

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАДЫГ  
ЗОХИОН БАЙГУУЛАХ ХОРОО

# УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАД



МУУИС-ИЯН

ХЭВЛЭЛ

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАДЫГ  
ЗОХИОН БАЙГУУЛАХ ХОРОО

# УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН XXVIII ОЛИМПИАД

Улсын математикийн олимпиадад бэлтгэгчдэд тусламж

№15

Редактор дон. Ц. Дашдорж

$$2n = p_1 + p_2 \cdot p_3$$

$$2n = p_1 + p_2?$$

Улаанбаатар. 1993 он.

Дж. 1993-4.14

## ӨМНӨХ ҮГ

Улсын болон Олон улсын математикийн олимпиадад бэлтгэгчдэд, математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийн сурагчид, математикт дур сонирхолтой сурагч, оюутан, багш нарт зориулсан цувралын "Улсын математикийн XXVIII олимпиад" нэртэй дугаарыг гаргав. Тус гарын авлагыг бэлтгэхэд УМОЗВХ-ны гишүүд идэвхтэй оролцлоо.

Уг номын талаархи аливаа санал, хүсэлт, зөвлөгөөгөө МУҮИС-ийн алгебрийн тэнхимд ирүүлэж байвал бид гүнээ талархах болно.

Редактор доц. Ц. Дашдорж

## МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН XXVIII ОЛИМПИАДЫН ДҮН

Ү. МААМ

XXVIII Олимпиадын эцсийн даваа 1992 оны V сарын 5-10-нд Дархан хотод амжилттай болж дүнгээ гаргалаа. 17 аймаг, 4 хотын 42 багш, 110 сурагч оролцлоо. Олимпиадыг өөрийн хотод явуулж хамгийн аятай нөхцөл бололцоогоор хангасан Дархан хотын захиргаа, Воловсролын хэлтэс, түүний харъяа сургуулиуд болон ялангуяа Дархан хотын дэд дарга Д. Баярцогт, Д. Ватчулуун даргатай боловсролын хэлтсийн ажилтнууд, Э. Ворхүү захиралтай 17-р сургуулийн хамт олон болон нийт Дарханчуудад ММОЗВХ-ны нарийн өмнөөс талархал илэрхийлье. Олимпиадын VIII-X анги болон багш нарын Улсын аварга математикч болсон Д. Алтангарал /УБ-II/, Ш. Эрдэнэбат /МУИС/, В. Уламбаяр /УБ-I/, А. Энхжаргал /УБ-II/ нарт олимпиадыг зохион байгуулах хороонууд болоод нийт математикчдын өмнөөс халуун баяр хүргэе!

II байранд VIII ангиас С. Цогзолмаа /УБ-II/, Д. Амгалан /УБ-II/, IX ангиас В. Тогтох /Дархан/, Хангиас В. Ватзориг /УБ-I/, Д. Ватнасан /УБ-77/ Багш нараас А. Доржпалам /УБ-23/ нар, III байранд VIII ангиас Ү. Отгонбаяр /УБ-II/, Л. Октябрь /УБ-84/, М. Өлзийдэлгэр /УБ-I/, IX ангиас С. Ганболд /УБ-I/, Д. Болд /Дархан/, Р. Дэлгэрсүрэн /МУИС/, Н. Ват /МУИС/, X ангиас Ш. Лхагвасүрэн /УБ-I/, Д. Энхбаяр /МУИС/, багш нараас Д. Баторших /Увс/ нар шалгарлаа. Олимпиадад сурагчдаа сайн бэлтгэж оруулсан С. Ганбат /УБ-II/, В. Амарбаясгалан /УБ-I/, Х. Ватмонх /Дархан/ нар мөнгөн шагналаар шагнуулав.

Багш нарын олимпиадад эхний гурван байр эзэлсэн А. Энхжаргал, А. Доржпалам, Д. Ваторших нарт "Улсын зөвлөх багш"-ийн цол диплом олголоо. Нэг хүнд ноогдох дундаж оноогоор УБ, Дархан хот, Хөвсгөл аймаг шалгарч дараа жилийн Олимпиадад 3, 2, 1 хүн дүрэмд заасан тооноос нэмж оруулах эрх олж авлаа. Багуудын тэмцээнд "Сурагчид", "Комисс", "Багш нарын I, II", "Дархан" гэсэн 5 баг хүчээ сорьсноос "Комисс" баг 24 оноогоор I байр эзэлж 1500 төг, "Багш нарын I" баг II байр эзэлж 1000 төгрөгөөр шагнагдлаа. Энэ жил Москвад болох Олон Улсын Математикийн 33 дугаар Олимпиадын бэлтгэлд Хангийн В. Уламбаяр, В. Ватзориг, Д. Ватнасан, Д. Энхбаяр, Ш. Лхагвасүрэн, Г. Чулуунбаатар, Ч. Содгэрэл, Д. Ватгөмөр, З. Мэндсайхан, IX ангийн Ш. Эрдэнэбат, Б. Тогтох нарыг оруулахаар тогтлоо. Энэ жил П. Энхболдын нэрэмжит уран бодолтын шагналыг авах хүн гарсангүй. Харин 1990 оны XXVI Олимпиадын II даваанд дэвшигдсэн боловч ганц ч хүн бодож чадаагүй учир монголын нийт математикчдын өмнө Ц. Дашдоржийн дэвшүүлсэн бодлогыг бодсоны төлөө манай авьяаслаг залуу математикч В. Батцэнгэлийг П. Энхболдын нэрэмжит уран бодлогын тусгай шагнал-медаль, диплом 3000 төгрөгөөр Шарын голын уурхайн захиргаанаас шагналаа. Байр эзэлсэн бүх багш, сурагчдад 1000-2000 төгрөгийн шагналыг Шарын гол, тэмцээнд оролцсон бүх сурагчдад 200 төгрөгийн шагналыг Дарханы Олимпиадыг зохион бай-

гуулах хороо олголоо. Эхний гурван байр эзэлсэн багш нарыг Дарханы ЗБХор-ооноос урт, богино нэхий дээлээр шагнав. Олимпиадын нэвэр тэтгэгч "Гагаан" компанийн эзэл, математикч Р. Батбаяр өөрийн багш Ц. Дашдоржийг олон жил олимпиад сайн зохион байгуулсныг нь үнэлж нэхий дээл мөнгөн шагналаар, мөн Р. Батбаяр болон "Найрамдал" компанийн эзэл Г. Ганбат нар ЗБХ-ны 10 хүн тус бүрийг 1000 төгрөгөөр шагналаа.

Мөн VIII ангийн сурагчдаас МУИС-ийн дэргэдэх математикийн гүнзгий-рүүлсэн сургалттай IX ангид элсэлт хийлээ. Олимпиадыг зохион байгуулах хоёр хорооны нийднээрээр Монголын Математикийн нийгэмлэгийг байгуулж, XXVIII олимпиадыг зохион байгуулах, Дархан хотын хорооны дансны дугаарыг тус нийгэмлэгийн данс болгон шилжүүлж, энэ намар МУИС-ийн 50 жилийн ойн үеэр хурлаа хийж, зохион байгуулалтдаа орох хүртэл тус дансны дугаарыг ашиглах эрхийг Дархан хотын дэд дарга Д. Баярцогтод үлдээлээ.

Мөн Математикийн Нийгэмлэг байгуулагдсаныг тэмдэглэж Дэлхийн нийт математикчдын дунд 1984 оны XX Олимпиадын III даваанд давшигдээд ганц ч хүн бодож чадаагүй учир Монголын нийт математикчдын өмнө Ц. Дашдоржийн дэвшүүлсэн  $\{1, 2, \dots, 24\}$  олонлогийг хоосон биш 3 ангид хуваахад аль нэг ангид нь  $x+y=z$  байх гурван ялгаатай тоо олдоно гэсэн бодлогыг бодсон хүнд ММОЗБХороо ба Монголын Математикчдын Нийгэмлэгийн шагнал, П. Энхболдын уран бодолтын медаль олгохоор тогтлоо. Энэ бодлого нь математикийн олон салбарын уулзвар дээр байгаа их ач холбогдолтой бодлого юм. 1998 оны Олон Улсын Математикийн Олимпиад Монголд болохтой холбогдон бидэнд хийх ажил, хоронго, мөнгө их шаардлагатай байна.

Ардын банкны ММОЗБХорооны 321051 тоот дансанд болон Монголын Математикийн Нийгэмлэгийн дансанд математикт элэгтэй хамт олон болон хувь хүмүүс хандив өргөж эхлээд байна. Монголын Математикийн Нийгэмлэгт анхны хандивыг Д. Баярцогт, Ц. Дашдорж, Б. Батцангал нар тус бүр 1000 төгрөгөөр өргөлөө. Олимпиадад оролцсон бүх сургуулиуд 2000-10000 төг, багш нар 100-3000 төгрөг хандивлалаа. Хэнтэй аймаг энэ жил ямар ч шалтгаангүйгээр Олимпиадыг тасалсан нь тусгүй байна. Дарханчууд Монголын нийт ард түмний математикийн их баярыг маш сайхан зохион байгуулж хойшдын Олимпиадад сургажтай, бидний санаж явсан олон сайхан санааг хэрэгжүүлээ. Дарханы Олимпиад манай математикчдын сэтгэл зүрхэнд тод үлдэв.

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХҮШ ОЛИМПИАДЫН  
ҮШ АНГИЙН III ДАВААНЫ БОДЛОГО

Ц. ЛУВСАНДОРЖ

✓ A1.  $ax^2+bx+c=0, a \neq 0$  бүхэл коэффициенттэй квадрат тэгшитгэл бүхэл шийдтэй бол  $a, b, c$  тоонуудын дор хаяж нэг нь тэгш тоо болохыг батал.

A2. Хавтгайд бүхэл координаттай 13 цэг өгөгдөв. Эдгээр цэгүүд дээр төгсгөлтэй хэрчмүүдийн дундаж цэгүүдийг холбосон хэрчмүүдийн дотор дундаж цэгүүд нь бүхэл координаттай байх 2 хэрчим олдохыг батал.

A3.  $\angle AOB$  өнцгийн дотор  $OM=1$  байх  $M$  цэг авав. Нэг орой нь  $M$  цэг ба нөгөө оройнууд өнцгийн талууд дээр харгалзан орших, хамгийн бага периметртэй гурвалжин байгуулж, периметрийг ол.

B1. 1, 8, 12 төгрөгийн үнэ бүхий дэвтэрнүүдээс, тус бүрээс нь орсон байхаар 29 ширхэгийг 92 төгрөгт багтаан хичнээн янзаар худалдан авч болох вэ?

B2. Тойрог дээр тэмдэглэсэн 1992 ширхэг цэгийн аль нэгийг нь улаан, үлдсэн цэгүүдийг цагаан өнгөөр будав. Улаан цэг дээр оройтой олон өнцөгтийн тоо нь бүх орой нь цагаан цэгүүд байх олон өнцөгтийн тооноос бага байж болох уу?

B3. Тойрогт багтсан дөрвөн өнцөгтийн нэг диагональ нь уул тойргийн диаметртэй давхцаг бол эсрэг талуудын нөгөө диагональ дээрх проекцүүд тэнцүү болохыг батал.

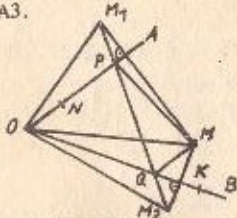
### БОДЛОГУУДЫН БОДОЛТ

A1.  $ax^2+bx+c=0, a \neq 0$  (1) бүхэл коэффициенттэй квадрат тэгшитгэлд  $x=y/a$  орлуулга хийвэл,  $y^2+by+ac=0$  (2) хэлбэрийн квадрат тэгшитгэл болно. (1) тэгшитгэлийн бүхэл шийд нь  $x_1$  бол  $y_1=ax_1$  нь (2) тэгшитгэлийн бүхэл шийд болох нь ойлгомжтой юм. Виетийн теорем ёсоор  $y_2=-b-y_1$  болохоор (2) тэгшитгэлийн нөгөө шийд нь мөн бүхэл юм.  $y_1+y_2=-b, y_1 \cdot y_2=ac$  тэнцлийн хоёр талыг харгалзан үржвэл:  $y_1 y_2 (y_1+y_2)=-abc$  болно. Энэ тэнцлийн хувьд  $y_1, y_2, (y_1+y_2)$  бүхэл тоонуудын дор хаяж нэг нь заавал тэгш байх учраас  $a, b, c$  тоонуудын дор хаяж нэг нь тэгш болоход хүрч бодлого бодогдов.

A2. Өгсөн цэгүүдийг  $A_1, A_2, \dots, A_{13}$  гэж тэмдэглэе. Тэгвэл Дирихлейн зарчим ёсоор  $A_1, A_2, \dots, A_{13}$  цэгүүдийн дотор координатын хэлбэр нь харгалзах координатууд нь тэгш сондгойгоороо адилхан байх дор хаяж 4 цэг олдоно. Эдгээр цэгүүдийг  $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}$  гэж тэмдэглэвэл харгалзан  $A_{11}A_{12}, A_{11}A_{13}, A_{11}A_{14}, A_{12}A_{13}, A_{12}A_{14}, A_{13}A_{14}$  хэрчмүүдийн дундажууд болох  $B_1, B_2, \dots, B_6$  цэгүүд нь бүхэл координаттай байх нь ойлгомжтой. Мөн зарчмаар  $B_1, \dots, B_6$  цэгүүдийг холбосон хэрчмийн дотор төгсгөлийн цэгүүдийнх нь координатын хэлбэр адилхан байх дор

хэлж 2 хэрчим олдоно. Эдгээр хэрчмүүдийн дунджууд бүхэл байх нь мэдээж.

А3.



$\angle AOB$  өнцгийн  $OA, OB$  талуудын хувьд  $M$  цагтай тэгш хэмтэй орших цэгүүдийг харгалзан  $M_1, M_2$  үсгээр тэмдэглэе.  $M_1M_2$  шулуунтай, өнцгийн  $OA, OB$  талуудын огтлолцсон цэгүүдийг харгалзан  $P, Q$  гэвэл  $PMQ$  гурвалжны периметр нь  $M_1M_2$  хэрчмийн урттай тэнцүү нь харагдаж байна.

$\forall N \in (OA), \forall K \in (OB)$  цэгүүдийн хувьд  $NMK$  гурвалжны периметр нь  $M_1NM_2$  тахир шугамын периметртэй тэнцүү байгаа нь  $PMQ$  гурвалжин бидний сонирхож буй гурвалжин болох нь ойлгогдлоо.  $OM_1 = OM_2 = OM = 1, \angle M_1OM_2 = 90^\circ$  гэдгээс  $PMQ$  гурвалжны периметр  $\sqrt{2}$  болж бодлого бодогдсон.

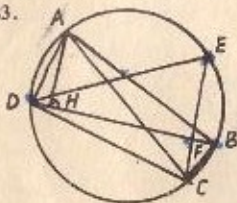
В1. Худалдан авагч 1, 8, 12 төгрөгийн үнэтэй дэвтэрнүүдээс харгалзан  $x, y, z$  ширхэгийг худалдан авсан гэе. Тэгвэл

$$\begin{cases} x + 8y + 12z = 92 \\ x + y + z = 29 \end{cases}$$

тэгшитгэлийн системийн эерэг бүхэл шийдийн тоо бидэнд сонирхолтой. I тэгшитгэлээс II тэгшитгэлийг гишүүнчлэн хасвал:  $y = 9 - 11z/7$  болно.  $y \in \mathbb{N}$  гэдгээс  $z = 7t, t \in \mathbb{N}$  ба  $x > 0, y > 0, z > 0$  байх ёстойг анхаарвал  $0 < t \leq 9/11$  болсноор тэгшитгэлийн систем эерэг бүхэл шийд байхгүй нь харагдав. Иймд худалдан авагч бодлогын нөхцөлөөр дэвтэрнүүдээс худалдан авч чадахгүй юм.

В2. Өгсөн цэгүүдийг  $A_1, A_2, \dots, A_{1992}$  гэж тэмдэглээд,  $A_k$  цэгийг улаан өнгөөр, үлдсэн цэгүүдийг цагаан өнгөөр будъя. Тэгвэл бүх орой нь цагаан цэгүүд байх аливаа  $A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_n}, 2 \leq n \leq 1991$  олон өнцөгт бүхэнд улаан цэг дээр оройтой  $A_{k_1}A_{k_2}\dots A_{k_m}$  олон өнцөгтийг харгалзуулснаар, бүх орой нь цагаан цэгүүд байх олон өнцөгтийн тоо нь улаан цэг дээр оройтой олон өнцөгтийн тооноос ихгүй байгаагийн зэрэгцээ, улаан цэг дээр оройтой олон өнцөгтийн тоо нь бүх орой нь цагаан цэгүүд байх олон өнцөгтийн тооноос, улаан цэг дээр оройтой гурвалжныхаа тоогоор илүү байгаа нь харагдаж байна.

В3.



Энэхүү бодлогыг УШАНгийн сурагчийн мэдлэгийн хүрээнд олон аргаар бодож болох ба энд хамгийн хялбар бодолтыг хийе.  $ABCD$  багтсан дөрвөн өнцөгтийн  $DB$  диагональ дээр  $A, C$  оройгоос татсан перпендикуляр суурийг харгалзан  $H, F$  үсгээр тэмдэглэе.

$CF$  шулууны багтаасан тойрогтой огтлолцсон цэгийг  $E$  гэвэл харилцан перпендикуляр талуудтай өнцгүүд тэнцүү байдаг болохоор  $\angle ADB = \angle DCE$  байна.  $\widehat{AB} = \widehat{DE}$  гэдгээс  $AB = DE$  ба  $AB, DE$  нумуудад  $AE$

нум сөрөнхий учраас  $\angle ABD = \angle EDB$  болж,  $ABH, EDF$  гурвалжнууд тэнцүү болох нь харагдлаа. Иймд  $HB = FD$  ба  $FB = DH$  болж бодлого бодогдлоо.

# УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН XXVIII ОЛИМПИАДЫН VIII АНГИЙН III ДАВААНЫ БОДЛОГО

Ц. БАТСАЙХАН, Ц. ЛУВСАНДОРЖ

A1.  $x, y$  натурал тоонуудын хувьд  $xy + x + y = 71$ ,  $x^2y + xy^2 = 880$  бол  $x^2 + y^2$  нийлбэрийг ол!

A2.  $ABCD$  тэгш өнцөгтийн  $AB, BC$  талууд дээр харгалзан ялгаатай  $M, N$  цэгүүдийг авав. Тэгвэл  $2AC < MN + ND + DM$  болохыг батал.

A3. Дурын тэг биш 5 векторуос нийлбэрийн нь урт үлдсэн векторуудын нийлбэрийн уртаас хэтрэхгүй байхлар хоёроос илүүгүй векторыг сонгон авч болохыг батал.

B1.  $a, b, c, d$  нь эерэг тоонууд бол  $a/(b+c) + b/(c+d) + c/(d+a) + d/(a+b)$  нийлбэрийн хамгийн бага утга 2 гэдгийг батал.

B2. Тойрогт багтсан зургаан өнцөгтийн  $AB$  талын урт 31 ба нөгөө тал тус бүрийн урт 81 бол  $A$  оройгоос татагдах диагоналийн уртын нийлбэрийг ол.

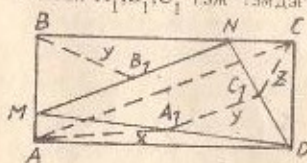
B3. Квадратыг шулуунаар огтолж огтлолын аль нэг хэсгийг эргүүлэн яг огтлолоор нь нааж, мөн цаашид энэхүү үйлдлийг давтан гүйцэтгэх замаар зов гурвалжин үүсгэж болохгүйг батал.

## БОДЛОГУУДЫН БОДОЛТ

A1. Бодлогын бодолт:  $x + y = a$ ,  $xy = b$  гэсэн орлуулга хийе. Тэгвэл

$\begin{cases} a+b=71 \\ ab=880 \end{cases}$  гэсэн систем үүснэ. Үүнийг бодвол  $\{a, b\} = \{16, 55\}$  гэсэн шийд олдоно. Буцааж орлуулбал  $\begin{cases} x+y=55 \\ xy=16 \end{cases}$  буюу  $\begin{cases} x+y=16 \\ xy=55 \end{cases}$  гэсэн 2 систем үүснэ. Эдгээрийг бодвол  $\{x, y\} = \{5, 11\}$  гэсэн шийд олдоно. Эндээс  $x^2 + y^2 = 5^2 + 11^2 = 146$  гарна.

A2. Бодлогын бодолт:  $DM, MN, ND$  хэрчмүүдийн дундаж цэгүүдийг харгалзан  $A_1, B_1, C_1$  гэж тэмдэглэе. Тэгвэл диаметрт тулсан өнцгийн чанар ёсоор  $DA_1 = A_1M = AA_1 = x$ ,  $MB_1 = B_1N = BB_1 = y$ ,  $NC_1 = C_1D = CC_1 = z$  болно. Нөгөө талаас гурвалжны дундаж шугамын чанар ёсоор  $A_1C_1 = y$  байна.



Иймд  $AC < x + y + z$  баях нь илэрхнэ. Үүний 2 талыг 2-оор үржүүлбэл  $2AC < DM + MN + ND$  гэж гарна.

A3. Бодлогын бодолт:

а/. Нэг векторыг сонгон авч болно гэж батал! Эсрэгээс нь аль ч векторын урт нь үлдсэн векторуудын нийлбэрийн уртаас их байдаг гэж үзье!

Өөрөөр хэлбэл:  $|\vec{a}_1| > |\vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5|$   
 $|\vec{a}_2| > |\vec{a}_1 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5|$

$$|\vec{a}_5| > |\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4|$$

Эдгээрийн 2 талыг квадрат зэрэг дэвшүүлж доош нь нэмээд амхэтгэвэл:

$$0 > 3(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5)^2 \text{ болж зөрчилд орно.}$$

б/. 2 векторыг сонгон авч болно гэдгийг батлая. Эсрэгээс нь аль ч 2 векторын нийлбэрийн урт нь үлдсэн 3 векторуудын нийлбэрийн уртаас их гэж үзье.

Жишээ нь:  $|\vec{a}_1 + \vec{a}_2| > |\vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5|$  байг. Үүний 2 талыг квадрат зэрэг дэвшүүлье.

$\vec{a}_1^2 + 2\vec{a}_1\vec{a}_2 + \vec{a}_2^2 > \vec{a}_3^2 + \vec{a}_4^2 + \vec{a}_5^2 + 2\vec{a}_3\vec{a}_4 + 2\vec{a}_3\vec{a}_5 + 2\vec{a}_4\vec{a}_5$  Ийм тэнцэл бишийг бүх 10 хос векторын хувьд бичээд доош нь нэмбэл  $4(\vec{a}_1^2 + \dots + \vec{a}_5^2) + 2(\vec{a}_1\vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_4\vec{a}_5) > 6(\vec{a}_1^2 + \dots + \vec{a}_5^2) + 6(\vec{a}_1\vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_4\vec{a}_5)$  болно. Эндээс  $0 > (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_5)^2$  болж зөрчилд орно.

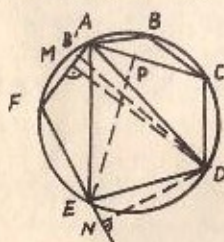
в/. Гурван векторыг сонгон авч болдоггүй гэж батлая. Үүний тулд 1 эсрэг жишээ байгуулахад хангалттай 0,9 см; 1 см; 1,1 см; 1,2 см; 1,3 см урттай ижил чиглэлтэй таван векторын хувьд бодлогын нөхцлийг хангасан гурван вектор олдохгүй нь илэрхий.

г/. Дөрвөн векторыг сонгон авч болохгүй нь илэрхий.

B1. Бодлогын бодолт:  $x > 0, y > 0$  тоонуудын хувьд  $1/xy \geq 4/(x+y)^2$  тэнцэл биш үнэн байдгийг бодлогыг шийдэхэд ашиглана.

$a/(b+c) + b/(c+d) + c/(d+a) + d/(a+b) = (a/(b+c) + c/(d+a)) + (b/(c+d) + d/(a+b)) = (a(d+a) + c(b+c))/((b+c)(d+a)) + (b(a+b) + d(c+d))/((c+d)(a+b)) \geq 4((a^2 + ad + cb + c^2)/(a+b+c+d)^2) + 4((b^2 + ab + cd + d^2)/(a+b+c+d)^2) = 2((a+b+c+d)^2 + (a-c)^2 + (b-d)^2)/(a+b+c+d)^2 \geq 2$  гэдэг нь ямар ч  $a, b, c, d$  тоонуудын хувьд илэрхийллийн утга 2-оос багагүйг харуулж байна. Бидний ашигласан тэнцэл биш нь  $x=y$  үед тэнцэлдээ хүрдэг болохыг анхаарвал  $a=c, b=d$  үед илэрхийллийн утга 2 болж бодлого бодогдов.

B2. Бодлогын бодолт: Энэ бодлогыг Птолемейн теоремыг ашиглан маш хялбар бодож болохыг тэмдэглээд өөр нэг бодолыг харуулъя!



AF тал дээр  $AB = AB'$  байх  $B'$  цэгийг авъя.  $FD = BD \Rightarrow \angle BAD = \angle FAD$  болно. "Хоёр тал хоорондох өнцгийн шинж" ёсоор  $\triangle ABD = \triangle AB'D$  болно. Нөгөө талаас  $B'D = BD = FD$  тул D цэгийн AF тал дээрх проекц M нь  $FB'$  хэрчмийг хагаслан хуваана. Иймд  $AM = 31 + 25 = 56$  болно. EF шулуун дээрх D цэгийн проекцийг N үсгээр тэмдэглэвэл ADEF нь адил хажуут трапец гэдгээс  $\angle DAF = \angle DEN$  тул  $\triangle AMD \sim \triangle NED$

байна. Иймд  $56/AD = AM/AD = EN/ED = ((AD-81)/2)/81 \Rightarrow AD = 144$  ба  $EN = 63/2$  байхын хамт  $END, FND$  тэгш өнцөгт гурвалжнуудаас  $ND = (45\sqrt{11})/2, FD = AE = 135$  бол-

но. Одоо AC-г олѐе. Үүний тулд АЕС адил хажуут гурвалжны AC талын дун-  
дажыг Рүсгээр тэмдэглэвэл  $\triangle PAB \cong \triangle MAD$  болно. (Учир нь  $EC = FD$  тул  $\angle EAP =$   
 $= \angle MAD$  байна). Иймд  $AP/AM = AE/AD \Rightarrow AP = (AM \cdot AE)/AD = 105/2$  болно.  
 $AC = 2AP = 105$ , эндээс  $AC + AD + AE = 105 + 144 + 135 = 384$  болж бодлого бодогдов.

В3. Водлогын бодолт: Эсрэгээс нь х талтай квадратаас а - талтай зөв гур-  
валжинг гаргаж болдог гэвэл, уул үйлдлийн дүнд квадратын талбай периметр  
өөрчлөгддөггүйг анхаарвал  $4x = 3a$ ,  $x^2 = (a^2\sqrt{3})/4$  болж, эндээс  $9 = 4\sqrt{3}$  гэсэн зөрчилд  
хүрч бодлого шийдэгдлээ.

## УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХVШ ОЛИМПИАДЫН VIII АНГИЙН ДӨРВИЙН ДАВААНЫ ВОДЛОГУУД

Ц. ЛУВСАНДОРЖ

### I-ӨДӨР

A1. /Н. ДАЙВИЯ-ОДУВИС ОЮУТАН/

Хавтгайд  $3k$  ширхэг цагийг аль ч  $(k+1)$  ширхэгийг нь авахад хоорондох зай нь  
яг 1 байх хос олдож байхаар байрлуулж болох уу?

A2. /Ц. ХҮРЭЛ-ОЧИР, МУИС ОЮУТАН/

$a, b, c, d$  нь  $a^7 + b^7 \leq 1$ ,  $c^7 + d^7 \leq 1$  нөхцлүүдийг хангах сөрөг биш тоонууд бол  
 $a^3c^4 + b^3d^4 \leq 1$  болохыг батал.

