

ММОЗБХ-ны дарга Ц. Дашдорж

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХІХ ОЛИМПИАДЫН
ДҮНГИЙН ТУХАЙ

Монголын математикийн ХХІХ олимпиад 1993 оны IV сарын 12-19-ны хооронд Дундговь аймагт амжилттай явагдлаа. Энэ удаа олимпиадад 17 аймаг, 4-н хотын 43 багш, 118 сурагч оролцсон нь урд өмнө зохиогдсон олимпиадуудаас илүү өргөн хүрээтэй боллоо. Олимпиадыг зохион байгуулахад ихээхэн хүчин чармайлт гарган, бүхий л нөхцөл бололцоогоор хангасан Дундговь аймгийн засаг дарга Н. Чагнаа, Засаг даргын тамгын газар, ШУБХ-ийн дарга Ж. Энхтүвшин, зохион байгуулагч Д. Нямсүрэн, 1-р 10 жилийн захирал Н. Өлзий, хичээлийн эрхлэгч Ж. Энэбиш, А. Баттөмөр зэрэг энэ ажлыг зохион байгуулахад оролцсон нийт хүмүүс, Дундговьчуудад Монголын математикийн олимпиадыг зохион байгуулах хорооны нэрийн өмнөөс гүн талархал илэрхийлье.

Олимпиадад VIII ангийн 42 сурагч зургаан бодлого бодож тэмцэлдсэний эцэст Улаанбаатар хотын II-р сургуулийн VIII ангийн О. Батбаатар 22, 5 оноо авч улсын ХХІХ олимпиадын VIII ангийн аварга боллоо. Удаах байруудад Хөвсгөлийн Адъяахүү /багш нь Б. Ганбилэг/, Улаанбаатар хотын II-р сургуулийн Я. Өлзийболд нар II байр, Улаанбаатар хотын II-р сургуулийн Ш. Ням, А. Алаубек, Г. Алтанхуяг нар III байрыг тус тус эзлэв. /II-р сургуулийн сурагчдын багш нь Ш. Мөнхцэцэг/.

Хангийн сурагчдаас Улаанбаатар хотын II-р сургуулийн С. Цогзолмаа 21, 5 оноо авч улсын математикийн IX ангийн аварга боллоо. Удаах байруудад мөн сургуулийн Ү. Отгонбаяр, Б. Алтангэрэл нар II байр, Хөвсгөл аймгийн Б. Энхтүвшин /багш Д. Нямдорж/, МУҮИС-ийн сурагч П. Баасанцогт /Б. Батцэнгэл/, Улаанбаатар хотын II-р сургуулийн Б. Амгалан нар шалгарч III байр эзлэв. /II-р сургуулийн сурагчдын багш нь Т. Ганбат/.

X ангийн сурагчдаас МУҮИС-ийн сурагч Ш. Эрдэнэбат 22, 5 оноо /багш нь Ц. Дашдорж/ авч улсын математикийн ХХІХ олимпиадын Хангийн аварга боллоо.

Дундговь аймгийн Сайнцагаан сумын малчин ард Шагдаржавын хүү Эрдэнэбат МУҮИС-ийн математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай X ангид суралцаж байгаа ба олимпиадын хошой аварга бөгөөд 1993 оны Дундговь аймгийн алдартнаар тодорлоо.

Мөн УБ хотын 51-р сургуулийн Ц. Одхүү /багш нь Д. Раах/, Дарханы Б. Тогтох /багш нь Х. Батмөнх/ нар II байр, УБ хотын 1-р сургуулийн С. Ганболд /багш нь Д. Пүрэвдорж/, Увсын Б. Эрдэнэбаяр /багш нь Цолмонхүү/, МУҮИС-ийн Ч. Баасандорж /багш нь Ц. Дашдорж/ нар III байр эзэллээ.

X ангиас Ш. Эрдэнэбат, Ц. Одхүү, Б. Тогтох, С. Ганболд, Б. Эрдэнэбаяр Ч. Баасандорж, Ж. Даваадулам, М. Итгэлт /МУҮИС/, Б. Ганхүлэг /УБ-84/ нар IX ангиас С. Цогзолмаа, Ү. Отгонбаяр, М. Пүрэвбат /МУҮИС/ нарын 12 сурагчийг Турк улсын Стамбул хотод 7 сард болох Олон Улсын Макематикийн 34-р олимпиадын бэлтгэлд үлдээлээ.

Олимпиадын математикийн багш нарын аварга болсон УБ хотын 23-р сургуулийн багш А. Доржпалам нь УБ хотын аваргаар олон удаа шалгарч байсан, 1992 оны улсын дэд аварга, математикч юм. А. Доржпаламын шавь Б. Батгэрэл 1985 онд Финландад болсон Олимпиадаас мөнгөн медаль авчирч байсан нь шавийн эрдэм багшаас гэдэг юутай үнэн үг болохыг гэрчилж байна. Уралдаанд олон сайн багш оролцсоноос Булганы Н. Дайвий-Од, Увсын Бат-Орших нар II, III байр эзэлж сайхан амжилт үзүүлээ. I-III байр эзэлсэн багш нарыг алт, мөнгө, хүрэл медаль, дипломууд болон Дундговийн олимпиадын эмблем бүхий том, дунд, жижиг мөнгөн аяга, хадгаар шагналаа. Багш нараас Хөвсгөлийн Ганбилэг, УБ хотын Соёл-Эрдэнэ нар шагналт байранд орж тус бүр 1000 төгрөгөөр шагнагдлаа.

УБ хотын II-р сургуулийн багш Ш. Мөнхцэцэг нь П. Энхболдын нэрэмжит уран бодлогын шагнал хүртэж медаль, диплом болон олимпиадыг ивээн тэтгэгч Дарханы "Дэвшил" компанийн хоёр зөөлөн сандал бүхий бичгийн ширээгээр шагнагдлаа.

Мөн "Дээж" пүүсийн ажилтан Хасуй нийт олимпиадад оролцогчдоод дурсгалын

Математикийн олимпиад №17

альбом бэлгэллээ. Монгол Даатгал банкны аймгийн салбар /захирал нь Халтар/, Тулга хоршоо /эзэн нь Дэжид/. Хоршоодын холбооны дарга Моёор тус тус 10000 төгрөг, МСДНамын дарга А. Ганбаатар 29-р олимпиадад 10 000 төгрөг, ММО Хороонд 30 000 төгрөг тус тус хандивлав.

ММОЗБХ-ны дарга Ц. Дашдоржид математикийн шинжлэх ухаанд оруулсан хувь нэмрийг үнэлэн Дундговь аймгийн багш нараас гоёмсог морин хуурыг гардууллаа.

Хот, хөдөөгийн багш нар, МУИС-ийн ба бусад сургуулийн сурагчид, Дундговь, Комисс гэсэн 6 баг өрсөлдсөн багийн тэмцээнд Комисс баг бүх оноогоо ав ялан 3000 төгрөгөөр шагнагдлаа.

Олимпиадад оролцсон нийт багуудаас Ганбилэг ахлагчтай Хөвсгөл аймгийн тоочид тэргүүн байранд шалгарч шилжин явах цом, олимпиадыг ивээн тэтгэгч "Монгол-Герман" нийгэмлэгийн шагнал 3000 төгрөгөөр шагнагдлаа. П байранд УБ-ын баг, Ш байранд адил оноогоор Дундговь, Увсын багууд шалгарлаа. Үүгээр Хөвсгөл, УБ-ын багууд тус бүр 2 хүнийг, Дундговь, Увсын багууд тус бүр 1 хүн ирэх 30-р олимпиадад илүү оролцуулах эрх олж авлаа.

Математикийн олимпиадыг зохион байгуулах ажилд идэвхтэй оролцож ивээн тэтгэсэн байгууллага, хүмүүст нийт сурагч багш нарынхаа өмнөөс талархал илэрхийлье.

Ц. ЛУВСАНДОРЖ

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХІХ ОЛИМПИАДЫН ҮП АНГИЙН Ш ДАВААНЫ БОДЛОГУУД.

А-1. Аливаа эерэг a, b тоонуудын хувьд

$1/a^2 + 1/b^2 \leq (1/a^2) \cdot \sqrt{b \cdot a} + (1/b^2) \cdot \sqrt{a \cdot b}$ болохыг батал.

А-2. 29 ширхэг алим өгөгдөв. Эдгээр алимнуудаас хэсгийг сонгон авч, тус бүрийг нь дөрөв хуваахад үүссэн бүх алимнуудаас мөн хэсгийг сонгон авч дээрх үйлдлийг хийнэ. Энэхүү үйлдлийг дараалан хийх замаар хүүхэд бүхэнд нэг л зүсэн /том жижиг ялгаагүй/ байхаар 1993 хүүхдэд алимнуудаас хүртээж болох уу?

А-3. Пареллограммд оройнууд нь харгалзан талууд дээр нь оршдог байхаар багтсан бүх трапецүүдийн диагоналуудын огтлолцлын цэгийн геометр байрыг ол.

Б-1. $x^2 + x + 29y^2 = 1993$ тэгшитгэлийн бүх бүхэл тоон шийдийг ол.

Б-2. Гүдгэр дөрвөн өнцөгтийг шулуунаар зүсэж, үүссэн хоёр хэсгийн аль нэгийг мөн шулуунаар хоёр хэсэгт зүсэх үйлдлийг хийнэ. Энэхүү үйлдлийг 664 удаа хийсний эцэст үүссэн бүх олон өнцөгтүүдийн оройнуудын тоо 1993 байж болох уу?

Б-3. Нэг талтай квадратын дотор n^2 ширхэг цэгүүд өгөгдөв. Эдгээр цэгүүд дээр оройтой, периметр нь $2n+1$ -ээс хэтрэхгүй тахир шугам оршин байхыг батал.

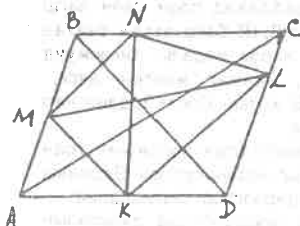
Бодолт.

А-1. $(1/a^2) \cdot \sqrt{b \cdot a} + (1/b^2) \cdot \sqrt{a \cdot b} - (1/a^2 + 1/b^2) = (b^2 \sqrt{b \cdot a} + a^2 \sqrt{a \cdot b} - (b^2 + a^2)) / (a^2 b^2) = (b^2 (\sqrt{b \cdot a} - 1) + a^2 (\sqrt{a \cdot b} - 1)) / (a^2 b^2) = (\sqrt{b \cdot a} b^2 (\sqrt{b \cdot a} - \sqrt{a \cdot b}) + a^2 \sqrt{a \cdot b} (\sqrt{a \cdot b} - \sqrt{b \cdot a})) / (a^2 b^2) = ((\sqrt{a} - \sqrt{b}) (a^{3/2} - b^{3/2})) / (a^{3/2} b^{3/2}) > 0$

А-2. Өгсөн алимнуудаас хэсгийг сонгон авч дээрх үйлдлийг хэдэн удаа хийхэд нийт алимнуудын зүсмийн тоо анхнаасаа $3k$ хэлбэрээр өөрчлөгдөнө. Иймд бодлого ёсоор 1993 хүүхдэд зүсмүүдийг нэг нэгээр хүртээж болдог бол $29+3k=1993$ буюу $3k=1964$ болж, 1964 тоо 3-д хуваагдахад хүрснээр болохгүй нь батлагдав.

А-3. АВ, ВС, CD, DA талууд дээр харгалзан М, N, L, K, оройнууд орших түүнд багтсан трапецүүд нь эсвэл MN // KL эсвэл NL // MK байж болно. Эхлээд MN // KL байхаар багтсан трапецүүдийг авч үзье.

MNKL трапедын диагоналуудын огтлолцлын цэг нь Е бол. MEN, KEL гурвалжууд төсөөтэй байдаг учраас ME / EL = EN / EK = MN / KL = R



Одоо H_E^A гомотетыг авч үзье. Гомотетоор, гомотетын төвийг дайраагүй шулууны дүр нь уул шулуунтай параллель болохыг анхаарвал: $H_E^A(CN)=AK$, $H_E^A(AM)=CL$ ба эндээс $H_E^A(B)=D$ болсноор E цэг BD шулуун дээр орших болно.

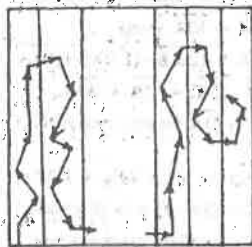
Одоо $[BD]$ задгай хэрчмийн аливаа цэг бүхэнд, энэ цэг диагоналиудын огтлолцлын цэг болох бодлогын нөхцөл хангасан трапецыг байгуулж болох нь мэдээж юм. Иймд энэ тохиолдолд бидний сонирхож буй цэгийн геометр байр нь $[BD]$ задгай хэрчим болов. Нөгөө тохиолдлоор багтсан трапецуудын хувьд сонирхож буй цэгийн геометр байр нь $[AC]$ болох нь ойлгомжтой.

Б-1. $x^2+x+29y^2=1993$ тэгшитгэлийн бүхэл тоон шийдийг олох бодлогыг олонянзын аргаар шийдсэн байсныг тэмдэглэн, энд хамгийн энгийн санаагаар, өөрөөр хэлбэл ямар цифрүүдээр төгсөхийг тооцох бодлого бодъя.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$29y^2$	0	9	6	1	4	5	4	1	6	9
Σ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Энэхүү хүснэгтээс харахад, x тооны сүүлчийн цифр нь 3 байх үе нь бидэнд сонирхолтой юм. $29y^2=1993-(x^2+x)$ гэдгээс $1993-(x^2+x) \geq 0$ буюу $x(x+1) \leq 1993$ болно. Одоо $x=\pm 3$, $x=\pm 13$, $x=\pm 23$, $x=\pm 33$, $x=\pm 43$ утгуудын хувьд y хувьсагч нь бүхэл тоон утга авахгүйг хялбар шалгана:

Б-2. Энэхүү үйлдлийн үр дүнд олон өнцөгтийн тоо яг нэгээр нэмэгдэх нь уг үйлдлийн инвариант юм. Иймд 664 удаагийн үйлдлийн дүнд 665 олон өнцөгт үүсэх ба энэ үед бүх оройн тоо нь 1995-аас багагүй нь мэдээж. Иймд 1993 байж болохгүй.



А

В

Б-3. Өгсөн нэгж талтай квадратыг n тэнцүү зурваст хуваая. Ингэхэд өгөгдсөн n^2 тооны цэгүүд бидний байгуулсан зурвасуудад хуваагдаж орно. Цэг бүхнийг дайруулан квадратын талуудтай харгалзан параллель шулуунууд татъя. Зурагт тэмдэглэсэн холболтоор эдгээр цэгүүдийг холбосон тахир шугамын периметр нь $2n+1$ тооноос хэтрэхгүй гэдгийг баталъя. Нэг зурваст байрласан цэгүүдийн CB тал дээрх проекцууд нь нэгээс хэтрэхгүй учраас нийт цэгүүдийн CB тал дээрх проекцуудын урт нь n -ээс хэтрэхгүй юм. Иймд одоо нэг зурвас дахь цэг бүхний AB тал дээрх проекцын урт нь $1/n$ -ээс хэтрэхгүй, мөн зурвасдамнан холбосон

хэрчмийн AB тал дээрх проекц $2/n$ -ээс хэтрэхгүй гэдгийг анхаарвал бүх цэгүүдийн AB тал дээрх проекцуудын нийлбэр нь $(n-1)/n + (n^2-1)/n$ тооноос хэтрэхгүй. Одоо гурвалжны аль нэг Z талын уртын нийлбэр нь үлдсэн талаасаа багагүй байдгийг санавал бидний байгуулсан тахир шугамын урт нь

$$(n^2 + n - 2) / n + n = 2n + 1 - 2/n < 2n + 1 \text{ тооноос хэтрэхгүй нь батлагдав.}$$

Ц. ЛУВСАНДОРЖ, В. АДЬЯАСҮРЭН

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХІХ ОЛИМПИАДЫН ҮШ АНГИЙН ІІІ ДАВААНЫ БОДЛОГУУД

А-1. Аль ч хоёрын нь нийлбэр нөгөөгөөсөө их байдаг a, b, c эерэг бодит тоонуудын хувьд $a+b+c=2$ бол $a^2+b^2+c^2+2abc < 2$ болохыг батал.

А-2. 1-ээс 210-ын хооронд орших 29 ширхэг ялгаатай натурал тоонуудын ялгавруудын дотор дор хаяж гурван тэнцүү ялгавар олдохыг батал.

А-3. $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтөд AB, BC, CD, DA талуудыг харгалзан K, L, M, N цэгүүд нэгээс ялгаатай, нэгэн ижил харьцаагаар хуваадаг байхаар $KLMN$ параллелограммыг багтааж болдог бол $ABCD$ параллелограмм болохыг батал.

Б-1. $x^3-y^3=xy+93$ тэгшитгэлийн бүх натурал тоон шийдийг ол.

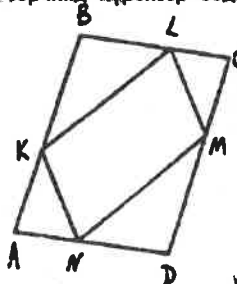
Б-2. ABC хурц өнцөгт гурвалжны C оройгоос уул гурвалжны орто төв болон

багтаасан тойргийн төв хүртэлх зайнууд тэнцүү бол ВСА өнцгийг ол.

Б-3. 00 хэлбэрийн дүрсийн дээд 2 дугуйд тавигдсан тоонуудын ялгаврын модулийг доод дугуйд тавих журмаар 1,2,3,...,21 тоонуудыг доор зурагдсан дүрсийн дугуй бүхэнд нэг л тоо байхаар байрлуулж болох уу?

А-1. а, б, с тоонууд 1-ээс бага байх нь мэдээж билээ. Иймд
 $0 < (1-a)(1-b)(1-c) = 1-a-b+ab-c+ac+bc-abc = 1-(a+b+c)+ab+bc+ac-abc =$
 $= -1 + (a+b+c)^2 / 2 - (a^2+b^2+c^2) / 2 - abc = -1 + (a+b+c)^2 / 2 - (a^2 + b^2 +$
 $+ c^2) / 2 - abc = -1 + 2 \cdot (a^2+b^2+c^2) / 2 - abc = 1 - (a^2+b^2+c^2) / 2 - abc.$
 $(a^2+b^2+c^2) / 2 < (1-abc)$ буюу $a^2+b^2+c^2+2abc < 2$ болж батлагдав.

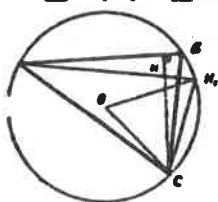
А-2. Өгсөн 29 ширхэг тоонуудыг $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{29}$ гэж үзэж болно. Тэгвэл $209 \geq a_2 - a_1 = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{29} - a_{28})$. Одоо бидний авч үзэж буй ялгавруудын дотор тэнцүү гурван ялгавар байдаггүй гэж эсрэгээр үзвэл, ямар ч ялгавар нь хамгийн ихдээ л хоёр удаа байх болно. Энэ үүднээс дээр байгуулсан $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_{29} - a_{28}$ ялгавруудаас нийлбэр нь хамгийн бага байх ялгаврууд нь 1,2,3,...,14 тоонууд л юм. Одоо $2(1+2+3+\dots+14) = 2 \cdot 105 = 210 \leq (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{29} - a_{28}) = a_{29} - a_1 \leq 209$ зөрчилд хүрснээр бодлого бодогдов.



А-3. $AK / KB = BL / LC = CM / MD = DN / NA = \lambda \neq 1$
 болохоор $\overline{BL} = (\lambda / (\lambda + 1)) \overline{BC}$, $\overline{LC} = (1 / (\lambda + 1)) \overline{BC}$, $\overline{CM} =$
 $= (\lambda / (\lambda + 1)) \overline{CD}$, $\overline{MD} = (1 / (\lambda + 1)) \overline{CD}$, $\overline{DN} = (\lambda / (\lambda +$
 $+ 1)) \overline{DA}$, $\overline{NA} = (1 / (\lambda + 1)) \overline{DA}$, $\overline{LM} = \overline{LC} + \overline{CM} = (1 / \lambda) \overline{BC} +$
 $+ (\lambda / (\lambda + 1)) \overline{CD}$, $\overline{KN} = \overline{KA} + \overline{AN} = -(\lambda / (\lambda + 1)) \overline{AB} - (1 / \lambda) \overline{DA}$
 ба KLMN параллелограмм гэдгээс $\overline{LM} = \overline{KN}$ учир
 $(1 / (\lambda + 1)) \overline{BC} + (\lambda / (\lambda + 1)) \overline{CD} = -(\lambda / (\lambda + 1)) \overline{AB} - (1 / (\lambda + 1)) \overline{DA}$
 буюу $\overline{BC} + \lambda \overline{CD} = -\lambda \overline{AB} - \overline{DA} = -\lambda \overline{AB} - (\overline{DC} + \overline{CB} + \overline{BA})$.

Эндээс $\overline{CD} = -\overline{AB} = \overline{BA}$. Үүний адил $\overline{BC} = \overline{DA}$ болох тул ABCD дөрвөн өнцөгт параллелограмм болов.

Б-1. $x - y = d \geq 1$ гэвэл $(d + y)^2 - y^2 = (d + y)^2 + 93$ ба эндээс $d^2 + 3d^2y + 3dy^2 =$
 $= dy + y^2 + 93$ буюу $(3d - 1) y^2 + (3d - 1) y = 93 - d^2$, $(3d - 1) y^2 + (3d - 1) y > 0$ учраас
 $93 - d^2 \geq 0$ буюу $d^2 \leq 93$. Энэ үед тэгшитгэл натурал шийдгүй нь хялбар шалгагдана.



Б-2. Гурвалжны орто төв Н цэгтэй ВС талын хувьд тэгш хэмтэй орших H_1 цэг нь уул гурвалжныг багтаасан тойрог дээр оршдог болох нь мэдээж юм. $OC = CH = CH_1 = OH_1$ гэдгээс $\angle OCH_1$ зөв тул $\angle CAN_1 = 30^\circ$ буюу $\angle ABC = 60^\circ$ боллоо.

