

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХХ ОЛИМПИАДЫН
ДҮНГИЙН ТУХАЙ

Ц.Дашдорж

Монголын Математикийн ХХХ олимпиад 1994 оны 5-р сарын 6-ны өдрөөс мөн сарын 10-ны өдрүүдэд Эрдэнэт хотод амжилттай явагдаж дүнгээ гаргалаа. Энэ удаагийн олимпиадад 18 аймаг, 4 хотын 56 багш, 131 сурагч мөн ОХУ-ын Буриад, Халимагийн баг математикчид оролцсон нь манай олимпиадын хүрээг тэлсэн үнэхээр сайхан үйл явдал боллоо. Монгол туургатны дунд явагдсан энэхүү анхны олимпиадыг зохион байгуулахад ихээхэн хүч чармайлт гарган бүхий л нөхцөл бололцоогоор хангаж өгсөн Эрдэнэт хотын засаг дарга Доржпалам, олимпиадыг зохион байгуулах Эрдэнэт хотын комиссын дарга, хотын дэд дарга Жадамбаа, Хотын захиргааны нийгмийн бодлогын хэлтсийн мэргэжилтэн С.Цэндсүрэн, Судалгаа арга зүйн төвийн эрхлэгч М.Баасай, Д.Жамбал захиралтай 1-р сургуулийн хамт олон, багш Р.Чинбат, Сургалт үйлдвэрлэлийн төвийн захирал Г.Монхдой, IY арван жилийн захирал Б.Вямбадорж, Хотын АХГЗ-ны ерөнхий ня-Со Л.Гадинхүү, худалдааны улсын байцаагч Х.Ганболд, Отгонбат захиралтай Сэлэнгэ зочид буудал ресторан, гуанзны хамт олон, Эрдэнэт хотын олимпиадын комисст мэргэжлийн гүн тусалцаа үзүүлсэн ОЗБХ-ны гишүүн УБИС-ийн багш Ц.Лувсандорж болон олимпиадыг зохион байгуулах комиссын нэрийн өмнөөс гүн талархал илэрхийлье.

Олимпиадад YIII ангийн нийт 45 сурагч оролцсоноос Улаанбаатар хотын 1-р сургуулийн сурагч Ц.Пүрэвдорж (багш нь Н.Энхбаатар) 20 оноогоор 1-р байр эзэлж Улсын математикийн ХХХ олимпиадын YIII ангийн аварга боллоо. Удаах байруудад Улаанбаатар хотын 1-р сургуулийн сурагч Ц.Амарбат (багш нь Н.Энхбаатар) 19,5 оноогоор, Улаанбаатар хотын 11-р сургуулийн сурагч Б.Баяржаргал (багш нь Т.Баяртөгс) 15,5 оноогоор II байр, Баянхонгор аймгийн Г.Баярмагнай (багш нь Б.Баяржаргал) 14 оноогоор, Улаанбаатар хотын 11-р сургуулийн сурагч Цогбадрал (багш нь Т.Баяртөгс) 14 оноогоор, Булган аймгийн Р.Норжинлхам (багш нь Н.Даавий-од) 13,5 оноогоор III байр эзэллээ. Мөн буриадын багийн Емельянова Татьяна (багш нь Зайцева Ольга Вилорьевна) шагналт байр эзэлсэн байна.

IX ангийн нийт 42 сурагч оролцсоноос Улаанбаатар хотын 1-р сургуулийн сурагч Т.Бадарсан (багш нь Д.Нарангэрэл) 16 оноогоор 1-р байр эзэлж IX ангиудын аварга сурагч боллоо. Удаах байруудад Улаанбаатар хотын 11-р сургуулийн сурагч О.Батбаатар (багш нь Ш.Мөнхцэцэг) 15 оноогоор, МУУИС-ийн сурагч В.Батбаясгалан (багш нь Ж.Батболд) 15 оноогоор II байр, Улаанбаатар хотын 11-р сургуулийн сурагч З.Мөнхзул (багш нь Ш.Мөнхцэцэг) 13,5 оноогоор, Улаанбаатар хотын 11-р сургуулийн сурагч Я.Өлзийболд (багш нь Ш.Мөнхцэцэг) 12,5 оноогоор, Улаанбаатар хотын 1-р сургуулийн сурагч Ц.Чимэддорж (багш нь Д.Нарангэрэл) 10 оноогоор III байр эзэллээ.

X ангийн нийт 44 сурагч оролцсоноос Улаанбаатар хотын 12-р сургуулийн сурагч Ү.Отгонбаяр (багш нь Г.Ганбат) 23 оноогоор Улсын математикийн ХХХ олимпиадын Үнэмлэхүй аваргаар шалгарлаа. Удаах байруудад Улаанбаатар хотын 1-р сургуулийн сурагч Баярпүрэв (багш нь Г.Баяраа) Улаанбаатар хотын 11-р сургуулийн сурагч Д.Амгалан (багш нь Г.Ганбат) 15 оноогоор, Сүхбаатар аймгийн Т.Ичинхорлоо (багш нь М.Эрдэнэ), МУУИС-ийн сурагч С.Энхбаяр (багш нь Ц.Дашдорж), Говь-Алтай аймгийн Д.Баярсайхан (багш нь Ц.Сэвжид) нар тус бүр 8 оноогоор III байр эзэллээ. Улаанбаатар хотын 12-р сургуулийн сурагч Чинзориг (багш нь Г.Ганбат), Б.Батзаяа (багш нь С.Бээжинсан) 7,5 оноогоор шагналт байранд шалгарлаа.

Олимпиадад сурагчдаа амжилттай сайн бэлтгэсэн дээрх сургууль болон нэр дурдсан багш нарт ОЗБХ-ны нэрийн өмнөөс гүн талархал илэрхийлье. Багш нарын олимпиад амжилттай явагдаж өнгөрлөө. Увс аймгийн төвийн 10 жилийн багш Д.Бат-Орших аварга боллоо.

Олимпиадад математикийн аварга болсон Увс аймгийн 1-р X жилийн багш Д.Бат-Орших бол олон жил олимпиадад тогтмол амжилттай оролцож байсан юм. Тухайлбал 28-р олимпиадын III байрын шагналт, 29-р олимпиадын дэд аварга багш юм. Олимпиадад олон сайн багш нар оролцож оюун ухаанаа уралдуулснаас 11-р сургуулийн багш Ш.Мөнхцэцэг, Дархан хотын багш Д.Батгэрэл нар II, III байр эзэлж сайхан амжилт үзүүллээ.

Олимпиадад оролцож уран бодолт хийж авьяас чадвараараа шалгарсан X ангийн сурагч Ү.Отгонбаяр, Д.Амгалан, Баярпүрэв, Т.Ичинхорлоо, С.Энхбаяр, Д.Баярсайхан, Чинзориг, Х.Буд, Б.Батзаяа нар, IX ангийн сурагч Т.Бадарсан, О.Батбаатар, В.Батбаясгалан нар

Гонконгод болох Олон улсын математикийн 35-р олимпиадын бэлтгэлд үлдээлээ. Мөн өнгөрсөн жилийн IX ангийн аварга, математикч П.Энхболдын нэрэмжит Улсын анхдугаар уралдааны аварга, энэ жилийн Улаанбаатар хотын дэд аварга 11-р сургуулийн сурагч С.Цогзолмаа өвчний учир Олимпиадын сүүлийн даваанд оролцож чадаагүй боловч Олимпиадыг зохион байгуулах хорооны шийдвэрээр олон улсын математикийн олимпиадын бэлтгэлд үлдээлээ.

УБ хотын 11-р сургуулийн VIII сурагч Ц.Цогбадрал П.Энхболдын нэрэмжит уран бодолтын шагнал хүртлээ.

Олимпиадад оролцсон нийт багуудаас В.Адьяасүрэн ахлагчтай "Олонлог" баг тэргүүн байранд шалгарч шилжин явах цомыг хүлээн авах эрхтэй боллоо. Удаах байранд Ч.Даваадорж ахлагчтай УБ хотын баг, Н.Давий-Од ахлагчтай Булган аймгийн баг II, III байранд шалгарлаа. Ийнхүү "Олонлог" баг дараа жилийн олимпиадад 1 сурагч, УБ баг 2 хүн, Булган аймаг 1 хүн дараа жилийн олимпиадад илүү оруулах эрхтэй боллоо.

Багуудын уламжлалт хэлэ тэмцээнд УБ хотын 11-р сургуулийн Т.Баяртөгс ахлагчтай сурагчдын баг 41 оноогоор түрүүлж багийн тэмцээний салхийг анх хагаллаа.

Манай олимпиадыг ивээн тэтгэгчдийг танилцуулъя. Үүнд:

-Эрдэнэт хотын АХГ Захиргаа 1 сая төгрөг

-Эрдэнэт хивс компани 300 мянган төгрөг

-Өргөн хэрэглээ хувьцаат компани 50 мянга

-Холбооны газар 10 мянган төгрөгийн хандив оруулж манай өнөөдрийн үйл ажиллагааг амжилттай явуулах үндсийг хангалаа.

Одоо математикийн XXX олимпиадад урилгаар оролцогсдыг танилцуулъя.

-Дундговь аймгийн 1-р сургуулийн захирал Н.Өлзий

-МУУИС-ийн декан С.Тогмид

-УИХ-ын гишүүн А.Ганбаатар

-Архангай аймгийн нийгмийн бодлогын хэлтсийн дарга Чадраабал

-Ахмад багш Ж.Пүрэвжав, Б.Пүрэвжав, Б.Жүгдэр

Мөн манай олимпиадын нээлтэд ШУБЯ-ны сайд профессор Өлзийхутаг оролцож уг хэлснийг та бүхэн мэдэж байгаа.

Манай энэ удаагийн олимпиадаар монголын математикийн олимпиадын түүхэнд шинэ хуудсыг нээсэн 3 үйл явдал боллоо. Үүнд:

1-рт манай олимпиад хүрээгээ тэлж цаашид монгол туургатны хэмжээнд явагдах сайхан хандлагыг оллоо. 2-рт "Олонлог" баг анх удаа бие даан оролцож багийн дундаж дүнгээр тэргүүн байр эзэллээ. 3-рт манай олимпиадад урилгаар оролцож буй математикийн боловсрол, монголын математикийн хөгжилд зүрх сэтгэлээ өгсөн Дундговь аймгийн 1-р сургуулийн захирал ахмад багш Н.Өлзийгийн санаачлагаар сургуулиудын халз тэмцээн нээгдлээ. Өлзий багшийн уриалгыг Ү.Маам ахлагчтай 11-р сургуулийн баг дуртайяа хүлээн авч хоёр сургуулиасаа анги бүрээр баг гарган уриалан дуудагч Дундговь аймгийн нутагт ирэх жил математикийн бооцоот тэмцээн хийхээр тохиролцлоо. Бооцоо 200 мянган төгрөг. Энэхүү бооцоог тохиролцож байх үед хөндлөнгийн гэрчээр байлцсан Дундговь аймгийн харьяат одоо Эрдэнэт хотод амьдарч ажиллаж байгаа Л.Батаагийн гэр бүлийнхэн дэмжиж энэ тэмцээний хамгийн залуу шилдэг математикчийг 10 мянган төгрөгөөр, мөн бооцоо хийх үед байлцсан комиссын гишүүн Б.Түмэндэмбэрэл уран бодлогын шагналд нэг сарын цалин буку 10 мянган төгрөг гаргаж энэ тэмцээний мэдээлэл сурталчилгааг хариуцахаар амлалаа.

Ирэх жилийн 31-р олимпиадыг зохион байгуулах хүндтэй бөгөөд хариуцлагатай үүргийг хүлээн авсан Архангай аймгийн засаг дарга, тамгын газар, Архангай аймгийн нийгмийн бодлогын хэлтэс, үүнийг биечлэн хүсэмжилж ирсэн Л.Чадраабал болон тус аймгийн арван жилийн сургуулийн багш сурагчид Архангайчуудад мөн түүнчлэн олимпиадыг өөрийн орон нутагтаа хийх хүсэлт тавьж байгаа Төв, Хөвсгөл, Хэнтий аймгийн Бор-Өндөр, Сүхбаатар аймгийн бүтээлч багш сурган хүмүүжүүлэгчдэд нийт оролцогчдынхоо нэрийн өмнөөс гүн талархал илэрхийлье.

Энэ олимпиадад амжилттай оролцсон нийт багш сурагчид Та бүгдийн цаашдын ажил үйлсэд амжилт бүтээл сайн сэйхныг хүсэн ерөөе.

УМО-30-ИЙН YII АНГИЙН III ДАВААНЫ БОДЛОГУУД

Ц.Лувсандорж, Ш.Баттүвшин

A1. $x^2+ax+6a=0$ тэгшитгэл бүхэл тоон шийдтэй байх бүх a -тоог ол.

A2. 8×8 хүснэгтийн нүд бүхэнд 1-гэсэн тоо бичигдсэн 3×3 квадратыг дураараа сонгон авч, түүний нүднүүдэд бичигдсэн тоонууд дээр нэгэн зэрэг 1 гэсэн тоо нэмж бичнэ. Энэхүү үйлдлийг хийсний эцэст дөрвөн булан дахь 4 нүднүүдэд бичигдсэн тоонуудын нийлбэр 1994 байх 4×4 квадратыг гаргаж болох уу?

A3. 3 талтай квадратын оройнууд цагийн зүүний чиглэлд зэрэгцээ орой руугаа нэгэн зэрэг ижил хурдтайгаар хөдөлж, нийт замынхаа $\frac{1}{3}$ хэсгийг яваад зогсоно. Үүссэн байдлаас дээрхи маягаар цэгүүд үргэлжлэн хөдөлнө. Хэдэн алхмын дараа эдгээр дөрвөн цэг нэгж радиустай дугуйд агуулагдах вэ?

B1. $a+b+c=0$ бол $\frac{a^7+b^7+c^7}{7} = \frac{a^5+b^5+c^5}{5} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$ болохыг батал.

B2. 7×7 квадратыг хэлбэрийн дүрсүүдэд хуваав. Энэхүү хуваалтанд дөрвөн нүднээс тогтсон дүрс ганц оролцоно гэж батал.

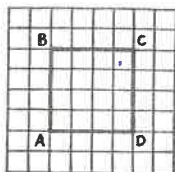
B3. Тойрог дээр A цэг, түүний дотор D цэг өгөгдөв. D цэгийг дайрсан аливаа BC хөвчөөр үүсэх ABC гурвалжны хүндийн төвийг M гээ. M цэгийн геометр байрыг ол.

БОДОЛТ

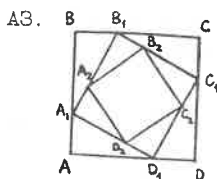
A1. Өгсөн тэгшитгэлийн бүхэл тоон шийдийг (m, n) гэвэл Виетийн теоремоор $a=-(m+n)$ ба $a=mn$ буюу $-6(m+n)=mn$ болно. Эндээс $mn+6n+6m+36=36$ буюу $(m+6)(n+6)=36$ болсноор бидний сонирхож буй утгаар боломжит (m, n) хосууд нь $(-42, -7), (-24, -8), (-18, -9), (-15, -10), (-12, 12), (-5, 30), (-4, 12), (-3, 6), (-2, 3), (0, 0)$ байна.

Одоо $a=-(m+n)$ гэдгээс бодлогын нөхцөлийг хангаж байх а коэффициент 49, 32, 27, 25, 24, -25, -8, -3, -1, 0 гэсэн утгууд авах болж байна.

A2. Зураг дахь ABCD квадратыг сонгон авъя.



Одоо ямар ч 3×3 квадратыг сонгон авахад уул квадрат ABCD квадратын аль нэг буланг заавал агуулсан байх нэг инвариант олдлоо. Иймд 1990 удаа 3×3 квадратыг дураараа сонгон авч бодлого дахь үйлдлийг хийхэд бодлого бодогдоно.