A3. /Ц. ЛУВСАНДОРЖ, УВИС/

О төвтэй тойргийн  $AB$  ( $0 < \angle AB < \pi$ ) нумын аливаа  $P$  цагийг дайруулан  $OB$  радиус-  
тай параллелиар татсан шулууны  $OA$  шулуунтай огтлолцсон цэг нь  $H$  бол  $OPH$   
гурвалжинд багтсан тойргийн төвийн геометр байрыг ол.

### II-ӨДӨР

B1. /Ц. ЛУВСАНДОРЖ, УВИС/

$ABC$  гурвалжинд багтсан тойргийн радиус  $r$ , периметр нь  $P$  болно. Тэгвэл  $ABC$   
гурвалжинд багтсан тойргийн төвийг дайруулан талуудтай нь харгалзан паралле-  
лиар татсан шулуунуудаас гурвалжны талуудаар таслагдсан хэрчмүүдээр гурвал-  
жин байгуулж болохыг батал. Энэ гурвалжны периметр  $P_0$  бол  $6r < P_0 < P - 3r$  болохыг  
батал.

B2. /Д. ХАШВАЯР, МУИС ОЮУТАН/

$\{x_n\}$  бодит тоон дараалал нь  $x_n = x_{n-1}^2 + 28x_{n-1} + 182$  томъёогоор өгөгдсөн ба  
 $x_1 = x_{1992}$  бол  $x_1$ -ийг ол.

B3. /В. АДЪЯАСҮРЭН ШУА/

$4((x^2 - x + 1)/(29 - 2\sqrt{7}))^3 = ((x^2 - x)/(14 - \sqrt{7}))^2$  тагшитгэлийг бод.

Сурагчид уул бодлогуудыг бүрэн гүйцэт бодоогүйн учир зохиогчийн бодолтуу-

дыг энд сийрүүлэн бичье.

## ВОДЛОГУУДЫН ВОДОЛТУУД

### I-ӨДӨР

A1. Өгсөн цэгүүдээр 1 талтай  $k$  ширхэг зөв гурвалжин байгуулъя. Тэгвэл дураараа сонгосон  $(k+1)$  цэгүүдийн дотор нэг гурвалжны оройнууд болох дор хаяж 2 цэг Дирихлейн зарчмаар олдох ёстойгоор бодлого бодогдов.

A2.  $a^3c^4 + b^3d^4$  илэрхийллийн нэмэгдхүүн бүрт арифметик, геометрийн дундажын тухай теоремыг хэрэглэн ихэсгэж, өгсөн нөхцлүүдийг анхаарвал:

$$a^3c^4 + b^3d^4 \leq (3a^7 + 4c^7)/7 + (3b^7 + 4d^7)/7 = 3(a^7 + b^7)/7 + 4(c^7 + d^7)/7 \leq 1 \text{ болж батлагдав.}$$



A3.  $\forall P \in \overset{\sim}{AB}$  цэгийн хувьд  $OPH$  гурвалжинд багтсан тойргийн төв нь  $O_1$  ба  $B, P, A$  цэгүүдтэй тойргийн төвийн хувьд тэгш хамтай цэгүүдийг харгалзан  $B_1, P_1, A_1$  гэж тэмдэглэвэл,  $\angle P_1OA_1 = \angle OPH$  гэдгээс  $PB_1$  шулуун гурвалжны биссектрис болохыг анхаарвал:

$\angle OO_1B_1 = \angle OPB_1 + \angle POO_1 = (\angle P_1OB_1 + \angle A_1OP_1)/2 = \angle BOA/2 = \angle OAB_1/2$  байгаа нь бидний сонирхож буй цэгийн геометр байр нь  $OAB_1$  гурвалжныг багтаасан тойргийн  $OA$  нум болох нь харагдаж бодлого бодогдов.

### II-ӨДӨР

B1.  $ABC$  гурвалжны талууд  $AB=c, BC=a, CA=b$  ба багтаасан тойргийн төв нь  $O$ , түүнийг дайруулан харгалзан  $AC, AB, BC$  талуудтай параллелиар татсан шулуун гурвалжны талуудыг огтлох цэгүүдийг харгалзан  $M, N; L, K; P, Q$  үсгээр тэмдэглэе.  $A, B, C$  оройн дотоод өнцгийн биссектрисүүдийн эсрэг талаа огтолсон цэгүүдийг харгалзан  $A_1, B_1, C_1$  гэж тэмдэглээд, эхлээд  $MN, LK, PQ$  хэрчмүүдээр гурвалжин байгуулж болохыг харъя. Гурвалжны оройнуудын хувьд Ван-Обелийн теоремыг бичвэл:  $BO/OB_1 = BC_1/C_1A + BA_1/A_1C = (a+c)/b$ ;  $AO/OA_1 = (b+c)/a$ ;  $CO/OC_1 = (a+b)/c$  ба эндээс:  $AO/AA_1 = (b+c)/(a+b+c)$ ;  $BO/BB_1 = (a+c)/(a+b+c)$ ;  $CO/CC_1 = (a+b)/(a+b+c)$  болно.  $\triangle BMN \sim \triangle BAC, \triangle CKL \sim \triangle CAB, \triangle APQ \sim \triangle ABC$  гэдгээс  $MN/AC = BO/BB_1$ ;  $KL/AB = CO/CC_1$ ;  $PQ/CB = AO/AA_1$  буюу  $MN = (b(a+c))/(a+b+c)$ ;  $KL = (c(a+b))/(a+b+c)$ ;  $PQ = (a(b+c))/(a+b+c)$  байна. Энд  $MN + KL \geq PQ$ ,

$MN + PQ \geq KL, KL + PQ \geq MN$  учир уул хэрчмүүдээр гурвалжин байгуулж болох нь харагдлаа. Одоо тэнцэтгэл бишийг батлахын тулд байгуулсан гурвалжны периметрыг  $6S_{ABC} < a^2 + b^2 + c^2$  тэнцэтгэл бишийг ашиглан ихэсгэвэл:  $P_0 = (2ab + 2bc + 2ac)/(a + b + c) = ((a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2))/(a+b+c) < (a+b+c) - 6S/(a+b+c) = P - 3r$  болох ба нөгөө талаас:  $6S_{ABC} < ab + bc + ac$  тэнцэтгэл бишийг ашиглавал:  $P_0 > 12S/P = 6r$  болсноор бодлого бүрэн бодогдлоо.

B2. Өгсөн томъёог:  $x_n^2 + 14 = x_{n-1}^2 + 28x_{n-1} + 196 = (x_{n-1} + 14)^2$  хэлбэрт бичвэл:

$(x_n + 14) = (x_{n-2} + 14)^2 = \dots = (x_1 + 14)^{2^{1991}}$ ,  $n = 1992$  болох ба  $x_1 = x_{1992}$  гэдгийг анхаарвал:  $x_1 + 14 = (x_1 + 14)^{2^{1991}}$  байна.  $y^2 - y = 0$  тэгшитгэл  $y = 1$ ,  $y = 0$  гэсэн бодит 2 шийдтэй тул  $x_1$  -нь харгалзан -13, -14 байх нь ойлгогдлоо.

В3. Өгсөн тэгшитгэл нь  $x = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$  язгууртай байгаа нь харагдаж байна. Тэгшитгэлийг  $(x^2 - x + 1)^3 / (x^2 - x)^2 = (29 - 2\sqrt{7})^3 / (28 - 2\sqrt{7})^2 (1)$  хэлбэрт бичье. (1) тэгшитгэлийн зүүн талыг  $((1/x)^2 - 1/x + 1)^3 / (1/x^2 - 1/x)^2$  ба  $((x - 1/2)^2 + 3/4)^3 / ((x - 1/2)^2 - 1/4)^2$  хэлбэрүүдэд хувирган бичиж болдог. хэрэв  $x_0$  тэгшитгэлийн язгуур бол  $1/x_0$ ;  $1 - x_0$  тоонууд язгуурууд нь болох нь ойлгомжтой байна. Иймд уул тэгшитгэл нь  $x_1 = 2\sqrt{7}$ ,  $x_2 = 1/2\sqrt{7}$ ,  $x_3 = 1 - 2\sqrt{7}$ ,  $x_4 = 1 - 1/2\sqrt{7}$ ,  $x_5 = 1/(1 - 2\sqrt{7})$ ,  $x_6 = 1/(1 - (1/\sqrt{7}))$  язгууруудтай болж бодлого шийдэгдлээ.

### УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХVШ ОЛИМПИАДЫН III

#### ДАВААНЫ ГХ АНГИЙН БОДЛОГУУД

А. ХАШБААТАР, Л. ХАДХҮҮ, Д. ПҮРЭВСҮРЭН

#### I-ӨДӨР

А1.  $1^2 + 7^2 + \dots + (6n-5)^2 = n(n-1)(2n-1)a + n(n-1)b + nc$  томъёо натурал  $n$  бүрийн хувьд үнэн байхаар  $a, b, c$  тогтмол тоонуудыг ол.

А2.  $f(x) = \sqrt{1+x^2-x} + \sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$  функций хамгийн бага утгыг ол.

А3. D цэгт ортой өнцгийн нэг тал дээр A, B хоёр цэг өгчээ. Өнцгийн нөгөө тал дээрээс AB хэрчим хамгийн их өнцгөөр харагдах C цэгийг ол. Хэрэв энэ өнцөг нь өгсөн өнцөгтэй тэнцүү бол BCD гурвалжны хэлбэрийг тогтоо.

#### II-ӨДӨР

В1.  $a_{n+1} = (1 - (1/m))a_n + a/(ma_n^{m-1})$ ,  $a_0 > 0$  рекуррент томъёогоор өгөгдсөн дараалал нийлэхийг баталж, хязгаарыг нь ол. Энд  $a$  - нь өгөгдсөн зэрэг тоо,  $m$  нь өгөгдсөн натурал тоо болно.

В2. "A - аас үл хэтрэх дурын 10 натурал тоо авахад адгээрээс харьцаа нь  $[2/3; 3/2]$  завсарт орох 2 тоо олдоно" гэсэн чанартай натурал A тоонуудын дотроос хамгийн ихийг нь ол.

В3. ABC гурвалжны AB, BC талууд дээр APB, CLB гэсэн төсөөтэй гурвалжнууд байгуулав. Хэрэв  $\angle APB = \angle BLC = 90^\circ$  ба M нь AC талын дундаж цэг бол PM = LM гэж батал.

#### БОДЛОГУУДЫН БОДОЛТ

А1.  $S_n = 1^2 + 7^2 + \dots + (6n-5)^2 = \sum_{k=1}^n (6k-5)^2$  гэж тэмдэглэе.

1. Бодолт  $S_n = \sum_{k=1}^n (36k^2 - 60k + 25) = 36 \sum_{k=1}^n k^2 - 60 \sum_{k=1}^n k + 25n = 36n(n+1)(2n+1)/6 - 60n(n+1)/2 + 25n = n(12n^2 - 12n + 1) = n[6(n-1)(2n-1) + 6n - 5] = n[6(n-1)(2n-1) + 6(n-1) + 1] = 6(n-1)n$

$(2n-1)+6(n-1)n+n$ . Эндээс  $a=b=6$ ,  $c=1$  байх нь гарч байна.

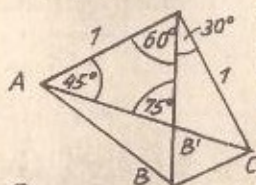
**II. Водолт:** өгөгдсөн тэнцэл аливаа  $n$ -ийн хувьд үнэн байх учир  $n=1$ ,  $n=2$ ,  $n=3$  гэж авбал  $c=1$

$$\left. \begin{aligned} 6a+2b+2c=50 \\ 30a+6b+3c=219 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} 3a+b=24 \\ 5a+b=36 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow a=b=6, c=1$$

Ийнхүү  $a, b, c$ -ийн утгыг  $n=1, 2, 3$  үед томъёо зөв байхаар олов. Одоо  $a, b, c$ -ийн эдгээр утганд дурын  $n$ -ийн хувьд томъёо зөв байхыг математик индукцийн аргыг хэрэглэж батлая.  $n=1$  үед томъёо үнэн байхыг бид мэднэ.  $n=m$  үед томъёо зөв, өөрөөр хэлбэл:  $S_m = 6(m-1)m(2m-1) + 6(m-1)m + m$  байг.  $n=m+1$  үед зөв гэдгийг батлая.

$$S_{m+1} = S_m + (6m+1)^2 = 6(m-1)m(2m-1) + 6(m-1)m + m + 36m^2 + 12m + 1 = 6m(2m^2 - 3m + 1) + m - 1 + 6m + 2 + m + 1 = 6m(2m^2 + 4m + 2) + m + 1 = 6m[(m+1)(2m+1) + (m+1)] + m + 1 = 6m(m+1)(2m+1) + 6m(m+1) + m + 1$$
 гэж батлах зүйл гарав.

#### A2. I. Водолт:



Хамгийн бага утгаа  $x \geq 0$  үед авах нь илт.

$\angle ADB = 60^\circ$ ,  $\angle BDC = 30^\circ$ ,  $|AD| = |DC| = 1$ ,  $|DB| = x$

байхаар  $ABCD$  дөрвөн өнцөгтийг байгуулъя. Тэг-

вал косинусын теорем болон гурвалжны тэнцэтгэл

бишийг хэрэглэвэл:  $f(x) = \sqrt{1+x^2-x} + \sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$

болно.  $f(x) = \sqrt{1+x^2-x} + \sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$  болно.  $f$  функц хамгийн ба-

га  $\sqrt{2}$  гэсэн утгаа  $x_0$  цэг дээр авдаг гавал синусын теорем ёсоор  $1/\sin 75^\circ =$

$= x_0 / \sin 45^\circ \Rightarrow x_0 = \sin 45^\circ / \sin 75^\circ = \sqrt{3}-1$  байх нь ойлгомжтой юм.

**II. Водолт:**  $f(x) = 2x - 1/\sqrt{x^2-x+1} + (2x-\sqrt{3})/\sqrt{x^2-x\sqrt{3}+1}$ ,  $f'(x) = 0$  тагшитгэлийг

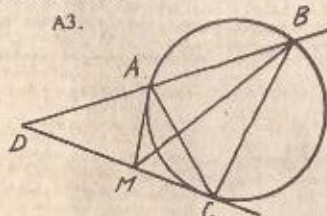
бодвол  $x = \sqrt{3}-1$  гэсэн ганцхан шийд гарна. Эндээс  $f$  функц  $]-\infty, \sqrt{3}-1[$  завсарт

буурч,  $[\sqrt{3}-1, +\infty[$  завсарт өсөх нь гарах юм. Иймд  $x = \sqrt{3}-1$  нь  $f$  функцийн ми-

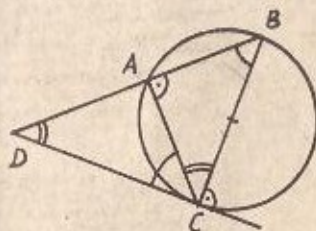
нимумын цэг болох ба улмаар энэ цэг дээр  $f$  функц хамгийн бага утгаа авах

нь ойлгомжтой. Энэ утга нь  $f(\sqrt{3}-1) = \sqrt{1+(\sqrt{3}-1)^2-(\sqrt{3}-1)} + \sqrt{1+(\sqrt{3}-1)^2-\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} = \sqrt{2}$  болно.

A3.



Зураг [a]



Зураг [b]

Тэмдэглэлээ А цэг В, D цэгүүдийн хооронд байхаар тохируулав. А, В цэгүүдийг

дайрсан, өнцгийн талыг шүргэсэн тойрог байгуулж, шүргэлтийн цэгийг  $S$  гэж тэмдэглэнэл  $DC$  (зураг [a]-г хар) тал дээр авсан ямар ч  $M$  цэгийн хувьд  $\angle AMB \leq \angle ACB$  байх учир  $S$  нь бодлогын нөхцлийг хангана.

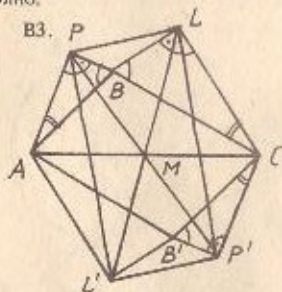
Одоо  $\angle BDC = \angle ACB$  бол (зураг [b]-г хар)  $\angle ACD = \angle DBC$  байдаг чанар ёсоор  $BDC$  гурвалжны  $S$  орой дахь өнцөг нөгөө  $D, B$  орой дахь дотоод өнцгүүдийн нийлбэртэй тэнцүү буй учир тэгш өнцөг болно. Ийнхүү  $BDC$  нь тэгш өнцөгт гурвалжин байна.

**B1.**  $a_n > 0$  [ $n=0, 1, \dots$ ] байх нь илт. Иймд арифметик ба геометр дунжуудын тухай тэнцэтгэл бишийг хэрэглэвэл:  $a_{n+1} = ((m-1)a_n + a/(a_n^{m-1}))/m = (a_n + \dots + a_n + a/(a_n^{m-1}))/m \geq m\sqrt[m]{a_n^{m-1} \cdot a/(a_n^{m-1})} = m\sqrt[m]{a}$  болно. Иймд  $a_{n+1}/a_n = 1-1/m + a/(m a_n^m) \leq 1-1/(m+1/m) = 1 \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n$  байна. Ийнхүү  $\{a_n\}$  дараалал хоёрдугаар гишүүнээсээ эхлэн монотон буурч, доороосоо зааглагдах болж буй учир нийлнэ. Одоо хязгаарыг нь  $b$  гээд өгөгдсөн рекуррент томъёоны 2 талд хязгаарт шилжвэл  $b = (1-(1/m))b + a/(mb^{m-1}) \Leftrightarrow b = m\sqrt[m]{a}$  гэж гарна.

**B2.** Бодлогын нөхцлөөс  $A \geq 10$  байх нь илт. [I]  $10 \leq A \leq 91$  үед дурьдсан чанартай 2 тоо олдохыг харуулъя. Үүний тулд сонгосон 10 тоогоо  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{10} \leq A \leq 91$  гэж өсөх эрэмбээр нь дугаарлаад, эсрэгээс нь дурьдсан чанартай 2 тоо олддоггүй юм гэж үзвэл:  $a_{k+1}/a_k > 3/2 \Rightarrow a_{k+1} > (3/2)a_k$  болно. Энд  $a_{k+1}$  нь бүхэл тоо гэдгийг тооцвол  $a_{k+1} \geq [(3/2)a_k] + 1$  гэсэн үнэлгээ гарна. Энэ үнэлгээг ашиглавал:  $a_1 \geq 1, a_2 \geq [(3/2)a_1] + 1 \geq 2, a_3 \geq [(3/2)a_2] + 1 \geq 4, a_4 \geq [(3/2)a_3] + 1 \geq 7, a_5 \geq [(3/2)a_4] + 1 \geq 11, a_6 \geq [(3/2)a_5] + 1 \geq 17, a_7 \geq [(3/2)a_6] + 1 \geq 26, a_8 \geq [(3/2)a_7] + 1 \geq 40, a_9 \geq [(3/2)a_8] + 1 \geq 61, a_{10} \geq [(3/2)a_9] + 1 \geq 92$  гэж харшлал гарна.

[II].  $A \geq 92$  бол  $A$ -аас үл хэтрэх 1, 2, 4, 7, 11, 17, 26, 40, 61, 92 гэсэн 10 тоо авахад аль ч хоёрынх ноогдвор  $[2/3; 3/2]$  завсарт орохгүй. Өөрөөр хэлбэл:  $A$  нь бодлогын нөхцлийг хангахгүй.

[I] ба [II] -оос дурьдсан чанартай  $A$  тоонуудын дотроос хамгийн их нь 91 болно.



$M$  цэгийн хувьд тэгш хэмтэй хувиргалт хийгээд  $P$  нь  $P', L$  нь  $L', B$  нь  $B'$  цэгт тус тус буусан гэнэл  $PLP'L'$  нь параллелограмм байна.  $\angle PBL = 2\pi - \angle ABC - 2\angle ABP$

$$\angle LCP' = \angle BCB' + 2\angle BCL$$

$$\angle ABC + \angle BCB' = \pi$$

$$\angle ABP + \angle BCL = \pi/2 \text{ тэнцлүүдээс}$$

$$\angle PBL = \angle LCP' \text{ гэж гарна. } \text{tg} \alpha = BL/LC = PB/L$$

$$AP = PB/P'C \Rightarrow BL/LC = PB/P'C \text{ Сүүлийн тэнцэл болон } \angle PBL = \angle LCP' \text{ гэдгээс } \Delta PBL \sim \Delta P'CL \text{ болно. Иймд } \angle PLB = \angle P'CL \text{ бо}$$

цал болон  $\angle PBL = \angle LCP'$  гэдгээс  $\Delta PBL \sim \Delta P'CL$  болно. Иймд  $\angle PLB = \angle P'CL$  бо

лох ба улмаар  $\angle BLC = \pi/2 \Rightarrow \angle PLP' = \pi/2$  байна. Ийнхүү  $PLP'L'$  нь тэгш өнцөгт болов. Одоо тэгш өнцөгтийн диагоналиуд тэнцүү, огтлолын цэгээр таллан хуваагддаг гэдгийг тооцвол  $PM = ML$  гэж батлах зүйл гарав.

Улаанбаатар хотод III даваанд хотын боловсролын хэлтсээс зохиосон даргаар бодлогуудыг өгсөн юм.

A1. ABCD дөрвөн өнцөгт өгөгдөв. ABC, ADC гурвалжнуудад багтсан тойрог AC диагоналийг P, Q цэгүүдэд. ABD, BCD гурвалжнуудад багтсан тойрог BD диагоналийг M, N цэгүүдэд шүргэдэг бол  $|PQ| = |MN|$  байхыг батал.

A2.  $a_1 = 0, a_{n+1} = (1/2)(a_n^2 + b)$  ( $1 \geq b \geq 0$ ) рекуррент томъёогоор өгөгдсөн  $\{a_n\}$  дараалал нийлэхийг баталж, хязгаарыг нь ол.

A3.  $\alpha$  нь хурц өнцөг,  $n \in \mathbb{N}$  бол  $(1 + 1/\sin^n \alpha)(1 + 1/\cos^n \alpha) \geq (1 + 2^{n/2})^2$  тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

B1.  $(4ab + 22a + 47b)$  илэрхийлэл  $(a^2 + 7b^2 + 811)$ -д хуваагддаг чанартай бүх  $a, b$  натурал тоонуудыг ол.

B2. ABC гурвалжны BC тал дээр M цэгийг ABM, AMC гурвалжнуудад багтсан тойргууд харилцан шүргэлцэж байхаар ол.

B3.  $A = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $B = \{n+1, n+2, \dots, n+m\}$  олонлогууд өгөгджээ. A олонлогоос таамгаар нэг тоог сонгож (буцаалтгүй) сонгосон тоо  $r$ -аас ихгүй бол A-аас дахин нэг тоо авах бөгөөд, хэрэв  $r$ -ээс их бол B-аас нэг тоо авах замаар  $(i, j)$  гэсэн хосыг байгуулав. Хэрэв  $3 \leq r \leq n/2$  бол  $|i-j| \leq 3$  байх бүх  $(i, j)$  хосуудын тоог ол.

## УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН XXVIII ОЛИМПИАДЫН IX АНГИЙН IV ДАВААНЫ БОДЛОГУУД

Л. ХАДХҮҮ

Улсын математикийн XXVIII олимпиадын IV даваанд хот, хөдөөгийн сургуулиудын IX ангаас шалгарч оролцсон 28 сурагчдаас Ш. Эрдэнэбат /МУИС Дундговь/ 21 оноогоор I байр, Б. Тогтох /Дархан I сургууль/ 20,5 оноогоор II байр, С. Ганболд /УВ I сургууль/ 15,5, Д. Болд /Дархан 18-р сургууль/ 14, Р. Дэлгэрсүрэн /МУИС 51-р сургууль/ 10, Н. Бат /МУИС I сургууль/ 9,5 оноогоор III байрыг тус тус эзэллээ.

IV даваанд өгсөн бодлогуудыг бодолттой нь дор хавсаргав.  
/Водлого бүр 7 оноотой/.

A1. /А. Хашбаяр МУИС-ийн оюутан/.

$$a/ f(m, 0) = f(0, n) = 1$$

b/  $f(m, n) = f(m, n-1) + f(m-1, n) + f(m-1, n-1)$  нөхцлүүдийг хангах натурал утгатай  $f$  функцыг ол. Энд нь  $m, n$  дурын сөрөг биш бүхэл тоонууд болно.

A2. /В. Баясгалан, УВИС-ийн багш/.

Хавтгайд 1992 вектор өгөгдөв. Эдгээрээс  $n$ -ийн ямар утганд нийлбэрийн урт нь үлдсэн векторуудынхаа нийлбэрийн уртаас ихгүй байхаар  $n$  векторыг сонгож болох вэ?

A3. /В. Батгэрэл, ТИС-ийн багш/.

R радиустай тойрогт багтсан ABC гурвалжны A, B оройнуудыг дайрсан  $Y_1$  тойрог AC, CB талуудыг харгалзан M, N цэгүүдээр огтолдог бол C, M, N цэгүүдийг дайрсан  $Y_2$  тойргийн төв ба  $Y_1$  тойргийн төвийн хоорондох зай R болохыг батал.

B1. /В. Батцэнгэл, МУИС-ийн багш/.

Хоёр хүн дараах тоглоомыг тоглож байв. Тэдний өмнө хоёр хэсэг чулуу байсан ба эхлээд A тоглогч аль нэг хэсэг чулууг нь авч хаяад, нөгөө хэсгийг нь хоосон биш 2 хэсэгт хуваана. Дараа нь B тоглогч мөн тийм үйлдэл хийнэ. Үйлдэл хийж чадахгүй болсон (хэсэг бүрд нь нэг нэг чулуу үлдсэн тохиолдолд) тэр тоглогч хожигдоно.

а/ эхлээд I хэсэгт 19, II хэсэгт 92 чулуу байсан бол зөв тоглолтонд аль тоглогч хожих вэ?

б/ I хэсэгт  $m$ , II хэсэгт  $n$  чулуу байсан бол аль нь хожих вэ?

B2. /М. Баасай, Эрдэнэт, Судалгаа арга зүйн төвийн арга зүйч/.

Дурын бүхэл тоог 6 бүхэл тооны кубүүдийн нийлбэрт тавьж болно гэж батал.

B3. /В. Адъяасүрэн, ШУА-ийн эрдэм шинжилгээний ажилтан/.

Орой дахь өнцөг нь  $\beta$  байх ABC ( $AB=BC$ ) адил хажуут гурвалжны суурийн O цэг дээр төвтэй бөгөөд AB, BC талуудыг харгалзан M, N цэгт шүргэх хагас тойрог байгуулав. MN нумын аливаа K цэгийг дайруулан татсан шүргэгч хажуу талуудыг P, Q цэгүүдэд MN шулуун OP, OQ шулуунуудыг харгалзан E, F цэгүүдэд огтолдог бол PQ:EF харьцааг ол.

### ВОДЛОГУУДЫН ВОДОЛТ

A1. Энэ бодлогыг бүрэн бодсон, түүгээр ч үл барам бодох гол санааг гаргасан сурагч ганц ч байгаагүй учир зохиогчийн бодолтыг дор сийрүүлэе.

Өгөгдсөн нөхцлүүдийг хангах  $f$  функц оршин байх ба тэр нь зөвхөн ганц байх нь илт. Нөгөө талаас  $V_{m,n}(EN_0)$ -ийн хувьд хавтгайн  $(m,n)$  цэгт координатын эхээс зөвхөн  $\{1,1\}; \{1,0\}; \{0,1\}$  векторуудээр тогтсон замаар очих бүх боломжийн тоог  $f(m,n)$  гэвэл энэ функц өгөгдсөн нөхцлүүдийг хангах нь ойлгомжтой. Иймд бид дээрх боломжийн тоог л бодох үздэв.

