq 1;$$

$$\frac{a_3}{a_5} = \frac{1}{6} \left(\frac{p_1 p_2}{q_1 q_2} + \frac{p_1 p_3}{q_1 q_3} + \frac{p_1 p_4}{q_1 q_4} + \frac{p_2 p_3}{q_2 q_3} + \frac{p_2 p_4}{q_2 q_4} + \frac{p_3 p_4}{q_3 q_4} \right) \geq \sqrt[4]{\left(\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \cdot \frac{p_3}{q_3} \cdot \frac{p_4}{q_4} \right)^3} \geq 1;$$

$$\frac{a_2}{a_5} = \frac{1}{4} \left(\frac{p_1 p_2 p_3}{q_1 q_2 q_3} + \frac{p_1 p_2 p_4}{q_1 q_2 q_4} + \frac{p_1 p_3 p_4}{q_1 q_3 q_4} + \frac{p_2 p_3 p_4}{q_2 q_3 q_4} \right) \geq \sqrt[4]{\left(\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \cdot \frac{p_3}{q_3} \cdot \frac{p_4}{q_4} \right)^3} \geq 1$$

БОЛОХ ЮМ.

Иймд хамгийн бага нь a_5 болов. $a_1 \leq a_5$ бол хамгийн бага нь a_1 болох нь бас үүнтэй адил батлагдана.

7. Эхлээд 33-аас их бүх тоонуудыг урвуутгуудынх нь нийлбэр 1 байдаг натурал тоонуудын нийлбэрт задалж болохыг харуулъя. Дараа нь 1990-ийг ийм нийлбэрт дор хаяж 31 эртгээр задалж болохыг баталъя.

Эсвэл / 33, 73 завсар дахь натурал тоонууд ийм нийлбэрт задардаг нь мэдэгдэж байгаа учир $n > 73$ тоог э сонирхой. n -ээр индукцэлж баталъя. n тэгш тоо бол

$$m = \frac{n-2}{2} > 33 \text{ бөгөөд индукцэд үзэх бүх ёсоор } m = \sum a_i;$$

$$\sum \frac{1}{a_i} = 1$$

$$\text{байна. } n = 2m + 2 = \sum 2a_i + 2 \text{ болох}$$

$$\text{бөгөөд } \sum \frac{1}{2a_i} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ тул } n \text{ нь эрх бүл}$$

нийлбэрт задарчиллаа. n сондгой тоо бол

$$m = \frac{n-5}{2} > 33 \text{ бөгөөд мөн адил индукцэд үзэх сайгас ёсоор}$$

$$m = \sum a_i; \sum \frac{1}{a_i} = 1 \text{ байна. Энэ үед } n = 2m + 5 = \sum 2a_i + 3 + 6$$

$$\text{болох бөгөөд } \sum \frac{1}{2a_i} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1 \text{ тул}$$

n нь бас эрх бүл нийлбэрт задарч...

Эдөө 1990-ийг мөнхэй нийлбэрт дор хаяж 31 эртгээр тавигдана гэж үзүүлэв. урьд $n \leq 31$ натурал тооны

х, вьд $1990 = 2\kappa^2 + 2(995 - \kappa^2)$ гээд бичихэд $995 - \kappa^2 > 33$
 болох бөгөөд өмнө баталснаар $995 - \kappa^2$ нь урвуугуудынх нь
 нийлбэр нэг байдаг натурал тоонуудын нийлбэрт задарна. Өөрөөр
 хэлбэл

$$995 - \kappa^2 = \sum a_i^{(\kappa)}; \sum \frac{1}{a_i^{(\kappa)}} = 1 \quad \text{байна гэсэн үг юм.}$$

Тэгвэл $1990 = \underbrace{2\kappa + \dots + 2\kappa}_{\kappa \text{ ширхэг}} + \sum 2a_i^{(\kappa)}$ болох бөгөөд энэ

$$\text{тоонуудын урвуугуудынх нь нийлбэр} \quad \sum \frac{1}{2a_i^{(\kappa)}} + \underbrace{\frac{1}{2\kappa} + \dots + \frac{1}{2\kappa}}_{\kappa \text{ ширхэг}} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\kappa}{2\kappa} = 1 \quad \text{болно. Ийнхүү бид ямар ч атугай } 1990\text{-ийг}$$

сонирхож буй нийлбэртээ 31 удаа задаллаа. Одоо эдгээр задаргаа
 нь бүгд ялгаатай гээд харуулчихвал бодлого бодогдлоо.

Эсрэгээс, $t, s \leq 31$ ялгаатай натурал тоонуудын хувьд харгалзах

1990-ийн задаргаа нь ижил гэвэл $a_i^{(t)}$ дотор заавал s ширхэг
 s оайх ёстой болох оа нэгэнт $\sum \frac{1}{a_i^{(t)}} = 1$ тул ерөөсөө
 $a_i^{(t)}$ -үүд нь s ширхэг s байх нь ээ. Эндээс

$$995 - t^2 = s^2 \quad \text{буюу} \quad t^2 + s^2 = 995 \quad \text{болно. } 199 \mid 995$$

оа 199 нь анхны тоо болохыг ашиглаад Фермагийн бага теоремг
 ийг бичвэл $t^{198} \equiv 1 \equiv (-s^2)^{99} \equiv -1 \pmod{199}$ болж зөрчил үүслээ.

Иймд эдгээр 31 задаргаа нь бүгд ялгаатай болов.

5. Нүднүүдэд бичигдсэн тоонууд $a_1 < a_2 < \dots < a_{n^2}$

болог. Эхлээд a_1 бичигдсэн нүдийг, дараань a_2 бичигдсэн нү-
 дийг гэх мэтчилэн будсаар байгаад таблицыг ямар нэг мөр ямуу
 баганы бүх нүд будагдах хүртэл нь будая. Хамгийн сүүлд

a_n бичигдсэн нүдийг будсан юм гээ. Түүний орших мөрийн бүх
 нүд будагдсан байсан гэж үзье. / баганых нь оүх нүд бу-
 дагдсан брл таблицаа 90° эргүүлж мөрийн бүх нүд будагдсан

будагдсан болгогчид болно/.Тэгвэл дараах хоёр боломж байх болно.

а/ a_k -ийн орших баганы ямар нэг нүд будагдаагүй байг. Энэ тохиолдолд багана бүрд нэг нүд будагдаагүй, нэг нүд будагдсан байх болно. Иймд багана бүрт нэг нь будагдсан, нөгөө нь будагдаагүй зэргэлдээ хоёр нүд олдох болно. Будагдаагүй энэ нүдүүд дэх тоо бүр a_k -аас их бөгөөд бидэнд n ширхэг бий тул тэдгээрийн хамгийн их нь $a_k + n$ зэс багатай байна. Түүнтэй *хорш* будагдсан нүдэн дэх тоо нь a_k -аас хэтрэлгүй тул энэ хоёр зэргэлдээ тоо маань олох ёстой зэргэлдээ хоёр тоо мөн байна.

б/ a_k -ийн орших баганы бүх нүд будагдсан байг. Өөрөөр хэлбэл a_k -г будахад нэгэн зэрэг нэг мөр, нэг баган баганы бүх нүд будагдсан болог. Энэ тохиолдолд a_k -аа будахаа больчихё. Тэгвэл өмнөх а/ тохиолдолтой адил багана бүрт дор хаяж нэг нүд будагдсан, дор хаяж нэг нүд будагдаагүй болох бөгөөд цаашаа а/ тохиолдолтой адил батлагдана.

БАГУУДЫН ТЭМЦЭЭНИЙ ДҮН :

	Баг	1	2	3	4	5	Нийт оноо	БАЙР
1	Сурагч	///	6	0	0	0	6	П-IY
2	Багш	0	///	0	0	0	0	Y
3	УБДС	6	0	///	0	0	6	П-IY
4	МУИС	6	6	6	///	0	18	I
5	мат. хүрээлэн	0	0	6	0	///	6	Г-IY
		12	12	12	0	0		

Д.Дашдорж, А.Хашбаатар

ОЛМО-31 БНХАУ-ын Бээжин хотод 1990 оны 7-р сарын 7-оос 19-нд боллоо. Дэлхийн 54 орны 308 сурагч уралдлаа. Алжир, Бахрейн, Япон, Манао, Хойт Солонгосын багууд анх удаагаа оролцлоо. Тус бүр нь 7 оноо бүхий дараах 6 бодлогын 2 өдөр 4,5 цагаар бодож дүнгээ гаргахад Хятад 130, ЗХУ 193, АНУ 174, Румын 171, Франц 168, Унгар 162, ардчилсан Герман 156, 156, Чехословак 113, Болгар 152, Англи 141 оноогоор эхний 10 байрыг эзэлж манай улс 54 оноогоор 50-р байранд орлоо. В.Доржсүрэн /1 сургууль/ 10, Г.Зоригт /21-р сургууль/ 4, Ч.Пүрэвбаяр /МУИС/ 14, Б.Тням /МУИС/ 13, Д.Хашбаяр /МУИС 9-р анги/ 6, Ө.Зоригт /1 сургууль/ 6 оноо авч нэг нэг бодлогыг бүрэн бодсон В.Доржсүрэн, Б.Тням, Ө.Зоригт нар сайншлын дипломоор шагнагдав. Бүтэн оноогоо авсан 4 сурагч байсны 2 нь Хятадынх, ЗХУ, Францаас нэг нэг байв.

Лид Бээжин хотын түүх, соёлын дурсгалт олон газраар явж, их юм үзлээ.

Олимпиад 1991 онд Лведэд, 1992 онд ЗХУ-д, 1993 онд Туркт, 1994 онд Монгол, Гонконгийн аль нэгэнд болно гэж төлөвлөгдөөд байна.

1. AB, CD хөвчүүд нь өгсөн тойргийн дотор E цэгт огтлолцно. M нь BE хөвчийн дотоод цэг байг.

D, E, M -г дайрсан тойргийн E цэг дээрх шүргэгч нь BC ба AC шулуунуудыг F ба G цэгт огтлодог ба

$$\frac{AM}{AB} = t \quad \text{бол} \quad \frac{EG}{EF} = r \text{ ол.}$$

2. Илгээлтэй $2n-1$, $n \geq 3$, цэтгээс тогтох E олонлог тойрог дээр өгчээ. Эндээс яг K -г нь хараар буджээ. Хэрэв ямар нэг 2 хар цэгээр тодорхойлогдох аль нэг нум дотор E олонлогоос яг n цэг оршдог бол уг будалтыг "сайн" гээ. K -ийн хамгийн бага ямар утгад E -ийн бүх будалт "сайн" байх вэ? "

3. $\frac{2^n+1}{n^2}$ бүхэл тоо байх бүх натурал тоо $n > 1$ -г ол.

4. Q^+ эерэг рационал тоонуудын олонлог бод буюу $x, y \in Q^+$ -ийн хувьд

$$f(x \cdot f(y)) = \frac{f(x)}{y}$$

байх $f: Q^+ \rightarrow Q^+$ функцийг жишээ гарга.

5. Натурал тоо $n_0 > 1$ өгчээ. A, B хоёр эвэлсэн дараах индуктив дүрмээр $n_1, n_2, \dots$ натурал тоонуудыг сонгон авч байна. A тоглогч n_{2k} тоог мэдсэнээр

$n_{2k} \leq n_{2k+1} \leq n_{2k}^2$ байх n_{2k+1} тоог, дараа нь B ,

$\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$ анхны тооны эерэг зэрэг байхаар

тоог сонгож авна.