Б-3. 1, 2, 3,...,21 тоонуудын нийлбэр нь сондгой тоо болохыг тэмдэглэе. Өгөгдсөн дүрсэд 1,2,3,...,21 тоонуудыг бодлогын нөхцөлийг хангасан байхаар тавьчихсан гэж бодоод, нийлбэрийг нөгөө талаас бодъя. а-б, а+б тоонуудын

тэгш сондгой адилхан байгаа нь (а-б) нэмэгдэхүүнийг а+б нэмэгдэхүүнээр солиод бодоход гарах нийлбэрийн тэгш, сондгой адилхан байх аятай байдал харагдаж байна. Эндээс 1,2,3,...,21 тоонуудаас аль зургаан тоог нь сонгож өгөгдсөн эхний мөрөнд тавихаас хамаарахгүйгээр, уул тоонуудын нийлбэр тэгш гарч байгааг хялбар тооцно. Иймд бодлогын нөхцөлөөр 1,2,3,...,21 тоонуудыг өгөгдсөн дүрсэд байрлуулж болохгүй юм байна.

Ц. ЛУВСАНДОРЖ

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХІХ ОЛИМПИАДЫН ҮШ АНГИЙН ІҮ ДАВААНЫ БОДЛОГУУД

А-1 /В. Адъяасүрэн - ШУА/. Нийлбэр нь 625-аас хэтрэхгүй ялгаатай 29 ширхэг натурал тоо өгчээ. Тэгвэл нийлбэр нь 29 байх 2 тоо олдохыг батал.

Математикийн олимпиад №17

А-2 /Л. Хадхүү - МУУИС-ийн багш/. $n > 2$ натурал тооны хувьд түүнээс бага, түүнтэй харилцан анхны байх тоонуудын олонлогыг I гэе. Тэгвэл $m = \sum k^{1993}$, тоо нь n -д хуваагдахыг батал.

А-3 /Ц. Лувсандорж - УБИС-ийн багш/. S -талбайтай гурвалжныг багтаасан тойргийн радиус нь R болог. Энэхүү гурвалжны хүндийн төвөөс талуудад буулгасан перпендикуляруудын сууриар үүсэх гурвалжны талбай S_0 бол

$$S^2 / (3/3 R^2) \leq S_0 \leq S/4 \text{ болохыг батал.}$$

Б-1 /Б. Батцэнгэл - МУУИС-ийн багш/. Дарааллын дэс дараалсан хэсэг гишүүдийг сонгон авч, үлдсэн гишүүдийнхээ аль нэг зэргэлдээ хоёрынх нь дунд эрэмбийг нь алдагдуулахгүйгээр байрлуулах үйлдэл хийнэ. Мөн аль нэг захад нь байрлуулж болно. 1, 2, 3, 4, 5 дарааллаас 5, 4, 3, 2, 1 дараалалд хүргэх хамгийн цөөн үйлдлийн тоог ол.

Б-2 /В. Адъяасүрэн - ШУА/. $\{1, 2, 3, \dots, 81\}$ олонлогийг үл огтлолцох $\{x_1, x_2, \dots, x_{27}\}, \{y_1, y_2, \dots, y_{27}\}, \{z_1, z_2, \dots, z_{27}\}$ дэд олонлогуудад

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{27} = y_1 + y_2 + \dots + y_{27} = z_1 + z_2 + \dots + z_{27}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{27}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{27}^2 = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{27}^2$$

$$x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{27}^3 = y_1^3 + y_2^3 + \dots + y_{27}^3 = z_1^3 + z_2^3 + \dots + z_{27}^3$$

байхаар хувааж болох уу?

Б-3 /П. Гантуул - УБИС-ийн оюутан/. Өндрүүдийн нь огтлолцлын цэг /ортотөв/ H байдаг $\triangle ABC$ өгөгдөв. $АН, ВН, СН$ хэрчмүүдийн дунджыг дайруулан $ВС, AC, AB$ талуудтай харгалзан параллелиар татсан шулуунуудын огтлолцолд үүсэх гурвалжны периметр нь, гурвалжны талуудын дундаж цэгүүдийн хувьд харгалзан H цэгтэй төвийн тэгш хэмтэй оршдог цэгүүд дээр оройнууд нь байх гурвалжны периметртэй тэнцүү болохыг батал.

Бодолт. А-1. Эсрэгээс нь бодлогын нөхцөл хангасан 2 тоо олдохгүй гэж үзвэл, нийлбэр нь хамгийн бага 1, 2, 3, 4, 5, ..., 14, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43 гэсэн тоонуудыг авч үзэхэд нийлбэр нь 625-аас их болж, зөрчилд хүрэв.

А-2. Энэхүү бодлогыг Г. Адъяахүү маш хялбар товч бодсоныг дор сийрүүлэе $(k, n) = 1$ бол $(n-k, n) = 1$ гэдгээс I олонлогийн элементүүдийн тоо нь тэгш болсноор, өгсөн нийлбэрийг $k^{1993} + (n-k)^{1993}$ хэлбэрийн нэмэгдэхүүнүүдээр нь бүлэглэн бичиж болно. Одоо $k^{1993} + (n-k)^{1993} = k^{1993} - (k-n)^{1993}$ хэлбэрийн нэмэгдэхүүн бүхэн n тоонд хуваагдах нь илт болсноор бодлого бодогдов.

А-3. Сүүлийн жилүүдэд геометрийн тэнцэтгэл биш, экстремаль бодлогуудыг сурагчид маань гол төлөв бодоогүйг үндэслэн энэ төрлийн бодлогод анхааралтай хандахыг зөвлөө

$BC=a, AB=c, AC=b$ гэвэл $MA_1 = 2S / (3a), MB_1 = 2S / (3b), MC_1 = 2S / (3c)$ ба $MA_1BC_1, MB_1AC_1, MA_1CB_1$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтах учраас $C_1MA_1 = \pi - B, A_1MB_1 = \pi - C, B_1AC_1 = \pi - A$ билээ. Иймд $S_0 = (4S^2 / 9) * (\sin C / (2ab) + \sin A / (2bc) + \sin B / (2ac))$ ба синусын теоремыг анхаарвал:

$$S_0 = (2S^2 / 9) * (c / (2Rab) + a / (2Rbc) + b / (2Rac)) = (2S^2 / (9R^2)) * ((a^2 + b^2 + c^2) / (abc))$$

Одоо $S = abc / (4S)$ гэдгээс $S_0 = (S / 4) * (a^2 + b^2 + c^2) / (9R^2)$ болно. Эндээс аливаа гурвалжны хувьд $R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) / 9 \geq 0$ ба $S \leq (a^2 + b^2 + c^2) / (4/3)$ байдлыг тус тус анхаарвал: $S_0 = (S / 4) * ((a^2 + b^2 + c^2) / (9R^2)) \leq S / 4$

$S_0 = (S / 4) * ((a^2 + b^2 + c^2) / (9R^2)) = (S / (9R^2)) * (a^2 + b^2 + c^2) / 3 / (4/3) \geq S^2 / (3/3 R^2)$ болсноор тэнцэтгэл биш бүрэн батлагдав. $a=b=c$ үед $S_0 = S/4$ болох нь мэдээж.

Б-1. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ дарааллаас $\{5, 4, 3, 2, 1\}$ дараалалд хүргэхэд зөвшөөрсөн үйлдлийг хамгийн цөөндөө гурван удаа л хийх юм. Өөрөөр хэлбэл:

$\{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ ----- } > \{1, 4, 5, 2, 3\} \text{ ----- } > \{5, 2, 1, 4, 3\} \text{ ----- } > \{5, 4, 3, 2, 1\}$ байх юм. Энэхүү бодлого нь ерөнхий тохиолдолд багш нарын II өдрийн бодлогод

Математикийн олимпиад №17

орсон учир тэндээс дэлгэрэнгүй тайлбарыг үзэхийг сануулъя.

Б-2. Уг бодлого нь бусдаас харьцангуй хүндэвтэр бөгөөд өвөрмөц байсан нь уул бодлогыг бодсон сурагч байхгүйгээр тайлбарлагдах буй заа.

Энд зохиогчийн бодолтыг хийе. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ тоонуудын тус бүрийн нийлбэр нь тэнцүү байхаар үл огтлолцох гурван ангид $\{1, 5, 9\}, \{2, 6, 7\}, \{3, 4, 8\}$ хувааж болох юм. Одоо $\{1, 2, 3, \dots, 27\}$ тоонуудыг бодлогын эхний хоёр нөхцөл биелэхээр доорх байдлаар хуваана.

I. $1, 5, 9, 2+3^2, 6+3^2, 7+3^2, 3+2\cdot 3^2, 4+2\cdot 3^2, 8+2\cdot 3^2$.

II. $2, 6, 7, 3+3^2, 4+3^2, 8+3^2, 1+2\cdot 3^2, 5+2\cdot 3^2, 9+2\cdot 3^2$.

III. $3, 4, 8, 1+3^2, 5+3^2, 9+3^2, 2+2\cdot 3^2, 6+2\cdot 3^2, 7+2\cdot 3^2$.

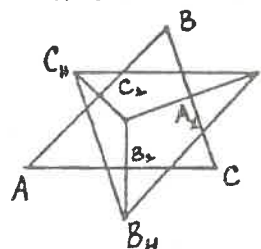
I, II, III ангиудын элементүүдийг товчоор харгалзан $\{a_1, a_2, \dots, a_9\}, \{b_1, b_2, \dots, b_9\}, \{c_1, c_2, \dots, c_9\}$ гэж тус тус тэмдэглэе. Тэгвэл зохиогч өмнөх хуваалтаа ашиглан $\{1, 2, 3, \dots, 81\}$ олонлогийг бодлогын нөхцөлийг хангахаар хэрхэн хуваасныг харуулъя.

I. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9, b_1+3^3, b_2+3^3, \dots, b_9+3^3, c_1+2\cdot 3^3, c_2+2\cdot 3^3, \dots, c_9+2\cdot 3^3$.

II. $b_1, b_2, b_3, \dots, b_9, c_1+3^3, c_2+3^3, \dots, c_9+3^3, a_1+2\cdot 3^3, a_2+2\cdot 3^3, \dots, a_9+2\cdot 3^3$.

III. $c_1, c_2, c_3, \dots, c_9, a_1+3^3, a_2+3^3, \dots, a_9+3^3, b_1+2\cdot 3^3, b_2+2\cdot 3^3, \dots, b_9+2\cdot 3^3$.

Энэхүү хуваалт нь бодлогыг бүрэн бодож буйг хялбар шалгаж болох юм.



Б-3. Эхлээд $\triangle ABC = \triangle A_n B_n C_n$ гэж батлая.

Өгсөн ёсоор АНС, ВНА, ВНС гурвалжнуудыг багтаасан тойргийн төвүүд нь харгалзан B_n, C_n, A_n цэгүүд болох юм. АВС, ВНС гурвалжнуудын хувьд:

$$2R = BC / \sin A = BC / \sin(\pi - A) = 2BA_n$$

болсноор $R = BA_n$ байна. Энэ адилаар $BC_n = AB_n = R$

болох юм. Эндээс $OA_1 = A_1 A_n, OB_1 = B_1 B_n, OC_1 = C_1 C_n$

болсноор $AN = 2 \cdot OA_1, BN = 2 \cdot OB_1, CN = 2 \cdot OC_1$ байдгийг

анхаарвал $AOA_n N, BOB_n N, COC_n N$ дөрвөн өнцөгтүүд нь

ОН хэрчмийг дундаж цэг, диагоналуудынх нь огтлолцлын цэг байх параллелограммууд юм. Иймд энэ цэг дээр төвтэй төвийн тэгш хэмээр АВС гурвалжин $A_n B_n C_n$ гурвалжинд шилжих юм.

Эцэст, гурвалжны хавтгайн дурын М цэгийг авахад, түүнтэй талуудын дундаж цэгүүдийн хувьд төвийн тэгш хэмтэй цэгүүд дээр оройнууд нь орших гурвалжин анхны гурвалжинтай тэнцүү байдгийг анхаарвал бодлого бүрэн бодогдов.

Л. ХАДХҮҮ

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХІХ ОЛИМПИАДЫН ІХ АНГИЙН Ш ДАВААНЫ БОДЛОГУУД

А-1. $x^2 + (x / (x + 1))^2 = 3$ тэгшитгэлийг бод.

А-2. Тойрог дээр 41 улаан, 59 хар хүү байв. Тэгвэл дунд нь яг 19 хүү орших 2 улаан хүү олдохыг батал.

А-3. АВС гурвалжны биссектрисүүдийн огтлолцлын цэг I ба А, В, С оройгоос гарсан биссектрисүүдийн суурь нь харгалзан A_1, B_1, C_1 гээ. $\overline{IA_1} + \overline{IB_1} + \overline{IC_1} = 0$ бол АВС нь зөв гурвалжин болохыг батал.

Б-1. $f: R \rightarrow R$ функц $f(3+x) = f(3-x)$ ($R \ni \forall x$) нөхцөлийг хангадаг ба 6 ялгаатай бодит язгууртай бол тэдгээрийн нийлбэрийг ол.

Б-2. $\{a_n\}$ натурал тоон дарааллын хувьд $a_{n+k} - a_n$ нь a_n -д хуваагддаг ($N \ni \forall n, k$) ба $b_n = a_1, \dots, a_n$ бол $b_{n+k} - b_n$ нь b_n -д ($N \ni \forall n, k$) хуваагдахыг батал.

Б-3. АВС гурвалжны ВС тал дээрх М цэгийн хувьд $(AM-AC) \cdot BC \leq (AB-AC) \cdot MC$ болохыг батал.

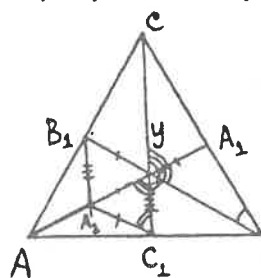
A-1. 1-р бодолт. $x^2 + (x/(x+1))^2 = (x - x/(x+1))^2 + 2x^2/(x+1) = (x^2/(x+1))^2 + 2x^2/(x+1) = (x^2/(x+1) + 1)^2 - 1 \iff (x^2 + (x/(x+1))^2 = 3 \iff (x^2/(x+1) + 1)^2 - 4 = 0 \iff (x^2/(x+1) - 1)(x^2/(x+1) + 3) = 0 \iff (x^2 - x - 1)/(x+1.5)^2 + 0.75/(x+1) = 0 \iff x^2 - x - 1 = 0 \iff x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$

2-р бодолт. $(x : \sqrt{3})^2 + (x : \sqrt{3}(x+1))^2 = 1$ учир $x : \sqrt{3} = \cos \alpha$, $x : \sqrt{3}(x+1) = \sin \alpha$ байх α тоо олдоно. Эндээс $(\sqrt{3} \cos \alpha) : (\sqrt{3}(\sqrt{3} \cos \alpha + 1)) = \sin \alpha$ буюу

$\sqrt{3} \sin \alpha \cos \alpha - (\cos \alpha - \sin \alpha) = 0$ тэгшитгэл гарна. Энд $y = \cos \alpha - \sin \alpha$ гэвэл $\sin \alpha \cos \alpha = (1 - y^2)/2$ болох учир дээрх тэгшитгэл $\sqrt{3}y^2 + 2y - \sqrt{3} = 0$ тэгшитгэлд шилжинэ. $y_{1,2} = (-1 \pm 2) : \sqrt{3}$, $y = \sqrt{2} \sin(\pi/4 - \alpha) \in [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}] \implies y = 1/\sqrt{3} \implies 1/\sqrt{3} = \cos \alpha - \sin \alpha = x/\sqrt{3} - x/(\sqrt{3}(x+1)) \iff x^2 - x - 1 = 0 \iff x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$

A-2. 100 цэгийг $A_1, A_2, \dots, A_{100}$ гэж тэмдэглээд $A_1, A_2, \dots, A_{100}$ ($i=1, 2, \dots, 20$) гэсэн 20 ширхэг 5 өнцөгт байгуулъя. Тэгвэл Дирихлейн зарчим ёсоор ядаж нэг 5 өнцөгтийн 3 орой улаан байх ёстой. Энэ 5 өнцөгтийн аль нэг зэргэлдээ 2 орой улаан байх ёстой. Энэ зэргэлдээ 2 улаан оройн хооронд байгуулалт ёсоор яг 19 цэг бий.

A-3. J цэгийн хувьд A_1 -тэй тэгш хэмтэй цэгийг A'_1 гэе. Тэгвэл өгсөн ёсоор $\overline{JB_1} + \overline{JC_1} = \overline{JA'_1}$ байна. Иймд векторуудыг нэмэх параллелограммын дүрмээр $\overline{JB_1A'_1C_1}$ нь параллелограмм болов. Нөгөө талаас биссектрисийн чанар ёсоор $CA_1/b = A_1B/c$, $CA_1 + A_1B = a \implies A_1B = ac/(b+c)$ болно. Мөн A_1BJ гурвалжинд синусын теорем



бичвэл: $JA_1 / \sin(\beta/2) = A_1B / \sin(90^\circ - \gamma/2) \implies JA_1 = (ac/(b+c)) * (\sin(\beta/2)/\cos(\gamma/2)) * (2\sin(\gamma/2)/2\sin(\gamma/2)) = 4aR \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2) / (b+c) \implies JA_1 / \sin(90^\circ - \alpha/2) = 4aR \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2) / ((b+c)\cos(\alpha/2)) * (2\sin(\alpha/2)/2\sin(\alpha/2)) = 16R^2 \sin(\alpha/2) \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2) / (b+c) = 4Rr / (b+c)$

гэж гарна. Үүнтэй ижлээр

$JB_1 / \sin(90^\circ - \beta/2) = 4Rr / (a+c)$, $JC_1 / \sin(90^\circ - \gamma/2) = 4Rr / (a+b)$

болно. Иймд A'_1JC_1 гурвалжинд синусын теорем бичвэл:

$JA'_1 / \sin(90^\circ - \alpha/2) = JC_1 / \sin(90^\circ - \gamma/2) = A'_1C_1 / \sin(90^\circ - \beta/2)$

болно. Энд $JA'_1 = JA_1$, $A'_1C_1 = JB_1$ гэдгийг тооцвол:

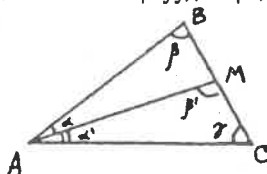
$4Rr / (b+c) = 4Rr / (a+c) = 4Rr / (a+b) \iff a = b = c$ гэж батлах зүйл гарав.

B-1. Өгсөн нөхцөлөөс f функцийн график $x=3$ шулууны хувьд тэгш хэмтэй гэж гарч байна /Тэгш функцийн тодорхойлолт, графикийн онцлогийг сана/. Иймд 6 язгуур нь хос хосоороо $x=3$ цэгийн хувьд тэгш хэмтэй ба x_1, x_2 нь $x=3$ -ийн хувьд тэгш хэмтэй бол $x_1 + x_2 = 6$ байх учир дурьдсан 6 язгуурын нийлбэр нь $6 \cdot 3 = 18$ болно.

B-2. $n+k$ -аар индукцэлж баталъя.

$b_1 = a_1$ ба $a_1^2 = b_1b_1$, $b_2 = a_1a_2 = a_1(a_2 - a_1) + a_1^2$ тул индукцийн эхний алхам хийгдэв. $b_{n+k} = b_{n+k-1}a_{n+k} = b_{n+k-1}(a_{n+k} - a_1) + b_{n+k-1}a_1$ гэж бичээд индукц ёсоор $b_n b_{k+1} | b_{n+k+1}$ ба бодлогын нөхцөлөөр $a_k | a_{n+k} - a_1$, $a_k | a_1$ гэдгийг анхаарвал бодлого бодогдоно.

B-3. 1-р бодолт. ABC, AMC гурвалжны өнцгүүдийг харгалзан $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ багтаасан тойргуудын радиусыг нь харгалзан R, R' гэвэл синусийн теоремоор



$(AB - AC) / BC - (AM - AC) / MC = 2R \sin \gamma / 2R \sin \beta / (2R \sin \alpha) - (2R' \sin \gamma - 2R' \sin \beta') / (2R' \sin \alpha') = \sin((\gamma - \beta)/2) / \sin((\gamma + \beta)/2) - \sin((\gamma - \beta')/2) / \sin((\gamma + \beta')/2) = 0, 5 * (\cos((\beta + \beta')/2) - \cos((2\gamma - \beta + \beta')/2) - \cos((\beta + \beta')/2) + \cos((2\gamma + \beta - \beta')/2)) / (\sin((\gamma + \beta)/2) * \sin((\gamma + \beta')/2)) = \sin \gamma \sin(\beta' - \beta) / (\sin((\gamma + \beta)/2) \sin((\gamma + \beta')/2)) \geq 0, \implies (AB - AC)MC \geq (AM - AC)BC$

Математикийн олимпиад №17

гэж батлах зүйл гарав. Энд $\beta' \geq \beta$ гэдгийг ашигласан юм.

Баталгааны явцаас $\beta = \beta'$ буюу M цэг B оройтой эсвэл $\gamma = \beta'$ буюу M нь C оройтой давхцах үед л тэнцэлдээ хүрэх нь харагдаж байна.

2-р бодолт. Птолемейн теоремыг хэрэглэвэл: $AC \cdot BM + AB \cdot MC \geq AM \cdot BC$
 $\Leftrightarrow AC(BC - MC) + AB \cdot MC \geq AM \cdot BC \Leftrightarrow (AB - AC)MC \geq (AM - AC) \cdot BC$
 $ABMC$ нь тойрогт багтсан 4 өнцөгт байх үед тэнцэлдээ хүрэх учир M нь B юмуу C -тэй давхцах үед дээрх тэнцэтгэл биш тэнцэлдээ хүрэх юм.