(\*)  $x_i$  үсэг  $m_i (i=\overline{1,n})$  давталттай орсон  $\sum_{i=1}^n m_i$  урттай бүх үгийн тоо  $(\sum_{i=1}^n m_i)! / \prod_{i=1}^n m_i!$  байдаг. (учир нь: бүх үсгийг ялгаатай гэж үзвэл нийт боломж  $(\sum_{i=1}^n m_i)!$  байх ба  $x_i$  үсгүүдийн байраа солих бүх боломж  $m_i!$  байгаа билээ).  $(m,n)$  цэгт хүрсэн

ямар нэг замын бүтэнд  $\{0,1\}, \{1,0\}, \{1,1\}$  векторууд харгалзан  $a, b, c$  ширхэг орсон бол  $c$  нь  $0$ -оос  $\min\{n,m\}=k$ -ийн хоорондох бүх утгыг авах ба  $c=i \in \{0,1,\dots,k\}$  үед  $a=n-i, b=m-i$  байх нь илт юм. Ийм бүх замын тоо  $\sum_{i=0}^k \frac{(n-i)!(m-i)!}{i!} = \sum_{i=0}^k \frac{(n+m-i)!}{(n-i)!(m-i)!} = \frac{(n+m)!}{k!}$  ( $k=\min\{n,m\}$ ) байна.

А2. Энэ бодлогыг бодсон сурагч гарсангүй. Иймд зохиогчийн бодолтыг үзүүлэе.

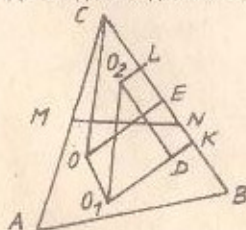
Өгөгдсөн векторуудыг  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{1992}, \vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i$  гэж тус тус тэмдэглэе. Хэрэв  $\vec{a} = \vec{0}$  бол  $1 \leq n \leq 1992$  байх бүх  $n$ -ийн хувьд дурьдсан чанар биелэх нь илт. Иймд  $\vec{a} \neq \vec{0}$  үед асуудлыг авч үзье.

а/.  $n \leq 991$  үед өгөгдсөн чанартай  $n$  векторуудыг сонгон авч болно. Учир нь эсрэгээр нь сонгож болдоггүй гэнээ  $\forall \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  векторуудын хувьд  $b = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i$  гэвэл  $|\vec{b}| > |\vec{a}-\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{b}^2 > \vec{a}^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}) + \vec{b}^2 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{a}-2\vec{b}) < 0$  болно. Сүүлчийн тэнцэтгэл бишийг бүх боломжит байдлаар бичиж нэмбэл:  $(\vec{a}, C_{1992}^n \vec{a} - 2C_{1991}^{n-1} \vec{a}) < 0 \Leftrightarrow C_{1992}^n - 2C_{1991}^{n-1} < 0 \Leftrightarrow 991 < n$  гэж харшлалд хүрнэ. ( $n \leq 991$  баягааг анхаар)

б/.  $n > 991$  бол  $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \dots = \vec{a}_{1992} \neq \vec{0}$  үед дурьдсан чанартай  $n$  векторыг сонгон авч болохгүй нь илт юм.

А3. Энэ бодлогыг Д. Болд /Дархан/, Р. Дэлгэрсүрэн, Ш. Эрдэнэбат /Хоёул МУИС-ийн/ нар бүрэн бодож, Д. Хасбаатар /УБ. Исургууль/, В. Тогтох /Дархан/ нар нилээд дохуулсан байлаа.

Д. Болдын бодолтыг бага-зэрэг өөрчлөн үзүүлэе.



AMNB дөрвөн өнцөгт, ABC гурвалжин, MNC гурвалжныг багтаасан тойргуудын төвүүдийг харгалзан  $O_1, O, O_2$ ; адгаар төвүүдээс BC тал дээр буулгасан перпендикуляруудын суурийг харгалзан K, E, L;  $O_2$ -оос  $O_1K$  дээр буулгасан перпендикулярын суурийг D гэж тус тус тэмдэглэе.

Гурвалжныг багтаасан тойргийн төв нь талуудын дунджаас бөхгөсөн перпендикуляруудын огтлолцол байдаг тул  $BK=KN=BN/2, BE=CE=BC/2, NL=LC=NC/2$  байна. Иймд  $DO_2=KL=KN+NL=BN/2+NC/2=BC/2=CE$  (1) гэж гарна. Нөгөө талаас AMNB дөрвөн өнцөгт тойрогт багтах учир  $\angle MNC = \angle CAB = \alpha$  (2) болно. Мөн COB адил хажуут гурвалжнаас  $\angle OCB = (\pi - \angle COB)/2 = (\pi - 2\alpha)/2 = \pi/2 - \alpha$  (3) болох ба (2) болон (3)-аас  $OC \perp MN$  (4) гэж гарна. Гэтэл  $MO_2 = O_2N; MO_1 = O_1N$  учир  $O_1O_2 \perp MN$  (5) байна. (4) ба (5)-аас  $OC // O_1O_2$  болно. Одоо  $OE // O_1K$  гэдгийг тооцвол:  $\angle COE = \angle O_2O_1K$  (6) болно. (1) ба (6)-аас COE,  $O_2O_1D$  тагш өнцөгт гур-

валжнууд тэнцүү буюу  $O_1O_2=CO=R$  гэж батлах зүйл гарав. Ш. Эрдэнэбат  $O_1OCO_2$  дөрвөн өнцөгт параллелограмм болохыг харуулсан. Р. Дэлгэрсүрэн тосоотэй гурвалжнуудын харьцааг ашигласан байлаа.

В1. Энэ бодлогыг "Всесоюзные математические олимпиады" номны арын, бодолтгүй 100 бодлогоос авсан юм. Бусад бодлоготой харьцуулахад үүнийг арай олон 7 сурагч бодсон байлаа. Эдгээр сурагч ерөнхийдөө нэгэн ижил дараахь санаагаар боджээ.

Шууд б/ хэсгийг бодъё.

(I)  $m, n$  2 тооны ядаж нэг нь, тухайлбал  $m$  нь тэгш тоо байг. Тэгвэл  $A$  тоглогч  $\Pi$  хэсэг чулууг хаяж,  $I$  хэсгийг сондгой тооны чулуутай 2 хэсэгт хувааж тавина. ( $m$  нь тэгш тоо учир түүнийг 2 сондгой тооны нийлбэрт ямагт тавьж болох нь илт).  $B$  тоглогч заавал сондгой тооны чулуутай хэсгийг хуваах учир  $A$  тоглогчид тэгш болон сондгой тооны чулуутай 2 хэсэг үлдэнэ.  $A$  тоглогч дээрх аргаараа хуваасаар эцэст нь 2 чулуутай нэг, нэг чулуутай 2 хэсэг болгон хувааж хожно. (II)  $m, n$  2 тоо хоёул сондгой бол  $B$  тоглогч өмнөх тохиолдолд  $A$  тоглогчийн хэрэглэсэн аргаар хожих болно. Эндээс харахад  $a/$  тохиолдолд  $A$  тоглогч хожих болно.

В2. Сурагчид энэ бодлогын тухайд 100% "нойллосон" байлаа. Иймд зохиогчийн бодолтыг бичлээ.

I Арга;

$$\begin{cases} (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ (n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 \end{cases} \Rightarrow (n+1)^3 + (n-1)^3 = 2n^3 + 6n \Rightarrow 6n = (n+1)^3 + (n-1)^3 + (-n)^3 + (-n)^3$$

( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) тэнцлийг ашиглавал:

$$6n = 6n + 0 = (n+1)^3 + (n-1)^3 + (-n)^3 + (-n)^3 + 0^3 + 0^3$$

$$6n + 1 = 6n + 1 = (n+1)^3 + (n-1)^3 + (-n)^3 + (-n)^3 + 1^3 + 0^3$$

$$6n + 2 = 6(n-1) + 2^3 = n^3 + (n-2)^3 + (1-n)^3 + (1-n)^3 + 2^3 + 0^3$$

$$6n + 3 = 6(n-4) + 3^3 = (n-3)^3 + (n-5)^3 + (4-n)^3 + (4-n)^3 + 3^3 + 0^3$$

$$6n + 4 = 6(n+2) + (-2)^3 = (n+3)^3 + (n+1)^3 + (-n-2)^3 + (-n-2)^3 + (-2)^3 + 0^3$$

$$6n + 5 = 6(n+1) + (-1)^3 = (n+2)^3 + n^3 + (-n-1)^3 + (-n-1)^3 + (-1)^3 + 0^3$$

гэж батлах зүйл гарав.

II Арга:

Дэе дараалсан 3 бүхэл тооны үржвэр 6-д хуваагддагийг анхаарвал:  $n^3 - n = (n-1)n(n+1) = 6k$  ( $n, k \in \mathbb{Z}$ ) буюу  $n = n^3 - 6k = n^3 + k^3 + k^3 + (-k-1)^3 + (1-k)^3 + 0^3$  гэж батлагдаж байна. Эдгээр баталгаанаас харахад аливаа бүхэл тоог 5 бүхэл тооны кубүүдийн нийлбэрт тавьж болох нээ.

В3. Энэ бодлогыг Н. Бат, Ш. Эрдэнэбат /хоёул МУИС-ийн/, С. Ганболд /УБ-сургууль/ В. Тогтох /Дархан/ нар бодсон юм.

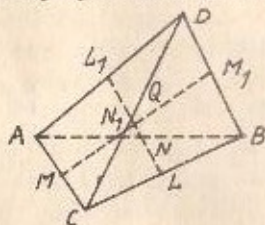


асуух бөгөөд асуултыг аль нэг тоглогч "тийм" гэж хариултал нь үргэлжлүүлнэ. Хэрвээ тоглогчид үнэн зөвсэтгэдэг, шудрага байсан бол тоглолт төгсгөлөг тооны асуултын дараа дуусна гэдгийг батал.

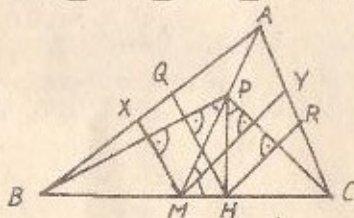
### ВОДЛОГУУДЫН ВОДОЛГ

A1. E-нь бидэнд өгөгдсөн цэгүүдийн олонлог байг.  $A_1, A_2 \in E$  цэгүүд нь дурын 2 холбоотой цэг байг.  $E\{A_1, A_2\}$  олонлог дотор  $A_1$ -тэй холбоотой цэг дор хаяж 1592 ширхэг (энд  $A_2$ -ийг хасаж тооцов).  $A_2$ -той холбоотой цэг дор хаяж 1592 ширхэг буй тул энэ олонлог дотор  $A_1, A_2$  хоёулантай нь холбоотой цэгүүд дор хаяж  $1592 + 1592 - 1989 = 1195$  байна. Тэдгээрийн аль нэгийг  $A_3$  гэж тэмдэглэе.  $E\{A_1, A_2, A_3\}$  олонлог дотор  $A_1, A_2$ -хоёулантай нь холбоотой цэг дор хаяж 1194 ширхэг,  $A_3$ -тай холбоотой цэгүүд дор хаяж 1591 ширхэг бий тул энэ олонлогт  $A_1, A_2, A_3$ -тай бүгдэнтэй нь холбогдсон цэг дор хаяж  $1194 + 1591 - 1988 = 797$  ширхэг байна. Тэдгээрийн аль нэг нь  $A_4$  болог. Цаашилбал  $E\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$  олонлог дотор  $A_1, A_2, A_3$ -тай бүгдэнтэй нь холбоотой цэг дор хаяж 796,  $A_4$ -тэй холбоотой цэг дор хаяж 1590 ширхэг байгаа учир энэ олонлогт дор хаяж  $796 + 1590 - 1987 = 399$  цэг  $A_1, A_2, A_3, A_4$  цэгүүдтэй бүгдэнтэй нь холбоотой болно. Тэр цэгүүдийн аль нэгийг нь сонгон авч  $A_5$  гэе. Эцэст нь,  $E\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$  олонлогт  $A_1, A_2, A_3, A_4$  цэгүүдтэй бүгдэнтэй нь холбоотой 398 цэг,  $A_5$ -тай холбоотой цэг дор хаяж 1589 ширхэг байгаа учраас дор хаяж  $398 + 1589 - 1986 = 1$  ширхэг цэг  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  бүгдэнтэй нь холбоотой байна. Тэр цэгийг  $A_6$  гэвэл бидний олсон  $A_i; i = \overline{1, 6}$  маань бодлогод заасан нөхцлийг хангах 6 цэг болно.

A2.  $L_1, M_1, N_1$  цэгүүд нь харгалзан AD, BD, CD хэрчмүүдийн дундаж цэгүүд байг. (зураг [a]-ийг хар) Тэгвэл  $L_1 M_1 = \frac{1}{2} AB = LM$ ;  $L_1 M_1 \parallel AB \parallel LM$  ба  $L_1 M_1 = \frac{1}{2} CD = LM_1$ ;  $L_1 M_1 \parallel CD \parallel LM_1$  болох бөгөөд өгөгдсөн нөхцөл ёсоор  $AB = CD$  тул  $L_1 M_1 LM$  нь ромбо боллоо. Үүнтэй адилаар  $M_1 N_1 MN$  ба  $L_1 N_1 LN$ -үүд нь бас ромбо байна. Q нь  $L_1 L$ -ийн дундаж цэг бол Q нь мөн  $M_1 M$  ба  $N_1 N$ -ийн дундаж цэгүүд болох ба  $QN \perp QM$ ;  $QN \perp QL$ ;  $QM \perp QL$  байна. Гэтэл  $NN_1 \perp AB$  ба  $NN_1 \perp CD$  тул Q нь O цэгтэй давхцах юм. Иймд  $\angle LOM = \angle MON = \angle NOL = \pi/2$  юм.



зураг-[a]



зураг-[b]

A3. Эсрэгээс,  $g(x) = 0$  тагшитгэлийн бүхэл шийдийн тоо нь 1996-аас их

гэе.  $g(x)=0$  байвал  $f(x)=\pm 3$  байх юм.  $f(x)=3$  тэгшитгэлийн ялгаатай бүхэл тоон шийдүүд нь  $x_1 < \dots < x_k$ ;  $f(x)=-3$  тэгшитгэлийнх  $y_1 < \dots < y_m$  гэе. Бидний үзэж байгаагаар  $k+m \geq 1997$  бөгөөд мэдэж  $k, m \leq 1992$  тул  $k \geq 5, m \geq 5$  байна. Эндээс  $|x_i - y_j| \geq 7$  байхаар  $i, j$  дугаарыг олж болно, гэж хэлж чадах бөгөөд энэ нь  $(x_i - y_j) \mid (f(x_i) - f(y_j))$  гэсэн Безугийн теоремд харшилна. Учир нь  $f(x_i) - f(y_j) = 6$  юм.

B1.  $n=1$  үед илэрхий тул цаашид  $n \geq 2$  гэе.  $(1+1/4)(1+1/8)\dots(1+1/2^n) < 2$  болохыг баталчихвал хангалттай билээ.

а/.  $0 < x < 1$  бол  $1+x < 1/(1-x)$  байна.

б/.  $0 < x, y < 1$  бол  $(1-x)(1-y) > 1-x-y$  байна гэсэн хоёр хялбар батлагдах тэнцэл бишийг ашиглаж дээрх тэнцэл бишийг батлая.

а/. ёсоор  $(1+1/4)(1+1/8)\dots(1+1/2^n) < ((1-1/4)(1-1/8)\dots(1-1/2^n))^{-1}$  байна.

б/. ёсоор  $(1-1/4)\dots(1-1/2^n) > 1-1/4-1/8-\dots-1/2^n > 1/2$  юм. Эдгээрээс батлах ёстой тэнцэл биш шууд гарна.

Нэмэлт:  $1+1/n < \sqrt[n]{e}$  байдгийг ашиглавал тэнцэл бишийн зүүн гар тал нь бүр  $e$ -ээс бага гэдгийг ч харуулж болно.

B2.  $RHS = RQH$  болохыг баталчихвал бодлого бодогдох нь илэрхий. (зураг [b]-г хар) Энэ хоёр өнцгийг тэнцүү гэж харуулахын тулд  $\Delta BPC \cong \Delta QNR$  буюу  $RH/QH = PC/PB$ -г батлах шаардлагатай юм. Цаашид бичлэгийг хялбарчлах үүднээс  $PC=1, PB=x$  гэж үзье.  $MY$  ба  $MX$  нь харгалзан  $AMC$ -ийн биссектрисүүд болог. Биссектрисийн теоремоос  $AX:AY = AM:MB = AY:YB$  байх нь шууд гарах юм.  $M$  нь медианы суурь учир  $XY \parallel BC$  байх бөгөөд бага зэрэг өнцгийн тооцоо хийхэд  $\Delta XHY \cong \Delta CVP$  болно. Эндээс  $XM:MY = 1:x$  гэж гарна.  $CH:HB = 1:x^2$  ба  $CM:MB = 1:1$  тул  $CH:CM = 1:(1+x^2)/2$  болох ба энэ нь  $RH:MY$ -тэй тэнцүү гэдэг нь  $\Delta CHN \cong \Delta CMY$  гэдгээс гарна.  $BN:BM = x^2:(1+x^2)/2 = QH:MX$  юм. Иймд  $RH = ((1+x^2)/2)^{-1} \cdot MY = ((1+x^2)/2)^{-1} \cdot x \cdot MX = ((1+x^2)/2)^{-1} \cdot x \cdot (1/x^2) \cdot ((1+x^2)/2) \cdot QH = (1/x) \cdot QH$  болж батлах ёстой зүйл батлагдлаа.

B3.  $A, B$  тоглогчдын тоонууд  $a$  ба  $b$ , шүүгчийн самбарт бичсэн 2 тоог  $x < y$  гэе. Эхлээд дараахь 2 зухал чанарыг харуулъя.

а/. Хэрвээ тоглогчид  $a < b < \mu$  гэдгийг мэдэж байсан бол үүний дараа тоглогчид  $y - \mu < a < x - \lambda$  байдгийг мэдэж авна.

б/. Хэрвээ тоглогчид  $\lambda < a < \mu$  гэдгийг мэдэж байсан ба тоглогч "үгүй" гэж хариулсан бол үүний дараа тоглогчид  $y - \mu < b < x - \lambda$  болохыг мэдэж авна. Үнэхээр а/ тохиолдолд  $a \leq y - \mu$  байсан бол  $a + b < a + \mu \leq y$  болох ба иймд заавал  $a + b = x$  байх ёстой учир  $A$  "тийм" гэж хариулах ёстой байжээ. Мөн  $a \geq x - \lambda$  байсан бол  $a + b > a + \lambda \geq x$  буюу заавал  $a + b = y$  болж  $A$  тоглогч "тийм" гэж хариулах ёстой байсан. б/ чанарыг мөн адил батална. Одоо эсрэгээс,  $A, B$  нь хэзээ ч "тийм" гэж харнулаагүй гэж санаа. Эхлээд  $A, B$  хоёр тоглогч  $0 < b < y$  байдгийг мэдэж бай-

гаа.  $\alpha_0 = 0; \beta_0 = y$  гэж тэмдэглээд  $A, B$  нь  $\alpha_k < b < \beta_k$  байдгийг мэдэж байсан гэж үзье.  $A$  нь "үгүй" гэж хариулсан болохоор  $a/$  чанар ёсоор тоглогчид  $y - \beta_k < a < x - \alpha_k$  болохыг мэдэж авна. Дараа нь  $B$  нь "үгүй" гэж хариулсан болохоор  $b/$  чанар ёсоор тоглогчид  $y - (x - \alpha_k) < b < x - (y - \beta_k)$  буюу  $\alpha_k + (y - x) < b < \beta_k - (y - x)$  байдгийг мэдэж авч чадна. Ийнхүү индукцээр  $\alpha_{k+1} = \alpha_k + (y - x); \beta_{k+1} = \beta_k - (y - x)$  гэж тэмдэглэвэл дурын  $m$ -ийн хувьд  $\alpha_m < b < \beta_m$  болоход хүрнэ. Гэтэл  $y - x > 0$  тул ямар нэг  $k_0 \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд  $\alpha_{k_0} \geq \beta_{k_0}$  байх ба энэ нь  $\alpha_{k_0} < b < \beta_{k_0}$ -д зөрчинө. Энэ зөрчил нь тоглолт төгсгөлөг тооны асуултын дараа зогсохыг харуулж байна.

## УМО-ХХVІІІ-ИЙН ХАНГИЙН IV ДАВААНЫ БОДЛОГУУД

Ц. ДАШДОРЖ, В. БАТЦЭНГЭЛ

A1. /Ц. ЛУВСАНДОРЖ. УБИС/  $\Delta ABC$ -ийн хавтгайн нэг талд огторгуйд  $P_1, P_2, \dots, P_n$  цэгүүд өгөгдөв. Эдгээр цэгүүдээс гурвалжны оройнууд хүртэлх зайн олонлог дор хаяж  $\sqrt[n]{n}$  элементтэй гэж батал!

A2. /А. ХАШБААТАР. МУИС/  $\Delta ABC$ -ийн  $AB, BC$  талууд дээр  $M, N$  цэгүүдийг  $BC/BN-BA/BM=k \neq 0$  ( $k$ -тогтмол байхаар) авав.

a/. Бүх  $MN$  шулуунууд ерөнхийн цагтай болохыг батал.

б/. Огтлолцлын цэг нь  $\Delta ABC$ -г багтаасан тойрог дээр орших нөхцлийг тогтоогоод  $k$ -г гурвалжны талуудаар тодорхойл.

A3. /В. БАТЦЭНГЭЛ. МУИС/  $n \in \mathbb{N}$  тоо өгөгджээ. Гишүүд нь  $1, 2, \dots, n$  тоонуудын аль нэг нь байдаг дарааллыг, түүний дэс дараалсан хоёр гишүүдийн хосууд дотор бүх боломжит  $(i, j) \ 1 \leq i, j \leq n$  хосууд байдаг бол универсал дараалал гэж нэрлэе. Хамгийн бага урттай универсал дарааллын гишүүдийн тоог ол.

B1. /А. ХАШБААТАР. МУИС/ Өгсөн тойргийг  $A$  цэгт, түүний  $BC$  хөвчийг  $D$  цэгт шүргэсэн тойрог  $AC, AB$  хөвчүүдийг харгалзан  $C_1, B_1$  цэгт огтолдог бол  $BDCC_1 = CDBB_1$  болохыг батал.

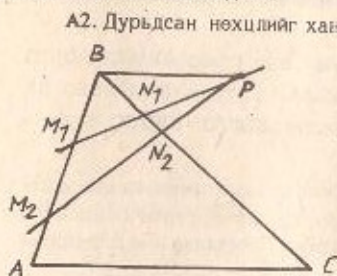
B2. /Д. АМАРСАНАА МУИС-ОЮУТАН/ Тоон шулуун дээр  $k$  өнгөөр будагдсан  $2k+1$  цэг өгөв.  $A, B, C$  зэргэлдээ гурван цэгийн хувьд  $A$ -г  $C$ -д,  $C$ -г  $A$ -д шилжүүлж болдог бол ижил өнгөөр будагдсан байраа сольдог хоёр цэг олдохыг үзүүл.

B3. /Ц. ДАШДОРЖ. МУИС/  $Z$ -ийг  $1$ -ээс их, харилцан анхны ялгаваруудтай төгсгөлөг тооны арифметик прогрессийн нэгдэлд тавьж болох уу? ( $Z$ -ээр бүхэл тоон олонлогийг, арифметик прогресс гэж  $a + mk, k \in \mathbb{Z}$  тоонуудын олонлогийг ойлгоно).

## БОДЛОГУУДЫН БОДОЛТ

A1. Гурвалжин үүсгэх  $A, B, C$  цэгүүд дээр төвтэй гурван бөмбөрцөг, хэрвээ огтлолцох юм бол  $ABC$  хавтгайн нэг талд зөвхөн ганц цэгээр огтлолцоно гэсэн хялбархан дүгнэлтийг үндэслэн бодлогоо бодъё.  $\{P_i A, P_i B, P_i C; 1 \leq i \leq n\}$

зайнуудын олонлог дахь ялгаатай тоонуудыг  $d_1, \dots, d_m$  гэж үзье. Бид  $m \geq \sqrt[3]{n}$  буюу  $m^3 \geq n$  гэдгийг батлах ёстой. А, В, С цэгүүд дээр төвтэй  $d_1, \dots, d_m$  радиусуудтай бөмбөрцгүүдийг татвал, бодолтын эхэнд бичсэн дүгнэлт ёсоор адгээр бөмбөрцгүүд АВС хавтгайн нэг талд хамгийн олондоо  $m^3$  ширхэг цэгээр огтлолцоно. Тэр цэгүүд дотор манай өгөгдсөн  $P_1, \dots, P_n$  цэгүүд байх ёстой учир эндээс  $m^3 \geq n$  болох нь батлагдлаа.



А2. Дурьдсан нөхцлийг хангадаг  $M_1, N_1; M_2, N_2$  хоёр хос авъя.  $\overline{BA} = \overline{m}$ ,

$\overline{BC} = \overline{n}$  гээд  $\overline{BA}/\overline{BM}_1 = r$  гэвэл  $\overline{BC}/\overline{BN}_1 = k+r$ ,

тул  $\overline{BM}_1 = \overline{m}/r$ ,  $\overline{BN}_1 = \overline{n}/(r+k)$  болно. Үүнтэй

адил  $\overline{BM}_2 = \overline{m}/q$ ,  $\overline{BN}_2 = \overline{n}/(q+k)$  хэлбэртэй байна.

$M_1N_1, M_2N_2$  шулуунуудын огтлолцлын

цэгийг Р гэвэл  $\overline{BP} = \overline{BM}_1 + \overline{M}_1P = \overline{BM}_2 + \overline{M}_2P$

болох ба  $\overline{M}_1P = \overline{M}_1N_1 \cdot t$ ,  $\overline{M}_2P = \overline{M}_2N_2 \cdot s$  а

байхыг санавал  $t\overline{n}/(r+k) + (1-t)\overline{m}/r = (1-s)\overline{m}/$

$q + s\overline{n}/(q+k)$  болно.

Нэгэнт  $\overline{m} \neq \overline{n}$  тул энэ тэнцлээс

$$\begin{cases} (1-t)/r = (1-s)/q \\ t/(r+k) = s/(q+k) \text{ буюу } t = (r+k)/k; s = (q+k)/k \end{cases}$$

болно. Олсон  $t$ -ээ  $\overline{BP}$ -ийн тэнцэлд орлуулбал  $\overline{BP} = t\overline{n}/(r+k) + (1-t)\overline{m}/r = (\overline{n}-\overline{m})/k =$

$= \overline{AC}/k$  болно. Ийнхүү Р цэг нь  $r, q$ -ээс хамаарахгүй болж бодлогын эхний хэсэг

нь батлагдлаа. Р цэг  $\triangle ABC$ -ыг багтаасан тойрог дээр оршино гэвэл бидний

дээр баталснаар  $\overline{BP} \parallel \overline{AC}$  ба  $\overline{BP} \neq 0$  тул  $ABPC$  дөрвөн өнцөгт нь адил хажуут тра-

пец байх ёстой. Иймд бодлогын хоёрдахь хэсэг нь адил хажуут трапецийн суурь,

хажуу ирмэг ба диагоналиар сууриудын харьцааг (гухайлбал  $\overline{AC}/\overline{BP} = r$ ) олох хял-

бархан бодлогод шилжнэ. Уг тооцоог уншигч танд үлдээгээд шууд хариуг нь

бичлээ. Хариу:  $\overline{AB} = \overline{BC}$  үед тийм  $k$  олдохгүй,  $\overline{AB} \neq \overline{BC}$  үед  $k = \overline{AC}^2/(\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2)$

байна.

