

Улсын математикийн олимпиадыг
зохион байгуулах хороо

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН
XXVII ОЛИМПИАД

$e + \pi \in \mathbb{Q} ?$

Улаанбаатар хот,
1992 он

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАДЫГ
ЗӨХИЙН БАЙГУУЛАХ ХОРОО.

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН
XXII ОЛИМПИАД

/Улсын математикийн олимпиадад
бэлтгэгчдэд тусламь/

№ 14

Редактор дэн.Ц.ДАШДОРЖ

Улаанбаатар. 1992 он.

Ө Ш И Ө Х Ү Г

Улсын бэлэн олон улсын Математикийн Олимпиадад бэлтгэгчид, математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийн сурагчид, математикт дур сонирхолтой сурагч, эсүтэн, багш нарт зориулсан цувралын "Улсын математик-ийн XXII Олимпиад" нэртэй дугаарыг гаргав. Тусгаарын амлалтыг бэлтгэхэд УМЗБХ-аарны гишүүд идэвхтэй ажиллажээ.

Эг ниймн таларх аливaa савал, хүсэлт, зовмолтоснее УМЗБ-ийн алгебрийн тэнхимд ирүүлн байвал бид гүнээ талархах болно.

Редактор д.ц.Ц. ДАМДОРЖ

ГАРЧИГ

1. Н.Дашдорж	Удсан Математикийн ХАУ II Олимпиад	7
2. Н.Батхүү, Н.Бусандорж	УМО-27-ын XII ангийн III дарааны бодлогууд	9
3. Н.Цэрэнлүүрэн, Н.Дэлхий-Оо	УМО-27-ын XII ангийн сүүлчийн дарааны бодлогууд	9
4. Н.Хавсгалтөр, Н.Хадхүү	УМО-27-ын IX ангийн II дараа	11
5. А.Хавсгалтөр, Н.Хадхүү	УМО-27-ын IX ангийн III дараа	11
6. Н.Дашдорж, Б.Батцэнгэл	УМО-27-ын X ангийн II дараа	20
7. Н.Дашдорж, Б.Батцэнгэл	УМО-27-ын X ангийн III дараа	30
8. Г.Хүрэнбаатар	Удсан Математикийн багш нарын II Олимпиад	3
9. Б.Батцэнгэл	Багуулагч тамирчин	42
10. Н.Дашдорж, Н.Цэрэнламба	ОУМО-XXIII	40
11. Н.Батхүү, Н.Гэмхүүг	Багш нарын	50
12. Н.Батхүү	Гурвалжин талбай да нэрэмжийн мөрөг талбайн хүнээдэг шулуун	45

9286
1992.5.4
Бусандорж

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХҮҮН ОЛИМПИАД

УМОНЭ.-ын дарга Д/Э. Ц.ДАНДОРЖ

УЛСЫН математикийн ХҮҮН олимпиадын эцсийн даваа 5-р сарын 7-аас 14-нд ХУИС дээр болж өнгөрлөө. Анги тус бүрд 36 оноо бүхий 6 бодлогыг 2 өдөр дөрвөн дөрвөн цагаар бодон уралдаалд 11 ангийн 30, 8-р ангийн 32, 11-р ангийн 37 сурагчдаас Улаанбаатарын 1-р сургуулийн сурагч Н.Бат, Б.Уламбаяр, ХУИС-ийн математикийн гүнзгийрдсэн сургалттай 10-р ангийн сурагч Д.Амбаняр нар анги тус бүрийн 1991 оны улсын аварга математикч болж антан медаль хүртлээ.

Энэ жил математикийн багш нарын олимпиадад хот хоёдоос хамгарсан багш 34 оноо бүхий 4 хүнд бодлогыг 5 цагийн хугацаатай бодон уралдаалд Улаанбаатарын 1 сургуулийн багш Д.Нарангэрэл түрүүлж энэ оны улсын аварга боллоо. Дараах байруудад 16-р сургуулийн багш Д.Сойл-Эрдэнэ, Төв аймгийн Баян-Эхжүүл сумын дунд сургуулийн багш Б.Батбаатар нар шалгалт II байранд Хөвсгөлийн Лалгайдорж, 12-р сургуулийн багш Хамъян нар орлоо. 35 настай Хамъян багш энэ жилийн уралдагчдаас хамгийн ахмад нь байсан ч айргийн танд хурдан ирж математикч олноо баярлууллаа. Ун ангийн сурагчдаас П байранд Д.Хасбаатар /УБ сургууль/, Дэлгэрсүрэн /УБ 51-р сургууль/, Тогтох /Дархан/, Ш байранд Л.Отгонбаяр /УБ 51-р сургууль/, Ариунбат /УБ 48-р сургууль/, 3-р ангийн сурагчдаас П байранд Чулуунбаатар /УБ 31-р сургууль/, Баттөхөр /УБ 40-р байранд Эхнбаяр /ХУИС/, Батзориг /ХУИС/, Буяаг /Булган /УБ/, Х ангийн сурагчдаас П байранд Д.Танзориг /УБ 40-р сургууль/, Н.Батбаян /ХУИС/, Ч.Волд /Сэлэнгэ/, Ш байранд Энхбаяр /УБ 51-р сургууль/, Эрдэнэ /УБ 1-р сургууль/ нар орлоо. Аймга хотуудыг алаан ёсоор орж ойн цэцүүгийн авсан онооны гүйцэтгэл дундаар байр эзлүүлэхэд Улаанбаатар, Дархан, Сэлэнгэ, Удатовь, Булган, Сүхбаатар, Эрдэнэт, өвсгөл, Завхан, 1-р Ингууд ангийн 10 байранд шалгарлаа.

Хний гурван байранд шалгарсан Улаанбаатар, Дархан,

Сэлэнгэ аймаг, Увс, Говь-Алтайн мужийн хувиин амьжиргаа нь оруулах эрх байдлаартай. Түүнээс бусад ямарч тохиолдолд хувиин амьжиргааг оруулах явдлыг хатуу хориглох нь зүйтэй, гэж УИЗЭХ үзсэн тул алсын амьгуудыг явдал чирэгдэх бичиг үзэж ихээхэн ажил удам байгааг зөгсөөр нь зүйтэй мн.

Гуа сайхан бол математикийн шинэ сүнс нь мөн, Энэ хийлээс эхлэн Г.Зиховидын нэ эмжит уран бодолтын туегай шагналыг олгодог боллоо. Энэ эрхэн шагналыг 1901д захидахуар /Зуховид/, дэлгэрүүлэн нэр хүртлээ. Математикийн олимпиад нь ийг эрд түмний математикийн баяр болдог уламжлалыг дагуу багуудын тэмцэснийг зохион байгуулав. МУИС, математикийн хүрээлэн, сурагчид багууд эхий байганд шалгарлан.

Энэ жил 1902д болох Олон улсын математикийн 4-р олимпиадад оролдох багийг сонгон авах бэлтгэлд 10-р ангийн 6; 9-р ангийн 2 сурагчийг сонгон авч бэлтгэл, сонгон шалгаруулалтаа хийж эхлээд байна.

МУИС-ийн дэргэдэх математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай 9-р ангийн элсэлтийг 9-р ангийн сурагчдын эцсийн давааны оноог үндэс болгон хийсэн нь нэлээд оногчтой боллоо. Математикийн олимпиадын нээгч тэтгэгчээр монголын багш нарын холбоо, БМДН, МУ-ийн математикийн хүрээлэн, Эрдэнэт хотын 1-10 жилийн сургууль ажиллав. Томоохон хүрээг хамарсан олимпиадаа ахлыг явуулах бүх нөхцөл бололцоогоор дээд зэргээр хийгдсэн МУИС-ийн Ректоратад ийг математикийн өмнөөс тавархал илэрхийлж байна.

199.1.15.

УЛСЫН МАТЕМАТИКСЫН ХҮҮН ОЛИМПАДЫН
ҮН АНГИЙН ГҮРЭЙН ДАВААНЫ БОДЛОГУУД

Ц.Натхүү

Ц.Дувсандорж

А1. $a, b, q, p \neq 0$ байх 4 тоон хувьд

$$p+q=1, \quad \frac{p}{a} + \frac{q}{b} = \frac{1}{pa+qb} \text{ бол } a=b \text{ болохыг батал.}$$

✓ А2. Алтлаа гүдгэр олон өнцөгтийн хувьд уртуудын харьцаа нь $\Gamma_1:2\Gamma_2$ завсрын тоо байдаг 2 тал олдохыг батал.

✓ А3. Тэнцүү талт ABC гурвалжны дотор $AM=1$, $BN=\sqrt{3}$, $CM=2$ байх M цэгийг тэмдэглэв. BC талын урт, $\angle AMB$, $\angle BMC$ өнцгүүдийн хэмжээг ол.

Б1. $a+b+c+d=0$ бол $5(ab+bc+cd)+8(ac+ad+bd) \leq 0$ гэм батал.

✓ Б2. $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$

бүхэл тоонуудын хувьд

$$(a_e + a_k + a_n)/3, (b_e + b_k + b_n)/3, (c_e + c_k + c_n)/3$$

тоонууд нь бүхэл байх e, k, n дугаарууд олдохыг батал.

Б3. ABCD гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн хувьд $\angle BAC = 40^\circ$,

$$\angle BCA = 70^\circ, \angle BDC = 20^\circ, \angle BDA = 35^\circ$$

байдаг бол AC, BD диагоналуудын хоорондох өнцгийг ол.

Бодолтууд:

А1. 7-р ангийн математикийн хичээлийн үндсэн оёдвийн нэг олон гийгүүхтийн адилтгал хувиргалтын энэхүү бодлогыг ихэнхи сурагчид амжилттай бодсон юм.

$$\frac{bp+aq}{ab} = \frac{1}{pa+qb} \Leftrightarrow (pa+qb)(bp+aq) = ab$$

$$p^2ab + q^2ab + b^2pq + a^2pq = ab$$

$$p+q=1 \quad \text{анхаарвал:}$$

$$ab(1-2pq) + pq[(a-b)^2 + 2ab] = ab$$

$$pq(a-b)^2 = 0 \Rightarrow a=b$$

А2. Бодлогын бодолтыг сурагчдаас нэлээд нурвсан байдалтай хийсэнг тэмдэглэж, хялбар бодолтыг хийе.

Олон өнцөгтийн талуудыг эрэмбэлж бичье.

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n$$

Эсрэгээс нь $\frac{a_1}{a_2} > \frac{a_2}{a_3} > \dots > \frac{a_{n-1}}{a_n}$ харьцануудын аль нь ч $[1:2]$ завсарт байдаггүй гээ.

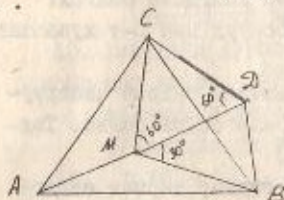
Тэгвэл: $a_1 > 2a_2 = a_2 + a_2 > a_2 + 2a_3 > a_2 + a_3 + 2a_4 >$

$$> \dots > (a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n) + a_1 \quad \text{суму}$$

$$a_1 > a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

байна. Иймд $1 \leq \frac{a_1}{a_{i+1}}$

Аз...



болж гүдгэр гэдэгт зорчигдох байх $\angle$ дугаар ямарч олноо.

С нэг дээр төвтэй 60° -ийн эргүүлэлтийг $R_C^{60^\circ}$ тэмдэглэе.

Тэгвэл $R_C^{60^\circ}(A) = B$ байх ба

$R_C^{60^\circ}(M) = D$ гээ. Тэгвэл

$$R_C^{60^\circ}(\triangle ACM) = \triangle BCD$$

байх учир $AM = BD = 1$, $CM = CD = 2$

гэдгээс $\triangle CMD$ гурвалжин тэнцүү талтай байна.

$\triangle BCD$ гурвалжин $BD=1$, $BC=\sqrt{3}$, $CD=2$ талуудын хувьд $MD^2 = BM^2 + BD^2$ тэнцэтгэл үнэн учир $\angle BDM = 90^\circ$, $\angle DBM = 30^\circ$, $\angle MDB = 60^\circ$ байна. Иймд $\angle AMC = \angle BDC = \angle BDM + \angle CDM = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

$$\angle BMC = \angle DMC + \angle BMD = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$$

$$\angle AMB = 360^\circ - (\angle AMC + \angle BMC) = 150^\circ$$

ба $\triangle BCM$ гурвалжин хувьд Пифагорын теорем ёсоор:

$$BC = \sqrt{BM^2 + CM^2} = \sqrt{7}$$

болно.

Б1. Бараг бүх сурагчид өөр өөрсдийн замаар уг тэнцэтгэл бишийг баталсан. Тэдгээрийн зөвхөн нэгийг доор сийргүүлэе.

$$3(a+b)^2 + 3(c+d)^2 + 3(b+c)^2 + 5a^2 + 5d^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 0$$

$$\text{учир } 3(ab+bc+cd) + 4(a^2+b^2+c^2+d^2) \geq 0$$

$$\text{буюу } 5(ab+bc+cd) - 8(ab+bc+cd) - 4(a^2+b^2+c^2+d^2) \leq 0$$

$$\text{болно. Эндээс } 5(ab+bc+cd) - 4(2(ab+bc+cd) + a^2+b^2+c^2+d^2) \leq 0$$

$$\text{ба } (a+b+c+d)^2 = 0 \quad \text{тул}$$

$$8(ac+ad+bd) = -4(2(ab+bc+cd))$$

$$\text{болж } 5(ab+bc+cd) + 8(ac+ad+bd) \leq 0$$

болно.

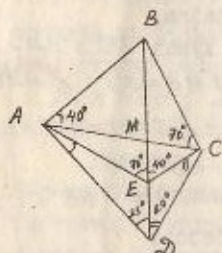
Б2. $a_1, a_2, \dots, a_{37}$ тоонууд дотроос Бирихлэйн зарчим ёсоор

$C_1, C_2, \dots, C_5$ аас нэгдөр нь
3-г хуваагддаг тоо хэмээн алдана

3.

3-т хуваахад ижил үлдэгдэл өгдөг тоонууд дор хаяж 13 олдоно. Тэдгээрийг $a_1, a_2, \dots, a_{13}$ гэе. Тэгвэл $b_1, b_2, \dots, b_{13}$ тоонуудад дээрхийн адил 3-т хуваахад ижил үлдэгдэл өгдөг. тоо дор хаяж 5 олдоно. Тэдгээрийг b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 гэе. Одоо C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 тоонуудаас 3-т хуваахад ижил үлдэгдэл өгдөг тоо хамгийн багадаа 3 олдоно. Тэдгээрийг C_k, C_e, C_n гэж тэмдэглэвэл, дээр хийгдсэн сонголт ёсоор $b_k, b_e, b_n; a_k, a_e, a_n$ тоонууд мөн 3-т хуваахад ижил үлдэгдэл өгдөг байна.

БЗ. Энэхүү бодлогыг багтсан өнцөг, нум хэвчийн үндсэн чанаруудын олон янзаар ашиглан хэд хэдэн аргаар бодож болно. Тэдгээрээс нэлээд дөт бодолтыг энд хийв.



ABCD гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн диагоналуудын огтлолцлын цэгийг M хөгөөр тэмдэглэе. ABC гурвалжныг багтаасан тойрог BD диагональтай E цэгээр огтлолцдог гэвэл багтсая өнцгийн чанар ёсоор

$$\angle AEB = \angle BSA = 70^\circ$$

$$\angle CEB = \angle BAC = 40^\circ$$

болох ба $\angle AEC > \angle ADC$

учир D нэг тойргийн гадна оршино.

$\angle AED = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$, $\angle CED = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$
учраас AED, DEC гурвалжнуудад $\angle DAE = 35^\circ$, $\angle DCE = 20^\circ$
болж эдгээр гурвалжнууд адил хажуут гурвалжин болно.
 $AE = ED = EC$ гэдгээс BD диагональ ABC өнцгийн биссектрис болно.
Иймд $\overline{AE} = 2 \angle ABE = 70^\circ$, $\overline{BC} = 2 \angle BAC$ гэдгээс
болно, $\angle BMC = \frac{1}{2} (\overline{AE} + \overline{BC}) = \frac{1}{2} (70^\circ + 80^\circ) = 75^\circ$

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХҮҮН ОЛИМПИАДЫН
ҮН АНГИЙН СҮҮЛЧИЙН ДАВААНЫ БОДЛОГУУД

В.Альясүрэн

Н.Дайвий-Од

✓ А1. Хавтгайд 59% цэгээс тогтох М олонлогийг дараах хоёр нөхцөлийг хангах байхаар байгуул. Үүнд:

а/ Уг олонлогийн аливаа хоёр дэгийн хоорондох зай гурваас хэтрэхгүй.

б/ Уг олонлогийн аливаа цэгийн хувьд түүнээс нэгээс хэтрэхгүй зайд орших цэг яг 1991 ширхэг олдоно.

А2. Хавтгайд дурын байрлалтай нэг тойрог түүний гадна А, В хоёр цэг өгчээ. $AM^2 + BM^2$ илэрхийлэл

а/Хамгийн бага утгаа авах

б/Хамгийн их утгаа авах тойргийн М цэгийг ол.

✓ А3. $n \cdot 17^n + 1$ тоо 9-д хуваагдах байх n-ийн бүх натурал утрыг ол.

✓ В1. Дурын 7 бүхэл тооноос нийлбэр нь 4-т хуваагдах 4 тоо олдохыг батал.

В2. $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, $a > 0$, $b > 0$ олон гишүүнт гурван бодит шийдтэй бол $P(1) + P(2) + P(3) \geq 99$ болохыг батал.

В3. ABC гурвалжинд багтсан тойрог АВ, ВС талыг харгалзан М, N цэгүүдэд шүргэнэ. Гурвалжинд багтсан тойргийн төвийг О; СО ба NM шулуунуудын огтлолцлын цэгийг К гэе.

$\angle AKC = 90^\circ$ гэж батал.

Бодолтууд.

А1 бодлогын бодолт:

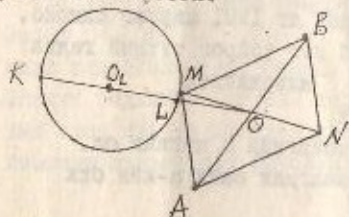
Нэгж талтай зөв гурвалжнуудын оройнууд дээр төвтэй, $\frac{1}{2}$ радиустай гурван тойрог байгуулъя. 59% ширхэг цэгүүдийг 1992, 1992, 1992-оор нь 3 хэсэгт хуваагаад байгуулсан тойргууд дотор дурын байдлаар байрлуулъя. Энэ байрлуулалт бодлогын нөхцөлийг хангах нь илт.