Л. ХАДХҮҮ

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН XXIX ОЛИМПИАДЫН IX АНГИЙН IY ДАВААНЫ БОДЛОГУУД

A-1 /Д.-Хашбаяр. МУҮИС-ийн оюутан/. $n \times n$ квадратын нүд бүрийг аль ч 2 мөр нь ялгаатай байхаар будав. Тэгвэл үлдсэн тэгш өнцөгтийн мөр бүр мөн л ялгаатай будагдсан байхаар нэг баганыг дарж болохыг батал.

A-2 /Сандагдорж, УБИС-ийн оюутан/. $a_1, a_2, \dots, a_k$ ба $b_1, b_2, \dots, b_k$ зэрэг тоонууд нь $\Sigma_{k=1}^n a_k = \Sigma_{k=1}^n b_k$ нөхцөлийг хангадаг бол

$$\Sigma_{k=1}^n a_k^3 / (\Sigma_{k=1}^n a_k^2 + \Sigma_{k=1}^n b_k^2) \geq 1/3 \cdot \Sigma_{k=1}^n a_k$$

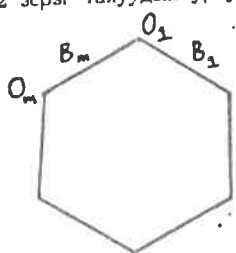
тэнцэтгэл биш биелэхыг батал.

A-3 /А. Хашбаатар. МУҮИС/. $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн хувьд $AC = 25\sqrt{2}$, $BD = 12\sqrt{2}$, $AD = 13$, $BC = 37$ ба AB, DC талуудын уртууд анхны тоо бол $\angle ABD = \angle DBC + \angle BCD$ гэж батал.

B-1 /Л. Оюунцэцэг. ШУА/. 22 хүүхэд шалгалтанд оржээ. Шалгалтын билет бүр 3 бодлоготой ба бодлого бүр 0-5 онооны үнэлгээтэй. Нэг хүүхдийн бодлого бүрийн оноо нөгөө хүүхдийн харгалзах бодлого бүрийн онооноос ихгүй байх 2 хүүхэд олдохыг үзүүл.

B-2 /Д. Нямсүрэн. Дундговь/. 29×1993 тэгш өнцөгтөд: $a/736$ цэг, $b/639$ цэг шидэхэд хоорондох зай нь 13-аас ихгүй 2 цэг олдохыг батал.

B-3 /Ц. Лувсандорж. УБИС/. Гүдгэр 4 өнцөгтөд багтсан тойргийн төвөөс уул 4 өнцөгтийн аль нэг эсрэг 2 талуудын дундаж цэг хүртэлх зайнууд тэнцүү бол нөгөө 2 эсрэг талуудын уртууд тэнцүү болохыг батал.

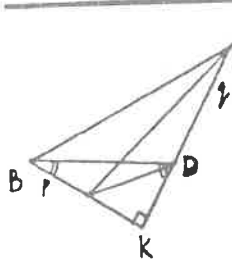


Бодолт. A-1. Эсрэгээс нь тийм багана олдохгүй гэж үзвэл дурын баганыг дарахад ядаж хоёр мөр адил байна. Иймд багана бүрд уг мөрүүдийг харгалзуулъя. Мод нь k ирмэгтэй бол $k+1$ ширхэг оройтой байдаг тул багануудыг 2 ирмэг, мөрүүдийг орой гэвэл ядаж нэг цикл олдоно. Энэ цикл m оройтой байг. Энд O_1, O_2 нь 1-р нүдээрээ г. м O_i ба O_{i+1} ($i < m$) нь i -р нүдээрээ л ялгаатай. Эндээс O_1 ба O_m мөрийн m -р нүд адил ба m -р баганыг дарахад хоорондоо тэнцэх тул бусад нүднүүд нь харгалзан тэнцүү болох учир O_1 ба O_m -ыг ялгаатай будсан гэдэгт харшилна.

$$\begin{aligned} A-2. \quad \Sigma_{k=1}^n a_k^3 / (\Sigma_{k=1}^n a_k^2 + \Sigma_{k=1}^n b_k^2) &= \Sigma_{k=1}^n (a_k^3 - b_k^3 + b_k^3) / (\Sigma_{k=1}^n a_k^2 + \Sigma_{k=1}^n b_k^2) = \\ &= \Sigma_{k=1}^n (a_k - b_k) + \Sigma_{k=1}^n b_k^3 / (\Sigma_{k=1}^n a_k^2 + \Sigma_{k=1}^n b_k^2) = \Sigma_{k=1}^n b_k^3 / (\Sigma_{k=1}^n a_k^2 + \Sigma_{k=1}^n b_k^2) = \\ &= \Sigma_{k=1}^n a_k^3 / (\Sigma_{k=1}^n a_k^2 + \Sigma_{k=1}^n b_k^2) - (1/3) \Sigma_{k=1}^n a_k = (1/2) \cdot (\Sigma_{k=1}^n (a_k^3 + b_k^3) / (\Sigma_{k=1}^n a_k^2 + \Sigma_{k=1}^n b_k^2) - \\ &= (1/3) \cdot \Sigma_{k=1}^n (a_k + b_k)) = (1/2) \cdot \Sigma_{k=1}^n (a_k + b_k) ((a_k^2 - a_k b_k + b_k^2) / (\Sigma_{k=1}^n a_k^2 + \Sigma_{k=1}^n b_k^2) - 1/3) = \\ &= (1/3) \cdot \Sigma_{k=1}^n (a_k + b_k) (a_k - b_k)^2 / (\Sigma_{k=1}^n a_k^2 + \Sigma_{k=1}^n b_k^2) \geq 0 \end{aligned}$$

гэж батлах зүйл гарав. $a_k = b_k$ үед тэнцэлдээ хүрэх нь ойлгомжтой байна.

A-3. $AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2 = 1538 \Rightarrow$ Косинусын теоремыг хэрэглэвэл: $x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha + (x+p)^2 + (y+q)^2 - 2(x+p)(y+q) \cos \alpha = x^2 + (y+q)^2 - 2x(y+q) \cos \alpha + (x+p)^2 + y^2 - 2(x+p)y \cos \alpha$



$$\begin{aligned} & \epsilon \Rightarrow 2pq\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ \Rightarrow \\ & \begin{cases} (x+p)^2 + y^2 = (12/2)^2 = 288 \\ x^2 + y^2 = 13^2 = 169 \\ x^2 + (y+q)^2 = (25/2)^2 = 1250 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ x = (1/2)(119/p - p) \\ y = (1/2)(1081/q - q) \end{cases} \Rightarrow \\ & \begin{cases} p(p+2x) = 119 \\ x^2 + y^2 = 169 \\ q(q+2y) = 1081 \end{cases} \Rightarrow 0,25 \cdot (119/p - p)^2 + 0,25 \cdot (1081/q - q)^2 = 169 \Leftrightarrow \\ & (*) (p^2 + q^2)p^2q^2 - 2(119 + 1081 + 338)p^2q^2 + 119^2q^2 + 1081p^2 = 0 \end{aligned}$$

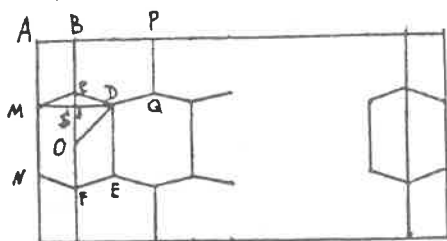
Одоор, q нь анхны тоонууд гэдгийг тооцвол: (I). $p=q$ (II). $119:p, 1081:q$ гэсэн 2 боломж гарна. $p=q$ үед (*) нь биквадрат тэгшитгэл болох ба энэ нь шийдгүйг хялбар шалгаж болно. (II) тохиолдолд $p \in \{7, 17\}, q \in \{23, 47\}$ байна. Гэтэл $p=17$ үед $x < 0, q=47$ үед $y < 0$ болох учир $p=7, q=47, x=5, y=12$ болно. Иймд $KB=p+x=12=y=KD$ буюу $\angle ABD = \angle KDB = \angle DBC + \angle BCD$ гэж батлах зүйл гарч байна.

Б-1. Хүүхдийн тоо 27-гоос ихгүй үед дурдсан чанартай 2 сурагч олдохгүй байж болохыг дараах эсрэг жишээнээс харж болно. Үүнд: Сурагчдын I, II, III бодлогоос авсан оноог харгалзан x, y, z гэж тэмдэглэвэл:

Сурагч №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
оноо																											
x	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	
y	2	3	4	5	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	0	1	2	
z	5	4	3	2	5	4	3	2	1	5	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0	3	2	1	0	2	1	0

Мөн сурагчдын тоо 28-аас багагүй үед дурьдсан чанартай хоёр сурагч олдохыг ч баталж болно. Үүнийг уншигчид бие дааж батлаарай.

Иймд 22 сурагч шалгалтанд орсон үед дурьдсан чанартай хоёр сурагч олдох албагүй. Бодлогын тавилт буруу байжээ.

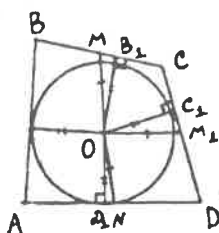


Б-2 /Ү. Отгонбаярын бодолт/.

29х1993 тэгш өнцөгтөө зурагт үзүүлснээр $213 + 212 + 213 = 638$ хэсэгт хуваая. Үүнд: $AB = HG = 0,5BP = (1993/212) : (1/2) = 1993/424, CF = BC = FG = MN = 8$ байхаар сонгосон болно. Тэгвэл Дирихлейн зарчим ёсоор а), б) аль ч тохиолдолд аль нэг дүрсэд нь 2 цэг орно. Мөн MCDEFN хэлбэрийн 6 өнцөгтөөр ABCM ба BPQDC хэлбэрийн

дүрсүүдийг бүрхэж болно. Иймд MCDEFN 6 өнцөгтийг 13 радиустай дугуйд агуулж болохыг баталбал бодлого бодогдоно. Үүний тулд CF хэрчмийн дундаж цэгийг O гэвэл $OD \leq 13/2$ гэж батлахад хангалттай. $OS = MN/2 = 4$ учир $OD^2 = OS^2 + SD^2 = 4 + (1993/424)^2 < 38,1 < 42,25 = 169/4 = (13/2)^2$ гэж батлах зүйл гарав.

II Бодолт. Зөвхөн б) хэсгийг бодоход хангалттай.



Эсрэгээс нь бүх цэг 13-аас их зайтай гэж үзье. Тэгвэл цэг бүрд төвтэй 6,5 радиустай тойрог татахад аль ч хоёр нь үл огтлолцоно. Эдгээр тойргоор хашигдсан хэсгийн талбайг S гэвэл $S = 639 \cdot \pi (13/2)^2 = 107991 \cdot \pi/4$ байна. Өгөгдсөн тэгш өнцөгтийн тал тус бүрийг гадагш нь 6,5 нэгжээр тавихад үүсэх тэгш өнцөгтийн талбай: $S_{т.ө} = 42 \cdot 2006 = 84252 > S$ байх ёстой. Гэтэл $84252 < 107991 \cdot \pi/4$ ба $(4 \cdot 84252/107991 < 3,13 < \pi)$ учир сүүлийн тэнцэтгэл биш худлаа болж харшлалд хүрэв.

Б-3. $BM=MC, AN=ND, OM=ON$ гэж өгсөн OMB, OND ,

Математикийн олимпиад №17

тэгш өнцөгт гурвалжнуудаас Пифагорын теорем ёсоор $MB_1 = D_1N$ байна. Хэрэв $MB_1 = C_1M_1$ байхаар M_1 цэгийг CD тал дээр авбал $M_1D = C_1D - C_1M_1 = DD_1 - ND_1 = DN$ $M_1C = M_1C_1 + C_1C = MB_1 + B_1C = MC = > CD = M_1D + M_1C = DN + MC = 1/2(AD + BC)$ болно. Үүнтэй яг ижлээр $AB = AN + BM = (1/2)(AD + BC) = > CD = AB$ гэж батлах зүйл гарна.

Б. БАТЦЭНГЭЛ

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХІХ ОЛИМПИАДЫН Х АНГИЙН

ІІІ ДАВААНЫ БОДЛОГУУД

А 1 1 1 1 1 1 1 1
2 2 2 2 2 2 2 2
3 3 3 3 3 3 3 3
4 4 4 4 4 4 4 4
5 5 5 5 5 5 5 5
6 6 6 6 6 6 6 6
7 7 7 7 7 7 7 7
8 8 8 8 8 8 8 8
9 9 9 9 9 9 9 9

А1. А квадратын төвөөс В квадратын төвд очдог зүү- нээсбаруун тийш эсвэл дээрээс доошоо чиглэсэн квад- ратын төвүүдийг дайрсан замуудыг авч үзье. Зам дээр орших тоонуудын нийлбэр 111 байх хэдэн зам байх вэ?

А-2. AD ба CE нь ABC гурвалжны медиан болно. Хэрэв $\angle BAD = \angle BCE = \alpha$ бол $\angle ABC$ -г а) $\alpha = 30^\circ$ б) $\alpha = 45^\circ$ үед бодож ол!

А-3. Хавтгай дээр аль ч гурав нь нэг шулуун дээр үед бодож ол! А. 3. Хавтгай дээр аль ч гурав нь нэг шулуун дээр үед бодож ол! А. 3. Хавтгай дээр аль ч гурав нь нэг шулуун дээр үед бодож ол!

тэдгээрт оройтой 2 ширхэг үл огтлолцох гүдгэр дөрвөн өнцөгт заавал олдох уу?

Б-1. Аль нь ч 1993-аас хэтрэхгүй 667 ширхэг натурал тоо өгөгджээ. Тэгвэл тэдгээрийн аль нэг хоёрынх нь ялгавар 4, 5, 7-ийн аль нэгтэй тэнцүү болохыг батал.

Б-2. ABC гурвалжны хавтгайд M цэг өгөгджээ. $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ бол $(b+c)MA^2 + (a+c)MB^2 + (a+b)MC^2 \geq (1/2)(a^2 + b^2 + c^2 + abc)$ байна гэдгийг батал.

Б-3. Хавтгай дээр өгөгдсөн аль ч гурав нь нэг шулуун дээр үл орших 7 ширхэг цэгийн аль нэг гурав нь элдэв талт гурвалжны орой болж чадахыг батал.

Бодолт. А-1. Зам дээр бүх цифрууд дор хаяж нэг нэг тааралдах нь ойлгомжтой. Иймд тэр 9-өөс бусад 8 тооны нийлбэр $111 - (1 + 2 + \dots + 9) = 66$ байх ёстой. Өөрөөр хэлбэл бид $\sum_{i=1}^9 x_i = 66$

тоог олох ёстой. $x_i = 9 - y_i$ гэвэл тэгшитгэл нь $\sum_{i=1}^9 y_i = 6$

$0 \leq y_i \leq 8$ болно. Энд нэгэнт $\sum_{i=1}^9 y_i = 6$ тул $0 \leq y_i \leq 8$

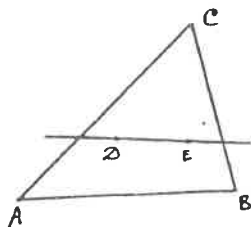
гэсэн шаардлага нь ердөө л $0 \leq y_i$ гэсэн шаардлагаар солигдоно. Одоо энэ тэгшитгэлийн шийдийг хялбар

тоолж болох бөгөөд шийдийн тоо нь 6-г натурал тоонуудын нийлбэрт задлах боломжийн тоо буюу $p(6) = 11$ -тэй тэнцүү. Жишээ болгон $6 = 2 + 2 + 1 + 1$ задралд харгалзах замыг зурагт үзүүлэв.

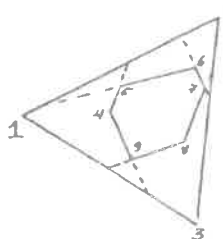
А-2. $\angle BAD = \angle BCE$ тул $AEDC$ трапец нь тойрогт багтана. Эндээс $\angle EAC + \angle EDC = \pi$ буюу $\angle EAC = \angle DCA$ болж ABC гурвалжин адил хажуут гурвалжин боллоо. Эндээс $BD = (1/2)AB$ юм. $ABC = \beta$ гэж тэмдэглээд ABD гурвалжинд синусын теорем бичвэл $AB / \sin(\alpha + \beta) = BD / \sin \alpha$ буюу $\sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha$ болно.

а) $\alpha = 30^\circ$ бол дээрх тэгшитгэлээс $\sin(30^\circ + \beta) = 1$ буюу $\beta = 60^\circ$ болно.

б) $\alpha = 45^\circ$ байж чадахгүй нь $\sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \leq 1$ гэдгээс харагдана. Иймд энэ тохиолдолд β олдохгүй.



А-3. а) "Хавтгай дээр өгөгдсөн аль ч гурав нь нэг шулуун дээр үл орших 5 цэгийн аль нэг дөрвөн гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн оройнууд болж чадна" гэсэн туслах бодлогыг эхлээд баталъя. Аливаа цэгүүдийн гүдгэр бүр- хэлт гэж уг цэгүүдийг агуулсан хамгийн бага гүдгэр дүрсийг ойлгодог. Тэгвэл дээрх бодлогыг өгөгдсөн 5 цэгийн гүдгэр бүрхэлт нь гурвалжин байх тохиолдолд батлахад хангалттай. Уг таван цэгийн гүдгэр бүрхэлт нь ABC гурвалжин ба тэр гурвалжин дотор D, E цэг байдаг гэе. DE шулууныг татвал тэр шулуун ABC гурвалжны



хоёр талыг огтолж нэг талыг нь огтлохгүй. Огтлогдоогүй тал нь AB бол $ADEB$ дөрвөн өнцөгт нь олох ёстой дөрвөн өнцөгт болж чадна. Одоо бодлогоо бодъя.

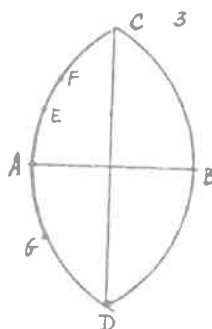
Өгөгдсөн 10 цэгийг хос хосоор нь холбоод нийт C_{10}^2 шулуун татаж болох ба энэ шулуунуудтай параллель биш дурын шулуун татахад /тийм шулуун тоолшгүй олон олдох нь ойлгомжтой/ тэр шулуун дээр өгөгдсөн 10 цэгээ хамгийн ихдээ нэг нь л оршин байж болно. Энэ шулуунуудтай параллель шулуунуудыг татсаар байхад бид хэзээ нэгэн цагт уг шулууны нэг талд нь 5, нөгөө талд нь мөн 5 цэг байхаар

болгож чадна. Тэгвэл өмнө баталсан туслах бодлогын ачаар 5 цэг бүрээс нь гүдгэр дөрвөн өнцөгт олж чадна, тэдгээр дөрвөн өнцөгтүүд огтлолцохгүй нь илэрхий.

б) Олдох албагүй нь зураг дээрх 9 цэгийн жишээнээс харагдана. Нэмж сонирхуулахад, үл огтлолцох 2 ширхэг гүдгэр дөрвөн өнцөгт олддоггүй 9 цэгийн хувьд гүдгэр бүрхэлт нь заавал гурвалжин байдаг юм.

Б-1. Энэ бодлогын батлах зүйл буруу байсан бөгөөд буруу бичсэн шалтгаан нь бичигч надад оногдох тул энэ даваанд оролцсон бүх сурагчдаас түмэнтээ уучлал хүлцье. Үнэхээр $11k+1, 11k+2, 11k+3, 11k+4, 0 \leq k \leq 180$ гэсэн 724 тооны аль ч 667-г авахад бодлогд батлах ёстой нөхцөлийг биелүүлэхгүй нь ойлгомжтой юм. Бодлогын зөв томъёолол нь "аль нь ч 1993-аас хэтрэхгүй 667 ширхэг натурал тоо өгөгджээ. Тэгвэл тэдгээрийн аль нэг хоёрынх нь ялгавар 3, 4, 7-ийн аль нэгэнтэй тэнцүү болохыг батал гэх байсан ба Дирихлейн зарчим баримтлан бодно.

Б-2. $(b+c)\overline{MA} + (a+c)\overline{MB} + (a+b)\overline{MC}$ -ийг d -ээр тэмдэглэе. Тэгвэл мэдээж $(d, d) \geq 0$ байна. Энэ тэнцэлбишдээ d -ийн тодорхойлолтыг орлуулаад $(\overline{MA}, \overline{MB}) = (1/2)(MA^2 + MB^2 - c^2)$; $(\overline{MA}, \overline{MC}) = (1/2)(MA^2 + MC^2 - b^2)$; $(\overline{MB}, \overline{MC}) = (1/2)(MB^2 + MC^2 - a^2)$ гэсэн косинусын теоремоос шууд мөрдөх тэнцлийг ашиглавал $2(a+b+c)(MA^2(b+c) + MB^2(a+c) + MC^2(a+b)) - (a+b+c)(a^2+b^2+c^2+abc) \geq 0$ гэсэн батлах ёстой тэнцэл биш гарна. Баталгаанаас уг тэнцэл биш тэнцэлдээ хүрэхийн тулд $d=0$ байх ёстой нь ойлгомжтой бөгөөд $d=0$ байхын тулд M цэг нь ABC гурвалжны Нагеллийн цэг байх ёстой. /Гурвалжны гурван оройг дайрсан тус бүр нь гурвалжны периметрийг хагаслан хуваах шулуунууд нэг цагт огтлолцогийг Чевийн теорем ашиглан хялбар баталж болох бөгөөд тэр огтлолцлын цэгийг Нагеллийн цэг гэж нэрлэдэг/.



Б-3. Өгсөн цэгүүдээс хоорондох зай нь хамгийн их байх хоёр цэгийг сонгон авч A, B гэж тэмдэглэе. A, B цэгүүд дээр төвтэй AB радиустай тойргууд C, D цэгт огтлолцдог гэж үзье Эсрэгээс өгөгдсөн 7 цэгийн аль ч гурав нь адил хажуут гурвалжны орой болдог гэвэл A, B -ээс бусад 5 цэг нь CAD, CBD нумууд дээр эсвэл CD хэрчим дээр орших ёстой болно. CD хэрчим дээр хамгийн ихдээ л 2 цэг байж болох тул CAD, CBD нумууд дээр A, B, C, D цэгүүдээс ялгаатай дор хаяж 3 цэг оршин байна /энд C, D цэгүүдийг CD хэрчимд тооцож буйг анхаарна уу?/ Аль нэг нум дээр нь тухайлбал, CAD нум дээр E, F, G гурван цэг оршдог гэвэл A, E, F, G цэгүүдийн хоорондох нумууд тэнцүү байх ёстой. Тэгвэл зурагт үзүүлсэн CFG гурвалжин элдэв талт болж зөрчил үүснэ. Иймд уг 3 цэгийн нэг нь нэг нум дээр, хоёр нь нөгөө нум дээр байх болно.