А3. Гишүүдийн тоо нь  $m$  байх дарааллын хувьд зэргэлдээ хоёр гишүүдийн

хосын тоо нь  $m-1$  тул ямар ч  $m$  гишүүнтэй универсал дарааллын хувьд тодор-

хойлолт ёсоор түүний зэргэлдээ хоёр гишүүдийн хосууд дотор бүх боломжит

ялгаатай  $(i, j); 1 \leq i, j \leq n$  гэсэн  $n^2$  ширхэг хос байх ёстой учир  $m-1 \geq n^2$  юм. Одоо

$m = n^2 + 1$  ширхэг гишүүнтэй универсал дарааллыг байгуулая. Үнэн хэрэгтээ энэ нь

бодлогын гол хэсэг нь байсан юм.

1, 1, n, 1, n-1, ..., 1, 2, 2, n, 2, n-1, ..., 2, 3, ..., n-1, n-1, n, n дараалал нь тэр дараалал мөн гэд-

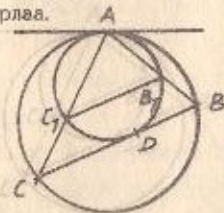
гийг хялбархан харж болно. Дээрх бодолтыг сурагч Д. Уламбаяр /Өвөрхангай/

хийсэн бөгөөд зохиогчийн байгуулалт нь Тархийн теорем гэж нэрлэгдэх дараахь

теоремд үндэслэгдсэн байсныг тэмдэглэе. Теорем: Ямар ч холбоот графд түүний

бүх ирмэгийг, чиглэл бүрд нь нэг, нэг удаа агуулсан цикл зам олдоно. Энэхүү сонин теоремийн тухай О. Оре "Граф ба түүнийг хараглэх" /УБ 1979 он/ гэсэн номын 30-р хуудаснаас уншиж болно. Энэ теоремийн тусламжтайгаар манай бодлого хэрхэн бодогдохыг уншигч танд үлдээлээ.

**B1.** Хэрэв  $A$  цэгт хоёр тойргийн ерөнхий шүргэгчийг татвал шүргэгч ба огтлогчийн хоорондох өнцгийн чанар ёсоор  $\frac{1}{2}\widehat{CA} = \frac{1}{2}\widehat{C_1A}$  болно. Иймд  $\widehat{ABC} = \widehat{AB_1C_1}$  буюу  $CB/CC_1 = BB_1/CC_1$  болов. Эндээс  $\widehat{DC_1} = \widehat{DB_1}$  буюу  $AD$  хэрчим нь  $\widehat{CAB}$ -ийн биссектрис гэж гарлаа.



Биссектрисийн чанар ёсоор  $AB/AC = BD/CD$  ба  $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$  тул  $AB/AC = BB_1/CC_1$ . Энэ хоёр тэнцлээс  $BD/CD = BB_1/CC_1$  байх нь шууд гарна.

**B2.** Энэ бодлогыг олимпиадад оролцсон бараг бүх сурагчид бүрэн бодсон тул бодолтыг орхив. Товч санаа нь Дирихлейн

зарчим юм.

**B3.** Эсрэгээс  $Z = Z_1 \cup \dots \cup Z_n$  ба  $1 \leq i \leq n$  байх  $i$  бүрийн хувьд  $Z_i$  нь  $a_i + m_i k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  тоонуудын олонлог буюу  $x \equiv a_i \pmod{m_i}$  байх бүх бүхэл  $x$ -үүдийн олонлог байдаг гэж санал. Бодлогын нөхцөлд өгснөөр  $m_i > 1$ ,  $1 \leq i \leq n$  ба ялгаатай  $i, j$  бүрийн хувьд  $m_i, m_j$  нь харилцан анхны тоонууд юм. Үлдэгдлийн тухай Хятадын теорем ёсоор

$$\begin{cases} x \equiv a_1 + 1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_n + 1 \pmod{m_n} \end{cases}$$
 тэгшитгэлийн систем нь шийдтэй бөгөөд түүний шийд болох  $x$  нь бидний үзэж буйгаар ямар нэгэн  $i$ -ийн хувьд  $Z_i$ -д харъяалагдах ёстой. Өөрөөр хэлбэл  $x \equiv a_i \pmod{m_i}$  байх ёстой. Гэтэл бидний зохиосон систем ёсоор  $x \equiv a_i + 1 \pmod{m_i}$  тул эндээс  $a_i \equiv a_i + 1 \pmod{m_i}$  буюу  $m_i$  нь 1-ийг хуваах болж  $m_i > 1$  гэж өгсөнд зөрчилдлөө.

## УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН XXVIII ОЛИМПИАДЫН БАГШНАРЫН ШИДАВААНЫ БОДЛОГУУД

В. БАТЦЭНГЭЛ

1.  $ABC$  гурвалжин,  $\widehat{A} = 60^\circ$  ба энэ гурвалжинд багтсан тойргийн төв  $O$ -г дайрсан  $AC$  талтай параллель шулуун  $AB$  талыг  $F$  цэгт огтлодог байв.  $BC$  талын  $F$  цэгийн хувьд  $3BP = BC$  бол  $\angle BFP = \angle B/2$  байхыг батал! ( $2\angle BFP = \angle ABC$  гэж батал).

2.  $n!$ -ийн хамгийн сүүлчийн тэгээс ялгаатай цифрийг,  $(10$ -тын тооллын системд)  $a_n$  гэж тэмдэглэе.  $\{a_n\}$ ;  $n \geq 1$  дараалал ямар ч гишүүнээсээ эхлэн үелж чадахгүй болохыг батал.

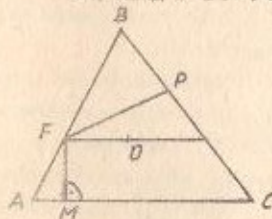
3. Хавтгай дээр ерөнхий байршилтай  $n(n \geq 3)$  ширхэг цэг өгөгджээ. Тэг-

вэд тэдгээрт оройтой дурын гурвалжин дотор дор хаяж нэг цэг нь оршин байдаг 2n-5 ширхэг цэг олдохыг харуул.

4.  $0 < \alpha < 1$  рационал  $\alpha$  тооны хувьд  $\cos(3\pi\alpha) + \cos(2\pi\alpha) = 0$  байдаг бол  $\alpha = 2/3$  болохыг харуул.

### ВОДЛОГУУДЫН ВОДОЛТ

1. Цаашид  $a = BC = 3$  ба  $BP = 1$ ;  $\angle B = \pi/3 + 2\alpha$ ,  $\angle C = \pi/3 - 2\alpha$  гэж үзье. Уг гурвалжинд багтсан тойргийн радиус  $r$ , багтаасан тойргийн радиус  $R$  бол  $r = 4R \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C$  байдаг. (Үүнийг талбайн хэд хэдэн тэнцлээс хялбар гаргаж болно). Иймд манай гурвалжны хувьд:



$r = 4a/(2\sin A) \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C = a/\sqrt{3}(\cos \alpha - \cos \pi/3) = \sqrt{3}(\cos 2\alpha - 1/2)$  болно. F цэгээс AC-д буулгасан перпендикулярны суурийг M гэвэл  $FM = r$  ба AFM

гурвалжнаас  $AF = r/(\sin \hat{A}) = 2(\cos 2\alpha - 1/2)$  болно. Эндээс  $BF = AB - AF = (3/2)/\sqrt{3} \sin(\pi/3 - 2\alpha) - 2(\cos 2\alpha - 1/2) = \cos 2\alpha - \sqrt{3} \sin 2\alpha + 1 = 4 \cos \alpha \cos(\pi/3 + \alpha)$  байна. BFP гурвалжны хувьд косинусын теоремыг хэрэглэвэл  $FP^2 = 16 \cos^2 \alpha \cos^2(\pi/3 + \alpha) + 1 - 8 \cos \alpha \cos(\pi/3 + \alpha) \cos(\pi/3 + 2\alpha) = 8 \cos \alpha \cos(\pi/3 + \alpha)(2 \cos \alpha \cos(\pi/3 + \alpha) - \cos(\pi/3 + 2\alpha)) + 1 = 4 \cos \alpha \cos(\pi/3 + \alpha) + 1 = 4 \cos^2(\pi/6 + \alpha)$  буюу  $FP = 2 \cos(\pi/6 + \alpha)$  болно. Эцэст нь дахин BFP гурвалжиндаа синусын теоремыг хэрэглэвэл  $2 \cos(\pi/6 + \alpha)/(\sin(\pi/3 + 2\alpha)) = 1/(\sin \angle BFP)$  буюу  $\sin \angle BFP = \sin(\pi/6 + \alpha) = \sin(B/2)$  болж батлагдлаа.

2. Уг дараалал нь Т гэсэн үетэй гэж санал. Өөрөөр хэлбэл N-ээс их n бүрийн хувьд  $a_n + T = a_n$  байсан гэе. Эйлер-Фермагийн теорем ёсоор бид  $10^k \equiv 1 \pmod{10^m}$  байх хангалттай том  $k > m$  тоонуудыг олж чадна. Мэдээж  $a_{10^k-1} = a_{10^k}$  тул эндээс  $a_{10^k-1} + 10^k - 10^m = a_{10^k} + 10^k - 10^m$  болно.  $(210^k - 10^m)! = (210^k - 10^m)(210^k - 10^m - 1)!$  ба  $210^k - 10^m$ -ийн хамгийн сүүлчийн тэгээс ялгаатай цифр нь 9 байх учраас дээрхи тэнцлээс  $a_{210^k-10^m-1} = 5$  гэж гарна. Учир нь  $a_{210^k-10^m-1} = t$  гэвэл 9t-ийн сүүлийн цифр нь t байх тул  $t = 5$  юм. Гэтэл  $n \geq 2$  үед  $n! = 2^a 3^b 5^c \dots$  гэвэл  $\alpha_2 = [n/2] + [n/2^2] + \dots > [n/5] + [n/5^2] + \dots = \alpha_5$  тул  $a_n$  тэгш цифр байх ёстой. Мэдээж  $210^k - 10^m - 1 \geq 2$  тул энэ нь  $a_{210^k-10^m-1} = 5$  гэдэгт зөрчлөө.

3. Хавтгай дээр координатын системийг, өгсөн цэгүүдийн х координатууд нь бүгд ялгаатай байхаар эхлээд авчхъя. Цэгүүдээ  $P_i = (x_i, y_i)$ ;  $i = 1, n$  бол  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  байхаар дугаарлая.  $P_i$  цэгээс  $(P_j, P_k)$ ;  $j \neq k$ ,  $j \neq i$ ,  $k \neq i$  шулуунууд хүртэлхи зайнуудын хамгийн багыг  $d_i$ ;  $i = 1, n$ -үүдийн хамгийн багыг 2-д хуваасныг  $d$ -ээр тэмдэглэе (Өөрөөр хэлбэл  $d = \frac{1}{2} \min(d_i)$  болог).

$T = \{(x_2, y_2 - d), (x_2, y_2 + d), (x_3, y_3 - d), (x_3, y_3 + d), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1} - d), (x_{n-1}, y_{n-1} + d)\}$  бол T нь 2n-4 ширхэг цэгтэй бөгөөд бодлогод заасан нөхцлийг хангана. Учир нь ду-

рын  $P_k P_c P_m$ ;  $1 \leq k < c < m \leq n$  гурвалжиныг авахад түүн дотор  $(x_c, y_c - d)$ ;  $(x_c, y_c + d)$  цэгүүдийн аль нэг заавал орно. Одоо Т олонлогоосоо 1 ширхэг цэгийг энэ чанарыг нь алдагдуулахгүйгээр хасчвал бодлого бодогдож дуусна. Өгсөн  $P_1, P_2, \dots, P_n$  цэгүүдийн гүдгэр бүрхэлт (тэдгээрийг агуулсан хамгийн бага гүдгэр дүрс) нь дор хаяж 3 оройтой гүдгэр олон өнцөгт байх тул түүний орой болдог  $P_j$ ;  $2 \leq j \leq n-1$  цэг олдох ба тэр  $j$ -ийн хувьд  $(x_j, y_j - d)$ ;  $(x_j, y_j + d)$  цэгүүдийн нэг нь гүдгэр олон өнцөгтийн гадна байх болно. Тэр цэгийг Т-ээс хасвал Т-ийн хангадаг, бодлогын нөхцөлд заасан чанар алдагдахгүй нь ойлгомжтой юм.

4. Энэ бодлогын нөхцөл худлаа болох нь хэн бүгдэд ойлгомжтой байсан бөгөөд худлаа бичигдсэн шалтгаан нь бичигч надад ноогдох юм. Иймд би энэ олимпиадын III даваанд оролцсон бүх багш нараас уучлал гуйл.

Бодлогын зөв томъёолол нь: " $0 < a < 1$ , рационал  $a$  тооны хувьд  $\cos(3\pi a) + 2\cos(2\pi a) = 0$  бол  $a = 2/3$  гэж батал" гэсэн өгүүлбэр байсан юм. Одоо энэ бодлогыг үзүүлэв.  $\cos \pi a = x$  гэж тэмдэглэвэл өгсөн тэгшитгэлээс  $4x^3 + 4x^2 - 3x - 2 = (2x + 1)(2x^2 + x - 2) = 0$  болох бөгөөд  $2x + 1 = 0$  гэнэв  $\cos \pi a = -1/2$  буюу  $a = 2/3$  болно. Одоо  $2x^2 + x - 2 = 0$  нөхцөлийг хангах  $x$ -ийн хувьд  $a$  нь рационал тоо биш гэдгийг батлал.  $-1 \leq x \leq 1$  байх ёстой тул  $\cos \pi a = x = (\sqrt{17}-1)/4$  болно. Эхлээд дурын  $n \geq 0$  бүхэл тооны хувьд  $\cos(2^n \pi a) = (a_n + b_n \sqrt{17})/4$ ;  $a_n, b_n$  сондгой тоонууд баяхыг индукцэлж харуулав.  $n=0$  үед илт  $\cos(2^0 \pi a) = (a_0 + b_0 \sqrt{17})/4$  бол  $\cos(2^{n+1} \pi a) = 2\cos^2(2^n \pi a) - 1 = (2(a_n^2 + 17b_n^2) + 4a_n b_n \sqrt{17})/16$  болох ба  $a_n, b_n$  сондгой үед  $a_n^2 + 17b_n^2 \equiv 2 \pmod{4}$  учир  $a_{n+1} = 2(a_n^2 + 17b_n^2)/4$ ;  $b_{n+1} = a_n b_n$  тоонууд нь сондгой тоонууд болно. Цаашилбал  $a_{n+1} = 1/2(a_n^2 + 17b_n^2) \geq 1/2(a_n^2 + 9) > a_n$  тул  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  дараалал нь эрс өсдөг бүхэл тоон дараалал байна.  $\sqrt{17}$  иррационал тоо учир эндээс  $\{\cos(2^n \pi a)\}_{n=0}^{\infty}$  дараалалын бүх гишүүд ялгаатай гэж гарлаа. Харэв  $a$  рационал тоо бол  $\{\cos(m\pi a) \mid m \text{ бүхэл}\}$  олонлогт төгсгөлөг тооны ялгаатай тоонууд байх ёстой учраас өмнөх дүгнэлт нь  $a$  нь иррационал тоо гэсэн дүгнэлтэнд хүргэж байна. Иймд өгсөн тэгшитгэлийг цорганц рационал  $a = 2/3$  хангана.

#### БАГШ НАРЫН IV ДАВААНЫ БОДЛОГУУД

Ц. ДАШДОРЖ, В. БАТЦЭНГЭЛ

A1. /Ш. БАТХИШИГ. УВИС-оюутан/  $x^2 + y^2 + z^2 = t^2 + 1$  тэгшитгэлийн  $\min\{x, y, z\} > 1$  байх натурал тоон шийдүүд төгсгөлгүй олон болохыг батал.

A2. /В. БАТЦЭНГЭЛ. МУИС/ Сейф нь 3 цоожтой бөгөөд цоож бүр нь 4 тавилттай байв. Сейф нь аль нэг 2 цоож нь зөв тавилттай үед онгоёхоор хийгдсэн бол хамгийн цөөндөө хэдэн туршилт хийхэд Сейф заавал онгоёх вэ?

A3. /Л. ХАДХҮҮ. МУИС/  $x_n = \left(\sum_{k=1}^n 1/(k^2 \sqrt{k^2-1})\right)/\sqrt{n}$ ;  $y_n = \sqrt{n}(x_n - a)$  дарааллууд нийлэхийг батал. Энд:  $a$  нь өгөгдсөн натурал тоо.  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

В1. /Ц. ДАШДОРЖ. МУИС/  $y^2 + 9 = x^3$  тэгшитгэлийн бүх бүхэл тоон шийдийг ол.

В2. /Н. ДАЙВИЙ-ОД. УБИС-оюутан/  $0 \leq a_i \leq a; i=1, n$  бол  $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) / a - (a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n + a_n a_1) / a^2 \leq n/2$  байхыг батал.

В3. /Б. БАТЦЭНГЭЛ. МУИС/ Аял бүр нь тусдаа орон сууцтай Х хотод айлуудыг зөвхөн хос хосоороо байр солихыг зөвшөөрдөг бөгөөд нэг өдөрт нэг аял нэг л удаа сууцаа сольж амждаг байлаа. Тэгвэл Х хотод анхнаасаа төлөвлөгдсөн ямар ч сууц солилтыг 2 өдөрт багтааж явуулж чадахыг батал.

### БОДЛОГУУДЫН БОДОЛТ

А1. Энэ бодлогыг уг даваанд оролцсон ихэнхи багш нар зөв бодсон юм. Хамгийн товч бодолтыг сонирхуулбал:  $x=2n+1, y=2n, z=n+1, t=3n+1, n \geq 1$  тоонууд нь манай тэгшитгэлийг хангана гэдэг бодолт юм.

А2.

|   |   |   |
|---|---|---|
| x | x | x |
| x | y | y |
| y | x | y |
| y | y | x |

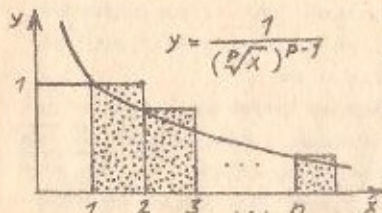
Хүснэгтийг сонирхвол түүний аль ч баганыг дарахад үлдэх табличын 4 мөрөнд  $\begin{bmatrix} x & x \\ x & y \\ y & x \\ y & y \end{bmatrix}$  дөрвүүл нэг нэгээрээ байна. Эндээс хэрэв сейфийн жинхэнэ шифрт (бид цоожны тавилтуудыг 1,2,3,4 гэж үзнэ. Шифр гэдэг нь энэ дөрвөн тоо оролцсон 3 гишүүнтэй дараалал гэсэн үг юм)

аль нэг 2 цифр нь хоёул  $\{x, y\}$  олонлогт байдаг бол сейф  $xxx, xyy, yxy$  гэсэн 4 туршилтын аль нэгээр заавал онгойно.  $\{1,2,3,4\} = \{1,2\} \cup \{3,4\}$  гэж 2 олонлогт хуваавал шифр нь 3 гишүүнтэй тул Дирихлейн зарчим ёсоор шифрийн аль нэг хоёр цифр нь хуваалтын энэ 2 олонлогийн нэгэнд нь хоёул орох юм. Иймд сейф 111, 122, 212, 221, 333, 344, 434, 443 гэсэн 8 туршилтаар заавал онгойх нь ээ. Одоо ямар ч 7 туршилтаар сейфийг найдвартай онгойлгож чадахгүйг харуулая. Эсрэгээс ямар нэг 7 туршилтаар сейфийг заавал онгойлгодог гэе. Тэгвэл ямар нэг цифрээр эхэлсэн туршилт эсвэл яг 2 хийгдсэн байна эсвэл огт хийгдээгүй байна. Тодорхой болгоод 4-өөр эхэлсэн туршилт яг 1 хийгдсэн гэе, тэр туршилт нь  $4ab$  болог.  $y \neq a, b \neq y$  байх үед цифрүүдийн хувьд (ийм үед гэсэн хос 9 ширхэг байна). жинхэнэ шифр нь  $4yb$  байх сейф нь заавал үед-аар төгссөн туршилтаар онгойно. Ингээд 9 туршилт заавал хийх хэрэгтэй болж туршилтын тоо 7 гэсэнд зөрчнө. Ямар нэг цифрээр эхэлсэн туршилт огт хийгдээгүй үед мөн адил зөрчил үүснэ. (Энэ тохиолдолд дор хаяж 16 туршилт хийх хэрэгтэй гэсэн зөрчил гарна).

А3. 1/ Ямар нэг  $a$ -ийн хувьд  $\{y_n\}$  нийлдэг бол  $\{x_n\}$  нийлэх ба  $a$  нь заавал  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ -тэй тэнцүү байна.  
2/  $\{y_n\}$  нь  $a=r$  үед нийлна, гэсэн 2 бодлогыг бодчихвол манай бодлого бодогдох нь илт билээ.

1/.  $x_n - a = y_n / \sqrt[n]{p}$  учир  $\{y_n\}$  нийлдэг бол  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p} = \infty$  тул  $\{x_n - a\}$  дараалал нь 0 рүү нийлдэг дараалал болох нь ээ. Эндээс  $\{x_n\}$  нийлна,  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  байна гэдэг нь хоёулаа үнэн байна.

2/.  $a = p$  үед  $y_n = \sum_{k=1}^n 1/((\sqrt[k]{p})^{p-1}) \cdot \sqrt[p]{p}$  юм.  $y_{n+1} - y_n = 1/(\sqrt[n+1]{p+1})^{p-1} - 1/(\sqrt[n]{p})^{p-1} = 1/(\sqrt[n+1]{p+1})^{p-1} - 1/(\sqrt[n]{p+1})^{p-1} + 1/(\sqrt[n]{p+1})^{p-1} - 1/(\sqrt[n]{p})^{p-1} < 0$  буюу  $\{y_n\}$  буурдаг дараалал байна. Одоо  $\{y_n\}$  нь доороос зааглагдсан дараалал болохыг баталчихвал доороосоо заагтай, буурдаг дараалал ямагт нийлдэг билээ. Зурагт дүрсэлсэн тагш өнцөгтүүдийн талбайн нийлбэр нь  $\sum_{k=1}^n 1/((\sqrt[k]{p})^{p-1})$  ба энэ



нийлбэр нь  $\sum_{k=1}^n dx/(\sqrt[k]{p})^{p-1} = p(\sqrt[n+1]{p+1} - 1)$  -ээс их байх нь харагдаж байна. Ийм учраас  $y_n = \sum_{k=1}^n 1/(\sqrt[k]{p})^{p-1} \cdot \sqrt[p]{p} > p(\sqrt[n+1]{p+1} - 1) \cdot \sqrt[p]{p} > p$  болж нь  $\{y_n\}$  доороосоо заагтай дараалал байжээ.

В1. Энэ бодлогыг Н. Дашдаваа /УБ-33/ В. Ваяржаргал /Баянхонгор/ нар бүрэн зөв бодсон байлаа.

Уг тагшитгэл шийдгүй болохыг харуулъя. Эсрэгээс бүхэл тоон шийдтэй, тэр шийд нь  $(x, y)$  болог. Хэрэв  $x$  - тагш байвал  $y^2 \equiv -1 \pmod{4}$  байхад хүрнэ. Гиймд  $x$  сондгой тоо байна.  $y^2 + 1 = x^2 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$  байх ба  $A = x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 \equiv -1 \pmod{4}$  юм. Нэгэнт  $A \equiv -1 \pmod{4}$  учраас  $A$  тооны анхны тоон хуваагчдын аль нэг нь 4 модулиар -1 байна. Түүнийг нь  $p$  гэвэл  $p|A$  гэдгээс  $p|y^2 + 1$  буюу  $y^2 \equiv -1 \pmod{p}$  болно. Мэдааж  $y \not\equiv 0 \pmod{p}$  ба сүүлийн жишлэгийг  $(p-1)/2$  сондгой зэрэг дэвшүүлбэл  $y^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$  болно. Гэтэл Фермагийн бага теорем ёсоор  $y^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  билээ. Энэ зөрчил нь тагшитгэлийг шийдгүй гэдгийг харуулж байна.

В2. Энэ бодлогыг уг даваанд оролцсон ихэнхи багш нар зөв бодсон байлаа. Одоо хамгийн товч бодолт хийсэн Ж. Лхагвадорж /Хөвсгөл/ -ийн бодолтыг толилуулъя. Бодолтондоо  $0 \leq x, y \leq 1$  бол  $xy \leq (x+y)/2$  гэсэн хялбархан батлагдах тэнцэл бишийг ашиглая. (Үнэхээр  $xy \leq \sqrt{xy} \leq (x+y)/2$  эсвэл  $xy \leq \min\{x, y\} \leq (x+y)/2$  байлаа).  $A = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)/a - (a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_1)/a^2 = a_1/a(1 - a_2/a) + a_2/a(1 - a_3/a) + \dots + a_n/a(1 - a_1/a)$  байх бөгөөд  $0 \leq a_i/a \leq 1$ ;  $0 \leq 1 - a_i/a \leq 1$  тул дээрх тэнцэл биш ёсоор  $A \leq 1/2(a_1/a + a_2/a + \dots + a_n/a + (1 - a_2/a) + (1 - a_3/a) + \dots + (1 - a_1/a)) = n/2$  болно.

В3. Энэ бодлогыг Д. Бат-орших /Увс/ Д. Мөнхбат /Дархан/ нар үнэн зөв бодож авбал зохих оноонуудыг авлаа. Айлуудын сууцуудыг 1, 2, 3, ...,  $a_i$  гэж дугаарлая. Эхлээд  $i$ -р айл  $i$ -р байранд байсан гэж үзье. Сууц солилтын төлөвлөгөө гэдэг нь 1-р айл  $k_1$ -р байранд ...,  $m$ -р айл  $k_m$ -р байранд орно гэж өг-

өгдсөн төлөвлөгөө байна. Уг төлөвлөгөөг  $i \rightarrow k, i=1, m$  гэж тэмдэглэе. Байруудаа графын орой, төлөвлөгөөгөө  $i \rightarrow k_i$  гэсэн чиглэлт граф мэтээр сэтгэвэл энэхүү граф нь үл огтлолцох хад хэдэн шикад хуваагдана. Одоо инкли бүрийг 2 өдөрт багтааж сольж болно гээд л харуулчихвал бодлого бодогдчихно. Хэрэг болбол шинээр дугаарлаад  $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow k \rightarrow 1$  гэсэн циклийг авч үзье.

а/.  $k=2n$  бол I өдөр  $(1, 2n); (2, 2n-1); \dots; (n, n+1)$  гэсэн сууц солилтуудыг (энд  $(s, t)$  -ээр  $s$ -р байранд байгаа айл,  $t$ -р байранд байгаа айлтай байр солино гэдгийг тэмдэглэлээ). II өдөр  $(2, 2n); (3, 2n-1); \dots; (n, n+2)$  гэсэн сууц солилтуудыг хийхэд,

б/.  $k=2n+1$  бол I өдөр  $(1, 2n+1); (2, 2n); \dots; (n, n+2)$  гэсэн сууц солилтуудыг, II өдөр  $(2, 2n+1); (3, 2n); \dots; (n+1, n+2)$  гэсэн сууц солилтуудыг хийхэд хангалттай юм. Үүгээр бодлого бодогдов.

### БАГУУДЫН ТЭМЦЭЭН

#### В. БАТЦЭНГЭЛ

Жил бүр улсын математикийн олимпиадын үеэр зохиогддог тэмцээн энэ жил Дархан хотод 5-р сарын 10-нд амжилттай болж өнгөрлөө.

Багш нарын I, II баг, Сурагчдын баг, Дархан хотын баг, комиссын баг оролцсон уг тэмцээнд комисс баг түрүүлж, багш нарын I баг удааллаа. Бусад багуудын авсан оноо тэнцсэн боловч тэднийг бодсон хугацааг нь харгалзан байр эзлүүлэн, Багуудын дэвшүүлсэн бодлогууд, тэдний заримынх нь бодолт болон тэмцээний дүнг дор толилуулъя.