А2 бодлогын бодолт:

Тойрог дээр дурын M цэг аваад, уул цэгийг AB хэрчмийн дундаж цэг O -ийн хувьд тэгш хэмээр хувиргаад гарах цэгийг

N гээ. /1 зураг/ $AMBN$ нь параллелограмм учир $2 \cdot (AM^2 + BM^2) = AB^2 + MN^2$ болох ба $MN = 2 \cdot OM$ тул $AM^2 + BM^2 = \frac{1}{2} AB^2 + 2 \cdot OM^2$.

AB нь тогтмол гэдгийг анхаарвал $AM^2 + BM^2$ нь хамгийн их /хамгийн бага/ байхын тулд OM нь хамгийн их /хамгийн бага/ утгаа авах ёстой.



O цэгийг тойргийн төвтэй холбосон шулуун татхад түүний тойрогтой огтлолцсон цэгүүдийн хувьд OM нь хамгийн их /хамгийн бага/ утгаа авах нь илт. Иймд бодний эрх буй цэгүүд K, L цэгүүд болно.

Зураг 1.

А3 бодлогын бодолт:

$$n \cdot 17^n + 1 = n(18-1)^n + 1 \quad \text{гэх бичье.}$$

$$n(18-1)^n + 1 \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow n \cdot (-1)^n + 1 \equiv 0 \pmod{9}$$

а/ n нь тэгш тоо байг. Тэгвэл $n+1 \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow n = 9k-1$.

K нь сондгой үед n нь тэгш тоо байна. Иймд

$$k = 2\ell + 1, \quad n = 18\ell + 2, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

б/ n сондгой тоо байг. Тэгвэл $n-1 \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow n = 9s+1$.

S нь тэгш үед n нь сондгой тоо байна. Иймд

$$S = 2t, \quad n = 18t + 1, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Ийнхүү } n = 18t + 1, \quad n = 18t + 2, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

байх n -үүдийн хувьд $n \cdot 17^n + 1$ нь 9-д хуваагдана.

В1 бодлогын бодолт:

Ямар ч дурын гурван бүхэл тоо авахад Ларингийн зарчмаар тэгш сондгой нь яхил 2 тоо олдоно. Энэ хоёр тооны нийлбэр 2-т хуваагдана.

7 бүхэл тоонхоо аль нэг гурвыг авахад тэдгээрийн дотороо нийлбэр нь 2-т хуваагдах хоёр тоо олдох ба тэдгээрийг a_1, a_2 гээ.

Үлдсэн $7-3=4$ тооноос 2 тоо авч дээр үлдсэн нэг тоотой нэгтгэвэл энэ гурван тооноос нийлбэр нь 2-т хуваагдах хоёр тоо олдоно. Тэдгээрийг b_1, b_2 гэе. Үлдэх нэг тоо ба анхны 7 тооноос үлдэх $7-3-2=2$ тоог авч үзье. Эдгээр гурван тооноос нийлбэр нь 2-т хуваагдах хоёр тоо олдоно. Тэдгээрийг c_1, c_2 гэе. $\frac{a_1+a_2}{2} = a, \frac{b_1+b_2}{2} = b, \frac{c_1+c_2}{2} = c$ гэе.

Эдгээр нь бүхэл тоо байна. a, b, c тоонуудаас нийлбэр нь 2-т хуваагдах хоёр тоог сонгон авч болно. Тэдгээрийг үүсгэж буй 4 тооны нийлбэр 4-т хуваагдана. Бодлого бодогдов.

Б2. $P(x)$ олон гишүүнтийн бүх коэффициентүүд эерэг учраас уул олон гишүүнтийн нэг ч язгуур нь эерэг тоо байх болохгүй.

Өгөгдсөнөөр $P(x)$ олон гишүүнт гурван бодит язгууртай: Тэдгээрийг $-x_1, -x_2, -x_3$ гэе. Тэгвэл $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$ байна. Виетийн теоремоор

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= a \\x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 &= b \\x_1 x_2 x_3 &= 1\end{aligned}$$

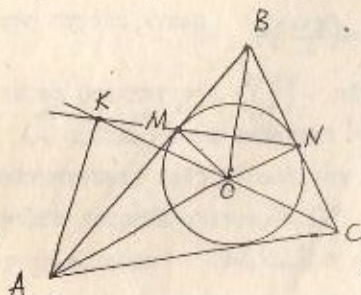
байна. Арифметик ба геометр дундгийн холбооны тухай теоремыг ашиглавал

$$a = x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} = 3$$

$$b = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 \geq 3 \sqrt[3]{x_1^2 x_2^2 x_3^2} = 3 \quad \text{болно.}$$

Иймээс $P(1) + P(2) + P(3) = 39 + 14a + 6b \geq 39 + 14 \cdot 3 + 6 \cdot 3 = 99$ болно.

Б3. Бодлогын бодолт: ABC гурвалжны A, B, C , орой дахь егцүүдийг



2-р зураг

харгалзан α, β, γ гэе. Эхлээд $\angle NKC$ -г олъя,

$$\angle OMB = \angle ONB = 90^\circ$$

1/2 зураг/ учир $OMBN$

дөрвөн егцгийг тойрогт багтаах болно. Иймээс

$$\angle MNB = \angle MOB \text{ ба } \angle MOB = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$$

$$\text{Иймд } \angle MNC = 180^\circ - \angle MOB = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$$

болно. $\angle MNC$ -г олбол:

$$\begin{aligned}\angle MNC &= 180^\circ - \frac{\beta}{2} - (90^\circ + \frac{\beta}{2}) = \\ &= 90^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{2}\end{aligned}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \text{ учир}$$

4.

$$\angle NKC = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{2} = \angle MAO$$

болно.

Иймд АКМО дөрвөн өнцөгтийг тойрогт багтаан болно. Нэг

ижил нумд тулсан өнцгүүд тэнцүү байх учир

$$\angle AKO = \angle AMO = 90^\circ \text{ болно.}$$



А.Хөшбөгтөр

Л.Хадхүү

I өдөр

8 A.1 $1989^n + n^{1989}$ тоо 5 -д хуваагдах чанартай, 20 оос үл хэтрэх бүх натурал тоо n -ийг ол.

A.2 Натурал тоо n бүрийн хувьд, түүнээс хамаарсан ба

$$(\sqrt{n}+1)^n = \sqrt{m} + \sqrt{m-1}$$

нөхцлийг хангах натурал тоо m олдохыг батал.

9 A.3 Тойргийн АВ, СД хоёр хөвчийн огтлолцлын цэгийг Р гэв. $\widehat{APC}$ өнцгийн биссектрисийн тойрогтой огтлолцох М цэгийн хувьд

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

тэнцэл биелэхийг үзүүл.

II өдөр

B.1 $\{1, 2, \dots, 50\}$ олонлогийн аль ч хоёр элементийнх нь хоорондох зай 9-өөс үл хэтрэх чанартай 3 элементэй бүх дэд олонлогийн тоог ол.

B.2 $0 < a < 1$ байх a тоо, $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ функц тус тус өгөгддээ.

Хэрэв $f(0) = 0, f(1) = 1$ ба $x \leq y$ байх $x, y \in [0, 1]$

тоо бүрийн хувьд $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = (1-a)f(x) + af(y)$

тэнцэл биелдэг бол $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ -ийг ол.

B.3 C оройдоо тэгш өнцөгтэй ABC гурвалжин C оройг нь дайрсан шулуунуунаар хоёр гурвалжинд хуваая. Эдгээрт багтсан тойргийн төвийг дайрсан шулуун BC, CA талуудыг харгалзан A_1, B_1 цэгт огтлолно. Хэрэв $BA_1 \cdot CB_1 = A_1C \cdot B_1A$ бол ABC гурвалжинг багтаасан ба түүнд багтсан тойргуудын радиусын харьцаа $1 + \sqrt{2}$ болохыг батал.

Лич : Бодлого бүр 6 оноотой.

БОДОЛТ

A.1. $n \not\equiv 0 \pmod{5}$ байх нь илт. Иймд Ферматийн бага теорем ёсоор

$$n^{1989} = n \cdot (n^4)^{497} \equiv n \cdot 1^{497} \pmod{5} \equiv n \pmod{5}$$

болно. Нөгөө талаас $1989 \equiv (-1)^n \pmod{5}$ учир

$$1989^n + n^{1989} \equiv (-1)^n + n \pmod{5}$$

гэж гарна. Эндээс n тэгш үед $n = 5(2k+1) - 1 = 10k+4$, n -сондгой үед

$$n = 5 \cdot 2m+1 = 10m+1 \quad \text{болно. } n \leq 20 \quad \text{гэдгийг тооцвол } k=0, k=1,$$

$$m=0, m=1$$

гэж гарна. Эндээс бодлогын шийд $\{1, 4, 11, 14\}$

олонлог гарах юм.

A.2 Бодолт I $(\sqrt{2}+1)^n = \sqrt{m} + \sqrt{m-1}$ байх m гэсэн натурал тоо болох гаргал.

$$(\sqrt{2}-1)^n = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^n} = \frac{1}{\sqrt{m} + \sqrt{m-1}} = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}$$

энэ хоёр тэнцлээс

$$\begin{aligned} 2\sqrt{m} &= (\sqrt{2}+1)^n + (\sqrt{2}-1)^n \Rightarrow m = \frac{1}{4} \left[(\sqrt{2}+1)^n + (\sqrt{2}-1)^n \right]^2 = \\ &= \frac{1}{4} \left[(\sqrt{2}+1)^{2n} + (\sqrt{2}-1)^{2n} + 2 \right] = \frac{1}{4} \left[2 + \sum_{i=0}^{2n} C_{2n}^i (\sqrt{2})^i + \sum_{i=0}^{2n} C_{2n}^i (-\sqrt{2})^i \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left(2 + 2 \sum_{i=0}^{2n} C_{2n}^{2i} 2^i \right) = 1 + \sum_{i=1}^{2n} C_{2n}^{2i} 2^{i-1} \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\text{Бодолт 2 } (1+\sqrt{2})^n = a + b\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + 2b^2}, (\sqrt{2}-1)^n = (-1)^n (a - b\sqrt{2})$$

гэж бичиж болох нь илт. Энд $a, b \in \mathbb{N}$. Эндээс

$$1 = (\sqrt{2}+1)^n (\sqrt{2}-1)^n = (a+b\sqrt{2}) \cdot (-1)^n (a-b\sqrt{2}) = (-1)^n (a^2 - 2b^2)$$

буюу $a^2 - 2b^2 = (-1)^n$ гэж батлах зүйл гарна.

$$\text{Бодолт 3 } (1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}, a_n, b_n \in \mathbb{N}, a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$$

байхыг математик индукцийн аргыг хэрэглэн баталъя.

$$n=1 \quad \text{үед } (1+\sqrt{2})^1 = 1+\sqrt{2}, \quad 1 \in \mathbb{N}, \quad 1-2 = (-1)^1$$

гэж үнэн зүйл гарч байна.

$$n=k \quad \text{үед } (1+\sqrt{2})^k = a_k + b_k\sqrt{2}, a_k, b_k \in \mathbb{N}, a_k^2 - 2b_k^2 = (-1)^k$$

гэж үзээд $(1+\sqrt{2})^{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1}\sqrt{2}, a_{k+1}, b_{k+1} \in \mathbb{N}, a_{k+1}^2 - 2b_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}$

гэж баталъя.

БОЛОЛТ : $\{1, 2, \dots, 10\}$ олонлогоос дурьдсан чанартай дэд олонлог сонгох боломжийн тоо C_{10}^3 болно. Иймд $\{k, k+1, \dots, k+9\}$

($2 \leq k \leq 49$) олонлогийн $k+9$ -ийг агуулсан, 3 элементтэй дэд олонлогийн тоо C_9^2 байна. Иймд дурьдсан чанартай дэд олонлогийн тоо нь $C_{10}^3 + 40 \cdot C_9^2 = 1560$ болно.

В.2 $f(\frac{1}{2}) = x$ гэв. Өгөгдсөн тэнцэлд $x=0$ гэж авбал $f(\frac{y}{2}) = a \cdot f(y)$

болох ба энэ тэнцлийг дахин дахин ашиглавал

$$\begin{aligned} 1 &= f(1) = \frac{1}{a} f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{a} \cdot f\left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{6}{2}}{2}\right) = \frac{1}{a} \left[(1-a) f\left(\frac{1}{2}\right) + a f\left(\frac{6}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{1-a}{a} \cdot x + \frac{1}{a} \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1-a}{a} \cdot x + \frac{1}{a^2} f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1-a}{a} \cdot x + \frac{1}{a^2} f\left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{2}}{2}\right) = \\ &= \frac{1-a}{a} \cdot x + \frac{1}{a^2} \left[(1-a) f\left(\frac{1}{2}\right) + a f\left(\frac{2}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{1-a}{a} \cdot x + \frac{1}{a^2} \left[(1-a)x + f\left(\frac{1}{2}\right) \right] = \frac{2-a^2}{a^2} \cdot x \end{aligned}$$

болно. Эндээс $x = \frac{a^2}{2-a^2}$ гэж гарна. Нөгөө талаас

$$x = f\left(\frac{1}{2}\right) = a f\left(\frac{2}{2}\right) = a^2 f\left(\frac{4}{2}\right) = a^2 f\left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{7}{2}}{2}\right) = a^2 \left[(1-a) f\left(\frac{1}{2}\right) + a f(1) \right] = a^2 \left[(1-a)x + a \right]$$

тэнцлээс x -ийг олбол $x = \frac{a^3}{1-a^2+a^3}$ болно. Эндээс $\frac{a^2}{2-a^2} = \frac{a^3}{1-a^2+a^3}$ тэгшитгэл гарах ба энд $0 < a < 1$ гэдгийг тооцвол

$a=0,5$ гэж гарна. Иймд

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = x = \frac{a^2}{2-a^2} = \frac{1}{2}$$

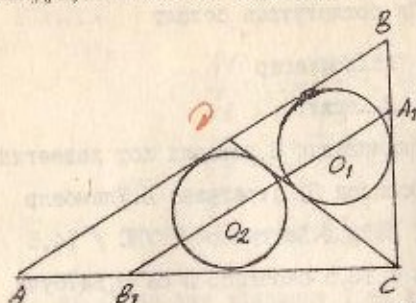
В.3 $z = \frac{a+b-c}{2}$, $R = \frac{c}{2}$ томъёонуудыг ашиглавал

$$\frac{R}{z} = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{c}{a+b-c} = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow (2 + \sqrt{2})c = (1 + \sqrt{2})(a+b)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot c = a+b \Leftrightarrow 2c^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow a = b.$$

болно. Өөрөөр хэлбэл: Идний батлах зүйл өгөгдсөн гурвалжныг эвчл

хажуут, тэгш өнцөгт гурвалжин гэж батлахтай ижил болно.



Нөгөө талаас

$$BA_1 \cdot CB_1 = A_1C \cdot B_1A \Leftrightarrow$$

$$(BC - A_1C)CB_1 = A_1C(AC - CB_1)$$

$$\Leftrightarrow BC \cdot CB_1 = A_1C \cdot AC \Leftrightarrow$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{A_1C}{CB_1} \Leftrightarrow A_1B_1 \parallel AB$$

Өөрөөр хэлбэл: Өгсөн зүйл нь ACD, BCD гурвалжнуудад багтсан тойргуудын радиус тэнгүү гэдэгтэй ижил юм.

Гэтэл ямар ч ABC гурвалжин хувьд ACD, CBD гурвалжнуудад багтсан тойргуудын радиусууд тэнгүү байхээр CD шулуун татаж болох учир өгсөн зүйлээс батлах зүйл гарах нь албагүй юм. Иймд бодлогын томъёолол буруу болжээ.

Зөвхөн адил хажуут тэгш өнцөгт гурвалжны хувьд биелэх юм.

Улсын математикийн 27 -р олимпиадын
III давааны IX ангийн бодлогуудын бодолт

А.Хамбаатар

Л.Хадхүү

Улсын математикийн ХҮП олимпиадын III даваанд хот хөдөөгийн сургуулийн IX ангиас шалгарч оролцсон 31 сурагчаас Б.Уламбаяр / I сургууль / 15.5 оноогоор I байр, Л.Баттөмөр / МУИС / 14,5 О.Чулуунбаатар / 31 -р сургууль / 13,5 оноогоор II байр, Батбуян / Нархан / 12, В.Батзориг / I сургууль / 12, Д.Энхбаяр / МУИС / 11.5 оноогоор тус тус III байр эзэллээ.

Хоёр өдрийн бодлогоос нийт 36 оноо авах боломжтой байсныг бодвол нийт оролцогчдын мэдлэгээ хэрэглэх чадварын талаар хийх дүгнэлт нэг л янз байх буйзаа.

Эдгээр сурагчдын бодсон зургын бодлогыг бодолттой нь хамт доор хавсаргав.

I өдөр

A.1 А.Хамбаатар / МУИС /

A, B, C оройнуудыг нь $AB, BC, CA, A_1, B_1, C_1$ гурвалжнууд тэнцүү талбайтай байхаар ABC гурвалжны BC, CA, AB талууд дээр авч болох бүх A_1, B_1, C_1 гурвалжны дотроос

а/ хамгийн бага талбайтайг нь ол.

б/ Энэ гурвалжны талуудын квадратын нийлбэр мөн хамгийн бага байдгийг батал.

A.2 Ц.Батмөнх МУИС, оюутан /

$\{a_n\}, \{b_n\}$ гэсэн зэрэг тоон дарааллууд ба $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($p, q > 1$)

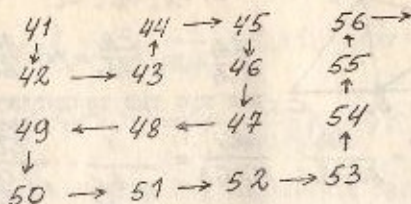
байх p, q тоонууд өгөгджээ. Хэрэв

$$\frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k} \leq 1 \text{ бол } \sum_{k=1}^n a_k^p + \sum_{k=1}^n b_k^q \geq \frac{4n}{p}$$

тэнцэтгэлбэлхийг батал.

A.3 41 эсвэл багагүй натурал тоонуудыг дараах байдлаар квадрат хэлбэрээр бичье. Үүнд

/ Алтанцог /
ЦУА.ЭМД



а/ Хэрэв энэ үйлдлийг 1991 хүртэл үргэлжлүүлбэл диагональ дээр эсвэл 4I -д хуваагдах, эсвэл анхны тоо багтрахыг үзүүл

б/ Хэрэв энэ үйлдлийг төгсгөлгүй үргэлжлүүлбэл диагональ дээр 4I -д хуваагдах тоо ч, анхны тоо ч төгсгөлгүй олон олдохыг батал.