1990 тоог сонгож авбал A хожно, 1-г сонгож авбал B хожно. n_0 -ийн ямар бүх утгад

а/ A заавал хожих боломжтой;

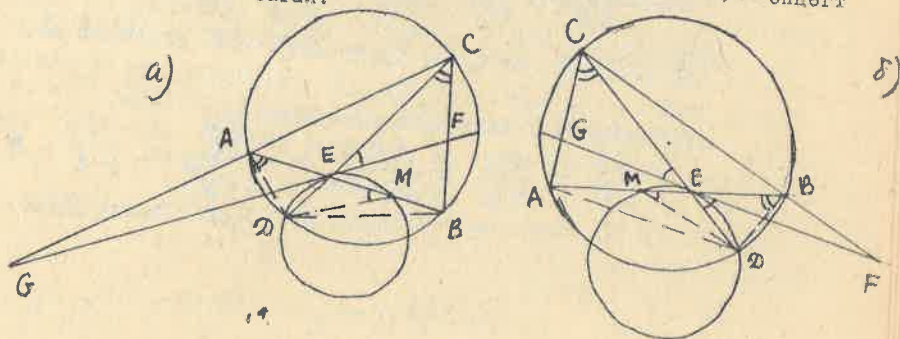
б/ B заавал хожих боломжтой;

в/ A, B -ийн аль нь ч хожих боломжгүй байх вэ.

6. а/ Бүх өнцөг нь тэнцүү;

б/ Талууд нь $1^2, 2^2, \dots, 1990^2$

тоонуудын ямар нэг сэлтгэмэл байх гүдгэр 1990-өнцөгт оршихыг батал.



1-р зураг

FG-Тулуу ABC гурвалжны AB талыг E цэгт нь огтлонсон тул үлдсэн хоёр талын нэгийг заавал огтлолно/ Паш-ийн аксиом ёсоор/. Төгөхлээр нөгөө талын үргэлжлэлийг /мөнхлэлийн теоремээр/огтлолно. Ийнхүү E цэг G, F хоёр цэгийн хооронд нэр зурагт дүрсэлсэн шиг оршино. Харин M цэгийн байрлалын хувьд a/, b/ хоёр тохиолдлын аль нь ч байж болно. a/ тохиолдолд баталчихвал M цэг AE хэрчим дотор болсны улмаас A-г B-ээр, B-г A-ээр мөн F, G хоёрыг сольж тавихад b/ тохиолдолд гарах тул a/ -г баталъя.

4 Үүргэгч, огтлогч хоёроор байгуулагдсан GED, тойрог дээр оройдой AMD хоёр өнцөг ED нумд тулсан учраас тэнцүү. GED, CEF хоёр өнцөг босоо учраас тэнцүү. Ийнхүү

$$\angle AMD = \angle CEF \quad (A)$$

(A)-гаас гадна BD-д тулсанаас $\angle DAM = \angle ECF$ байхыг санавал

$$\triangle AMD \sim \triangle CEF$$

тул

$$\frac{AM}{CE} = \frac{MD}{EF} \quad \text{буюу} \quad AM \cdot EF = CE \cdot MD \quad (1)$$

(A) дахь өнцгүүдийн гүйцээх өнцгүүд $\angle MBG = \angle CEG$ байхны гадна AD-д тулсан $\angle GCE = \angle BGM$ байдгаас $\triangle MBG \sim \triangle GEC$

$$\text{Эндээс } \frac{BM}{GE} = \frac{MG}{EC} \quad \text{буюу} \quad BM \cdot EG = EC \cdot BM.$$

(1) тэнцэлтэй хамтатган үзвэл $AM \cdot EF = MB \cdot EG.$

Учир иймээс, өгсөн нөхцлийг ашиглавал

$$\frac{GE}{EF} = \frac{AM}{MB} = \frac{AM}{AB-AM} = \frac{\frac{AM}{AB}}{1-\frac{AM}{AB}} = \frac{t}{1-t} \quad \blacktriangleright$$

Энэ бодлогыг мөнх В.Дорасү-эн мөн ийм замаар бодсон.

с. нэ бодлогыг з. зорилт ингэж боджээ.

Гэсэн $2n-1$ цэгээ тойрог дээр зөв $2n-1$ өнцөгтийн оройнууд болж байхаар авбал $A_i(\varepsilon^i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, 2n-2$ гэж дүрсэлдэг. Энд ε нь 1 -ийн $2n-1$ зэргийн анхны язгуур. Дурын n хар цэгийн хооронд яг n цэг оршдоггүй будалтыг "муу" будалт гэж.

Одоо "муу" будалт ядаж нэг олддог байх S -ийн хамгийн их утгыг олж.

(*)

(1) $\varepsilon^0, \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^{2(n+1)}, \dots$ цэгүүдийн аль ч зэрэгцээ хоёрын хооронд яг n цэг оршино.

$$(2n-1, n+1) = (2n-1, 2(n+1)) = (2n-1, 3) = \begin{cases} 1, & \text{хэрэв } 3 \nmid 2n-1 \\ 3, & \text{хэрэв } 3 \mid 2n-1 \end{cases}$$

а/ $3 \nmid 2n-1$ бол (1) нь ε^i , $i = 0, \dots, 2n-2$ үдийг бүгдийг нь өгөх тул

$v_e(\varepsilon^{e(n+1)})$ гэж дахин дугаарлавал $(\varepsilon^{n+1})^{2n-1} = 1 = \varepsilon^0$

тул $v_0, v_1, \dots, v_{2n-2}$ гэсэн $2n-1$ оройтой битүү тахир шугам үүсэх бөгөөд $v_e, v_{e+1}, v_e, v_{2n-2}$, $e = 0, \dots, 2n-3$ нум бүр дээр байгуулалт ёсоор яг n цэг оршино.

(*) -г анхаарвал $v_0, v_1, \dots, v_{2n-2}$ -ийн дэс дагуулсан n орой хошуу хар байж болохгүй ба ийм оройнуудыг сонгох хамгийн их нэг боломж нь $v_1, v_3, \dots, v_{2n-3}$ буюу $n-1$ байна. Тэгвэл энэ үед E -ийн бүх будалт сайн байх $n-1$ -ийн хамгийн бага утга нь $n-1+1=n$ болно.

б/ $3 \mid 2n-1$ бол $(\varepsilon^{n+1})^{\frac{2n-1}{3}} = 1$

тул

$$\varepsilon^0, \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^{2(n+1)}, \dots, \varepsilon^{(n+1)\left(\frac{2n-1}{3}-1\right)}$$

121

цэгүүд нь $\frac{2n-1}{3}$

оройтой битүү тахир шугам

$B_0, B_1, \dots, B_{\frac{2n-1}{3}-1}$ -г үүсгэнэ.

Энэ үед $\varepsilon \cdot \varepsilon^{e(n+1)}$ ба $\varepsilon^2 \cdot \varepsilon^{e(n+1)}$

$\ell = 0, 1, \dots, \frac{2n-1}{3} - 1$ үүд нь тус тусдаа $\frac{2n-1}{3}$ оройтой

битүү тахир шугамуудыг үүсгэнэ.

Энэ 3 битүү тахир шугам тус бүрийн альч 2 эзлэгцсэн оройн хооронд яг n цэг орших тул (*) -г анхаарвал 3 тахир шугам бүрийн хувьд дараалсан 2 орой нь хар өлгөтэй байж болохгүй. Иймд тойрог дээр хамгийн ихдээ

$S = 3 \cdot \left\lfloor \frac{2n-1}{6} \right\rfloor$ хар цэг байвал ядах нэг муу будамт олдоно. Тэгвэл бидний олох тоо нь

$K = 3 \cdot \left\lfloor \frac{2n-1}{6} \right\rfloor + 1$ болно. Энэ тохиолд $K = n - 1$ гэдгийг хялбархан гаргаж болно.

Иймд $K = \begin{cases} n-1, & \text{хэрэв } 3 \nmid 2n-1 \\ n, & \text{хэрэв } 3 \mid 2n-1 \end{cases}$ болов.

3. Сурагч Л. Батнямын бодолтыг та бүхэнд толилуулья.

Бодлогын нөхцлийг $n=1$ хангала нь илт бөгөөд мөн n сондгой тоо байх нь ч илт. Иймд цаашид $n \neq 1$, сондгой тоо гэж үзэв. Бодлогонд Эйлерийн теорем гэж нэрлэгддэг

$(a, n) = 1$ бол $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ гэсэн өгүүлбэр болон хэрэв $a^{m_1} \equiv 1 \pmod{k}$ ба $a^{m_2} \equiv 1 \pmod{k}$ бол

$a^{(m_1, m_2)} \equiv 1 \pmod{k}$ байна гэсэн хялбар батлагдах леммийг ашиглах болно. Мөн түүнээс гадна хэрэв $a \equiv b \pmod{c}$ бол c -ийн дурын хуваагч d -ийн хувьд $a \equiv b \pmod{d}$ байна гэдгийг ашиглана. Эдгээр нь 3 шаттай бодъё.

1/ $n = p^{\alpha}$ байсан гэж үзье. Өөрөөр хэлбэл n нь p гэсэн сондгой анхны тоолос еер анхны тоон хуваагчгүй гэв. Бодлогын

нөхцөл ёсоор $2^{p^{\alpha}} \equiv -1 \pmod{p^{2\alpha}}$

болох ба хоёр талыг квадрат зэрэгт дэвшүүлбэл

$$4^{p^{\alpha}} \equiv 1 \pmod{p^{2\alpha}}$$

болно. Эндээс

$4^{p^{\alpha}} \equiv 1 \pmod{p^{\alpha}}$ болох бөгөөд $\varphi(p^{\alpha}) = p^{\alpha-1}(p-1)$ ба

$(4, p^{\alpha}) = 1$ гэдгийг ашиглаад Эйлерийн теоремоо бичвэл

$4^{p^{\alpha-1}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^{\alpha}}$ болно. Эндээс леммээ ашиглавал

$4^{p^{\alpha-1}} \equiv 1 \pmod{p^{\alpha}}$ болох буюу дахиад $4^{p^{\alpha-2}} \equiv 1 \pmod{p^{\alpha-1}}$

болно. Энэ үйлдлийг хийсээр байгаад эцэст

$4^p \equiv 1 \pmod{p}$ -г гаргаж авч болох ба $4^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

байдгийг ашиглавал $4 \equiv 1 \pmod{p}$ буюу $p=3$ гэх гарна.

Одоо $\alpha > 1$ байх чадахгүйг харуулъя. Үүний тулд

$$4^{3^{\alpha}} \equiv 1 \pmod{3^{\beta}}$$

байдаг β -ийн хамгийн их утга нь $\alpha+1$ гэж харуулбал лавталттай юм. Энэ нь α -ээр индукц-
лээд хялбархан батлагдах учир уламгч танд үлдээлээ. Иймд
эн тохиолдолд ерөөсөө цор ганц $n=3^1=3$ нь
бодлогын нөхцөлийг хангах нь ээ.