#### БАГУУДЫН ДЭВШҮҮЛСЭН БОДЛОГУУД:

##### 1. /Багш нар -I баг/

$a_1, a_2, \dots, a_n$  нь  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$  байх эерэг тоонууд бол  $a_1^2/(a_1+a_2) + a_2^2/(a_2+a_3) + \dots + a_n^2/(a_n+a_1) \geq 1/2$  гэж батал.

##### 2. /Багш нар -II баг/

$a, b, c$  бодит тоонуудын хувьд  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$  муруй дээр бүх орой нь орших яг нэг квадрат олддог бол уг квадратын талыг ол.

##### 3. /Сурагчид баг/

$x_1^{28} + \sum_{i=2}^{1992} x_i^i = x_{1993}^{1993}$  тэгшитгэл төгсгөлгүй олон натурал тоон шийдтэйг батал.

##### 4. /Дархан хотын баг/

$$\begin{cases} x^3 + 2x^2 + 2x = y \\ y^3 + 2y^2 + 2y = z \\ z^3 + 2z^2 + 2z = x \end{cases} \text{ системийг бод.}$$

##### 5. /Комисс баг/

$x_i \geq 0; \sum_{i=1}^n x_i = 1$  бол  $\sum_{i < j} x_i x_j (x_i + x_j)$  нийлбэрийн хамгийн их утгыг ол.

Багуудын олонхи нь бодож чадаагүй зарим бодлогын бодолт:

2. Эхлээд муруйгаа параллель зөөгөөд уг муруйн нугаралтын цэг нь координатын эх  $(0,0)$  болгочихой. Тагвал муруйн тэгшитгэл нь  $y=x^3+bx$  болох бөгөөд манай квадратын төв нь  $(0,0)$  байна. Учир нь сүүлийнх нь тийм биш байдаг бол уг квадратыг  $(0,0)$ -ийн хувьд  $180^\circ$  эргүүлэхэд үүсэх квадрат нь манай муруй дээр орших 2 дахь квадрат юм.  $(t,s)$  нь уг квадратын аль нэг орой болог. Тагвал бусад оройнууд нь  $(-s,t)$ ;  $(-t,-s)$ ;  $(s,-t)$  болох ба тэдгээр нь  $y=x^3+bx$  муруйг  $90^\circ$  эргүүлэхэд үүссэн  $-x=y^3+by$  муруй дээр бас оршино. Нөгөө талаас  $P$  нь  $y=x^3+bx$  ба  $-x=y^3+by$  муруйнуудын  $(0,0)$ -оос ялгаатай огтлолцлын цэг бол  $P$ -г  $(0,0)$ -ийн хувьд  $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$  эргүүлэхэд үүссэн цэгүүд  $P$ -тэй хамт квадрат үүсгэнэ. Нэгэнт бидэнд цор ганц квадратолдоно гэж өгөгдсөн тул энэ 2 муруй маань координатын тэнхлэгүүдээр хуваагдсан 4 муж тус бүрт нэг нэг огтлолцлын цэгтэй болно. Эндээс  $b < 0$  болох ба манай квадратын оройнуудын  $x$ -координатууд нь  $-x=(x^3+bx)^3+b(x^3+bx)$  тэгшитгэлийн тэгээс ялгаатай 2 давхардсан язгуурууд болох нь хялбар харагдаж байна. Өөрөөр хэлбэл  $p(x)=(x^3+bx)^3+b(x^3+bx)+x$  бол  $p(x)/x=x^8+3bx^6+3b^2x^4+b(b^2+1)x^2+b^3+1=((x-r)(x-s)(x+s))^2$  болно. Сүүлийн тэнцлээс  $3b=-2(r^2+s^2)$ ;  $3b^2=(r^2+s^2)^2+2r^2s^2$ ;  $b(b^2+1)=-2r^2s^2$  ( $r^2+s^2$ );  $b^2+1=r^4s^4$  гэж гарна. 1,3,4-р тэгшитгэлүүдээс  $-2(r^2+s^2)r^4s^4=-6r^2s^2(r^2+s^2)$  буюу  $r^2s^2=3$  болно. Иймд  $b=-2\sqrt{2}$  буюу  $r^2+s^2=3\sqrt{2}$  юм. Эцэст нь  $(0,0)$ ;  $(t,s)$  цэгүүдийн хоорондох зай нь манай квадратын диагоналийн хагас учир квадратын тал нь  $\sqrt{2}(r^2+s^2)=4\sqrt{72}$  болно.

5.  $x=\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$  векторуудын олонлог болог.  $u=(x_1, x_2, \dots, x_n)$  үед  $f(u)=\sum_{i < j} x_i x_j (x_i + x_j)$  гэж тэмдэглэе. Манай функц хувьсагчдийн хувьд симметр тул  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$  гэж үзэж болно. Дор хаяд 3 ширхэг 0-ээс ялгаатай координаттай  $u=(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, 0, \dots, 0)$  вектор авъя. (Энд  $x_1 \geq \dots \geq x_k \geq x_{k+1} \geq x_{k+2} > 0$ ;  $k \geq 1$ )  $x_{k+1}=a$ ;  $x_{k+2}=b$  гэе. Тагвал мэдээж  $a+b \geq 2/3$  юм.  $w=(x_1, \dots, x_k, a+b, 0, \dots, 0)$  гэвэл  $f(w)-f(u)=\sum_{i=1}^k x_i(a+b)(x_i+a+b)-\sum_{i=1}^k x_i a(x_i+a)-\sum_{i=1}^k x_i b(x_i+b)-ab(a+b)=\sum_{i=1}^k x_i 2ab-ab(a+b)=ab(2-3(a+b)) \geq 0$  буюу  $f(w) \geq f(u)$  болно. Эндээс функцийн хамгийн их утга нь 0-ээс ялгаатай координат хамгийн ихдээ 2 ширхэг баяхад гарч нрэх нь ойлгомжтой болов. Тэр 2 координат нь  $a, b$  бол  $a+b=1$  ба  $f(u)=ab(a+b)=ab < ((a+b)/2)^2=1/4$ . Ийнхүү хамгийн их утга нь  $1/4$  боллоо. Хариу:  $1/4$ . Тэр утгыг  $x_1=x_2=1/2$ ;  $k \geq 3$  үед  $x_k=0$  байхад авна.

ТЭМЦЭЭНИЙ ДҮН

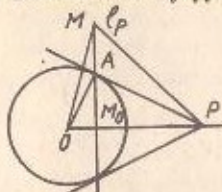
| №  | Баг         | 1  | 2  | 3  | 4  | 5 | Нийт оноо | байр |
|----|-------------|----|----|----|----|---|-----------|------|
| 1. | Багш нар I  |    | 6  | 6  | 6  | 0 | 18        | II   |
| 2. | Багш нар II | 6  |    | 0  | 6  | 0 | 12        | V    |
| 3. | Сурагчид    | 6  | 0  |    | 6  | 0 | 12        | III  |
| 4. | Дархан      | 6  | 0  | 6  |    | 0 | 12        | IV   |
| 5. | Комисс      | 6  | 6  | 6  | 6  |   | 24        | I    |
|    |             | 24 | 12 | 18 | 24 | 0 |           |      |

## ЦЭГИЙН ПОЛЯР ШУЛУУН

## Ц. ЛУВСАНДОРЖ

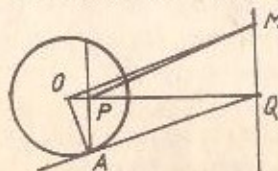
Энэ ойлголтой танилцахын өмнө  $A, B$  өгсөн цэгүүдийн хувьд  $AM^2 - BM^2 = k$  ( $k$  - тогтмол тоо) байх цэгүүдийн олонлог нь  $AB$  шулуунд перпендикуляр шулуун байдгийг сануулъя.

Тодорхойлолт:  $O$  төвтэй  $R$  радиустай  $(O, R)$  тойргийн хавтгайн  $P$  цэгийн хувьд  $OM^2 - PM^2 = 2R^2 - OP^2$  шулууныг уул цэгийн поляр шулуун гээд  $l_P$  -ээр тэмдэглэе.



Өгсөн  $(O, R)$  тойргийн хувьд цэгийн поляр шулуун нь хархан байгуулагддагыг авч үзье.  $a/$  Р цэг нь  $(O, R)$  тойргийн гадна талд оршдог бол уул цэгаас тойрогт татсан шүргэгчүүдийн шүргэлтийн цэгийг дайрсан шулуун нь түүний поляр шулуун байдгыг батлая.  $\forall M \in L_p$  цэгийн хувьд:

$OM^2-PM^2=OM_0^2-M_0P^2=OA^2-PA^2=2R^2-OP^2$  болохоор  $Lp$  шулуун нь  $P$  цагийн полляр шулуун болж чадна. б/.  $P$  цаг  $(O,R)$  тойргийн дотор оршдог байг.



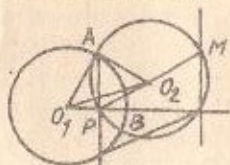
Р цэгийг дайрсан. ОР шулуунд перпендикуляр хөвчийн төгсгөлийн цэгт татсан шүргэгчийн ОР шулуунтай огтлолцсон цэг нь Q болог. ОР шулууны Q цэгт босгосон перпендикуляр нь  $L_p$  шулуун байна.  $\forall M \in L_p$  цэгийн хувьд:

$$OM^2-PM^2=OO^2-PO^2=R^2+AP^2=2R^2-OP^2 \text{ болохоор } Lp$$

шулуун нь поляр шулуун болох нь харагдав.  $\forall R \in (O, R)$  бол  $L_p$  шулуун  $P$  иэг дэхь шүргэгч болж байна. Нөгөө талаас хавтгайн аливаа шулуунд, уул шулуун поляр шулуун нь болох цэгийг дээрх байгуулалтаас байгуулж болж байна. "Цэгийн поляр шулуун" гэсэн ойлголтоор тойргийн нэгээс ялгаатай хавтгайн цэгүүд, хавтгайн шулуунуудын хооронд харилцан тэнэс угтатгай харгалзааг тогтоож байгаа юм. Цэгийн поляр шулууны үндсэн чанаруудыг сонирхоё.

Чанар 1. Хэрвэв  $PELQ$  бол  $Q \in Lp$  байна.  $PELQ$  гэдгээс:  $OP^2 \cdot QP^2 = 2R^2 \cdot OQ^2$  байх ба эндээс  $OQ^2 \cdot PQ^2 = 2R^2 \cdot OP^2$  болж чанар батлагдсан

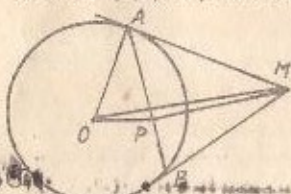
Чанар 2.  $\forall M \in Lp$  цэгийн хувьд  $PM$  диаметртай тойрог нь  $(O, R)$  тойрогтой перпендикуляр байдаг.



$O_2$  төвтэй  $PM$  диаметртай тойргийн  $(O_1, R)$  тойрогтой огтлолцох цэгүүдийг  $A, B$  -ээр тэмдэглэв. Уул хоёр тойргийг перпендикуляр гэж харахад  $AO_1^2 + AO_2^2 = O_1O_2^2$  байхыг шалгахад хангалттай.  $M \in Lp$  гэдгээс  $OM^2 \cdot PM^2 = 2R^2 \cdot O_1P^2$  ба  $PM^2 = 4AO_2^2$  болно.

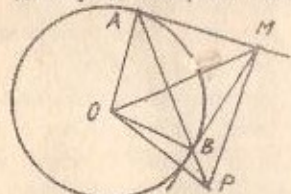
$OMP$  гурвалжны хувьд: Стюартын томъёогоор:  $O_1O_2^2 = (O_1M^2 + O_1P^2)/2 - O_2A^2$  буюу  $M \in Lp$  болохыг анхаарвал  $O_1O_2^2 = R^2 + AO_2^2 = O_1A^2 + O_2A^2$  болж батлагдсан.

Чанар 3.  $P$  цэгийг дайрах бүх боломжит хөвчүүдийн (огтлогчуудын) төгсгөлийн цэгт татсан шүргэгчүүдийн огтлолцлын цэгүүд  $Lp$  шулуун дээр оршино. а/г.  $P$  цэг  $(O, R)$  тойргийн дотор оршдог байг.



$AMB, OAB$  гурвалжнуудын хувьд Стюартын томъёогоор:  $PM^2 = AM^2 - AP \cdot PB$ ;  $OP^2 = OA^2 - AP \cdot PB$  болно. Нөгөө талаас  $OM^2 = OA^2 + AM^2$  байгааг анхаарвал:  $OM^2 \cdot PM^2 = 2R^2 \cdot OP^2$  гэдэг нь аливаа хөвчийн хувьд чанарт дурдсан цэг  $Lp$  шулуун дээр оршиж байгааг нотлов.

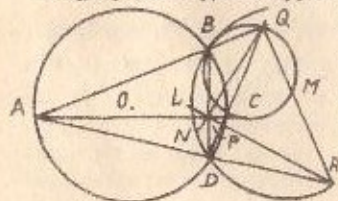
а/г.  $P$  цэг  $(O, R)$  тойргийн гадна талд оршдог байг.  $AOB$  ба  $AMB$  гурвалжнуудын хувьд Стюартын томъёогоор:  $PM^2 = AM^2 + AP \cdot PB$ ;  $OP^2 = OA^2 + AP \cdot PB$  болно.



Нөгөө талаас  $OM^2 = OA^2 + AM^2$  гэдгийг анхаарвал:  $OM^2 \cdot PM^2 = 2R^2 \cdot OP^2$  болж чанар бүрэн батлагдсан.

Чанар 4. Тойрогт багтсан  $ABCD$  дөрвөн өнцөгтийн диагоналуудын огтлолцлын цэг нь  $P$ , эсрэг талуудын огтлолцлын цэгүүд  $Q, R$  бол  $Lp = (RQ)$ ;  $Lq = (PR)$ ;  $Lx = (PQ)$  байна.

$BCQ, BQD, BDR$  гурвалжнуудыг багтаасан тойргуудыг харгалзан  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  гэв.



$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  тойргуудын харгалзан  $RQ, PQ, RP$  шулуунуудтай огтлолцсон цэгүүдийг  $M, N, L$  гэнэл  $\angle BQC = \angle CMR$ ;  $\angle QND = \angle QBD = \angle QCA$ ;  $\angle BLR = \angle BDR = \angle ABC$  гэдгээс  $CDMR, CDNP, BCLP$  дөрвөн өнцөгтүүд тойрогт багтана. Тэгвэл  $ABCD$  дөрвөн өнцөгтийг багтаасан тойргийн төв  $O$  бөгөөд радиус нь  $R$  бол хөвч огтлогчийн чанараар:

$$(CDMR): QM \cdot QR = QC \cdot QD = OQ^2 - R^2$$

$$(BCQM): RMRQ = RCRB = OR^2 - R^2 \quad \text{гэдгээс} \quad RQ^2 = OQ^2 + OR^2 - 2R^2 \quad (1)$$

$$(CDNP): QPQN = QCQD = OQ^2 - R^2$$

$$(BDQN): NPPQ = BPPD = R^2 - OP^2 \quad \text{гэдгээс} \quad PQ^2 = OQ^2 + OP^2 - 2R^2 \quad (2)$$

$$(BCLP): RPLR = RCRB = OR^2 - R^2$$

$$(BDLR): LPPR = BPPD = R^2 - OP^2 \quad \text{гэдгээс} \quad PR^2 = OR^2 + OP^2 - 2R^2 \quad (3) \quad \text{болж байна.}$$

$$1, 2\text{-дугаар тэнцлээс} \quad RELQ; PELQ$$

$$1, 3\text{-дугаар тэнцлээс} \quad QELR; PELR$$

$$2, 3\text{-дугаар тэнцлээс} \quad QELP; RELP \quad \text{гэдгээс} \quad RP = LQ; QP = LR; QR = LP \quad \text{болж чанар батлагддаг.}$$

Цэгүүдийн полдр шулууны чанаруудыг ашиглан цэгүүдийн коллинеар, шулуунуудын перпендикуляр, параллель байх чанарууд, шулуунуудын бүлийн ерөнхий цэгтэй байхыг батлах бодлогууд болон тойрог шулуунтай холбогдсон бодлогууд хялбар бодогдож байдгийг тэмдэглэх нь зүйтэй юм.

### БОДЛОГУУД

1. /Брюкарын теорем/ Тойрогт багтсан ABCD дөрвөн өнцөгтийн диагоналийн огтлолцлын цэг P ба эсрэг талуудын огтлолцлын цэгүүд нь харгалзан P, Q боловч PQR гурвалжны ортоцентр нь ABCD дөрвөн өнцөгтийг багтаасан сан тойргийн төвтэй давхцахыг батал.

2. Тойрог дээр E, F, A, B, C цэгүүдийг тэмдэглэв. Тэгвэл  $M = (EA) \cap (FB)$ ;  $M_1 = (EB) \cap (FA)$ ;  $N = (EB) \cap (FC)$ ;  $N_1 = (EC) \cap (FB)$ ;  $K = (EC) \cap (FA)$ ;  $K_1 = (EA) \cap (FC)$  бол  $MM_1, NN_1, KK_1$  шулуунууд эсвэл ерөнхий цэгтэй эсвэл параллель болохыг батал.

3. Тойрогт багтсан дөрвөн өнцөгтүүдийн оройнуудад татсан шүргэгчүүдээр үүсэх дөрвөн өнцөгтүүдийн диагоналууд нь анхны дөрвөн өнцөгтийн диагоналуудтай ерөнхий цэгтэйг батал.

4. Тойрогт параллель хөвчүүд татвал хөвчүүдийн төгсгөлийн цэгүүдэд татсан шүргэгчүүдийн огтлолцлын цэгүүд тойргийн төвийг дайрсан, хөвчүүдэд перпендикуляр шулуун байгааг батал.

5. Тойргийн дотоод C цэгийг дайруулан  $AA_1, BB_1, MN$  хөвчүүд татав. Хэрэв C цэг нь MN хөвчийн дундаж бөгөөд уул хөвчийг, AB ба  $A_1B_1$  хэрчмүүд харгалзан P, Q цэгээр огтлолдог бол  $(PQ, C) = 1$  болохыг батал.

6. Тойрог дээр оршдоггүй A цэгийг дайруулан татсан  $d_i, i = 1, n$  шулуунууд тойргийг  $M_i, N_i$  цагаар огтлоно. Хэрэв  $P_{ij} = (M_i N_j) \cap (M_j N_i)$ ,  $Q_{ij} = (M_i M_j) \cap (N_i N_j)$  цэгүүд оршин байвал бүгд нэг шулуун дээр оршино гэдгийг батал.

7. Тойрог, түүнтэй ерөнхий цэггүй d шулуун өгөгдөв.  $\angle MEC$  цэгээс тойрогт татсан шүргэгчүүдийн шүргэлцлийн цэгүүдийг дайрсан шулуунууд ерөнхий цэгтэйг батал.

8.  $\gamma$  тойрог,  $r$  шулуун өгөгдөн.  $\forall O_1 \in r$  цэгээс  $\gamma$  тойрогт татсан шүргэгчийн шүргэлцлийн цэг  $M$  бол өгссөн тойрогтой  $P, Q$  цэгээр огтлолцдог ( $O_1, OM$ ) тойрог байгуулагдав. Тэгвэл  $PQ$  хэрчмүүд параллель буюу ерөнхий цэгтэй болохыг батал.

9.  $(O_1, R_1), (O_2, R_2)$  тойргууд нь  $\angle O_1 A O_2 = \angle O_1 B O_2 = 90^\circ$  байхаар огтлолцдог ба  $\forall O \in (AB)$  цэгээс  $(O_1, R_1)$  тойрогт татсан шүргэгчийн шүргэлцлийн цэг нь  $M$  болог.  $(O, OM)$  тойрог нь  $(O_1, R_1)$  ба  $(O_2, R_2)$  тойргуудтай харгалзан  $P_1, Q_1; P_2, Q_2$  цэгүүдээр огтлолцдог бол  $P_1 Q_1, P_2 Q_2$  хөвчүүд  $O_1, O_2$  цэгүүдийг дайрдаг болохыг батал.

#### Ашигласан материал

1. В. Т. Базылев. Сборник задач по геометрии Москва 1980 г
2. Квант. 1986 г №7
3. В. Т. Базылев, А. С. Атанасян Геометрия Часть-2 Москва 1987 г

### НЭГЭН ФУНКЦИОНАЛ ТЭГШИТГЭЛИЙН ТУХАЙ

Ц. БАЯСГАЛАН Л. ХАДХҮҮ

Хот, улс, олон улсын математикийн олимпиадуудад  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  (1) тэгшитгэлийг янз бүрийн нөхцөлтэйгээр, өөр өөр олонлог дээр бодох, шийдийнх нь тодорхой цэг дээрх утгыг нь олох, шийдийнх нь ямар нэг чанарыг тогтоох зэрэг төрөл бүрийн бодлогууд олонтоо тааралддаг юм.

Энэ өгүүлэлт эдгээрийн заримынх нь талаар товчхон авч үзэх болно.

Эхлээд дараа хэрэглэгдэх 3 леммийг баталж, 2 леммийг томъёолъё.

**Лемм 1.** Аливаа бодит тооны хувьд энэ тоо руу нийлдэг, монотон өсөх буюу монотон буурах, рациональ тоон дарааллууд оршин байна. Өөрөөр хэлбэл:  $\forall a \in \mathbb{R}, \exists \{z'_n\}, \{z''_n\} \subset \mathbb{Q}: \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} z''_n = a, z'_n \leq z'_{n+1}, z''_{n+1} \leq z''_n$

Тухайлбал:  $a$  тооны дутагдалтай ба илүүдэлтэй дөхөлтийн дарааллууд леммийн нөхцлийг хангах нь нлт юм.  $\therefore$

**Санамж:** Энд  $z'_n \leq a \leq z''_n$  байх ба  $0 < a - z'_n < 1$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) гэж шаардаж болох нь баталгааны явцаас харагдаж байна.

**Лемм 2.** Аливаа ялгаатай 2 бодит тооны хооронд орших рационал тоо оршин байна.  $\therefore$  Өмнөх леммээс шууд мөрдөн гарна.  $\therefore$

**Лемм 3.** Хэрэв  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  дарааллуудын хувьд  $a_n \leq b_n \leq c_n$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) ба  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$  нөхцлүүд биелдэг бол  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$  байна.

$\therefore$  хязгаарын тодорхойлолт ёсоор  $\forall \epsilon > 0$  тоо авахад  $A - \epsilon < a_n < A + \epsilon$  ( $\forall n > N_1$ )  $A - \epsilon < c_n < A + \epsilon$  ( $\forall n > N_2$ ) байх  $N_1, N_2$  дугаарууд олдоно.  $N = \max\{N_1, N_2\}$  гэвэл  $A - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \epsilon$  ( $\forall n > N$ ) гэж батлах зүйл гарав.  $\therefore$

**Лемма 4.** Бодит тооны олонлогийн Гамелийн суурь гэж нэрлэгдэх, дараахь чанаруудтай SCR олонлог оршин байна. Үүнд: ямар ч  $a \in \mathbb{R}$  тоог авахад  $a = \sum_{i=1}^n g_i s_i$  байх  $n = n(a) \in \mathbb{N}$ ;  $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{Q}$ ;  $s_1, \dots, s_n \in S$  тоонуудыг сонгон авч болно. Өөрөөр хэлбэл:  $\forall a \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, \exists g_i \in \mathbb{Q}, \exists s_i \in S (i = \overline{1, n}): a = \sum_{i=1}^n g_i s_i$

**Лемма 5.** Ямар ч  $A$  олонлогийн хувьд энэ олонлог дээр тодорхойлогдсон, хоёроос цөөнгүй элементтай дурын олонлогоос утгаа авах бүх функцүүдийн олонлог нь  $A$  олонлогоос илүү чадалтай байна. (Олонлогийн чадал гэдэг нь элементийн тооны цаашдын зүй ёсны өргөтгөл бөгөөд уул олонлогийн элементийн ноогийг илэрхийлэх хэмжигдэхүүн юм). Вид сүүлчийн 2 леммийн баталгааг дунд сургуулийн сурагчдын мэдэх хэмжээнд тохируулан хийж чадсангүй. Эхнийхийг нь сонголтын аксиом, дараагийнхыг нь олонлогийн чадлын тодорхойлолт ашиглан хялбархан баталж болно.  $S$ -ийн чадал  $R$ -ийн чадалтай ижил байдаг. Вид  $S$  олонлог дээр тодорхойлогдсон  $f$  функц байгуулчихвал энэ функцийг тусламжтайгаар  $f(x) = \sum_{i=1}^n g_i f(s_i)$ ,  $x = \sum_{i=1}^n g_i s_i$ ,  $g_i \in \mathbb{Q}$ ,  $s_i \in S (i = \overline{1, n})$  дүрмээр үүсэх,  $R$  дээр тодорхойлогдсон  $f$  функц нь (1) тэгшитгэлийг хангах нь дараа батлах (2) томъёоноос шууд гарна. Мөн  $S$  дээр  $f, \varphi$  функцүүд ялгаатай бол  $f \neq \varphi$  байх нь ойлгомжтой. Ийнхүү функцийг  $S$  дээр хичнээн аргаар тодорхойлж болно, (1) тэгшитгэлийг хангах төчнөөн функц байх ёстой болов. Иймд лемма 5-ыг тооцвол (1) тэгшитгэлийг хангах функцийг "тоо" (чадал) бүх бодит тоонуудын тооноос илүү байна. Нөгөө талаас (1)-ийг хангах бүх тасралтгүй функц  $f(x) = ax$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) хэлбэртэй байхыг дараа батална. Өөрөөр хэлбэл: Ийм функцийг тоо  $a$ -г хэдэн янзаар сонгон авч болохоос хамаарна. Иймд бодит тоонуудын тоотой тэнцүү байна гэсэн үг юм. Эдгээр үр дүнгээ тооцвол (1) тэгшитгэлийг хангах тасралтгүй функц оршин байна гэсэн дүгнэлтэнд хүрч байна. Ийнхүү (1) тэгшитгэлийг хангах,  $R$  дээр тодорхойлогдсон, тасралтгүй, тасралтгүй, зааглагдсан, зааглагдаагүй олон төрлийн, маш "олон" функц оршин байх болов. Практикт эдгээр функцээс заримыг нь тодорхойлогдох мужийг нь багасгах (бодлого 1-ийг хар), эсвэл (1) нөхцөл дээр нэмэлт шаардлага таних (бодлого 2-ийг хар) замаар ялган авах зорилт тулгардаг юм.

**Бодлого 1.** (1) тэгшитгэлийн рационал тоон олонлог дээр тодорхойлогдсон бүх шийдийг ол.

∴ (1) -д  $x=y=0$  гэвэл  $f(0)=0$  гэж гарна. Мөн  $y=-x$  гэвэл  $f(-x)=-f(x)$  буюу  $f$  нь сондгой функц болно. (1)-ийг дэс дараалан хэрэглэвэл:  $f(nx) = nf(x)$  ( $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x$ ) байх нь ойлгомжтой. Одоо  $\forall n, m \in \mathbb{N}$  тоонууд авч дээрх тэнцлийг ашиглавал (2)  $f((n/m)x) = f(n(x/m)) = nf(x/m) = (n/m)mf(x/m) = (n/m)f(mf(x/m)) = (n/m)f(x)$  болно. Энд  $x=1$  гэвэл  $f(n/m) = (n/m)f(1) = am/n$  ( $a=f(1)$ ,  $\forall n, m \in \mathbb{N}$ ) буюу сөрөг биш рационал  $x$  тоо бүрийн хувьд (3)  $f(x) = ax$  ( $\forall x \in \mathbb{Q}, x \geq 0, a=f(1)$ ) болов.  $x \in \mathbb{Q}, x < 0$

бол  $f$ -ийн сонцгой чанар болон (3) -аас  $f(x) = -f(-x) = -a(-x) = ax$  ( $\forall x \in Q, x < 0$ ) гэж гарна. Буцаагаад  $f(x) = ax$  хэлбэрийн функц бүр (1) -ийг хангах нь илт. Иймд (1) -ийн  $Q$  дээр тодорхойлогдсон шийд нь зөвхөн  $f(x) = ax$  хэлбэрийн функц байна. Энд  $a = f(1)$  нь дурын бодит тоо юм.  $\therefore$

Цаашид (1) тэгшитгэлийн  $R$  дээр тодорхойлогдсон шийдийг олохын тулд ямар нэг нэмэлт нөхцөл шаардах хэрэгтэй болдог. Энэ нэмэлт нөхцлүүд нээгдэх олон төрлийн байна. Одоо эдгээрийн зарим нэгээс нь л авч үзье.