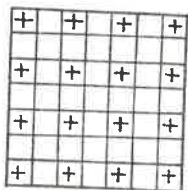


Алхам бүхний дараа үүсэх квадратуудын төвүүд давхцаж буй нь мэдээж юм. Нэгж радиустай тойрог дотор орших квадратын тал $\sqrt{2}$ -ээс хэтрэхгүйг тэмдэглэвэл гурван алхам хийхэд хангалттай юм.

Б1. Энэхүү бодлогыг харьцангуй олон сурагч бодсоныг тэмдэглэн энд хүндрэл байхгүй. Тооцооноос зайлсхийн гол санааг хэлье.

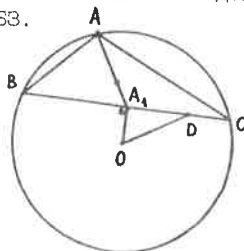
$$-(a+b)=c \text{ гэдгээс } \frac{a^7+b^7-(a+b)^7}{7} = \frac{a^5+b^5-(a+b)^5}{5} - \frac{a^2+b^2+(a+b)^2}{2}$$

тэнцлийг батлахад хүрэх бөгөөд одоо хоёр талын хаалтыг задлан төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэсний дараа батлагдах зүйл харагдаж билээ.



байна. Одоо ийм байдлаар хуваалт хийж олон янзаар харж болохыг тэмдэглэхэд бодлого бодогдов.

Б3.



ABC гурвалжны A оройн медианы суурь A_1 цэгийн геометр байр OD диаметр бүхий γ тойрог болох нь харагдаж байна. Одоо A цэгт төвтэй, $\frac{1}{3}$ коэффициенттэй гомотет авч үзвэл $H^3(\gamma)_{A_1}$ тойрог бидний сонирхож буй цэгийн геометр байр билээ.

A1. $\overline{xy} = \sqrt{\overline{ztuv}}$ нөхцлийг хангадаг $\overline{xy}, \overline{zt}, \overline{uv}$ гэсэн хоёр оронтой тоонууд нь арифметик прогресс үүсгэдэг бол уул тоонуудыг ол.

A2. 1993х1994 хэмжээтэй хүснэгтийн нүд бүхэнд 0 эсвэл 1 гэсэн тоог ээлжээр бичиж 2 сурагч тоглоно. Уул хүснэгтийн мөрнүүд дахь 1993 ширхэг нийлбэрийн хамгийн ихийг А, баганууд дахь 1994 ширхэг нийлбэрийн хамгийн ихийг В гэж тус тус тэмдэглэе. Хүснэгтийг бөглөж дууссаны дараа $A > B$ бол I тоглогч, $A \leq B$ бол II тоглогч хождог байхаар тохиролцов. Энэ тохиролцоо хэнд нь ямагт ашигтай вэ?

A3. Элдэв талт ABC гурвалжны хүндийн төв, өндрүүдийн огтлолцлын цэг, уул гурвалжинд багтсан тойргийн төв цэгийг харгалзан М, Н, К үсгээр тэмдэглэе. МНК гурвалжин мохоо өнцөгт болохыг батал.

B1. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1$ байх a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 сөрөг биш тоонуудын хувьд $(3+a_1)(3+a_2)(3+a_3)(3+a_4)(3+a_5) > 1024(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)(1-a_5)$ болохыг батал.

B2. 9×9 квадратыг хэлбэрийн дүрсүүдэд хуваав. Энэхүү хуваалтад 4 нүднээс тогтсон дүрс хамгийн олондоо хэд оршсон байх вэ?

B3. а, b, c талууд бүхий ABC гурвалжны А оройн дотоод өнцгийн биссектрисийг агуулж буй шулуунд В цэгээс буулгасан перпендикулярын суурийг Р, ВС хэрчмийн дунджийг A_1 гэвэл A_1P зайг ол.

БОДОЛТ.

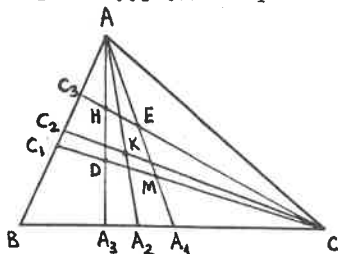
$$A1. \overline{xy}=a, \overline{zt}=b, \overline{uv}=c \text{ гэж тэмдэглэвэл } \begin{cases} a^2=100b+c \\ 2b=a+c \end{cases}$$

гэдгээс $a^2=50a+51c$ буюу $a(a-50)=51c$ болно. Энд $51 < a < 100$ ба $a(a-50)$ тоо 51-д хуваагдаж байх ёстойг санавал $a=68$ эсвэл $a=84$ байх билээ. Иймд (68, 46, 24); (84, 10, 56) гэсэн тоонууд бодлогын нөхцлийг хангаж байна.

A2. I тоглогчийн тоог тавьсан мөр бүхэнд II тоглогч энэ мөрөнд нөгөө тоог тавих бодлогыг баримтлан тоглосон гее. II тоглогч энэхүү бодлогоо баримталж тоглолтыг дуусгасны дараа

хүснэгтэнд тавигдсан бүх тоонуудын нийлбэрийг бодож үзье. Хэвлэл нэг талаас яг 1993-997 ба нөгөө талаас багана бүхэн дахь нийлбэрийг хамгийн ихээр сольж бодвол 1994-В -ээс хэтрэхгүй байх юм. Өөрөөр хэлбэл, $1993-997 \leq 1994-В$. Эндээс $В \geq 997$ байх болсноор дээрх бодлогыг баримтлан тоглож л чадвал II тоглогч ямагт хожих юм байна.

А3. ABC элдэв талт хурц өнцөгт гурвалжны хувьд бодлогыг эхлээд авч үзье. $BC > AC > AB$ гэж үзэж, А оройн медиан, биссектрис, өндрийн сууриудыг харгалзан A_1, A_2, A_3 үсгээр тэмдэглэвэл A_3 цэг



A_2, C цэгүүдийн хооронд орших нь мэдээж билээ. Аливаа гурвалжны нэг оройн медиан, өндрүүдээр тодорхойлогдох шулуунуудын хооронд биссектрис шулуун байдгийг тэмдэглэвэл зураг дахь HMEД дөрвөн өнцөгт дотор К цэг оршиж буйг харахад л бодлого бодогдох

юм. А оройн медиантай С оройн өндрийн огтлолцлын цэг Е, А оройн өндөртэй С оройн медианы огтлолцлын цэг D гэдгээс $\angle HDM > 90^\circ$, $\angle HEM > 90^\circ$ болсноор Е, D цэгүүд НМ диаметртэй тойрог дотор орших болсноор $\angle HKM > 90^\circ$ болох нь ч батлагдав. ABC гурвалжин элдэв талт мохоо байх үед яг дээрх адилаар баталгаа хийгдэх юм.

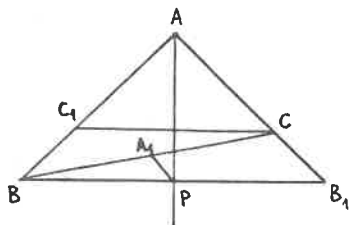
В1. Өгөгдсөн нөхцлөөс $3+a_1=(1-a_2)+(1-a_3)+(1-a_4)+(1-a_5)$ гэж гарна. Арифметик-геометрийн дундажийн теорем хэрэглэвэл

$(3+a_1) \geq 4\sqrt[4]{(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)(1-a_5)}$ болно. Энэхүү санааг цааш давтах замаар батлан тэнцэл бишийг гаргана.

В2. VII ангийн В2 бодлогод хийсэнтэй төстэй тооцоог хийхэд $u < 6$ гэж гарна. Ийнхүү бодлогын нөхцлийг хангахаар хуваах хуваалтанд 4 нүднээс тогтсон дүрс 6-аас илүүгүй оролцоно. Олимпиадад оролцсон нилээд хэдэн сурагч 4 нүднээс тогтсон дүрс 6 оролцсон хуваалтыг хэд хэдэн хувилбараар хийсэн байв. Ийм хуваалтыг бие даан хийцгээхийг санал болгож байна. Иймээс бодлогын нөхцлийг хангах хуваалтанд 4 нүднээс тогтсон дүрс хамгийн олондоо 6 оролцсон байна.

В3.

ABC гурвалжны талууд биссектрис



шулууныхаа хувьд тэнхлэгийн
тэгш хэмтэй оршдог болохыг
санавал $CB_1 = BC_1 = c - b$ болно.
 A_1, P цэгүүд харгалзан BB_1, BC
хэрчмүүдийн дундажууд учир

$$A_1P = \frac{|b-c|}{2} \text{ болж бодлого}$$

бодогдов.

УМО-30-ИЙН YIII АНГИЙН IY ДАВААНЫ БОДЛОГУУД

В.Адъяасүрэн, Ц.Лувсандорж

A1 (Хашбаяр). N натурал тосн олонлогийг аль ч хэсэг нь
ялгавар нь $10^m (m \in \mathbb{N})$ байх 2 тоо ороогүй байхаар хувааж болох
хамгийн бага хуваалтын тоо k -г ол.

A2 (Адъяасүрэн). 1994х1994 хэмжээстэй таблицын нүд бүхэнд
модулиараа 1-ээс үл хэтрэх тоонууд бичив. Өгөгдсөн таблицын аливаа
 3×3 хэмжээстэй квадратын нүднүүдэд бичигдсэн тоонуудын нийлбэр
төгтөй тэнцүү бол таблицад бичигдсэн бүх тоонуудын нийлбэр
3324-аас хэтрэхгүй гэж батал.

A3 (Лувсандорж). R радиустай тойрогт багтсан аливаа гурвалжны
хамгийн бага биссектрисийн урт $\frac{3R}{2}$ -оос хэтрэхгүйг батал.

B1. x, y, z нь $x+y+z=1$ нөхцлийг хангах сөрөг биш тоонууд бол
 $xy+yz+zx-3xyz \leq \frac{1}{4}$ болохыг батал.

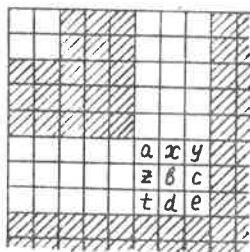
B2 (Р.Отгонбаатар). Хавтгайн ямар ч шулуун авахад уг шулууныг
ядаж нэг цэгээр огтлох тасралтгүй муруй өгөгджээ. Тэгвэл 3 ба
түүнээс дээш цэгээр огтлох ядаж нэг шулуун олдохыг үзүүл.

B3. Диагналууд нь O цэгт огтлолцдог $ABCD$ гүдгэр дөрвөн
өнцөгтийн AOB, BOC, COD, DOA гурвалжнуудыг багтаасан тойргуудын
төвүүд дээр оройтой дөрвөн өнцөгтийн диагналуудын нийлбэр нь өгсөн
дөрвөн өнцөгтийн талуудын арифметик дундаас их болохыг батал.

БОДОЛТ

A1. Эхлээд натурал тоон олонлогийг аль ч хэсэгт нь ялгавар нь 10^m ($m \in \mathbb{N}$) байх 2 тоо ороогүй байхаар хоёр хэсэгт хувааж болохгүй гэдгийг харуулъя. Үүний тулд 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110 тоонуудыг авч үзье. Эдгээр тоог 10 ба 110 тоонууд хоёр еер хэсэгт, аль ч хэсэг нь дээрх тоонуудаас дараалсан хоёр тоог агуулаагүй байхаар хоёр хэсэгт хувааж болохгүй. Иймээс натурал тоон олонлогийг бодлогын нөхцөл хангахаар 2 хэсэгт хувааж болохгүй. Одоо натурал тоон олонлогийг аль ч хэсэгт нь ялгавар нь 10^m ($m \in \mathbb{N}$) байх 2 тоо ороогүй байхаар 3 хэсэгт хувааж болохыг харуулъя. 3-т хуваахад ижил үлдэгдэл өгдөг тоонуудыг нэг ангид нэгтгэвэл үүсэх гурван хэсэг нь бодлогын нөхцлийг хангана. Учир нь нэг талаас 3 ба 10 тоонууд харилцан анхны, нөгөө талаас нэг ангид орох хоёр тооны ялгавар 3-т хуваагдах учраас нэг ангид орох аль ч хоёр тооны ялгавар 10^m ($m \in \mathbb{N}$)-тэй тэнцэхгүй.

A2. Квадратыг 665 хэсэгт 1-р зурагт үзүүлсэн шиг хуваая.



1-р хэсэгт нь буланд орших 2×2 хэмжээтэй квадрат, 2-р хэсэг нь 5×5 квадратаас 2×2 хэмжээтэй булангийн квадратыг хассан муж, 3-р хэсэг нь 8×8 квадратаас эхний 2 мужийг хассан муж, гэх мэтчилэн хуваасан болно. 2-раас эхлээд 664 хэсэг бүр дэх тоонуудын нийлбэр 5-аас хэтрэхгүй. Бодлогын нөхцөл ёсоор 3×3 хэмжээтэй квадрат дахь тоонуудын нийлбэр тэгтэй тэнцүү. Иймээс энэ муж дахь

тоонуудын нийлбэр $(b+c+d+e-a)$ -тай тэнцүү. Эдгээр хэсэг бүр дэх тоонуудын нийлбэр 5-аас хэтрэхгүй. Цаашилбал таблиц дахь тоонуудын нийлбэр $4+664 \cdot 5=3324$ -өөс хэтрэхгүй.

A3. ABC нь R радиустай тойрогт багтсан гурвалжин болог. Багтаасан тойргийн төвийг нь O, уул гурвалжны хүндийн төвийг M, медиануудын уртыг m_a, m_b, m_c ; биссектрисийн уртыг l_a, l_b, l_c гэе. l_a, l_b, l_c -үүдийн хамгийн багыг л гэе.

$$3R^2 = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 = (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA})^2 + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB})^2 + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC})^2 = 3OM^2 + 2OM \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) +$$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3 \cdot OM^2 + \frac{2}{3} m_a^2 + \frac{2}{3} m_b^2 + \frac{2}{3} m_c^2 \geq \frac{2}{3} (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) \geq \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} a^2 + \frac{2}{3} b^2 + \frac{2}{3} c^2 \right) \geq 21$$

буюу $l \leq \frac{3}{2} R^2$. Энд $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$, $m_a \geq -a$, $m_b \geq -b$, $m_c \geq -c$ болохыг ашигласан

болно.

B1. Батлах тэнцэл бишд x, y, z нь тэгш эрхтэй оролцсон учраас $x \geq y \geq z$ гэж үзэж болно. $0 \leq z \leq y \leq x$ ба $x + y + z = 1$ учраас $3x \geq 1$ буюу $1 - 3x \leq 0$.

$$\text{Иймээс } xy + yz + zx - 3xyz = x(y+z) + yz(1-3x) \leq x(y+z) \leq \left(\frac{x+(y+z)}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \text{ болно.}$$

Ийнхүү батлах тэнцэл биш батлагдав. Тэнцэл биш $x=y=\frac{1}{2}$, $z=0$ үед л тэнцэтгэл болно.

B2. Эсрэгээс нь муруйг 3 ба түүнээс дээш цэгээр огтлох шулуун олддохгүй гэж үзье. Тэгвэл уг муруйг 2 цэгээр огтлох л шулуун татахад түүний нэг талд нь уул муруйн төгсгөлөг урттай хэсэг нь оршино. Энэхүү хэсэгтэй ерөнхий цэггүй, л шулуунтай паралельшулуун татахад уул шулуун өгөгдсөн муруйтай огтлолцохгүй болж харшилд хүрнэ. Иймээс өгөгдсөн муруйг дор' хаяад гурван цэгээр огтлох шулуун олдоно.