2/ Одоо $n = p^{\alpha} q^{\beta}$, $p < q$ байх болохгүйг харуулъя.
Бодлогын нөхцөл ёсоор $2^n \equiv -1 \pmod{n^2}$ байх

ёстой бөгөөд бид энэ нөхцөлийг арай хялбар нөхцөл оолох

$n_1 = p^{\alpha} q^{\beta}$ бол $2^{n_1} \equiv -1 \pmod{n_1}$ нөхцлөөр солёе. Сүүлийн

жишээнийхээ хоёр талыг квадрат зэрэгт $4^{n_1} \equiv 1 \pmod{n_1}$ болно.
Эйлерийн теорем ёсоор

$4^{\varphi(n_1)} \equiv 1 \pmod{n_1}$ болох бөгөөд $n = p^{\alpha} q^{\beta}$

$\varphi(n_1) = p^{\alpha-1} q^{\beta-1} (p-1)(q-1)$ ба $p < q$ тул $(n, \varphi(n_1)) = p^{\alpha} q^{\beta-1}$

байлыг анхаарвал лемм ёсоор

$$4^{p^{\alpha} q^{\beta-1}} \equiv 1 (n_1)$$

болно. Одоо

$$2^{p^{\alpha} q^{\beta-1}} \equiv x (n_1) \text{ гэж үзвэл}$$

$$\begin{cases} 2^{p^{\alpha} q^{\beta}} \equiv -1 (n_1) \\ 4^{p^{\alpha} q^{\beta-1}} \equiv 1 (n_1) \end{cases}$$

гэдгээс

$$\begin{cases} x^2 \equiv 1 (n_1) \\ x^q \equiv -1 (n_1) \end{cases}$$

болох бөгөөд q сондгой тоо болохыг анхаарвал

$x \equiv 1 (n_1)$, $2^{p^{\alpha} q^{\beta-1}} \equiv 1 (n_1)$ болно. Өөрөөр хэлсэл бид β -г багасгаж чадна. Одоо $n_2 = 2^{p^{\alpha} q^{\beta-1}}$ гэж аваад гэл мэтчилэн Энэ үйлдлийг дахин хийсээр эцэст нь

$$2^{p^{\alpha}} \equiv -1 (2^{p^{\alpha}} q)$$

гэсэн дүрнэлтэнд хүрч болно.

$$\text{Гэтэл эндээс } 2^{p^{\alpha}} \equiv -1 (2^{p^{\alpha}})$$

гэл гарах тул өмнө

1/ -р тохиолдолд баталсан ёсоор $p=3, \alpha=1$ болох билээ.

$$\text{Иймд } 2^3 \equiv -1 (9q)$$

буюу $9q$ нь 9 -ийг

хуваах болж $q=1$ гэсэн харшилд хүргэлээ. Иймд 1/ тохиолдолд оодлогын нөхцлийг хангах n тоо олдхгүй.

3/ Одоо $n \in p_1^{\alpha_1} \dots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}} p_k^{\alpha_k}$, $p_1 < \dots < p_k$, $k \geq 2$ байх ерөнхий тохиолдлыг сонирхое. 1/ тохиолдлын оодлогыг ажиглавал $k=2$ тохиолдлыг q -ийн зэрэг болох β -г багасгасаар байгаад 0 болгож $k=1$ тохиолдолд нилжиж байна. Иг энэ санаатаар, тухайлбал

$$n_1 = p_1^{\alpha_1} \dots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}} p_k^{\alpha_k}$$

гэж аваад оодлогын нөхцлийг

$$2^n \equiv -1 (n_1)$$

нөхцлөөр солиод ... гэж мэтчилэн

бодож $k \geq 2$ тохиолдлыг k -г багастаснаар $k=2$ тохиолдосонд
 шилжүүлж бодож болно. Иймд k -ийн шийдлэсг уламч танд үлдэглээ/.
 Эсвэл $k=2$ тохиолдолд бодлого шийдгүй тул энэ 3/ тохиол-
 долд бодлогын нөхцлийг хангах n тоо олдохгүй.

Үүгээр өрсөөсөө манай бодлогын нөхцлийг хангах n тоо
 маань эсвэл 3 болох нь батлагдлаа.

Ийм функцийг жишээр дараах маягаар байгуулж болно.
 Үүнд бүх анхны тоог өсөх байрлалаар нь $P_1, P_2, \dots$ гэж
 дугаарласан гэвэл Q^+ -ийн аливаа x -тоог

$$x = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$$

хэлбэртэй тавьж болно. Үүнд $n_1, n_2, \dots, n_k$ бүхэн
 тоо бөгөөд $n_k \geq 0$. Энэхүү x -д харгалзах функцийг
 утгыг

$$f(x) = f(p_1)^{n_1} \cdot f(p_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot f(p_k)^{n_k} \quad (1)$$

гэж тодорхойлъя. Харин $f(p_j)$ -утгыг бол j нь сондгой
 тоо байхад

$$f(p_j) = p_{j+1}$$

$$j \text{ нь тэг тоо байхад } f(p_j) = \frac{1}{p_j - 1} \quad (2)$$

гэж тодорхойлъя.

Энэ дүрмээр тодорхойлогдсон функц $Q^+ - g$ ордог
 ямар ч x, t хосын хувьд

$$a/ f(xt) = f(x) f(t)$$

$$б/ f(f(x)) = \frac{1}{x}$$

хоёр нөхцлийг хангана. Иймээс

/①-д тодорхойлсноор/

/②-д тодорхойлсноор/

$$f(x f(y)) \stackrel{a)}{=} f(x) \cdot f(f(y)) \stackrel{б)}{=} f(x) \cdot \frac{1}{y} = \frac{f(x)}{y}$$

бузу өрсөө функцийн тэгшитгэлийн шийд болж байна.

Энэхүү тэгшитгэлээс $x=1, y=1$ утгуудыг
 дараалан оруулснаар дараа $f(y_1) = f(y_2)$ бол $y_1 = y_2$
 гэж батлах замаар а) , б) хоёр нөхцлийг гаргаж болох авч
 эдгээр нөхцөл f -функцийн нэг утгатай тодорхойлж чадал-
 гүй билээ. ►

5. Ахуйн тэгшлэлтэй байж эхлэх бүх катурал тоо n_0 -ийг олонлогийг W -г.

Лемма $\{m, m+1, \dots, 1990\} \subset W, S \leq 1990$ өгөөд

$\frac{S}{p'} \geq m$ гэв. p' нь S -ийн хуваагч болдог
анхны тоонуудын хуваагчид ба зэрэг бол

$$\sqrt{S} \leq n_0 < m$$

Нөхцөл хангагдах катурал тоо n_0 бүлэн W дотор
байна.

Тоглогч байхад $\sqrt{S} \leq n_0 < m$ байвал

A тоглогч байхад $n_1 = S$ -ийг сонговол, B тоглогч

дүгнэ өсөөд

$$m \leq \frac{S}{p'} \leq n_2 < S \leq 1990$$

Нөхцөл хангагдах n_2 тоонуудад p' нь хуваагч тэн

$n_2 \in W$ байгаа болохоор A хожих болно. Иймдүү

лемма нотлогдов.

$$45^2 = 2025 > 1990 \text{ " } \text{озйгаа болохоор}$$

$$45 \leq n_0 \leq 1990 \text{ нөхцөл хангагдах } n_0 \text{ тоо бүлэн}$$

W -д орно.

$$\sqrt{420} < 21 < 45 \text{ учраас } m=45, S=420=2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Тоонууд леммын нөхцөл хангана. Иймдээ

$$\{21, 22, \dots, 44\} \subset W$$

$$m=21, S=168=2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

Тоонуудын тусгай
нөхцөл хангана болох

$$\{13, 14, \dots, 20\} \subset W$$

$$m=13, S=105=3 \cdot 5 \cdot 7$$

хоёр тоон тусгай
бол $\{11, 12\} \subset W$

$$m=11, S=60=2^2 \cdot 3 \cdot 5 \text{ гэж авчав}$$

өмнөгийн үндэсээр
олдог тусгай $\{8, 9, 10\} \subset W$ гэж

$$\{8, 9, \dots, 1990\} \subset W$$

хэрвэ $n_0 > 1990$ бол A тоглогч

$$2^2 \cdot 3^2 < n_0 \leq 2^{2+1} \cdot 3^2 < n_0^2$$

Бөхцөл хамрааг натураль тоо Σ -ийг өгсөөр эхэлнэ

$$n_1 = 2^{2+1} \cdot 3^2$$

-ийг эхч болно. Дараа нь B тоглогчийн дараа n_2 тоо ямар байх нь хамраагүй гэдгийг

$8 \leq n_2 < n_0$ байхад болно. Хэдийгээр өгөгдсөний дараа

$$8 \leq n_{2k} \leq 1990 \text{ байхад үүснэ.}$$

Өмнө баталсан дагуу $n_0 \geq 8$ байх үед A тоглогчийн ойлгогч болно.

$n_0 \leq 5$ гэвэл дараа нь өмнөх тооны үүсгэлтээс хамраагүй байх нь $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 > 5^2$ тул A тоглогчийн

$n_1 = p^2 q^5$ хэлбэрийн тоо авахад хүннэ. Үүнд p -ахлах,

q - анхны буруу гэвэл 1 өгөгдөд, $p^2 > q^5$, $2, 5 \geq 1$ байхад үийнээс тоглогч B тоглогчийн

$$n_2 = q^5 = \frac{n_1}{p^2} < \sqrt{n_1} \leq n_0$$

байхаар сонгоно. Ийнхүү хэдий ахлахын дараа тэгвэл

$$n_{2k} = 1 \text{ -ийг эхч болно.}$$

$n_0 = 6$ буюу $n_0 = 7$ байхад A тоглогчийн

$n_1 = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $n_1 = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ тоглогчийн эвэлхдээ 6 -г авна. Үүнээс хойш A, B тоглогчийн эвэлхдээ $30, 6, 30, 6, \dots$

дараалалтай байна. Σ тэгвэл аль нэг нь эхлэхэд хамраагүй бөхцөл бүрдэнэ.

Ийнхүү $a/ n_0 \geq 8$; $b/ 2 \leq n_0 \leq 5$,

в/ $n_0 = 6$, $n_0 = 7$.

Энэ бодлогын суралч хотын Бертрам постулатыг ашиглан нэг хамраагүй бодсон болно.

6. 1990 -өлсөрт $E_1 E_2 \dots E_{1990}$ -ийн төс

O дээр эхлэх векторууд дээр төгсгөлтөг 1990 өлсөрт векторын

$$\vec{e}_1 = \vec{OE}_1, \vec{e}_2 = \vec{OE}_2, \dots, \vec{e}_{1990} = \vec{OE}_{1990} \text{ гэс.}$$

Хэдийгээр $1^2, 2^2, \dots, 1990^2$ тоглогчийн

$$a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_{1990} \vec{e}_{1990} = \vec{0} \quad (*)$$

байх ямар нэг $a_1, a_2, \dots, a_{1990}$ сэтгэмэл олж чадвал

$$\vec{A_1 A_2} = a_1 \vec{e_1}, \vec{A_2 A_3} = a_2 \vec{e_2}, \dots, \vec{A_{1989} A_{1990}} = a_{1989} \vec{e_{1989}}$$

гэх аваад бодлогын нөхцөлд заасан $A_1 \dots A_{1990} A_1$ олон
 өнцөгтийг ойлгуулах. / $\odot$ нөхцөл ёсоор $\vec{A_{1990} A_1} =$

$= a_{1990} \vec{e_{1990}}$ болж тогирох/ болно. Өөрөөр хэлвэл
 дээрх зөв 1990- өнцөгтийн оройнууд дээр $1^2, 2^2, \dots, 1990^2$
 « ачаа » -г $\odot$ нөхцөл биелэхүйцээр хувиарлах юм.
 дэрэгтэй юм.