**Бодлого 2.** (1) тэгшитгэлийн  $R$  дээр тодорхойлогдсон, дараах нөхцлүүдийн аль нэгийг хангах бүх шийдийг ол. Үүнд:

а/  $f$  - монотон;

б/  $f(x) \geq 0$  ( $\forall x \in R, x \geq 0$ );

в/  $f(xy) = f(x)f(y)$  ( $\forall x, y \in R$ );

г/  $f(x)f(1/x) = 1$  ( $\forall x \in R, x \neq 0$ );

д/  $f$  нь  $x=0$  цэг дээр тасралтгүй;

е/  $f$  нь  $x=0$  цэг дээр уламжлалтай;

ё/  $f(1/x) = (1/x^2)f(x)$  ( $\forall x \in R, x \neq 0$ ),  $f(1) = 1$

$\therefore$  (1) (а) нөхцөл биелдэг гэе.

**I. Бодолт:** Хэрэв  $a = f(1) = 0$  бол өмнөх бодлогоос бүх рационал  $x$ -ийн хувьд  $f(x) = 0$  болох ба эндээс  $f$ -ийн монотон чанарыг тооцвол бүх бодит  $x$ -ийн хувьд  $f(x) = 0$  болно. Иймд  $f(1) = a \neq 0$  үед асуудлыг авч үзье.

Тэгшитгэлийн шийд нь  $f(x) = ax$  хэлбэрийн бүх функцүүд байхыг батлал. Эсрэгээс нь  $f(x_0) \neq ax_0$  байх  $x_0 \in R$  тоо олддог гэе. Тодруулан  $f(x_0) < ax_0$ ,  $f$  монотон өсдөг гэж болно. (Бусад тохиолдолд баталгааг яг ижил хийнэ). Тэгвэл  $0 = f(0) \leq f(1) = a \Rightarrow a > 0 \Rightarrow f(x_0)/a < x_0$  байна. Иймд лемм 2 ёсоор  $f(x_0)/a < z < x_0$  буюу  $f(x_0) < az < ax_0$  байх  $z \in Q$  тоо олдох ба бодлого 1 ёсоор  $f(z) = az$  гэж гарна.  $f$  монотон өсөх учир  $az = f(z) \leq f(x_0)$  гэж хэргийнэ.  $f(x) = ax$  хэлбэрийн функц бүр (1) ба (а) -г хангах нь илт.

**II. Бодолт:**  $\forall x \in R$  тоо авъя. Лемм 1 ёсоор  $x$  рүү нийлэх,  $x'_n \leq x \leq x''_n$  ( $\forall n \in N$ ) байх  $\{x'_n\}$ ;  $\{x''_n\} \subset Q$  дарааллууд оршин байна.  $f$  монотон учир түүнийг өснө гэж үзэж болно. Иймд  $ax'_n = f(x'_n) \leq f(x) \leq f(x''_n) = ax''_n$  ( $\forall n \in N$ ) байна. Энэ тэнцэтгэл бишд хязгаарт шилжвэл лемм 3 ёсоор  $f(x) = ax$  гэж гарна.  $f(x) + f(y) + f(z)$

(II) (б) нөхцөл биелдэг гэе.  $x < y$  бол  $f(y) = f(x) + f(y) - f(x) = f(x) + f(y) + f(x) = -f(x) + f(y-x) \geq f(x)$  тул  $f$  монотон өснө. Иймд (I) -д баталснаар  $f(x) = ax$  ( $a = f(1) \geq 0$ ) гэж гарна. Буцаагаад  $f(x) = ax$  ( $a \geq 0$ ) хэлбэрийн функц бүр (1) ба (б) -г хангана.

(III) (в) нөхцөл биелдэг гэе.  $x \geq 0$  бол (в) -гээс  $f(x) = f(\sqrt{x}\sqrt{x}) = f(\sqrt{x})f(\sqrt{x}) \geq 0$  болно. Иймд (III) -д баталсан ёсоор  $f(x) = ax$  болох ба үүнийгээ (в) -д оруулбал  $axx = ax^2$  ( $\forall x, y \in R$ ) байна. Эндээс эсвэл  $a = 1$  эсвэл  $a = 0$  гэж гарна.

Ийнхүү (в) тохиолдолд бодлого маань  $f_1(x)=x$ ,  $f_2(x)=0$  хоёрхон шийдтэй байна.

(IV) (г) нөхцөл биелдэг гэе.

I. Бодолт (г)-д  $x=1$  гэвэл  $f(1)^2=1$  буюу  $f(1)=\pm 1$  болно.  $f(1)=1$  байг.  $x>0$  бол нэг талаас (4)  $f(1/(\sqrt{x}(1-\sqrt{x})))=1/f(\sqrt{x}(1-\sqrt{x}))=1/f(\sqrt{x}-x)=1/(f(\sqrt{x})-f(x))$  нөгөө талаас (5)  $f(1/(\sqrt{x}(1-\sqrt{x})))=f(1/\sqrt{x}+1/(1-\sqrt{x}))=f(1/\sqrt{x})+f(1/(1-\sqrt{x}))=1/f(\sqrt{x})+1/f(1-\sqrt{x})=1/f(\sqrt{x})+1/(f(\sqrt{x})-1)=1/(f(\sqrt{x})-f(x))$ . (4) ба (5) -аас  $f(x)=f^2(\sqrt{x})\geq 0$  гэж гарах учир (II) -д баталснаар  $f(x)=ax=f(1)x=x$  болно. Үүнтэй яг ижлээр хэрэв  $f(1)=-1$  бол  $f(x)=-x$  болно. Өөрөөр хэлбэл: бодлого  $x, -x$  гэсэн 2 шийдтэй.

II. Бодолт  $f(1)=1$  байг.  $\forall x \in ]1, +\infty[$  тоо авч (1) болон (г) -г ашиглавал:  $1=f(x+\sqrt{x^2-1})f(1/(x+\sqrt{x^2-1}))=f(x+\sqrt{x^2-1})f(x-\sqrt{x^2-1})=(f(x)+f(\sqrt{x^2-1}))(f(x)-f(\sqrt{x^2-1}))=f^2(x)-f^2(\sqrt{x^2-1})\leq f^2(x) \Rightarrow |f(x)|\geq 1$  ( $x>1$ ) болно. Иймд (г) -г дахин ашиглавал:  $|f(x)|\leq 1$  ( $\forall x \in ]0, 1[$ ) гэж гарна. Лемм 1 ёсоор  $\forall x \in ]0, 1[$  иррационал тооны хувьд  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x$ ,  $0 < x - z_n < 1$ ,  $\{z_n\}$  монотон өсдөг гэсэн чанарууд бүхий  $\{z_n\} \subset \mathbb{Q}$  дараалал олдоно. Мөн лемм 2 ёсоор  $1/(\sqrt{x-z_n}) < p_n < 1/(\sqrt{x-z_n})$  байхаар  $\{p_n\} \subset \mathbb{Q}$  дараалал ч олдоно. Эндээс  $\sqrt{x-z_n} < 1/p_n < \sqrt[4]{x-z_n}$ ,  $\sqrt[4]{(x-z_n)^3} < p_n(x-z_n) < \sqrt{x-z_n}$  гэж гарах тул лемм 3 ёсоор  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x-z_n) = 0$  гэдгийг тооцвол  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} 1/p_n = 0$ ,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x-z_n) = 0$  болно. Иймд хүрэлцээтэй их дугааруудын хувьд  $0 < p_n(x-z_n) < 1$  байх учир ийм дугааруудын үед (6), (2) болон бодлого (I) -ийн үр дүнг хэрэглэвэл  $(f(z_n)=z_n): |f(p_n(x-z_n))| < 1 \Rightarrow 0 \leq |f(x)-z_n| < 1/p_n$  болно. Сүүлчийн тэнцэтгэл бишд лемм 3 -ыг хараглан  $n \rightarrow \infty$  үед хязгаарт шилжвэл  $|f(x)-x| \leq 0 \Rightarrow f(x)=x$  ( $\forall x \in ]0, 1[$ ,  $x$  - иррационал) гэж гарна. Одоо бодлого 1 -ийн үр дүнг ахин тооцвол (7)  $f(x)=x$  ( $\forall x \in ]0, 1[$ ) болох юм.  $\forall x \in ]1, +\infty[$  тоо авахад  $1/x \in ]0, 1[$  учир (г) нөхцөл болон (7) -гоос  $f(x)=1/(f(1/x))=1/(1/x)=x$  ( $\forall x \in ]1, +\infty[$ ) гэж гарна. Иймд  $f(x)=x$  тэнцэл  $]0, +\infty[$  завсрын бүх  $x$  -ийн хувьд биелэх болов. Эцэст нь  $f$  -ийн сондгой чанарыг ашиглавал /бодлого 1 -ийн бодолтыг хар!/)  $f(x)=x$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ) байна. Үүнтэй яг ижлээр  $f(1)=-1$  үед  $f(x)=-x$  гэж гарах нь илэрхий юм.

(V) (д) нөхцөл биелдэг байг.  $f(0)=0$  ба  $|f(y)-f(x)|=|f(y-x)|$  тэнцлүүдээс  $f$  функцийн  $x=0$  цэг дээр тасралтгүй гэдгээс  $\forall x \in \mathbb{R}$  цэг дээр тасралтгүй гэж гарч байна. Гэтэл цэг  $\forall x \in \mathbb{R}$  авахад лемм 1 ёсоор  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x$ ,  $z_n \in \mathbb{Q}$  байх  $\{z_n\}$  дараалал олдох ба бодлого 1 -д баталснаар  $f(z_n)=az_n$ ,  $a=f(1)$  болох тул  $f$  -ийн  $x$  цэг дээр тасралтгүйг ашиглавал:

$$f(x)=f(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n)=\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)=\lim_{n \rightarrow \infty} az_n=a \lim_{n \rightarrow \infty} z_n=ax \text{ гэж гарна.}$$

Буцаагаад  $f(x)=ax$  хэлбэрийн функц бүр бодлогын нөхцөлийг хангана.

Энд  $a$  нь дурын бодит тоо байна.

(VI) (е) нөхцөл биелдэг бол  $f$  нь  $x=0$  цэг дээр тасралтгүй гэж гарна.

Иймд (V) -д баталснаар  $f(x)=ax$  болох нь ойлгомжтой. Вид  $f$  дифференциалч-

лагдана гэж өгснийг ашиглаж түүний тасралтгүйг анхаарч,  $(V)$  болон бодлого 1-ийг хэрэглэн олон шат дамжин бодов. Гэтэл бидэнд "маш хүчтэй" нөхцөл өгсөн учир өмнөхөөс хялбар, олон шат дамжихгүй бодолт байх ёстой. Энд тэдгээрийн нэгээс нь үзүүлэе.

$(f(x+\Delta x)-f(x))/\Delta x = (f(\Delta x))/\Delta x = (f(0+\Delta x)-f(0))/\Delta x$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ) тэнцлийн баруун талын илэрхийллийн  $\Delta x \rightarrow 0$  үеийн хязгаар  $f'(0)$  нь оршин байна гэж өгсөн тул зүүн талын илэрхийллийн хязгаар оршин байх ёстой. Иймд 2 талд нь  $\Delta x \rightarrow 0$  үед хязгаарт шилжвэл:  $f'(x) = f'(0) = A = \text{const}$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ) болно. Эндээс  $f(x) = Ax + B$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ) болох ба  $f(0) = 0, f(1) = a$  учир  $B = 0, A = a$  буюу  $f(x) = ax$  гэж гарна. Буцаагаад  $f(x) = ax$  хэлбэрийн функц бүр бодлоын нөхцлийг хангана.

(VII) (ё) нөхцөл биелдэг гэе. Тэгвэл  $x \neq 0, x \neq 1$  үед нэг талаас (8)  $f(1/(1-x)) = (1/(1-x))^2 f(1-x) = (1-f(x))/(1-x)^2$  нөгөө талаас (9)  $f(1/(1-x)) = f(1+x/(1-x)) = 1 + f(x/(1-x)) = 1 + (x/(1-x))^2 f((1-x)/x) = 1 + (x/(1-x))^2 (f(1/x)-1) = 1 + (x^2/(1-x)^2) \times ((1/x^2)f(x)-1) = (1-2x+f(x))/(1-x)^2$  болно. (8) ба (9) -өөс  $f(x) = x$  ( $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, x \neq 1$ ) болох ба  $f(0) = 0, f(1) = 1$  гэдгийг тооцвол  $f(x) = x$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ) гэж гарна. ∴

Дүгнэлт: (1) тэгшитгэлийн  $\mathbb{R}$ -дээр тодорхойлогдсон шийдүүд дотроос (а), (д), (е) нөхцлүүдийн аль нэгийг хангах нь  $f(x) = ax$   $a \in \mathbb{R}$  хэлбэрийн функц, (б) нөхцлийг хангах нь  $f(x) = ax$  ( $a \geq 0$ ) хэлбэрийн бүх функц, (в) нөхцлийг хангах нь  $f_1(x) = x, f_2(x) = 0$  гэсэн 2 функц, (г) нөхцлийг хангах нь  $f_1(x) = x, f_2(x) = -x$  гэсэн 2 функц, (ё) нөхцлийг хангах нь  $f(x) = x$  гэсэн ганц функц болов.

Бодлого 1. Бодлого 2-оос (1)-ийн өгөгдсөн нөхцлүүдийг хангах шийдүүд бүгд  $f(x) = ax$  хэлбэртэй гарав. Иймд (1)-ийн бүх шийд зөвхөн ийм хэлбэртэй байна гэж эндүү ойлгож болохгүй юм. Учир нь энэ шийд тасралтгүй байна. Гэтэл (1)-нь тасралттай ч шийдтэй болохыг бид өмнө дурьдсан. Уншигчид лемм 4, лемм 5-ийн элементар баталгаа, (1)-ийг хангах тасралттай функцийг жишээ (хэрэв лемм 5-д дурьдсан  $S$  олонлог дээр  $f$ -ийг рационал утга авахаар тодорхойлбол  $f$  нь бүх  $\mathbb{R}$  дээр рационал утга авах болно. Энэ функц тасралттай нь илэрхий юм. Вид үүнээс өөр жишээг та бүхнээс хүсэж байна. ). (1) дээр тавьж болох (а)- (ё)-гоос өөр шаардлагыг тус тус олоод бидэнд явуулбал маш их баярлах болно. Одоо эрхэм уншигчдын бие даан бодоход зориулж 6 бодлого бичье. Эдгээрийг бодлого 1, 2-ын үр дүнг ашиглан бодож болно. Мөн бодсон аргыг нь хэрэглэн халз бодож ч болно.

Бодлого 3

(10)  $f(x+y) = f(x)f(y)$  тэгшитгэлийн  $\mathbb{Q}$  дээр тодорхойлогдсон бүх шийдийг ол.

Бодлого 4

(10) тэгшитгэлийн  $\mathbb{R}$  дээр тодорхойлогдсон (а), (д), (е) нөхцлүүдийн аль нэгийг нь хангах бүх шийдийг ол.

Бодлого 5

(11)  $f(xy) = f(x) + f(y)$  тэгшитгэлийн зэрэг рационал тоон олонлог дээр тодорхойлогдсон бүх шийдийг ол.

Бодлого 6

(11) тэгшитгэлийн  $]0, +\infty[$  олонлог дээр тодорхойлогдсон (а) болон

(д')  $f$  нь  $x=1$  цэг дээр тасралтгүй

(е')  $f$  нь  $x=1$  цэг дээр дифференциалчлагдах гэсэн нөхцлүүдийн аль нэгийг нь хангах бүх шийлийг ол.

Бодлого 7

(12)  $f(xy) = f(x)f(y)$  тэгшитгэлийн зэрэг рационал тоон олонлог дээр тодорхойлогдсон бүх шийдийг ол.

Бодлого 8

(12) тэгшитгэлийн  $]0, +\infty[$  олонлог дээр тодорхойлогдсон (а), (д'), (е') нөхцлүүдийн аль нэгийг хангах шийдийг ол.

Ашигласан материал

М. И. Вашмаков, В. М. Беккер, В. М. Гольховой. "Задачи по математике (алгебра и анализ)

Математика в школе. 1977. №4.

Олон улсын математикийн олимпиадын материалууд.

ОЛОН УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХХII ОЛИМПИАДЫН ДҮН.  
ВОДЛОГУУДЫН ВОДОЛТ.

Ц. ДАШДОРЖ, Л. ХАДХҮҮ.

Олон улсын Математикийн 33-р Олимпиад /ОУМО-33/ 1992 оны 7-р сарын 14-нээс Москвад болж дэлхийн 66 орон оролцлоо. Багийн дүнгээр Хятад 240, АНУ 181, Румын 179, ТУХН 176, Англи 168, Орос 158, оноо авч эхний 6 байр эзэллээ. Хамгийн өндөр оноо авсан 5 сурагчийн 4 нь Хятадынх, 1 нь ТУХН-ийнх байлаа. Манайхаас медальд хүрсэн хүүхэд байхгүй боловч 40-р байранд орж багийн амжилт урьд жилүүдээс нилээд ахилаа. Нийт 351 хүүхэд оролцсоноос 32-42 оноо авсан 26 хүүхэд алт, 24-31 оноо авсан 55 хүүхэд мөнгө, 14-23 оноо авсан 74 хүүхэд хүрэл медаль хүртлээ. Манай сурагчдаас О. Чулуунбаатар /МУИС/ 13 оноо, В. Ватзориг /УБ-1 сургууль/ 10 оноо, Б. Уламбаяр /УБ-1/ 10 оноо, Д. Энхбаяр /МУИС/ 8 оноо, Д. Ваттөмөр /МУИС/ 6 оноо, Д. Ватнасан /УБ-77/ 4 оноо авлаа.

### I өдөр

1. /Шинзеланд/  $1 < a < b < c$  ба  $(a-1)(b-1)(c-1)$  нь  $abc-1$ -ийн хуваагч байх бүх натурал тоо  $a, b, c$ -г ол.

2. /Энэтхэг/  $f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$  ( $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ) байх бүх  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  функцийг ол.

3. /Хятад/ Аль ч 4 нь нэг хавтгай дээр үл орших 9 цэг огторгуйд өгчээ. Тэгвэл тэдгээрийг хос хосоор нь холбосон бүх хэрчмүүдээс ямар ч  $n$ -ийг нь улаан юмуу хөх өнгөөр будна. Бүх тал нь адил өнгөтэй гурвалжин олддог байх  $n$ -ийн хамгийн бага утгыг ол.

### II өдөр

4. /Франц/ Хавтгайд  $S$  тойрог, түүнийг шүргэсэн  $\ell$  шулуун,  $\ell$ -дээр орших  $M$  цэг өгчээ. Тэгвэл  $M$  нь  $QR$  хэрчмийн дундаж цэг ба  $S$  нь  $PQR$  гурвалжинд багтсан байх  $Q, R$  цэгүүд  $\ell$ -дээр олддог байхаар тийм бүх  $P$  цэгийг ол.

5. /Итали/  $OXYZ$  нь огторгуйн тэгш өнцөгт координатын систем,  $S$  нь огторгуйн төгсгөлөг тооны цэгүүдээс тогтох олонлог,  $S_x, S_y, S_z$  нь  $S$ -ийн харгалзан  $OYZ, OXZ, OXY$  хавтгайнууд дээрх ортогональ проекц бол  $|S|^2 \leq |S_x|^2 + |S_y|^2 + |S_z|^2$  байхыг батал. Энд  $|A|$ -гаар  $A$  олонлогийн элементийн тоог тэмдэглэсэн болно. Цэгээс хавтгай дээр буулгасан перпендикулярын суурийг тэр цэгийн ортогональ проекц гэдэг.

6. /Англи/  $n \in \mathbb{N}$  бүрийн хувьд  $S(n)$ -ээр  $1 \leq k \leq S(n)$  байх натурал тоо  $k$  бүрийн хувьд  $n^2$  нь  $k$  ширхэг натурал тооны (нэг тоо давтагдан орж болно) квадратуудын нийлбэрт тавигддаг байх хамгийн их тоог тэмдэглэе. Тэгвэл

а/. Дурын  $n \geq 4$ -ийн хувьд  $S(n) \leq n^2 - 14$  тэнцэтгэл бишийг батал.

б/.  $S(n) = n^2 - 14$  байх натурал тоо  $n$ -ийг ол.

в/.  $S(n) = n^2 - 14$  байх натурал тоо  $n$  төгсгөлгүй олон олдохыг батал.

Бодлого бүр 7 оноотой. Өдөр бүр 4 цаг 30 минут бодох ёстой байв.

# БОДОЛТ.

1. Вусдаасаа хавьгүй хөнгөн энэ бодлогыг О. Чулуунбаатар, Д. Энхбаяр нар бүрэн бодож, Б. Уламбаяр, В. Батзориг нар нилаад дөхүүлсэн байлаа. Одоо О. Чулуунбаатарын бодолтыг үзүүлье.  $a-1=x, b-1=y, c-1=z$  гэвэл  $1 \leq x < y < z$  ба

(1)  $N \ni A = (abc-1)/(a-1)(b-1)(c-1) = 1 + 1/x + 1/y + 1/z + 1/xy + 1/yz + 1/zx \geq 2$  болно. Нөгөө талаас  $x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3$  учир  $A \leq 1 + 1/2 + 1/3 + 1/2 + 1/6 + 1/3 = 23/6$  гэж гарах тул  $A=2$  юмуу  $A=3$  байна.

I.  $A=2$  байг. Энэ үед  $x \geq 2$  байх нь илт. Харэв  $x \geq 3$  бол  $y \geq 4, z \geq 5$  байх учир  $2 = A \leq 1 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/12 + 1/15 + 1/20 = 119/60$  гэж зөрчилд хүрнэ. Иймд  $x=2$  байна. (1) тэнцэлд  $A=2; x=2$  гэж авбал  $3/(2y) + 3/(2z) + 1/(yz) = 1/2$  болно. Харэв  $y \geq 6$  бол  $z \geq 7$  учир  $1/2 = 3/(2y) + 3/(2z) + 1/(yz) \leq 1/4 + 3/14 + 1/42 = 41/84$  гэж зөрчил гарна. Ийнхүү  $3 \leq y \leq 5$  болов.  $a, b, c$  (өөрөөр хэлбэл:  $x, y, z$ ) тоонуудын дотор тэгш ч, сондгой ч тоо байдаг бол  $(a-1)(b-1)(c-1)$  үржвэр тэгш,  $abc-1$  нь сондгой болох учир  $A$  нь бүхэл биш болно. Иймд  $x, y, z$  тоонууд эсвэл бүгд тэгш, эсвэл бүгд сондгой байх ёстой. Гэтэл  $x=2$  учир  $y=4, z=14$  байна.

II.  $A=3$  байг. Харэв  $x \geq 2$  бол  $3 = 1 + 1/x + 1/y + 1/z + 1/xy + 1/yz + 1/zx \leq 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/6 + 1/8 + 1/12 < 3$  гэж зөрчилд хүрэх учир  $x=1$  болно. Эндээс  $2/y + 2/z + 1/yz = 1 \Rightarrow y \neq 2$ . Харэв  $y \geq 4$  бол  $1 = 2/y + 2/z + 1/yz \leq 1/2 + 2/5 + 1/20 < 1$  гэж зөрчил гарах учир  $y=3, z=7$  байна. Ийнхүү  $(x, y, z) = (2, 4, 14); (x, y, z) = (1, 3, 7)$  буюу  $(a, b, c) = (3, 5, 15); (a, b, c) = (2, 4, 8)$  гэсэн 2 шийд гарав.

Энхбаяр эхлээд  $1 \leq x \leq 5$  байхыг тогтоож, дараа нь  $x=1, x=2, x=3, x=4, x=5$  баях тохиолдол бүрд салгаж бодсон юм. Энэ бодлогыг бодсон Тайландын сурагч олимпиадын тусгай шагнал хүртсэн. Харамсалтай нь бид түүнийг бодолтыг харж амжаагүй.

2. Энэ бодлогыг Д. Батнасан, Б. Уламбаяр нар нилаад оролдож тодорхой үр дүнгүүдэд хүрсэн боловч гүйцэд бодолт хийж чадсангүй. В. Уламбаяр олимпиадын дараа өөрийн бодолтыг дараах маягаар гүйцэтгэсэн юм.

1/1.  $f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2 \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$  тэгшитгэлд  $x=y=0, f(0)=a$  гэвэл  $f(a)=a^2$  болно. Мөн  $y=0, y=a$  эцэст нь  $x=0$  гэж авбал харгалзан

$$1/2. f(x^2 + a) = (f(x))^2 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$1/3. f(x^2 + a^2) = a + (f(x))^2 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$1/4. f(f(y)) = y + a^2 \quad (\forall y \in \mathbb{R})$$

болно. 1/4-д  $y = x^2 + a^2$  гэж аваад 1/2; 1/3-ыг ашиглавал:

$$x^2 + 2a^2 = f(f(x^2 + a^2)) = f(a + (f(x))^2) = (f(f(x)))^2 = (x + a^2)^2 \Rightarrow 2a^2x + a^4 - 2a^2 = 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

болох учир  $a=0$  гэж гарах нь зайлшгүй. Иймд 1/3 болон 1/4-ийг

$$1/5. f(x^2) = (f(x))^2 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$1/6. f(f(y)) = y \quad (\forall y \in \mathbb{R})$$

гэж бичиж болно. 1/6-гаас  $f$ -ийн утгын муж нь  $\mathbb{R}$  гэж гарч байна.

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2 = (f(x))^2 + f(f(y)) \Rightarrow$$

$$1/7. f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta) \quad (\forall \alpha \geq 0, \forall \beta \in \mathbb{R})$$

болно. 1/5-аас  $x \geq 0$  үед  $f(x) \geq 0$  гэж гарна. Одоо  $x < 0$  үед  $f(x) < 0$  гэж батлая.

Эсрэгээс нь  $y_0 = f(-x_0) \geq 0$  байх  $x_0 > 0$  тоо олддог гэж үзвэл  $-x_0 = f(f(x_0)) = f(y_0) \geq 0$

гэж харшлаад хүрнэ. Мөн  $(f(-x))^2 = f((-x)^2) = f(x^2) = (f(x))^2 \Rightarrow |f(-x)| = |f(x)|$   
 энэ бүхнээс  $f(-x) = -f(x)$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ) буюу  $f$  нь сондгой функц болов. Иймд  
 $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$   $f(\alpha) \geq 0$  ( $\alpha \geq 0$ )

тэгшитгэлийг  $\mathbb{R}^+$  дээр л бодох үлдэв. Ийм тэгшитгэлийн шийд  $f(x) = kx$  гэж гардгийг бид мэднэ. (Хойно буй Ц. Баясгалан, Л. Хадхүү "Нэгэн функционал тэгшитгэлийн тухай" өгүүлэлийг үзнэ үү.) Гэтэл (6)-аас  $k=1$  болох учир манай тэгшитгэл  $f(x) = x$  гэсэн ганц шийдтэй. Одоо зохиогчийн бодолтыг санааг бичье. Зохиогч яг Уламбаярынхтай ижил аргаар  $f(0) = 0$  болон  $|f|, |f|, |f|$  тэнцлүүдийг гаргасан.