B3. AOB, BOC, COD, DOH гурвалжнуудыг багтаасан тойргийн төвийг харгалзан O_1, O_2, O_3, O_4 гээ. $O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4, O_4O_1$ хэрчмүүд нь харгалзан BO, CO, DO, AO хэрчмүүдийг хагаслан хуваана. BO, CO, DO, AO хэрчмүүдийн дундах цэгүүдийг харгалзан M, L, K, N гээ. NM, ML, LK, KN хэрчмүүд нь харгалзан OAB, BOC, COD, DOA гурвалжнуудын дундаж шугам болох тул $AB=2 \cdot NM, BC=2 \cdot ML, CD=2 \cdot LK, DA=2 \cdot KN$. Эндээс $AB+BC+CD+DA=2(NM+ML+LK+KN)$ (1) гэж гарна. $MO_2+O_2L > ML, LO_3+O_3K > LK, KO_4+O_4N > NK, NO_1+O_1M > NM$ гэсэн илт тэнцэл бишүүдээс $NM+ML+LK+KN < O_1O_2+O_2O_3+O_3O_4+O_4O_1$ (2) тэнцэл биш мөрдөн гарна. $(O_1O_3) \cap (O_2O_4) = Q$ гээ. $O_1Q+QO_2 > O_1O_2, QO_2+QO_3 > O_2O_3, QO_3+QO_4 > O_3O_4, QO_4+QO_1 > O_4O_1$ илт тэнцэл бишүүдээс $O_1O_2+O_2O_3+O_3O_4+O_4O_1 < 2(O_1O_3+O_3O_4)$ (3) тэнцэл биш мөрдөн гарна. (1), (2) ба (3) тэнцэл бишүүдээс $O_1O_3+O_3O_4 > \frac{1}{4}(AB+BC+CD+DA)$ гэж гарна.

A1. Ширээг n ширхэг дүрсээр битүү хучив. Тэгвэл үлдэх k ширхэг дүрс ширээний $\frac{k}{n}$ -аас багагүй хэсгийг хучдаг байхаар $n-k$ шир-

хэг дүрсийг сонгон авч болох уу?

A2. $f(x, y)$ нь аливаа натурал n, m -ын хувьд

$$f(1, 1) = 1 \quad (1)$$

$$f(n+1, m) + f(n, m+1) = f(n, m) \quad (2)$$

$$m \cdot f(n+1, m) = n \cdot f(n, m+1) \quad (3)$$

нөхцлүүдийг хангадаг функц бол $f(1994; 30)$ -ийг ол.

A3. Тойрогт багтсан a, b, c, d талуудтай дөрвөн өнцөгтийн талуудыг агуулсан шулуун дээр d урттай хөвчид харгалзах нумын цэгээс h_a, h_b, h_c, h_d перпендикуляруудыг харгалзан татав. Тэгвэл

$$\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c} = \frac{d}{h_d} \text{ болохыг батал.}$$

B1. ABC гурвалжны талууд a, b, c , талбай нь S бол

$$(a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}S)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(a^2(b-c)^2 + b^2(c-a)^2 + c^2(a-b)^2) \text{ болохыг батал.}$$

B2. $m \times n$ хэмжээтэй шатрын хөлөгнөө байрлуулсан k ширхэг тэрэг нүүсээр буудал бүрт тэрэг бүр нэг удаа бууж анхны байрандаа ирцгээв. Тэгвэл нүүдэл бүрийн дараа ямар нэг тэрэг анхны байрандаа байрлаж байх боломж бий юу?

B3. Нэгж эзэлхүүнтэй гүдгэр олон талстын дотор $3 \cdot (2^n - 1)$ ширхэг цэг өгөв. Тэгвэл өгсөн цэгүүдийн алийг нь ч дотоод хэсэгтээ агуулаагүй $\frac{1}{2^n}$ эзэлхүүнтэй олон талст анхны олон талстад агуулагда-

хыг батал.

БОДОЛТ

A1. Болно. Ширээний талбайг нэг нэгж гэж авъя. Ямар нэг дүрсийг сонгон авч түүний бусад дүрсүүдтэй давхцаагүй хэсгийг авч үзье. Дүрс бүрийн хувьд энэ хэсгийн талбайг хэмжье. Тэдгээрийн талбайг $F_1, F_2, \dots, F_n$ гээ. Тэгвэл $F_1 + F_2 + \dots + F_n = 1$. Эдгээр тоонуудын

хамгийн бага $(n-k)$ -ийн нийлбэр нь $\frac{n-k}{n}$ -аас ихгүй. Үүнд харгалзан

$n-k$ дүрсийг сонгон авна.

$$A2. (3) \text{ нөхцлөөс } f(n+1, m) = \frac{n}{m} f(n, m+1)$$

$$f(n, m+1) = \frac{n-1}{m+1} f(n-1, m+2)$$

$$\dots \dots \dots f(2, n+m-1) = \frac{1}{n+m-1} f(1, n+m) \text{ гэж гарна.}$$

$$\text{Эдгээр тэнцэтгэлүүдийг үржүүлбэл } f(n+1, m) = \frac{n}{m} \cdot \frac{n-1}{m+1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n+m-1} f(1, n+m) =$$

$$= \frac{n! (m-1)!}{(n+m-1)!} \cdot f(1, n+m) \quad (4) \text{ болно. } (2) \text{ ба } (3)\text{-аас } f(n, m+1) = \frac{m}{n+m} \cdot$$

$$f(n, m) \quad (5) \text{ гэж гарна. } (5)\text{-аас } f(n, m+1) = \frac{m}{n+m} \cdot f(n, m)$$

$$f(n, m) = \frac{m-1}{n+m-1} \cdot f(n, m-1)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f(n, 2) = \frac{1}{n+1} \cdot f(n, 1) \text{ гэж гарна.}$$

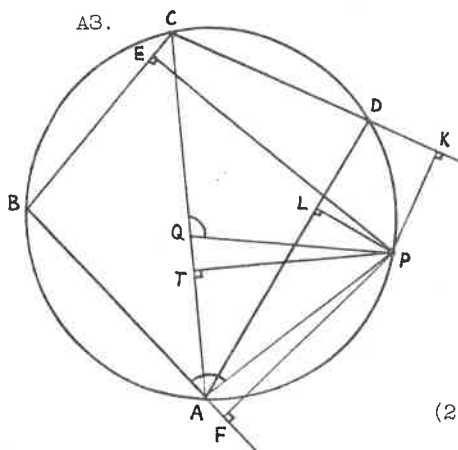
$$\text{Эдгээр тэнцэтгэлүүдийг үржүүлбэл } f(n, m+1) = \frac{m}{n+m} \cdot \frac{m-1}{n+m-1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n+1} \cdot$$

$$f(n, 1) = \frac{m! n!}{(n+m)!} f(n, 1) \quad (6) \text{ болно. Ийнхүү } (4) \text{ ба } (6)\text{-аас}$$

$$f(n+1, m) = \frac{n! (m-1)!}{(m+n-1)!} f(1, n+m) = \frac{n! (m-1)!}{(n+m-1)!} \cdot \frac{(m+n-1)!}{(n+m)!} \cdot f(1, 1) = \frac{n! (m-1)!}{(n+m)!} f(1, 1)$$

$$\text{гэж гарна. } (1)\text{-ыг тооцвол } f(n+1, m) = \frac{n! (m-1)!}{(n+m)!} \text{ болно.}$$

$$\text{Ийнхүү } f(1994, 30) = \frac{1993! \cdot 29!}{2023!}$$



Өгснээр $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$,
 $PF=h_a$, $PE=h_b$, $PK=h_c$, $PL=h_d$.

СА хэрчим дээр Q цэгийг
 $\angle BAP = \angle CQP$ байхаар авъя (1-р
 зураг). Тэгвэл $\triangle CQP \sim \triangle BAP$.
 Иймээс $\frac{a}{h_a} = \frac{CQ}{PT}$ (1). $\angle CBP = \angle CAP$

ба $\angle PQA = 180^\circ - \angle CQP = 180^\circ - \angle BAP =$
 $= \angle BCP$ учраас $\triangle BCP \sim \triangle AQP$.

Иймээс $\frac{b}{h_b} = \frac{AQ}{PT}$ (2). (1) ба

$$(2)\text{-оос } \frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} = \frac{CQ}{PT} + \frac{AQ}{PT} = \frac{AC}{PT} \quad (3)$$

гэж гарна. Үүнтэй адилаар $\frac{c}{h_c} = \frac{AC}{PT} = \frac{d}{h_d}$ (4) гэж батлагдана. (3)

ба (4)-өөс $\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c} = \frac{d}{h_d}$ болно.

Б1. ABC гурвалжны өнцгүүдийг α, β, γ гээ. $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$ гэдгээс

$\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha \leq 2$ (1) гэж гарна. Нөгөө талаас $\sin \alpha = \frac{2S}{bc}$,

$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ тул (1)-д орлуулбал $\sqrt{3} \frac{2S}{bc} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \leq 2 \iff$

$$4\sqrt{3} S + b^2 + c^2 - a^2 \leq 4bc \iff 2b^2 + 2c^2 - 4bc \leq a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3} S \iff$$

$$2(b-c)^2 \leq \{a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3} S\} \iff 2a^2(b-c)^2 \leq a^2 \{a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3} S\} \quad (2)$$

$$\text{Үүнтэй адилаар } 2b^2(c-a)^2 \leq b^2 \{a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3} S\} \quad (3)$$

$$2c^2(a-b)^2 \leq c^2 \{a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3} S\} \quad (4) \text{ гэж батлагдана.}$$

(2), (3), (4)-өөс

$$(a^2 + b^2 + c^2) \{a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3} S\} \geq 2 \{a^2(b-c)^2 + b^2(c-a)^2 + c^2(a-b)^2\} \text{ гэж гарна}$$

Б2. Боломжгүй. Боломжтой гэж үзье. Хамгийн сүүлд хөдлөх тэр-
 гийг F гээ. Тэгвэл F тэргийг хөдлөхийн өмнө ямар нэг тэрэг анхны

байрандаа буцаж ирсэн байх ёстой. Энэхүү төрөг нь F үерэгний байранд бууж чадаагүй тул анхны байрандаа ирж чадаагүй байх ёстой гээд зөрчилд хүрч бодлого бодогдов.

БЗ. Эхлээд ямар нэг олон талстын дурын 2 цэгийг дайруулан түүнийг тэнцүү эзэлхүүнтэй хоёр хэсэгт хуваах хавтгай татаж болно гэж баталъя. Үнэхээр ямар нэг хавтгай татахад түүний эзэлхүүнийг x харьцаанд хуваасан байг. Энэхүү хавтгайг товлон авсан хоёр цэгийг дайрсан шулууныг тойруулан 180° -аар эргүүлэхэд эзэлхүүний харьцаа x -ээс $\frac{1}{x}$ хүртэл тасралтгүйгээр өөрчлөгдөнө. Иймээс $x=1$ байх тийм эгшин олноо. Одоо бодолтдоо орёе.

n -ээр индукцлэн баталъя. 1° . $n=1$ үед өгөгдсөн 3 цэгийг хоёрыг нь дайруулан олон талстын эзэлхүүнийг хагаслан хуваах хавтгай татахад нэг нь дотоод хэсэгтээ өгсөн цэгүүдээс нэгийг ч агуулахгүй. Индукцын суурь шалгагдав. 2° . $n=k-1$ үед батлах зүйлийг үнэн гэж үзээд $n=k$ үед $3(2^k-1)$ ширхэг цэгийн нэгийг ч дотоод хэсэгтээ агуулаагүй $\frac{1}{2^k}$ эзэлхүүнтэй олон талстыг анхны олон талст агуулна

гэж баталъя. Өгөгдсөн $3(2^k-1)$ цэгүүдээс 2-ыг нь дайрсан олон талстын эзэлхүүнийг хагаслан хуваах хавтгай татъя. Эдгээр хэсгийн нэгийг нь дотор $\frac{3(2^n-1)-2}{2} = 3 \cdot 2^{n-1} - 2,5$ -аас хэтрэхгүй цэг оршино. Цэ-

цэгийн тоо бүхэл байх учраас энэхүү хэсгийн доторхи өгөгдсөн цэгийн тоо $3(2^{n-1}-1)$ -ээс илүүгүй. Индукцын таамаглалаар энэхүү хэсгийн дотор $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$ эзэлхүүнтэй бөгөөд өгөгдсөн цэгүүдээс

нэгийг нь ч дотоод хэсэгтээ агуулаагүй олон талст олноо. Ийнхүү индукцын шилжилт батлагдав.

A1 (Баасай, Эрдэнэт).

$$\begin{cases} x^5 + 10x^2y + 5x = 5x^4y + 10x^3 + y \\ y^5 + 10y^2z + 5y = 5y^4z + 10y^3 + z \\ z^5 + 10z^2x + 5z = 5z^4x + 10z^3 + x \end{cases}$$

(1) системийн бүх бодит шийдийг ол.

A2 (Л.Охунцэцэг, ШУА). $a_n = \left[n + \sqrt{5n} + \frac{1}{3} \right]$, $n \geq 1$ дараалалд ороогүй

бүх натурал тоонуудыг ол.

A3 (А.Хашбаатар, МУУИС). ABC гурвалжны АВ, АС талууд дээр харгалзан C_1B_1 цэг авахад BCB_1C_1 дөрвөн өнцөгт тойрогт багтдаг, B_1AC_1O дөрвөн өнцөгт тойрог багтаадаг байхаар сонгож болдог бүх ABC гурвалжныг ол. Үүнд О нь BB_1, CC_1 хэрчмүүдийн огтлолцолын цэг.

B1 (Л.Батхуу, МУУИС охуучин). n нь тэгээс ялгаатай бүхэл тоо. $x^3 + 4y^3 + z^3 + 6xy^2 + 3yx^2 + 3zy^2 = n$ тэгшитгэл тэгсгөлөг тооны бүхэл тоон шийдтэй гэж батал.

B2 (Ш.Батхуу, УБИС). Тойрог дээр $-1, +1$ тоонууд ямар нэг байрлалаар байрлажээ. Тойрог дээр орших тоонууд дээр дараах үйлдлийг хийнэ. Ямар нэг -1 сонгож аваад түүнтэй зэргэлдээ орших тоо ба уг тооны үржвэрийг уг гурван тоог арчаад оронд нь бичнэ. Энэ үйлдэл уг тойрог дээр нэг -1 , эсвэл хоёр -1 , эсвэл бүгд нэмэх нэг болтол үргэлжилнэ. Тэгвэл тухайн байрлалын хувьд үр дүн нь үйлдэл хийх аргаас хамаарахгүй гэж батал.

B3 (В.Адъяасүрэн, ШУА). Хавтгай дээр $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ гэсэн n вектор өгчээ. $|\vec{a}_1| + \dots + |\vec{a}_n| \leq 4\sqrt{2}|\vec{a}_{i_1} + \dots + \vec{a}_{i_k}|$ байх $\vec{a}_{i_1}, \dots, \vec{a}_{i_k}$

гэсэн k векторыг сонгож болно гэж батал.