II өдөр

В.1 / Дайвий -Од БУИС охуулан / $ABCD$ тэгш өнцөгтийн AB талны E цэг $AE:EB=m:n$ харьцаагаар хуваана. AED гурвалжны багтаасан тойрог AC диагоналийг F цэгт огтоолдог ба $\angle ABD=\alpha$ бол $AF:FC$ харьцааг ол.

В.2 /ЦХүрал Очир МУИС охуулан / $y_1=1,$

$y_n = \frac{4n-2}{n+1} \cdot y_{n-1}$ дарааллын гишүүд бүхэл тоо байхыг батал

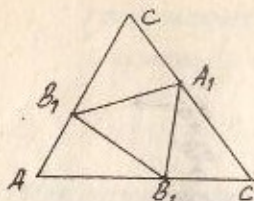
В.3 / Т.Батзүл МУИС Охуулан /

$x^4+y^4-z^4=1991^4$ тэгшитгэлийн шийд $x,y,z \in \mathbb{N}$ бол x,y,z эсвэл $|x-z|+|y-z|$ нь 5 -д хуваагдахгүй гэж батал.

Бүх бодлого 6 оноотой

Бодолт

А.1 Энэ бодлогыг бүрэн бодсон сурагч багшгүй. О.Чуллуунбаатар / ЗГ -р сургууль / а/ хэсгийг товчхон бодсон боловч тэр арга нь б/ хэсэгтээ тохирохгүй байлаа. Иймд зохиогчийн бодолтыг тохилуулья.



$ABC, AC_1B_1, BA_1C_1, CB_1A_1$
гурвалжингуудын талбайг харгалзан
 S, S_A, S_B, S_C ба

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \lambda, \frac{CB_1}{AB_1} = \mu, \frac{AC_1}{BC_1} = \nu$$

гэх тус тус тэмдэглээ.

$$\frac{S_A}{S} = \frac{AB_1 \cdot AC_1}{AC \cdot AB} = \frac{AB_1}{AB_1 + B_1C} \cdot \frac{AC_1}{AC_1 + C_1B} = \frac{1}{1 + \frac{B_1C}{AB_1}} \cdot \frac{\frac{AC_1}{C_1B}}{1 + \frac{C_1B}{C_1A}}$$

тэнцлээс $S_A = \frac{1}{1+\mu} \cdot \frac{\nu}{1+\nu} \cdot S$ гэж гарна. Үүнтэй яг ижилээр

$$S_B = \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\lambda}{1+\lambda} \cdot S, S_C = \frac{1}{1+\lambda} \cdot \frac{\mu}{1+\mu} \cdot S$$

болно. Өгсөн $S_A = S_B = S_C$ нөхцлийг тооцвол

$$\frac{\lambda}{1+\nu} = \frac{\mu}{1+\mu}, \frac{\mu}{1+\lambda} = \frac{\nu}{1+\nu}, \frac{\nu}{1+\mu} = \frac{\lambda}{1+\lambda}$$

систем үүсэх ба үүний эхний хоёр тэгшитгэлээс $\lambda = \mu$ олъ, хооронд нь тэнцүүлбэл:

$$\lambda = \frac{\mu + \mu\nu}{1+\mu} = \frac{\mu + \mu\nu - \nu}{\nu} \Leftrightarrow (\nu - \mu)(\mu\nu + \mu + 1) = 0$$

болно. $\mu > 0, \nu > 0$ учир $\nu = \mu$ үлмээр $\lambda = \mu = \nu$ гэж гарна.

а/ Дээр хийсэн зүйлээс

$$S_A = S_B = S_C = \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} \cdot S$$

буюу

$$S_{A_1B_1C_1} = S - 3S_A = \left(1 - \frac{3\lambda}{(1+\lambda)^2}\right) \cdot S = \left(1 - \frac{3}{(\sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}})^2}\right) \cdot S$$

байна. $\sqrt{\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1$ учир $\sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ нийлбэр $\sqrt{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \Leftrightarrow \lambda = 1$

үед л хамгийн бага үтгэтэй байна. Өөрөөр хэлбэл $\lambda = 1$ үед

$S_{A_1B_1C_1}$ талбай хамгийн бага үтгэтэй (төр нь $\frac{S}{4}$ байна)

байх болов.

Медиануудын суурь дээр оройтой гурвалжин дурьдсан чанартай сайдаг ажээ.

б/ AC_1B_1 гурвалжны хувьд $AC_1 = \frac{\lambda c}{1+\lambda}, AB_1 = \frac{b}{1+\lambda}$ учир

$$\begin{aligned} B_1C_1^2 &= \left(\frac{\lambda c}{1+\lambda}\right)^2 + \left(\frac{b}{1+\lambda}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\lambda c}{1+\lambda} \cdot \frac{b}{1+\lambda} \cdot \frac{\theta^2 c^2 a^2}{2bc} \\ &= \frac{1}{(1+\lambda)^2} \cdot (\lambda^2 a^2 + (1-\lambda)\theta^2 + (\lambda^2 - \lambda)c^2) \end{aligned}$$

болно. Энэ зөрчмөөр

$$C_1A_1^2 = \frac{1}{(1+\lambda)^2} (\lambda\theta^2 + (1-\lambda)c^2 + (\lambda^2 - \lambda)a^2), A_1B_1^2 = \frac{1}{(1+\lambda)^2} (\lambda c^2 + (1-\lambda)a^2 + (\lambda^2 - \lambda)\theta^2)$$

гэх гарна. Иймд

$$\begin{aligned}\sum &= B_1 C_1^2 + C_1 A_1^2 + A_1 B_1^2 = \frac{1}{(1+\lambda)^2} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) (\lambda + 1 - \lambda + \lambda^2 \lambda) = \\ &= \frac{(1+\lambda)^2 - 3\lambda}{(1+\lambda)^2} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = \left(1 - \frac{3\lambda}{(1+\lambda)^2}\right) (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\end{aligned}$$

өмнө нотолсноор $\sum$ нийлбэр $\lambda=1$ үед хамгийн бага $\sum = \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$ утгаа авна.

А.2 Энэ бодлогыг мөн л гани ч сурагч бодож чадсангүй! У.Бадрал / Хөвсгөл / Сундуй / Булган нар нилээд дөхүүлсэн байсан.

Ингийн тэнцэтгэлийнхийг хэрэглэж, гармоник дунджаас геометр дундаж нь их байдгийг тооцвол

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{k=1}^n a_k^p}{p} + \frac{\sum_{k=1}^n b_k^q}{q} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k^p}{p} + \frac{b_k^q}{q} \right) \geq \sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{\frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k}} \right)^2 \geq \sum_{k=1}^n 4 = 4n.\end{aligned}$$

гэх батлах зүйл гарч байна. Одоо тэнцэл хэдийд биелэх вэ? гэдэг асуултанд харуулъя. Геометр дундаж, гармоник дундажууд тэнцэлдээ хүрэхийн тулд $a_k = b_k$ байх ёстой. Мөн сүүлчийн тэнцэлбнээс $\frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k} = 2$ гэх гарна. Эдгээрээс $a_k = b_k = 2$ болно. Ингийн тэнцэтгэл бий тэнцэлдээ хүрэхийн тулд $a_k^p = b_k^q$ байх ёстой. Эндээс $2^p = 2^q$ буюу $p=q$, иймд $p=q=2$ болно. Ийнхүү зөвхөн $p=q=2$, $a_k = b_k = 2$ ($k=1, 2, \dots$)

үед л бидний баталсан тэнцэтгэл бий тэнцэлдээ хүрнэ.

А.3. Энэ бодлогыг бодож чадсан сурагч гарсангүй түүгээр ч би барам бодохыг оролдсон сурагч ч олон байлаа.

Диагоналийн дагуу байрлах тоонуудыг $a_0, a_1, a_2, \dots$

гэх тэмдэглэвэл

$$a_0 = 41, a_n = a_{n-1} + (n-1) + (n+1) = a_{n-1} + 2n$$

болно. Иймд

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = 41 \\ a_1 = a_0 + 2 \cdot 1 \\ + a_2 = a_1 + 2 \cdot 2 \\ \dots \dots \dots \\ a_n = a_{n-1} + 2 \cdot n \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_n = 41 + 2(1+2+\dots+n) = \\ = 41 + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \\ a_n = n^2 + n + 41 \end{array}$$

а/ Олон улсын математикийн XXIII олимпиадад $n \geq 2$ байх бүхэл

тоо. Хэрэв $0 \leq k \leq \sqrt{n}$ байх k бүхэл тоо бүрийн хувьд $k^2 + k + n$ анхны тоонууд бол $0 \leq k \leq n-2$ байх дүрэн k бүхэл тооны хувьд $k^2 + k + n$ тоонууд анхны тоо байхыг батал. (Улсын математикийн XXIII олимпиад "1987 он номын 37, 38 -р хуудасд бодолт нь бий.)

гэсэн бодлого өгч байсныг бид мэднэ.

$$0 \leq n \leq \sqrt{41} \text{ буюу } 0 \leq n \leq 3 \text{ байх } n\text{-ийн } n^2 + n + 41$$

илэрхийлэл 41, 43, 47, 53 гэсэн анхны тоон утга авч буй учир өмнөх

бодлогоёсоор $0 \leq n \leq 39$ байх n бүрийн хувьд $n^2 + n + 41$

илэрхийлэл анхны тоон утга авах нь гарна. Нөгөө талаас $n=40, n=41$

үед $40^2 + 40 + 41 = 41^2, 41^2 + 41 + 41 = 41 \cdot 43$ гэсэн 41-д хуваагдах

тоонууд, $n=42, n=43$ үед 1847, 1973 гэсэн анхны тоонууд гарч байна.

$6/n=41k$ хэлбэрийн утга бүрд $n^2 + n + 41$ тоо 41-д хуваагдах нь

илт. Өөрөөр хэлбэл диагоналийн дагуу 41-д хуваагдах төгсгөлгүй

олон тоо байрлана. Харин диагоналийн дагуу төгсгөлгүй олон анхны

тоо байх уу? үгүй юу? гэдэг асууламд дэлхийн математикчид одоо

хүртэл хариу өгч чадаагүй байгаа юм. Сурагч та бүхэн энэ асуул-

танд хариу өгвөл энэ нь математикийн шинжлэх ухаанд та бүхний

оруулах нэг том хувь нэмэр болно.

В.2 Энэ бодлогыг сурагч Уламбаяр, Баттөмөр нэр бараг болсон байсан. Энэ 2 сурагч

$$y_n = \frac{4n-2}{n+1} \cdot y_{n-1} = \frac{4n-2}{n+1} \cdot \frac{4n-6}{n} \cdot y_{n-2} = \dots =$$

$$= \frac{(4n-2)(4n-6)\dots 2}{(n+1) \cdot n \cdot \dots \cdot 2} = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!}$$

$$(2n)! = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}, \quad (n+1)! = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$$

$$n! = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \dots p_k^{\gamma_k}$$

ГЭЖ бичээд

$$\alpha_i = \left[\frac{2n}{p_i} \right] + \left[\frac{2n}{p_i^2} \right] + \dots + \left[\frac{2n}{p_i^s} \right] + \dots$$

$$\beta_i = \left[\frac{n+1}{p_i} \right] + \left[\frac{n+1}{p_i^2} \right] + \dots + \left[\frac{n+1}{p_i^s} \right] + \dots$$

$$\gamma_i = \left[\frac{n}{p_i} \right] + \left[\frac{n}{p_i^2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{p_i^s} \right] + \dots$$

$$(i = 1, 2, \dots, k)$$

томъёог ашиглан батлах зүйлээ

$$\left[\frac{2n}{p_i^s} \right] \geq \left[\frac{n+1}{p_i^s} \right] + \left[\frac{n}{p_i^s} \right]$$

тэнцэтгэлдээ батлах асуудалд шилжүүлэн түүнийгээ батлах оролдлогыг хийж, зарим нэг тохиолдолд асуудлыг шийдсэн байлаа.

Сурагч Д.Энхбаяр / МУИС /

$$y_n = \frac{1}{n+1} \cdot C_{2n}^n \quad \text{томъёог олж, үүмээр түүнийг ашиглан}$$

дарааллын гишүүд бүхэл болохыг батлах оролдлогууд хийсэн юм.

$$\frac{1}{n+1} C_{2n}^n = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \cdot C_{2n}^n = C_{2n}^n - \frac{n}{n+1} \cdot C_{2n}^n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n+1}$$

томъёоноос батлах зүйл гарна.

В.3 Сурагч Г.Энхбаяр энэ бодлогыг бүрэн бодлоо. Харьсангуйгаар хөнгөхөн бодлого байсан боловч нээн сурагч бодсон байгаад багш бид анхаарлаа хандуулах хэрэгтэй юм.

Сурагч Н.Ганнибалын / Сүхбаатар / бодолтыг бага зэрэг өөрчлөн үзүүлэв.

Фермагийн бага теорем ёсоор $(a, 5) = 1$ үед $a^Y \equiv 1 \pmod{5}$,
 $(a, 5) = 5$ үед $a^Y \equiv 0 \pmod{5}$ байна. Мөн $1991 \equiv 1 \pmod{5}$
 учир $X^Y \cdot Y^Z \cdot Z^Y = 1991^Y$ тэнцэл зөвхөн а) $X^Y \equiv 1 \pmod{5}$, $Y^Z \equiv 0 \pmod{5}$
 $Z^Y \equiv 0 \pmod{5}$ ($X \equiv 0 \pmod{5}$, $Y \equiv 1 \pmod{5}$, $Z \equiv 0 \pmod{5}$)
 үед дээрхтэй яг лжил)

б) $X^Y \equiv 1 \pmod{5}$, $Y^Z \equiv 1 \pmod{5}$, $Z^Y \equiv 1 \pmod{5}$
 тохиолдлуудад л биелэх юм.

а/ тохиолдолд $1 \cdot X \cdot Z / + 1 \cdot Y \cdot Z / 700$ 5 -д үл
 хуваагдана.

б/ тохиолдолд $X \cdot Y \cdot Z$ нь 5 -д үл хуваагдана.

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН 17-Р ОЛИМПИАДЫН
10-р АЛТУЙН П ДАВХААН БОДИУУЛ

И.Дашдорж, Б.Батцэцэгэл

I өдөр

А1. Тойргийн төв O дээр дэнлүү байна. C нь тойргийг A цэгт бүртгэсэн шулуун байг. Цэгээс 20 см/сек хурдтай цэг тойргоор хөдөлж эхлэв. Цэг тойргийг $\frac{1}{8}$ -ийг туулахад ягшид түүний шулуун дээрх суурийн хурд ямар байх вэ?

А2. $SABC$ гурвалжин пирамидэд бүх ирмэгүүд нь тэнцүү ба $SM = MA$ байхаар SA ирмэг дээр M цэгийг, $3 \cdot SN = SB$ байхаар SB ирмэг дээр N цэгийг тус тус авав. Суурийн ABC гурвалжны AB модонтой параллель хавтгайг M, N цэгүүдийг дайруулан татахад үүсэх гурвалжин пирамидийн эзэлхүүнийг өрсөн пирамидын эзэлхүүнд харьцуулсан харьцааг ол!

А3. $1 < k \in \mathbb{N}$ тоо бүрийн хувьд

а/ $k^2 - n$ бага

б/ яравтын оичлэг нь 4-өөс ихгүй ялгавартай цифр тугуудтай, k -д хуваагдах ямар нэг тоо k -ийн давтлт / олдолыг батал.

II өдөр

В1. $\angle$ нь $\triangle ABC$ -ийн C оройг дайрах (AB) -тэй параллель шулуун ба A оройн дотоод өнцгийн биссектрис нь BC талыг D цэгт, $\angle$ шулуун E цэгт огтлодог ба B оройн дотоод өнцгийн биссектрис нь AC талыг F цэгт, $\angle$ -ийг G цэгт огтлодог байг. Хэрэв $BF = DE$ бол $AC = BC$ гэж батал!

В2. $ab + bc + cd + da = 1$ ба $a, b, c, d > 0$ бол

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{a+c+d} + \frac{c^3}{a+b+d} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}$$

болохыг батал.

до. ИР 1000 нэгээр хөгжсөн олон дээс дараалсан нату-
рал тоонуудыг шилжсэрт тавигдахын хамт мөн дээс дараалсан
1000 тооны шилжсэрт ч тавигддаг натуураа тоо орох уу.

Бодлогуудын бодолт

1. Хурд нь хугацаанаас хамаарсан эвэрхэн уламжлал
болохыг ажиглан бодлогыг бодъя. t (сек) хугацаа өнгөрөхөд
цэг В -д ирэн ба түүний шулуун дээрх сүүдэр нь С
гэс. Энд $|AC| = s(t)$ -г олох ёстой.

$$\angle OC = \varphi \quad \text{гэн}$$

тэмдэглэвэл

$$\varphi = \frac{\widehat{AB}}{R} = \frac{20t}{R} \quad \text{км.Энд} \quad R = 10A1$$

$$\text{км.} \quad |AC| = R \cdot \tan \varphi = R \cdot \tan \left(\frac{20t}{R} \right)$$

мөн бидний хурдыг нь олох аргын

$$t_0 = \frac{\varphi_0 \cdot R}{20} = \frac{\pi R}{80} \quad \text{км.Эндээс}$$

олох ёстой хурд машин $s'(t_0) =$

$$= \left(R \cdot \tan \frac{20t}{R} \right)' \Big|_{t=t_0} = \frac{20}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \right)} = 40 \text{ км/сек}$$

км.

А2. Эхлээд манай хавтгайн гуравдахь крест SC -г
огтлох цэгийг олъё.

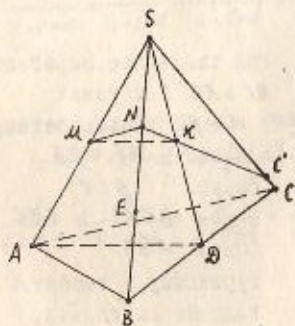
Тэр цэгийг C' гэн тэмдэглэв.

М цэгээс (AB) -той параллель
шулуун татвал түүний SBC
талыг огтлох цэг K нь манай
хавтгайд харьяалагдана. Иймд

$$C' = (NK) \cap (SC) \quad \text{км.} \quad (MK) \text{ нь}$$

(AB) -той параллель учир K
цэг SB -ийн дундах цэг км.

Эндээс E нь NB -ийн
дундах цэг бол $(NK) \cap (DE)$
гэн гэгч байна. Мөн DE нь NBC
гурвалжны дундах шурун туй



(BE) || (NC), (NC) || (AK) ОУУ $C' = C$ байх нь ОО.