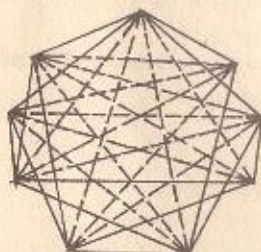
Ямар нэг  $x_0$ -ийн хувьд  $f(x_0) = 0$  бол  $0 = (f(x_0))^2 = f(x_0^2) = f(x_0^2 + f(x_0)) = x_0 + (f(x_0))^2 = x_0$

буюу  $x > 0$  үед  $f(x) > 0$  гэж батлагдав.  $x > y$  бол  $|f|$ -г хэрэглэвэл

$f(x) = f((x-y) + y) = f(x-y) + f(y) > f(y)$  гэж  $f$  нь бас эрс монотон өсдөг болно. Иймд  $f(x) > x$  бол  $x = f(f(x)) > f(x)$  гэж харшлаад хүрнэ.  $f(x) < x$  үед ч яг ижлээр зөрчил гарна. Эндээс  $f(x) = x$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ) байна.

3. Энэ бодлогыг манай сурагчдаас ганц нь ч бодож чадаагүй учир зохиогчийн бодолтыг үзүүлэе.

Нийтдээ 36 хэрчим үүсгэж болох нь ойлгомжтой. Хэрэв 9 цэгийг холбосон 33 хэрчим татсан гавал 3 хэрчим татагдахгүй үлдэнэ. Энэ үлдсэн 3 хэрчим дээр орших 3 цэгийг тэмдэглэе. Тэгвэл үлдсэн 6 цэг, энэ 6 цэгийг холбосон бүх боломжит хэрчим нь хоёр өнгөт гүйцэд граф үүсгэнэ. Энэ граф нь нэг өнгөөр бүх тал нь будагдсан гурвалжин (цаашид ийм гурвалжныг "сайн гурвалжин" гэж нэрлэж байв.) агуулна. Учир нь 6 оройг нь А, В, С, D, E, F гэж тэмдэглэе. А оройгоос гарсан 5 ирмэгийн 3 нь ижил өнгөөр будагдсан байж таарна. Иймд АВ, АС, АD ирмэгүүд улаанаар будагдсан гэж үзэхэд ерөнхийлөлд харшлахгүй. Хэрэв ВС, ВD, CD гурван хэрчим гурвуул хөх бол ВСD нь "сайн гурвалжин" болно. Эсрэг тохиолдолд эдгээрийн ядаж нэг нь, тухайлбал ВС нь улаанаар бичигдсэн бол ABC нь "сайн гурвалжин" болох юм. Ийнхүү  $n \leq 33$  болов. Нөгөө талаас зураг 1-д 9 цэгийг холбосон 32 хэрчим татав (Тасархай биш шугамаар улаан, тасархай шугамаар хөх хэрчмийг дүрслэв). Зургаас харахад энд ганц ч "сайн гурвалжин" алга. Иймд  $n = 33$  байна.



Зураг 1.

САНАМЖ Дээрх эсрэг жишээг тааж олоогүй. Дараахь сэтгэлгээний тусламжтайгаар олжээ. Үүнд:

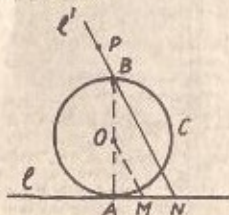
а/  $G_5$  гэсэн 5 оронтой гүйцэд графын ирмэгүүдийн 2 өнгөөр ганц ч "сайн гурвалжин" байхгүй байхаар дараах байдлаар будна (Зураг 2-ыг хар)  
 б/ "Сайн гурвалжин" агуулаагүй байхаар хоёр өнгөөр будагдсан ямар нэг Н граф өгөгдсөн гэе. Түүний аль нэг А оройг авч, шинээр В оройг нэмье (Зураг 3-ыг хар). В оройг Н графын А-аас бусад бүх оройтой холбоод, эдгээр хэрчмийг Х орой бүрийн хувьд ВХ ба АХ хэрчмүүд ижил



учир (зураг 4) леммээ ашиглавал: (М нь AN хэрчим дээр орших нь илт)

$$x + AM = RM = MQ = AN + y = AN + x \Rightarrow AM = AN \Rightarrow OM \parallel BN \text{ болно.}$$

Иймд Р цэг нь N дээр эхтэй OM-тай параллель цацраг дээр орших болов.  
/Зураг 5/.



Зураг 5

2. Буцаагаад  $\ell$  цацрагийн В-гээс бусад бүх цэг бодлогын нөхцөлийг хангана гэж батлая.  $\ell$  цацраг дээр орших дурын  $P(P \neq B)$  цэг авч. Р-ээсээс С тойрогт 2 шүргэгч татаж, тэдгээрийн  $\ell$  шулуунтай огтолцох цэгүүдийг R, Q гэж тэмдэглэе. /Зураг 4-ийг хар/ Вид М нь RQ хэрчмийн дундаж гэж батлах ёстой.  $OB = OA$  ба  $OM \parallel BN$  учир  $AM = MN$  байна. Иймд лемм ёсоор  $RM = x + AM = y + MN = MQ$  гэж батлах зүйл гарав.

**Санамж:** Р цэг В-тэй давхцсан тохиолдолд бодлогын нөхцөл биелэж байна гэж үзэж болдог юм. Энэ тохиолдолд зөвхөн  $\ell'$  цацрагийн бүх цэг л бодлогын нөхцөлийг хангана.

5. Энэ бодлогыг манай сурагчид бодож чадаагүй. Индукцийн аргыг хэрэглэн дараахь байдлаар батлаж болох юм.

$$|S_x| = a, |S_y| = b, |S_z| = c \text{ гэж тэмдэглэе.}$$

1.  $|S| = 1$  бол батлах зүйл илт.
2.  $|S| < n$  үед батлах зүйл үнэн гэж үзье.
3.  $|S| = n$  үед баталгаа хийе.

Координатын хавтгайнуудын аль нэгтэй нь параллель. S-ийн ганц ч цэгийг дайраагүй. S-ийг хоосон биш  $S_1, S_2$  гэсэн 2 дэд олонлогт хуваах хавтгай оршин байх нь илэрхий юм.  $n = |S_1| + |S_2|, |S_1| < n, |S_2| < n$   
Иймд индукцийн алхам ёсоор:

$$|S_i|^2 \leq a_i b_i c_i, |S_{ix}| = a_i, |S_{iy}| = b_i, |S_{iz}| = c_i \quad (i=1,2)$$

нөхцөлүүд биелэнэ. Уг хавтгайг OXY-тэй параллель байсан гэж үзье. Тэгвэл

$$a_1 + a_2 = a; b_1 + b_2 = b; c_1 \leq c; c_2 \leq c$$

болх ба Коши-Вуняковскийн тэнцэтгэл бишийг хэрэглэвэл:

$$|S|^2 = (|S_1| + |S_2|)^2 \leq (\sqrt{a_1 b_1 c_1} + \sqrt{a_2 b_2 c_2})^2 \leq c(\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2})^2 \leq c(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = abc$$

гэж батлах зүйл гарна.

Тэнцэл биелэхийн тулд  $c_1 = c_2 = c$  байх ёстой. Өөрөөр хэлбэл: S-ийн цэг бүрийг дайруулан OXY-тэй параллель татсан хавтгай бүр дээр S-ийн тэнцүү тооны элемент орших ёстой. Бусад тэнхлэгүүдтэй параллель хавтгайнуудын хувьд ч ийм байх ёстой болж байна.

6. Энэ бодлогыг бодож чадсан сурагч манай багаас гарсангүй. Иймд зохиогчийн бодолтыг үзүүлье.

Цаашид бичиглэлийг хялбар болгох зорилгоор  $n$  нь  $k$  ширхэг натурал тооны квадратуудын нийлбэрт тавигддаг бол  $n$ -ийг " $k$  сайн" чанартай байна

гэж нэрлэж байхаар тохирьё.  $a/n^2$  нь " $n^2-13$  сайн" чанартай биш. Эсрэгээс нь нйм чанартай, өөрөөр хэлбэл:

$$n^2 = \underbrace{1^2 + \dots + 1^2}_{p} + \underbrace{2^2 + \dots + 2^2}_{q} + \underbrace{3^2 + \dots + 3^2}_{t} + \underbrace{4^2 + \dots + 4^2}_{l} + \dots + \underbrace{S^2 + \dots + S^2}_{r}$$

$n^2-13-p-q-t-\dots-r$  хэлбэртэй байдаг гавал  $3p+8q+15t+\dots+(S^2-1)r=13$  тэнцэл гарна. Эндээс  $t=0, \dots, r=0, 0 \leq q \leq 1$  болох ба  $q=0$  үед  $p=13/3, q=1$  үед  $p=5/3$  гэж харшлалд хүрнэ. Иймд  $S(n) \leq n^2-14$  болов. б/.  $1 \leq S(n) = n^2-14$  нөхцлөөс  $n \geq 4$  гэж гарна. Иймд  $2 \leq S(n) = n^2-14$  болно. Эндээс  $n^2 = a^2 + b^2$  байх  $a, b$  гэсэн натурал тоонууд олдох ёстой болов. Энэ нөхцөлийг хангах  $n$ -ийн хамгийн бага 3 утга нь 5, 10, 13 байдгийг бид мэднэ. 25, 100 тоонуудыг 3 натурал тооны квадратуудын нийлбэрт тавьж болохгүй учир  $S(25)=S(100)=2$  буюу 5, 10 нь  $S(n)=n^2-14$  тэгшитгэлийн шийдүүд биш гэж гарч байна. Одоо 13 нь  $S(n)=n^2-14$  тэгшитгэлийн шийд мөн гэж баталъя.

Хэрэв  $n^2$  нь " $k$  сайн" чанартай ба нэмэгдэхүүнүүдийн аль нэг нь тэгш өөрөөр хэлбэл:  $(2m)^2$  хэлбэртэй бол энэ нэмэгдэхүүнийг  $m^2+m^2+m^2+m^2$  гэж бичиж (үүнийг цаашид олшруулах арга гэж нэрлэж байл) болох учир  $n^2$  нь " $k+3$  сайн" чанартай болно.  $m$  нь тэгш бол нэмэгдэхүүний тоог цаашид олшруулж болох нь ойлгомжтой.

$$13^2 = 169 = 8^2 + 8^2 + 4^2 + 4^2 + 3^2$$

$$13^2 = 169 = 8^2 + 8^2 + 4^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2$$

$$13^2 = 169 = 8^2 + 8^2 + 4^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 \text{ тэнцлүүдэд олшруулах аргыг}$$

хэрэглэвэл 169 нь харгалзан " $3k+2$  сайн" ( $1 \leq k \leq 53$ ), " $1+3k$  сайн" ( $2 \leq k \leq 56$ ), " $3k$  сайн" ( $3 \leq k \leq 51$ ) чанаруудтай болно. Эцэст нь  $169 = 13^2 = 10^2 + 8^2 + 2^2 + 1^2$ ,  $169 = 13^2 = 12^2 + 4^2 + 3^2$ ,  $169 = 13^2 = 12^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2$  тэнцлүүдийг тооцвол  $1 \leq k \leq 155$  байх  $k$  бүрийн хувьд 169 нь " $k$  сайн" чанартай, өөрөөр хэлбэл:  $k$  ширхэг натурал тооны квадратуудын нийлбэртэй тэнцүү болох нь батлагдав. Ийнхүү  $S(13) = 13^2 - 14 = 155$  болов. в/. Эхлээд  $n \geq 13$  ба  $S(n) = n^2 - 14$  бол  $S(2n) = (2n)^2 - 14$  байхыг харуулъя.

**Баталгаа:**  $S(n) = n^2 - 14$  тэнцлээс  $1 \leq k \leq n^2 - 14$  байх  $k$  бүрийн хувьд  $n^2$  нь  $k$  ширхэг натурал тооны квадратуудын нийлбэрт тавигдах учир  $(2n)^2 = n^2 + n^2 + n^2 + n^2$  тэнцлээс  $1 \leq k \leq 4n^2 - 56$  байх  $k$  бүрийн хувьд  $(2n)^2$  нь " $k$  сайн" чанартай болно. Мөн  $(2n)^2 = \underbrace{1^2 + \dots + 1^2}_{3n^2} + n^2$

тэнцлээс  $(2n)^2$  нь  $3n^2 + 1 \leq k \leq 4n^2 - 14$  байх  $k$  бүрийн хувьд " $k$  сайн" чанартай нь гарна. Одоо  $3n^2 + 1 < 4n^2 - 56$  байхыг тооцвол батлах зүйл гарч байна. Сая баталснаа болон б/ -г тооцвол  $n = 13^m$  хэлбэрийн тоо бүр  $S(n) = n^2 - 14$  тэгшитгэлийн шийд болно.

# МОНГОЛЫН ОЮУТНЫ МАТЕМАТИКИЙН АНХДУГААР ОЛИМПИАД

С. ТӨМӨРВАТ

1992 оны IV сард анх удаа зохиогдсон олимпиадад МУИС, УВИС-ийн математикийн ангийн оюутнууд амжилттай оролцож дараахь байр эзлэв. Багийн тэмцээнд Ватзул ахлагчтай /МУИС, мат-IV/ баг 18 оноогоор I байр эзэлж 1500 төгрөгөөр, 15 оноогоор II байр эзэлсэн Д. Хашбаяр ахлагчтай /МУИС, мат-I/ баг 1000 төгрөгөөр тус тус шагнагдав. Хувийн эцнээ тэмцээнд 66,5 оноогоор I байр эзэлсэн Батболд /МУИС, мат-III/ 750 төгрөгөөр, 53; 43,5 оноогоор II байр эзэлсэн Ш. Батхишиг /УВИС, мат-V/, Чойсүрэн /МУИС, мат-IV/ нарыг тус тус 500 төгрөгөөр, 31; 21,5; 21,5 оноогоор III байр эзэлсэн А. Түвшинтулга /УВИС, мат-I/, Д. Хашбаяр /МУИС, мат-I/, Ганхуяг /УВИС, мат-IV/ нарыг тус тус 250 төгрөгөөр шагнав. Энэ удаагийн олимпиадыг МУИС ба УВИС-ийн алгебрийн танхимүүд зохион явуулав. Бид олимпиадад өгөгдсөн бодлогуудыг бодолтын хамт нийтлэхийг хичээлээ. Хойшид жил бүр зохиогдох оюутны олимпиадад их, дээд сургуулиудын оюутан, сурагчдыг өргөнөөр оролцож байхыг уриалж байна.

## ЭЧНЭЭ ОЛИМПИАДЫН БОДЛОГУУД:

№1.  $S_k = \sum_{n=1}^k n/(4n^4+1)$  бол  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = 1/4$  гэж батал.

№2.  $\int_0^{\pi/2} \cos 2nx \cdot \ln \cos x dx$  интегралыг бод.

№3. F-талбар.  $M_n(F)$  -нь n-хэмжээст квадрат матрицуудын вектор огторгуй бол түүний базисууд нь нильпотент матрицууд байж чадахгүйг харуул.

№4. K нь 2 характеристиктай талбар ба V нь K дээрхи n хэмжээст вектор огторгуй болог.  $T: V \rightarrow V$  шугаман хувиргалтын хувьд  $T^2=I$ , Энд I нь адилтгал хувиргалт ба W-ээр  $\{v \in V | T(v)=v\}$ -ийг тэмдэглэе. Тэгвэл  $\dim W \geq n/2$  болохыг батал.

№5.  $5^{2n}$ - радиустай тойрог дээр аль ч хоёрынх нь хоорондох зай бүхэл байхаар  $2n+3$  ширхэг цэг олдохгүй. Харин  $2n+2$  ширхэг цэг олдохыг батал.

№6.  $P_0=0, P_k$  -нь k-р анхны тоо бол m сондгой тоо байхад  $P_0, P_1, \dots, P_m$  -үүдийг нийлбэр нь тэнцүү, тэнцүү хоёр хэсэгт хувааж болохыг батал.

№7.  $R \supseteq A$  компакт хоосон биш олонлог ба A-тай конгруент  $\forall B, C$  олонлог авахад  $B+C$ -нь A-тай төсөөтэй байдаг бол A-г бөмбөлөг /ө. х

$A = \{(x_1, \dots, x_n) / \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq a^2\}$  ( $a \geq 0$ ) / гэж үзүүл.

№8.  $K(a, b, c)$  нь a, b, c талтай гурвалжны талбай. Тэгвэл  $\sqrt{k(a,b,c)} + \sqrt{k(a',b',c')} \leq \sqrt{k(a+a', b+b', c+c')}$  тэнцэтгэл бишийг батал.

№9. N-оройтой бүтэн графын ирмэгүүдийг V аргаар хоёр өнгөөр будахад ир-

мэгүүд нь нжил өнгөтэй оройтой бүтэн граф заавал олддог байв. Харав  $k \geq 2$  бол  $N > k \cdot 2^{k+1}/(e\sqrt{2})$  болохыг үзүүл.

№10. Богонохон шугамаар хол орших  $A, B$  цэгүүдийг холбосон шулууныг яаж татах вэ?

№11.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  функцийн хувьд 1).  $f(1)=1$ , 2).  $f(x)=1/(x^2+f^2(x))$ ; ( $x \geq 1$ ) чанарууд биелдэг бол  $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ба  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq 1+\pi/4$  гэж батал.

№12.  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}/(2n+1)$ ,  $|x| < 1$  цуваа нь  $f(2x/(1+x^2)) = (1+x^2)f(x)$  функциональ

тэгшитгэлийг хангахыг батал.

№13.  $\{b_n\}$  бодит тоон дарааллын хувьд

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_{n+1} - b_n - b_{n-1} b_{n+2}) / (b_{n+1}^2 - b_n b_{n+2}) = \alpha + \beta \text{ ба}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n^2 - b_{n-1} b_{n+1}) / (b_{n+1}^2 - b_n b_{n+2}) = \alpha \beta \quad (|\alpha| < |\beta|) \text{ бол}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n / b_{n+1} = \alpha \text{ гэж батал.}$$

№14.  $a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_6^{-1} = 1$  байх хамгийн бага периметртэй талбай нь  $36\sqrt{3}$  байх  $a_1, \dots, a_6$  талуудтай зургаан өнцөгтийг байгуул.

№15. Эллипсондод багтсан  $ABCD$  тетраэдрийн хүндийн төв  $M$  цэгийг дайруулж татсан  $AM, BM, CM, DM$  шулуунууд эллипсондыг харгалзан  $A_1, B_1, C_1, D_1$  цэгүүдээр огтолдог бол  $|AM|/|MA_1| + |BM|/|MB_1| + |CM|/|MC_1| + |DM|/|MD_1| = 4$  болохыг батал.

№16. Дэс дараалсан  $p$  ширхэг гишүүдийн нийлбэр сөрөг, дэс дараалсан  $q$  ширхэг гишүүдийн нийлбэр эерэг байх бодит тоонуудын дараалал хамгийн олондоо хэдэн гишүүнтэй байж болох вэ?

№17.  $R$ -нь нэгжтэй, ассоциатив цагираг ба коммутатив дэд цагираг бүр нь төгсгөлөг, тэгийн хуваагчгүй цагираг байг. Тэгвэл  $\forall a, b \in R$  ( $a \neq 0$ ) хувьд  $axa = b$  тэгшитгэл шийдтэй болохыг үзүүл.

№18. Дурын натурал тоонуудаар зохиогдсон  $m+1$  урттай дараалалд эсвэл  $m$ -ээс их урттай өсөх дэд дараалал эсвэл  $n$ -ээс их урттай буурах дэд дараалал олдоно гэж батал.

№19.  $M_n(R) \supseteq A$  нь ниль дэд цагираг бол нильпотент болохыг батал.

№20.  $A, B \in M_n(R)$  ба  $(AB)^m = E$  бол  $(BA)^m = E$  байх уу? Энд  $E$  нь нэгж матриц.

## БОДОЛТ БА ЗААВРУУД:

№1.  $(2n)/((4n^2+1)) = 1/((2n-1)^2+1) - 1/((2n+1)^2+1)$  байхыг ашиглан  $2S_n = 1/2 - 1/((2n+1)^2+1)$  болохыг индукцээр батлана.

№2.  $t \in (0, \pi/2)$ -ийн хувьд  $\int_0^t \cos 2nx \ln \cos x dx$  интегралыг хасэгчилбал уг интеграл

$(1/2n) \ln \cos t \cdot \sin 2nt + (1/2n) \int_0^t \sin 2nx \cdot (\sin x / \cos x) dx$  болно.

Тэгвэл  $\lim_{t \rightarrow \pi/2} (1/2n) \ln \cos t \sin 2nt = 0$  ба

$\sin 2nx \sin x / \cos x = ((e^{2nix} - e^{-2nix}) / 2i) \cdot ((e^{ix} - e^{-ix}) / (2i(e^{ix} + e^{-ix}))) = -\sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j-1} \cos(2n-2j+2)x$  юм.

Иймд  $\int_0^{\pi/2} \cos 2nx \ln \cos x dx = 1/2n \int_0^{\pi/2} (\sum_{j=1}^{2n} (-1)^j \cos(2n-2j+2)x) dx = (-1)^{n+1} \pi / 4n$  юм.

№3. И. В. Проскуряковын номны 1071, 1123 бодлогуудыг ашиглан  $\text{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

нь шугаман функц гэдгийг анхаарвал нилепотент сууриар  $\text{tr} A \neq 0$  байх  $A$  матрицыг шугаман илэрхийлж чадахгүй. Үүгээр бодлого бодогдов.

№4.  $A = I - T$ -шугаман хувиргалтыг авч үзье. Тэгвэл  $n = \dim \text{Ker} A + \dim \text{Im} A$  болно.

$\text{Ker} A = \{v \in V / v - Tv = 0\} = \{v \in V / v = Tv\} = W$  юм.  $\forall x \in \text{Im} A$  хувьд

$\exists y: Ay = x \quad Ax = A^2 y = (I - T)^2 y = (I - 2T + T^2)y = 2(I - T)y = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker} A \Rightarrow \text{Im} A \subset \text{Ker} A$  болов.

Иймд  $n/2 \leq \dim \text{Ker} A = \dim W$  болж батлах зүйл батлагдана.

№5. Уг тойрогт дурын нэг цэг авч бэхлээд түүнийг  $\arcsin 3/5$  өнцгөөр  $n$ -удаа эргүүлэхэд гарах цэгүүдийг уг цагийн орших диагнал дээр нь төвийн хувьд тэгш хэмтэй хувиргахад үүсэх цэгүүд бодлогын нөхилийг хангана.

№6. Дурын  $k \in \mathbb{N}; k \geq 1$ -ийн хувьд  $(I) P_0 + P_1 + \dots + P_k \geq P_{k+1}$  байхыг индукцээр хялбархан баталж болно. Одоо  $m$ -сондгой үед  $P_0, P_1, \dots, P_{m+1}$ -ийг нийлбэр нь адил байдаг бүлэгт хуваадаг алгоритм өгье.  $P_0 + P_1 + \dots + P_{m+1}$ -нь тэгш учир  $A = (P_0 + P_1 + \dots + P_{m+1})/2$  гэж тэмдэглэе.  $A_0 = A, B_0 = A$  гэж тодорхойлъя. Алгоритмын  $1$ -р алхамд  $P_{m+1}$ -г авна.  $(I)$ -ёсоор  $\max\{A_0, B_0\} = A \geq P_{m+1}$  байна. Иймд

$A_1 = A - P_{m+1}$  гэж тодорхойлъя.  $II$ -р алхамд  $P_m$ -г авч  $B_1 = B_0 - P_m$  гэж авъя.

Алгоритмын  $k$ -р алхамд  $P_{m+2-k}$ -г авбал  $\max\{A_1, B_1\} > P_{m+2-k}$  байх нь ёсоор харагдана. Аль ихээх нь  $P_{m+2-k}$ -г хасаж дарааллын дараагийн элементийг тодорхойлоно. Алхам бүр боломжтой учир  $P_0$ -г хасаад зогсоно. Ингэхэд ямар нэг  $s; e$ -ийн хувьд  $B_s = A_e = 0$  болно.

$A_0, A_1, \dots, A_{e-1}$

$B_0, B_1, \dots, B_{s-1}$ -үүд нь олох зүйлийг тодорхойлоно.

№7. Юуны түрүүнд дараахь Леммыг баталъя.

Лемм.  $\dim A = n$ . Эсрэгээс  $\dim A = k < n$  гэж үзье. Тэгвэл  $\exists X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $X$ -нь  $k$  хэмжээтэй огторгуй ба  $\dim P_{ix} A = k$ . Иймд  $m \neq 0, m \perp X$  байх  $m$  вектор олдоно.  $mA = A'$  гэвэл  $A' \subset A$  юм.  $A + A' \subset A$  ба  $Y = X \times (\mathbb{R}n)$  гэвэл  $\dim P_{iy} (A + A') = k + 1$  эндээс  $\dim A \geq k + 1$  болж зөрчинө. Лемм батлагдвал.

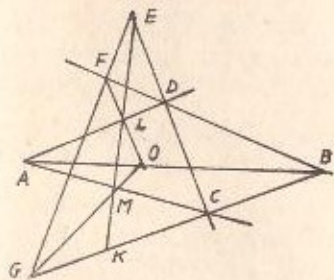
$A$  нь компакт  $\dim A = n$  учраас  $\exists V \subset A$ ,  $V$  нь  $n$ -хэмжээт битүү шаар ба ра-

диусын урт нь максималь байдаг байг. В-ийн төнийг  $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  гэж үзэхэд зөрчилд хүрэхгүй. В-ийн радиусыг  $\epsilon$  гэвэл  $\forall x \in A$ ,  $|x| = \sup\{|y| : y \in A\}$ . Одоо  $|x| \leq \epsilon$  гэж батлахад хангалттай. Бид  $|x| > \epsilon$  гэж үзье. М нь В-ийн радиус векторуудын олонлог байг.

$V_x = \{z \in M \mid \exists n \in M, (n+x) \mid Z \text{ ба } |n+x| > |Z|\}$ .  $V_x$  нь задгай олонлог байх нь илэрхий. В-ийн гадаргуу бөмбөлөгийг  $\text{fr} B$  гэе.  $x/|x| \in V_x \Rightarrow V_x \neq \emptyset$ . Иймд  $\exists \varphi_1, \dots, \varphi_m: \{\varphi_i V_x\}$  нь  $\text{fr} B$ -ийн хучилт болдог. Энд  $\varphi_i$  нь огторгуйн эргүү-лэлтүүд.  $x_i = \varphi_i x$  гэе.  $T = (\varphi_1 A + \varphi_2 A + \dots + \varphi_m A)/m$  гэе.  $\varphi_i A = A \Rightarrow A \approx T$ ,  $k$  нь төсийн коэффициент болог.  $\Delta$ -ны тэнцэтгэл бишээс  $\text{diam} T \leq \text{diam} A$  болно. Иймд  $k \leq 1$  юм.  $V_x$ -ийн тодорхойлолтоос  $k > 1$  байна гэсэн дүгнэлтэнд хялбар-хан хүрч болно. Ийнхүү бодлого бодогдов.

№8. Эхлээд  $\sqrt{abcd} + \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta} \leq \sqrt{(a+\alpha)(b+\beta)(c+\gamma)(d+\delta)}$  байхыг хялбар хувиргалт хийж батлана. Үүний дараа Героны томъёог ашиглавал батлах зүйл батлаг-дана.

№9. Рыбниковын 1982 оны. Комбинаторный анализ номын 3:41 бодлогыг үз.



Зураг1

№10. Уг өгөгдсөн хоёр цэгийг А ба В гэж тэмдэглэе. О ба С цэгүүдийн хоорондох зай нь шугамын уртаас хэтрэх-гүй байхаар АО, ОВ, СВ, АС хэрчмүүдийг дайрсан шулуунууд татъя. ЕК ба EG хэрчим нь АВ-г огтолсон байхаар EG-г сонгон авч EG-г татаж, ОВ шулуунтай EG-ийн огтлолцсон цэгийг F, ЕК-ийн АС-тэй огтлолцсон цэгийг M, AD-тэй огтолц-сон цэгийг L гэж тус тус тэмдэглэе. FL ба GM шулуунуудын огтлолцолын цаг О нь Дезаргийн теорем АВ дээр оршино. Иймд анхны хоёр цэгийн хоорондох зайн хага-

саас хэтрэхгүй зайтай хоёр цэгийг дайруулж шулуун татах болно.