БОДОЛТ

A1. Систем тэгшитгэлийг бодохын тулд $\text{tg} 5x = \frac{\text{tg}^5 x - 10\text{tg}^3 x + 5\text{tg} x}{5\text{tg}^4 x - 10\text{tg}^2 x + 1}$

томъёог хэрэглэе.

$$(1) \rightarrow \text{өөс } (2) \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{x^5 - 10x^3 + 5x}{5x^4 - 10x^2 + 1} \\ z = \frac{y^5 - 10y^3 + 5y}{5y^4 - 10y^2 + 1} \\ x = \frac{z^5 - 10z^3 + 5z}{5z^4 - 10z^2 + 1} \end{array} \right.$$

$x = \operatorname{tg} t$, $(t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}))$ орлуулга хийвэл (2)-оос

$x = \operatorname{tg} t$, $y = \operatorname{tg} 5t$, $z = \operatorname{tg} 25t$, $x = \operatorname{tg} 125t$. Иймд $\operatorname{tg} 125t = \operatorname{tg} t$, $\operatorname{tg} 125t - \operatorname{tg} t = 0 \Rightarrow$

$$\frac{\sin 124t}{\cos 125t \cdot \cos t} = 0, \sin 124t = 0, t = \frac{\pi n}{124} \quad n \in \mathbb{Z}. \text{ Ийнхүү } x = \operatorname{tg} \frac{\pi n}{124}, y = \operatorname{tg} \frac{5\pi n}{124},$$

$$z = \operatorname{tg} \frac{25\pi n}{124}, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \text{ гэдгийг анхаарвал } n \text{ нь } \{-61; 60; \dots; -1; 0; 1; \dots;$$

$; 60; 61\}$ утгууд авна гэж гарна. Иймээс өгөгдсөн систем 123 ширхэг бодит шийдтэй.

$$\text{А2. } f(n) \stackrel{\text{def}}{=} \left[n + \sqrt{5n+1} \right]_3, \quad n \geq 1 \text{ гээ. } f(n+1) - f(n) = \left[n+1 + \sqrt{5n+5+1} \right]_3 -$$

$$- \left[n + \sqrt{5n+1} \right]_3 = 1 + \left[\sqrt{5n+5+1} \right]_3 - \left[\sqrt{5n+1} \right]_3, \quad \left[\sqrt{5n+5+1} \right]_3 - \left[\sqrt{5n+1} \right]_3 \geq 1 \text{ байг.}$$

$$\text{Тэгвэл ямар нэг } m \in \mathbb{N} \text{-ийн хувьд } \sqrt{5n+1} < m+1 \leq \sqrt{5n+5+1} \iff 5n < m^2 + \frac{4m+4}{9}$$

$$\leq 5(n+1) \iff n < \frac{3m^2+4m}{15} + \frac{4}{45} \leq n+1. \text{ Эндээс } n = \left[\frac{3m^2+4m}{15} \right] \text{ гэж гарна. Нөгөө}$$

$$\text{талаас } f(n+1) = n+2 + \left[\sqrt{5n+5} - \frac{2}{3} \right] \leq n+2 + \left[\sqrt{5n+1} \right] = f(n) + 2 \text{ тул } f(n+1) -$$

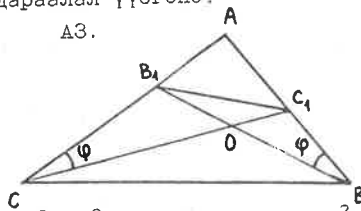
$$- f(n) = \begin{cases} 2, & n = \left[\frac{3m^2+4m}{15} \right] \\ 1, & n \neq \left[\frac{3m^2+4m}{15} \right] \end{cases}$$

Одоо өгөгдсөн дараалалд ороогүй гишүүний хувьд ерөнхий гишүүний томъёо гаргая.

$$\sqrt{5n+1} < m+1 \leq \sqrt{5n+5+1} \quad (*) \text{ байг. Эндээс } \sqrt{5n} < m + \frac{2}{3} \leq \sqrt{5n+5} \iff$$

$5n < m^2 + \frac{4}{3}m + \frac{4}{9} \leq 5n+5 \Leftrightarrow n < \frac{1}{5}\left(m^2 + \frac{4}{3}m + \frac{4}{9}\right) \leq n+1 \Leftrightarrow n+m < \frac{1}{5}\left(3(m+3)^2 + (m+3) - \frac{86}{3}\right) \leq n+1+m \Leftrightarrow n+m+2 < \frac{1}{15} \cdot (3(m+3)^2 + (m+3)) + \frac{4}{45} \leq n+3+m$. Эндээс $n+m+2 = \left\lceil \frac{3(m+3)^2 + (m+3)}{15} \right\rceil$ гэж гарна. Ийнхүү өгөгдсөн дараалалд ороогүй тоонууд $f(n)+1 = n+m+1 = \left\lceil \frac{3(m+3)^2 + (m+3)}{15} \right\rceil - 1 = Q_m$, $m=0, 1, 2, 3, \dots$ хэлбэрийн дараалал үүсгэнэ.

АЗ.



$AB_1 \cdot OC_1$ дөрвөн өнцөгт тойрог багтаадаг гэдгээс $BB_1 + BC_1 = CC_1 + CB_1$ (1) гэж гарна. BCB_1C_1 дөрвөн өнцөгт тойрогт багтдаг тул $\angle B_1CC_1 = \angle B_1BC_1 = \varphi$. B_1CC_1 , B_1BC_1 гурвалжнуудын хувьд косинусын теорем хэрэглэвэл $B_1C^2 + CC_1^2 - 2B_1C \cdot CC_1 \cos \varphi = B_1C_1^2 = BB_1^2 + BC_1^2 - 2BB_1 \cdot BC_1 \cos \varphi$ буюу $(B_1C + CC_1)^2 - 2B_1C \cdot CC_1(1 + \cos \varphi) = (BB_1 + BC_1)^2 - 2BB_1 \cdot BC_1(1 + \cos \varphi)$ (2) болно. (1) ба (2)-оос $B_1C \cdot CC_1 = BB_1 \cdot BC_1$ (3) гэж гарна. $\angle CB_1B = \angle CC_1B$ ба

$\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{B_1C}{BC_1}$ гэдгээс $\triangle CB_1B \sim \triangle B_1C_1B$ гэж гарна. Иймээс $\triangle CB_1B = \triangle B_1C_1B$.

Эндээс $\angle ACB = \angle ABC$ гэж гарна. Ийнхүү бодлогын нөхцлийг хангах гурвалжин адил хажуут гурвалжингууд л байна.

В1. $n = x^3 + 4y^3 + z^3 + 6xy^2 + 3yx^2 + 3zy^2 = (x+y+z)(x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xy - xz - yz)$ n нь өгөгдсөн бүхэл тоо тул n -ийг хоёр бүхэл тооны үржвэрт задлах боломжийн тоо төгсгөлөг байна. $n = k \cdot m$ болог. $x+y+z = k$ гэвэл $x = k - y - z$. Үүний 2-р үржигдэхүүнд орлуулбал $m = (k - x - y)^2 + 4y^2 + z^2 + 2(k - y - z)y - (k - y - z)z - yz = 3y^2 + 3z^2 - 3zk + k^2$ Эндээс

$$3y^2 + 3\left\{z^2 - zk + \left(\frac{k}{2}\right)^2\right\} = m - \frac{k^2}{4} \text{ буюу } y^2 + \left\{z - \frac{k}{2}\right\}^2 = \frac{1}{3}\left(m - \frac{k^2}{4}\right) \quad (1)$$

(1) нь $m \geq \frac{k^2}{4}$ үед л шийдтэй. Энэ үед (1)-ийн шийд $\left[0; \frac{k}{2}\right]$ цэгт төв-

тэй $R = \sqrt{\frac{1}{3}\left(m - \frac{k^2}{4}\right)}$ радиустай тойргийн цэг байна. Энэ тойргийн бүхэл

координаттай цэгүүд төгсгөлөг, мөн (k, m) хос нь төгсгөлөг тооны утга авах учир өгсөн тэгшитгэл төгсгөлөг тооны бүхэл тоон шийдтэй.

Б2. а. (-1) -ын тоо сондгой байг. Дурын (-1) -ыг сонгоод зэргэлдээ 2 тоо болон еөртэй нь үржүүлэн үржвэрийг байранд тавиад 3 тоо арчих үйлдэл анхны бүх тооны үржвэрийн тэмдэг хадгалагдах инвариант чанартай.

Тойрог дээрх $(-1), (+1)$ тоо үйлдэл бүрийн дараа 2-оор буурна. Эсвэл еөрчлөгдөхгүй.

S_k ($k \in \mathbb{N}$)-аар үйлдлийн тоог тэмдэглэе. S_k үйлдлийн дараах байрлалын бүх тоонуудын үржвэрийг P_k гее. P_k еөрчлөгдөхгүй. Тодруулан хэлбэл, (-1) -тэй тэнцүү. а) $(1, -1, 1)$ б) $(-1, -1, 1)$ эсвэл $(1, -1, -1)$ в) $(-1, -1, -1)$ гурван нөхцөлд хийгдэнэ. Хамгийн сүүлд үйлдлээс хамаарахгүйгээр нэг ширхэг (-1) үлдэнэ.

б) (-1) -ын тоо тэгш байг. Тойрог дээрх (-1) -үүдийг цагийн зүүний дагуу $A_1, A_2, \dots, A_{2k}$ гэж тэмдэглэе. A_i, A_{i+1} -ын хооронд орших $(+1)$ -ын тоог m_i гее. ($i=2k$ бол $i+1$ -ийг 1 гэж авна.) Одоо $S = |m_1 - m_2 + m_3 - m_4 + \dots - m_{2k}|$ хэмжигдэхүүнийг сонирхоё. Энэ нь дугаарлалтаас үл хамаарна. A_i -г сонгон авч түүн дээр үйлдэл хийхэд S нь яаж еөрчлөгдөхийг сонирхоё.

Дөрвөн тохиолдол байна. 1-р ба 2-р тохиолдолд $(+1)$ -ын тоо еөрчлөгдөхгүй Харин 3-р тохиолдолд (-1) -ын тоо 2-оор цөөрнө. 4-р тохиолдолд $(+1)$ -ийн тоо 2-оор цөөрнө. Гэхдээ 1-р, 2-р, 3-р, 4-р тохиолдлуудын аль алинд нь S хэмжигдэхүүн хадгалагдана. Ийнхүү S нь үйлдэл бүрийн дараа хадгалагдах инвариант хэмжигдэхүүн болно. Анх $S > 0$ байвал S тооны $(+1)$ үлдэнэ. $S = 0$ байвал 2 ширхэг (-1) үлдэнэ.

Б3. Хавтгай дээр тэгш өнцөгт координатын системийг 1-р мөчид орших векторуудын уртын нийлбэр үлдэх 3 мөч бүрт орших векторуудын уртын нийлбэрээс багагүй байхаар сонгон авъя. I мөчид орших векторууд $\vec{a}_{i1}, \vec{a}_{i2}, \dots, \vec{a}_{ik}$ болог. Тэгвэл

$$|\vec{a}_{i1}| + |\vec{a}_{i2}| + \dots + |\vec{a}_{ik}| \geq \frac{1}{4} (|\vec{a}_1| + \dots + |\vec{a}_n|) \quad (1)$$

1-р ба 3-р мөчийн биссектрисийг татаж түүнийг l гее. $\vec{a}_{ik}$ -ийн l шулуун дээрх проекцын урт l_{ik} ; a_{ik} , 1-ийн хоорондох өнцгийг φ_{ik} гее. Тэгвэл $b_{ik} = |\vec{a}_{ik}| \cdot |\cos \varphi_{ik}|$, I мөчид байрласан дурын векторын

хувьд $\cos\varphi > \frac{1}{\sqrt{2}}$ байх нь илт юм. Иймээс

$$|\vec{a}_{i1}| + \dots + |\vec{a}_{ik}| = \frac{b_{i1}}{\cos\varphi_{i1}} + \dots + \frac{b_{ik}}{\cos\varphi_{ik}} \leq \sqrt{2} (b_{i1} + \dots + b_{ik}) = \\ = \sqrt{2} p_e (\vec{a}_{i1} + \dots + \vec{a}_{ik}) \leq \sqrt{2} |\vec{a}_{i1} + \dots + \vec{a}_{ik}| \quad (2) \text{ Иймд (1) ба (2)}$$

тэнцэтгэл бишээс $|\vec{a}_1| + \dots + |\vec{a}_n| < 4\sqrt{2} |\vec{a}_{i1} + \dots + \vec{a}_{ik}|$ гэж гарна. Бодлого бодогдов.

УМО-30, X АНГИ III ДАВААНЫ БОДЛОГУУД

Б.Баясгалан, А.Түвшинтулга

A1 (Б.Баясгалан). Нэгж радиустай тойргийн цэгүүдийг аль ч хоёрын хоорондох зай рациональ байх ижил энгийн төгсгөлгүй олон цэг олддоггүй байхаар 3 өнгөөр будаж болох уу?

A2 (Ц.Лувсандорж). Огторгуйд солбисон хоёр перпендикуляр шулуун өгөгдөв. Эдгээр шулуунуудыг харгалзан A_1, B_1 ; A_2, B_2 ; A_3, B_3 цэгт огтлох хоорондоо паралель гурван хавтгай татъя. Тэгвэл харгалзан A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 диаметртай бөмбөрцгүүд нэг тойргоср огтлолцдог болохыг батал.

A3 (В.Адьяасчрэн). x, y, z, t эерэг тоонуудын хувьд $\frac{xy+2yz+zt}{x^2+y^2+z^2+t^2}$

илэрхийллийн утгын олонлогийг ол.

а) ХӨДӨӨ АЙМГУУД

B1 (Б.Баясгалан). Гүдгэр олон өнцөгтийн дэс дараалсан 3 талыг шүргэсэн тойргуудын ядаж нэг нь уг олон өнцөгтийн дотоод хэсэгт агуулагдах гэж батал.

B2 (В.Адьяасчрэн). ABC гурвалжинд AA_1, BB_1, CC_1 биссектрисүүд татав. AA_1 ба B_1C_1 , BB_1 ба A_1C_1 , CC_1 ба A_1B_1 шулуунуудын огтлолц-

лын цэгүүд харгалзан K, M, N бол $\frac{AK}{AK} \cdot \frac{B_1M}{BM} \cdot \frac{C_1N}{CN} \leq 1$ болохыг батал.

B3 (Б.Баясгалан). Аливаа натурал $n (n \geq 10)$ тооны хувьд (n^2, n^2+an) завсраас $a < b < c$, $clab$ байх a, b, c гурвал олддог хамгийн

бага α тоо нь (1.7, 1.76) завсарт харьяалагдахыг батал.

б) УЛААНБААТАР ХОТ

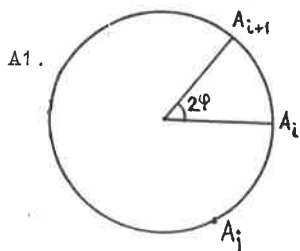
Б1' (Б.Баясгалан). Хэрэв $x_1, x_2, \dots, x_{4k+2}$ ялгаатай бодит тоонууд ба

$$\sum_{i=1}^{4k+2} (-1)^{i+1} x_i x_{i+1} = 4m (x_1 = x_{4k+3}) \text{ бол } \sum_{i=1}^6 (-1)^{i+1} x_{ki} x_{ki+1} > m (x_{k1} = x_{k7})$$

байдаг $x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{k6}$ тоонуудыг сонгон авч болохыг батал.

Б2' (Б.Баясгалан). Аливаа натурал $n (n \geq 10)$ тооны хувьд $(n^2, n^2 + an)$ завсраас $a < b < c$, $slab$ байх a, b, c гурвал олддог хамгийн бага α тоо нь (1.7; 1.76) завсарт харьяалагдахыг батал.

Б3' (Б.Баясгалан). Шатрын хөлөг дээр аль нь ч нэгээс илүүгүй барс иддэг байхаар хамгийн олондоо хичнээн барс байрлуулж болох вэ?



БОДОЛТ

Нэгж радиустай тойрог дээр орших 2 цэгийн хоорондох зай $2 \sin \varphi$ -тэй тэнцүү байдгийг сануулья. Энд 2φ нь эдгээр цэгүүдийн радиус векторуудын хоорондох өнцөг. $\sin \varphi = \frac{3}{5}$ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$)

байх 2φ өнцөг авч өгсөн тойрог дээр дурын зэрэгцээ 2-ынх радиус векторуудын хоорондох өнцөг 2φ байхаар $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ төгсгөлгүй цэгүүдийг авъя. Тэгвэл A_i, A_j цэгүүдийн хоорондох зай нь ($1 \leq j-i=k$)

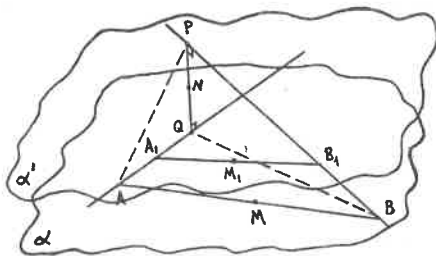
$$|A_i A_j| = 2 \left\{ k \cdot \frac{3}{5} \left(\frac{4}{5} \right)^{k-1} - C_k^3 \left(\frac{3}{5} \right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5} \right)^{k-3} + \dots \right\} \text{ болно.}$$

Эндээс $|A_i A_j|$ -рациональ тоо болох нь харагдаж байна. Одоо эдгээр цэгүүдийн аль ч 2 нь давхцахгүй гэдгийг "УМО-XXIY" цувралын IY давааны В3 бодлогын бодолтоос хараарай.