ТОО ЭЗЭХЭЙНЭЭНХИЙН ХАРЬЦААР Ө.О.ОД ХАА АМАНДЫН ТЭР НЬ MNS, ABS ГУРВАЛЖУУДИЙН ТӨЛӨӨНИ ХАРЬЦАА $\frac{1}{6}$ -ЭЙН ТЭНЦҮҮ СОЛНО. ХААРАЛД ХАВАРЭДЭННЭЭН ӨӨДӨӨДӨГӨН ХААРАЛД ОЙГОХ ОУА ИРЭГҮҮД ТЭНЦҮҮ ГЭХЭЭР ХӨМӨӨН НЬ ХӨҮҮ, ХААРАЛЖАГЧУЙН ХӨӨӨӨН ОХИОХАР ХАА.

НЭ. ХЭРЭВ K НЬ 4-ӨӨӨ БАГА ОРОЛТОЙ ТОО СОЛ ЭВЭ ГҮМ ОЙХГЫЛЭВЭН, ОЮУХ ӨСӨЙН ТӨӨГӨӨРӨӨ K -Г ХАВАРЭН ХАА. ИЙНД ЦАХИЛ ОД $K \geq 10^4$ ГЭН ГЭВЭ. K' НЬ 5 ОРОЛТОЙ ТОО БУРУ

$$10^5 \leq K' < 10^{5+1} \quad \text{ОЮУХ. ТӨРӨВӨН } S \geq 16 \text{ ХА.}$$

K^4 -ЭВЭ БАГА 0,1 ТӨВӨН ХӨӨР ЦИФРЭЭР ОЙХГЫДАХ ТӨӨНҮҮДНЭ ТОО НЬ ХӨР ХААНА 2^5 ОЙХНА. ИЙНД НЬ ТЭДГЭЭРТ 5-ЭВЭ БАГА ОРОЛТОЙ 0,1 ЦИФРЭЭР ОЙХГЫДАХ ОУА ТОО ОРОНО.

$$K^4 < 10^{5+1} < 16^{\frac{5+1}{5} \cdot 5} < 16^5 \quad \text{ТУЛ ОНД } 10^6 < 16^5 \text{ БА } S > 5$$

СОЛХИЙГ ХАВГЫЛЭВЭН $K < 2^5$. ИЙНД ДИРИЛЭХИЙН ЗАРЧИНА ӨСӨӨР БИДНИЙ СОЛХИРЛОЖ ОУИ K^4 -ЭВЭ БАГА 0,1 ГЭС НЬ ХӨӨРӨН ЦИФРЭЭР ОЙХГЫДАХ ТӨӨНҮҮДНЭ ХӨҮД ЯЛГАВАРААР НЬ K -Д ХУВААГДАХ ХӨӨР ТОО ЭЗЭВЭН ОХИОХО. ТЭР ЯЛГАВАР ИДЭЭХ K^4 -ЭВЭ БАГА ӨӨГӨӨД ОРОЛТЫН ОЙХГЫГЭВЭ $0,1, 8, 9$ ГЭСЭН ДӨРВӨН ЦИФРИЙГ ХААГУУЛАХ ТУЛ БИДНИЙ ОЮУХ ӨСӨЙН ТОО МӨН ОЙХНА.

В1.

$$\angle \hat{A}C = 2\alpha, \angle \hat{B}C = 2\beta$$

ГЭЖ ТЭНДЭРЛЭВЭН. БОРЫНГЭЭС $BC > AC$ ГЭН ГЭВЭЛ

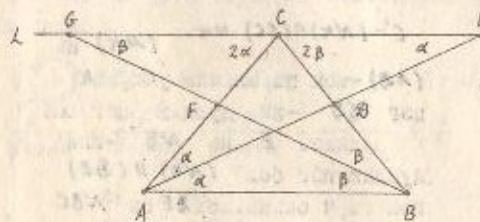
$\alpha > \beta$ СОЛХА ӨӨГӨӨД ЭНДНЭЭ $AE < BG$

ОЮУНО. GFC

СОЛХОН BFA ; EBC

СОЛХОН AGB

ГУРВАЛЖУУД ТӨСӨВӨТӨН, ГӨДӨНИЙГ ХААГЫЛЭВЭН, / ХӨӨ ОЙХСӨӨХӨРӨСӨНИЙН ТӨӨРӨМӨН Г ХААГЫЛЭВЭН /.



$$GF = \frac{BG \cdot CF}{AC} = \frac{BG \cdot CF}{CF + FA} = \frac{BG}{1 + \frac{FA}{CF}} = \frac{BG}{1 + \frac{AB}{BC}} = \frac{AE}{1 + \frac{AB}{AC}} = \frac{AE \cdot BC}{BC + AC} = BE$$

Омж өгсөн нөхцөл зөрчсөөд юм. Түүний эсрээр $BC < AC$

ба $GF < BE$

Омж өгсөн нөхцөл зөрчил үүснэ

Эндээс

$$BC = AC$$

ям.

■

Омж. Бодлогын Чебышевийн тэнцэл ош түүн хэрэг дэг,
хэрвээ $a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$, $b_1 \geq \dots \geq b_n \geq 0$ ош

$$\frac{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}{n} \geq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \dots + b_n}{n} \quad \text{тэгш тэнцэл бишлэг}$$

эсвэл хамттай өгсөн нөхцөлөөс

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 =$$

$$= \frac{1}{2} ((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2) + ab + bc + cd + da \geq 1$$

Омж. Одоо энэ нөхцөл нь a, b, c, d -ийн хувьд бишлэг
тул $a \geq b \geq c \geq d$ гэж үзэж болно. Тэгвэл

$$a^3 \geq b^3 \geq c^3 \geq d^3 \quad \text{ба} \quad \frac{1}{b+c+d} \geq \frac{1}{a+c+d} \geq \frac{1}{a+b+d} \geq \frac{1}{a+b+c} \quad \text{Огөөд}$$

Чебышевийн тэнцэл ош ёсоор

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{a+c+d} + \frac{c^3}{a+b+d} + \frac{d^3}{a+b+c} &\geq \\ &\geq \frac{1}{4} (a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \left(\frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+b+c} \right) \end{aligned}$$

Гармоник дундаж нь арифметик дундажнаас бага бишдэг тул

$$\frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+b+c} \geq \frac{16}{3(a+b+c+d)}$$

$$a^2 \geq b^2 \geq c^2 \geq d^2 \quad \text{ба} \quad a \geq b \geq c \geq d$$

тул Чебышевийн тэнцэл ош ёсоор

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq \frac{1}{4} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) (a + b + c + d) \quad \text{ям. Нийд}$$

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{a+c+d} + \frac{c^3}{a+b+d} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

өшөө $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 1$ болохыг баталсан тул бидний
батлах ёстой тэнцэл бий батлагдлаа.

33. m гэсэн тоо нь n ширхэг дээс дарагдсан
натурал тоонуудын нийлбэрт тавигддаг болов. n -тэртэй
сондгой тоолондод байгаа зүйц үзвэ.

У/ n тэртэй тоо болов. $n = 2r$ тоо. (Эс дарагдсан
 n ширхэг тоог $a - (r-1), a - (r-2), \dots, a, \dots, a + (r-1), a + r$
гэж үзвэл $m = n \cdot a + r$ болно. Мөн $a - (r-1) > 0$
буюу $a \geq r$ мн.

У/ n сондгой тоо байв. $n = 2r + 1$ ош дээс дарагд-
сан n ширхэг тоог $a - r, a - (r-1), \dots, a, \dots, a + (r-1), a + r$
гэж бичих болох тул $m = n \cdot a$ болно. Мөн $a - r > 0$
гэдгээс $a \geq r + 1$ болно.

Иймд бидний олох ёстой тоо маш их ямарч атугай. У/ босоор
 $m = 1000 \cdot m'$, m' -сондгой тоо хэлбэртэй байна.
Тэгшд хялбарчилж $m' = 5^t$ гэж үзвэл $m = 2^3 \cdot 5^{t+3}$

болно. Одоо m нь 2000 янзаар m -оос өмнө дарагдсан
натурал тоонуудын нийлбэрт тавигдах ёстой гэдгийг тооцож,
сараа эхлээг тооцоо хийвал $t = 1997$ гэж гарна. Эндээс

$m = 2^3 \cdot 5^{2000}$ гэсэн тоо нь манай чанарыг хангах нь эв.
Үүсхээр энэ тоо нь дээс дарагдсан $5^5; 1 \leq 5 \leq 1000$ Ош
 $16 \cdot 5^5; 0 \leq 5 \leq 999$ ширхэг натурал тоонуудын нийлбэрт
тавигдахана, даг эс өөрөөр тавигдахгүй. Энэ хялбархан тооцоог
үргэлж танд үлдээлээ.

УСОН МАТЕМАТИКИЙН 27-Р ОЛИМПИАДЫН
Х АЙ Р И Н Е ДАВАЛЫН БОЛЛОВУУД

А. Дашдорж, Б. Батцэнгэл

Төдөр / 5-р сарын 9 /

11. / П. Алтанцог ЛУИС /

Аль ч гурвал нь элдэв талт / гурвал тал нь ялгаатай /
гурвалжин үүсгэхээр 27 хэрчим олох уу? Хэрэв олох бол
тэдгээрээр ялгаатай 65 ширхэг хурц өнцөгт гурвалжин бай-
гуулж болохыг батал.

12. / Б. Батцэнгэл ЛУИС /

АВС гурвалжин хамгийн бага өнцгийг оройгоос уг гурвал-
жинд олгосон тойргийн төв нь өнцгүүдийн огтлолцлын цэг
хүртэнх зайнууд тэнцүү бол уг гурвалжныг адил талт гэх батал.

13. / А. Батхүү УБДС /

Тус бүр нь 1991-ээс хэтрэхгүй 1811 ширхэг ялгаатай
натурал тоонууд өгөгдөв. Тэдгээрийн хамгийн багыг m гэе.
Тэгвэл ялгавар нь 10- m -тай тэнцүү байдаг хоёр тоо тэдний
дотроос олдсоныг батал.

П өдөр / 5-р сарын 10 /

14. / Р. Батцэнгэл ЛУА /

$P(x)$ бодит коэффициенттэй олон гишүүнт нь арифметик
прогресс үүсгэдэг дурын a, b, c, d -ийн хувьд
 $|P(a) - P(d)| \geq 4 |P(b) - P(c)|$

байдаг бол $P(x)$ -ийг ол!

15. / Б. Батцэнгэл ЛУИС /

$x^n + y^n = z^n$ ($n \geq 3$) тэгшитгэл x, y, z нь
арифметик прогресс үүсгэдэг натурал тоон шийдгүйг батал.

16. / В. Бадьянсүрэн УБДС /

Хавтгайд үл огтлолдох оюу Оиеийнхээ галаад мухал
орших 2 тойрог, тойрог тус бүр дээр нэг нэг цэг өгчээ. Өгсөн
тойргуудыг өгсөн цэгүүдэд үүрэх бөгөөд өгсөн цэгүүдийн
холоосон хэрчим дээр огтлолдох ижил радиустай 2 тойргийг
байгуул!

Бодлогын бодолт

А1. Бодлогын эхний хэсгийг анхээд сурагчид үнэн зөв бодсон боловч дараах хэсгийг гүйцээ зөв бодсон сурагч байсангүй.

Дурин $a > 0$ бодит тоог авч эдгээр хэрчийнхээ уртыг $(a, 2a)$ завсраас ялгаатай байхаар авбал тэдгээрийн дурин 3 нь элдэв талт гурвалжны тал болж чадна. Үүнийг

$a_i + a_j > a + a = 2a > a_k$ гэсэн тэнцэл олонхоос хялбархан ларч болно. Энд a_i, a_j, a_k нь дурин гурван хэрчийн урт.

Одоо хоёрдугаар хэсгийг нь баталъя. Эхлээд аль ч гурав нь элдэв талт гурвалжны талууд боловч 3 хэрчимээр ядав нэг хурц өнцөгт гурвалжин байгуулж болно гэсэн өгүүлбэрийг ларуулья. Эсрэгээрээ тийм биш гэв. Хэрчийн уртууд нь

$b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5$ болно. Тэгвэл аль ч гурав нь боловч өнцөгт гурвалжин үүсгэнэ гэдгээрээ

$$b_3^2 > b_1^2 + b_2^2 ;$$

$b_4^2 > b_2^2 + b_3^2 ; \quad b_5^2 > b_3^2 + b_4^2$ болно. Энэ тэнцэл бишүүдийг нэмвэл

$$b_5^2 > b_1^2 + 2b_2^2 + b_3^2 > b_1^2 + 2b_2b_3 + b_3^2 = (b_1 + b_3)^2$$

буюу $b_5 > b_1 + b_3$ болж b_1, b_3, b_5 нь гурвалжны талууд болж чадахгүйд хүрвэл.

Саяны баталсан өгүүлбэр ёсоор манай 27 хэрчийн дурин 5-ыг сонгож авахад тэдгээрээр нэг хурц өнцөгт гурвалжин байгуулж болно. Гийнхүү давлардсан тоогоор C_{27}^5 ширхэг хурц өнцөгт гурвалжин байгуулж болно. Нэг гурвалжны давлардлын тоо нь хамгийн олондоо C_{24}^5 тул ялгаатай хурц өнцөгт гурвалжин тоо нь хамгийн багадаа

$$\frac{C_{27}^5}{C_{24}^5} > 65 \text{ болно.}$$

5-р хэсгийн өөр нэг бодолтыг тогшиуулья. Хэрчийн уртууд

$a_1 < a_2 < \dots < a_{27}$ байв. Тэгвэл $a_1^2 < a_2^2 < \dots < a_{27}^2$ бөгөөд

хэрэв $a_{27}^2 < a_1^2 + a_2^2$ бол манай хэрчмүүдийн дурин гурван нь

хурц өнцөгт гурвалжин тал болж чадна. Үнэхээр $a_i < a_j < a_k$ бол

-3-

$a_k^2 \leq a_{27}^2 < a_i^2 + a_j^2 \leq a_i^2 + a_j^2$ ууруу a_i, a_j, a_k нь хурц өнцөгт гурвалжин тал болох байгуулж харуулж байна. Иймд энэ тохиолдолд

C_{27}^3 ширхэг хурц өнцөгт гурвалжин байх нь ээ. Эсвэл

$a_{27}^2 \geq a_i^2 + a_j^2$ бол $a_i^2 + a_j^2$ нь ямар нэг

$2 \leq m < 27$, m -ийн хувьд (a_m^2, a_{m+1}^2) завсарт байн. Тэгвэл $a_1, a_2, \dots, a_m$ -үүдийн дурьд гурвал нь хурц өнцөгт гурвалжин тал болох чадна. Учир нь $a_i < a_j < a_k \leq a_m$

бол $a_k^2 \leq a_m^2 < a_i^2 + a_j^2 \leq a_i^2 + a_j^2$ иймд $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{27}$

-үүдийн дурьд гурвал нь хурц өнцөгт гурвалжин тал болох чадна.

Үнэхээр $a_{m+1} \leq a_i < a_j < a_k$ бол $a_k < a_i + a_j$ тул

$a_k^2 < (a_i + a_j)^2 < 2(a_i^2 + a_j^2) \leq 2a_m^2 < a_i^2 + a_j^2$ иймд хуучин дор ханх

$C_m^3 + C_{27-m}^3$ ширхэг хурц өнцөгт гурвалжин байгуулж болох нь ээ!

$C_m^3 + C_{27-m}^3$ -ийн хамгийн бага утга нь m ба $27-m$ нь

ойртсон үед гарна гэдгийг хялбар харуулж болох бөгөөд иймд

дөр хаях $C_{13}^3 + C_{14}^3 = 650$ ширхэг хурц өнцөгт гурвалжин байгуулж болох нь ээ.

А. 2. Энэ бодлогыг Сэлэнгэ аймгийн төвийн суургуулийн Х. вангийн сурагч Ч.Болд уран гоё содож энэ ажлын нэвээр бий болсон, П. нхбоодын нэрэмжит уран бодлогын тусгай шагналыг хүртсэн юм. Одоо тэр бодлогыг та бүхэнд толилуулъя.

Няар нэг гурвалжинны аль оройгоос эсрэг талд буулгасан өндрийн суурь нь тэр эсрэг талд харьяалагдах байсан гэх санал. Тэгвэл энэ оройн биссектрис нь гурвалжин нөгөө 2 орой дэх өнцгийн бага өнцөгтэй, өндрөөр хуваагдах гурвалжин хэсэгт байна. Өөрөөр хэлбэл, ABC гурвалжин хувьд BD нь өндөр,

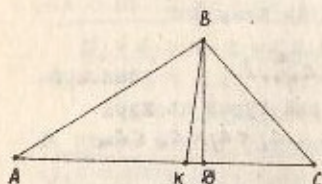
$\angle \in [\alpha, \beta]$ ба (β, γ) нь биссектриссүүдээр $\angle$ бол
хэрвээ $\hat{A} = \hat{B} < \hat{C} = \hat{C}$ бол $\kappa \in [\alpha, \beta]$ байна гэсэн гт.

Учир нь $\hat{A} < \hat{C}$ бол

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\pi}{2} - \hat{A} > \frac{\pi - \hat{A} - \hat{C}}{2} = \\ &= \frac{\hat{C}}{2} = \hat{A} \kappa \quad \text{н.иймд} \end{aligned}$$

$\kappa \in [\alpha, \beta]$ юу. Одоо энэ дүгнэлтээ

ашиглаж өмнөд мэхээ дагуу тэгш
өндөрт гурвалжин байж болохгүйг;
дараа нь хурц өндөрт гурвалжин нь
малал нэлэлтийг хангавал заавал зөв
гурвалжин байхыг харуулах



(Зураг I)

Мэхээ дагуу тэгш өндөрт гур-
валжин хамгийн бага өнцөг нь $\hat{A}$,
хамгийн их өнцөг нь $\hat{B}$ гэж (Зураг II)

B оройн биссектриссийн AC талыг
огтлох цэг $\kappa \in [\alpha, \beta]$ тул

$|AO| \leq |AE|$.Энд O нь сэтгэсэн
төсрийн төв, E нь $(AO) \cap (BB)$ нц.
Бидрүүдийн огтлолцлын цэг H нь
гурвалжны дотоод цэг биш тул

$|AE| < |AH|$, иймд

$|AO| < |AH|$ болж байна.