Тодорхой болгоод $E, F \in CAD, G \in CBD$ гэж үзье.
1) E, F нь A -ийн хоёр талд байдаг бол EG, FG хэрчмүүдийн аль нэг нь AB хэрчмийг огтолно. Тэр огтолж буй хэрчим нь FG бол $FG > AB$ -г батлахад төвөггүй ба $FG > AB = FB = BC > BG$ тул FG гурвалжин элдэв талт болно.

2) E, F нь A -ийн нэг талд байвал AEG, AFG гурвалжнууд адил хажуут байхын тулд заавал $AE=EG, AF=FG$ болох бөгөөд өөрөөр хэлбэл, E, F цэгүүд нь AG -ийн дундаж дээр босгосон перпендикулярын CAD нумыг огтлох цэгтэй давхцах болж E, F нь ялгаатай гэдэгт зөрчнө.

УМӨ ХХІХ-ИЙН Х АНГИЙН ІҮ ДАВААНЫ БОДЛОГУУД.

А-1 /В. Баясгалан БИС багц/. Хавтгайн аль ч хоёрын нь хоорондын зай бүхэл байх n ялгаатай цэгийг $\sqrt{6n/17}$ -1 радиустай тойрогт багтааж болохгүйг батал.

А-2 /В. Адъяасүрэн ШУА Э. Ш. А/. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ тоонуудын хувьд $f(\sqrt{x^2+y^2}) = 1993 f(x)f(y)$ байх $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ бүх тасралтгүй функцийг ол.

А-3 /А. Хашбаатар/. $\triangle ABC$ -ийн AC тал дээр орших P цэгээс AB, BC талд буулгасан перпендикулярын суурийг харгалзан N, L -ээр, BP шулуун ABC гурвалжинг багтаасан тойрог хоёрын огтлолцлыг M гэе. $S_{LMNB} = S_{ABC}$ байх бүх P цэгийг ол.

Б-1 /Р. Отгонбаатар/. Хоорондоо нэгжзайтай P, Q цэгүүд өгөгджээ. Огторгуйн аливаа $A_1, \dots, A_n$ цэгүүдийн хувьд $S_i = \sum_{j=1}^n PA_j, S_i = \sum_{j=1}^n QA_j$ гэж тэмдэглэвэл $n + (S_1^2 - S_2^2) / n \leq 2 \max\{S_1, S_2\}$ гэж батал.

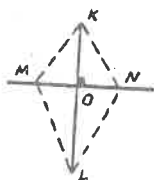
Б-2. /В. Ватцэнгэл/. ABC гурвалжинтай төсөөтэй ямар нэг гурвалжинг оройнууд нь зангилаанууд дээр байхаар дөрвөлжин шугамтай цаасан дээр байрлуулж болдог байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $S/a^2, S/b^2, S/c^2$ рационал тоонууд байх явдал гэж батал. Энд S нь ABC гурвалжны талбай a, b, c нь талууд.

Б-3 /Түвшинтулга/. AB, CD суурьтай $ABCD$ трапец ба K цэг өгөгдөв. Хэрэв $AL \parallel CK, LE \parallel BC, DL \parallel KM, M \in BC$ бол $S_{AKD} = S_{AMD}$ гэж батал.

Бодолт. А-1. Хэрэв $n \leq 3$ бол батлах зүйл илэрхий. Иймд $n > 3$ гэе. Өгсөн цэгүүдийн хамгийн хол хоёрынх нь хоорондох зайг m гэе. Тэгвэл энэ хоёр A, B цэгүүдээс $1, \dots, m$ радиустай тойргуудыг огтлолцлын цэгүүдийн тоо $(m+1)^2$ байх бөгөөд анх өгсөн n цэг эдгээр цэгүүдийн олонлогт агуулагдана.

Эсрэгээс нь n ширхэг өгсөн цэгийг $R = \sqrt{6n/17}$ -1 радиустай тойрогт багтааж болдог гэж үзье. Тэгвэл $m \leq 2R$ байна.

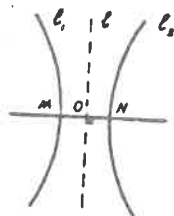
1/ Өгсөн n цэг нэг шулуун дээр оршдог байг. Тэгвэл $n \leq m+1$ байх учир $n-1 \leq m \leq 2R = 2\sqrt{6n/17}$, $(n+1)^2 \leq 24n/17 < 2n$, $n^2 + 1 < 0$ болж зөрчил үүснэ.



2/ Өгсөн n цэгүүд нэг шулуун дээр оршдоггүй бөгөөд аль нэг хоёрынх нь зай нэгтэй тэнцүү байг. Хэрэв $|MN| = 1$ гэвэл MN шулуун дээр оршдоггүй K цэгийн хувьд MNK гурвалжнаас тэнцэтгэл биш бичвэл $||MK| - |NK|| < 1$ болох юм. Эндээс $|MK| = |NK|$. Иймд MN шулуун дээр оршдоггүй цэг бүр MN хэрчмийн дундаж дээр буулгасан перпендикуляр дээр оршино.

Энэ перпендикуляр дээр ялгаатай хоёр цэг K, L оршиж байх боломжгүй. Учир нь $|MK| = \sqrt{1/4 + |OK|^2}$ -бүхэл, $|ML| = \sqrt{1/4 + (|KL| - |OK|)^2}$ -бүхэл, $|KL|$ -бүхэл бол $2|LK| - |OK|$ -бүхэл байна. Иймд $|OK| = m/n$, $(m, n) = 1$ байна. Эндээс $n^2 \mid 4$ болох бөгөөд $n = 1$, эсвэл $n = 2$ байх боломжтой. Гэвч эдгээр боломж нь биелэгдэхгүй нь илэрхий. Иймд анх өгсөн n цэг нь MN

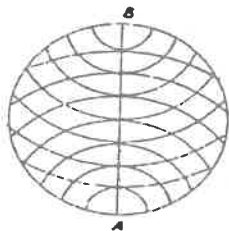
шулуун дээрх, мөн түүний гадна орших ганц цэгүүдээс тогтох болж байна. Хэрэв MN шулуун дээрх цэгүүдийн захын хоёр цэгийг P, Q гэвэл $|PQ| \leq m$, $|QK| \leq m$, $|PK| \leq m$ учраас $m+2 \geq n$ байх нь илэрхий. Эндээс $2R+2 \geq n$, $n^2 \leq 24n/17 < 2n$, $n < 2$ болж зөрчил үүснэ.



3. Өгсөн n цэг нэг шулуун дээр оршдоггүй бөгөөд аль ч хоёрын хоорондын зай хоёроос багагүй байг. Ямар нэгэн M, N цэгүүдийн зай хоёр байх тохиолдлыг авч үзье. Тэгвэл MN шулуун дээр оршдоггүй K цэгийн хувьд MNK гурвалжнаас тэнцэтгэл биш бичвэл $||MK| - |NK|| < 2$ байна. Эндээс MN шулуун дээр оршдоггүй аливаа цэг MN хэрчмийн дундаж дээр буулгасан L перпендикуляр, эсвэл $||MK| - |NK|| = 1$ байх K цэгээс үүсэх L_1, L_2 муруйнууд дээр оршино. L шулуун дээр ялгаатай хоёр цэг оршиж болохгүйг 2/ тохиолдлын адил

дээрхийн адил L_1, L_1', L_2 шулуун муруйнуудыг байгуулж болох бөгөөд L_1, L_2, L_1', L_2' уруйнууд хамгийн олондоо 4 цэгээр огтлолцоно. Иймд MN шулуун дээр орших цэгийн тоо $m+1$ тооноос хэтрэхгүй, MN шулуун дээр оршдоггүй цэгийн тоо 8-аас хэтрэхгүй болно. Эндээс $m+9 \geq n, 2R+9 \geq n$ байна. Нөгөө талаас, хэрэв $n \leq 11$ бол $R \leq \sqrt{611/17} - 1 < 1$ байх учраас авч үзэж буй n цэгийг R радиустай тойрогт багтааж болохгүй ($|MN|=2, |MN| \leq 2R$). Иймд $n \geq 12, 2\sqrt{611/17} - 1 + 9 \geq n, 2\sqrt{611/17} \geq n-7, 1,5n \geq (n-7)^2, 0 > n^2 - 15.5n + 49 \leq n \leq 11$ байна.

Иймд өгсөн n цэгийн хоорондох зайнуудын нэг нь хоёртой тэнцэж болох агаад бусад нь гурваас багагүй байх юм.



Одоо В цэгт төвтэй m радиустай тойргоор хашигдсан A төвтэй k ($0 \leq k \leq m$) радиустай нумуудыг авч үзье. Эдгээр нуман дээр орших цэгийн тоо $1 + \sum_{k=0}^m (\pi k/3 + 1)$ тооноос хэтрэхгүй. Үнэхээр k радиустай нумын урт πk тооноос хэтрэхгүй бөгөөд нумын цэгийн тоо $\pi k/3 + 1$ тооноос хэтрэхгүй нь илэрхий. Харин аль нэг нуман дээр өөр хоорондын зай нь хоёртэй тэнцүү хоёр цэг байж болох учраас дээрх үнэлгээ зөв. Иймд $n \leq 1 + m + (\pi/3)(m(m+1)/2) = (\pi/6)m^2 + ((\pi+6)/6)m + 1$.

$$n-1 \leq (2\pi/3)k^2 + ((\pi+6)/3)k, \quad n-1 < (2\pi/3)(k^2+2k) = (2\pi/3)(k+1)^2 - 2\pi/3,$$

Тайлбар. 1. Бодлогын бодолтосыг $k = \sqrt{\frac{117}{17}}$ гэж авч үзвэл $(-21/5) < (-21/5)(117/17)$, $1 < 17(41/17 - 1)$, $n < 0$ болж зөрчил үүсэн бодогдов.

2. Бодолтын 3/ хэсэгт үүссэн L_1, L_2 муруйг гипербол гэдэг. Гипербол нь хоёр асимптоттой байх бөгөөд хоёр гиперболын хоорондын асимптотууд хэвнээн огтлолцож байна. төдий тооны цэгээр огтлолцоно. Иймд хоёр ижил гипербол хамгийн ихдээ 4 цэгээр огтлолцох нь хялбар батлагдах юм. Эсвэл гиперболын алгебр тэгшитгэлийг бичвэл хоёрдугаар зэргийн тэгшитгэлүүд үүсэх бөгөөд огтлолцлын цэгийг олохын тулд нэгэнд нь орлуулбал дөрөв дүгээр зэргийн алгебр тэгшитгэл үүсэх тул дөрвөөс илүүгүй шийдтэй гэж баталж болох юм.

А-2. Бодлогын нөхцөлийг $f(x) = 1993^{x/2}$ функц хангахыг харуулъя.

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}) = 1993 \cdot \frac{(\sqrt{x^2 + y^2})^4}{2} = 1993 \cdot \frac{x^4}{2} + \frac{y^4}{2} + x^2 y^2 = 1993 \cdot \frac{x^4}{2} + 1993 \cdot \frac{y^4}{2} + 1993 \cdot \frac{y^2}{2} = 1993 \cdot f(x) \cdot f(y)$$

боллоо. Иймд $f(x) = 1993^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \varphi(x^2)}$ хэлбэртэй гэж үзэж чадна. Үүнийг тэгшитгэлд орлуулбал $\varphi(x^2 + y^2) = \varphi(x^2) \varphi(y^2)$ болно. Энэ функц нь $\varphi(x^2) = a^{\frac{x^2}{1993}}$ гэдгийг хялбархан баталж болно. $f(x) = 1993^{\frac{1}{2} + a^{\frac{x^2}{1993}}}$, $a = 1993^b$ байна гэж үзье. $f(x) = 1993^{\frac{1}{2} + \frac{b}{1993} x^2}$ боллоо.

$$A-3. \quad S_{LMNB} = S_{ABC} \iff S_{PLC} + S_{PAN} = S_{MPL} + S_{MPN} \quad (1)$$

$$S_{PLC} = PL \cdot LC/2, S_{PAN} = NP \cdot AN/2, S_{MPL} = PL \cdot LE/2, S_{MPN} = NP \cdot FN/2 \text{ тул (1) -д орлуулбал:}$$

$$PL \cdot LC/2 + NP \cdot AN/2 = PL \cdot LE/2 + NP \cdot FN/2 \Rightarrow PL / NP = AF / CE \quad (2)$$

$$\Delta MBF \sim \Delta PBN; \Delta MBE \sim \Delta PBL \implies PL/NP = ME/MF \quad (3)$$

$$\angle ABC + \angle CMF + \angle CME = 180^\circ$$

$$\angle ABC + \angle CMF + \angle AMF = 180^\circ \quad \Rightarrow \Delta AMF \sim \Delta CME \Rightarrow ME/MF = CE/AF$$

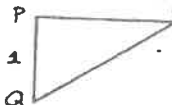
болно. Энд (2) ба (3)-ыг ашиглавал: $ME=MF, CE=AF \implies \triangle MAF=\triangle MCE$ байх

ба $S_{MAF} = S_{MCE}$ байна. $S_{MAF} \neq 0$ байхад $AM = MC$ тул P цэг биссектрис дээр байна.
 $S_{MAF} = 0$ үед AM, FM ба CM, EM нь давхцах тул P цэг диагональ дээр байна.

Б-1. Гурвалжны тэнцэл биш бичвэл $PA_1 + QA_1 \geq 1$,

$$\Sigma_1^*(PA_i + QA_i - 1) \geq 0, \Sigma_1^*(PA_i - QA_i - 1) \leq 0 \text{ болно.}$$

$$0 \leq \Sigma_i^* (PA_i + QA_i - 1) = S_p + S_q - n$$

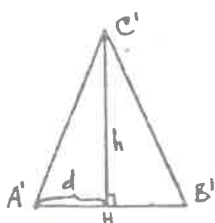
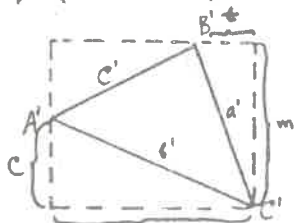


Математикийн олимпиад №17

$$0 \geq (S_p + S_q - n)(S_p - S_q - n) = (S_p - n)^2 - S_q^2 \text{ болно.}$$

$$S_q^2 \geq S_p^2 - 2S_p n + n^2 \Rightarrow S_p^2 - S_q^2 + n^2 \leq 2S_p n, \max\{S_q, S_p\} = S_p \text{ гэж үзсэн тул } S_p \geq S_q \text{ билээ.}$$

$$(S_p^2 - S_q^2) / n + n \leq 2S_p = 2\max\{S_q, S_p\} \text{ боллоо.}$$



Б-2. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ перпендикулярыг нөхцөл ёсоор байгуулсан гэе.

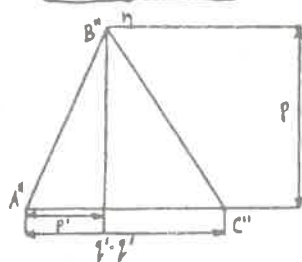
$$(a')^2 = m^2 + n^2 \in \mathbb{N}$$

$$(b')^2 = n^2 + e^2 \in \mathbb{N}$$

$$(c')^2 = (m-e)^2 + (n-t)^2 \in \mathbb{N}$$

$$S' = mn - mt/2 - ne/2 - (m-e)(n-t)/2 = (mn - et)/2 \in \mathbb{Q}$$

$$2 = (mn - et)/2 \in \mathbb{Q}$$



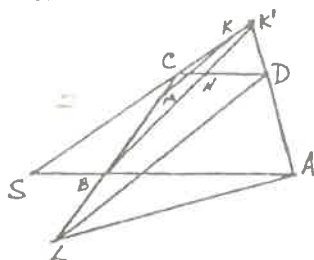
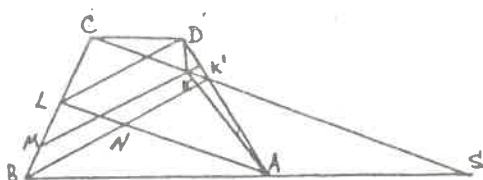
Эндээс S/a^2 ; S/b^2 ; S/c^2 рационал гэдэг нь илэрхий. Нэг тал нь нэгжтэй тэнцүү ABC гурвалжинтай төстэй гурвалжин авч үзье. $c' = 1$ гэе. $S'/(c')^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow S \in \mathbb{Q}$ гэж гарна. Мөн $S \in \mathbb{Q}$; $S'/(b')^2$, $S'/(a')^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow (b')^2, (a')^2 \in \mathbb{Q}$ гэж гарна. Нөгөө талаас $S' = c'h/2 = h/2 \Rightarrow h \in \mathbb{Q}$, $h = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$, A' оройгоос өндрийн суурь хүртэлх зайг d гэвэл

$$d^2 = (b')^2 - h^2$$

$$(1-d)^2 = (a')^2 - h^2$$

$$2d - 1 = (b')^2 - (a')^2 \Rightarrow d = ((b')^2 - (a')^2 + 1)/2 \in \mathbb{Q}$$

$d = p'/q'$, $p', q' \in \mathbb{N}$ гэж үзэж болно. Иймд $A'B'C'$ гурвалжны $q'q$ коэффициенттэй гомотет бодлогын нөхцөл хангана.



Б-3. $СК \cap AD = \{K'\}$ гэе. $LD \parallel BK'$ гэж батлая.

а/ $СК \cap BA = \{S\}$, $BK' \cap AL = \{N\}$ гэвэл $\triangle CDK' \sim \triangle AK'S \Rightarrow DK'/K'A = CK'/K'S$ (1)

$LA \parallel CS$, $BN \in BK' \Rightarrow CK'/K'S = LN/NA$ (2) болно. (1), (2) -оос $DK'/K'A = LN/NA$ болж батлагдав.

б/ $CD \cap BK' = \{N\}$ гэвэл өмнөхийн адил $CB/BL = CN/ND$ болж батлагдана.

$LD \parallel BK' \Rightarrow S_{BLD} = S_{LKD}$, мөн $LD \parallel MK \Rightarrow S_{LMD} = S_{LDK} \Rightarrow S_{BMD} = S_{LKK'D}$ болов.

$KK' \parallel LA \Rightarrow S_{LKK'} = S_{AKK'}$ буюу $S_{LKK'D} = S_{DEA} \Rightarrow S_{BMD} = S_{DEA}$ болж бодлого бодогдов.

В. БАТЦЭНГЭЛ

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХІХ ОЛИМПИАДЫН БАГШ НАРЫН ІҮ ДАВААНЫ БОДЛОГУУД

А-1 / А. Хашбаяр-МУҮИС оюутан/. Натурал тооны аравтын бичлэгийн араас эсвэл дан 1, эсвэл дан 2 бичих замаар 29-д хуваагдах тоо болгон хувиргаж болно гэж батал.

А-2 /Б. Баясгалан-УБИС/. Аль ч хоёрынх нь хоорондох зай бүхэл байх n цэгийг $\sqrt{6n/17} - 1$ радиустай тойрогт багтааж болохгүйг батал.

А-3 /Ц. Лувсандорж-УБИС/. ABCD тетраэдрийн D орой нь үл хөдлөх ба ABC талс нь хавтгайгаар хөдөлдөг бол уг тетраэдрийг багтаасан бөмбөрцөгийн төвийн геометр байрыг ол.

Б-1 /Д. Пүрэвсүрэн-МУҮИС/. ABC гурвалжны AA₁, BB₁, CC₁ өндрүүдийг татав. AB₁C₁, BC₁A₁, CA₁B₁ гурвалжнуудын Эйлерийн шулуунууд нэг цэгт огтлолцохыг батал.

Б-2 /Б. Батцэнгэл-МУҮИС/. Дарааллын дэс дараалсан хэсэг гишүүдийг нь сонгон авч үлдсэн гишүүдийн аль нэг зэргэлдээ хоёрынх нь дунд эрэмбийг нь алдагдуулахгүйгээр байрлуулдаг үйлдэл байв /мөн аль нэг захад нь байрлуулж болно/. 1, 2, ..., n дарааллаас n, n-1, ..., 1 дараалалд хүргэдэг хамгийн цөөн үйлдлийн тоог $u(n)$ -ээр тэмдэглэе.

а/ $u(29) \leq 15$ болохыг батал.

б/ $u(n)$ -ийг ерөнхий тохиолдолд ол.

Б-3 /Д. Пүрэвсүрэн-МУҮИС/. Хоёр олон өнцөгтийн нэгийг нь хэсэглэн хуваагаад хооронд нь эвлүүлэх замаар нөгөөг нь гаргаж болдог бол тэдгээрийг ижил бүтэцтэй гэе. Тэгвэл нэгж талбайтай зөв 1993 өнцөгт ба нэгж талбайтай гурвалжин хоёрыг ижил бүтэцтэй гэж батал.

БОДОЛТ А-1. Өгсөн тоо нь А болог. Батлах зүйл маань $A11...1, A22...2$ тоонууд дотор 29-д хуваагддаг тоо бий гэдгийг харуулах ёстой билээ.

$A11...1 = A \cdot 10^n + (10^n - 1)/9 = ((9A + 1)10^n - 1)/9$ үүнтэй адилаар $A22...2 = ((9A + 2)10^n - 2)/9$ болно.

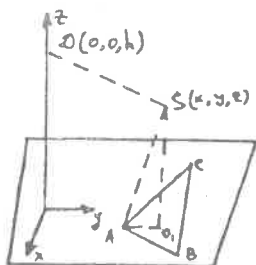
Лемм: $x \neq 0(29)$ бол $10^m = x(29)$ байх m гэсэн натурал тоо заавал олдоно.