Эдгээр цэгүүдийг дурын аргаар 3 өнгөөр будахад ижил энгийн төгсгөлгүй олон цэг оршин байна. Иймээс хоорондох зай нь рациональ байх ижил энгийн төгсгөлгүй олон цэг олддоггүй байхаар тойргийг 3 өнгөөр будаж болохгүй.

А2.

Өгсөн шулуунуудыг l_1, l_2 гэж



тэмдэглээ $(1, 1-2)$. Өгөгдөөр шулуунуудын α хавтгайтай огтлолцох цэгийг A, B гэе. L_1, L_2 шулуунуудыг холбосон хамгийн богино хэрчмийг QR гэвэл $PQ \perp L_1$ ба $PQ \perp L_2$ байна. AP ба BQ шулуунууд харгалзан PQB ба PQA хавтгайнуудад $\perp$ учир AB диаметртэй M төвтэй бөмбөрцөгт

P, Q цэгүүд оршино. Иймд PQ хэрчмийн дундажид перпендикуляр хавтгай дээр M цэг оршино. Үүнтэй адилаар дурын M_1 цэг (зураг) PQ -ийн дундажид перпендикуляр хавтгай дээр орших нь харагдаж байна. $\alpha\alpha'$ хавтгайнууд учир $M_1 \in (MN)$ байна. Өөрөөр хэлбэл A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 хэрчмүүдийн дундаж нь харгалзан M_1, M_2, M_3 бол M_1, M_2, M_3, N цэгүүд нь нэг шулуун дээр орших нь харагдаж байна. Нөгөө талаас A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 диаметртэй бөмбөрцгүүд P, Q цэгийг дайрах учир эдгээр бөмбөрцгүүд нэг тойргоор огтлолцоно. Үүгээр бодлого бодогдлоо.

А3. Өгсөн илэрхийллийн тах утгыг $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ гэж батлая.

$$\begin{cases} (y-x(1+\sqrt{2}))^2 > 0 \\ (z-t(1+\sqrt{2}))^2 > 0 \\ y^2+z^2 > 2yz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2(1+\sqrt{2})^2 + y^2 > 2(1+\sqrt{2})xy \\ z^2 + t^2(1+\sqrt{2})^2 > 2(1+\sqrt{2})zt \\ 2(1+\sqrt{2})y^2 + 2(1+\sqrt{2})z^2 > 4(1+\sqrt{2})yz \end{cases} \quad \text{болно.}$$

Эдгээр илэрхийллийг хооронд нь нэмж $\frac{xy+2yz+zt}{x^2+y^2+z^2+t^2} < \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ болохыг

хялбар харж болно. Энд $\frac{y}{x} = \frac{z}{t} = (1+\sqrt{2})$ ба $\frac{y}{z} = 1$ үед тэнцэлд хүрнэ.

Өгсөн илэрхийлэлд $x=t=0, y=z=p$ орлуулга хийвэл утга нь $\frac{p^2+p}{1+p^2}$ байна.

$\frac{p+p}{1+p^2} = q$ байх квадрат гурван гишүүнт $0 < q < \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ завсарт ямагт эерэг

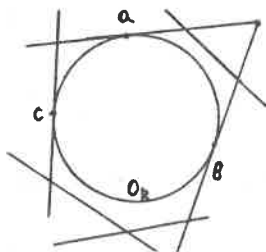
бодит шийдтэй байна. Өөрөөр хэлбэл $0 < q < \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ байх дурын q тооны

хувьд түүнд харгалзах x_0, y_0, z_0, t_0 шийдүүд оршин байна.

Б1. 1) Өгсөн олон өнцөгтөд аль нэг талыг шүргэсэн, уг олон өнцөгтөд бүхлээрээ агуулагдах тойрог оршин байна.

2) Өмнөх нөхцөлөөс өгсөн олон өнцөгтийн дор хаяж 3 талыг шүргэсэн, уг олон өнцөгтөд бүхлээрээ агуулагдах тойрог оршин байна. Ийм тойргийг уг олон өнцөгтийн дотоод тойрог гээ.

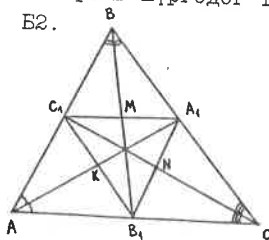
3) Өгсөн олон өнцөгтийн дотоод тойргуудаас минималь радиустай O_k тойргийг авч үзье. Ийм тойрог өмнөх нөхцөлүүдийн улмаас оршин байна (зураг үз). O_k тойргийн шүргэдэг гурван талын аль нэг хоёр нь паралель биш байна. Тэдгээр нь a, b байг. Хэрэв a, b тал нь



зэргэлдээ биш бол a, b талуудын үргэлжлэлийн огтлолцлол O цэг рүү гомотетээр O_k -г шилжүүлбэл уг O_k тойрог a, b талуудаас еер нэгэн талтай шүргэлцэх бөгөөд O_k тойргийн радиус багасахад хүрэх учир зөрчил үүснэ. Иймд a, b талууд зэрэгцээ талууд. Одоо O_k тойргийн шүргэдэг c

талыг авч үзье. c тал нь эсвэл a талтай, эсвэл b талтай паралель биш. Тухайлбал, $b \parallel c$. Өмнөх сэтгэлгээг хэрэглэвэл, b, c талууд зэрэгцээ талууд. Иймд a, b, c талууд нь дэс дараалсан гурван тал, O_k нь тэдгээрийг шүргэдэг тойрог болов. Бодлого бодогдов.

Б2.



Геометр массын ухагдахууныг ашиглан

$$\frac{A_1 K}{AK} = \frac{2a}{b+c}, \quad \frac{B_1 M}{BM} = \frac{2b}{c+a}, \quad \frac{C_1 N}{NC} = \frac{2c}{a+b}$$

болохыг хялбар харж болно.

$$a+b > 2\sqrt{ab}, \quad b+c > 2\sqrt{bc}, \quad c+a > 2\sqrt{ac}$$

$$\text{Эндээс } (b+c)(a+b)(a+c) > 8abc \text{ болж}$$

батлах тэнцэтгэл биш батлагдлаа.

Б3 ($X-B_2', \text{Багш}-B_1'$). $\alpha > 1,7$ гэж батлая. Үүний тулд (100;117) задгай завсраас $a < b < c$, $c \parallel ab$ байх гурван тоо олдохгүйг шалгана. Иймд 101, 102, ..., 115, 116 тоонуудыг нэг бүрчлэн туршихад хангалттай.

$$2) a = (n-x)(n+x+1),$$

$$b = (n-x+1)(n+x),$$

$c=(n-x+1)(n+x+1)$ байхаар a, b, c гурван тоог ол. Мэдээж $x>0$ үед $a<b<c$, $slab$ байна. Иймд $n^2<a$, $c<n^2+1, 76n$ байхаар бүхэл $x>0$ тоог сонговол хангалттай юм. Эндээс $x^2+x<n$, $0.24n+1<x^2$ байх ёстой. Тэгвэл эдгээрээс

$$\sqrt{\frac{n}{4}+1} < x < \frac{\sqrt{4n+1}-1}{2} \text{ байхаар } x \text{ тоог сонговол хангалттай.}$$

$$\text{Эндээс } n>12 \text{ үед } \frac{\sqrt{4n+1}-1}{2} - \sqrt{\frac{n}{4}+1} = \frac{\sqrt{4n+1}-1-\sqrt{n+4}}{2} > 1 \text{ учир}$$

ийм x тоог үргэлж сонгож болно. Хэрэв $n=10$ бол $x=2$ ($a=104$, $b=108$, $c=117$); $n=11$ бол $x=2$ ($a=126$, $b=130$, $c=140$) болох юм. Харин $n=12$ үед $[145; 165]$ завсраас $x=2$ үед $a=150$, $b=154$, $c=165$ болох юм.

Б1'. 1. Хавтгайд өгсөн $A_1(a_1, b_1), \dots, A_{2k+1}(a_{2k+1}, b_{2k+1})$ координаттай цэгүүдээс үүсэх $A_1 A_2 \dots A_{2k+1}$ олон өнцөгтийн талбайг

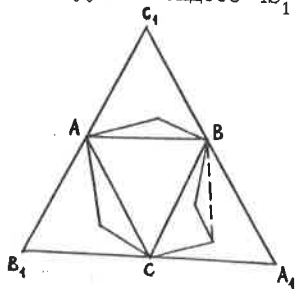
$$S_{A_1 A_2 \dots A_{2k+1}} = \sum_{i=1}^{4k+1} (-1)^{i+1} x_i x_{i+1} \quad (x_1 = x_{4k+3}) \text{ хэлбэртэй бичиж болохыг}$$

хялбар харж болно. Энд: $\{x_1, x_2, \dots, x_{4k+2}\}$ олонлог нь $\{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{2k+1}, b_{2k+1}\}$ олонлогийн ямар нэг сэлгэмэл байна.

$$2. \sum_{i=1}^{4k+2} (-1)^{i+1} x_i x_{i+1} = 4m \quad (x_1 = x_{4k+3}) \text{ илэрхийллийг өмнөх}$$

шалтгаанаар ямар нэгэн $A_1 A_2 \dots A_{2k+1}$ олон өнцөгтийн талбай гэж үзэж болно. Энэ талбайг S гэвэл $S=4m$ болно. $A_1 A_2 \dots A_{2k+1}$ цэгүүдийн гүдгэр бүрхүүлийн талбайг S_0 гээ. Тэгвэл $S_0 \geq S$.

3. Өгсөн S_0 талбайтай гүдгэр олон өнцөгтийн оройнуудад оройтой Δ -аас хамгийн их талбай бүхий ABC гурвалжинг сонгож талбайг нь S_1 гээ. (зураг үз). Тэгвэл уг гурвалжнаас 4 дахин том талбай бүхий $A_1 B_1 C_1$ гурвалжин нь анхны олон өнцөгтийг бүхлээр нь өөртөө агуулна. Эндээс $4S_1 > S_0$ байна. Тэгвэл $S_1 > \frac{1}{4} S_0$.



$$\text{Эцэст нь } \sum_{i=1}^6 (-1)^{i+1} x_k x_{k+1} \text{ нь}$$

ямар нэгэн гурвалжны талбай болохыг тэмдэглэе.

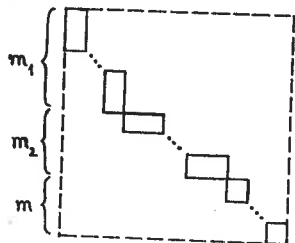
Б2' ($X-B_2$ -г үз)

БЗ'. 1 а) 10 бэрсийг бэрс бүр 1-ээс олонгүй дайсантай байхаар хялбархан байрлуулж болно.

б) Одоо 11 тэргийг тэрэг бүр 1-ээс олонгүй дайсантай байхаар байрлуулж болохгүйг батлая.

Үүний тулд 8×8 хөлөг дээр n ширхэг тэргийг бодлогын нөхцөлд зааснаар байрлуулсан гэж үзье. Хэрэв тэрэг өөр нэг тэрэгтэй дайсагнадаг бол түүнд a оноо, ямар ч тэрэгтэй үл дайсагнадаг бол b оноог өгье. Тэгвэл нэг ч тэрэгтэй дайсагнадаггүй тэрэгний тоог m гэвэл хөлөг дээрх нийт тэрэгний нийлбэр оноо $S = (n-m)a + mb$ болно. Хэрэв S тоог доороос нь үнэлбэл $S \geq n \cdot \min\{a, b\}$ байна.

Хэрэв хөлөгний мөрүүдийг, эсвэл багануудыг солих үйлдлүүдийг хийвэл S тоонд өөрчлөлт орохгүй юм. Эндээс тэргүүдийг дээрх 2 үйлдлийн тусламжтайгаар зурагт үзүүлсэн байрлалд шилжүүлж болно.



Тэгвэл $2m_1 + m_2 \leq 8 - m$, $m_1 + 2m_2 \leq 8 - m$ байна. Эндээс $S = 2m_1a + 2m_2a + mb = 2a(m_1 + m_2) + mb \leq \frac{2}{3}a(8 - m) + mb$ болно.

Хэрэв $\frac{2}{3}a = b$ гэвэл $S \leq 8b$ болно. Эндээс $a = 3, b = 4$ гэвэл эцэст нь $3n \leq 32$ буюу $n \leq 10$ болж батлагдав.

УМО-30, X АНГИ IY ДАВАА

Ц.Дашдорж

A1 (Гантөмөр). $P(x) = x^{1994} + a_{1993}x^{1993} + \dots + a_1x + 1$ олон гишүүнт өгөв. Хоёр сурагч тоглоно. Үүнд 1-р сурагч a_1 -үүдийн аль нэгийг өөр тоогоор солино. Дараа нь 2-р сурагч үлдэх a_1 -үүдийн аль нэгийг өөр тоогоор солино, г.м. бүх a_1 -үүдийг дуустал үргэлжилнэ. Эцэст үүсэх олон гишүүнт бодит язгууртай бол 2-р сурагч, үгүй бол 1-р нь хожно. II сурагч үргэлж хожих боломж бий юу?

A2 (В.Адъяасүрэн). $f^2(x) - f^2(y) = f(x+y)f(x-y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ байх үелэх тасралтгүй $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол.

A3 (Ц.Лувсандорж). Хүндийн төв нь M ба $\cos A \cos B \cos C = -\frac{1}{2}$ байх $\triangle ABC$ -ийн AM, BM, CM хэрчмүүдийн дундчуудыг дайруулан харгалзан

BC, AC, AB талуудтай параллелиар татсан шулуунуудын огтлолцолд үүсэх Δ -ны Эйлерийн тойрог өгсөн Δ -г багтаасан тойрогтой 1 болохыг батал.

Б1 (Б.Баясгалан). Өөр хоорондоо нөхөрсөг 3 гүрнийг; эсвэл өөр хоорондоо ердийн харьцаатай 3 гүрнийг гурвын холбоо гээ. Гүрэн бүр нь 9-өөс ихгүй гүрөнтэй дайсагнах харьцаатай 150 гүрнээс 17500 гурвын холбоог сонгож болохыг батал.

Б2 (Л.Оюунцэцэг). Бүхэл координаттай дурын 1994 цэг хавтгайд авахад хүндийн төв нь бүхэл координаттай байх 19 цэг олдохыг батал.

Б3 (Ц.Лувсандорж). ΔABC -ын AB, BC, CA талууд дээр C_t, A_t, B_t цэгүүдийг $\frac{AC_t}{C_tB} = \frac{BA_t}{A_tC} = \frac{CB_t}{B_tA} = t$ байхаар авав. Тэгвэл AA_t, BB_t, CC_t

хэрчмүүдээр байгуулсан Δ -уудын дотоод өнцөгийн котангенсүүдийн квадратуудын нийлбэр t -ээс хамаарахгүйг батал.

БОДОЛТ

A1. 2-р сурагч ялах боломж бий. Эхлээд 2-р сурагч дараах тактикаар тоглоё. x^e -ын өмнөх коэффициентийг солихдоо e -ыг заавал тэгш байхаар сонгоно. Тэгвэл хамгийн сүүлд 2 коэффициент үлдсэний дараа (тэдгээр нь $a_K x^R$ ба $a_K x^K$ болог.) R ба K -ын ядаж нэг нь сондгой байна.