ABC нь хурц өндөрт гурвалжин
үед $\hat{A}$ нь хамгийн бага гэвэл
/зураг I / $\hat{A} < \hat{B}$, $\hat{A} < \hat{C}$ нь мэхээ
болохыг дэлбэр харуулж болох сөгөөд
дээр сэтгэсэн дүгнэлтээ ашиглавал

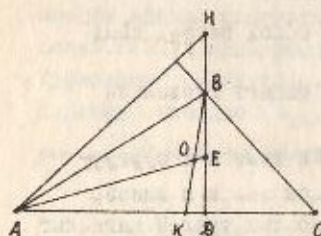
$H \in \triangle BOC$ ($\triangle BOC$ гурвалжин)

гэж гарна. Иймд $\hat{A} < \hat{B}$, $\hat{A} < \hat{C}$

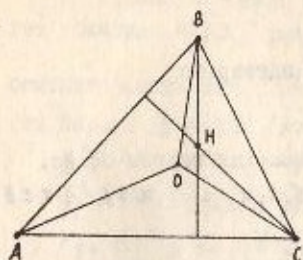
мэхээ тул $|AO| = |AH|$ байхын

тулд O, H цэгүүд давхцана. Иймд

сэтгэсэн ABC гурвалжин нь зөв



(Зураг II)



(Зураг III)

гурвалжин байгаа зохиогчийн бодолтыг
тогч дурьдвал: $r, \hat{A}, \hat{B}$

/энд r нь гурвалжны тойргийн
радиус/ гэсэн гурван параллель
оруулж өгсөн нөхцөлийг олчвал

$$\cos \hat{A} + \sin \left(\frac{\hat{A}}{2} \right) = \sin \left(\frac{\hat{A}}{2} + \hat{B} \right)$$

болох бөгөөд эндээс

$$\cos \hat{A} + \sin \left(\frac{\hat{A}}{2} \right) \leq 1$$

оршуу $\hat{A} \geq \frac{\pi}{3}$ болно. Гурвалжны
 $\frac{\pi}{3}$ - эс болгүй байгаа тул уг гур-

валжны багц өнцөг
валжны радиус тэгш юм.

13. Энэ бодлогыг хамгийн тогч, зөв бодсон олимпиадын
аварга АУИС-ийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай х ангийнх сурагч
А.Хамбаярын бодолтыг та бүхэнд толилуулъя.

Хамгийн бага нь m тул $m \leq 181$ бөгөөд манай 181
ширхэг тоо манай $m, m+1, \dots, 1991$ тоонуудас 181- m
ширхэгийг дарахад үүссэн байна.

$(m, 11m); (m+1, 11m+1); \dots; (1991-10m, 1991)$ гэсэн ялгавар нь
10-т байх тоонуудын хосуудыг сонирхой. Тэдгээрийн тоо нь
1991-11 m билээ. a тоог дарахад оидний сонирхож оуй
хосуудаас $(a-10m, a); (a, a+10m)$ гэсэн 2 хос
алга болсон байх болох тул нийт үгүй болох хосын тоо нь
хамгийн ололдоо $2(181-m)$ юм. Нэгэнт $m \leq 181$
учир $1991-11m > 2(181-m)$ тул манай хосуудаас
ядаж нэг нь үлдэнэ. Энэ нь бодлого бодогдсоныг харуулж
байна.

14. Энэ бодлогыг зөв бодсон сурагч байхгүй тул
зохиогчийн бодолтыг өгье. Бодлогын нөхцөлд оуй $P(x)$ нь
олон гишүүнт гэсэн нөхцөл нь $P(x)$ функц ямар ч цэг дээр
удамжлаатай гэдэгт и амтлагддаг. Эсрэг байгаа.

Тухайнхныг тодорхойлолт ёсоор

$$p'(x) =$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{p(x+\epsilon) - p(x)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{p(x) - p(x-\epsilon)}{\epsilon}, \text{ адгээрээ}$$

$$p'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{p(x+\epsilon) - p(x-\epsilon)}{2\epsilon}$$

болох хялбархан гаргах болно.

Одоо арифметик прогресс үүсгэдэг a, b, c, d -г $x \pm \epsilon$; $x \pm 3\epsilon$ гэж аваад бодлогын нөхцлийг бичвэл

$$|p(x+3\epsilon) - p(x-3\epsilon)| \geq 4 |p(x+\epsilon) - p(x-\epsilon)| \text{ уузу}$$

$$\left| \frac{p(x+3\epsilon) - p(x-3\epsilon)}{6\epsilon} \right| \geq \frac{4}{3} \left| \frac{p(x+\epsilon) - p(x-\epsilon)}{2\epsilon} \right| \text{ болно. Энэ тэнцэл}$$

олгооны 2 талд $\epsilon \rightarrow 0$ хязгаарт шилжвэл дээр тэмдэглэсэн зүйлээс

$$|p'(x)| \geq \frac{4}{3} |p'(x)| \text{ буюу } |p'(x)| \leq 0 \text{ болно.}$$

Эндээс $p'(x) = 0$ болох бөгөөд энэ нь $p(x) = c$, $p(x)$ - тогтмол гэсэн үг юм.

Б. Энэ бодлогыг УБ хотын I сургуулийн сурагч Н.Эрдэнэ ганцаараа гүйцэд зөв бодсон юм.

$x < y < z$ нь арифметик прогресс үүсгэдэг бөгөөд

$$x^n + y^n = z^n \text{ гэж үзье. Тэгвэл } x = y - d, z = y + d;$$

$$0 < d < y \text{ гэж бичих болох ба онд } y \text{ ба}$$

d -г харилцан анхны гэж үзэв болно. Учир нь тийм биш, $(y, d) = k$ байвал тэгшитгэлээ k^n -д хуваагаад y ба d -г харилцан анхны болгочихно. / Энд (y, d) -ээ, y ба d -ийн хамгийн их эрөнхийлөн хуваагчийг тэмдэглэе. / Тэгшитгэлээ бичвэл $(y-d)^n + y^n = (y+d)^n$ юм. Тэгшитгэлээ y модулиар хэлбэл хэрэглэвэл $(-d)^n \equiv d^n \pmod{y}$ болно. Эндээс хэрэв n сондгой бол $y \mid 2d^n$ гэж гарч байна. Иргэнт $(y, d) = 1$ тул $y \mid 2$ буюу $y \geq 2$ болохыг

анхаарвал $y=2, d=1$ болов. Гэтэл $1^n + 2^n = 3^n$

тэгшитгэл нь мэдсэн $n \geq 3$ үед шийдгүй юм.

Хэрэв n тэгн бол тэгшитгэлээ $y^n = (y+d)^n - (y-d)^n$ гэж бичээд $n \geq 3$ үед $y^n \equiv 0, (y+d)^n - (y-d)^n \equiv 2nyd^{n-1} \pmod{y^3}$

болохыг ашиглавал $2nyd^{n-1} \equiv 0 \pmod{y^3}$ оуу $y^2 / 2nd^{n-1}$

гэх гарла. $(y, d)=1$ болохыг дахин хэрэглэвэл эндээс $y^2 / 2n$ ба $y^2 \leq 2n$ болох нь гарав. Гэтэл

$y^2 \leq 2n$ байвал бернуллийн тэнцэл ойм ёсоор

$$\left(1 + \frac{d}{y}\right)^n \geq 1 + \frac{nd}{y} = 1 + \frac{ndy}{y^2} \geq 1 + \frac{ndy}{2n} = 1 + \frac{dy}{2}$$

болох бөгөөд $y \geq 2$ тул $\left(1 + \frac{d}{y}\right)^n \geq 2$ байх нь ээ.

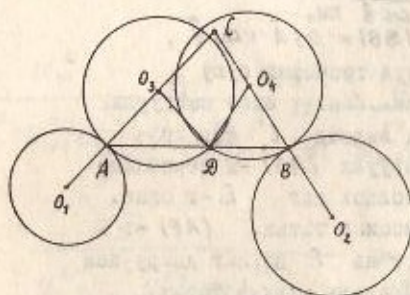
Нөгөө талаас $1 - \frac{d}{y} < 1$ учир $\left(1 - \frac{d}{y}\right)^n + 1 < 2$,

Эндээс $\left(1 - \frac{d}{y}\right)^n + 1 < \left(1 + \frac{d}{y}\right)^n$ оуу $(y-d)^n + y^n < (y+d)^n$ болж хэзээ ч тэнцэхгүй нь батлагдлаа.

3. Байгуулсан гэх үзээд анализ хийе. Тойргийн төвүүдийг O_1, O_2 ; өгөгдсөн цэгүүдийг A, B ; байгуулах тойргийн төвүүдийг O_3, O_4 гээ. Өгссөн нөхцөл ёсоор O_3, O_4

нь (O_1, A) болон (O_2, B)

(Зураг I)



шулуун дээр орших нь ял т бөгөөд хэрвээ (O_1, A) ; (O_2, B) шулуунууд үл огтлолцох байвал тийм хоёр тойрог оршин байхгүй нь ойлгомжтой. Үүнийг унших танд үлдээгээд, одоо

$$(O_1, A) \cap (O_2, B) = C$$

гэх үзье. / Зураг I /
Тодорхой болгон

$$O_3 \in (O_1, A); O_4 \in (O_2, B)$$

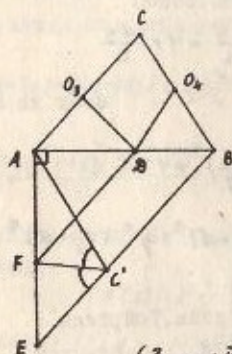
гэх үзье.

Тэгвэл манай бодлого манай зорилгоо егдэл 100% гүйцэтгэх
талуур дээрээ $0_3, 0_4, 0$ цэгийг $140_1 = 10_3, 81 = 180_4 = 10_4, 81$
байхад 0 нь гэсэн бодлогод шилжих байна. Эдгээр цэгүүдийг
ганцхан 0 -г нэгдсэнээр байгуулж болох нь ойлгомжтой.

$$|AB| = 2|AO_3| \cdot \cos \hat{A} \quad ; \quad |BB'| = 2|O_4B| \cdot \cos \hat{B}$$

иймд $|AB| : |OB| = \cos \hat{A} : \cos \hat{B}$ байх ёстой. Иймд $\frac{\cos \hat{A}}{\cos \hat{B}}$ нь $\frac{AB}{OB}$ -ийн хэрэгцээг хуваадаг.

ЦЭГ 08Й. НБ ЭЗ.



(Зурар II)

Одоо бид эерэг нэмэлт зураг
зуръя. / Зураг В/ - д цэгээс
(AC) -тай параллель,
A цэгээс (BC) -тэй параллель
шулуунууд татъя. Гитлоядийн цэгн
ийг нь C' гэв.

А цэгийг дайруулж (AB) -д перпендикуляр шулуун татаж (BC') шулуунтай огтлолцох цэгийг E , C' цэгээс $AC'E$ өнцгийн биссектриссийг татаж (AE) шулуунтай огтлолцох цэгийг F гэж тус тус тэдэглэе.

Тэгвэл $\angle \hat{A}C' = 90^\circ - \hat{B}$; $\angle \hat{E}C' = 90^\circ - \hat{A}$ юм. $C'F$ нь
синусктрисс тунд биссектрисийн теоремыг ашиглавал

$$|AF|:|FE| = \sin(90^\circ - \hat{A}) : \sin(90^\circ - \hat{B}) = \frac{\cos \hat{A}}{\cos \hat{B}} \text{ cm.}$$

Выше описанный баталонаар $|AB|:|BB'| = \cos \hat{A} : \cos \hat{B}$,

Эндээс AFB, AEB гурвалууд тус тусай буруу

(F9) // (C'8) гэж гарч байна. Ийнхүү одоо байгуулах

а, га нь гэдэрийн боллоо. Үүний тулд эхлээд C' цэгийг дайруулна, дараа нь A -г дайруулж (AB) -д перпендикуляр булзуу татах, (BC') -той огтлолцох цэг E -г олно.

С' дэгээс ACE өвдгийн биссектрисийг татах, (AE) - т н
ортлохдоо дэг F -ийг олно. Эцэст нь F цэгийг дайруулан
 (BC') - т н сууу (AC) шулуутай паралель шулуун татах
түүний (AB) -тэй ортлохдоо цэгийг олно. Ээр дэг нь D
болно. Давш O_1, O_2 -дэг дайруулах арга нь олгогдохтон.

1991.1.13- 1.20, Улаанбаатар

Т.Хүрэлбаатар

Тус олимпиадад хот хөдөөгийн 30 гаруй багш оролцсон-
оос нийслэлийн 10 жилийн 1-р дунд сургуулийн багш
С.Мариангэрэл, нийслэлийн 16-р сургуулийн багш Д.Соёл-Эрдэнэ
Төл аймгийн Баян-Өмнүүн сумын багш Батомасор нар тус
бүр I, II, III байруудад шалгарлаа.

I-р бодлого / А.Гансолд, Математикийн хүрээлэн /

Дурын натурал $n \geq 3$, K хувьд дараах тэнцэтгэл оигийн
сатал. Үүнд: $u_k > 0 \quad k=1, 2, \dots, n$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{u_1^K}{u_1^K + u_2 u_2^{K-1} + u_2^{K-1} u_3} + \frac{u_2^K}{u_2^K + u_3 u_3^{K-1} + u_3^{K-1} u_4} + \dots + \frac{u_n^K}{u_n^K + u_1 u_1^{K-1} + u_1^{K-1} u_2} \leq n-1$$

Хэрэв $u_1, u_2, \dots, u_n$ үүдийн хамгийн ихийг u_2
хамгийн бага хоёрыг нь u_4, u_5 гэвэл дараах 2
тэнцэтгэл оигийн ашиглан батална.

$$\frac{u_2^K}{u_2^K + u_{t+1} u_{t+2}^{K-1} + u_{t+1}^{K-1} u_{t+2}} + \frac{u_5^K}{u_5^K + u_{s+1} u_{s+2}^{K-1} + u_{s+1}^{K-1} u_{s+2}} \leq 1$$

$$\frac{u_2^K}{u_2^K + u_{t+1} u_{t+2}^{K-1} + u_{t+1}^{K-1} u_{t+2}} \geq \frac{1}{3}$$

Дээрхи тэнцэтгэл охион бодолгоо хялбар тул бэлтгэвэг орогноо

2-р бодлого /Р.Батдэлгэр, Математикийн Хүрээлэн/

Гүдгэр олон талстны дурин хавтгайгаар огтлоход үүсэн олон өнцөгт нь дөрвөөс хэтрэхгүй талтай бол уг олон талстат тетраэдр байна гэж батал.

◀ (1) Дурин оройгоос гарах ирмэгийн тоо гурван гэж харуулъя. Үүний тулд хэрэв аль нэг оройгоос гурваас илүү ирмэг гарч байвал ядан 5 өнцөгт үүсгэх огтлол. Байгуулж оолохыг харуулах нь хангайттай. Тэр оройг A гэе, A -тай хөрш ямар нэг оройг B гэе. B оройтой хөрш бөгөөд A -с ялгаатай орой ядав C , мөн A оройтой хөрш бөгөөд B -с ялгаатай орой ядав D олдоно. AB хэрчимээр огтлолцсон талсуудыг агуулсан 2 хавтгай огторгуйг 4 хэсэг хуваах бөгөөд гүдгэр чанараар энэ 4 хэсгийн нэгд нь уг олон талст агуулагдана. Иймд уг олон талстыг зөвхөн $[AB]$ хэрчимээр огтлолцсон α хавтгай бий. $\alpha // \beta$ ба α, β уудын хооронд олон талстыг нэг ч орой байхгүй байхаар β хавтгайг уг олон талстыг огтлохоор татвал β ядав 5 ялгаатай ирмэг огтлолно. Гүдгэр чанараар энэ тав нь огтлолд үүсэх олон өнцөгтийн оройнууд болох юм.

(2) Дурин талс нь гурван ирмэгтэй.

Зэрэгээс аль нэг талс нь A, B, C, D оройнуудтай байт. Уг талсын хавтгайг α гээд өмнөхийн адилаар β хавтгайг татъя. M, N нь AB, AD хэрчмүүдийн дундаж байт.

(MN) тэй параллель ℓ шулууныг β хавтгайд татахдаа уг ℓ нь β дахь огтлолд үүссэн 4 өнцөгтийг огтлохгүй ба ℓ ийн α дахь проеки нь (MN) шулуунтай харьцуулахад B, C, D цэгүүдийн зэрэг талд байхаар гүйцэтгэн болно.

(M, N) ба ℓ тулгууруудыг дайрсан хэвтгэй нь $[AB], [AD]$ ирмэгүүдээс гадна B, C, D оройнуудаас гарсан бөгөөд $[BC], [AD]$ үүдээс ялгаатай 3 ирмэгийг огтлох болох энэ огтлолд ядам 5 өнцөгт үүсэх ёстой болов. Одоо $O - N + T = 2$ гэсэн Эйлерийн томъёо ямар хэрэглээ.

Өрөө бүрээс 3 ирмэг гарч, ирмэг бүр 2 оройд харгалзах учир $n = \frac{3 \cdot O}{2}$ мөн талс бүр 3 оройтой ба орой бүрд 3 талс харгалзах байгаа тул $O = T$ болно. Одоо $O - \frac{3}{2}O + O = 2$ гэдгээс $O = 4$ болж тэтрээр болох нь батлагдав. ►

L-р бодлого /Квант -90:III/

$a_i (i \geq 1) \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a_n a_{n+1} + 1 (n \geq 1)$ дарааллын хувьд $K \geq 9$ бол $a_K - 22$ зохимол болохыг батал. ◀ $a_1, a_2 \geq 1$ тул $a_3 = a_1 a_2 + 1 \geq 2$.

мөн $a_3 < a_4 < \dots < a_n < \dots$ эрв эсвх нь ИЛТ, $n \geq 2$, $a_{n+1} = a_n a_{n+2}$ тул $a_{n+1} \equiv 1 \pmod{a_n}$ мөн $a_{n+2} \equiv 1 \pmod{a_n}$ болно. Цаашигбал $a_{n+3} \equiv 2 \pmod{a_n}$ Үүнтэй адилсаар

$$a_{n+4} \equiv 3 \pmod{a_n} \quad a_{n+5} \equiv 7 \pmod{a_n} \quad a_{n+6} \equiv 22 \pmod{a_n}$$

болно. Иймд $a_n \mid a_{n+6} - 22$ Өөрөөр хэлбэл

$$K \geq 8, \quad a_{n-6} \mid a_n - 22, \quad a_{n-6} < a_n - 22$$

болохыг хялсаар хариу болно.

Иймд $a_3 > 1$ тул $K \geq 9$, $1 < a_{K-6} < a_K - 22$. Иймд $a_{K-6} \mid a_K - 22$ дээр

$$a_{K-6} \mid a_K - 22 \quad \text{нь зохимол тоо}$$

болно. ►

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_n a_{n+1} + 1 = \\ a_{n+3} &= a_{n+2} a_{n+1} + 1 = (a_n a_{n+1} + 1) a_{n+1} + 1 = \\ &= (a_n a_{n+1} + 1)(a_n a_{n-1} + 1) + 1 = a_n^2 a_{n-1} a_{n+1} + 2 a_n a_{n+1} + 2. \end{aligned}$$

IV-р бодлого /С.Томеэрогт, МУИС/

Хавтгайд A нэг, нэг дугуй өгөгджээ. Тэгвэл хавтгайн
дүрхэг шулууны хувьд тэгш хэвтэй хувиргах замаар дугуйн
дурьд цэгийг A цэгт авсаардаг тийм шулуунууд олох уу?