№11.  $f(x) > 0$  учраас  $f$  нь монотон эрс өснө. Ньютон-Лейбницийн томъёо ёсоор  $f(x) = \int_1^x dt/(1^2 + (f(t))^2) + f(1) \leq 1 + \int_1^x dt/(1+t^2) \leq 1 + \pi/4$  Ийнхүү Вейерштрассын тео-ремыг харгалвал:  $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ба  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq 1 + \pi/4$  болно.

№12.  $xf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}/(2n+1)$  функцийн уламжлал нь оршин байх ба  $(xf(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1/(1-x^2)$  юм. Иймд  $xf(x) = \int dx/(1-x^2) = (1/2)\ln((1+x)/(1-x)) + C$  болно.

$c=0$  болох нь илэрхий учир  $f(x) = (1/2x) \ln((1+x)/(1-x))$  болно. Эндээс батлах зүйл батлагдана.

№13-ийг  $\alpha \neq 0$  үед бодлоо. Хэрэв  $\alpha=0$  үед бодвол бодолтоо МУУИС-ийн

математик анализын тэнхимд ирүүлнэ үү?

$$b_n = f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2}, a_n = f_{n+1} f_n - f_{n-1} f_{n+2}, x_n = a_n / b_n = (f_{n+1} f_n - f_{n-1} f_{n+2}) / (f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2}), y_n = \\ = b_{n-1} / b_n = (f_n^2 - f_{n-1} f_{n+1}) / (f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2}), t_n = f_n / f_{n+1}, \tau_n = (t_n - t_{n-1}) / (t_{n+1} - t_n) \\ \text{гэж тэмдэглэвэл:}$$

$$(1) x_n - y_n / t_{n+1} = t_n \quad (2) t_{n-1} = x_n - y_n / t_n \quad (3) b_{n-1} = f_n^2 - f_{n-1} f_{n+1} = f_n^2 (1 - t_{n-1} / t_n) \\ (4) f_n f_{n+1} / f_{n+1}^2 = t_{n-1} / t_n \quad (5) t_{n+1} \tau_n = y_n$$

тэнцлүүд гарахыг хялбар шалгаж болно.  $\lambda \neq 0$  үед  $g_n = \lambda^n t_n$  дараалал авч үзье.

$$(g_{n+1} g_n - g_{n-1} g_{n+2}) / (g_{n+1}^2 - g_n g_{n+2}) = 1 / \lambda (f_{n+1} f_n - f_{n-1} f_{n+2}) / (f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2}) = (1 / \lambda) x_n \rightarrow \\ \rightarrow ((1 / \lambda) \alpha) + ((1 / \lambda) \beta), (g_n^2 - g_{n-1} g_{n+1}) / (g_{n+1}^2 - g_n g_{n+2}) = 1 / \lambda^2 (f_n^2 - f_{n-1} f_{n+1}) / (f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2}) = \\ = (1 / \lambda)^2 y_n \rightarrow (1 / \lambda) \alpha \lambda (1 / \lambda) \beta \quad |(1 / \lambda) \alpha| \leq |(1 / \lambda) \beta|, g_n / g_{n+1} = (1 / \lambda) f_n / f_{n+1} = (1 / \lambda) t_n$$

тэнцлүүдээс  $\{g_n\}$  дараалал болон  $(1 / \lambda) \alpha, (1 / \lambda) \beta$ -гийн хувьд бодлого бодчихвол анхны батлах зүйл гарна. Эндээс  $\alpha \neq 0$  үед  $\lambda = \alpha$  гэж авбал  $x_n \rightarrow 1 + d, y_n \rightarrow d$  ( $|d| > 1, d > 1$  эсвэл  $d < -1$ )  $\alpha = 0$  үед  $\lambda = \beta$  гэж авбал  $x_n \rightarrow 1, y_n \rightarrow 0$  гэсэн гурван тухайн тохиолдолд л бодоход хангалттай болов.

1.  $d > 1$  байг. Тэгвэл  $y_n = b_{n-1} / b_n > 1$  гэж үзэж болно. Үүнээс  $\{b_n\}$  дарааллын гишүүд эсвэл бүгд эерэг эсвэл бүгд сөрөг байх ба  $b_n < 0$  үед (3)-аас  $t_{n-1} / t_n > 1$  гэж гарна. Эндээс мөн л  $\{t_n\}$  дарааллын гишүүд эсвэл бүгд эерэг, эсвэл бүгд сөрөг байх ба  $|t_{n-1}| > |t_n|$  буюу  $\{|t_n|\}$  нь монотон буурах зааглагдсан дараалал байна. Энэ бүхнээс  $\{t_n\}$  нь мөн л монотон зааглагдсан болох учир  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \in \mathbb{R}$

болно.  $b_n > 0$  үед  $g_n = t_n$  дараалал баягуулбал:

$$(g_{n+1} g_n - g_{n-1} g_{n+2}) / (g_{n+1}^2 - g_n g_{n+2}) = -(f_{n+1} f_n - f_{n-1} f_{n+2}) / (f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2}) = (-a_n) / (-b_n) = a_n' / b_n' \rightarrow 1 + d \\ (g_n^2 - g_{n-1} g_{n+1}) / (g_{n+1}^2 - g_n g_{n+2}) = (f_n^2 - f_{n-1} f_{n+1}) / (f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2}) = (-b_{n-1}) / (-b_n) = b_{n-1}' / b_n' \rightarrow d, b_n' < 0, \\ b_n' = g_n^2 (1 - t_{n-1} / t_n), t_n = f_n / f_{n+1} = g_n / g_{n+1} \text{ болох тул } b_n < 0 \text{ үед}$$

баталсантай ижлээр  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \in \mathbb{R}$  болно. Ийнхүү  $d > 1$  үед  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t \in \mathbb{R}$  гэж гарав. (2) тэнцэлд хязгаарт шилжвэл  $t = 1 + d - d/t$  болох ба энэ квадрат тэгшитгэлийг бодвол  $t \in \{1, d\}$  гэж гарна.

2.  $d < -1$  байг.  $x_n \rightarrow 1 + d, y_n \rightarrow d$  учир  $x_n < 0, y_n < 0$  гэж үзэж болно. Иймд ядаж нэг  $n$ -ийн хувьд  $t_n > 0$  бол (3)-аас гарах  $-y_n / t_{n+1} = t_n - (x_n)$  тэнцлээс  $t_{n+1} > 0$  гэж гарна. Ийнхүү энэ тохиолдолд  $\{t_n\}$  дарааллын бүх гишүүдийг эерэг гэж үзэж

болно. Эсрэг тохиолдолд  $\{t_n\}$  дарааллын бүх гишүүд сөрөг байна. Иймд аль ч тохиолдолд (4)-оос  $f_{n-1}f_{n+1} > 0$  болно.  $b_1 > 0$  гэж үзэхэд ерөнхийлөлд хариллахгүй. Энэ үед  $y_n = b_{n-1}/b_n < 0$ ,  $x_n = a_n/b_n < 0$  тэнцэтгэл бишүүдээс  $b_{2n-1} > 0$ ,  $b_{2n} < 0$ ,  $a_{2n-1} < 0$ ,  $a_{2n} > 0 \Rightarrow a_{2n-1} = f_{2n}f_{2n-1} - f_{2n-2}f_{2n+1} < 0$ ,  $a_{2n} = f_{2n+1}f_{2n} - f_{2n-1}f_{2n+2} > 0$  тэнцэтгэл бишүүд мөрдөн гарах ба сүүлийн 2 тэнцэтгэл бишийг харгалзан  $f_{2n-1}f_{2n+1} > 0$ ,  $f_{2n}f_{2n+2} > 0$  илэрхийллүүдэд хуваавал  $\{t_n\}$  нь монотон буурах,  $\{t_{2n-1}\}$  нь монотон өсөх дараалал гэж гарах тул  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = A$ ,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} t_{2n-1} = B$

байна. (1) ба (2)-оос  $t_{n-1} = x_n - y_n / (x_n - y_n / t_{n+1}) = x_n - y_n t_{n+1} / (x_{n+1} - y_n)$  болно. Эндээс  $A, B \in \mathbb{R}$  болох нь харагдаж байна. Мөн дээрхи тэнцэлд  $n$ -ийнх нь тэгш ба сондгой тохиолдол тус бүрд  $n \rightarrow \infty$  үед хязгаарт шилжвэл  $A, B$  нь  $x = 1 + d - dx / ((1+d)x - d) \Leftrightarrow x^2 - (1+d)x + d = 0$  квадрат тэгшитгэлийн шийд болно. Иймд  $A, B \in \{1, d\}$  юм.  $\{t_n\}$  дарааллын бүх гишүүд эсвэл үргэлж эерэг эсвэл үргэлж сөрөг байх учир  $A, B$ -гийн тэмдэг ижил байна. Гэтэл  $d < 0 < 1$  учир эсвэл  $A = B = 1$ , эсвэл  $A = B = d$  болно. Ийнхүү  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \in \{1, d\}$  гэж гарлаа. Энэ бүхнээс  $\alpha \neq 0$  үед  $\{t_n\}$  дараалал нийлэх ба хязгаар  $t$  нь эсвэл 1, эсвэл  $d$  гэж батлагдав. Одоо  $t = 1$  гэж харуулбал гүйцнэ. Эсрэгээс нь  $t = d$  гэж үзье. Тэгвэл (5)-аас  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = 1$  болно. Иймд  $|\tau_n| < |t_n|$  гэж үзэж болно. Эндээс

$$|(t_n - t_{n-1}) / (t_{n+1} - t_n)| < 1 \Leftrightarrow |t_n - t_{n-1}| < |t_{n+1} - t_n| \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} |t_n - t_{n-1}| > 0 \text{ болно. Тэтэл}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |t_n - t_{n-1}| = |\lim_{n \rightarrow \infty} t_n - \lim_{n \rightarrow \infty} t_{n-1}| = |t - t| = 0 \text{ учир харшлалд хүрвэл. Иймд } t = 1 \text{ байна.}$$

№14. Уг бодлогын нөхцөлд тохирох 6 өнцөгтийн периметр нь 36-аас багатуу байхыг хялбар харж болно. Иймд  $a_1 = a_2 = \dots = a_6$  байх зөв 6 өнцөгтийг байгуулж аль нэг оройн оронд зөв 6 өнцөгтийн багтсан тойргийн төвийг авч бусдыг нь хэвээр байлгахад үүсэх 6 өнцөгт бидний олох зүйл юм.

№15 Энэ бодлого нь Аффин хувиргалтаар хялбархан бодогдоно.

№16. Эхлээд дарааллын гишүүдийн тоо нь  $p+q-1$ -ээс олон байж болохгүйг үзүүлье. Эсрэгээс нь байдаг бол

$$\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_p \\ a_2, a_3, \dots, a_{p+1} \\ \dots \dots \dots \\ a_q, a_{q+1}, \dots, a_{p+q-1} \end{matrix}$$

гэсэн хүснэгт авч үзье. Эдгээрийн мөрүүдийн гишүүдийн нийлбэр сөрөг багануудын гишүүдийн нийлбэр эерэг тоо байна. Ийм учраас нийт гишүүдийн нийлбэр нь нэгэн зэрэг сөрөг эсрэг болоход хүрнэ. Энэ нь зөрчил. Харин дарааллын гишүүдийн тоо яг  $p+q-2$  байж болно. Ийм дараалал байгуулахыг уншигч танд үлдээв.

№17. Водлогын нөхцөл ёсоор  $a^n = 1$  байх  $n \in \mathbb{N}$  олдохыг хялбар харж

болно. Эндээс  $x = a^{n-1} b a^{n-1}$  гэж авбал  $x$  нь уг тагшитгэлийн шийд болно.

№18.  $n$ -ээс их элементтэй буурах дэд дараалал олддоггүй гэж үзье.  $a_1, a_2, \dots, a_{m+1}$  элементүүдийг дараахь байдлаар хайрцагт хийе.  $a_1$ -ийг I-хайрцагт,  $a_2$ -ийг хэрэв  $a_1 \leq a_2$  бол I-т, хэрэв  $a_1 > a_2$  бол II хайрцагт гэх мэтээр  $a_k$ -г эхлээд I-хайрцагны хамгийн их элементтэй жишээд  $a_k$  нь их бол I-т үгүй бол II хайрцагны хамгийн их элементтэй жишээд  $a_k$  нь их бол II-т гэх мэтээр  $a_k$  элемент ямар нэг  $i$ -р хайрцагт орно. Ийм маягаар бүх элементийг хайрцагласан гэж саная. Одоо нийт хайрцагны тоо  $n$ -ээс ихгүй гэж үзүүлье. Хайрцаг бүрийн хамгийн их тоонуудаар зохиогдох дэд дарааллыг  $a_1, a_2, \dots, a_s$  гэе.  $s$ -нь хайрцагны тоо болно.  $i_1 < i_2 < \dots < i_s$  байхад  $a_{i_1} > a_{i_2} > \dots > a_{i_s}$  байх ба анх авсан нөхцөл ёсоор  $s \leq n$  байна. Иймд ямар нэг хайрцагт заавал  $m$ -ээс их элемент орсон байна. Тэдгээрийг авч үзвэл  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$ ,  $k > m$  ба  $j_1 < j_2 < \dots < j_k$  болох юм.

№19.  $M_n(R)$  бодит тоон элементтэй  $n$  матрицын цагираг  $A$  нь  $M_n(R)$ -ийн ниль дэд цагираг байг. / ө. х  $\forall a \in A$ -ийн хувьд  $a^{k(a)} = 0$  /. Гэхдээ  $k(a) \leq n$  байхыг хялбархан харж болно. Одоо бодлогын бодолтонд орёе.  $A' = RA$  гэвэл  $A'$  нь  $R$  дээрх алгебр болно. Тэгвэл  $A'$  нь төгсгөлөг хэмжээст алгебр болно.  $A' = RA$  ба  $A$  ниль дэд цагираг бол  $A'$  нь нильпотент гэж баталъя. Иймд  $A'$ -ийн хэмжээсээр индукцлээ.  $\dim A' = 1$  бол илэрхий.  $\dim A' = s$  үед  $s$ -ээс бага бүх  $k$ -ийн хувьд батлах зүйл үнэн гэж үзье.  $\forall a \in A$ -ийн хувьд  $\varphi: A' \rightarrow A'$  ( $a' \rightarrow a'a$ ) нь  $R$  модулийн гомоморфизм ба цөм нь  $\text{Ann}_A a$  болно. Үүнд:  $\text{Ann}_A a = \{a' \in A' \mid a'a = 0\}$ ,  $a$  нильпотент учир  $a^k = 0$ ;  $a^{k-1} \neq 0$  гэвэл  $a^k \in \text{Ann}_A a$  буюу  $\text{Ann}_A a \neq 0$  болно. Иймд  $\dim A' > \dim A'a$  байх ба  $A'a = FAa$ ,  $Aa$  нь ниль дэд цагираг болно. Иймд индукцийн алхам ёсоор  $(A'a)^n = 0$  болно.

Санамж-1:  $M_n(R)$ -д нильпотент дэд цагираг бүрийн хувьд  $A^n = 0$  болдог. Иймд  $\forall a \in A$ -ийн хувьд  $(A'a)^n = 0$  юм.  $A'a \in A'$  (зүүн идеал)

Санамж-2: Хэрэв  $B_1$  нь  $s_1$  зэргийн,  $B_2$  нь  $s_2$  зэргийн нильпотент зүүн идеал бол  $(B_1 + B_2)^{s_1 + s_2 - 1} = 0$  болохыг хялбар харж болно. Эндээс  $\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in A$  авбал санамж 1, 2 ёсоор  $(A'a_1 + A'a_2 + \dots + A'a_n)^n = 0 \Rightarrow A'a_1 A'a_2 \dots A'a_n = 0$ . Үүгээр батлах зүйл батлагдана.

№20. Хялбар учир бодолт хийсэнгүй.

## БАГУУДЫН ТЭМЦЭЭНИЙ БОДЛОГУУД:

№1.  $F_1 = Z_5[x]/(x^2-2)$ ,  $F_2 = Z_5[x]/(x^2+x+1)$  талбаруудын хоорондох изоморфизмыг байгуул.

№2.  $(3^n+1)/n \in \mathbb{N}$  байх сондгой тоо  $n$ -ийг ол.

№3. О товтай эллипсоидын харилцан перпендикуляр гурван радиусаар байгуулсан тетраэдрин  $O$  оройн өндөр тогтмол болохыг батал.

№4.  $5 < p$  байх анхны тоо ба  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \equiv 0(p)$  тэгшитгэл шийдтэй бол  $p = 5n + 1$  гэж батал.

№5.  $\max\{\alpha \mid \forall n \in \mathbb{N}, e < (1 + 1/n)^n (1 + 1/\alpha n)\} = ?$

№6. Огторгуйн нэг цэгт эхтэй хос хосоороо үүсгэх өнцгүүд нь бүгд тэнцүү байх цацрагууд хамгийн олондоо хэд байх вэ? Уг өнцгийг ол.

## БОДОЛТ

№1.  $F_1 = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{Z}_5\}$ -д  $x^2 = 2$  ба  $F_2 = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{Z}_5\}$ -д  $x^2 = x - 1$  билээ.  $\varphi: F_1 \rightarrow F_2$  изоморфизм нь  $\forall a \in \mathbb{Z}_5$ -ийн  $\varphi(a) = a$  тул  $\varphi(x)$ -ээр бүрэн тодорхойлогдоно.  $\varphi(x) = ax + b \in F_2$  гэж үзье.  $F_1$ -д  $x^2 = 2$  тул  $F_2$ -д  $\varphi(x^2) = (ax + b)^2 = 2$  буюу  $(ax + b)^2 - 2 = a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2 \equiv a^2(-x - 1) - 2abx + b^2 - 2 \equiv 0 \pmod{x^2 + x + 1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a^2 + 2ab \equiv 0(5) \\ -a^2 + b^2 - 2 \equiv 0(5) \end{cases}$$

Эндээс  $a \equiv 2b, -3b^2 - 2 \equiv 0, 3b^2 \equiv -2, b^2 \equiv -4 \equiv 1$  буюу  $b \equiv \pm 1$  тул  $\varphi_1(x) = 2x + 1, \varphi_2(x) = -2x - 1$  гэсэн 2 янзын изоморфизм оршин байх боломжтой байна.  $\varphi_1, \varphi_2$  хоёулаа изоморфизм мөн үү?

№2.  $n$ -сондгой тоо ба  $3^n \equiv -1(n)$ ,  $p$  нь  $n$ -ийн хамгийн бага анхны тоон хуваагч байг.  $(3, n) = 1$  тул  $(p, 3) = 1$  буюу  $3^{p-1} \equiv 1(p)$ ,  $3^{2n} \equiv 1(n)$ ,  $3^{2n} \equiv 1(p)$  болно. Иймд  $d = (2n, p-1) = 2$  байна гэдгийг анхаарвал  $3^d = 3^2 \equiv 1(p)$ ,  $p/8$  болж  $p$  сондгой гэдэгт зөрчив.

№3.  $a, b, c$  хагас тэнхлэг бүхий эллипсоидын харилцан перпендикуляр гурван радиус нь  $r_1, r_2, r_3$  бол Аполлоны бодлогуудаас  $1/r_1^2 + 1/r_2^2 + 1/r_3^2 = 1/a^2 + 1/b^2 + 1/c^2$  болохыг хялбар харж болно. О орой дахь бүх хавтгайн өнцгүүд нь тэгш өнцөг байдаг тетраэдрийн хувьд энэ оройгоос буулгасан  $h$  өндрийн хувьд  $1/h^2 = 1/a^2 + 1/b^2 + 1/c^2$  байдаг учраас бодлого бодогдов.

№4.  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \equiv 0(p) \Leftrightarrow x^5 \equiv 1(p)$

$$x \equiv 1(p)$$

$$x^{p-1} \equiv 1(p) \text{ болно. Иймд } p = 5n, 5n \pm 1, 5n \pm 2 \text{ байх тоо}$$

хиондлуудаас ганц  $p = 5n + 1$  нь л тохирохыг хялбархан шалгаж болно.

№5. Өгөгдсөн тэнцэтгэл бишийг  $n(e/(1 + 1/n)^n - 1) < 1/\alpha$  хэлбэрт шилжүүлсний дараа  $a_n = n(e/(1 + 1/n)^n - 1)$  дараалал монотон өсөх ба  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1/2$  болохыг хялбархан

тогтооно. Эндээс  $1/2 \leq 1/\alpha$  буюу  $\alpha \leq 2$  болно. Иймд  $\max\{\alpha \mid \forall n \in \mathbb{N}, e < (1 + 1/n)^n (1 + 1/\alpha n)\} = 2$  гэж гарах нь ойлгомжтой.

№6. Бодлогыг нхэмжээст Евклид огторгуйд бодъё. Цацрагуудынхаа чиглэлд нагж урттай векторууд  $e_1, \dots, e_m$ -ийг сонгон авъя.  $e_1, \dots, e_p$  векторууд нь эдгээр векторуудын дундах шугаман хамааралгүй хамгийн олон вектор болог.  $1 \leq j \leq m$  үед  $(e_i, e_j) = \varphi \neq 0$  гэж үзье.  $p + 1 \leq k \leq m$  үед  $e_k = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p$  байх  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  тоонууд олдох ёстой.  $(e_k, e_k) = 1$  гэдгээс  $\lambda_1(e_1, e_k) + \dots + \lambda_p(e_p, e_k) = (\lambda_1 +$

$+...+\lambda_p \cos \varphi = 1$  болно.  $1 \leq i \leq p$  үед  $(e_k, e_i) = \cos \varphi$  гэдгээс  $(e_k, e_i) = \cos \varphi =$   
 $= \lambda_i + \lambda_1 + ... + \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + ... + \lambda_p \cos \varphi$  болно. Энэ хоёр тэнцлээс  $1 \leq i \leq p$  байх ямарч  
 $i$ -ийн хувьд  $1 - \cos \varphi = -(1 - \cos \varphi) \lambda_i$  буюу  $\lambda_i = -1$  болов. Ийнхүү бид  $e_1, ..., e_n$  векто-  
 руудад бодлогод өгөгдсөн чанарыг алдагдуулахгүйгээр ердөө цор ганц  $e_{p+1} =$   
 $= -(e_1 + ... + e_p)$  гэсэн векторыг нэмж болно гэдгийг батлав.  $e_1 + ... + e_p + e_{p+1} = 0$   
 тэнцлийг  $e_1$ -аар үржихэд  $\cos \varphi = -1/p$  болох нь шууд гарна. Мэдээж  $p \leq n$  тул  
 эндээс дурьдсан чанартай вектор буюу цацрагийн тоо  $n+1$ -ээс хэтрэхгүй нь  
 харагдав. Тийм  $n+1$  векторын жишээ нь:  $e_i = (\alpha, ..., \alpha, \beta, \alpha, ..., \alpha)$   $1 \leq i \leq n$ ,  $e_{n+1} =$   
 $i$ -р координат  
 $-e_1 - ... - e_n$ ,  $\alpha = 1/(n\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-1)$ ,  $\beta = \alpha - \sqrt{(n+1)/n}$  гэж авбал энэ векторууд бодлогын  
 нөхцлийг хангана.

## УМО-28-ЫН ХАНДИВЛАГЧИД

|                                                            |               |
|------------------------------------------------------------|---------------|
| №1. Дархан хотын АХГЗ /Л. Амарсанаа/                       | 150000 төгрөг |
| №2. Гэгээн компани /математикч Батбаяр/                    | 30000 төгрөг  |
| №3. Мах комбинат /Лхүндэв/                                 | 15000 төгрөг  |
| №4. Дархан I сургууль /Амгалан/                            | 10000 төгрөг  |
| №5. Политехникийн сургалтын төв /тех. у. д/з. Лхагвасүрэн/ | 10000 төгрөг  |
| №6. Х. а/а. коллеж /Вямбажав/                              | 2000 төгрөг   |
| №7. Дарханы 7-р сургууль /Ө. Дэлгэр/                       | 10000 төгрөг  |
| №8. Дарханы АУДу сургууль /Баатар/                         | 10000 төгрөг  |
| №9. "- 15-р сургууль /Ядамсүрэн/                           | 5000 төгрөг   |
| №10. "- 18-р сургууль /С. Эрдэнэбилэг/                     | 2000 төгрөг   |
| №11. "- 13-р сургууль /Пүрэвдорж/                          | 3000 төгрөг   |
| №12. "- 4-р сургууль /Д. Рэнчинмядаг/                      | 8000 төгрөг   |
| №13. "- 12-р сургууль /Цогоо/                              | 3000 төгрөг   |
| №14. "- 3-р сургууль /С. Болд/                             | 5000 төгрөг   |
| №15. "- 11-р сургууль /С. Лхагвадорж/                      | 3000 төгрөг   |
| №16. "- 10-р сургууль /Тогооч/                             | 5000 төгрөг   |
| №17. "- 2-р сургууль /Буян-Өлзий/                          | 3000 төгрөг   |
| №18. Гурил тэжээлийн комбинат /Эрдэнээ/                    | 8000 төгрөг   |
| №19. Дархан 17-р сургууль /З. Борхүү/                      | 10000 төгрөг  |
| №20. Дархан боловсролын хэлтэс /Б. Батчулуун/              | 10000 төгрөг  |
| №21. Дархан 14-р сургууль /Я. Ватбилэг/                    | 2 хонь        |
| №22. Найрамдал компани /Ганбат/                            | 10000 төгрөг  |
| №23. Дархан 5-р сургууль /Б. Ватболд/                      | 10000 төгрөг  |

292000 төгрөг

# ГАРЧИГ

|                                          |                                                 |    |
|------------------------------------------|-------------------------------------------------|----|
| 1. Ү. Маам                               | Улсын математикийн XXVIII олимпиадын дүн        | 4  |
| 2. Ц. Лувсандорж                         | УМО-XXVIII-ын VII ангийн III давааны бодлого    | 6  |
| 3. Ц. Лувсандорж, Ц. Батсайхан           | УМО-XXVIII-ын VII ангийн III давааны бодлого    | 8  |
| 4. Ц. Лувсандорж                         | УМО-XXVIII-ын VIII ангийн IV давааны бодлого    | 10 |
| 5. А. Хашбаатар, Л. Хадхүү Д. Пүрэвсүрэн | УМО-XXVIII-ын IX ангийн III давааны бодлого     | 12 |
| 6. Л. Хадхүү                             | УМО-XXVIII-ын IX ангийн IV давааны бодлого      | 15 |
| 7. Ц. Дашдорж, Б. Батцэнгэл              | УМО-XXVIII-ын X ангийн III давааны бодлого      | 19 |
| 8. Ц. Дашдорж, Б. Батцэнгэл              | УМО-XXVIII-ын X ангийн IV давааны бодлого       | 22 |
| 9. Б. Батцэнгэл                          | УМО-XXVIII-ын багш нарын III давааны бодлого    | 24 |
| 10. Ц. Дашдорж, Б. Батцэнгэл             | УМО-XXVIII-ын багш нарын IV давааны бодлого     | 26 |
| 11. Б. Батцэнгэл                         | Багуудын тэмцээн                                | 29 |
| 12. Ц. Лувсандорж                        | Цагийн поляр шулуун                             | 31 |
| 13. Ц. Баясгалан, Л. Хадхүү              | Нэгэн функциональ тэгшитгэлийн тухай            | 34 |
| 14. Ц. Дашдорж, Л. Хадхүү                | ОУМО-XXXIII-ийн бодлогууд                       | 40 |
| 15. С. Төмөрбат                          | Монголын оюутны математикийн анхдугаар олимпиад | 46 |

## УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН XXVIII ОЛИМПИАД

Улсын математикийн  
олимпиад бэлтгэгчдэд тусламж

Редактор доц. Ц. Дашдорж  
Уран сайхны редактор Д. Вямбадаваа  
Техник редактор Б. Янжмаа  
МУУИС-ийн хэвлэхэд хэвлэн.  
1993 он