Баталгаа: $10^1, 10^2, 10^3, \dots$ тоонуудыг 29-д хуваахад үлдэх үлдэгдлүүдийн дараалал $10^1, 10^2, 10^3, \dots$ дараалал үетэй байх нь ойлгомжтой ба үеийг нь Т гэвэл Фермагийн бага теорем ёсоор $10^{28} = 1$ тул Т нь 28-ыг хуваана. $10^4 = 28, 10^4 = 21$ байхыг хялбар шалгаж болох учир эндээс $T = 28$ болно. Үүгээр $\{10^1, 10^2, \dots, 10^{28}\} = \{1, 2, \dots, 28\}$ болох нь харагдлаа. Лемм батлагдлаа.

Одоо леммээ ашиглан бодлогоо бодъя.

а/ $9A + 1 \neq 0(29)$ бол $(9A + 1, 29) = 1$ болно. Эндээс $(9A + 1)B = 1(29)$ байх $B \neq 0(29)$ тоо олдоно. Тэр В-гийн хувьд лемм ёсоор $10^m = B(29)$ байх m тоо олдоно. Өөрөөр хэлбэл $(9A + 1)10^m = 1(29)$ буюу $29 \mid (9A + 1)10^m - 1$ юм. $(9, 29) = 1$ тул эндээс $29 \mid ((9A + 1)10^m - 1)/9$ болно.

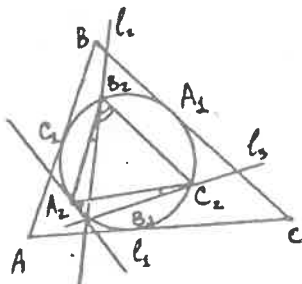
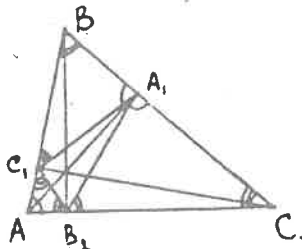
б/ $9A + 1 = 0(29)$ буюу $A = 16(29)$ үед $9a + 2 \neq 0(29)$ болно. Энэ тохиолдолд урд тохиолдолтой адилаар $29 \mid ((9A + 2)10^m - 2)/9$ байх m тоо олдохыг харуулж болно.



А-2. "УМО-29-ийн X ангийн IV давааны бодлогууд өгүүллийг үз.

А-3. Доройгоос ABC хавтгайд DO перпендикуляр буулгаад O-г огторгуйн тэгш өнцөгт координатын сис- темн эх. OD шулууныг Oz тэнхлэг болгон авъя. D нь $(0,0,h)$ координаттай болог. Хөдөлж буй ABC гурвалжныг багтаасан R радиустай (R-тогтмол) тойргийн төвийг $O_1(x, y, 0)$ гэвэл бидний сонирхож буй багтаасан бөмбөрцгийн төв нь $S(x, y, z)$ болно. $SD = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2} = SA = \sqrt{SO_1^2 + O_1A^2} = \sqrt{z^2 + R^2}$ тул эндээс (*) $z = (1/2h)(x^2 + y^2 + h^2 - R^2)$ болно. (*) нөхцөлийг хангах $S(x, y, z)$ цэг нь ABC гурвалжны багтаасан тойргийн төв $O_1(x, y, 0)$ болох үед ABCD тетраэдрийг багтаасан бөмбөрцгийн төв болж чадах нь ойлгомжтой тул үүгээр (*) нөхцөлийг хангах бүх цэг нь /параболоид/ бидний олох ёстой геометр байр боллоо.

В-1. Уг бодлогыг бодож П. Энхболдын нэрэмжит уран бодолтын тусгайшагнал хүртсэн багш Шаравын Мөнхцэцэг (В-1)-ийн бодолтыг сонирхуулъя.



$\Delta AA_1C \sim \Delta BB_1C$ гэдгээс $A_1C / AC = B_1C / BC$ буюу $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$ болно. Үүнтэй адилаар $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta AB_1C_1$ гэдгийг харуулна. ABC гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын цэгийг H гэе. HA, HB, HC хэрчмүүдийн дундаж цэгүүд буюу $AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C$ гурвалжнуудын багтаасан тойргуудын төвүүдийг A_2, B_2, C_2 гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $(A_2B_2) // (AB), (A_2C_2) // (AC), (B_2C_2) // (BC)$ байхаас гадна $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ цэгүүд нэг тойрог дээр оршдог /тэр тойргийг 9 цэгийн тойрог гэдэг ба түүнийг баталгааг И. Ф. Шарыгин "Задачи по геометрии" /планиметрия/ II хэсгийн 162-р бодлогоос үзнэ үү/.

$AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C$ гурвалжнуудын Эйлерийн шулуунуудыг L_1, L_2, L_3 гэвэл дээрх гурвалжнууд төсөөтэй учраас энэ шулуунуудын харгалзах талууд даа үүсгэх өнцгүүд тэнцүү байна. Тухайлбал, $L_2 \wedge (BA_1) = L_2 \wedge (B_2C_2) = L_1 \wedge (AB_1) = L_1 \wedge (A_2C_2)$ ба $L_2 \wedge (BC_1) = L_2 \wedge (A_2B_2) = L_1 \wedge (B_1C) = L_1 \wedge (A_2C_2)$ болно. Эхний тэнцлээс хэрэв $L_1 \wedge L_2 = X$ гэвэл $\angle X B_2 C_2 = \angle X A_2 C_2$ болох

тул X, A_2, B_2, C_2 нь нэг тойрог дээр буюу 9 цэгийн тойрог дээр орших болно. Үүнтэй адилаар дараагийн тэнцлээс $L_1 \wedge L_2 = Y$ цэг нь 9 цэгийн тойрогт харьяалагдах нь гарна. Ийнхүү L_3 шулуун ба 9 цэгийн тойрог нь X, Y, B_2 цэгүүдээр огтлолцох болсон тул $X = Y$ байна. Иймд L_1, L_2, L_3 шулуунууд нэг цэгт огтлолцлоо.

Б-2. 6/ хэсгийг шууд бодъё. $u(n) = [n/2] + 1$ болохыг баталъя / $n > 2$ үед/.
1/ $u(n) \leq [n/2] + 1$ болох нь n -сондгой ба $n = 2R + 1$ бол эхлээд эхний R ширхэг гишүүнийг аваад $R + 1, R + 2$ -р гишүүдийг алгасуулж $R + 3$ дугаар гишүүний өмнө хийнэ. Дараа нь 2-р гишүүнээс эхлэн R гишүүнийг авч, мөн хойд хоёрыг нь алгасуулан байрлуулна. R -р үйлдлээр R -р гишүүнээс нь эхлэн R гишүүнийг сонгон авч хойд хоёрыг нь алгасуулан байрлуулна. Эцсийн $R + 1$ -р үйлдлээр $R + 1$ -р гишүүнээс эхлэн R гишүүнийг сонгон авч хамгийн эхэнд байрлуулахад $1, 2, \dots, 2R + 1$ дараалал нь $2R + 1, 2R, \dots, 1$ болно. Уншигч таныг үүнд үнэмшүүлэхийн тулд $R = 3$ үед үйлдлүүдийг хийж үзүүлье.

$\overset{I}{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7} \rightarrow \overset{II}{4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 6\ 7} \rightarrow \overset{III}{4\ 3\ 6\ 5\ 1\ 2\ 7} \rightarrow \overset{IV}{4\ 3\ 2\ 7\ 6\ 5\ 1} \rightarrow 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1.$

$n = 2R$ бол 1-ийг хэвээр байлгаад бусдыг нь өмнөх тохиолдолд хийсэн шиг R үйлдэл хийхэд $1, n, n - 1, \dots, 2$ дараалалтай болно. Одоо нэгийг хамгийн эцэст байрлуулах үйлдэл хийхэд нийтдээ $R + 1 = [n/2] + 1$ үйлдэл хийгдэнэ.

2. $u(n) \geq [n/2] + 1$ болох нь $1, 2, \dots, n$ тоонуудын ямар нэгэн сэлгэмэл $\pi = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ өгөгдсөн үед $i_1, i_2, i_3, \dots, i_{n-1}, i_n$ гэсэн зэргэлдээ хоёр тооны ялгаварууд доторхи зэрэг тоонуудын тоог $f(\pi)$ гэж тэмдэглэе. Бид $\pi_0 = (1, 2, \dots, n)$ сэлгэмэлээс үйлдлүүд хийж $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m = (n, n - 1, \dots, 1)$ сэлгэмэлүүд гаргасан гэе. Батлах ёстой зүйл маань $m \geq [n/2] + 1$ буюу $m \geq (n + 1) / 2$ гэсэн гэсэн тэнцэл биш билээ.

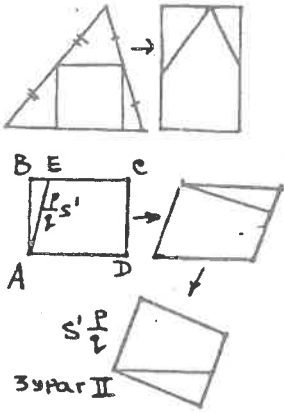
Лемма: 1 үйлдэл хийхэд $f(\pi)$ нь хамгийн ихдээ 2-оор өснө.

Баталгаа: Үйлдэл маань ямар нэгэн зэргэлдээ 2 хэсгийн байрыг солихтой адил гэдгийг анхаараад 1 үйлдэл хийхэд $\pi = (\dots a\ i_j \dots i_j\ j_b \dots)$ сэлгэмэл нь $\pi' = (\dots a\ j_i \dots j_i\ i_b \dots)$ болсон гэж саная. $(\dots a); (i_1, \dots, i_j); (j_i, \dots, j_b); (\dots)$ хэсгүүдэд буй зэргэлдээ хоёрын ялгаврууд π -ээс π' -д шилжихэд үл өөрчлөгдөнө. Өөрчлөгдөх ялгаврууд нь π -д байсан $a - i_j, i_j - j_b$ ялгаврууд ба π' -д бий болох ялгаврууд нь

$a_j, j-i, i-b$ юм. Иймд $f(\pi')$ нь $f(\pi)+3$ -аас хэтрэхгүй нь ойлгомжтой бөгөөд хэрэв $f(\pi')=f(\pi)+3$ гэж үзвэл π -д байсан сонирхож буй гурван ялгавар сөрөг, π' -д бий болсон гурван ялгавар эерэг байх ёстой. Өөрөөр хэлбэл $a < i, i < j, j < b$ ба $a > j, j > i, i > b$ болно. Гэтэл эдгээр тэнцэл бишүүдээс $a < i < j < b$ ба $a > j > i > b$ болж $a < b, a > b$ гэсэн нэгэн зэрэг үл биелэх тэнцэл бишүүд гарна. Үүгээр лемм батлагдлаа.

Мөн $\tau_0 \rightarrow \tau_1, \tau_{m-1} \rightarrow \tau_m$ шилжилтүүдэд f функц нь яг нэгээр өсөхийг хялбархан харуулж болно. $f(\tau_0)=0, f(\tau_m)=n-1$ тул лемм болоод урд өгүүлбэр ёсоор $1+(m-2)*2+1 \geq n-1$ буюу $m \geq (n+1)/2$ болж батлах зүйл гарлаа.

В-3. F_1 дүрсийг хувааж, эвлүүлээд F_2 дүрсийг үүсгэж болдог бол F_2 дүрсийг тэр хуваалтаар нь хуваагаад, эвлүүлж F_1 дүрсийг гарган авч болох нь илт. Иймд бид S талбайтай олон өнцөгт ба $S \times 1$ хэмжээтэй тэгш өнцөгт хоёрыг ижил бүтэцтэй хэмээн батлахад л хангалттай. Үнэхээр нэгж талбайтай зөв 1993 олон өнцөгт нь 1×1 квадраттай ижил бүтэцтэй, нэгж талбайтай гурвалжин маань ч мөн тэр квадраттай ижил бүтэцтэй болно.



Олон өнцөгтөө нэг оройгоос гарсан диагалуудаар нь гурвалжнуудад хуваагаад гурвалжин бүрээ зурагт үзүүлснээр тэгш өнцөгт болгоё. Үүссэн тэгш өнцөгтүүдийнхээ талбайг $S_1, \dots, S_n$ гэе. Одоо S' талбайтай тэгш өнцөгт нь $S' \times 1$ хэмжээтэй тэгш өнцөгттэй ижил бүтэцтэй хэмээн баталчихвал бүх тэгш өнцөгт нь ижил урттай тул эвлүүлээд $(S_1 + \dots + S_n) \times 1$ буюу $S \times 1$ хэмжээтэй тэгш өнцөгт үүсэх юм. S' талбайтай $ABCD$ тэгш өнцөгтийг авч үзье. BC тал дээр E цэгийг $AE = (p/q) \cdot S' / p$, q -натурал тоо / ба AED гурвалжин хури өнцөгт байхаар ямагт сонгон авч болох нь илт. Тэгвэл Π зурагт үзүүлснээр $((p/q) \cdot S') \times (q/p)$ хэмжээтэй тэгш өнцөгт үүсгэж болно. $(p/q) \cdot S'$ урттай талыг p тэнцүү хэсэгт, q/p урттай талыг q тэнцүү хэсэгт хуваагаад тэгш өнцөгтийн талуудтай параллель огтлолууд хийвэл $(S' / q) \times (1 / p)$ хэмжээтэй pq ширхэг тэгш өнцөгттэй болно. Эдгээрээс $S' \times 1$ хэмжээтэй тэгш өнцөгт үүсгэж болох нь илт билээ.

В. БАТЦЭНГЭЛ

БАГУУДЫН ТЭМЦЭЭН

УМО-29-ийн арга хэмжээний хүрээнд зохиогдсон багуудын тэмцээнд багш нарын I, II баг, сурагчдын I, II баг, олимпиадын зохион байгуулагч Дундговь аймгийн баг, комисс баг гэсэн 6 баг оролцож, комисс баг түрүүлж, ихэвчлэн орон нутгаас ирсэн загш нараас бүрдсэн багш нарын II баг удааллаа. Багуудын дэвшүүлсэн бодлогууд ихэнх багын бодож чадаагүй зарим бодлогын бодолт болон тэмцээний дүнг дор толилуулав.

Багуудын дэвшүүлсэн бодлогууд:

- 1/ Багш нар I баг/. m ширхэг ижил шоколадыг n сурагч тэнцүү хувааж авахаар, эг шоколадыг нэгээс илүүгүй хуваах үйлдэл хийлээ.
- а/ $m=9$ бол ямар n -ийн хувьд хувааж болох вэ?
- б/ Ямар m, n -ийн хувьд ийм хуваалт боломжтой вэ?
2. /Багш нарын II баг/. Дурын эерэг бодит $a_1, a_2, \dots, a_n$ тоонуудын хувьд $a_1 / (a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}) + a_2 / (a_3 + a_4 + \dots + a_{n-2}) + \dots + a_n / (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2}) \geq n / [n/2]$ тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.
3. /Сурагчид I баг/. $x^{n-1} - x - i = 0$ тэгшитгэл $|x|=1$ байх язгууртай байдаг бол $6 \mid (n+2)$ гэж батал. ($i^2 = -1$)
4. /Сурагчид II баг/. $\sum_{i=1}^n a_i \geq \sqrt{(n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2}$ бол a_i -үүд ямар нөхцөл хангах вэ?
5. /Дундговь/. Зэрэг бүхэл n тооны аравтын бичлэг дэх тэгүүдийн тоог $f(n)$

Математикийн олимпиад №17

гэж тэмдэглэе. $S = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_m}$ нийлбэрийг ол.

6. /Комисс/. $n \times n$ таблицад m ширхэг $*$ -ийг, аль ч дөрвөн $*$ нь хүснэгтийн талуудтай параллель тэгш өнцөгтийн оройнуудад байрлаагүй байхаар байрлуулжээ.

$a / m \leq n(\sqrt{n-3/4} + 1/2)$ болохыг батал.

б/ Дээрх тэнцэл биш тэнцэлдээ хүрэх $n \geq 5$ байх n -ийн ямар нэг утгыг ол.

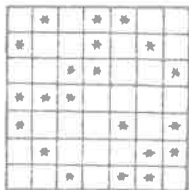
Зарим бодлогуудын бодолт:

2. Батлах ёстой тэнцэтгэл бишийн зүүн гар талд буй илэрхийллийг A гэж тэмдэглэе.

$x_1 = \sqrt{a_1 / (a_2 + a_3 + \dots + a_{[n/2]+1})}$; $x_2 = \sqrt{a_2 / (a_3 + a_4 + \dots + a_{[n/2]+2})}$; ...; $x_{\lfloor n/2 \rfloor} = \sqrt{a_{\lfloor n/2 \rfloor} / (a_{\lfloor n/2 \rfloor+1} + \dots + a_n)}$
 $y_1 = \sqrt{a_1(a_2 + a_3 + \dots + a_{[n/2]+1})}$; $y_2 = \sqrt{a_2(a_3 + a_4 + \dots + a_{[n/2]+2})}$; $y_n = \sqrt{a_n(a_1 + a_2 + \dots + a_{[n/2]})}$ гэж тэмдэглэвэл $\sum_{i=1}^n x_i^2 = A$, $\sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n a_i$ ба Коши-Буяновскийн тэнцэтгэл биш ёсоор $A \geq (\sum_{i=1}^n a_i^2) / (\sum_{i=1}^n y_i^2)$ болно.

$a / n = 2k + 1$ үед $\sum_{i=1}^n y_i^2 = a_1(a_2 + a_3 + \dots + a_{k+1}) + a_2(a_3 + a_4 + \dots + a_{k+2}) + \dots + a_{k+1}(a_{k+2} + \dots + a_{2k+1}) + \dots + a_{2k+1}(a_1 + \dots + a_k) = \sum_{i < j} a_i a_j = (1/2)((\sum_{i=1}^n a_i)^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2)$ болох ба $\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq (\sum_{i=1}^n a_i)^2 / n$ байдаг тул эндээс $\sum_{i=1}^n y_i^2 \leq (n-1)/(2n) (\sum_{i=1}^n a_i^2)$ болно. Иймд энэ тохиолдолд $A \geq (\sum_{i=1}^n a_i^2) / ((n-1)/(2n)) (\sum_{i=1}^n a_i^2) = n / [n/2]$ болов.

б/ $n = 2k$ үед $\sum_{i=1}^n y_i^2 = a_1(a_2 + a_3 + \dots + a_{k+1}) + a_2(a_3 + a_4 + \dots + a_{k+2}) + \dots + a_k(a_{k+1} + \dots + a_{2k}) + \dots + a_{2k}(a_1 + \dots + a_k) = \sum_{i < j} a_i a_j + a_1 a_{k+1} + a_2 a_{k+2} + \dots + a_k a_{2k} = (1/2)((\sum_{i=1}^n a_i)^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2) + a_1 a_{k+1} + a_2 a_{k+2} + \dots + a_k a_{2k} = (1/2)((\sum_{i=1}^n a_i)^2 - (a_1 - a_{k+1})^2 - (a_2 - a_{k+2})^2 - \dots - (a_k - a_{2k})^2) \leq (1/2)((\sum_{i=1}^n a_i)^2)$ болно. Иймд энэ тохиолдолд $A \geq (\sum_{i=1}^n a_i^2) / ((1/2)(\sum_{i=1}^n a_i)^2) = n / [n/2]$ болж батлах зүйл батлагдав.



6. Хүснэгтийн i -р мөрөнд m_i ширхэг $*$ байдаг гэж үзье. Тэгвэл $\sum_{i=1}^n m_i = m$ байх нь ойлгомжтой. i -р мөрний $*$ байгаа багануудын дугаарууд нь $j_1 < j_2 < \dots < j_{m_i}$ болог. M_i -ээр $\{j_s; j_t\}; 1 \leq s < t \leq m_i\}$ баганын дугаарын хосуудын олонлогийг тэмдэглэе. Тэгвэл M_i -д байх хосын тоо нь $0,5(m_i^2 - m_i)$ болох нь ойлгомжтой бөгөөд M_i олонлогууд нь огтлолцохгүй гэдэг нь өгсөн нөхцөлөөс гарна. Бүх боломжит ийм хосын тоо нь $0,5(n^2 - n)$ тул эндээс $(\sum_{i=1}^n 0,5(m_i^2 - m_i)) \leq 0,5(n^2 - n)$ гэсэн тэнцэтгэл биш мөрдөн гарна.

$\sum_{i=1}^n m_i^2 \geq (\sum_{i=1}^n m_i)^2 / n = m^2 / n$ тул дээрх тэнцэл бишээс $(m/n)^2 - m/n \leq n-1$ буюу $m/n \leq \sqrt{n-0,75} + 0,5$ болж батлах ёстой тэнцэл биш батлагдлаа.

б/ $\sqrt{n-0,75} + 0,5$ гэсэн тоо бүхэл тоо байхын тулд $n = k^2 + k + 1$ хэлбэртэй байна гэдэг нь ойлгомжтой бөгөөд ийм хэлбэртэй $n \geq 5$ байх хамгийн бага n -ийн утга нь 7 юм. Тэгэхлээр бид 7×7 таблицад өгөгдсөн нөхцөлийг хангахаар $7(\sqrt{7-0,75} + 0,5) = 21$ ширхэг $*$ -ийг байрлуулж чадвал хангалттай. Тийм байрлуулалт олон байж болох бөгөөд түүний нэгийг зурагт үзүүлээ.

Ц. ДАШДОРЖ

ОЛОН УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН 34-Р ОЛИМПИАД

ОУМО-34 Туркийн Стамбул хотод 1993. 7. 13-24-нд болж өнгөрлөө. Дэлхийн 73 орон оролцсон тэмцээний дүн гарахад Хятад 215, Герман 189, Болгар 178, Орос 177, Тайван 162, Иран 153, АНУ 151, Унгар 143, Вьетнам 138, Чех 132, Румын 128, Словак 126, Австрал 125, Англи 118, Энэтхэг 116, Өмнөд Солонгос 116, Франц

115. Канад 113, Израль 113, Беларус 109, Япон 98, Украин 96, Австр 87, Итал 86, Турк 81, оноогоор эхний 25 байрыг эзэллээ. Манай улс 26 оноогоор 61-р байранд орлоо.