$P_1(x) = f(x) + \alpha x^R + \beta x^K$ байг. Энд $f(x)$ нь $a_R = 0, a_K = 0$ байхад үүсэх олон гишүүнт ба α, β нь 1), 2)-р сурагчдын шинээр тавьсан коэффициент.

а) R-сондгой, K-тэгш байг.

$$P_1(x) = f(x) + \alpha x^R + \beta x^K \quad \begin{cases} P_1(1) = f(1) + \alpha + \beta \\ P_1(-1) = f(-1) - \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow$$

$$P_1(1) + P_1(-1) = f(1) + f(-1) + 2\beta$$

$$\beta = -\frac{1}{2} [f(1) + f(-1)] \text{ байхад } P_1(1) + P_1(-1) = 0 \text{ буюу 2-р}$$

сурагч β -г дээрх байдлаар сонговол α -аас үл хамааран $P_1(x)$ олон гишүүнт нь $[1, -1]$ дээр ядаж нэг бодит язгууртай.

б) R, K нь сондгой бол

$$\begin{cases} P_1(-1) = f(-1) - \alpha - \beta \\ P_1(2^e) = f(2^e) + \alpha 2^{eR} + \beta 2^{eK} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1(2^e) + 2^{eK} P_1(-1) = \\ = f(-1) + f(2^e) + \alpha(2^{eR} - 2^{eK}) \end{cases}$$

$$\alpha = - \frac{f(-1) + f(2^e)}{2^e R - 2^e K} \quad \text{гээд сонговол } \beta\text{-аас үл хамааран}$$

$$P_1(1) + 2^e P_1(-1) = 0 \quad \text{болно. } P_1(1) + 2^e P_1(-1) = 0 \Rightarrow$$

$P_1(x)$ нь тасралтгүй тул $\exists a, P_1(a) = 2^e P_1(-1)$. Иймд $P_1(x)$ нь $[1, a]$ дээр ядаж нэг бодит язгууртай. Иймд аль ч тохиолдолд 2-р сурагч үргэлж ялна.

А2. $x=y=0$ гэж авбал $f^2(0)-f^2(0)=f^2(0)$. Эндээс $f(0)=0$ гэж гарна. $A=\{x|f(x)=0\}$ гээ.

1) $0 \in A$ тул A хоосон биш.

2) Хэрэв $f(x)=0$ байвал $f^2(2x)-f^2(x)=f(3x)f(x)=0$. Эндээс $f(2x)=0$ Индукцээр $\forall n \in \mathbb{N}: f(nx)=0$ гэж батлагдана.

3) $x, y \in A$ байвал $f^2(x+y)-f^2(x-y)=f(2x)f(2y)=0$

$$f(x+y)f(x-y)=f^2(x)-f^2(y)=0$$

Эндээс $x+y \in A$ гэж гарна.

$$f(-x)f(x)=f^2(0)-f^2(x)=-f^2(x) \quad \text{ба}$$

$$f^2(-x)-f^2(x)=f(0)f(2x)=0 \quad \text{учраас } f(x)=-f(-x)$$

Ийнхүү бидний олох функц сондгой функц байна. Иймээс $x>0$ үед авч үзэхэд л хангалттай. Нөхцөл ёсоор f функц үелэх тул $f(a)=0$ байх $a(a>0)$ олдоно. a -г f -ийн эерэг хамгийн бага тэг хэмээн ойлгож болно. Тэгвэл $A=\{na|n \in \mathbb{Z}\}$. $x \in (0, a)$ үед $f(x)>0$ гэж үзэж болно. Мөн

$a=\pi$ гэж үзэж болно. Учир нь, тийм биш бол $g(x)=\text{sign } f\left(\frac{a}{2}\right) \cdot f\left(\frac{a}{\pi}x\right)$

функц авч үзнэ.

ε нь $0 < \varepsilon < \pi$ байх тоо болог.

$$f(\pi-\varepsilon)f(\pi+\varepsilon)=f^2(\pi)-f^2(\varepsilon)=-f^2(\varepsilon)<0 \quad \text{учраас } f(\pi+\varepsilon)<0.$$

Ийнхүү $x \in]2\pi k; (2k+1)\pi[$ үед $f(x)>0$

$x \in](2k+1)\pi; (2k+2)\pi[$ үед $f(x)<0$.

$$f^2(x+\pi)-f^2(x)=f(\pi)f(2x+\pi)=0 \quad \text{учраас } f(x+\pi)=-f(x)$$

$$f(x+2\pi)=f(x)$$

$$f^2(x)-f^2(\pi-x)=f(\pi)f(\pi-2x)=0 \Rightarrow f(x)=f(\pi-x)$$

Иймд f -ийг $[0, \frac{\pi}{2}]$ завсарт авч үзье. $f(\frac{\pi}{2})=1>0$ гэж үзэж болно(!).

$$f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)-f^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=f^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{учраас } f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$g(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \quad \text{болог. } 1-g^2(x)=f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)-f^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f(\pi-x)f(x) \quad \text{буюу}$$

$$g^2(x) + f^2(x) = 1.$$

$$f(2x) = f(2x)f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - f^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = g^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - f^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2f^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$f\left(\frac{k}{2^n}\pi\right) = \sin\frac{k}{2^n}\pi \quad (k, n \in \mathbb{N}, k \leq 2^{n-1}) \text{ гэж баталъя.}$$

$$1 - 2f^2\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2^n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2^n}\right) = \cos\left(\frac{k\pi}{2^n}\right) \text{ учраас}$$

$$f\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{\sqrt{1 - \cos\frac{k\pi}{2^n}}}{2} = \sin\frac{k\pi}{2^{n+1}}.$$

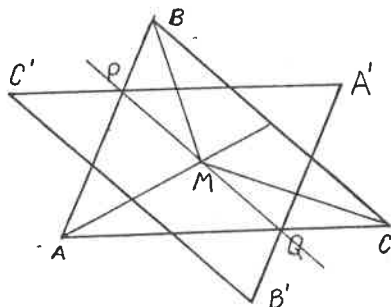
Ийнхүү биднийлох функц $f(x) = A \sin Bx$ хэлбэрийн функц байна. Энэхүү функц бодлогын нөхцөлийг хангах нь илт. Бодлого бодогдов.

А3. Бодлогод "ортотев"-ийг "хүндийн төв" гэж андуурч томьёолсон нь зарим сурагчид хялбар эсрэг жишээ гаргаж, бүтэн оноо авах хариуцлагагүй байдал гаргаснаа зохиогч би хүлээн зөвшөөрч, бодлогыг зөвөөр томьёолж бодолтыг хийлээ.

Зөв томьёолол: Ортотев нь M ба $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = -\frac{1}{2}$ байх ABC

гурвалжны AM , BM , CM хөрчмүүдийн дундажуудыг дайруулан харгалзан BC , AC , AB талуудтай параллелиар татсан шулуунуудын огтлолцолд үүсэх гурвалжны Эйлерийн тойрог өгсөн гурвалжны багтаасан тойрогтой перпендикуляр болохыг батал.

$AA_1A_1C_1$, $AA_1A_1B_1$, $BC_1B_1C_1$ болон гурвалжны медианууд огтлолцлынхоо цэгээр $1:2$ харьцаагаар хуваагддагийг ашиглавал



$\frac{AP}{PB} = \frac{AM}{ML} = \frac{AQ}{QC}$ буюу P, M, Q цэгүүд 1 шулуун дээр орших ба $PQ \parallel BC$ байна. $\Rightarrow PM = MQ$ байна. $APA'Q$ паралелограмм болохыг анхаарвал M нь түүний диагоналиудын огтлолцлын цэг байна. $\Rightarrow S_M(A) = A' \Rightarrow S_M(ABC) = \Delta A'B'C'$ боллоо. Мөн $S_M(L) = A_1 \Rightarrow \Delta A_1B_1C_1$ -ийг багтаасан тойрогтой $\Delta A'B'C'$ -ийн

Эйлерийн тойрог давхцана. ө.х. $(A'B', C) = (B'C', A_1) = (C'A', B_1) = 1$ байна,
 $H_M^2(ABC) = \Delta A_1 B_1 C_1 \Rightarrow \Delta ABC$ -г багтаасан тойрог ба $\Delta A'B'C'$ -ийн Эйлерийн
 тойргууд огтлолцохгүй болж зерчив. Харин бодлогын өгүүлбэрийн
 "өгсөн" гэдэг үгийг "уг" гэж соливол бодлого үнэн болно.
 $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ тул ΔABC -ын хувьд түүнийг багтаасан тойрог ба
 Эйлерийн тойргууд 1 байна гэж батлах хэрэгтэй.

$-2 = 4\cos A \cos B \cos C = 2[\cos A \cos B] \cos C = 2[\cos(A+B) + \cos(A-B)] \cos C =$
 $\cos(A+B+C) + \cos(A+B-C) + \cos(A-B+C) + \cos(A-B-C) = -1 - \cos 2A - \cos 2B - \cos 2C =$
 $-4 + 2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \Rightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1 \Rightarrow \sin$ -ийн теоремыг
 ашиглавал $a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2$ болно (R -багтаасан тойргийн радиус).
 Лейбницийн томъёо ашиглан $OH^2 = QR^2 - a^2 - b^2 - c^2$ болохыг хялбархан
 баталж болох ба эндээс $OH = \sqrt{5}R$ болно. O_Q Эйлерийн тойргийн төв OH

хэрчмийн дундаж дээр оршино. $\Rightarrow OO_Q = \frac{\sqrt{5}}{2}R$ болно. $OO_Q^2 = \frac{5}{4}R^2 = R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 \Rightarrow$
 Эйлерийн тойргийн радиус $\frac{R}{2}$, болон Пифагорын теорем ашиглавал
 бодлого бодогдлоо.

Б1. Хавтгай дээр гүрэн бүрийг цэгээр тэмдэглэж нөхөрсөг
 харьцаатай хоёр гүрнийг ногоон хэрчмээр, ердийн харьцаатай 2
 гүрнийг цэнхэр хэрчмээр, харин дайсагнах харьцаатай бол улаан
 хэрчмээр холбоё. Тэгвэл бидний бодлого $n=150$ орсойтой гүйцэд графад
 бүх тал нь нэгэн зэрэг ногоон эсвэл цэнхэр өнгийн байх
 гурвалжнуудын тоог доороос нь үнэлэх бодлогод шилжинэ.

Δ_1 -ээр 3 тал нь ижил өнгийн гурвалжнуудын тоо,
 Δ_2 -оор зөвхөн 2 тал нь ижил өнгийн байх гурвалжнуудын тоо,
 Δ_3 -аар 3 тал нь ялгаатай өнгийн байх гурвалжнуудын тоог тус тус
 тэмдэглэе. Тэгвэл $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = C_n^3 (*)$ байна. Аливаа i -р оройноос
 гарсан ногоон, цэнхэр, улаан ирмэгүүдийн тоог харгалзан a_i, b_i, c_i
 гэж тэмдэглэе. Тэгвэл

$$\sum_{i=1}^n (a_i b_i + b_i c_i + a_i c_i) = 2\Delta_2 + 3\Delta_3 (**) \text{ болно.}$$

Энд $a_i + b_i + c_i = n-1$, $c_i \leq \frac{n}{16}$ ($i = \overline{1, n}$) байна.

(*) ба (**) -оос $\Delta_1 = C_n^3 + \frac{1}{2} \Delta_3 - \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n (a_i b_i + b_i c_i + a_i c_i) \right]$ буюу

$$\Delta_1 \geq C_n^3 - \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n (a_i b_i + c_i b_i + a_i c_i) \right] \text{ болно. Энд } a_i b_i + b_i c_i + a_i c_i \leq \frac{1}{4} \left(n-1 - \frac{n}{16} \right) \left(n-1 + 3 \frac{n}{16} \right) \text{ байхыг хялбар харж болно.}$$

Иймд $\Delta_1 \geq C_n^3 - \frac{1}{2^{11}} \cdot n(15n-16)(19n-16)$ боллоо. Нөгөө талаас

$\Delta_1 = \Delta^H + \Delta^e + \Delta^g$. Энд Δ^H ба Δ^e , Δ^g нь харгалзан нөхөрсөг ба ердийн дайсагнадаг харьцаатай гурвалуудын тоо болно. $C_i \leq 9$ ($i=1, n$) учир нийт дайсагнадаг харьцаатай гурвалын тоо нь хамгийн ихдээ $\frac{n}{3} \cdot C_9^2$

байна. $\Delta^H + \Delta^e = \Delta_1 - \Delta^g$ гэдгээс дээр гаргасан тэнцэл бишүүдийг ашиглавал

$$\Delta^H + \Delta^e \geq C_n^3 - \frac{1}{2^{11}} n(15n-16)(19n-16) - \frac{n}{3} \cdot C_9^2 \text{ болно.}$$

Энд $n=150$ утгыг орлуулан тавибал: дор хаяж 85800 гурвын холбоо сонгож болох нь батлагдав.

Б2. Энэ бодлогод тооны зөвхөн 19-д хуваагдах чанарыг сонирхож явах тул 19-д хуваахад гарах үлдэгдэл нь тэнцүү тоонуудыг тэнцүү, ялгаатай бол ялгаатай гэж нэрлээд харгалзан $\equiv, \neq$ гэж тэмдэглэж авъя. $1994=19 \cdot 104+18$ тул Дирихлен зарчим ёсоор хоёрдугаар координат нь тэнцүү байх 105 цэг олдono. Эдгээр цэгүүдийн аль ч 19 цэгийн хүндийн төвийн хоёрдугаар координат нь бүхэл байна. Иймд дурын янзаар өгөгдсөн 105 бүхэл тоонуудаас арифметик дундаж нь бүхэл байх 19 тоо олдохыг үзүүл гэсэн бодлогод шилжлээ (е.х нийлбэр нь 0-тэй тэнцүү 19 тоо олдохыг үзүүл). Эдгээр 105 тоонууд дотор 19-н тэнцүү тоо байвал бодлого илэрхий шийдэгдэнэ. Иймд ижил тоонууд 18-аас ихгүй ширхэг байна гэж үзье. Эдгээрээс ялгаатай k тоог сонгон авъя. $105=18 \cdot 5+15$ учир Дирихлен зарчим ёсоор $19 \geq k \geq 6$ байна. $M_1 = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ эдгээр тоонуудаас тогтсон олонлог байг. $105-k \geq 86$ учир ялгаатай a, b хоёр тоо олдono.

$$P_1 = S_1 + a, \dots, P_k = S_k + a$$

$$P'_1 = S_1 + b, \dots, P'_k = S_k + b \text{ гэе.}$$

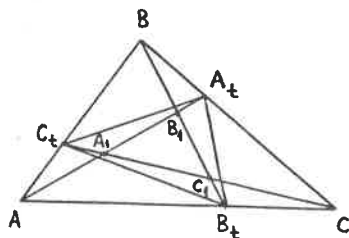
$P_1, \dots, P_k, P'_1, \dots, P'_k$ -ийн нийт ялгаатай элементүүдийн олонлогийг M_2 гэж тэмдэглэе. $|M_2| \geq |M_1|$ ба $k \neq 19$ үед $|M_2| \neq |M_1|$ гэж үзүүлбэ. Эсрэгээс нь $|M_2| = |M_1|$ гэвэл $P_1, P_2, \dots, P_k$ нь

$P'_1, P'_2, \dots, P'_k$ -үүдийн сэлгэмэл болно. Ө.х $\forall i \leq k$ -ийн хувьд $P_i = P_j$ байх j олдоно. Иймд $\sum S_i + ka = \sum S_i + kb \Rightarrow ka = kb$ ба $k \neq 19$ тул $a=b$ болж ялгаатай гэдэгт харшилна. Ийнхүү $|M_2| > |M_1|$ болно. $(105-k-2)$ тоонуудаас мөн ялгаатай хоёр тоо олдох ба энэ хоёр тоогоор дээрхийн адилаар M_2 -оос M_3 олонлогийг үүсгэе. Хэрвээ $|M_2| \neq 19$ бол $|M_2| < |M_3|$ болно. г.м. $|M_s| = 19$ болох s дугаараас эхлэн $|M_s| = |M_{s+1}| = \dots$ болно. $s \leq 19-6=13$ байхыг хялбар харж болно. $|M_s| = |M_{s+1}| = \dots = |M_{19}| = 19$ гэдгээс 19 нэмэгдэхүүнтэй 19 ялгаатай нийлбэр олдоно гэсэн үг. Эдгээр нийлбэр нь $0, 1, 2, \dots, 18$ -тай тэнцүү тул нийлбэр нь 0-тэй тэнцүү 19 тоо олдлоо гэсэн үг. Ийнхүү бодлого бодогдов. (Бодолтоос үзэхэд 1994 гэсэн тоо их сул нөхцөл байсан).