Үүний тулд $E_1, E_2, \dots, E_{1990}$ оройнуудыг тус бүрдээ
 арван өнцөгт үүсгэсэн байхаар 199 хэсэгт хуваах /Зөв

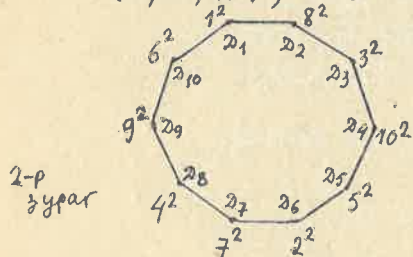
1990 - өнцөгтийн нэг төв өнцөг $\frac{\pi}{995}$, зөв арван өнцөг-
 тийн нэг төв өнцөг $\frac{\pi}{5}$. Иймээс зөв 10 өнцөгт болго-

хын тулд $\frac{\pi}{5} : \frac{\pi}{995} = 199$ буюу / E_1 оройн
 дараа E_{200} , үүний дараа $E_{2 \cdot 199 + 1}$ оройг

гэх мэтээр 10-р орой нь $E_{9 \cdot 199 + 1}$ болно. Энэ зөв 10 -

өнцөгтийг $\frac{2\pi k}{199}$ ($k=1, 2, \dots, 198$) өнцгөөр эргүүлэхэд
 бусад 198 ширхэг зөв 10-өнцөгт гарна. «Ачаа» -гаа мөн

$(1^2, \dots, 10^2), (11^2, \dots, 20^2)$ гэх мэтээр арав арваар нь
 хувааж үүссэн зөв 10-өнцөгтийнхөө
 оройнууд дээр хуваариласнаа
 дэрлэхэд хялбарыг бодож тэдгээр
 оройг $D_1 = E_1, D_2 = E_{200}, \dots$



2-р
 зураг

$$D_{10} = E_{9 \cdot 199 + 1} \text{ хэмээн}$$

сольж тэмдэглээд 1-р зурагт
 дүрслэв. /Үүд эсрэг D_1, D_6
 хоёр орой дээр харгалзуулан $1^2, 2^2$;

өөм D_3, D_8 -г $3^2, 4^2$; D_5, D_{10} -г

$D_{01} 5^2, 6^2$; D_7, D_2 -г оом

$7^2, 8^2; \dots, 29, 30$ -г бол $9^2, 10^2$ /-нэ хувиараар
 $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ байдаг тул нийлбэр вектор

$$\vec{V}_1 = (1^2 \cdot \vec{OD}_1 + 2^2 \cdot \vec{OD}_2) + \dots + (9^2 \cdot \vec{OD}_9 + 10^2 \cdot \vec{OD}_{10}) =$$

$$= 3 \cdot \vec{OD}_6 + 7 \cdot \vec{OD}_8 + 11 \cdot \vec{OD}_{10} + 15 \cdot \vec{OD}_2 + 19 \cdot \vec{OD}_4$$

/Тийг 3-р зурагт дүрсэлэв. Саяа хуваарилсан $1^2, 2^2, \dots, 10^2$

«агаа»-г

$$(10k+1)^2, (10k+2)^2, \dots, (10k+10)^2$$

"ачаа" -гээр солиход нийлбэр хэвээр үлдэнэ. Учир гэвэл

$$(10k+n+1)^2 - (10k+n)^2 = 1 \cdot (20k+2n+1) = 20k + (n+1)^2 - n^2$$

байдаггаас 10 -н хувиараар олдох нийлбэр векторыг $\vec{U}$ гэвэл

$$\vec{U} = \vec{V}_1 + 20k \cdot (\vec{OD}_2 + \vec{OD}_4 + \dots + \vec{OD}_{10})$$

Гэтэл $29, 30, 31, 32, 33$ таван өнцөгт зөв учраас түүнийг $\frac{2\pi}{5}$ өнцгөөр O төвийг тойруулан эргүүлбэл

$29, 30, 31, 32, 33$ таван өнцөгт болж шилжих тул

$\vec{OD}_2 + \vec{OD}_4 + \dots + \vec{OD}_{10}$ нийлбэр мөн $\frac{2\pi}{5}$ өнцгөөр эргэнэ.

Гэвч өмнөхтэйгээ тэнцүү байгаа учраас

$$\vec{OD}_2 + \vec{OD}_4 + \dots + \vec{OD}_{10} = 0 \quad \text{буюу} \quad \vec{U} = \vec{V}_1.$$

/Энэ баталгаа аливаа зөв m - өнцөгтөд үнэнийг баталж болно/.

Ийнхүү $1^2, 2^2, \dots, 10^2$ -ийг $29, \dots, 39$ цэгүүдэд хувиарлаад дараах $11^2, \dots, 20^2$ -ийг өмнөх дүрмээр хувиарлаад

$\frac{2\pi}{199}$ өнцгөөр эргүүлж хоёрдахь зөв 10 өнцөгтийн "ачаа" -г хуваарилна. Энэ аргаа дахин давтан хэрэглэснээр k -дугаар алхамдаа $(10k+1)^2, \dots, (10k+10)^2$ «агаа»-г $29, \dots, 39$

цэгүүд дээр хувиарлаад $\frac{2\pi k}{199}$ өнцгөөр эргүүлбэл $(1) -$

дүгээр зөв 10 -өнцөгтөд "ачаа" хувиарлагдана. Үүний

нийлбэр вектор $\vec{V}_k$ нь мөнх байгуулсан ёсоор $\frac{2\pi k}{199}$

өнцгөөр эргүүлсэн $\vec{V}_1 = \vec{V}$ вектортой тэнцүү. Ийн

хэлбэр «ачаатай» $\vec{V}_k$ векторуудын нийт нийлбэр

$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \dots + \vec{V}_{199} = 0$ буюу зөв 199 -өнцөгтийн төвөө

оройнууд руу нь татсан векторуудынх болно. ►

Олон улсын математикийн 26-р олимпиад 1985 оны 7-р сарын 4,5 -нд Финланд улсын нийслэл Хельсинк хотноо болсон. Энэ олимпиадад манай улсыг төлөөлж 6 сурагч оролцсоноос Б.Батгэрэл 24 оноогоор II зэргийн шагнал авчээ.

Эхний өдрийн бодлогууд

1. /Их Британи / Тойрогт багтсан $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгт өгөгдөв. AB тал дээр төвтэй тойрог үлдэх гурван талыг шүргэдэг бол $|AD| + |BC| = |AB|$ гэж батал.

2. / Австрал / n ба k ($0 < k < n$) нь өгөгдсөн харилцан анхны бүхэл тоонууд байг. $M = \{1, 2, \dots, n-1\}$ олонлогийн тоо бүрийг дараах нөхцлүүд биелэгдэж байхаар цэнхэр эсвэл цагаан өнгөөр будав. Үүнд:

а/ олонлогт харьяалагдах аливаа i тооны хувьд i ба $n-i$ тоонууд нэг ижил өнгөөр будагдана.

б/ M олонлогт харьяалагдах ба k аас ялгаатай аливаа i тоо бүрийн хувьд i ба $k-i$ тоонууд нэг ижил өнгөөр будагдана.

Тэгвэл M олонлогийн бүх тоо нэг ижил өнгөөр будагдсан байхыг батал.

3. /Голланд / Аливаа бүхэл коэффициентүүдтэй $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ олон гишүүнтийн хувьд түүний сондгой коэффициентүүдийн тоог $\omega(P)$ -ээр тэмдэглэе.

$Q_i(x) = (1+x)^{i_i}$ ($i_i = 0, 1, 2, \dots$) байг. Хэрэв $i_1, i_2, \dots, i_n$ бүхэл тоонууд ба $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n$

нөхцөл биелэгддэг бол $\omega(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \dots + Q_{i_n}) \geq \omega(Q_{i_1})$

тэнцэтгэл бишийг батал.

Хоёрдох өдрийн бодлогууд

4. / Монгол / Тус бүрийнх нь анхны хуваагчид 26-аас үл

хэтрэх, 1985 ширхэг ялгаатай натурал тоонуудаас тогтсон M олонлог өгөгдөв. M олонлогоос хоорондоо ялгаатай бөгөөд үржвэр нь ямар нэгэн натурал тооны дөрвөн зэрэгтэй тэнцэх дөрвөн тоо олж болохыг батал

5. /ЗХУ/. ABC гурвалжны A, C оройнуудыг дайрсан O төвтэй тойрог AB ба BC талуудыг харгалзан ялгаатай K ба N цэгүүдээр дахин огтлоно. AK ба KN гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд ялгаатай B ба M цэгүүдээр огтлолцох бол

$$\angle OMB = 90^\circ \quad \text{гэж батал.}$$

6. /Швед / Эерэг тоо x . бүрийн хувьд $x_1, x_2, \dots$ дарааллыг дараах рекуррент томъёогоор байгуулъя:

$$x_1 = x, \quad x_{n+1} = x_n \left(x_n + \frac{1}{n} \right) \quad (n \geq 1).$$

Байгуулагдсан дарааллын хувьд $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ ($n=1, 2, \dots$) тэнцэтгэл биш биелдэг байх цор ганц x тоо олдохыг батал.

Олимпиадыг зохион байгуулах хороо улс улсаас ирүүлсэн нийт 97 бодлогоос урьдчилан 19 бодлого сонгож, эдгээрээс 6-г нь шүүгчдийн коллегийн шилэн авч олимпиад дээр бодуулжээ. Одоо сонгогдсон 19 бодлогоос үлдсэн 13 бодлогын өгүүлбэрийг дор сийрүүлъя.

7. /Бразил / Гүдгэр 12 талст өгөгдөв. Хэрэв (i) бүх талс нь адил хажуут гурвалжин, (ii) бүх ирмэгийн урт нь эсвэл x -тэй, эсвэл y -тэй тэнцүү,

(iii) орой бүр дээр эсвэл 3, эсвэл 6 ирмэг уулзана,

(iv) бүх хоёр талст өнцгүүд хоорондоо тэнцүү гэсэн нөхцлүүд биелэгддэг бол $x:y$ харьцааг ол.

8. /Румын / C тойрог ба түүн дээр A цэг өгөгдөв.

C тойргийн дотоод мужийг D гээ. Хэрэв $M \in D$ бол AM шулуун C тойргийг дахин огтлох цэгийг M' ($M' = AM \cap C$)

гээ. $f(M) = \frac{|MA|}{|MM'|}$ гэж тодорхойлогдох $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ функц эрс гүдгэр болохыг батал. Өөрөөр хэлбэл D мужийн аливаа

ялгаатай M_1, M_2 цэгүүд ба $M_1 M_2$ хэрчмийн дундаж цэг P -ийн хувьд $f(P) < \frac{1}{2}(f(M_1) + f(M_2))$

тэнцэтгэл биш биелнэ гэж батал.