42-30 оноо авсан 35 хүүхэд алт, 29-20 оноо авсан 66 хүүхэд мөнгө, 19-11 оноо авсан 98 хүүхэд хүрэл медаль авлаа.

Манай улсын 1993 оны үнэмлэхүй аварга Ш. Эрдэнэбат 16 оноогоор хүрэл медаль хүртэж сайхан амжилт үзүүлээ. Энэ нь нийт оролцсон 412 хүүхдийн 132-рт байна гэсэн үг юм. Хятадын 6 хүүхэд бүгд алтан медаль авснаас хамгийн бага нь 31 оноотой байв.

Одоогийн байдлаар дараагийн ОУМО-ууд 1994 онд Гонконг, 1995 онд Канад, 1996 онд Энэтхэг, 1997 онд Аргентин, 1998 онд Тайвань, 1999 онд Румын, 2000 онд Өмнөд Солонгос, 2001 онд АНУ, 2003 онд Японд болох төлөвтэй байна.

1-р өдөр

1. $n > 1$ бүхэл тоо ба $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ байг. Тэгвэл $f(x)$ -ийг нэгээс багагүй зэрэгтэй бүхэл коэффициенттэй хоёр олон гишүүнтийн үржвэрт тавьж болохгүйг батал.

2. Өгсөн хурц өнцөгт ABC гурвалжин дотор $AC \cdot BD = AD \cdot BC$ ба $\angle ADB = 90^\circ + \angle ACB$ байхаар D цэг өгөв.

а/ $(AB \cdot CD) / (AC \cdot BD)$ харьцааны утгыг бодож ол.

б/ $\triangle ABC$ ба $ABCD$ -г багтаасан тойргуудын C цэг дээрх шүргэгчүүд нь перпендикуляр гэж батал.

3. Төгсгөлгүй шатрын хөлөг дээр тоглоом тоглов. Тоглоом эхлэхэд n^2 хүү ямар нэг $n \times n$ талбайн нүд бүхэнд нэг нэгээрээ байв. Ямар нэг хүү босоо юм уу хэвтээ чиглэлд зэрэгцээ орших хүүтэй нүдэн дээгүүрээ харайж хүүгүүй нүдэнд буугаад дээгүүр нь харайсан нүднийхээ хүүг хөлгөөс авах үйлдлийг давтан хийх замаар хөлөг дээр ганц хүү үлддэг байх n -ийн бүх утгыг ол.

2-р өдөр

4. Хавтгайн P, Q, R цэгийн хувьд $m(PQR)$ -ээр $\triangle PQR$ -ийн хамгийн богино өндрийг тэмдэглэе. P, Q, R нь нэг шулуун дээр оршдог бол $m(PQR) = 0$ гэе. A, B, C нь хавтгайн өгөгдсөн цэгүүд бол энэ хавтгайн дурын X цэгийн хувьд $m(ABC) \leq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC)$ болохыг батал.

5. $n = \{1, 2, \dots\}$ байг. $f(1) = 2$ ба $n \in \mathbb{N}$ бүрийн хувьд $f(f(n)) = f(n) + n$ ба $f(n) < f(n+1)$ байх $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ функцийг жишээ гарга.

6. $n > 1$ бүхэл тоо байг. Тойрог дээр $L_0, L_1, \dots, L_{n-1}$ чийдэн энэ дарааллаараа байрлажээ. Чийдэн бүр "ассан", "унтарсан" гэсэн төлөвийн аль нэгэнд байж чадна. $S_0, S_1, \dots, S_{n-1}$ алхмуудын дарааллыг дараах маягаар өгөв. S_i алхам нь зөвхөн L_i -д л нөлөөлөх ба гэхдээ хэрэв L_i нь ассан байвал S_i нь L_i -ийн төлөвийг өөрчилж, хэрэв L_i нь унтарсан байвал S_i нь юуг ч үл өөрчилнө /чийдэнгүүд нь $L_1 = L_{n-1}, L_0 = L_n, L_i = L_{i+1}$ г. м модуль n -ээр дугаарлагдсан байг/. Эхлээд бүх чийдэнгүүд ассан байхад:

а/ $M(n)$ алхмын дараа мөн бүгд ассан байх натурал тоо $M(n)$ олдохыг

б/ n нь 2^k хэлбэрийн тоо бол $n^2 - 1$ алхмын дараа бүгд ассан байхыг

в/ n нь $2^k + 1$ хэлбэрийн тоо бол $n^2 - n + 1$ алхмын дараа бүгд ассан байхыг тус тус батал.

БОДОЛТ 1. $f(x) = g(x)h(x)$, $h(x)$ нь бүхэл коэффициенттой нэгээс багагүй зэрэгтэй олон гишүүнтүүд гэж эсрэгээс нь үзье. $f(0) = 3$ тул $|g(0)|$ ба $|h(0)|$ -ийн нэг нь 1-тэй тэнцүү. $|g(0)| = 1$ ба $g(x) = x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k$ гэж үзэж болох ба иймд $f(\pm 1) \neq 0$ гэдгээс аяндаа $k > 1$ гэж гарна. $g(x) = 0$ -ийн C дахь язгуурууд нь $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ гэвэл $g(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_k)$ болно. $|g(0)| = |\alpha_1 \dots \alpha_k| = 1$ тул $f(x) = 0$ -д $x = \alpha_i$ гэж орлуулбал $\alpha_i^k (\alpha_i + 5) = -3$ болж улмаар $i = 1, 2, \dots, k$ үеийн үржвэрийг нь сонирхвол

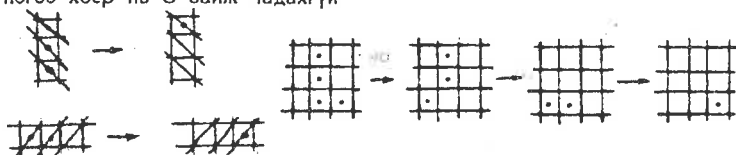
$$|(\alpha_1 + 5) \dots (\alpha_k + 5)| = 3^k \quad (*)$$

болно. $|g(-5)| = |(\alpha_1 + 5) \dots (\alpha_k + 5)|$ ба $3 = f(-5) = g(-5)h(-5)$ -ээс $|(\alpha_1 + 5) \dots (\alpha_k + 5)| = 1$ эсвэл 3 гэж олно. Энэ нь $(*)$ ёсоор $k > 1$ гэдэгт зөрчинө.

2. $DE \perp DB$ ба $DE = DB$ байхаар DE -г татъя. $\angle ADE = \angle ACB$, $AD/AC = BD/BC = DE/BC$ болох тул $\triangle ADE \sim \triangle ABC$. Эндээс $\angle CAB = \angle DAE$, $AB/AE = AC/AD$, $\angle CAD = \angle CAB - \angle DAB = \angle DAE - \angle DAB = \angle BAE$ буюу $\triangle CAD \sim \triangle BAE$ буюу $AC/AB = CD/BE = CD/(2BD)$ буюу $(ABCD)/(ACBD) = \sqrt{2}$ болно. CT, CU -үүд нь ACD, BCD тойргуудын C дээрх шүргэгчүүд байг. Тэгвэл $\angle DCT = \angle DAC$, $\angle DCU = \angle DBC$, $\angle ADE + \angle DAB + \angle DBA = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ буюу төсөөтэй гурвалжнуудаас $\angle ACB + \angle CAB - \angle CAD + \angle ABC - \angle DBC = 90^\circ$ буюу $\angle CAD + \angle DBC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ болно. Үүгээр $\angle TCU = 90^\circ$ боллоо.

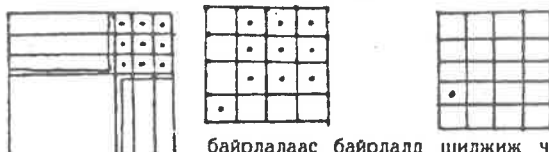
3. Эхлээд заавал $3 \nmid n$ байхыг батлая. Эсрэгээс $3 \mid n$ гэж үзье. Шатрын хөлөгний будалт шигээр хөлгөө хар, улаан, цагаан гурван өнгөөр алаглуулан будъя /аль нэг диагоналийн дагууд/. Хар нүднүүдэд буй хүүнүүдийн тоог x , улаан нүднүүдэд буй хүүнүүдийн тоог y , цагаан нүднүүдэд буй хүүнүүдийн тоо z гэж тэмдэглэе.

Аль ч төрлийн үйлдлээр x, y, z гурван тооны хоёр нь нэгээр хорогдож, нэг нь нэгээр нэмэгдэнэ. Иймд x, y, z -үүдийн тэгш сондгой байх нь заавал өөрчлөгдөнө. $3 \mid n$ үед анх $x=y=z$ тул тэд үйлдэл бүрийн дараа эсвэл гурвуул тэгш, эсвэл гурвуул сондгой байна. Иймд хэзээ ч нүдний нэг нь 1, нөгөө хоёр нь 0 байж чадахгүй

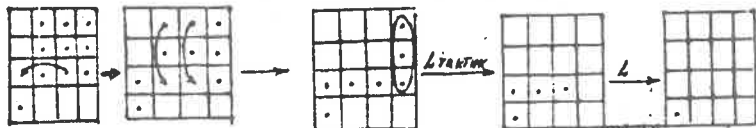


2/ $3 \nmid n$ үед 1 хүү үлдэж чадахыг харуулъя. $n=1, n=2$ үед илт юм. Одоо $n=k$ үед 1 хүү үлдэж чаддаг бол $n=k+3$ тохиолдолд мөн 1 хүү үлдэж чадна гэж харуулъя. Тэгвэл батлах гэсэн зүйл илт болох билээ.

Хэрэв A нүд хоосон бол энэ 3 хүүг дээрх аргаар бусад хүүг хөдөлгөлгүйгээр устгаж болно. Энэ аргыг L тактик хэмээн нэрлэе. L -тактикийг хэрэглэвэл B, C хэсгүүдийг хоосолж чадна. Одоо



байрлалаас байрлалд шилжиж чадахыг баталчихвал $n=k+3$ тохиолдол нь $n=k$ тохиолдолд шилжинэ.



4. Энэ бодлогын одоо бидэнд байгаа бодолт сунжруу тул товч бодолтыг уншигчдаасаа хүлээе.

5. $\alpha = 0.5(\sqrt{5}+1)$ байг. $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ тул $g(x) = \alpha x$ функц нь $n \in \mathbb{N}$ бүрийн хувьд $g(g(n)) - g(n) - n = 0$ нөхцөлийг хангана. $f(n) = \lfloor g(n) + 1/2 \rfloor$ функц нь бодлогын бүх нөхцөлийг хангахыг харуулъя

1/ $\alpha > 1$ тул $g(n+1) > g(n) + 1$ болно гэдгээс $f(n) < g(n+1)$ болно

2/ $2 < \alpha + 1/2 < 3$ тул $f(1) = 2$

3/ $\forall b$ g -ийн тодорхойлолтоос $n \in \mathbb{N}$ бүрийн хувьд $|f(n) - g(n)| < 1/2$ болно. $|f(f(n)) - f(n) - n| = |g(g(n)) - g(n) - n - g(g(n)) + f(f(n)) - f(n) + g(n)| = |g(g(n)) - f(f(n)) + f(n) - g(n)| = |g(g(n)) - g(f(n)) + g(f(n)) - f(f(n)) + f(n) - g(n)| = |(\alpha - 1)(g(n) - f(n)) + g(f(n)) - f(f(n))| \leq \leq 0.5(\alpha - 1) + 1/2 = \alpha/2 < 1$ ба $f(f(n)) - f(n) - n$ бүхэл тоо гэдгийг анхаарвал (2) биелнэ.

6. $Z_2[x] = \{f(x) = a_0x^0 + \dots + a_nx^n \mid a_i \in Z_2\}$ -д $(1+x)^m = 1 + x^m$ болно. $h(x) \mid f(x) - g(x)$ бол $f \equiv g \pmod{h}$ гэж бичиж баяя. Тухайлбал $1 + x^{n-1} \equiv x^n \pmod{x^n + x^{n-1} + 1}$ болно. Чийдэн бүрийн төлөвийг

$$v_i = \begin{cases} 1, & \text{хэрэв } L_i \text{ ассан бол} \\ 0, & \text{хэрэв } L_i \text{ унтарсан бол} \end{cases}$$

тохиромжтой тул тухайн моментод байгаа нийт $L_0, \dots, L_{n-1}$ чийдэнгүүдийн төлөвийг $\vec{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) \in Z_2^n$ вектороор нэг утгатай тодорхойлж болох ба чийдэнгүүд тойрог дагуу байрласан тул L_k чийдэнгүүдийн дугаарыг $\text{mod } n$ -ээр ойлгох. тухайлбал v_0 төлөвтэй L_0 чийдэнгийн зүүн талд $v_{n-1} = v_{-1}$ төлөвтэй $L_{-1} = L_1$ чийдэн байна гэж үзнэ. Тэгээд S_i операторыг

$$\vec{v} S_i = (v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1} + v_i, v_{i+2}, \dots, v_n) \quad (1)$$

гэж авах ба энд, S_i оператор ч мөн $i \pmod{n}$ дугаартай чийдэндээ л нөлөөлнө.

$$\vec{v} T = (v_0, \dots, v_{n-1}) T = (v_2, \dots, v_{n-1}, v_1) \quad (2)$$

үйлдлийг мөн оруулъя. Тэгвэл

$$\vec{v} S_0 \dots S_{n-1} = \vec{v} (S_0 T)^{n-1} \quad (3) \quad \text{болно. } S_0 T = \vec{S} \text{ гэе.}$$

а/ Нэгэнт төлөвийн векторын тоо 2^n ба $1/1$ -ээр төлөв бүр нь өмнөх ба дараагийнхаа төлөвийг 1 утгатай тодорхойлох тул үелэх зарчим ёсоор төлөвүүдийн дараалал цэвэр үетэй дараалал байна. Иймд $1/3$ -д $\vec{v} (S_0 T)^m = \vec{v}$ байх m тоо олдоно /дурын v -д/. Тухайн тохиолдолд $v = (1, \dots, 1)$ үед $(1, \dots, 1)(S_0 T)^m = (1, \dots, 1)$ болно. Эндээс $(1, \dots, 1)(S_0 T)^m = (1, \dots, 1) T^m = (1, \dots, 1)$ буюу а/ батлагдав. Одоо б/ ба в/ -г батлахын тулд $\vec{v} = (v_0, \dots, v_{n-1})$ вектор $P(x) = v_{n-2} + v_{n-1}x + \dots + v_0x^{n-2} + v_{n-1}x^{n-1} \in Z_2$ -г харгалзуулъя. Тэгвэл $P(x)\vec{S} = v_{n-1} + v_{n-2}x + \dots + (v_0 + v_{n-1})x^{n-1}$ буюу $xP(x) - P(x)\vec{S} = v_{n-1}(x^n + x^{n-1} + 1)$ гэж гарах тул $P(x)\vec{S} \equiv xP(x) \pmod{x^n + x^{n-1} + 1}$ буюу $t \in \mathbb{N}$ бүрийн хувьд $P(x)\vec{S}^t \equiv x^t P(x) \pmod{x^n + x^{n-1} + 1}$ болно. t -ээр урьд сонгосон m -ийг авбал $P(x)\vec{S}^m \equiv x^m P(x) \equiv P(x) \pmod{x^n + x^{n-1} + 1}$ болно. Эндээс $x^m \equiv 1 \pmod{x^n + x^{n-1} + 1}$. Одоо жишлэгийг $n=2^k$ үед $m=n^2-1$ тоо, $n=2^k+1$ үед $m=n^2-n+1$ тоо хангахыг үзүүлье

$$\text{б/ } n = 2^k \text{ үед } x^{2^k} = (x^{2^{k-1}})^2 = (1 + x^{2^{k-1}})^2 = 1 + x^{2^{k-1}} \text{ Эндээс } 1 = x^{2^{k-1}} + x^{2^k} = x^{2^{k-1}}(x^{2^{k-1}} + 1) = x^{2^{k-1}} \cdot x^{2^k} = x^{2^{k-1}}$$

$$\text{в/ } n = 2^k + 1 \text{ үед } x^{2^k} \equiv (x^{2^{k-1}})^{2-1} \equiv (x + x^{2^{k-1}})^{2-1} \equiv x^{2^k} + x^{2^{k-1}} \text{ болно. Эндээс } x^{2^k} + x^{2^{k-1}} \equiv x^{2^k} \equiv x^{2^k}(x^{2^{k-1}} + 1) \equiv x^{2^k} \cdot x^{2^k} = x^{2^{k+1}} \equiv 0 \equiv x^{2^k}(x^{2^{k-1}} + 1) \text{ буюу } x^{2^{k+1}} \equiv 1$$

Ц. Дашдорж, Б. Баясгалан

МАТЕМАТИКЧ П.ЭНХБОЛДЫН НЭРЭМЖИТ АНХДУГААР УРАЛДААН

Математикч П. Энхболдын мэндэлсний 35 жилийн ойд зориулсан Улсын Анхдугаар Уралдаан 1993 оны XII сарын 24-30-нд МУҮИС дээр боллоо.

Уралдааныг ММОЗБ Хороо, П. Энхболдын ах дүүс төрөл төрөгсөдтэй хамтран зохион байгууллаа. Уралдаан багш, сурагч гэсэн 2 ангиллаар явагдлаа. Энэ тэмцээнд хот, хөдөөнөөс шалгарсан 97 сурагч, 25 багш өрсөлдсөнөөс сурагчдаас УБ II-р сургуулийн Х ангийн С. Цогзолмаа, Ү. Отгонбаяр, МУҮИС-ийн тооны гүнзгийрүүлсэн сургалттай 9-р ангийн Ватбаясгалан нар эхний 3 байранд шалгарч I-III зэргийн диплом, үнэ бүхий зүйлээр шагнагдлаа. Багш нараас авбал зохих онооны 2/3-ыг авч I байранд шалгарах багш байсангүй. 2 ба 3-р байрыг УБ хотын II-р сургуулийн багш О. Барсүрэн, 51-р сургуулийн багш П. Баярмагнай нар эзэлж, II ба III зэргийн диплом үнэ бүхий зүйлээр шагнагдлаа. 13-58 насны хүмүүс оролцсон энэ тэмцээнд хамгийн залуу ба ахмад өрсөлдөгчийн шагналыг ММОЗБ Хороо олголоо. Дүнгийн хурал 1993. 12. 30-нд /П. Энхболдын төрсөн өдөр/ болж П. Энхболдын математикийн ШУ-нд оруулсан хувь нэмрээс эхлээд түүний амьдралын

замналаас олон хүмүүс дурсан ярьж, энэ гайхамшигт математикчийн нэрэмжит "Математикийг тэтгэх сан" байгуулж тэр сангийн ивээл дор ийм уралдааныг 5 жилд 2 удаа явуулж байх нь зүйтэй гэж үзээд, ийм сангийн данс нээгдмэгц түүнд хандив өргөхөө илэрхийлж байлаа. Дараах уралдаанаас эхлээд энэ тэмцээнийгээр мөмөтө матикчийн эрдэм шинжилгээний хурал явуулж байх нь зүйтэй гэсэн санал гарлаа.

П. Энхболдыг эрдэм шинжилгээний ажлаар нь дэлхийн олон орны математикчид мэднэ. Алт хэдий хэвтэвч өнгө нь үл хувирна, алдарт хүн үхэвч нэр нь үл мартагдана гэж ардын маань домогт өгүүлдэг. Цаг хугацаа өнгөрөх бүр энэ сайхан мате матикчийн ажил, алдар нэр нь улам бүр түгэн дэлгэрч байна. П. Энхболд ертөнцөд хоринзургаахан жил амьдарсан ч Галуагийн онол, бүлгийн онол, цагиргийн цогцын онолоор 10 гаруй эрдэм шинжилгээний өгүүлэл бичсэнийг Олон Улсын Оюутны Хурлаас эхлээд Дэлхийн математикчдын Их Хурлуудын материалаас ч олж үзэж болно. Энэ уралдаан манай Олимпиадын түүхэнд шинэ хуудсыг нээлээ.

Сурагчдын бодсон бодлогууд

С-1 /Чойсүрэн ТИС, багш/. ABCD гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн АВ ба CD, ВС ба AD эсрэг талуудын үргэлжлэл нь E, F цэгүүдэд огтлолцоно. Эдгээр цэгүүдээс 2 хоёр шулуун татаж ABCD-г 9-н дөрвөнөнцөгтөд хуваав. Мөр, багана бүрээс 1 нэг дөрвөн өнцөгтөд тойрог багтааж болох бол ABCD-д тойрог багтааж болохыг батал.

С-2 /Гантөмөр МУУИС, Мат-II/. Багш нь хоёр сурагчид 3, 4, 5 тоонуудын аль нэгийг хэлэхэд 1 сурагч а/ 3 гэвэл 2-г, б/ 4 гэвэл 5 эсвэл 3-ийг, 2 сурагч а/ 5 гэвэл 2-г, б/ 4 эсвэл 3 гэвэл 1-ийг бичнэ. Хэрэв багшийн хэлсэн дараалал үегүй бол сурагчдын хэлсэн дарааллын ядаж нэг нь үегүй гэж батал.

С-3 /П. Алтанцог, ШУА, Э. Ш. А/. $n \geq 2$ натурал тоо. Тэгшнөгт координатын системд (x, y) оройнууд нь бүхэл тоо ба $1 \leq x, y \leq n$ байх бүх квадратыг сонирхоё. p_k нь яг k квадратын орой болох хос цэгүүдийн тоо бол $\sum_{k=1}^n (k-1)p_k = 0$ болохыг батал.

С-4 /Л. Оюунцэцэг, ШУА/. Бөмбөрцөг дээр n цэг өгөгдөв. Эдгээр цэг тус бүр яг нэг хэсэгт нь орсон байхаар бөмбөрцөгийг n тэнцүү хэсэгт хувааж болох уу?