◀ Оршин бондлогүй гэж бодъя. Иймд хэргээс нь ямар нэг
 n дүрхэг шулуун олддог гэж үзье. C -нь дугуйн бүх
цэгүүдийн олонлог, $B = \{x \in C \mid \exists t_x\}$, t_x — нь
 x -цэгийг уг шулуунуудын хувьд тэгш хэвтэй хувиргаснаар A -д
авчирдаг буулгавт. Тэгвэл $|B| = |C|$ байх ёстой
Гэтэл B ба C хоёр олонлогийн чадал тэнцүү биш гэдэгт
зарчих байна. $|A|$ — A олонлогийн чадал. ▶

МУИС. "Эрхэлтэж"

181001

түүний
наамт үзэг

олимпиадад

УИО- 27 -гийн III давааны үеэр жил бүр уламжлал болон зохиогддог багуудын тэмцээн амжилттай явагдсан өнгөрлөө. Уг тэмцээнийг математикийн хүрээлэнгээс шагналыг гаргаж, зохион байгуулсан юм. Энэ жилийн тэмцээнийг онцлог төвөл оновын дүгнэлтэд, урьд жилүүдэд байгаагүй 3 оноо буруу хагас оноог тавьсан юм. 3 оноог нэг удаа бодолтоо амтгаали чадваргүй буцсан боловч дараа нь амжилттай бодсон, эсвэл бодлогын бодолтын санааг зөв гаргасан боловч, гүйцээж чадаагүй бодолтод өгч байв. Мөн оноо нь тэнцүү багуудыг бодсон хугацаагийн нь харгалзан байр эзлүүлж байна.

Багуудын дэвшүүлсэн бодлогууд, тэдгээрийн бодолт болон тэмцээний дүнг дор танилцуулав.

Багуудын дэвшүүлсэн бодлогууд:

1. /Баги баг / 2^n тооны цифруудийн нийлбэр n өсөхөд төгсгөлгүй өснө гэж батал!

2. /Сурагч баг / $f: R^+ \rightarrow R^+$ / Энд R^+ -ээр эерэг бодит тоонуудын олонлогийг тэмдэглэв/. Хуучд нь a, b, c нь гурваллын талууд бол $f(a), f(b), f(c)$ нь мөн гурваллын тал байдаг чалартай бол дурын $x \in R^+$ тооны хувьд

$$f(x) \leq Ax + b \quad \text{байх} \quad A, b \quad \text{тоо олдохыг батал.}$$

3. /УИО/ $SABC$ тетраэдрийн SBC, SAC, SAB талуудын талбайг S_A, S_B, S_C гэв. SA, SB, SC ирмэгүүдийн SBC, SAC, SAB талуудтай үүсгэх өнцгүүдийг α', β', γ' ; SBC, SAC, SAB талуудын S орой дахь өнцгүүдийг харгалзан α, β, γ гэж тэмдэглэв. Тэгвэл

$$a/ \quad \frac{\sin \alpha' \cdot \sin \beta'}{\sin \gamma} = \frac{\sin \alpha' \cdot \sin \gamma'}{\sin \beta} = \frac{\sin \beta' \cdot \sin \gamma'}{\sin \alpha} \quad \text{болохыг батал.}$$

б/ дээрх илэрхийллийг K гэвэл тетраэдрийн эзэлүүн

$$\frac{1}{3} \sqrt{2K \cdot S_A \cdot S_B \cdot S_C} \quad \text{болохыг батал.}$$

$$\therefore \text{УИО/ } [\sqrt{2} \cdot n] = a_n; [(2+\sqrt{2}) \cdot n] = b_n \quad \text{дарааллуудын аль}$$

алинд нь 2^e хэлсэрийн тоо төгсгөлгүй олон үийг тэдгилг... батал.

... / математикийн дүрээлэл / Эгсэн гурвалжин өгсөн дотоод цэг M дээр талтай дугуйнуудаас ямар нь

$S((AUV) \setminus (AUV))$ -ийг хамгийн бага сайнгараг вэ? Үүнд:

$S(A)$ нь A дүрсийн талсан, A - өгсөн гурвалжин, O - M цэг дээр талтай дугуй

Бодлогуудын бодолт:

1. 2^n тооны цифруудын нийлбэрийг a_n гэх тэмдэгт. Энд $\{a_n\}$ дарааллаас эрс өсдөг ямар нэгэн дэд дараалал байгуулахад л хавгалттай юм. Үүний тулд 2^n -ын сүүлчийн хэдэн ч цифраар бүтсэн тоонууд үндсээр дарааллыг үүсгэхийг эхлээд батлая. m - натурал тоо байг. Эйлерийн теорем ёсоор

$$2^{\varphi(5^m)} \equiv 1 \pmod{5^m} \quad \text{буюу} \quad 2^{n+\varphi(5^m)} \equiv 2^m \pmod{10^m}$$

Сүүлийн хамнагийн хоёр талыг 2^{n-m} ; $n \geq m$ - зэр үржүүлбэл

$$2^{n+\varphi(5^m)} \equiv 2^n \pmod{10^m} \quad \text{буюу} \quad 2^{n+\varphi(5^m)}, 2^n \text{ гэсэн}$$

тоонуудын сүүлийн m ширхэг цифраар бүтсэн тоонууд адил болж бидний дээр хэлсэн зүйл батлагдлаа. Одоо бодлогыг бодоход хялбар болов. Эхлээд $2^{k_0} = 2$, дараа нь 2^{k_0} -оор төгсдөг өөр нэг 2^{k_1} -ийг, дараа нь 2^{k_1} -ээр төгсдөг түүнээс их 2^{k_2} -ийг, гэх мэтчилэн сонгон авч $\{k_n\}$ дарааллыг байгуулбал $a_{k_0} < a_{k_1} < \dots < a_{k_n} < \dots$ байх нь ойлгомжтой юм. Бодлого оодогдон.

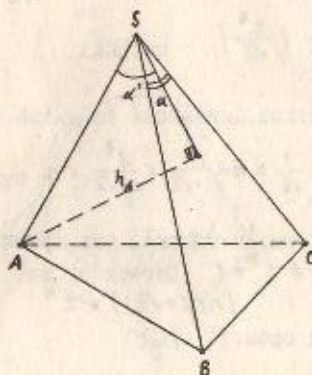
2. Эгсэн нөхцөл ёсоор $f(a), f(b), f(a+b)$ нь гурвалжны талууд болох учир, $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$ нь дурын $a, b \in \mathbb{R}^+$ тоонуудын хувьд биелэх ёстой. Энэ нөхцлөөс лэрв n - натурал тоо бол $f(n) \leq n \cdot f(1)$ гэх гарна. Иймд дурын $x \in \mathbb{R}^+$ тооны хувьд $f(x) = f([x] + \{x\}) \leq$

$$\leq f([x]) + f(\{x\}) \leq [x] \cdot f(1) + f(\{x\}) \quad \text{болно.}$$

$\{x\}, 1, 1$ нь гурвалжны талууд болж чадах тул өгсөн нөхцөл ёсоор $f(\{x\}), f(1), f(1)$ нь гурвалжны тал болох ёстой бөгөөд эндээс $f(\{x\}) \leq 2 \cdot f(1)$ юм. Энэхүү

$f(x) \leq [x] \cdot f(1) + f(\{x\}) \leq [x] \cdot f(1) + 2f(1) \leq x \cdot f(1) + 2 \cdot f(1)$ болно
 А-аар $f(1)$ -ийг, В-ээр $2 \cdot f(1)$ -ийг авч
 болох нь ээ.

3.



А оройгоос SB талсанд буу. гэсэн
 өнцгийг h_A гэвэл $h_A = SA \cdot \sin \alpha'$
 болох ба

$$S_A = \frac{1}{2} SB \cdot SC \cdot \sin \alpha$$

байдалыг ашиглаж эзэлхүүнийг
 оичвэл

$$\begin{aligned} 6 V_{SABC} &= 2 h_A \cdot S_A = \\ &= SA \cdot SB \cdot SC \cdot \sin \alpha' \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

ям. Үүнийг өөр бусад оройнууд
 дээр бичээд хооронд нь тэн-
 цүүлвэл

$$\sin \alpha' \cdot \sin \alpha' = \sin \beta' \cdot \sin \beta' = \sin \gamma' \cdot \sin \gamma'$$

болно. Сүүлийн тэнцлээс бэлний гатлах ёстой эхний тэнцэл
 шууд гарна. Бодлогын б/хэсэг нь

$$\begin{aligned} \sqrt{2 SA \cdot SB \cdot SC} &= \sqrt{2 SA \cdot SB \cdot SC \cdot \frac{\sin \alpha' \cdot \sin \beta'}{\sin \gamma}} = \\ &= \sqrt{(SA \cdot \sin \alpha') (SB \cdot \sin \beta') \cdot \frac{2 SC}{\sin \gamma}} = \sqrt{\frac{3V}{SA} \cdot \frac{3V}{SB} \cdot SA \cdot SB} = V_{SABC} \end{aligned}$$

гэдгээс гарах юм.

4. Эзлээд 2^k нь $\{a_n\}$ эсвэл $\{b_n\}$ дараалалд
 хамаалагдах нөхцлийг олж.

$$\left\{ \frac{2^k}{\sqrt{2}} \right\} > \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \quad \text{болот. Тэгвэл } n \text{ -ээр} \quad \left[\frac{2^k}{\sqrt{2}} \right] + 1$$

тоог тооцож үзвэл

$$n-1 + \frac{1}{2 + \sqrt{2}} = n - \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{2^k}{\sqrt{2}} < n \quad \text{буюу } 2^k < n\sqrt{2} < 2^k + 1 \quad \text{болно.}$$

Энэ нь $[n\sqrt{2}] = 2^k$ ба 2^k нь $\{a_n\}$ дараалал байхыг харуулах байна.

Одоо $\left\{ \frac{2^k}{\sqrt{2}} \right\} \leq \frac{1}{2+\sqrt{2}}$ болохыг Тэгвэл $2^k = \frac{2^k}{\sqrt{2}} + \frac{2^k}{2+\sqrt{2}}$

учир $\left\{ \frac{2^k}{2+\sqrt{2}} \right\} = 1 - \left\{ \frac{2^k}{\sqrt{2}} \right\}$ им.Имд

$\left\{ \frac{2^k}{2+\sqrt{2}} \right\} \geq 1 - \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ болохыг анхилбал өмнөхтэй адил

$n = \left[\frac{2^k}{2+\sqrt{2}} \right] + 1$ бол $n-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = n - \frac{1}{2+\sqrt{2}} \leq \frac{2^k}{2+\sqrt{2}} < n$ буюу

$2^k < n(2+\sqrt{2}) \leq 2^k + 1$ болох им. $2+\sqrt{2}$ нь рациональ

тоо биш тул $n(2+\sqrt{2}) \neq 2^k + 1$ бөгөөд энэээс

сүүлийн тэнцэл биш босоо. $[n(2+\sqrt{2})] = 2^k$ болж

2^k нь $\{b_n\}$ дараалалд оров.

Имд оид $\left\{ \frac{2^k}{\sqrt{2}} \right\} > \frac{1}{2+\sqrt{2}}$ байх k нь төгсгөлгүй олон,
 $\left\{ \frac{2^k}{\sqrt{2}} \right\} \leq \frac{1}{2+\sqrt{2}}$ байх n k нь төгсгөлгүй олон

болохыг батлах шаардлагатай болов. Аль нэгийг нь,

түгжйлбэл $\left\{ \frac{2^k}{\sqrt{2}} \right\} > \frac{1}{2+\sqrt{2}}$ байх k нь төгсгөлгүй олон гэм харуулах. Нөгөө нь яг адил батлагдана. Эсрэгээс

ямар нэг m -ийн хувьд, m -ээс багатай k бүрт

$\left\{ \frac{2^k}{\sqrt{2}} \right\} \leq \frac{1}{2+\sqrt{2}}$ байдаг гэв. Тэгвэл $\left\{ \frac{2^m}{\sqrt{2}} \right\} \in [0, \frac{1}{2+\sqrt{2}}]$

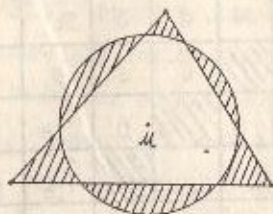
тул ямар нэг натурал t -ийн хувьд $\frac{1}{2^t(2+\sqrt{2})} <$

$< \left\{ \frac{2^m}{\sqrt{2}} \right\} \leq \frac{1}{2^{t-1}(2+\sqrt{2})}$ байна. Эндээс

$\left\{ \frac{2^{m+t}}{\sqrt{2}} \right\} > \frac{1}{2+\sqrt{2}}$ байхыг анхилбал шалгам болох бөгөөд энэ нь

зөрчил мн.

5. бидний сонирхож буй талбай нь зураг I -д



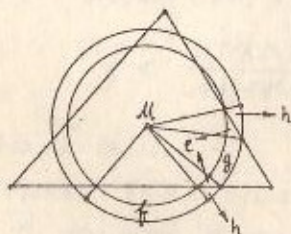
(Зураг I)

зурааснагдан дүрсэлэгдсэн
мэргийн талбай юм. Бидний олох
бодой хамгийн бага талбайг
үүсгэх дугуй маань гурвалжны
гаднах / дотор нь бас адил /
нумуудных нь шилээр т байх
дугуй мөн болохыг харууля. Тэр
дугуйн радиус r , түүнд
харгалзах

$$S((\Delta UO) \setminus (\Delta NO)) = \min S_r$$

гэж тэмдэглэе. M дээр төвтэй
өөр дурын R радиустай дугуйг
сонирхоё.

Түүнд харгалзах бидний сонирхож буй талбайг S_R гэе. Эхлээд
 $R > r$ болох. Зохих зургийг зурж, эерим талбайг зурагт
үзүүлсэн байдлаар тэмдэглэе / Зураг II /.



(Зураг II)

ТЭГЭЭЛ $S_R = S_r + f + h - g - e$ км.

Түүнээс гадна r радиустай
дугуйн чанар ёсоор $f = g + e + h$

юм. Иймд $S_R = S_r + 2h$ буюу

$$S_r < S_R \text{ болно.}$$

хэрэв $R < r$ байвал мөн
өмнөхтэй адил тэмдэглэвэл

$$S_r = S_R + f + h - g - e \text{ бөгөөд}$$

$$g = f + e + h \text{ юм. Эндээс}$$

$$S_r = S_R - 2e \text{ болох бөгөөд энэ нь}$$

$S_r < S_R$ гэдгийг харуулж байна.

БАГУУДЫН ТӨМЦӨӨНИ ДҮН :

№	Баг	I	2	3	4	5	НИЙТ ОНОО	Байр
1	ЭЛГ БАГ	///	0	6	8	0	9	
2	СУРАГЧ БАГ	6	///	6	0	0	12	Е
3	УБИС	6	0	///	0	3	9	
4	БУИС	6	6	6	///	0	18	Г
5	МАТЕМАТИКИЙН ХҮРЭЭЛЭН	6	6	6	0	///	18	П
		24	12	24	3	3		



ОЛОН УЛОХН МАТЕМАТИКИЙН ХХХ
ОЛИМПИАДЫН ХҮН, БҮЛГ, ТҮН БОДОЛТ.

Ц.ДЭМДОРЖ, А.ЦЭРЭННЯМБА /ДУНДГ ЭВЬ/

Олон улсын математикийн ХХХ Олимпиад /IMO/ 1991 оны 7-р сарын 12-ээс 23-нд шведийн Сигтун хотод болж 56 орон оролцлоо. Багийн дүнгээр ЗХУ/241/, Хятад/281/, Румын/225/, Герман/222/, АНУ/212/, Унгар/209/, Болгар/192/, Вьетнам/191/, Иран/191/, Энэтхэг/187/, Чехословак/186/ оноогоор эхний 10 байр эзэллээ.

Манай баг 33 оноогоор 47-р байранд орлоо. 9 сурагч 42 оноо авлаа. Ц.дараагийн Олимпиад 1992 онд ЗХУ-д, 1993 онд Туркт, 1994 онд Гонконгод, 1995 онд Канадад, 1996 онд Бразилд, 1997 онд Энэтхэгт, 1998 онд Монголд болохоор тогтлоо. Манай сурагчдаас Д.Хашбаяр/МНС/5, Д.Ганзориг/45-р сургууль/ 9, Н.Батбаяр/МНС/3, Б.Уламбаяр/1 сургууль, 9-р анги, 7, А.Энхсаяр/52-р сургууль/ 2, Д.Урданэ/1 сургууль/7 оноо авлаа.

Эхний өдөр.

7-р сарын 17.

1./ЗХУ/.Өгсөн $\triangle ABC$ -д багтсан тойргийн төв нь I байг, A, B, C орнууд дахь дотоод өнцгийн биссектрисууд нь эсрэг талуудад A', B', C' цэгүүдэд огтлолдог бол

$$\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}$$

Болохыг батал.

2./Румын/. $6 < n$ нь бүхэл тоо ба $a_1, \dots, a_n$ нь n -ээс бага n -тэй харилцан анхны бүх натурал тоонууд байг.

Хэрэв $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_k - a_{k-1} > 0$

бол n эсвэл анхны тоо, эсвэл 2-ын зэрэг гэж батал.

3., Хятад/ $S = \{1, 2, \dots, 280\}$ баиг. S -ийн n -элемент-
тэй дэд олонлог бүр нь хос хослоор харилцан анхны ётоо
агуулдаг байх n -ийн хамгийн бага утгыг ол.

2 дахь өдөр.

7-р сарын 18.

4., АНУ. k ирмэгтэй холбоот граф G өгчээ. 2-оос цөөнгүй
ирмэг гарсан орой бүрийн хувьд түүнээс гарсан ирмэгүүдийг
дугаарласан тоонуудын $XNEX$ нь 1 байхаар G -ийн ирмэг-
үүдийг $1, 2, \dots, k$ тоонуудаар дугаарлаж болохыг батал.

[Граф G -нь орой гэгдэх цэгүүд ба зарим ялгаатай хос
оройнуудыг холбосон ирмэгүүдээс тогтоно. Ялгаатай орой u ,
 v -ийн хос $\{u, v\}$ бүр нь нэгээс илүүгүй ирмэгт
харьяалагдана. Хэрэв ялгаатай оройнуудын хос $\{x, y\}$ бол-
гоны хувьд v_i, v_{i+1} ($0 \leq i < m$) оройнууд нь G -д
ирмэгээр холбогдсон байхаар оройнуудын ямар нэг дараа-
лал $x = v_0, v_1, \dots, v_m = y$ олддог бол G -г
холбоот граф гэдэг]

5., Франц. P нь $\triangle ABC$ -ийн дотоод цэг баиг, тэгвэл PAB ,
 PBC , PCA өнцгүүдийн ядам нэг нь 30° -аас хэтрэхгүй
гэж батал.