9. / Польш $X_n = \sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{3 + \dots + \sqrt[3]{n}}}$ байг.

$X_{n+1} - X_n < \frac{1}{n!}$, $n = 2, 3, \dots$ гэж батал.

10. / Чехословак / $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 3$) эерэг бүхэн тоонууд ба $x_1 < x_2 < \dots < x_n < 2x_1$ нөхцөл биелэгдэнэ. $P = x_1 x_2 \dots x_n$ гэе.

Хэрэв τ -анхны тоо, k -натурал тоо ба P тоо τ^k -д хуваагддаг бол $P/\tau^k > n!$

гэж батал.

11. / Турк / Яг 144 ялгаатай хувьсагцтай ба хуваагчид дотор нь дэс дараалсан 10 тоо орших хамгийн бага натурал тоог ол.

12. / Америк / O төвтэй нэгдүгээр радиустай бөмбөлөгт багтсан T тетраэдр өгөгдөв. T тетраэдрийн бүх талсын хүндийн төвийг дайрсан S бөмбөлөгийн радиусыг ол. Мөн O цэгээс S бөмбөлөгийн төв хүртлэх зайх T тетраэдрийн ирмэгүүдийн уртаар илэрхийл.

13. / Вьетнам / Зөв тетраэдрийн гадаргуу дээр орших аливаа M цэгийн хувьд дараах чанартай M' цэг мөн тетраэдрийн гадаргуу дээр олдохыг батал. Үүнд: M ба M' цэгүүдийг холбосон тетраэдрийн гадаргуу дээрх муруйнууд дотор боломжийн хамгийн бага урттай ядаж гурван ялгаатай муруй олдоно.

14. / ЗХУ / $P(x) = x^6 + a_1 x^5 + \dots + a_6$ байг. $P(x) = 0$ тэгшитгэлийн шийдүүд мэдэгдэж сайгаа бол тэдгээр дээр 15-аас ихгүй тооны үржих үйлдэл ба 15-аас ихгүй тооны нэмэх үйлдэл гүйцэтгэж $P(x)$ олон гишүүнтийн коэффициентүүдийг олох ядаж нэг арга ол.

15. / Их Британи / $P_m(x, y, z)$, $m = 0, 1, 2, \dots$ олон гишүүнтүүдийн дараалал

$$(i) \quad P_0(x, y, z) = 1$$

$$(ii) \quad P_m(x, y, z) = (x+z)(y+z)P_{m-1}(x, y, z+1) - z^2 P_{m-1}(x, y, z)$$

$$(m > 0)$$

гэж тодорхойлогдов.

$P_m(x, y, z)$ ($m \geq 0$) олон гишүүнт бүр x, y, z -ийн хувьд тэгш хэмтэй гэж батал. Өөрөөр хэлбэл:

$$\begin{aligned} P_m(x, y, z) &= P_m(x, z, y) = P_m(y, z, x) = P_m(y, x, z) = \\ &= P_m(z, x, y) = P_m(z, y, x) \end{aligned}$$

гэж батал.

16. /Белги / m ширхэг хайрцаг өгөгдсөн ба хайрцаг бүрт тодорхой тооны бөмбөгнүүд бий. n ($n < m$) өгөгдсөн натурал тоо байг. Өгөгдсөн хайрцагнуудаас n ширхэгийг сонгон авч тус бүрт нь нэг нэг бөмбөг нэмж хийж болно.

а/ Хэрэв $(m, n) = 1$ бол дээрх үйлдлийг төгсгөлөг удаа гүйцэтгэж бүх хайрцгийг ижил тооны бөмбөгтэй болгож болохыг батал.

б/ Хэрэв $(m, n) = d > 1$ бол дээрх үйлдлийг гүйцэтгэх замаар бүх хайрцгийг ижил тооны бөмбөгтэй болгож болохгүй байх анхны хуваарилалт олдохыг батал.

17. /Израил / Тойрог дээр орших 1985 цэг бүрт

1 эсвэл -1 -ийг харгалзуулъя. Ямар нэгэн цэгээс эхлэн тойрог дээгүүр зэргэлдээ цэгүүдийг дамжин явж, алхам бүрд харгалзах тоонуудыг нэмье. Ийнхүү бүтэн тойроход алхам бүрт гарсан нийлбэр зөрөг байсан бол анхны цэгийг "сайн цэг" гээ. Хэрэв -1 харгалзсан цэгийн тоо 662 -аас бага бол ядаж нэг "сайн цэг" олдохыг батал.

18. /Франц / k ба k' нь нэг хавтгай дээр орших тэнцүү талтай квадратууд байг.

$$K' = \bigcup_{i=1}^p t_i(\tau_i)$$

нөхцөл биелэгдэж байхаар k квадратыг төгсгөлөг тоон

$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$ гурвалжныудад хуваа. Энд

$t_1, t_2, \dots, t_p$ нь параллель зөөлтүүд болно.

19. /Канад / $x_1, x_2, \dots, x_n$ натурал тоонууд бол

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2 x_3} + \frac{x_2^2}{x_2^2 + x_3 x_4} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2 + x_n x_1} + \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_1 x_2} \leq n-1$$

тэгшитгэл бишийг батал.

1- 19 бодлогуудын хариу ба заавар

1. Бодлогын нөхцлөөр тодорхойлогдох тойргийн төвийг O , түүний радиусыг r гэе. O цэгээс AB, BC талууд дээр буулгасан перпендикулярын суурийг харгалзан F, G гэвэл

$$AF = r \operatorname{ctg} A, \quad FD = r \operatorname{ctg} \frac{D}{2}, \quad CG = r \operatorname{ctg} \frac{C}{2},$$

$$GB = r \operatorname{ctg} B, \quad OA = r / \sin A, \quad OD = r / \sin B$$

тэнцэтгэлүүд биелнэ. Цааш нь $A+C=\pi, B+D=\pi$ болохыг санавал

$$\frac{1 - \cos B}{\sin B} = \operatorname{ctg} \frac{B}{2} = \operatorname{ctg} \frac{D}{2}, \quad \frac{1 - \cos A}{\sin A} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$$

гэж гарах ба эндээс

$$\begin{aligned} |AD| + |BC| &= |AF| + |FD| + |CG| + |GB| = \\ &= r(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} \frac{D}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} + \operatorname{ctg} B) = r\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B}\right) = \\ &= |OA| + |OB| = |AB|. \end{aligned}$$

2. Аливаа натурал $a \in M (a > 1)$ тооны хувьд хэрэв $b < a$ бол a, b тоонууд ижил өнгөөр будагдана гэж харуулахад хангалттай. Хэрэв $n=3$ бол батлах зүйл илэрхий. Энэ үед $M = \{1, 2\}$ ба (a) нөхцөл ёсоор 1, 2 тоонууд ижил өнгөөр будагдана. $n > 3$ ба n -ээс цөөн элементтэй аливаа M олонлогийн хувьд бодлогын өгүүлбэрийг үнэн гэе. Цаашид a, b хоёр тоо ижил өнгөөр будагддаг бол $a \sim b$ гэж тэмдэглэх болно. Хэрэв $k=1$ бол (δ) ёсоор аливаа $a (a > 1)$ тооны хувьд $a \sim a-1$ учир бодлогын өгүүлбэр үнэн, $k > 1$ байг. Энэ үед $(n, k)=1$ учир $n = mk + r, 0 < r < k, m > 0$ нөхцөл хангах m, r тоонууд олдоно. Мэдээж $(k, r)=1$. Хэрэв $a > k$ бол (δ) ёсоор $a \sim a-k$ ба эндээс (a) ёсоор

$$k \sim n-k = mk + r - k = (m-1)k + r \sim (m-2)k + r \sim \dots \sim r.$$

$$M' = \{1, 2, \dots, k\}$$

олонлог авч үзье. Хэрэв $a < k$ бол (δ) нөхцөл ёсоор $a \sim k - a$. (a) нөхцөл ёсоор $a \sim n - a = mk + r - a = (m-1)k + k - (a - r) \sim (m-2)k + k - (a - r) \sim \dots \sim k - (a - r) \sim |k - (a - r)| = |a - r|$.

Ийнхүү M' олонлогийн хувьд бодлогын хоёр нөхцөл биелэгдэх / n, k -ийн үүргийг харгалзан k, r гүйцэтгэнэ / учир индукцийн нөхцөл ёсоор M' олонлогийн бүх элемент буюу $1, 2, \dots, k$ тоонууд ижил өнгөөр будагдсан байна. $k -$ аас их аливаа $a \in M$ тооны хувьд (δ) нөхцөлийг давтан хэрэглэж $a \sim b < k$ болохыг харуулна.

3. Хэрэв $n = 2^m$ бол $Q(x) = (1+x)^n$ олон-
 гишүүнтийн задаргаа нь $Q(x) = 1 + r(x) + x^n$ хэлбэртэй
 байх ба энд $r(x)$ -ийн бүх коэффициент тэгш тоо болно.
 Иймд $\omega(Q_n) = 2$. Эндээс хэрэв $\deg P(x) < n = 2^m$
 бол $(\deg P(x) -$ гэж $P(x)$ олон гишүүнтийн зэргийг тэмдэглэдэг)

$$(1) \quad \omega(P \cdot Q_n) = 2\omega(P)$$

Одоо бодлогыг i_n -ийн хувьд тэнцэтгэл биелнэ.
 бодъё. Хэрэв $i_n = 0$ эсвэл $i_n = 1$ индукцийн арга хэрэглэж
 биш илэрхий. $i_n < 2^m$ ($m \geq 1$) бол батлах тэнцэтгэл
 биш биелэгддэг гэж үзээд $2^m \leq i_n < 2^{m+1}$ тохиолдолд тэнцэтгэл

тохиолдолд тэнцэтгэл биш биелэхийг баталъя. Үүний тулд дараах
 хоёр тохиолдлыг авч үзье.