С-4' /Б. Баясгалан БИС/. Хавтгайн тэмдэглэгдсэн цэгүүдийн дурын хоёрыг дайрсан шулуунуудын огтлолцлын цэгүүдийг тэмдэглэв. Анх аль ч 3 нь нэг шулуун дээр үл орших параллелограммын орой болдоггүй рационал координаттай 4 цэг тэмдэглэгдсэн бол хавтгайн аливаа рационал координаттай цэг тэмдэглэгдэхийг батал.

Багш нарын бодох бодлогууд

В-1 /Д. Пүрэвсүрэн, МУУИС, багш/. Бүх талст нь параллелограмм байх гүдгэр 1994 талст оршин байх уу?

В-2 /Б. Баясгалан БИС, багш/. $a_1, \dots, a_n$ үсгүүдээс зохиосон аливаа $x_1, \dots, x_n$ үгэнд түүний $x_1 x_2 \dots x_n$ дэд үгийг $x_1 x_2 \dots x_n, x_2 x_3 \dots x_n, \dots, x_n$ үгээр, $x_1 x_2 \dots x_n, x_2 x_3 \dots x_n, \dots, x_n$ дэд үгийг $x_1 x_2 \dots x_n, x_2 x_3 \dots x_n, \dots, x_n$ үгээр солих үйлдлүүдийг хийх замаар 1993-аас бага урттай үгэнд хувиргаж болдог бол $n \leq 10$ гэж батал.

В-3 /П. Алтанцог/. ABCD трапецийн a, c сууриудтай параллель шулуун татав. Трапецийн хажуу талуудтай огтлолцох цэг E, F ба G, H байв. EFCD трапецийн диагалуудын огтлолцлын цэг N, AM ба DN хэрчмүүдийн огтлолцлын цэг K дайруулан AB, CD-тэй параллель татсан шулуун трапецийн хажуу талуудтай P, Q цэгүүдэд огтлолцдог. EF=FG бол PQ хэрчмийн урт a, b, c-ийн гармоник дундаж болохын батал.

В4 /Б. Баясгалан/. 1, 2, ..., 35 тоонуудыг дурын байдлаар 2 ангид хуваахад аль нэг ангид $a + b = c$ ($a < b$) байх (a, b, c) гурвал дор хаяж 12 олнохыг батал.

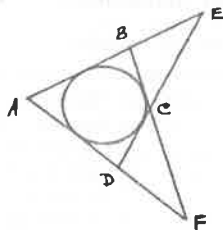
В4 /П. Алтанцог/. а/ 1993¹⁹⁹⁸, 1992¹⁹⁹⁸, ..., 35¹⁹⁹⁸ ба хоёрдугаар мөрөнд эдгээр тооны зэргэлдээ орших 2 тооны ялгаврыг бичнэ. Цааш нь 1 тоо үлдтэл энэ үйлдлийг үргэлжлүүлэхэд гарах тоог ол.

б/ 1993¹⁹⁹⁸, 1992¹⁹⁹⁸, ..., 30¹⁹⁹⁸ тоонд дээрх үйлдлийг хийхэд гарах тоог ол.

Бодлого бүр 8 оноотой ба С-4 ба С-4'-ийн зөвхөн нэгийг нь сонгож бодно.

БОДОЛТ С-1. Лемм. Өгсөн ABCD дөрвөн өнцөгтийн хувьд дараах гурван өгүүлбэр эквивалент. Үүнд:

- (1) $AB + CD = BC + AD$ (2) $EB + BF = ED + DF$ (3) $EA - FA = EC - FC$
(1) $\Rightarrow$ (2) баталъя.



(1) нөхцөл нь ABCD-д тойрог багтааж болох нөхцөл юм. Иймд A, B, C, D, E, F цэгүүдээс энэ тойрогт татсан шүргэгчүүд нь харгалзан a, b, c, d, e, f байг. Тэгвэл, $EB = e - b$, $BF = f + b = > ED + DF = e + f$ болно. Мөн, $ED = e + d$, $FD = f + d = > ED + DF = e + f$ болно. $EB + BF = ED + DF$. (1) $= >$ (2) батлагдав.

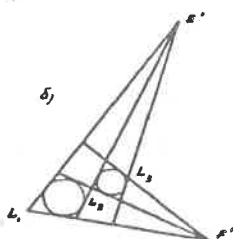
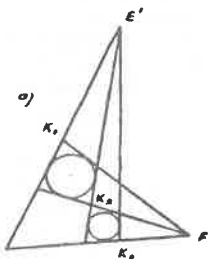
(1) $= >$ (3)-мөн адил батлагдана.

(2) $= >$ (1) баталъя.

Өгсөн дөрвөн өнцөгтийн хувьд (2) нөхцөл биелж байг. FAB гурвалжинд тойрог багтаа. E цэгээс тэр тойрогт шүргэгч шулуун татъя. AF ба BF талуудыг E', D' цэгүүдэд огтлов. Тэгвэл ABC'D' дөрвөн өнцөгтийн хувьд (1) чанар биелж байгаа тул өмнөх баталгаа ёсоор (2) чанар биелнэ. Өөрөөр хэлбэл: $EB + BF = ED' + D'F$ болно. Гэтэл ABCD-ийн хувьд бас (2) чанар $EB + BF = ED + DF$ биелнэ. Эндээс $ED' + D'F = ED + DF = > ED = ED' + |DD'|$ болж EDD' гурвалжны хувьд гурвалжны тэнцэл биш биелэхгүй байна. Иймд D = D' буюу D ба D' цэгүүд давхцана.

Иймд ABCD-д тойрог багтана. Эндээс (1) биелнэ.

(3) $= >$ (1) өмнөхтэй адилаар батлагдана.



Бодлогоо бодъё. Мөр, ба- гана бүрээс нэг, нэг дөрвөн өнцөгтөд тойрог багтааж болно гэж өгсөн учраас ямар нэг хоёр дөрвөн өнцөгт нь а/ юм уу эсвэл б/ байрлалтай байна /Тойрог багтааж болдог жижиг дөрвөн өнцөгтүүдээс/.

а/ байрлалд байг.

Тэгвэл (2) чанар ёсоор

$E'K_1 + K_1F' = E'K_2 + K_2F'$ ба

$E'K_2 + K_2F' = E'K_1 + K_1F'$ биелнэ.

Эндээс $E'K_1 + K_1F' = E'K_2 + K_2F'$ буюу том дөрвөн өнцөгтийн хувьд (2) чанар биелнэ. Иймд (1) чанар /лемм ёсоор/ биелж том дөрвөн өнцөгтөд тойрог багтана.

б/ байрлалд байг.

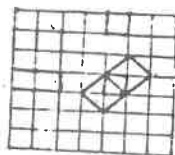
Тэгвэл (3) чанар ёсоор

$E'L_1 - F'L_1 = E'L_2 - F'L_2$ ба

$E'L_2 - F'L_2 = E'L_1 - F'L_1$ биелнэ. Эндээс

$E'L_1 - F'L_1 = E'L_2 - F'L_2$ буюу том дөрвөн өнцөгтийн хувьд (3) чанар биелнэ. Иймд том дөрвөн өнцөгт нь тойрог багтаах ба үлдсэн дөрвөн өнцөгттэй бас л энэ хоёр байр- лалын аль нэгийг эзэлнэ. Иймд ABCD -д тойрог багтааж болно.

C-2. (a), (b), (c) нь I, II сурагчид ба багшийн бичих тоонуудын дарааллууд байг. $\forall n, a_n + b_n = c_n$ болохыг хялбархан шалгаж болно. (x_n) -д $0, x_1, \dots, x_n, \dots = (x_n)$ тоо харгалзуулъя. (x_n) үетэй дараалал $< = > (x_n) \otimes 0, 3 \leq c \leq 5$ тул $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) = (c_n)$ ба $(a_n) + (b_n) = (c_n)$ гэдгийг анхаарвал бодлого шууд бодогдоно.



C-3. Хос цэгүүд нь яг 0, 1, 2, 3 квадратын орой байж чадахыг харахад түвэггүй. n^2 -торноос хос цэгийг $p = C_n^2 = 0,5n(n-1)$ ширхэгийг сонгож болно. Нөгөө талаас ерөнхий квадратын талтай параллель тал бүхий квадратуудын тоо нь $\Sigma_{L=1}^{n-1} L^2$ юм. Харин эдгээр квадрат тус бүрд багтсан квадратын тоо $n-L-1$ гэдгийг анхаарвал бүх квадратын тоо нь

$q(n) = \Sigma_{L=1}^{n-1} L^2 + \Sigma_{L=1}^{n-1} L^2(n-L-1) = \Sigma_{L=1}^{n-1} L^2(n-L) = 0,5 \cdot \Sigma_{L=1}^{n-1} [L^2(n-L) +$

$+ L(n-L)^2] = (0,5n) \cdot \Sigma_{L=1}^{n-1} L(n-L)$ юм. $n=2$ үед $p=6, q=1, n=3$ үед $p=36, q=6$ Одоо

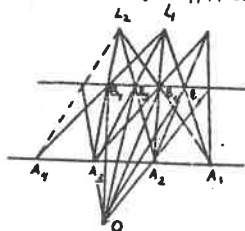
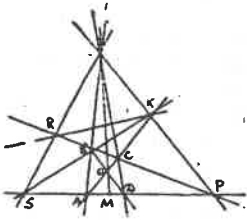
$6q(n) = p(n)$ болохыг баталъя. Өөрөөр хэлбэл: $0,5n(n^2-1) = 6 \cdot 0,5 \cdot \Sigma_{L=1}^{n-1} L(n-L)$.

$n \rightarrow n+1$ үед $6 \cdot 0,5 \cdot \Sigma_{L=1}^{n-1} L(n+1-L) = 6 \cdot 0,5 [\Sigma_{L=1}^{n-1} L(n-L) + \Sigma_{L=1}^{n-1} L] = 0,5n(n-1)(n+1) + 3n(n+1)/2 = 0,5n(n+1)(n+2)$ болж $6q(n) = p(n)$ индукцээр батлагдав.

Одоо яг k квадратын орой болж байгаа хос бүрийг k удаа тоолъё. Ингэхэд бүх

квадратуудын оройн хос цэгүүдийг тоолох учир $\sum_k k r_k = 6q$ биелнэ /квадрат бүрд 6 хос орой тоологдоно/. Иймд $\sum_k k r_k = p(n) = \sum_k (k-1) r_k = 0$ болох нь батлагддаг.

С-4. Өгсөн цэг тус бүрийг дайрсан n ширхэг бүслүүр оршин байна. Энэ бүслүүрт харгалзах туйлын 2 цэгийг авъя. Бүслүүр бүрийг яг n тэнцүү хэсэгт хуваая. Нэг туйлын цэгийг түүнд хамгийн ойр бүслүүрийн n цэгтэй холбоё. 1 бүслүүрт орших өгсөн цэгийг агуулсан хэсгийг I хэсэг гэе. II бүслүүрийн n цэгийг I бүслүүрийн n цэгтэй холбохдоо II бүслүүр дэх өгсөн цэг I хэсгийн дараагийн хэсэгт орсон байхаар холбоё. g, m бүслүүрүүдийг холбон эцэст нь доод туйлын нэгтэй холбоход өгсөн бөмбөрцөг яг n тэнцүү хэсэгт хуваагдах ба хэсэг тус бүрд өгсөн цэгээс яг 1 нь орсон байна.



С-4'. Хэрвээ бид параллель хоёр шулуун дээрх бүх рационал координаттай цэгүүдийг байгуулчихдаг л юм бол хавтгайн рационал координаттай цэгүүдийг байгуулж чадна. Иймд өгсөн цэгүүдээ ашиглан параллель 2 шулуун татаад тэдгээр дээрх бүх рационал цэгүүдийг байгуулъя. Өгсөн дөрвөн цэг маань

A, B, C, D болог. AD -тэй параллель шулуун татахыг зорьё. $AB \cdot CD = L, AC \cdot BD = 0$, $BC \cdot AD = P, OL \cdot AD = M$ гэж тэмдэглэе. $AM/MD = x/y, x, y \in \mathbb{Z}$ байг. $x > y$ бол R цэг уул дөрвөн өнцөгтийн баруун гар талд, хэрэв $x < y$ бол зүүн гар талд оршино.

$x > y$ байг. $\Delta ALD, O$ цэг, BP шулууны хувьд харгалзан Чев, Менелайн теоремыг бичвэл $(AM/MD) \cdot (DC/CL) \cdot (LB/BA) = 1$ $(AP/DP) \cdot (DC/CL) \cdot (LB/BA) = 1$. Иймд $AP/DP = x/y = (AD+DP)/DP = AD/DP + 1 \Rightarrow AD/DP = (x-y)/y$. Одоо $AC \cdot LP = K, BK \cdot AP = S$ гэж Хэрэв $AD/DP = (x-y)/y > 1$ бол S цэг $ABCD$ -ын баруун талд орших учир дээрхийн адилаар $AP/PS = (x-y)/y - 1$ болно. Хэрвээ $AD/DP = (x-y)/y < 1$ бол дээрх зургаас $\Delta ALP, C$ цэг, SK шулууны хувьд Чев, Менелайн теорем бичвэл $(AD/DP) \cdot (PK/KL) \cdot (LB/BA) = 1$, $(SA/SP) \cdot (PK/KL) \cdot (LB/BA) = 1 \Rightarrow y/(x-y) = SP/SA = AP/SA + 1$. Хэрэв $AP/SA = y/(x-y) - 1 = 1$ бол $SL \cdot BP = R$ ба $AD//KR$ болно. $AP/SA = 1$ бол дээрх процессыг үргэлжлүүлбэл төгсгөл алхмын дараа бидний авч үзэж буй харьцаа нэгтэй тэнцэх буюу бид AD -тэй параллель шулуун татаж чадна.

Одоо байгуулсан параллель шулуун $A_1A_2 // B_1B_2, A_1A_2/A_2A_3 = 1 = B_1B_2/B_2B_3, A_1B_1 \cdot A_2B_2 = L, L_1A_1 \cdot B_1B_2 = B_1, L_1B_1 \cdot A_2A_3 = A_2 \dots$ гэх мэтчилэн параллель хоёр шулуунаа хэд л бол хэд хувааж чадна. Тухайлбал A_2A_3 хэрчмийг n тэнцүү хэсэгт хуваая гэвэл (B_2B_3) шулуун дээрээ b нь хамгийн түрүүнд хуваагдсан хэрчмийнхээ төгсгөл B_1, B_2 -ийг харгалзан A_2, A_3 цэгүүдтэй холбоод огтлолцлын цэгийг O гэе. O цэгээс $B_i (i=1, n)$ цэгүүдтэй холбоход A_2A_3 хэрчим маань n тэнцүү хэсэгт хуваагдана. Иймд параллель хоёр шулуун дээрх бүх рационал цэгүүдийг байгуулж чадах нээ.

Б1. Энэ бодлогын бодолтыг мөн уншигчдадаа үлдээлээ.

Б-2. $a_1, \dots, a_n$ үсгүүдээс зохиож болох, бодлогонд заасан хоёр үйлдлээр урт нь үл багасах үгийн уртуудын хамгийн их B_n утгыг олъё. Хэрэв $x_1, \dots, x_n$ нь $a_1, \dots, a_n$ үсгүүдээс зохиосон үг байг. Тэгвэл a нь $a_1, \dots, a_n$ үсгүүдээс $x_1, \dots, x_n$ үгэнд хамгийн сүүлд эхэлж орох үсэг, b нь хамгийн түрүүнд төгсөх үсэг болог. Өөрөөр хэлбэл, $x_1, \dots, x_n = uau'$, a у / u үгэнд a -аас бусад бүх үсэг оролцоно. $x_1, \dots, x_n = o'bo$, b у / o үгэнд b -ээс бусад бүх үсэг оролцоно. / . Водлогонд заасан хоёр үйлдэл нь $x_1, \dots, x_n$ үгэнд оролцож буй үсгүүдийн дарааллыг хадгалдаг нь илэрхий. Иймд $x_1, \dots, x_n$ үгэнд энэ хоёр үйлдлийг хэрэглэхэд ua, bo нь мөн л хадгалагдах учиртай.

Одоо $x_1, \dots, x_n$ үгийг дээрх хоёр үйлдлээр хувиргасаар $uabo$ шилжүүлсэн болохыг батлая.

$w = x_1, \dots, x_n = uau' = o'bo$ байг.

Тэгвэл ямар нэгэн w' үгийн хувьд $ww' = ua$ байх нь хялбархан батлагдана.

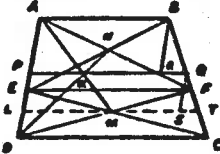
Эндээс $ww'bo = uabo$, мөн $w' \cdot uabo = bo$ нөхцөлөөс $o'w' \cdot uabo = o'bo = w$ болох юм. Иймд $w = o'w' \cdot uabo = o'w' \cdot uabouabo = wuabo = ww'bo = ww'bo = uabo$ болно.

Хэрэв a үсэг нь b үсгээс эхэлж w үгэнд байрладаг бол w үг нь шабо үгэнд хувиргах нь батлагддаг. Нөгөө талаас, u үгэнд a үсэг, o үгэнд b үсэг тус тус оролцдоггүй тул $B_n = 2B_{n-1} + 2$ байна. $n=2$ үед $B_2=3$ байх нь илэрхий. Эндээс $B_n = 5 \cdot 2^{n-2} - 2$ болно. Ийнхүү n үсгээс зохиосон урт нь үл багасах үгийн хамгийн их утга нь $B_n = 5 \cdot 2^{n-2} - 2$ болов. Эндээс $5 \cdot 2^{n-2} - 2 \leq 1993$ буюу $n \leq 10$.

В-3. AMF гурвалжнаас Менелайн теоремоор

$$(AN/NF) \cdot (FD/DM) \cdot (KM/AK) = 1 \quad (1)$$

$\triangle ABN \sim \triangle ENF \Rightarrow AN/NF = a/b$; $\triangle FDM \sim \triangle CMC \Rightarrow MF/DM = b/c \Rightarrow (MF+DM)/DM = (b+c)/c$ буюу $DF/DM = (b+c)/c$. (1) $\Rightarrow (a/b) \cdot ((b+c)/c) \cdot (KM/AK) = 1$
 $AK/KM = a(b+c)/(bc)$. М цэгийг дайруулан $LT \parallel CD$ хэрчим; $AD \parallel BR$, $RE \parallel PQ$,



$AD \parallel QS$, $SE \parallel LT$ хэрчмүүд татъя. Тэгвэл $LT = 2bc/(b+c)$
 ба $RQ/ST = BR/QS = AP/PL = AK/KM$ буюу

$$(PQ - a)/(LT - PQ) = AK/KM \Rightarrow$$

$$PQ + PC \cdot (AK/KM) = a + LT \cdot (AK/KM) \Rightarrow$$

$$PQ = (a + LT \cdot (AK/KM))/(1 + AK/KM) \text{ Орлуулбал}$$

$$PQ = 3abc/(ab + bc + ca) = 3/(1/a + 1/b + 1/c)$$

Б4. $\{1, 2, \dots, 35\} = A \cup B$, $(A \cap B) = \emptyset$ ангиудад хуваагдсан байг. Тойрог дээр зөв 36 өнцөгтийн орой болж байх цэгүүдийг харгалзан 1, 2, ..., 36 тоонуудаар дугаарлал.

($p > q$) ямар ч p, q оройнуудыг хэрэв $p - q$ ялгавар нь A ангид ордог бол улаанаар, харин B ангид ордог бол хөх хэрчмээр холбож $p - q$ гэж тэмдэглэе. $p - q$ -г $[q, p]$ хэрчмийн жин гэж нэрлэе. Тэгвэл талууд нь 1, 2, ..., 35 тоонуудаар дугаарлагдсан C_n^m ширхэг гурвалжин үүсэх бөгөөд энд ямар нэг m , n , p оройтой ижил өнгийн /бүх тал нь ижил/ гурвалжин байдаг гэе ($m < n < p$ гэж үзэж болно).

Тэгвэл жингүүд $(p - m) = (p - n) + (n - m)$ болох ба уг гурвалжны талууд нь бодлогын нөхцөлийг $(n - p) \neq (p - n)$ үед хангана. Ө. х. оройнууд нь арифметик прогрессын дараалсан гурван гишүүн болдоггүй ижил өнгийн гурвалжнуудын давталтгүй орсон тоог доороос нь үнэлснээр бодлого шийдэгдэнэ. Дурын i оройг авч үзье. Энэ нь үлдсэн 35 оройны a_i -тэй нь улаан, b_i -тэй нь хөх хэрчмээр холбогдсон бол $(a_i + b_i = 35) a_i, b_i$ нь i орой оролцсон бүх ижил биш гурвалжны тоо болж. $\Sigma_{i=1}^n a_i, b_i = \Delta$ гэвэл 0.5Δ нь бүх боломжит ижил биш гурвалжны тоо болно.