6., Голланд. Бүх i -ийн хувьд $|x_i| \leq C$ байхаар тогтмол тоо
 C олдж байвал бодит тооны тэгсгөнгүй дараалал
 $x_0, x_1, x_2, \dots$ -г зааглагдсан гэдэг.

а) 1 тэр өгсөн байх, аливаа ялгавар хэс i, j бүрийн хувьд

$$|x_i - x_j| / |i - j|^a \geq 1$$

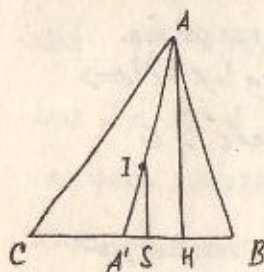
байх зэвгэлдсэн тогсгөлгүй дараалал

$x_0, x_1, x_2, \dots$ -г байгуул.

Бодлого бүр 7 оноотой ба өдөр бүр 4,5 цаг бодов.

Бодит.

I. Энэ бодлогыг I сургуулийн 9-р ангийн сурагч В.Элажбаяр ингэж бодов.



$$p = a + b + c \quad \text{—гэв}$$

$$IS, AH \perp CB \quad \text{бол}$$

$$\triangle A'IS \sim \triangle A'AH \quad \text{тул}$$

$$\frac{IA'}{AA'} = \frac{a}{p} \quad \text{болно.}$$

$$\frac{AI}{AA'} = 1 - \frac{IA'}{AA'} = 1 - \frac{a}{p} \quad \text{тул}$$

$$\frac{AI}{AA'} \cdot \frac{BI}{BB'} \cdot \frac{CI}{CC'} = \left(1 - \frac{a}{p}\right) \left(1 - \frac{b}{p}\right) \left(1 - \frac{c}{p}\right) \leq$$

$$\leq \left(\frac{3 - \frac{a+b+c}{p}}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \quad \text{ба}$$

тэнцэлдээ $1 - \frac{a}{p} = 1 - \frac{b}{p} = 1 - \frac{c}{p}$ буюу $a=b=c$ байхад хүрээ.

$$\frac{1}{4} < \left(1 - \frac{a}{p}\right) \left(1 - \frac{b}{p}\right) \left(1 - \frac{c}{p}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4} < \frac{(b+c)(a+c)(a+b)}{(a+b+c)^3}$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(a+c)(b+c) \quad \text{тул}$$

$$(a+b)(a+c)(b+c) > a^3 + b^3 + c^3 \quad \text{гэж батлая.}$$

$$a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 + 2abc > a^3 + b^3 + c^3 \Leftrightarrow$$

$$a^2(b+c-a) + b^2(a+c-b) + c^2(a+b-c) + 2abc > 0$$

үнэн тул бодлого бодогдэв.

Мөн I сургуулийн Х ангийн сурагч Д.Эрдэнэ масс амжилтаар үүн-
тэй төстэй бодолт хийж бүрэн оноогдоо авсан.

2. $a_1 = 1$, $a_2 = p$ —анхны тоо болно. $a_k = n-1$ ба

$r = p-1$ нь $a_1, a_2, \dots, a_k$ арифметик прогрессийн
ялгавар байг.

I, n —сондгой бол $a_2 = 2$, $r = 1$ ба $1, 2, \dots, n-1$ нь
 $a_1, \dots, a_k$ болно. $q < n$ гэдгээс $(q, n) = 1$ гэж гэдэгх
тул n —анхны тоо болно.

2/ n -төгш бөл $p \geq 3$ байна.

а/ $p=3$ бөл $r=2$ ба $1, 3, 5, \dots$, $n-1$ нь $a_1, \dots, a_k$ болох тул $q < n$ байх сондгой q бүрийн хувьд $(q, n) = 1$ буюу $n = 2^m$ болно.

б/ $p > 3$ бөл $3/n$ гэж гарах ба $a_k = a_1 + r(k-1)$ буюу

$$n-1 = 1 + (p-1)(k-1) - r$$

$$p-1/n-2$$

/I/

гэж гарна. $q/p-1$ байх анхны тоо $q-2$ зөв үзэв.

/I/-ээс $q/n-2$ гарна. $q < p$ тул q/n болно.

Иймд $q/n-2, q/n$ -ээс $q/2$ буюу $q=2$ гарна.

Иймд $p-1=2^e$, $p=1+2^e$, $e \geq 2$ болно.

p анхны тоо тул $e=2^t$ буюу $p=2^{2^t}+1$, $t \geq 1$ болно. $a_3 = a_1 + 2r = 1 + 2(p-1) = 2p-1 = 2^{2^t+1}+1$ тоо

3-д хуваагдах нь илэрхий учраас $3/a_3$, $3/a_n$ болж өгөх нь $(a_3, n) = 1$ гэдэгт зөрчинэ. Бид т.г. бодогдэв.

$$3. A_1 = \{k \in S; 2|k\}, A_2 = \{k \in S; 3|k\}, \\ A_3 = \{k \in S; 5|k\}, A_4 = \{k \in S; 7|k\}. \text{ ба } A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

байг. $|A_1| = 140, |A_2| = 93, |A_3| = 56,$
 $|A_4| = 40, |A_1 \cap A_2| = 46, |A_1 \cap A_3| = 28$
 $|A_1 \cap A_4| = 20, |A_2 \cap A_3| = 18, |A_2 \cap A_4| = 13,$
 $|A_3 \cap A_4| = 8, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 9, |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = 6,$
 $|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 4, |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 2, |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1$

бэлхүүруулах ба гаргах зарчмаар

$$|A| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 140 + 93 + 56 + 40 - 46 -$$

$$- 28 - 20 - 18 - 13 - 8 + 9 + 6 + 4 + 2 - 1 = 216 \text{ болно.}$$

А-аас ямарч 5 тоо авахад тэдний аль нэг хөөр нь ямар нэг

$$A_i - g \quad i = \overline{1, 4} \quad \text{орх тул тэр хөөр харилцан анхны}$$

байх үл чадна.

Иймд $n > 216$ гэж гарлаа.

Одоо $n = 217$ гэдгийг батлая.

$$B_1 = A_1 \setminus \{2, 3, 5, 7\}, B_2 = \{11^2, 11 \cdot 13, 11 \cdot 17, 11 \cdot 19,$$

$$11 \cdot 23, 13^2, 13 \cdot 17, 13 \cdot 19\}, P = S \setminus \{B_1 \cup B_2\}$$

байг. $|P| = |S| - |B_1| - |B_2| = 60$ ба P нь I ба

S -ийн бүх анхны тоонуудаас тогтно.

$T \in S$ ба $|T| = 217$ байр. T нь хэс хэсээрээ

харицан анхны 5 тэр агуулжээгээр харуулъя.

$|T \cap P| \leq 4$ бэлх тохилдлыг л авч үзэх хэрэгтэй.

Энэ үед $|T \cap (S \setminus P)| \geq 217 - 4 = 213$ буюу S -ийн бүх

зохиомол тэрүүд дотор /тоо нь 220у T -д үл орох тоо
санидаа л 7 байна. $M_1, \dots, M_8$ -аар дараахь олонлогуудыг
тэмдэглэе:

$\{2 \cdot 23, 3 \cdot 19, 5 \cdot 17, 7 \cdot 13, 11^2\}, \{2 \cdot 29, 3 \cdot 23, 5 \cdot 19, 7 \cdot 17, 11 \cdot 13\},$
 $\{2 \cdot 31, 3 \cdot 29, 5 \cdot 23, 7 \cdot 19, 11 \cdot 17\}, \{2 \cdot 37, 3 \cdot 31, 5 \cdot 29, 7 \cdot 23, 11 \cdot 19\},$
 $\{2 \cdot 41, 3 \cdot 37, 5 \cdot 31, 7 \cdot 29, 11 \cdot 23\}, \{2 \cdot 43, 3 \cdot 41, 5 \cdot 37, 7 \cdot 31, 11 \cdot 27\},$
 $\{2 \cdot 47, 3 \cdot 43, 5 \cdot 41, 7 \cdot 37, 11 \cdot 29\}, \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2\}$

$M_i \subset S \setminus P, i = \overline{1, 8}$ ба Дирихлейн зарчмаар $M_{i_0} \subset T$ байх нь

$1 \leq i_0 \leq 8$ дугаар олдоно. M_{i_0} -ийн таван тоо
харицан анхны байна. Иймд $n = 217$ боллоо.

4. Дээрх график /хэлбэрөөс байх нь албагүй/ i -ээс илүү

зэрэг бүхий эрмэд, нийлэх ирмэгүүдийн дугааруудын $X_{i, j}$ нь
 I байхаар ирмэгүүдийн дугаарлан болохыг харуулая. G -ийн

хамгийн урт зам A_1 -ийг сонгон авч $1, 2, \dots, l$ тэрүүдээр
ирмэгүүдийг нь дугаарлая. $G|A_1 = G_1$ баян үйлдлийг давтан
хийх ирмэгүүдийг нь $l+1, l+2, \dots$ тэрүүдээр дугаарлая.

дурин A орлог авъя. A -г дайрсан хамгийн урт

A_2 зам байгаа. Хэрэв A нь A_2 -замын эх буюу

төгсгөл бол түүний зэрэг 1, хэрэв ийм бий бол A нь A_2 -

замын дунд орших тул түүнийг дийрч гарсан ба гарсан ирмэгүүд

r ба $r+1$ дугаартай байгаа. Иймд A -д нийлсэн
армэгүүдийн $XHEX$ нь 1 байна. Энэ бодолтыг д.Лавазериг
хийж бүтэн энэероо авсан болно.

5. $\alpha = \angle BAC$, $\angle ABC = \beta$, $\gamma = \angle ACB$, $x = \angle PAB$,
 $y = \angle PBC$, $z = \angle PCA$ байг.

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \quad |1|$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma \geq \sqrt{3}. \quad |2|$$

тэнцэл бишүүд хүчинтэй: $|1|$ нь $f(x) = \log \sin x$

функц $(0, \pi)$ завсарт гүдгэр гэдгээс гарна.

Хэрэв $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$ бол $f(x) = \operatorname{ctg} x$ нь
хэтгэр функц гэдгээс $|2|$ гарна. Үлдэх тохиолдолд

жишээ нь $\gamma \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ бол $\operatorname{ctg} \frac{\alpha+\beta}{2} = c$ гэхэд

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma &\geq 2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha+\beta}{2} + \operatorname{ctg} \gamma = \\ &= 2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha+\beta}{2} - \operatorname{ctg} (\alpha+\beta) = 2c - \frac{c^2-1}{2c} = \\ &= \frac{3c^2+1}{2c} = \frac{3c}{2} + \frac{1}{2c} \geq \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$\triangle PAB$ -ээс синусын теоремоор

$$\frac{PA}{PB} = \frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin x} \quad \text{гэх олно. 1-үний бддлээр}$$

$$\frac{PB}{PC} = \frac{\sin(\gamma-z)}{\sin y}, \quad \frac{PC}{PA} = \frac{\sin(\alpha-x)}{\sin z} \quad \text{болно.}$$

Иймд

$$\frac{\sin(\alpha-x) \sin(\beta-y) \sin(\gamma-z)}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \sin \beta} = 1$$

$$\frac{\sin(\alpha-x)}{\sin \alpha} = \sin \alpha (\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} \alpha) \quad \text{тул}$$

$$\frac{1}{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma} = (\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} \alpha)(\operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} \beta)(\operatorname{ctg} z - \operatorname{ctg} \gamma) \leq$$

$$\leq \left(\frac{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z - \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \gamma}{3} \right)^3$$

ОУУУ / I /-ээр $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z - \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \gamma \geq 2\sqrt{3}$

тул /2/-оос $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z \geq 3\sqrt{3}$

гэх гарна. Иймд $\operatorname{ctg} u \geq \sqrt{3}$, $u \in \{x, y, z\}$ гэх гарах
тул батлагдэв.

6. Ямарч натурал тоог 2-тэй тооллын системд нэг утга-
тайгаар дүрсэлж болдог:

$$i = b_0 + b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 2^2 + \dots + b_k \cdot 2^k, \quad b_i \in \{0, 1\},$$

$$k \in \mathbb{N} \text{ байг. } h_i = b_0 + b_1 \cdot 2^{-1} + \dots + b_k \cdot 2^{-k} \quad \text{бол}$$

$$0 \leq h_i \leq 1 + 2^{-1} + \dots + 2^{-k} \leq \frac{1}{1-2^{-1}} \quad \text{болно.}$$

$i \neq j$ байхгүй $j = c_0 + c_1 2 + \dots + c_k \cdot 2^k$, $c_i \in \{0, 1\}$

ба $t = \min \{p \in \{0, 1, \dots, k\} \mid c_p \neq c_p\}$

байг. Тэгвэл $2^t \leq |i - j|$ учир

$$\begin{aligned} |h_i - h_j| &= |(c_0 - c_0) + (c_1 - c_1) 2^{-a} + \dots + (c_k - c_k) 2^{-ka}| \\ &\geq |(c_t - c_t) 2^{-ta}| - |(c_{t+1} - c_{t+1}) 2^{-(t+1)a}| - \dots - |(c_k - c_k) 2^{-ka}| \\ &\geq 2^{-ta} - \frac{2^{-(t+1)a}}{1 - 2^{-a}} = 2^{-ta} \left(1 - \frac{2^{-a}}{1 - 2^{-a}}\right) = \left(\frac{2^a - 2}{2^a - 1}\right) \cdot |i - j|^{-a} \end{aligned}$$

болж. Иймд $|h_i - h_j| \cdot |i - j|^a \geq \frac{2^a - 2}{2^a - 1}$

болж тул $\chi_i = \frac{2^a - 2}{2^a - 1} \cdot h_i$ авна.

ЗАХИН ЗАРЧИМ

Зарим бодлогыг бодоход ашигласан арга, санаа нь зөвхөн уг бодлогод л хэрэглэгддэг, зогсохгүй ер нь алгебр, геометр, тооны онол, комбинаторикийн зэрэг олон янзын бодлогод нийтлэг хэрэглэгддэг онцлог байдаг. Ийм бодлого бодох арга, санаануудын тоонд өмнөх онуудын улсын математикийн олимпиадын эмхтгэлүүд болон "Мэргэд гарах сурвалж" цувралуудад нийтлэгдсэн Дирихлейн зарчим, математик индукц, инвариант, графин арга зэргийг оруулж болно. Эдгээр нийтлэг, өргөн хэрэглэгддэг арга, санаануудтай танилцах эзэмших нь аливаа бодлогыг бодоход хэн болгонд чухал ач холбогдолтой байдаг. Ийм бодлого бодох санааны тоонд захин зарчим гэж нэрлэгдэх доорхи санаа зүй ёсоор орно. Олон янзын бодлогыг бодоход ямар нэг утгаар хамгийн "захин", "хязгаарын" элементийг авч үзэх тустай байдаг.

Өөрөөр хэлбэл гурвалжны хувьд бол түүний хамгийн их, бага тал, өнцгүүд; хэсэг тоонуудын бол тэдгээрийн хамгийн их, бага тоо гэх мэт ямар нэг хэмжигдэхүүний хамгийн их эсвэл хамгийн бага утгаа авдаг элементийг сонирхом үзсэнээр олон янзын бодлогыг шийдэх тохиолдол олонтоо тааралддаг. Үүнийг бид хойшид захин зарчим гэж нэрлэнэ.

Захин зарчмын санаа алгебр, геометр, комбинаторикийн зэрэг янз бүрийн бодлогод хэрхэн хэрэглэгддэг байгааг бодлого дараахээр сонирхой. Бодлого I /Москвагийн МО, 1976/

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2 \\ x_2 + x_3 = x_4^2 \\ x_3 + x_4 = x_5^2 \\ x_4 + x_5 = x_1^2 \\ x_5 + x_1 = x_2^2 \end{cases}$$

тэгшитгэлийн системийн бүх эсвэл шийдлүүдийг ол.

Бодолт $\leftarrow x_i, i = \overline{1,5}$ тоонуудыг

X, Y

гэх тэнцэтгэл.

Тэгвэл уг системээс $X^2 \leq 2X$, $Y^2 \geq 2Y$ гэх гарна.

Гэтэл $X, Y > 0$ ба $2 \leq Y \leq X \leq 2$ болох тул

$X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = X_5$ гэсэн ганц шийд гарна. ►

Бодлого 2 $X^2 + Y^2 = 3(Z^2 + U^2)$ тэгшитгэл натурал тоон олонлогт шийдгүй болохыг батал. Бололт ◀ эсрэгээс нь шийдтэй гэх үзье. Эдгээр шийдүүдийн дотроос $X^2 + Y^2$ хэмжигдэхүүн

хамгийн бага байх тэр шийдийг авч үзье. Энэ нь ганц шийдтэй бол сөрлийг нь, ийм чанартай шийд хэл хэд байдаг бол тэдгээрийн аль нэгийг нь авна гэсэн үг. Эдгэр чанартай шийд нь

$\{a, b, c, d\}$ болог. $a^2 + b^2 \equiv 3$ тул $a \equiv 0$, $b \equiv 0$ гэх гарна.

/Аливаа тооны квадрат 3 модулийн үргэлж 1 эсвэл 0 байдаг. Ө-х

аливаа а тооны хувьд $a^2 \equiv 0 \pmod{3}$ / эсвэл $a \equiv 0 \pmod{3}$ /

байх учир $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$ / юуу $a^2 \equiv 0 \pmod{3}$ / байна гэсэн үг/

Эндээс $a = 3m$, $b = 3n$ болох тул анхны тэгшитгэлээс

$a^2 + b^2 = 9(m^2 + n^2) = 3(c^2 + d^2)$ буюу $c^2 + d^2 = 3(m^2 + n^2)$ болж

$\{c, d, m, n\}$ гэсэн өөр нэг шийд гарна. Гэтэл $c^2 + d^2 < a^2 + b^2$

тул уг шийд нь билийн анхны авч үзсэн $\{a, b, c, d\}$ шийдийн чанарт харшлахад хүрч билийн бодлого шийдэгдэв. ►

Бодлого 3 /Английн МО, 1975/ I ралжустаа дугуй дотор аль ч хоёринх нь зай I-ээс багагүй байдаг 7 цэг өгөгдөв. Тэгвэл тэдгээр цэгүүдийн аль нэг нь тойргийн төвтэй давхцахыг батал.