а/ $i_1 \geq 2^m$. Энэ үед $i_1 = 2^m + k_1, i_2 = 2^m + k_2, \dots, i_n = 2^m + k_n$,
 $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n < 2^m$ нөхцлүүд биелэгдэх
 $k_1, k_2, \dots, k_n$ тоонууд олдоно. Цаашиг-
 бол

$Q_{i_1} + Q_{i_2} + Q_{i_3} + \dots + Q_{i_n} = Q_{2^m} (Q_{k_1} + Q_{k_2} + \dots + Q_{k_n})$ болох ба
эндээс индукцийн нөхцөл болон (1) тэнцэтгэлийг ашиглавал

$$\omega(Q_{i_1} + \dots + Q_{i_n}) = 2\omega(Q_{k_1} + \dots + Q_{k_n}) \geq \\ \geq 2\omega(Q_{k_1}) = \omega(Q_{2^m} \cdot Q_{k_1}) = \omega(Q_{i_1}). \quad \delta/i_1 < 2^m (=k).$$

Аливаа $P(x)$ олон гишүүнтийн хувьд хэрэв $\deg P(x) < 2^{m+1}$ бол

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{k-1} x^{k-1} + (1+x)^k (b_0 + b_1 x + \dots + b_{k-1} x^{k-1})$$

тэнцэтгэл биелдэг байхаар $a_0, a_1, \dots, a_k, b_0, b_1, \dots, b_{k-1}$ коэффициентүүдийг сонгон авч болно. Эндээс:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{k-1} b_i x^i + x^k \sum_{i=0}^{k-1} b_i x^i + R(x)$$

хэлбэртэй бичиж болох ба $R(x)$ -ийн коэффициентүүд нь тэгш тоо байна. Иймд

$$(2) \omega(P(x)) = \omega\left(\sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{k-1} b_i x^i + x^k \sum_{i=0}^{k-1} b_i x^i\right) \geq \omega\left(\sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i\right).$$

$i_1 < 2^m, i_n > 2^m$
учир $i_1 < 2^m, i_{e+1} \geq 2^m$ нөхцөл хангах ℓ ($1 \leq \ell \leq n$)
тоо олдох ёстой.

$$\text{Одоо } P(x) = Q_{i_1} + Q_{i_2} + \dots + Q_{i_n} = a_0 + a_1 x + \dots + a_{k-1} x^{k-1} + \\ + (1+x)^k (b_0 + b_1 x + \dots + b_{k-1} x^{k-1}) \quad \text{гэвэл } Q_{i_1} + Q_{i_2} + \dots + Q_{i_\ell} = \\ = \sum_{i=1}^{k-1} a_i x^i, \quad Q_{i_{\ell+1}} + \dots + Q_{i_n} = (1+x)^k (b_0 + b_1 x + \dots + b_{k-1} x^{k-1})$$

болно. Эндээс (2) ёсоор $\omega(Q_{i_1} + \dots + Q_{i_n}) \geq \omega(Q_{i_1} + \dots + Q_{i_\ell})$
болох ба цааш нь индукцийн нөхцлийг санавал.

$$\omega(Q_{i_1} + \dots + Q_{i_n}) \geq \omega(Q_{i_1} + \dots + Q_{i_\ell}) \geq \omega(Q_{i_1}).$$

4. 26-аас бага 9 ширхэг ялгаатай анхны тоо бий. Эдгээрийг $P_1, P_2, \dots, P_9$ гэе. Тэгвэл M олонлогийн аливаа элементийг $\chi_j = \prod_{i=1}^9 P_i^{\alpha_{ij}}, 0 \leq \alpha_{ij}$ хэлбэртэй бичиж болно.

Хэрэв $\alpha_{ij} \equiv \alpha_{ik} \pmod{2} \quad (i = 1, 2, \dots, 9)$ нөхцөл

биелэгдэж байвал $X_j X_k$ үржвэр бүхэл тооны квадрат байна. Өндээс аль ч хоёрыг нь үржвэр бүхэл тооны квадрат биш байх M олонлогийн дэд олонлогийн элементийн тоо хамгийн ихдээ $2^3 = 512$ байна. Иймд M олонлогоос 513 элемент авахад үржвэр нь бүхэл тооны квадрат байх хоёр тоо олдох ба ийм ялгаатай хосуудын тоо хамгийн цөөндөө

$$\frac{1985 - 513}{2} = 736$$

байх ёстой. Ийм хосуудын олонлогийг M' гее. $X_j X_k$ ба $X_m X_n$ үржвэрүүд бүтэн квадрат байг. Тэгвэл $a_{ij} + a_{ik} \equiv 0 \pmod{2}$ ба $a_{im} + a_{in} \equiv 0 \pmod{2}$ ($i = 1, 2, \dots, 9$) байна. Энэ үед

$a_{ij} + a_{ik} + a_{im} + a_{in} \equiv 0 \pmod{4}$ гэсвэл $a_{ij} + a_{ik} + a_{im} + a_{in} \equiv 2 \pmod{4}$ байх ба эхний тохиолдолд $X_j X_k X_m X_n$ үржвэр бүхэл тооны 4 зэрэгтэй тэнцэнэ. Өмнөхтэй адилаар аль ч хоёр хосынх нь элементүүдийн үржвэр бүхэл тооны 4 зэрэгтэй үл тэнцэх. M' -ийн дэд олонлог хамгийн ихдээ 512 хос агуулна. Нэгэнт M' олонлог ядаж 736 хос агуулах учир $X_j X_k X_m X_n$ үржвэр бүхэл тооны 4 зэрэгтэй тэнцэх $(X_j, X_k), (X_m, X_n)$ хосууд M' олонлогоос олдоно.

5. $P = KN \cap AC$ / хэрэв $KN \parallel AC$ бол ABC ба KBN гурвалжныг багтаасан тойргууд ялгаатай хоёр цэгээр огтлолцохгүй /. BP шулуун KBN гурвалжныг багтаасан тойргийг M' цэгт огтлолдог байг. $\angle NMP' = \angle NMM' + \angle NBM' = \angle BKN = \angle ACB$

учир $SNM'P$ дөрвөн өнцөгтийг тойрогт багтааж болно. Мөн $\angle BM'C = \angle BM'N + \angle NM'C = \angle AKN + \angle NPC = \pi - \angle BAC$

учир M' цэг ABC гурвалжныг багтаасан тойрог дээр оршино. Иймд $M = M'$. $\angle BOI = \alpha$, $\angle POI = \beta$ ба

$$\angle OKI = \tau \text{ гээ. Тэгвэл } |BM| \cdot |BP| = |BN| \cdot |BC| = a^2 - \tau^2$$

$$|PM| \cdot |PB| = |PN| \cdot |PK| = \rho^2 - \tau^2$$

$$\text{болно. Цаашилбал } |BP|^2 = (|BM| + |MP|) |BP| = |BM| \cdot |BP|$$

$$+ |MP| |KP| = a^2 + b^2 - 2c^2, \quad |KM|^2 = (a^2 - c^2) / (a^2 + b^2 - 2c^2), \\ |PM|^2 = (b^2 - c^2) / (a^2 + b^2 - 2c^2)$$

Болох ба эцэст нь $|KM|^2 - |PM|^2 = |KO|^2 - |OP|^2$ гэсэн гарна. Сүүлчийн тэнцэтгэл нь $OM \perp BP$ бүгд биелнэ.

6. $0 < X_n < X_{n+1} < 1$ ($n=1, 2, \dots$) тэнцэтгэл бишийг хувирган $1 - \frac{1}{n} < X_n < 1$ ($n=1, 2, \dots$) хэлбэртэй болгож болно. Өгөгдсөн ёсоор $X_1, X_2, \dots$ дарааллын гишүүн бүр нь X -ээс хамааран эерэг коэффициентүүдтэй олон гишүүнт байна. Жишээ нь: $X_1 = X$; $X_2 = X(X+1)$; $X_3 = (X^2+X)(X^2+X+\frac{1}{2})$; ... гэх мэт.

Эдгээр олон гишүүнт нь $R_+ = [0, +\infty)$ олонлог дээр эрс өсөх бөгөөд $[0, +\infty[$ завсрын бүх утгыг авна. Нэгэнт X_n ($n=1, 2, \dots$) нь X -ээс хамаарсан функц / олон гишүүнт / учир түүнийг $X_n(x)$ гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $X_n(x) = P$ ($0 < P$) тэгшитгэл цор ганц шийдтэй байна. $X_n(x) = 1 - \frac{1}{n}$ ($n=1, 2, \dots$) ба $X_n(x) = 1$ ($n=1, 2, \dots$) тэгшитгэлүүдийн шийдийг харгалзан a_n ба b_n гэе. Энэ үед $X_{n+1}(a_{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \frac{1}{n} = (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}) = X_n(a_n)(X_n(a_n) + \frac{1}{n}) = X_{n+1}(a_n)$

ба $X_{n+1}(b_{n+1}) = 1 < 1 + \frac{1}{n} = 1 \cdot (1 + \frac{1}{n}) = X_n(b_n)(X_n(b_n) + \frac{1}{n}) = X_{n+1}(b_n)$

тэнцэтгэл бишүүдээс $a_{n+1} > a_n$ ба $b_{n+1} < b_n$ гэж гарна. Учир нь $X_{n+1}(x)$ нь өсөх функц билээ. Мөн $X \geq 1$ бол $X_n(x) > 1$ ($n=2, 3, \dots$) болох учир $b_n < 1$ ($n=1, 2, \dots$) байна. Нэгэнт $1 - \frac{1}{n} < 1$ ба $X_n(x)$ өсөх функц учир $a_n < b_n$ ($n=1, 2, \dots$) байх ёстой. Ийнхүү $\{a_n\}$ нь дээрхээсээ зааглагдсан өсөх дараалал, $\{b_n\}$ нь дороосоо зааглагдсан буурах дараалал учир аль аль нь хязгаартай. $X_n(x)$ тасралтгүй функц ба $\lim (X_n(b_n) - X_n(a_n)) = \lim (1 - (1 - \frac{1}{n})) = \lim \frac{1}{n} = 0$ учир $\lim (b_n - a_n) = 0$ болно. Иймд $\lim b_n = \lim a_n$ байх ба энэ хязгаарыг c гэе. $a_n < c < b_n$ ($n=1, 2, \dots$) учир $X_n(a_n) < X_n(c) < X_n(b_n)$ буюу $1 - \frac{1}{n} < X_n(c) < 1$

болж C тоо бодлогын нөхцлийг хангаж байна. Хэрэв $C \neq C$ тоо мөн бодлогын нөхцлийг хангадаг гэвэл $C' < a_n$ эсвэл $C' > b_n$ биелэх a_n эсвэл b_n тоо олдоход хүрнэ.

7. Бүх талс нь гурвалжин байх гүдгэр 12 талстны ирмэгийн тоо нь $\frac{3 \cdot 12}{2} = 18$ байх ба Эйлерийн томъёо ёсоор оройн

тоо нь 8 болно. Гурван ирмэг уулздаг оройн тоог a , зургаан ирмэг уулздаг оройн тоог b гэвэл $a+b=8$ ба

$$3a + 6b = 2 \cdot 18 \quad \text{тэнцэтгэлүүд биелнэ. Эндээс } a=4, b=4.$$

A, B, C, D орой тус бүр дээр гурван ирмэг уулздаг,

E, F, G, H орой тус бүр дээр зургаан ирмэг уулздаг байг. Тэгвэл

i, ii, iv нөхцлүүдийг ашиглан A, B, C, D оройнууд дээр уулзах бүх ирмэгүүд тэнцүү. Харин E, F, G, H нь зөв тетраэдрийн оройнууд болохыг тогтоож болно. Мөн A, B, C, D нь EEG, EFH, FGH ба CEH суурьтай зөв гурвалжин пирамидуудын оройнууд болно. Эцэст нь A, B, C, D оройнууд дээр төгсгөлтэй ирмэгүүдийн уртыг x , E, F, G, H оройнуудыг хооронд нь холбосон ирмэгүүдийн уртыг y гэвэл хялбар тооноо хийж $y:x = 5:3$ гэж гарна.

8. C тойрог дотор орших ба түүнийг A цэгт шүргэгч аливаа тойрог дээр f функц тогтмол утгатай. Мөн аливаа эерэг m тооны хувьд $f(M) = m$ нөхцөл хангах M цэгүүдийн олонлогийг C_m гэвэл энэ нь C тойргийг A цэгт шүргэсэн тойрог байна. Хэрэв $M \in C_m, N \in C_n$ бол

$C \frac{m+n}{2}$ тойрог дотор орших аливаа X цэгийн хувьд

$$f(X) < \frac{m+n}{2} = \frac{f(M) + f(N)}{2}$$

тэнцэтгэл бий биелэх нь илэрхий.