Учир нь i, j оройнуудад тус бүр нэг тоологдоно. Иймд Δ нийлбэрт ямар ч гурвалжин яг хоёр тоологдоно. p -гээр $(d, d, 2d)$ талтай ижил өнгийн гурвалжнуудын тоо, $B(n)$ -ээр $\{1, 2, \dots, n\}$ дараалал дахь дэс дараалсан арифметик прогрессын гишүүд байх гурвалуудын тоог тус тус тэмдэглэе.

$$B(n) = \begin{cases} k(k-1), & \text{үед } n = 2k \\ k^2, & \text{үед } n = 2k+1 \end{cases}$$

үед $n = 2k+1$ болохыг хялбар шалгаж болно. Үнэхээр $(a, b \in \mathbb{Z})$
 $a + b = 2c \Rightarrow 2 \mid (a - b)$ учир $n = 2k$ үед $\{1, 3, 5, \dots, 2k-1\}, \{2, 4, \dots, 2k\}$ дарааллуудын бүх боломжит ялгаатай хосуудын тоо нь бидний олох тоо болно. Энэ нь $C_k^2 + C_k^2 = k(k-1)$ ба $n = 2k+1$ үед мөн адилаар $C_{k+1}^2 + C_k^2 = k^2$ болно. Нийт гурвалжны тоо C_n^2 ба $a_i + b_i = 35$ учир

$$C_n^2 - 0.5 \Sigma_{i=1}^n a_i, b_i - p \geq C_n^2 - 0.5 \Sigma_{i=1}^{17 \cdot 18 - B(36)} = 1326$$

Иймд хуваалтанд орсон нөхцөлийг хангах гурвалжнуудын давхардсан тоо нь 1326-аас багагүй байна. a, b, c жин бүхий $a + b = c$, ($a < b$) байх гурвалжны хамгийн их давталттай орох боломж нь c хамгийн бага байх үед байх нь илэрхий. $c = 3$ үед /ө. х 1, 2, 3 жин бүхий гурвалжныг агуулсан хамгийн их давталт/ 66 байна. $c = 4$ үед 64, $c = 5$ үед 2*62, $c = 6$ үед 2*60, $c = 7$ үед 3*58, $c = 8$ үед 3*56 г. м үргэлжилнэ.

$$66 + 64 + 2 \cdot 62 + 2 \cdot 60 + 3 \cdot 58 + 3 \cdot 56 + 4 \cdot 54 + 4 \cdot 52 + 5 \cdot 50 + 5 \cdot 48 + \dots$$

Энэ нийлбэр төгслөг алхмын дараа зогсох бөгөөд

$$66 + 64 + 2 \cdot 62 + 2 \cdot 60 + 3 \cdot 58 + 3 \cdot 56 + 4 \cdot 54 + 4 \cdot 52 + 5 \cdot 50 > 1326$$

тэнцэтгэл үнэн байх хамгийн бага утга $p = 4$ үед болно / $p = 3$ үед худал/. Иймд хамгийн муугаар бодоход нөхцөлийг хангах гурвалжны тоо нь $1 + 1 + 2 + 2 + 3 +$

Математикийн олимпиад №17

$+3 + 4 + 4 + (5 - 1) = 24$ болно. Ө: х. дурын аргаар хуваахад хуваалтын аль нэг ангид ордог $a + b = c$ ($a < b$) байх дор хаяж 24 гурвал олдоно.

Б4. Гурвалжны оройд $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k (n-k)^m$ үлдэхийг харж болно /индукцээр/.
Одоо $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} k^m C_{n-1}^k x^k$ олон гишүүнт $(x+1)^{n-m}$ -д хуваагдахыг харуулъя. Ө: х

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m C_{n-1}^k x^k = (x+1)^{n-m} G(x) \quad (1)$$

$m = 0$ үед $f_0(x) = (x+1)^n$ болно. $0 < m < n$ байх үед биелэх буюу

$(x+1)^{n-m-1} \mid f_{n-1}(x)$ байг. Харэв $f(x)$ олон гишүүнт $(x-a)^{m+1}$ -д хуваагдах бол $f(x)$ олон гишүүнт $(x-a)^m$ -д хуваагдах учир

$$(x-1)^{n-m-1} \mid [f_{n-1}(x)] = [\sum_{k=0}^{n-1} k^m C_{n-1}^k x^k] = \sum_{k=0}^{n-1} k^m C_{n-1}^k x^{k-1}$$

буюу $(x-1)^{n-m} \mid f_n(x)$ болж батлагдав. (1) -д $x = -1, m = 0, 1, \dots, m-1$ гэж орлуулахад

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k k^m = 0 \quad (2)$$

болно. Одоо манай гурвалжны оройд үлдэх тоо $1993^{1992}, \dots, 2^{1992}, 1$ тохиолдолд 1958! буюу ерөнхий тохиолдолд $n!, (n-1)!, \dots, 2^{n-1}, 1$ тооноос уг хуулиар гурвалжин үүсгэхэд оройд нь $(n-1)!$ үлдэхийг баталъя. Ө: х

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k (n-k)^{n-1} = (n-1)! \quad (3)$$

болохыг баталъя.

$n = m$ үед $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k (m-k)^{m-1} = (m-1)!$ гээд $m \rightarrow m+1$ үеийг авч үзье. /2/-оос $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k (m-k+1)^m = 0$ гэж бичиж болно.

Энэ нь $(m+1)^m - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k+1}) (m-k)^m = (m+1)^m - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k+1}) (m/(m-k+1))^m (m-k)^m = (m+1)^m - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k (m-k)^m - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^{k+1} (m-k)^m = 0$. Эндээс

$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k (m-k+1)^m = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k (m-k)^{m-1} m = (m-1)! m = m!$ болж /3/ батлагдав.

Харэв манай гурвалжин $n!, (n-1)!, \dots, 2^s, 1^s$ ($s \leq n-2$) тоонуудаас үүсэж байвал түүний оройд $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k (n-k)^s$ байна. Энэ нь /2/-той адил гэдгийг харахад төвөггүй. Эндээс $s \leq n-2$ үед гурвалжны оройд 0 /тэг/ үлдэнэ. Одоо дараах гурвалжны оройд $n!$ үлдэхийг баталъя.

$$\{(n+s)^s, (n+s-1)^s, \dots, (s+1)^s, s^s\} = n! \quad (*)$$

$(n+s)^s, (n+s-1)^s, \dots, (s+1)^s, s^s$ тооноос үүссэн гурвалжны оройн тоог $\{\dots\}$ гэж тэмдэглэе.

$s = 1$ үед урд баталсан.

$1 < s < m$ үед биелдэг бол $\{(m+n)^s, (m+n-1)^s, \dots, 2^s, 1^s\}$ гурвалжин авч үзье. Урд үзүүлснээр $\{(m+n)^s, \dots, 2^s, 1^s\} = 0$. Харин $\{(n+1)^s, \dots, 2^s, 1^s\} = n!, \{(n+2)^s, \dots, 2^s\} = n!, \dots, \{(n+m-1)^s, \dots, (m-1)^s\} = n!$ учир манай гурвалжны $(n+1)$ -р мөрөнд $A, n!, \dots, n!$ гэсэн тоо үлдэнэ / $\{(m+n)^s, \dots, m^s\} = A /$. Үүний дараах мөрөнд $A - n!, 0, \dots, 0$ байх буюу улмаар $\{(m+n)^s, \dots, 1^s\} = A - n!$ болов. Энэ нь $A = n!$ болохыг харуулж байна. Иймд $a / \{1993^{1992}, \dots, 35^{1992}\} = 1958!$

Одоо $\{\dots (s+n+1)^s, \dots, s^s\}$ тоог сонирхоё. Тэгвэл

$$\{(n+s)^s, \dots, (s+1)^s, s^s\} \\ \{(s+n+1)^s, \dots, (s+2)^s, (s+1)^s\}$$

гурвалжнуудын оройд үлдэх тоо нь $a /$ -д үзүүлсэн (*) ёсоор бүгд $n!$ учир манай гурвалжны $(s+n)$ дэх мөрөнд зөвхөн $n!$ тоонууд байх ба үүнээс хойших бүх мөрөнд тэг байна. Энэ нь гурвалжны оройд тэг байхыг харуулж байна. Энд $s = 30, n = 1958$ гэвэл $\{\dots, 1989^{1992}, \dots, 30^{1992}\} = 0$ буюу б/ тохиолдол $\{1993^{1992}, \dots, 30^{1992}\} = 0$ болно.

Д. ПҮРЭВСҮРЭН

БҮСИЙН Ү ОЛИМПИАД.

Бүсийн олимпиад нэртэй энэхүү тэмцээн төмөр замын дагуух аймаг хотуудын хооронд 1989 оноос жил бүр уламжлал болон зохиогдож байна. Энэ удаагийн олимпиад 1994 оны 1-р сарын 3-наас 6-нд Төв аймгийн Баянчандмань суманд зохиогдлоо. Тус олимпиадад Төв аймгийн Зуунмод хот, Баянчандмань сумын баг, Дархан, Эрдэнэт хотуудын, Булган, Сэлэнгэ, Дорноговь аймгийн багууд ирж нийт 40 гаруй багш сурагчид оролцон 2 өдөр оюун ухаанаа уралдууллаа. Багш нараас Дарханы Мөнхбат тэргүүн байранд шалгарч 10000 төгрөг, Тэргүүний заах аргач багш цол тэмдгээр, Дарханы Батгэрэл 2-р байрт шалгарч 6000 төгрөгөөр тус тус шагнуулав. Сурагчдаас 10-р ангид Эрдэнэтийн Буд, 9-р ангид Дарханы Баттөмөр, 8-р ангид Булганы сурагч, 7-р ангид Дарханы сурагч тус тус тэргүүн байруудыг эзэлж 2000 төгрөгөөр шагнууллаа. Бүсийн 5-р олимпиад анх удаа хөдөө суманд явагдсанаараа онцлогтой ба Баянчандмань сумын Ганболд захиралтай 2-р арван жилийн сургуулийн хамт олон маш сайхан зохион байгууллаа. Бүсийн олимпиад зохион байгуулахад гүн дэмжлэг туслалцаа үзүүлсэн Төв аймгийн математикийн олимпиадыг зохион байгуулах комиссын гишүүд Намнансүрэн, Тэрбиш, Баасан болон Баянчандмань сумын засаг дарга Алтаншагай нарт Улсын математикийн олимпиадыг зохион байгуулах хорооны өмнөөс талархал илэрхийлье.

Бүх бодлогыг бичих боломжгүй учир цөөхөн оноо авсан болон сонирхолтой хэдэн бодлогуудыг доор сийрүүлье.

1 (VII.A-3). 1, 2, ..., 10 тоонуудын аль ч дараалсан гурвынх нь нийлбэр 15-аас ихгүй байхаар байрлуулж болох уу? Хариуг тайлбарла.

2 (VII.A-1). Зоос цуглуулагчийн цуглуулганд орсон зоос бүрийн диаметр 10 см-ээс хэтрэхгүй. Хэрэв бүх зоосоо 70х30 см хэмжээтэй тэгш өнцөгтөд багтааж болдог бол 60х40 см хэмжээтэй тэгш өнцөгтөд багтааж болохыг батал. /Зоос давхарлахгүй/

3 (IX.A-2). $n \in \mathbb{N}$ бол

$1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \dots + 1/n^2 < 4/5$ болохыг батал.

4 (X.A-1). S_n -н тоо 11-д хуваагдах n -ийн бүх утгыг ол.

5 (X.B-2). S -гурвалжны талбай ба a, b, c гурвалжны талууд бол $a^2 + b^2 + c^2 > 4/3 S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ болохыг батал.

6 (X.B-3). $\forall n \in \mathbb{N}$ хувьд $I_g(n+1) > 3/(10n) + I_g n$ гэж батал.

7 (X.A-2). ABC гурвалжны хувьд AC талтай параллель шулуун AB, BC талуудыг харгалзан A_1B_1 цэгүүд огтолно. AC тал дээрхи M цэгийн хувьд BM ба A_1B_1 хэрчмүүдийн огтлолын цэгийг O гэе. AA_1OM дөрвөн өнцөгтөд багтсан тойргийн радиусыг r_1 , OBB гурвалжинд багтсан тойргийн радиусыг r_2 , ABC гурвалжинд багтсан тойргийн радиусыг r гэе. Тэгвэл $r = r_1 + r_2$ болохыг батал.

8 (B.A-4). $b < 0, ab = 9c$ бол $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ тэгшитгэл гурван ялгаатай бодит язгууртай болохыг батал.

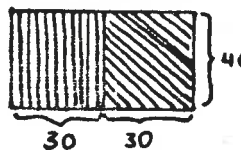
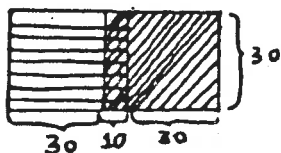
9 (B.B-1). Нэгэн улс төгсгөлөг тооны хотуудтай ба тэдгээрийн зарим нь нэг чиглэлт замуудаар холбогджээ. Хэрэв аль ч хоёр хотыг тэдгээрийн аль нэгээс нь нөгөөд хүрч болох тийм хот олдохыг батал.

10 (B.B-2). $y^x = x^y$ тэгшитгэлийн бүх натурал шийдийг ол.

БОДОЛТ.

1. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ -гэж бодлогын нөхцөлийг хангахаар байрлуулсан гэе. Одоо $a_{10} \neq 10$ гэвэл $a_1, a_2, \dots, a_9$ -аль нэг нь 10 байх ёстой. Өгсөн ёсоор $a_1 + a_2 + a_3 \leq 15$, $a_4 + a_5 + a_6 \leq 15$, $a_7 + a_8 + a_9 \leq 15$ учир $45 \geq a_1 + a_2 + \dots + a_9$ ба нэгэнт $a_{10} \neq 10$ учир $45 \geq a_1 + a_2 + \dots + a_9 \geq 10 + 1 + 2 + 3 + \dots + 8 \geq 46$ болж зөрчил үүснэ. Иймд $a_{10} = 10$ байна. Мөн сүүлчийн 9-ийг авч үзэх замаар $a_1 = 10$ гэж баталж болно. Эндээс $a_1 = a_{10} = 10$ болох ба $a_1 \neq a_{10}$ тул бодлогын нөхцөлийг хангахаар байрлуулж болохгүй.

2. Зоос цуглуулагчийн хайрцгийг 1-р зурагдээрх байдлаар хуваая. Тэгвэл зоос бүрийн диаметр 10 см-ээс бага тул ямар ч зоос нэг бол 1 хэсэгт бүхлээр эсвэл II



хэсэгт бүхлээрээ орно. Эдгээрийг 2-р зурагт үзүүлснээр зэрэгцүүлбэл бидний батлах зүйл гарна.

3. $k \geq 2$ байх натурал тооны хувьд $1 + 1/n^k \leq (1/4)(1/(n-1) - 1/n)$ баяхыг хялбархан харж болно. Иймд $1 + 1/2^k + 1/3^k + \dots + 1/n^k \leq 1 + (1/4)(1-1/2) + (1/4)(1/2 - 1/3) + \dots + (1/4)(1/(n-1) - 1/n) = 1 + (1/4)(1 - 1/n) < 1 + 1/4 = 5/4$ болно.

4. $(5, 11) = 1$ ба $5^5 = 1(11)$ учир $n = r(5)$ бол $n = 5^k(11)$ гарна. Эндээс $n = r(5)$ $n = 5^k(5)$ үлдэгдлийг тухай Хятадын теорем ёсоор / "Олонлог" сэтгүүлийн №2-т бичсэн өгүүллийг уншаарай / $n = 11r \cdot 10^k \cdot 5^k + 55t$ хэлбэртэй байна. / Энд $r=0, 1, 2, 3, 4$; $t-r \cdot n > 0$ сонгоно. /

5. Энэхүү тэнцэтгэл бишийг финслер-Хадвигерийн

тэнцэтгэл биш гэж нэрлэдэг ба үүнийг 30-аад оны дундуур нээсэн билээ.

a, b, c нь гурвалжны талууд учир $a=x+y, b=y+z, c=x+z$ гэж бичиж болно. Энд $x, y, z > 0$. Эдгээрийг тэнцэтгэл бишид орлуулбал

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2 \geq 4/3xyz(x+y+z) + (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$$

болно. Эндээс эмхтгэвэл $xy+yz+zx \geq 3/4xyz(x+y+z)$ тэнцэтгэл бишид шилжинэ. Одоо квадрат зэрэг дэвшүүлээд бичвэл

$$(xy+yz+zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z) = 3x^2yz + 3xy^2z + 3xyz^2$$

болох ба үүнийг батлахад хангалттай. Дээрх тэнцэтгэл бишийг задлаад бичвэл $x^2(y-z)^2 + y^2(y-x)^2 + z^2(x-y)^2 \geq 0$ болж батлагдана.

6. Тэнцэтгэлийг $\lg(1 + 1/n^k) \geq 3/10$ гэж хувиргаж бичье. Бернуллийн тэнцэтгэл бишийг ашиглавал

$$n \in \mathbb{N}, (1 + 1/n^k) \geq 2 \text{ тул } \lg(1 + 1/n^k) \geq \lg 2 = \lg 1024 / 10 > \lg 1000 / 10 = 3/10$$

7. Энэ бодлогыг батлахын өмнө нэг лемм баталъя.

ЛЕММА: ABCD трапецийн AB, CD хажуу талууд S цэгт огтлолцдог ба AD их суурийн D оройгоос BC талын үргэлжлэл рүү буулгасан перпендикулярын суурийг D₁ гэе. Тэгвэл ABCD трапецэд тойрог багтах гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $AS + CD_1 = SC + AD$ байх явдал мөн.

Баталгаа: $\Rightarrow$ A, S, D, C цэгүүдээс тойрогт татсан шүргэгчийн утгуудыг харгалзан x, y, z, t гэе

$$\left. \begin{aligned} AS &= x+y \\ AD &= x+z \\ SC &= y-t \\ C_1D_1 &= z-t \end{aligned} \right\} AS + CD = x+y+z-t = AD + SC \text{ болно.}$$

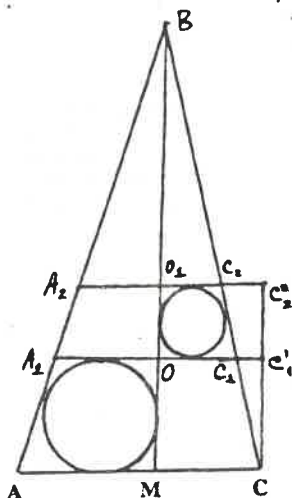
$\Leftarrow$ $AS + CD_1 = SC + AD$ гэе. BC, AD, CD-ийг шүргэсэн тойрог татъя. S-цэгээс уг тойрогт шүргэгч татъя. AD-шулууныг огтлох цэгийг A₁ гэе.

$A \neq A_1$ бол $AS + CD_1 = SC + AD$ ба өмнөх ёсоор $A_1S + CD_1 = SC + A_1D$ болох бөгөөд $AS - A_1S = AD - A_1D = AA_1$ байна. Гэтэл энэ нь A₁AS гурвалжны хувьд гурвалжны тэнцэтгэл бишид харшлах тул $A = A_1$ болж батлагдав.

Одоо бодлогодоо орёе:

BOC₁ гурвалжинд багтсан тойрогт AC-тэй параллель шүргэгч татъя. AA₁OM трапец тул лемм ашиглая. $AB + OC' = AC + BO$. O₁C₂C₁O-трапец тул лемм ёсоор $BO + C_2C' = OC' + BC$, ба эдгээрийг нэмбэл $AB + OC' + BO + C_2C' = AC + BO + OC' + BC$, ба $AB + C_2C' = AC + BC$ болж лемм ёсоор AA₂C₂ трапецэд тойрог багтах ба иймд $r=r_1+r_2$ болж батлагдав.

8. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ гэе $b < 0$ ба $ab = 9c$ нөхцөлөөс $a=0$ бол $c=0$, $a \neq 0$ бол $c \neq 0$ ба эсрэг тэмдэгтэй тоонууд байна.



а/ $a=0$ бол $f(x)=x^2+bx$ болох $f(x)=0$ тэгшитгэл $x_1=0$, $x_2=-b$, $x_3=-b$ гэсэн ялгаатай гурван бодит язгууртай.

$$(*) \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$$

б/ $a > 0$ бол $f(-a) = -ab + c = -8c > 0$
 $f(0) = c < 0$

эндээс уг тэгшитгэл $-a$ -аас бага нэг шийдтэй. $-a; 0$ завсарт нэг шийдтэй; 0 -ээс их бодит шийдтэй. $(*)$ -ийг анхаар) Иймд 3 ялгаатай шийдтэй.

в/ $a < 0$ үед мөн адилаар баталж болно.

9. Хамгийн олон хотод хүрч болдог хотыг А гэе. Хотын тоо төгсгөлөг учир тийм хот олдоно. Энэ нь бодлогын нөхцөлийг хангана гэж батлая. Хэрэв А хотоос В хотод хүрч болдоггүй гэвэл В-ээс А-д хүрч болно. Эндээс В-ийн хүрч болох хотын тоо А-с олон болж А-ийн сонголтод харшилна.

10. p -анхны тооны хувьд $p(x)$ -ээр x -ийг хуваах p тооны хамгийн их зэргийг тэмдэглэе. Тэгвэл $\forall a, b, k \in \mathbb{N}$ тоонуудын хувьд

$$1. p(ab) = p(a) + p(b)$$

2. $p(a^k) = k p(a)$ гэсэн чанарууд биелнэ гэдэг нь ойлгомжтой.

x, y -натурал тоонууд ба $y = x$ гэвэл ямар ч p анхны тооны хувьд

$$(*) \quad x^y p(y) = y^x p(x)$$

байна $(*)$ -оос $p(x) > 0 \iff p(y) > 0$

Түүнчлэн $x=1 \iff y=1$ ба $x>1 \iff y>1$ байна. Иймд $x \geq 2, y \geq 2$ үед авч үзье. Хэрэв ямар ч анхны тооны хувьд $p(x)=p(y)$ бол $x=y$ байна. Эндээс $(*)$ нь $x=y=n (\forall n \in \mathbb{N})$ гэсэн шийдтэй. Одоо $(*)$ $y = x$ байх шийдгүй гэдгийг батлая.

Хэрэв $x > y$ гэвэл ямар нэг q анхны тооны хувьд $q(x) > q(y) > 0$ байна. Иймд $(*)$ -оос

$$(**) \quad x^y > y^x$$

гэж гарах ба ямар ч $p(x) > 0$ байх p анхны тооны хувьд $p(x) > p(y) > 0$ болно. Өөрөөр хэлбэл: $x=y_n (n \geq 2)$ болно. $\forall y \geq 2, \forall n \geq 2$ бүхэл тоонуудын хувьд $y^n \geq n y$ болохыг батлая.

$$n=1 \text{ үед } y^2 - 2y = y(y-2) \geq 0 \text{ болж үнэн}$$

$$n=s \text{ үед } y^s \geq s y \text{ байдаг гэе.}$$

$n=s+1$ үед $y^{s+1} = y^s y \geq s y^2 \geq (s+2)y$ болж батлагдав. Тэгвэл $(**)$ -с $x^y > y^x = (y^s)^y \geq (my)^y = x^y$ болж зөрчилд хүрнэ. Бодлого бодогдоо.