Бололт ◀ эсрэгээс нь $O_1, O_2, \dots, O_7$ цэгүүдийн аль нь ч тойргийн төв 0 цэгтэй давхцдаггүй болог. Тэгвэл

$\angle O_1 O_2 O_3 + \angle O_2 O_3 O_4 + \dots + \angle O_7 O_1 O_2 = 360^\circ$ байх тул эдгээр

I шулуун дээр оршино ►

Боллого 5. /Бүх Холбоотны МО, 1982/ $[I...I]$ тоонд хуваагддаг, нийрүүлгийн нийлбэр нь m -ээс бага байдаг натурал тоо олдох уу.

Бодолт. ◀ Боллогийн нөхцөлийг хангасан натурал тоо байдаг гэж үзье. Тэгвэл аль чанартай тоонууд дотор хамгийн бага нь гэж байна. Түүнийг $p = a_1 10^k + \dots + a_n$ гэв. Эндээс $n \geq m$ байх $p = p - (10^k - 10^{k-m})$ тооны нийрүүлгийн нийлбэр нь p -ээс бага байх ба $[I...I]$ тоонд хуваагдах тул p тоонд сонголтонд харшина. Ийм боллогийн нөхцөлийг хангах натурал тоонуудын олонлог хоосон байхавс займаггүй. ►

Боллого 6. /Мораватгийн МО, 1974/ Олон улсын математикийн эрдэмтдийн чуулганд оролцогчдын хувьд тэнцүү тооны танилтай ачиваа 2 эрдэмтэн болгон ерөнхий танилгүй байсан бол зөвхөн ганц хүнтэй танил эрдэмтэн олгохыг батал. /Танилын харьцааг олимпиад гэж үзнэ/

Бодолт. ◀ Хамгийн их танилтай A эрдэмтэнтг авч үзье. Түүний танилдын тоо n болов. / n танилтай хүн хэд хэд байсан бол аль нэг нь ч A гэсэн болно/. Боллогийн нөхцөл ёсоор тэнцүү тооны танилтай ачиваа 2 эрдэмтэн болгон ерөнхий танилгүй учир A -гийн танилууд бүгд өөрөөсө и гантай тооны танилуудтай. Ийм зөвхөн ганц n боломж байна. 1 танилтай, 2 танилтай, ..., n танилтай гэсэн. Яагай зөвхөн 1 танилтай эрдэмтэн олгохыг баталлаа. ►

Боллого 7. /Бүх Холбоотны МО/ Парламентын гишүүн болгон 3-ээс илүүгүй гишүүнтэй үг сөргөлдөнө байвал. Тэгвэл парламентын ачиваа гишүүн болгон зөвхөн 1-ээс илүүгүй гишүүнтэй үг сөргөлдөнө

А-ийн эсрэг нь хэр хүн ийм тооны танилтай бол. ховд А-тай танил болон дотоодын нөхцөл эрхтэй танилтай бүх дотоодын нөхцөл хорцолно мөн А-н танил хүмүүс-2
 $A_1, \dots, A_n$ ийм $A_i: i=1, \dots, n-2$ танилгүй

наг байхаар уг парламентыг 2 тэнхэмд хуваах болохыг батал.

Бодолт. ◀ Парламентыг турш аргаар 2 тэнхэмд хуваах уг хуваалтан дахь уг сөрөгөлцөг бүх хосуудыг тооцуудыг гаргав. Парламентыг 2 тэнхэмд хуваах боломжийн тоо тэгсдөг учир түүнд киргалах уг сөрөгөлцөг хосуудын тоо ч тэгсдөг байх учиртай. Иймд хосуудын тоо хамгийн бага байх тийш хуваалт олдоно. Энэ үед парламентын гишүүн болгон өөрийнхөө тэнхэмд I-ээс илүүгүй гишүүнтэй л үн сөрөгөлцөг байх таарна. Өөрөөгөөр 3 кунтэй уг сөрөгөлцөг парламентын гишүүн байгааг гэвэл уг парламентын гишүүнтэй нөгөө тэнхэмд гишүүдтэй шинэ хуваалт гаргахад үүнд харгалзах уг сөрөгөлцөг хосуудын тоо ялаж өмнөхөөсөө I-ээр хорогдоход хүрнэ. Энэ өмнөх хуваалтан дахь уг сөрөгөлцөг хосуудын тоо хамгийн бага гэдэгт харшлана. Эцэст нь дасгал болгон захиа зарчмын санааг дээр нэг хэлбэргээр ашиглагдах доорхи бодлогуудыг тохиуулав.

Бодлого 8. $x^4 + y^4 = z^4 + t^4$ тэгшитгэлийг хангах хос хосоороо ялгаатай натурал тоонууд олдохгүйг батал.

Бодлого 9. ABC гурвалжны AB, BC, CA талууд дээр харгалзан C_1, A_1, B_1 цэгүүдийг авав. Хэрэв AA_1, BB_1, CC_1 хэрчимүүдийн урт I-ээс хэтэрлэдггүй бол ABC гурвалжны талбай $I/\sqrt{3}$ -аас хэтрэхгүй болохыг батал.

Бодлого 10. $1, 2, \dots, 200$ тоонууднаас I -ээс бага нэг тоо бас өөр 99 ширхэг тоо сонгон авахад эдгээр дотор нэг нь нөгөөнөө хуваагдахыг 2 тоо олдохыг батал.

Бодлого 11. Хавтгай дээр бүгд I шулуун дээр оршдоггүй $n \geq 3$ нэг өгөгдөв. Тэгвэл тэгтгэлийн аль нэг тэргэм дээрх дотроо ганц ч нэг агуулаагүй тэгсрэг олдохыг батал.

*хүн Дин болон нэг үзвэр нь дунд 4 ганц
тэгсрэг мөнх хамтны баазад 1 ганц тэгсрэг
хүн. Дин*

Бодлого 12. n мөртөй, n баганаатай аялгат таблицын нүднүүдэд n^2 сөрөг биш тоонуудыг байрлуулжээ. Хэрвээ ямар нэг нүдэнд тэг байрласан бол уг нүдийг агуулсан мөр, баганууд дээр орших тоонуудын нийлбэр $\frac{n}{2}$ -оос багагүй байдаг бол эдгээр бүх тоонуудын нийлбэр $\frac{n^2}{2}$ -оос багагүй болохыг батал.

Бодлого 13. Аливаа тетраэдр болгонд бүх хавтгай энцгүүд нь хурц байлаг 3 талт өнцөг олдохыг батал.

Бодлого 14. Төгсөлөггүй шатрын хөлгийн нүднүүд дээр ямар нэг бохит тоонуудыг бичжээ. Тэгвэл өөрийг нь тойроа байгаа 8 нүдийн дор хамх 4 нүдэнд нь бичигдсэн тооноос хэтрэхгүй тоо бичигдсэн нүд олдохыг батал.

Бодлого 15. Хоорон дахь зайнууд нь бүгд ялгаатай $2k + 1$ гариг болгон дээр одон орон сурмаач суул өөртөө хамгийн ойрхон орших гаригт ажиглалт хийдэг. Тэгвэл хэний ч ажиглалтанд өртдөггүй гариг олдохыг батал.

Бодлого 16. Аль ч хоёр шулууны нь огтлолцсон цэгээр өөр нэг ялгаатай шулуун мөн огтлолдог байхаар хавтгай дээр аль ч хоёр нь параллель биш төгслөг тооны шулуунууд өгөгдсөн бол тэдгээр нь бүгд 1 цэгээр огтлолцохыг батал.

Бодлого 17. Гурвалжны биссектрис болгон урт нь 1-ээс их байдаг бол түүний талбай $1/\sqrt{3}$ -аас их болохыг батал.

Бодлого 18. Хэд хэдэн дугуйнууны талбайн нийлбэр 1. Тэгвэл талбайн нийлбэр нь $\frac{1}{9}$ -ээс их байдаг харицан огтлолцдоггүй хэдэн дугуйг сонгон авч болохыг батал.

Бодлого 19. 1 талбайтай аливаа гүлгэр олон өнцөгт болгоныг 2 талбайтай тэгш өнцөгт дотор багтаах болохыг батал.

Боллого 29. Х хотын аль ч автобусны зогсоолдос бусад бүх зогсоол руу зорчих Соллог байв. Тэгвэл үхсэн "үх автобус" нь зогсоолд хувьд дээрх анхны нөхцөлийг хадгалахаар зөвхөн ганц автобусны зогсоолд түүгээр автобус ангирэхгүй байхаар засварт оруулж болохыг батал.

АМПИЛАСАН ХЭГИЛ

1. В.Е. Прасолов "Задачи по планиметрии" Часть II Наука 1986.

2. Г.А. Гальперин, А.И. Толпыго "Московские математические олимпиады" Привлечение 1986.

3. Н.Е. Васильев, А.А. Егоров "Задачи всесоюзных математических олимпиад" Наука 1988.

4. "Зарубежные математические олимпиады" под. ред. Н.Н. Сергеева. Наука. 1987.

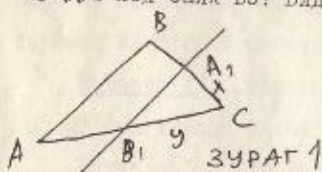
ГУРВАЛЖНЫ ТАЛБАЙ БА ПЕРИМЕТРИЙГ ЗЭРЭГ
ТАЛАН ХУВААДАГ ШУЛУУН

Багш нарын дунд явагдсан анхдугаар олимпиадад тавигдсан доорхи бодлогыг дэлгэрүүлэн авч үзье.

Бодлого 1. $a, b, c / a \leq b \leq c /$ талуудтай гурвалжны хувьд $p^2 = 2bc$ байдаг бол b ба c талуудыг дайрсан, уг гурвалжны талбай ба периметрийг зэрэг таллан хуваадаг шулуун A өнцгийн биссектрис перпендикуляр болохыг батал.

Багш нарын ихэнх $p^2 = 2bc$ нөхцөлийг чадварлаг ашиглан асуудлыг амжилттай шийдэгээсэн. Өр нь аливаа гурвалжны хувьд түүний талбай ба периметрийг зэрэг таллан хуваадаг шулуун байдаг эсэх, байвал хичнээн байх вэ гэдэг асуудал сонирхолтой юм. Энэ бодлогыг шийдэхийг зорьё.

Бодлого 2. $a, b, c / a \leq b \leq c /$ талуудтай аливаа гурвалжны хувьд түүний талбай ба периметрийг зэрэг таллан хуваадаг шулуун хэл байх вэ? Бидэнд $BC=a, CA=b, AB=c$ байдаг ABC гурвал-



хил өгөгдсөн болог. Бодлогын шаардлагыг хангадаг шулууныг l гэж тэмдэглэе. Доорхи 3 боломжийг сонирхоё. l шулуун BC, CA талуудыг харгал-

зан A_1, B_1 цэгүүдээр огтлолдог болог. /Зураг 1/.

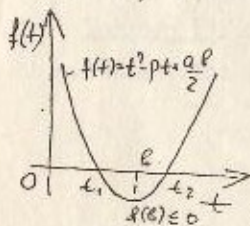
$$A_1C = x, B_1C = y$$

гэвэл l шулууны чанар ёсоор

$$\frac{1}{2} = \frac{S_{A_1B_1C}}{S_{ABC}} = \frac{A_1C \cdot B_1C}{AC \cdot BC}$$

$$A_1C + B_1C = \frac{1}{2} (AB + BC + CA) \text{ буюу}$$

$$x + y = p \quad (1), \quad xy = \frac{ab}{2} \quad (2)$$



болно. A_1, B_1 нэгүүд нь BC , AC талууд дээр орших учир $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ /3/ тэнцэтгэл бичиж болох ёстой. Тэгвэл ийм x, y тоонууд оршин байх асуудал нь квадрат гурван гишүүтийн хувьд нь Виетийн теорем ёсоор $f(t) = t^2 - pt + \frac{ac}{2}$ олон гишүүнт $0 \leq t_1 \leq a$, $0 \leq t_2 \leq b$ эсвэл $0 \leq t_2 \leq a$, $0 \leq t_1 \leq b$ тэнцэтгэл бишийг хангадаг t_1, t_2 бодит язгуурууд орших байх эсэх асуудалтай эквивалент. Гэтэл $f(b) = b^2 - pb + \frac{ac}{2} = \frac{b}{2}(2b - 2p + a) = \frac{b}{2}(b - c) \leq 0$ учир $t_1 \leq b \leq t_2 \leq b$ буюу $t_2 = b$ гэдгээс $t_1 = \frac{a}{2}$ гэж гарна. /Зураг 2/. Иймд зөвхөн ABC гурвалжны адил хажуут $AB=BC$ тохиолдолд л A оройг дайрсан BC талыг таллан хуваадаг шулуун бодлогын нөхцөлийг хангах нь харагдаж байна.

2° ℓ шулуун нь BC , AB талуудыг харгалзан A_1, C_1 нэгүүдээр огтлолдог боловч $BA_1=x$, $BC_1=y$ гээ. Тэгвэл I^0 тохиолдолтой төстэй гээр $x+y = p$ /4/, $xy = \frac{ac}{2}$ /5/, $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ болно.

Эдгээр нөхцөлийг хангах x, y тоонууд оршин байх асуудал нь

дээрхийн адил $f(t) = t^2 - pt + \frac{ac}{2}$ олон гишүүнт

$0 \leq t_1 \leq a$, $0 \leq t_2 \leq c$ эсвэл $0 \leq t_2 \leq a$, $0 \leq t_1 \leq c$

нөхцөлийг хангах t_1, t_2 бодит

язгууртай байх асуудалтай экви-

валент болно. Гэтэл $f(a) = a^2 - pa +$

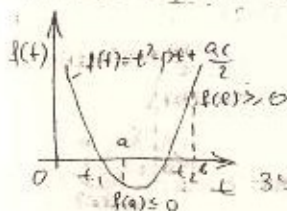
$\frac{ac}{2} = \frac{a}{2}(2a - 2p + c) = \frac{a}{2}(a - b) \leq 0$

$f(c) = c^2 - pc + \frac{ac}{2} = \frac{c}{2}(c - b) \geq 0$

болох учир $0 \leq t_1 \leq a \leq t_2 \leq c$ болоход хүнэ. /Зураг 3/. Иймд

BC , AC талуудыг дайрсан бодлогын нөхцөлийг хангах шулуун

нэг рэнд оршин байна гэсэн үг.



3° Одоо ℓ шулуун AC , AB талуудыг хавсгалзан E_1 , F_1 цэгүүдээр огтлолцог болов. $AE_1 = x$, $AF_1 = y$ гэв. Тэгвэл $x+y = p/2$, $xy = \frac{bc}{2}$ /3/, $0 \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq c$ /9/ болно. Мөн $f(t) = t^2 - pt + \frac{bc}{2}$

олон гишүүнтийг судлахад

хүрнэ.

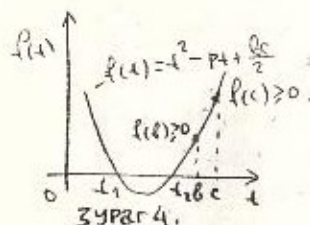
$$f(b) = b^2 - pb + \frac{bc}{2} = \frac{b}{2}(b-a) \geq 0$$

$$f(c) = c^2 - pc + \frac{bc}{2} = \frac{c}{2}(c-a) \geq 0$$

Уг олон гишүүнтийн дискриминант $D = p^2 - 2bc$

–г

сонирхож үзвэл



а/ $p^2 < 2bc$ бол $D < 0$ болж $f(t)$ квадрат гурван гишүүнт бодит язгуургүй болно. Иймд AC , AB талыг дайрсан бодлогын нөхцөлийг хангах ℓ шулуун олдохгүй.

б/ $p^2 \geq 2bc$ бол $D \geq 0$ болж $f(t)$ нь t_1, t_2 ($t_1 \leq t_2$)

гэсэн 2 бодит язгууртай байна. $b \leq t_1$ эсвэл $b \geq t_2$ байх

учиртай. /Зураг 4/. Гэтэл $b \leq t_1$ гэвэл $b \leq \frac{1}{2}(t_1 + t_2) = \frac{p}{2} = \frac{a+b+c}{2}$

буюу $2b \leq a+c$ болно. $a+c \geq 2b \geq b+a$

эндээс $c \geq a+b$ болж гурвалжны тэнцэтгэл биелд хавсгалахад

хүрнэ. Иймд $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq b \leq c$ болж таарна. Эндээс

$0 \leq t_1 \leq b$, $0 \leq t_2 \leq c$ эсвэл $0 \leq t_1 \leq b$, $0 \leq t_2 \leq c$

тэнцэтгэл бишгүйн аль нь ч боломжтой тул t_1, t_2 ($p^2 \geq 2bc$)

үед AC , AB талыг дайрсан бодлогын нөхцөлийг хангах шулуун

ны 2 олдоно. Энэ 2 шулуун нь $\angle CAB$ -ны биссектрисатай тэгш

хэлтэй байх нь илэрхий. Эг $t_1 = t_2$ ($p^2 = 2bc$)

үед энэ шулуун

нь дээрх бишгүйн биссектрис перпендикуляр болж анхны өгүүл-

өөн олимпиадын бодлогод хүрнэ. Дээрх үр дүнгүүдийг нэртгэвэл аливаа $a, b, c / a \leq b \leq c$ / талтай гурвалжин хувьд түүний талбай ба периметрийг зэрэг таллан хуваадаг шулуун

а/ $p^2 < 2bc$ бол яг ганц ширхэг

б/ $p^2 = 2bc$ бол яг хоёр ширхэг

в/ $p^2 > 2bc$ бол яг гурван ширхэг тус тус байдаг

байхна ээ. Ойролцоо нь энэ бодлоготой ойролцоо бусад тухайн тохиолдол нь бэлдэг 3 бодлого тавья.

1. 3, 6, 10 талуудтай гурвалжин өгөгдөв. Тэгвэл уг гурвалжин талбай ба периметрийг зэрэг таллан хуваадаг шулуун цор ганц оршиж батай. /Кипачин математикийн олимпиад 1985/

2. Гурвалжинд багтсан тойргийн төв уг гурвалжин талбай ба периметрийг зэрэг таллан хуваадаг шулуун дээр оршиж батай. /Бославин математикийн олимпиад 1981/.

3. Аливаа гүдгэр олон өнцөгтийн хувьд түүний талбай ба периметрийг зэрэг таллан хуваадаг шулуун олдохыг батал.

/Квант сэтгүүлийн № 108-р бодлого/

АШИГЛАСАН ХЭВЛЭЛ

1. "Математика" сэтгүүл. 1989 онн № 3, 4

2. "Зарубежные математические олимпиады" Москва. Наука 1987.