Эцэст нь дурш M, N цэгүүдийн хувьд $f(M) = m$

$$(M \in C_m)$$

$$\text{ба } f(N) = n \quad (N \in C_n)$$

бол

MN хэрчийн дундаж цэг $C \frac{m+n}{2}$ тойрог дотор оршино гэж харуулснаар бодолт дуусна.

9. $n=2$ үед тэнцэтгэл бий илэрхий. $n>2$ байг.

$$a_i, b_i, c_i \quad (i=2, 3, \dots)$$

тоонуудыг

$$a_i = \sqrt[i]{i + \sqrt[i+1]{i+1 + \dots + \sqrt[n]{n + \sqrt[n+1]{n+1}}}},$$

$$b_i = \sqrt[i]{i + \sqrt[i+1]{i+1 + \dots + \sqrt[n]{n}}}$$

$$c_i = a_i^{i-1} + a_i^{i-2} b_i + \dots + a_i b_i^{i-2} + b_i^{i-1}$$

гэж тодорхойлжээ. Тэгвэл

$$a_k^k - b_k^k = a_{k+1} - b_{k+1} = (a_{k+1}^{k+1} - b_{k+1}^{k+1}) / c_{k+1} \quad (k=2, 3, \dots, n-1)$$

тэнцэтгэл биелнэ. Энэ томъёог хэрэглэвэл:

$$\begin{aligned} a_2^2 - b_2^2 &= a_3^3 - b_3^3 = \frac{a_3^3 - b_3^3}{c_3} = \frac{a_4^4 - b_4^4}{c_3} = \frac{a_4^4 - b_4^4}{c_3 c_4} = \\ &= \frac{a_5^5 - b_5^5}{c_3 c_4} = \dots = \frac{a_n^n - b_n^n}{c_3 \dots c_n} \quad \text{болно. Эндээс } x_{n+1} - x_n = \\ &= a_2 - b_2 = \frac{a_2^2 - b_2^2}{c_2} = \frac{a_n^n - b_n^n}{c_2 c_3 \dots c_n} = \frac{n+1 \sqrt[n+1]{n+1}}{c_2 c_3 \dots c_n}. \end{aligned}$$

$$2 \leq k \leq n-1$$

үед

$$k^{\frac{1}{n+1}} < k^{\frac{1}{n}} \leq b_k < a_k$$

тэнцэтгэл

$$\text{биг биелэх ба эндээс } c_k = a_k^{k-1} + a_k^{k-2} b_k + \dots + a_k b_k^{k-2} +$$

$$+ b_k^{k-1} > k^{\frac{k-1}{n+1}} + k^{\frac{k-1}{n+1}} + \dots + k^{\frac{k-1}{n+1}} = k^{1 + \frac{k-1}{n+1}}$$

гэж гарна.

$$\text{Эцэст нь } x_{n+1} - x_n = \frac{n+1 \sqrt[n+1]{n+1}}{c_2 c_3 \dots c_n} \leq \frac{n+1 \sqrt[n+1]{n+1}}{n! n^{\frac{n-1}{n+1}}} < \frac{1}{n!}$$

10. Бодлогын нөхцөл ёсоор $z^{k_i} | x_i \quad (i=1, \dots, n)$ ба

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = k \quad \text{нөхцөл хангах } k_i \quad (i=1, \dots, n) \quad \text{тоонууд}$$

$$\text{олдоно. } y_i = \frac{x_i}{z^{k_i}} \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \quad \text{гэс.}$$

$$\text{Хэрэв } y_i = y_j \quad \text{ба } x_i < x_j \quad \text{бол } x_j = z^{k_j - k_i} x_i \geq 2 x_i \geq 2 x_1$$

болж бодлогын нөхцөлд харшилна. Иймд

$y_1, y_2, \dots, y_n$ тоонууд хос хосоороо ялгаатай байх
ба $\frac{p}{z^k} = y_1 y_2 \dots y_n \geq n!$.Одоо $\frac{p}{z^k} = n!$

тэнцэтгэл биелэхгүй гэж харуулъя. Эсрэгээс дээрх тэнцэтгэл биелдэг гэвэл $y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 3$ буюу

$x_i = z^{k_i}, x_j = 2z^{k_j}, x_\ell = 3z^{k_\ell}$ нөхцлүүд биелэх i, j, ℓ тоонууд олдох ёстой. Хэрэв $z = 2$ бол

$$\frac{x_i}{x_j} \geq 2 \quad \text{эсвэл} \quad \frac{x_j}{x_i} \geq 2, \quad z = 3 \quad \text{бол}$$

$$\frac{x_i}{x_j} \geq 3 \quad \text{эсвэл} \quad \frac{x_\ell}{x_i} \geq 3, \quad z \geq 5 \quad \text{бол} \quad \frac{x_i}{x_j} = 2,$$

$\frac{x_j}{x_i} = 2, \frac{x_i}{x_j} \geq \frac{5}{2}$ эсвэл $\frac{x_i}{x_j} \geq \frac{5}{2}$ нөхцлүүдийн аль нэг нь биелнэ. Аль ч тохиолдолд бодлогын нөхцөл зөрчигдөж

байгаа учир $\frac{p}{z^k} = n!$ тэнцэтгэл биелэхгүй.

II. Бодлогын нөхцөл хангах тоог n гэе. n тоо

$2^1, 3^1, 5$ ба 7 -д хуваагдах ёстой. Иймд n нь $2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4} \cdot 11^{\alpha_5} \dots$

$$(\alpha_1 \geq 3, \alpha_2 \geq 2, \alpha_3 \geq 1, \alpha_4 \geq 1, \alpha_5 \geq 0 \dots)$$

хэлбэртэй

байх ёстой. Энэ үед n -ийн ялгаатай хуваагчдын тоо

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \dots \quad \text{байх ба} \quad (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)(\alpha_4 + 1) \geq 18.$$

$$\text{Иймд} \quad (\alpha_5 + 1) \dots \leq 8. \quad n \text{ нь}$$

бодлогын нөхцөл хангах хамгийн бага тоо учир $\alpha_i = 0 \quad (i = 6, 7, \dots)$

ба $\alpha_1 = 1$ эсвэл $\alpha_2 = 2$ байх ёстой. Эцэст нь

$$n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4} \cdot 11^{\alpha_5} \quad (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)(\alpha_4 + 1) \mid (\alpha_5 + 1) = 144$$

$$\text{нөхцлөөс} \quad n = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$$

гэж гарна.

12. Т тетраэдрийн оройнуудыг A, B, C, D ба

ABC, ACD, ABD, KCD
зан D', K', C', A'

талстуудын хүндийн төвийг харгал-
гээ. Тэгвэл:

$$\overline{OD'} = \frac{\overline{OA} + \overline{OK} + \overline{OC}}{3}, \quad \overline{OK'} = \frac{\overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OD}}{3},$$

$$\overline{OC'} = \frac{\overline{OA} + \overline{OK} + \overline{OD}}{3}, \quad \overline{OA'} = \frac{\overline{OK} + \overline{OC} + \overline{OD}}{3}$$

тэгшитгэлүүд биелнэ.

$$\overline{OO'} = \frac{\overline{OA} + \overline{OK} + \overline{OC} + \overline{OD}}{3} \quad \text{гэвэл} \quad \overline{A'O'} = \overline{OO'} - \overline{OA'} = \frac{1}{3} \overline{OA}$$

ба буюу $|A'O'| = \frac{1}{3} |OA| = \frac{1}{3}$ болно. Үүнтэй адил

$|O'B'| = |O'C'| = |O'D'| = \frac{1}{3}$ Иймд A', B', C', D' цэгүүдийг дайрсан бөмбөлөгийн төв нь O' ба радиус нь $\frac{1}{3}$ -тэй

$$\begin{aligned} \text{тэнцүү байна. } |AB|^2 &= (\overline{AB}, \overline{AB}) = (\overline{OB} - \overline{OA}, \overline{OB} - \overline{OA}) = \\ &= 2 - 2(\overline{OA}, \overline{OB}) \end{aligned} \quad \text{буюу}$$

$$(\overline{OA}, \overline{OB}) = \frac{2 - |AB|^2}{2}. \text{ Үүнтэй адил } (\overline{OA}, \overline{OC}), (\overline{OA}, \overline{OD}),$$

$$(\overline{OB}, \overline{OC}), (\overline{OB}, \overline{OD}), (\overline{OC}, \overline{OD})$$

скаляр үржвэрүүдийг олж болно. Эндээс $|\overline{OO'}|^2 = (\overline{OO'}, \overline{OO'}) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{9} |\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}|^2 = \\ &= \frac{16 - 2(|AB|^2 + |AC|^2 + |AD|^2 + |BC|^2 + |BD|^2 + |CD|^2)}{9} \end{aligned}$$

гэж гарна.

13. Хэрэв M цэг тетраэдрийн аль нэг оройтой давхцаж байвал тэр оройн эсрэг талсын төв нь бодлогын нөхцлийг хангана. Одоо M цэг тетраэдрийн аль нэг талсад харьяалагддаг байг. Энэ талсыг ABC , эсрэг оройг нь S гээ. ABC гурвалжинд AE, BF, CN медиануудыг татаж, эдгээрийн огтлолцол буюу хүндийн төвийг O гээ. M цэг $NOEF, EOFN, FONA$ дөрвөн өнцгүүдийн аль нэгийг нь дотор эсвэл хоёрынх нь

ерөнхий тал дээр оршино. M цэгийг $NOEB$ дөрвөн өнцөгт дотор, эсвэл түүний тал дээр оршдог гээ. AKC гурвалжны гадна талд BCS', AKS'', CAS''' зөв гурвалжнууд байгуулья. Мөн BCS' гурвалжны гадна талд $CS'A', AKS''$ гурвалжны гадна талд $AS''C'$ зөв гурвалжныг тус тус байгуулья. A цэгийг дайруулан MA -д перпендикуляр шулуун, C цэгийг дайруулан

MC -д перпендикуляр шулуун тус тус татаж эдгээрийн огтлолцлын цэгийг M' гээ. $M'C$ шулууны C -ээс цааших үргэлжил дээр $|M'C| = |CM'|$ нөхцөл биелэх M'_1 цэгийг, $M'A$ шулууны A -аас цааших үргэлжиллэл дээр $|M'A| = |AM'_2|$ нөхцөл биелэх M'_2 цэгийг тус тус авья. Энэ үед $|MM'| = |MM'_1| = |MM'_2|$ тэнцэтгэл биелэх ёстой. Одоо зурагт үзүүлсэн дүрсээ AB, BC, CA болон CS', AS'' ирмэгүүдээр нугалан эвлүүлж тетраэдриг үүсгэе. Ингэхэд S', S'', S''' цэгүүд S цэгтэй, A' цэг A цэгтэй, C' цэг C цэгтэй давхцах ба ACS''' ,

$CS'A', AS''C'$ гурвалжнууд тетраэдрийн ACS талстай давхцана. Мөн M, M'_1, M'_2 цэгүүд давхцахыг хялбархан харж болох ба энэ нь бидний эрж буй цэг болно.