БЗ. I бодолт: Эхлээд AA_t, BB_t, CC_t хэрчмүүдээр байгуулсан гурвалжин нь $\Delta A_1 B_1 C_1$ -тэй төсөөтэй болохыг харуулъя.

I. $A(1), B(t), C(t^2)$ масс авбал A_1 цэг хүндийн төв болох ба эндээс

$$\frac{AA_1}{A_1 A_t} = t + t^2, \quad \frac{CA_1}{A_1 C_t} = \frac{1+t}{t^2} \text{ болно.}$$



$$\text{Үүнтэй ижлээр } \frac{AB_1}{B_1 A_t} = \frac{1+t}{t^2} \text{ байна.} \Rightarrow$$

$$A_1 A_t = \frac{1}{1+t+t^2} AA_t, \quad B_1 A_t = \frac{t^2}{1+t+t^2} AA_t, \quad A_1 B_1 = |A_1 A_t - B_1 A_t| = \frac{|1-t^2|}{1+t+t^2} AA_t$$

$$\text{Үүнтэй ижлээр } B_1 C_1 = \frac{|1-t^2|}{1+t+t^2} BB_t, \quad C_1 A_1 = \frac{|1-t^2|}{1+t+t^2} CC_t.$$

II. Аффин хувиргалтаар 3 цэгийн энгийн харьцаа хадгалагддагийг ашиглавал $\frac{AA_1}{A_1 A_t}, \frac{AB_1}{B_1 A_t}$ харьцаанууд хадгалагдана. $\Rightarrow \frac{A_1 B_1}{AA_t}$ харьцаа

хадгалагдана. ΔABC зөв байх үед $\frac{A_1 B_1}{AA_t} = \frac{B_1 C_1}{BB_t} = \frac{C_1 A_1}{CC_t}$ байх нь илт тул

$$\Delta ABC\text{-ын хувьд } \frac{A_1 B_1}{AA_t} = \frac{B_1 C_1}{BB_t} = \frac{C_1 A_1}{CC_t} \text{ байна.}$$

III. $\vec{AA_t} + \vec{BB_t} + \vec{CC_t} = 0 \Rightarrow \vec{AA_t}, \vec{BB_t}, \vec{CC_t}$ хэрчмүүдээр байгуулагдах Δ нь

$\vec{AA_t}, \vec{BB_t}, \vec{CC_t}$ векторуудаар байгуулах гурвалжинтай давхцах ба энэ Δ нь $\Delta A_1 B_1 C_1$ -тэй төсөөтэй болох нь илт.

Иймд $ctg^2 A_1 + ctg^2 B_1 + ctg^2 C_1$ -ийг t -ээс хамаарахгүйг батлах ёстой болов.

$$I. ctg^2 A_1 + ctg^2 B_1 + ctg^2 C_1 = \frac{1}{\sin^2 A_1} + \frac{1}{\sin^2 B_1} + \frac{1}{\sin^2 C_1} - 3 = \frac{1}{4} \left(\frac{AA_t^2 \cdot BB_t^2}{S_{AB_t A_t B}^2} + \frac{BB_t^2 \cdot CC_t^2}{S_{BC_t B_t C}^2} + \frac{CC_t^2 \cdot AA_t^2}{S_{CA_t C_t A}^2} \right) - 3$$

$$S_{AC_t B_t} = \frac{AC_t \cdot AB_t}{2} \cdot \sin A = \frac{t \cdot c \cdot \frac{1-b}{1+t}}{2} \cdot \sin A = \frac{t}{(1+t)^2} \cdot S_{ABC}$$

$$S_{AC_t A_t C} = S_{ABC} - S_{BA_t C_t} = \left(1 - \frac{t}{(1+t)^2} \right) S_{ABC} = \frac{1+t+t^2}{(1+t)^2} \cdot S_{ABC}$$

Стивартын теорем ёсоор

$$AA_t^2 = \frac{BA_t}{BC} \cdot b^2 + \frac{CA_t}{BC} \cdot c^2 - BA_t \cdot A_t C = \frac{t}{1+t} b^2 + \frac{1}{1+t} c^2 - \frac{1}{1+t} \cdot \frac{t}{1+t} a^2$$

$$\frac{1}{1+t} = q \text{ гэв. } AA_t^2 = (1-q)b^2 + qc^2 - (1-q)qa^2$$

$$\text{Үүнтэй ижилээр } BB_t^2 = (1-q)c^2 + qa^2 - (1-q)qb^2$$

$$CC_t^2 = (1-q)a^2 + qb^2 - (1-q)qc^2 \text{ байна.}$$

$$AA_t^2 \cdot BB_t^2 = -(1-q)q^2 a^4 - (1-q)^2 qb^4 + (1-q)qc^4 + (q^2 - (1-q)^2 q)a^2 c^2 + (q(1-q) + (1-q)^2 q^2)a^2 b^2 + ((1-q)^2 - (1-q)q^2)b^2 c^2$$

$$- (1-q)q^2 - (1-q)^2 q + (1-q)q = (1-q)(-q^2 - (1-q)q + q) = 0$$

$$q^2 - (1-q)^2 q + q(1-q) + (1-q)^2 q^2 + (1-q)^2 - (1-q)q^2 =$$

$$= (1-q)^2 (1-q+q^2) + q(1-q+q-(1-q)q) = (1-q+q^2)^2$$

$$1 - \frac{t}{(1+t)^2} = 1 - q^2 \left(\frac{1}{q} \right) = 1 - q + q^2 \Rightarrow$$

$$ctg^2 A_1 + ctg^2 B_1 + ctg^2 C_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{(1-q+q^2)^2 (a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)}{(1-q+q^2)^2 S_{ABC}^2} \right) - 3 =$$

$$\frac{1}{4} \frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{S_{ABC}^2} - 3 = \operatorname{ctg}^2 A + \operatorname{ctg}^2 B + \operatorname{ctg}^2 C$$

II бодолт. Гурвалжны Брюкерын өнцөг нь $\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma$ гэж олддог ба $\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \gamma \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ байдгийг ашиглавал өгсөн бодлогын хувьд AA_t, BB_t, CC_t хэрчмүүдээр байгуулагдах гурвалжны Брюкерын өнцөг K -аас хамаарахгүй болохыг батлахад хангалттай. Энэ нь $\Delta A_1 B_1 C_1$ -ийн Брюкерийн өнцөг гэсэн үг.

$$\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg} A_1 + \operatorname{ctg} B_1 + \operatorname{ctg} C_1 = \frac{\cos A_1}{\sin A_1} + \frac{\cos B_1}{\sin B_1} + \frac{\cos C_1}{\sin C_1} = \frac{A_1^2 B_1 + B_1^2 C_1 + C_1^2 A_1}{4S_{A_1 B_1 C_1}}$$

Эсвэл шууд Раусын теорем ашиглан $S_{A_1 B_1 C_1}$ -ийг хялбархан олж болно.

Мөн $\frac{AA_t}{A_1 B_1}$ харьцааг ашиглан $A_1 B_1^2 + B_1 C_1^2 + C_1 A_1^2$ -ийг олох замаар энэ бодлогыг бодож болно.

A1 (В.Адьяасцэрэн). Дурын сөрөг биш бодит $a_1, a_2, \dots, a_n$ тоонуудын хувьд

$$(n-1)(a_1^2 + \dots + a_n^2) + n \sqrt{a_1^2 \dots a_n^2} > (a_1 + \dots + a_n)^2 \text{ болохыг батал.}$$

A2 (В.Адьяасцэрэн). ABC гурвалжны ВС тал дээр D, E цэгүүдийг $\angle BAD = \angle CAE$ байхаар авчээ. ABD, ACE гурвалжнуудад багтсан тойргууд ВС талыг харгалзан M, N цэгт шүргэдэг бол

$$\frac{1}{MB} + \frac{1}{MD} = \frac{1}{NC} + \frac{1}{NE} \text{ болохыг батал.}$$

A3 (Б.Баясгалан). Гүдгэр олон өнцөгтийн талбайг S, k-р талыг a_k , түүнд налсан өнцгүүдийг α_k, β_k гэвэл

$$S > \min_k \frac{\pi a_k^2}{\left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha_k}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta_k}{2}\right)^2} \text{ болохыг батал.}$$

B1 (В.Адьяасцэрэн). $f(x) = \sqrt{15 - 12 \cos x} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3} \sin x} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3} \sin x} + \sqrt{10 - 4\sqrt{3} \sin x} - 6 \cos x$ функцийг хамгийн бага утгыг ол.

B2 (Б.Баясгалан). Гурван бөмбөг талбай дээр байв. Аль нэг бөмбөгийг нөгөө хоёр бөмбөгийн хоорондуур өнхрүүлэх үйлдлүүдийг хийе. а) Аль нэг бөмбөг нь байрандаа, нөгөө хоёр нь байраа сольсон байхын тулд 5 удаагийн үйлдэл зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй гэж батал. б) 25 үйлдлээр бөмбөгнүүдийг анхны байранд оруулж болох уу?

B3 (Б.Баясгалан). Тоглогчид хос хосоороо дараах бадлаар тоглоно. Хос тоглогчид нь бие биенээсээ хамааралгүйгээр X, Y үсгүүдийг аль нэгийг нь бичих бөгөөд хэрэв хоёулаа X, X гэж бичсэн бол тус бүр 10 оноо, харин Y, Y гэж бичсэн бол тус бүр 6 оноо, хэрэв нэг нь X, нөгөө нь Y бичсэн бол X бичсэн нь 0 оноо, Y бичсэн нь 6 оноо авах болно. Нэг тоглолт ийм 10 удаагийн өргөөс бүрдэнэ. Нийт авсан онооны дүнгээр аварга тодрох бол та яаж тоглох вэ?

б) УЛААНБААТАРТ

Б1' нь X-III давааны БЗ билээ.

Б2' (Б.Баясгалан). а талтай квадрат төмөр ялтсын 4 булангаас

$\frac{a_1}{a} = \lambda = \text{const}$ байх a_1 талтай квадратуудыг огтлон авчээ. Үлдсэн

дүрсийг нугалж сав хийхэд эзэлхүүн нь V_1 байв. a_1 талтай квадрат

тус бүрээс $\frac{a_2}{a_1} = \lambda$ байх a_2 талтай квадратыг ялган авч үлдсэн дүрсээр

нь V_2 эзэлхүүнтэй сав хийв. Энэ үйлдлийг төгсгөлгүй үргэлжлүүлсэн

бол $\sum_{i=1}^{\infty} V_i$ -хамгийн их утгаа авах λ тоог ол.

БЗ' (Ц.Лувсандорж). ABC гурвалжны А, В, С оройн дотоод энцгийн биссектрисүүд нь багтаасан тойргийг хөргалзан A_1, B_1, C_1 цэгүүдээр огтолдог ба D_1, D_2, D_3 цэгүүд нь AA_1, BB_1, CC_1 шулуунууд дээр өгсөн гурвалжны ортотөвөөс буулгасан перпендикуляруудын сууриуд бол дараах өгүүлбэрүүдийг батал.

а) Хэрэв $\frac{AD_1^2}{AA_1^2} + \frac{BD_2^2}{BB_1^2} + \frac{CD_3^2}{CC_1^2} < 1$ бол ABC нь хурц энцэгт гурвалжин

б) Хэрэв $\frac{AD_1^2}{AA_1^2} + \frac{BD_2^2}{BB_1^2} + \frac{CD_3^2}{CC_1^2} > 1$ бол ABC нь мохоо энцэгт гурвалжин

БОДОЛТ

А1. $n \geq 3$ үед авч үзэхэд л хангалттай. Бидний батлах тэнцэтгэл биш нь дурын сөрөг биш $b_1, b_2, \dots, b_n$ тоонуудын хувьд

$$(n-1)(b_1^{2n} + \dots + b_n^{2n}) + nb_1^2 b_2^2 \dots b_n^2 > (b_1^n + \dots + b_n^n)^2 \quad (1)$$

тэнцэтгэл биш биелнэ гэдэгтэй эквивалент. $b_{n-1} = b_n$ болог. Тэгвэл батлах тэнцэтгэл биш

$$(2n-6)b_{n-1}^{2n} + 4(b_1^n + \dots + b_{n-2}^n)b_{n-1}^n + (n-1)(b_1^{2n} + \dots + b_{n-2}^{2n}) + nb_1^2 \dots b_{n-2}^2 b_{n-1}^4 > 0$$

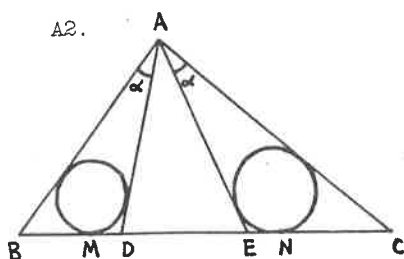
гэсэн (2) тэнцэтгэл бишид шилжинэ. Сүүлчийн тэнцэтгэл бишийн зүүн тал нь b_{n-1}^n -ийн хувьд квадрат гурван гишүүнт бөгөөд түүний дискриминант эерэг биш болохыг үнэмшихэд төвөггүй. Иймээс (2) тэнцэтгэл биш биелнэ.