14. $-X_1, -X_2, -X_3, \dots, -X_6$ нь $P(x) = 0$ тэгшитгэлийн шийдүүд байг. $X_1, X_2, \dots, X_k$ ($1 \leq k \leq 6$) тоонуудын хувьд $\delta_{r,k}$ ($1 \leq r \leq 6$) - аар бүхий л боломжит r ширхэг тоонуудын үржвэрүүдийг нэмсэн нийлбэрийг тэмдэглэе. Жишээ нь:

$$\delta_{2,3} = X_1 X_2 + X_1 X_5 + X_2 X_5, \quad \delta_{1,4} = X_1 + X_2 + X_3 + X_4;$$

$$\delta_{3,4} = X_1 X_2 X_3 + X_1 X_2 X_4 + X_1 X_3 X_4 + X_1 X_2 X_5$$

гэх мэтчилэн. Энэ үед $a_r = \delta_{r,6}$ ($1 \leq r \leq 6$) байх

ба $\delta_{r,k} = \delta_{r-1,k-1} \cdot X_k + \delta_{r,k-1}$ тэнцэл биелнэ.

Цааш нь:

$$\begin{array}{ccccccccc} X_1 & \rightarrow & \delta_{2,2} & \rightarrow & \delta_{3,3} & \rightarrow & \delta_{4,4} & \rightarrow & \delta_{5,5} & \rightarrow & \delta_{6,6} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \delta_{1,2} & \rightarrow & \delta_{2,5} & \rightarrow & \delta_{3,4} & \rightarrow & \delta_{4,5} & \rightarrow & \delta_{5,6} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \delta_{1,3} & \rightarrow & \delta_{2,4} & \rightarrow & \delta_{3,5} & \rightarrow & \delta_{4,6} & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \delta_{1,4} & \rightarrow & \delta_{2,6} & \rightarrow & \delta_{3,6} & & & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \chi_{1,5} & \rightarrow & \chi_{2,6} \\ \downarrow & & \\ \chi_{1,6} & & \end{array}$$

схемийг ашиглан $\chi_{1,6}; \chi_{2,6}; \dots; \chi_{6,6} - 2$ болно.

15. $P_m(x, y, z)$ олон гишүүнт тэгшхэмтэй болохыг индукцийн аргаар батлая. $m=0$ үед илэрхий. $m \leq n-1$ үед $P_m(x, y, z)$ олон гишүүнт тэгш хэмтэй байг. Энэ үед

$$\begin{aligned} (x+y)P_m(x, z, y+1) - (x+z)P_m(x, y, z+1) &= (x+y)P_m(y+1, z, x) - \\ - (x+z)P_m(z+1, y, x) &= (x+y)[(y+x+1)(z+x)P_{m-1}(y+1, \\ , z, x+1) - x^2P_{m-1}(y+1, z, x)] - (x+z)[(z+x+1)(y+x) \cdot \\ \cdot P_{m-1}(z+1, y, x+1) - x^2P_{m-1}(z+1, y, x)] &= (x+y)(x+z)(y-z) \cdot \\ \cdot P_{m-1}(x+1, y, z) - x^2(y-z)P_{m-1}(x, y, z) &= (y-z)P_m(z, y, x) = (y-z)P_m(x, y, z). \end{aligned}$$

Одоо $m=n$ үед $P_n(x, y, z)$ тэгш хэмтэй болохыг батлая. Бодлогын нөхцөл ёсоор:

$$\begin{aligned} P_n(x, y, z) &= P(y, x, z) \quad \text{учир } P_n(x, y, z) = P_n(x, z, y) \\ \text{гэж харуулахад хангалттай.} \\ P_n(x, z, y) - P_n(x, y, z) &= (y+z)[(x+y)P_{n-1}(x, z, y+1) - \\ - (x+z)P_{n-1}(x, y, z+1)] - (y^2 - z^2)P_{n-1}(x, y, z) &= \\ = (y+z)(y-z)P_{n-1}(x, y, z) - (y^2 - z^2)P_{n-1}(x, y, z) &= 0; \end{aligned}$$

16. Хэрэв m, n харилцан анхны тоонууд бол $un = vm + 1$ тэгшитгэл хангах u, v натурал тоонууд олдоно. Энэ нь u удаа бодлогын нөхцөлд заасан үйлдлийг гүйцэтгэсний дараа аль нэг сонгон авсан хайрцганд $v+1$ ширхэг бөмбөр, харин бусад бүх хайрцганд тэнцүү v ширхэг бөмбөр орсон байхаар золицуулж болно, гэсэн үг юм. Иймд дээрх алхмыг төгсгөлөг удаа давтан гүйцэтгэж бүх хайрцгийг ижил тооны

бөмбөгтэй болгож болно. Одоо $(m, n) = d > 1$ байг. Анх хайрцгуудад байсан нийт бөмбөгний тоог $m+1$ байхаар авъя. Бодлогын нөхцөлд заасан үйлдлийг k удаа гүйцэтгэсний дараа нийт бөмбөгний тоо $m+1+kn$ болно. Гэтэл $-k$ -ийн ямарч утганд $m+1+kn$ нь m -д хуваагдахгүй тул хэзээ ч бүх хайрцгийг ижил тооны бөмбөгтэй болгож болохгүй.

17. -1 тоо харгалзсан цэгийн тоо яг 661 байхад "сайн" "цэг" олдono гэж харуулахад болно. $3k+2$ ширхэг цэгийн k ширхэг цэгт нь -1 -ийг харгалзуулахад "сайн цэг" олдono гэж индукцээр батлая. $k=1$ үед илэрхий. $k \leq n$ үед өгүүлбэр үнэн гэж үзээд $k=n+1$ тохиолдлыг авч үзье. -1 -рр тэмдэглэгдсэн цэгүүдийн аль нэг нь $+1$ -ээр тэмдэглэгдсэн хоёр цэгийн хооронд оршиж байвал өгүүлбэр үнэн байна. Учир нь энэ гурван цэгийг хасахад үлдэх $3n+2$ ширхэг цэгийн яг $n-9$ нь -1 харгалзах учир эдгээрийн хувьд индукцийн нөхцөл ёсоор "сайн" цэг" олдono. Энэ цэг нь анхны $3(n+1)+2$ цэгийн хувьд мөн "сайн цэг" байж чадах нь ойлгомжтой. Одоо -1 -ээр тэмдэглэгдсэн цэгүүдийн аль нь ч $+1$ тэмдэглэгдсэн хоёр цэгийн хооронд оршдоггүй байг. Энэ үед -1 -ээр тэмдэглэгдсэн эерэгцээ хоёр цэг олдono. Энэ хоёр нэг болон хоёр цэгээс эхлэн цагийн зүүний дагуу хамгийн ойр орших $+1$ зэр тэмдэглэгдсэн хоёр цэг, мөн цагийн зүүний эсрэг хамгийн ойр орших $+1$ -ээр тэмдэглэгдсэн хоёр цэгийг дарвал $3(n-1)+2$ ширхэг цэг үлдэх ба эдгээрийн яг $n-1$ -д нь -1 тоо харгалзсан байна. Индукцийн нөхцөл ёсоор энэхүү $3(n-1)+2$ ширхэг цэгийн хувьд "сайн цэг" болохыг ойлгоход төвөггүй.

18. $k = \angle ABCD$, $k' = \angle A'B'C'D'$, $\widehat{BAB'} = \widehat{DAD'} = \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ ба $\angle$ цэг k' квадрат дотор оршино гэж үзэхэд ерөнхий байдал алдагдахгүй / хойбогдох зургийг зурна уу. $E = \angle C \cap C'D'$, $H = \angle C \cap k'C'$. ба D' цэгийг дайруулан A -тай параллелиар татсан шулуун BC талыг G огтоолдог байг. Энэ үед k, k' квадратуудын ерөнхий хэсэг $ABED'$ дөрвөн өнцөгт байх ба түүнийг AE диагоналаар

хоёр гурвалжинд хуваах болно. AK' тал дээр $|AE'| = |D'E|$
 нөхцөл хангах E' цэгийг, AB тал дээр $|AG'| = |D'G|$
 нөхцөл хангах G' цэгийг тус тус тэмдэглэе. Тэгвэл $D'E'G$
 гурвалжныг $AE'G'$ гурвалжинд параллель зөөлтөөр буулгаж
 болно. Мөн AD' тал дээр C'', F цэгийг AD тал дээр

$$|AC''| = |HC'|, |AF| = |HE|$$

байхаар авбал $AC''F$

гурвалжныг $HC'E$ гурвалжинд параллель зөөлтөөр буулгасан
 болно. Цаашилбал $|E'B'| = |EC'| = |FC''|$ ба $|B'H| = |C''D'|$
 болох учир $D'C''F$ гурвалжныг $HC'E'$ гурвалжинд параллель
 зөөлтөөр буулгаж болно. Эндээс $HE' // D'F$ гэж гарна. D'
 цэгээс CD тал дээр перпендикуляр буулгаж суурийг нь
 I гээ. $|HI| = |D'I|$, $|E'K| = |FD|$ нөхцлүүдийг
 хангах J, K цэгүүдийг харгалзан HB, EG' хэрчимүүд дээр
 тэмдэглэвэл $FD'ID$ трапецийг $E'HK$ трапезэд парал-
 лель зөөлтөөр буулгаж болно. Одоо үлдэж байгаа $D'G'CI$,
 $KJBG'$ тэгш өнцөгтүүдийн талбай тэнцүү бөгөөд талууд
 нь параллель байна. Эдгээр тэгш өнцөгтийг параллель зөөлтөөр
 нэгийг нөгөөд нь буулгаж болох гурвалжнуудад хуваах нь
 хэцүү биш.

19. $y_i = \frac{x_i^2}{x_{i+1} \cdot x_{i+2}}, i = 1, 2, \dots, n$

гэе / Энд

$x_{n+i} = x_i$ гэж үзнэ. Тэгвэл $\prod_{i=1}^n y_i = 1$ тэнцэтгэл
 биелэх ба батлах тэнцэтгэл бишийг:

$$\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{1+y_i} \leq n-1 \quad \text{буюу} \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+y_i} \geq 1 \quad \text{хэлбэртэй бичиж}$$

болно. Иймд

$$\prod_{i=1}^n y_i = 1 \quad (y_i > 0) \quad \text{бол} \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+y_i} \geq 1$$

гэж батлахад хангалттай. Үүнийг математик индукцийн аргаар
 батлая.

$n=2$ үед $y_1 y_2 = 1$ байх ба $\frac{1}{1+y_1} + \frac{1}{1+y_2} =$
 $= \frac{2+y_1+y_2}{1+y_1 y_2 + y_1 y_2} = \frac{2+y_1+y_2}{2+y_1+y_2} = 1.$

болж тэнцэтгэл биш үнэн байна. $n=k$ үед тэнцэтгэл биш үнэн гэе. $n=k+1$ байг.

$y_k y_{k+1} = y_k'$ гэвэл $y_1 y_2 \dots y_{k-1} y_k' = 1$ учир
 индукцийн нөхцөл ёсоор:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{1+y_i} + \frac{1}{1+y_k'} \geq 1$$

буюу $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{1+y_i} + \frac{1}{1+y_k y_{k+1}} \geq 1$ учир

байна.
 $\frac{1}{1+y_k} + \frac{1}{1+y_{k+1}} > \frac{1}{1+y_k y_{k+1}}$

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{1+y_i} > \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{1+y_i} + \frac{1}{1+y_k y_{k+1}} \geq 1$$

болж батлах зүйл батлагдлаа.