(1) тэнцэтгэл бишид $b_1, b_2, \dots, b_n$ -үүд тэгш эрхтэй оролцсон тул

$b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{n-1} \leq b_n$ гэж үзэж болно. (1) тэнцэтгэл бишийг

$$(n-2)b_n^{2n} - 2(b_1^n + \dots + b_{n-1}^n)b_n^n + nb_1^{2n} \dots b_n^{2n} + (n-1)(b_1^{2n} + \dots + b_{n-1}^{2n}) -$$

$-(b_1^n + \dots + b_{n-1}^n)^2 \geq 0$ (3) хэлбэрт бичье. (3) тэнцэтгэл бишийн зүүн талыг b_n -ийн хувьд функц гэж сэтгье. $b_n \geq b_{n-1}$ үед $f(b_n) \geq 0$ гэж батлах ёстой. $n \geq 3$ үед $f'(b_n) \geq 0$, $f'(b_{n-1}) \geq 0$ гэдгийг үнэмшихэд төвөггүй. $f''(b_n) \geq 0$ учраас $f'(b_n)$ функц $[b_{n-1}, \infty)$ завсарт үл буурна. Иймээс $f'(b_n) \geq f'(b_{n-1}) \geq 0$. Мөн $f'(b_n) \geq 0$ учраас $f(b_n)$ функц нь $[b_{n-1}, \infty)$ завсарт үл буурна. Ингэхлээр $f(b_n) \geq f(b_{n-1})$. Нөгөө талаас $f(b_{n-1}) \geq 0$ тул $f(b_n) \geq 0$.



$$\frac{1}{MB} + \frac{1}{MD} = \frac{2}{h_a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \text{ болохыг батлая.}$$

Энд h_a нь А оройгоос татсан өндөр. ABD-гурвалжны периметрийг $2P$ гээд $AD=a$, $\angle ABC=\beta$, $\angle ADB=\gamma$ гээ. Батлах тэнцэтгэл

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{a}{p} \text{ хэлбэрт шилжинэ.}$$

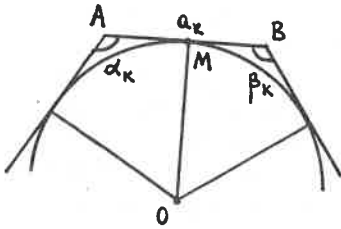
ABD гурвалжны талбай S , $AD=b$, $AB=d$, багтсан тойргийн радиус r гэж тус тус тэмдэглэе. Тэгвэл $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-d)}$ болох ба үүнийг хувиргавал

$$\frac{r^2}{p-a} \left(\frac{a}{(p-a)(p-d)} \right) = \frac{a}{p} \text{ ба } \frac{r}{p-a} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \frac{r}{p-b} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \frac{r}{p-d} = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

болохыг анхаарвал тэнцэтгэл батлагдлаа. Нөгөө талаас үүнтэй

$$\text{адилаар } \frac{1}{NC} + \frac{1}{NE} = \frac{2}{h_a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \text{ болж бодлого бодогдов.}$$

A3. X-III-B1 ёсоор гүдгэр олон өнцөгтийн ямар нэг дэс дараалсан 3 талыг шүргэж, түүнд багтсан тойрог олдох ёстой. Энэ тойргийн талбайг S_1 гээ. Тойргийн радиусыг R гэж тэмдэглэвэл (зураг)



$$\frac{AM}{R} = \text{ctg} \frac{\alpha_k}{2}, \quad \frac{BM}{R} = \text{ctg} \frac{\beta_k}{2}$$

$$AM + BM = R \left(\text{ctg} \frac{\alpha_k}{2} + \text{ctg} \frac{\beta_k}{2} \right) = a_k \rightarrow$$

$$R = \frac{a_k}{\text{ctg} \frac{\alpha_k}{2} + \text{ctg} \frac{\beta_k}{2}} \rightarrow$$

$$S_1 = \frac{\pi a_k^2}{\left(\text{ctg} \frac{\alpha_k}{2} + \text{ctg} \frac{\beta_k}{2} \right)^2}$$

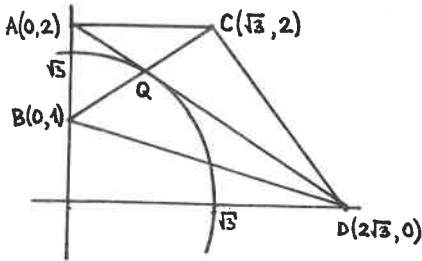
болохоор $S > S_1$ болж бодлого бодогдлоо.

Б1. $\sqrt{3} \cos x = a$, $\sqrt{3} \sin x = b$ гэе. Тэгвэл $a^2 + b^2 = 3$ болох ба $f(x) = F(a, b)$, $a^2 + b^2 = 3$ болно.

$$15 - 12 \cos x = b^2 + (2\sqrt{3} - a)^2$$

$$4 - 2\sqrt{3} \sin x = a^2 + (1 - b)^2 \quad 7 - 4\sqrt{3} \sin x = a^2 + (2 - b)^2$$

$$10 - 4\sqrt{3} \sin x - 6 \cos x = (\sqrt{3} - a)^2 + (2 - b)^2 \text{ болно. Хавтгай дээр } A(0, 2),$$



$B(0, 1), C(\sqrt{3}, 2), D(2\sqrt{3}, 0)$

цэгүүд ба координатын эхэд

төвтэй $\sqrt{3}$ радиустай S

тойргийн дурын $M(a, b)$

цэгийн хувьд $F(a, b) = MD + MB +$

$MA + MC$ болохыг төвөггүй

харж болно. Энэ нь M цэг

$ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн

диагоналиудын огтлолцлын

цэг Q -тэй давхцах үед

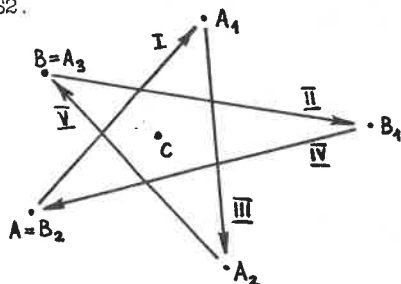
харуулж байна. Q цэгийн

өгсөн функц хамгийн бага утгаа авахыг

координат $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} \right)$ учир Q цэг S тойрог дээр оршино. Иймд $F(a, b) >$

$$> F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} \right) = 6 \text{ байна.}$$

Б2.

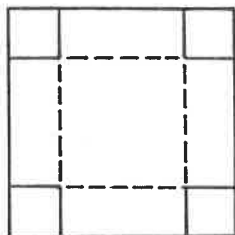


1) Зуралт шаардагдах таван үйлдлийг үзүүлэв. 4 үйлдлээр болохгүй нь нэг цохилтын дараа А, В, С бөмбөгөөр үүсэх гурвалжны ориентаци өөрчлөгдөх шалтгаанаар илэрхий батлагдана. Харин 3 үйлдэл хангалтгүйг шууд шалгаж болно.

2) 25 нь сондгой тоо тул А, В, С бөмбөгүүдээс үүсэх гурвалжны ориентаци анхныхаас өөр байх ёстой. Иймд боломжгүй нь илэрхий.

Б3. "Олонлог" сэтгүүлийн 1994 оны №2-ын 54-р хуудсыг хар. Б1' бол X-III-Б3 билээ.

Б2'. $\lambda = \frac{a_1}{a} = \frac{a_2}{a_1} = \dots$ $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ байна.



Үйлдэл хийх бүр үүсэх савны эзэлхүүнүүдийн дарааллыг бичье.

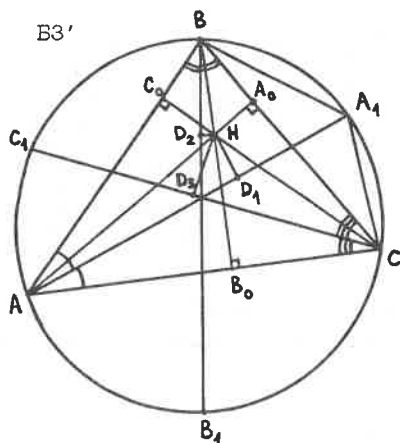
$$(a - 2a_1)^2 \cdot a_1, \quad 4(a_1 - 2a_2)^2 \cdot a_2,$$

$$4^2(a_2 - 2a_3)^2 \cdot a_3, \dots$$

$$V = \sum_{i=0}^{\infty} 4^i (a_i - 2a_{i+1})^2 a_{i+1}, \quad a_i = \lambda^i a$$

$$V = \sum_{i=0}^{\infty} 4^i a_1^3 (1 - 2\lambda)^2 \lambda = (1 - 2\lambda)^2 \lambda a^3 \sum_{i=0}^{\infty} 4^i \lambda^{3i} = \frac{(1 - 2\lambda)^2 \lambda a^3}{1 - 4\lambda^3} = V(\lambda)$$

$V'(\lambda) = 0$ гэвэл $1 - 6\lambda + 8\lambda^3 = 0$ болно. Энд $\lambda = \sin \alpha$ орлуулга хийвэл $\sin 3\alpha = \frac{1}{2}$ болно. Эндээс $\lambda < \frac{1}{2}$ учир $\alpha = 10^\circ$ болно. Иймд $\lambda = \sin 10^\circ$ болж бодлого бодогдов.



ABC гурвалжны A, B, C оройн
өндрүүдийн сууриудыг харгалзан
A₀, B₀, C₀ гэж тэмдэглэвэл:

$$\angle BA_1A = \angle AD_1B_0, \quad \angle BAA_1 = \angle D_1AB_0$$

гэдгээс $\triangle BAA_1 \sim \triangle AB_0D_1$ болно. Иймд

$$\frac{AD_1}{AA_1} = \frac{AB_0}{AB} = \cos A \text{ байна. Үүнтэй ади-}$$

$$\text{лаар } \frac{BD_2}{BB_1} = \cos B, \quad \frac{CD_3}{CC_1} = \cos C \text{ гэдгээс}$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C < 1 \text{ ба}$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C > 1 \text{ үед}$$

харгалзан хурц, ба мохоо өнцөгт гэж батлахад хангалттай юм. ABC
гурвалжныг багтаасан тойргийн төв O, ортотөв H бол $\angle OAH = |\angle B - \angle C|$,
 $OA = R \cos A$, $AH = 2R \cos A$ гэдгийг санаж, AOH гурвалжны хувьд косинусын
теоремыг бичвэл:

$$OH^2 = 2R^2 \cos^2 A + R^2 - 4R^2 \cos A \cos(|\angle B - \angle C|) \Rightarrow$$

$$OH^2 - R^2 = 4R^2 \left\{ \cos^2 A - \frac{\cos(A+B-C) + \cos(A-B+C)}{2} \right\} = 4R^2 \left\{ \cos^2 A - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos 2C + \cos 2B}{2} \right\} = 4R^2 \left\{ \cos^2 A - \frac{-2\cos^2 C + 1 - 2\cos^2 B + 1}{2} \right\} = 4R^2 \left\{ \cos^2 A + \right.$$

$$\left. + \cos^2 B + \cos^2 C - 1 \right\} \text{ болсноор хурц өнцөгт гурвалжинд } OH^2 < R^2, \text{ мохоо}$$

өнцөгт гурвалжинд $OH^2 > R^2$ болохыг санавал бодлого бодогдов.

УМО-ЗО, БАГШ НАРЫН IY ДАВАА

Ц. Дашдорж

A1 (Ц. Дашдорж). $A = \{a_1 < a_2 < \dots < a_n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$, $X \subseteq A$, $\sigma(X) = \sum_{x \in X} x$,

$\Sigma(A) = \{\sigma(X) \mid X \subseteq A\}$ байг. $\Sigma(A)$ нь хамгийн цөөндөө хэдэн
элементтэй вэ?

A2 (Д. Хамбаяр). 2 тийшээ төгсгөлгүй туузан дээр ± 1 тоонуудыг
бичив. Тоо бүр секунд тутам зэргэлдээ 2 тоонхоо үржвэрээр
солигдож байв. 2^k секундын дараа анхны байрлал давтагдсан бол

анхны дараалал $3 \cdot 2^k$ үетэй гэж батал.

АЗ (Д.Пүрэвсүрэн). Тетраэдрийн талсуудын талбайг S_a, S_b, S_c, S_d гэе. Тетраэдрийн дотор орших М цэгээс дээрхи талсууд хүртлэх зайнуудыг харгалзан x_a, x_b, x_c, x_d гэе. $x_a^2 + x_b^2 + x_c^2 + x_d^2$ нь хамгийн бага байх М цэгийн хувьд $x_a : x_b : x_c : x_d = S_a : S_b : S_c : S_d$ болохыг батал.

Б1 (Д.Хашбаяр). $f: K^+ \rightarrow K^+$, f -тасралтгүй функц, $\forall x, y, z$ ба $y > z > 0$ -ийн хувьд $f(y)f(x+zf(x)) = f(x)f(y-z)$, $f(1994) = 30$ байх бүх f функцийг ол. Энд $K^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$.

Б2 (М.Оюунцэцэг). Бүхэл координаттай дурын 1994 цэг хавтгайд авахад хүндийн төвийнх нь координат бүхэл байх 19 цэг олдохыг батал.

БЗ (Ц.Лувсандорж). $A_1 A_2 A_3 A_4$ тетраэдрийн A_i оройнуудын эсрэг талстад багтсан тойргийн төвийг харгалзан B_i гэе. Өгөгдсөн тетраэдрийг багтаасан бөмбөрцөгтэй $A_i B_i$ -үүдийн огтлолцсон цэгүүдийг C_i гэе. $V_{A_1 A_2 A_3 A_4} \leq V_{C_1 C_2 C_3 C_4}$ батал.

БОДОЛТ

А1. $A^+ = \{a \in A | a > 0\}$, $A^{(+)} = A^+ \cup \{0\}$, $A^- = \{a \in A | a < 0\}$ гэе. Тэгвэл

а) $\forall a \in A$ бүрийн хувьд $|\Sigma(BU\{0\})| \leq |\Sigma(B)| + 1$ байх нь илэрхий.

б) $0 \neq b \in B$ бол $|\Sigma(BU\{0\})| \leq |\Sigma(BU\{b\})|$:

$b > 0$ үед $\sigma(B^+ \cup \{b\}) \in \Sigma(BU\{b\}) \setminus \Sigma(B)$,

$b < 0$ үед $\sigma(B^- \cup \{b\}) \in \Sigma(BU\{b\}) \setminus \Sigma(B)$ ба $\Sigma(B) \subseteq \Sigma(BU\{b\})$ тул

$|\Sigma(B)| + 1 \leq |\Sigma(BU\{b\})|$ болов.

а)-г анхаарвал б) батлагдана.

в) $|A^+| = s$ бол $|\Sigma(A^+)| \geq \frac{s(s+1)}{2}$:

$$\underbrace{a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{s-1} < a_s}_{s} < \underbrace{a_s < a_s + a_1 < a_s + a_2 < \dots < a_s + a_{s-1}}_{s-1} < \dots < \underbrace{a_s + a_{s-1} + \dots + a_1}_{1}$$

-ээс $|\Sigma(A^+)| \geq \frac{s(s+1)}{2}$

$C \subseteq \mathbb{R}$, $|C| = n$ ба $\min |\Sigma(C)| = |\Sigma(A)|$ байх. Тэгвэл б) ёсоор $0 \in A$ гэж үзэж болно. $|A^+| = s$ гэвэл $|A^-| = n - s - 1$ болно. Иймд

$$|\Sigma(A)| = |\Sigma(A^{(+)} \cup A^-)| \geq |\Sigma(A^{(+)})| + |\Sigma(A^-)| \stackrel{a)}{=} |\Sigma(A^+)| + 1 + |\Sigma(A^-)| \geq \frac{s(s+1)}{2} +$$

$$+\frac{(n-s-1)(n-s)}{2}+1=\frac{n^2-n}{2}+s(s-n+1)+1=F(s)$$

$f(s)=s(s-n+1)$ - функцийн хамгийн бага утгыг $0 < s \leq n-1$ завсарт бодье.

$$f'(s)=2s-n+1=0, \quad s=\frac{n-1}{2} \quad F_{\min} = F\left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{n^2-1}{4} + 1 = \left[\frac{n^2}{4}\right] + 1 \text{ болно. Үнэхээр}$$

$n=2k$ үед $A=\{-(k-1), -(k-2), \dots, -1, 0, 1, \dots, k\}$, $n=2k+1$ үед

$A=\{-k, -(k-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, k\}$ олонлогийн хувьд

$$|\Sigma(A)| = \left[\frac{n^2}{4}\right] + 1 \text{ болохыг хялбархан харж болно.}$$

А2. Манай бодлого нь $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \{\pm 1\}$ функцийн хувьд $f(x, y+1) = f(x-1, y)f(x+1, y)$ (1) ба $f(x, 0) = f(x, 2^k)$ (2) бол $f(x, 0) = f(x+2 \cdot 3^k, 0)$ байна гэж батлахтай адил.

$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ хувьд $f(x, y+2^n) = f(x-2^n, y)f(x+2^n, y)$ (*) гэж батлая.

$f(x, y+2^{n+1}) \stackrel{\text{Инд}}{=} f(x-2^n, y+2^n)f(x+2^n, y+2^n) \stackrel{\text{Инд}}{=} f(x-2^{n+1}, y)f(x, y)f(x, y) \cdot f(x+2^{n+1}, y) = f(x-2^{n+1}, y)f(x+2^{n+1}, y)$ болох ба (1)-г тооцвол (*)-нь индукцээр батлагдлаа. Эндээс:

$$f(x+2^k, 0) \stackrel{(2)}{=} f(x+2^k, 2^k) \stackrel{(*)}{=} f(x, 0)f(x+2^{k+1}, 0)$$

$$f(x+2^{k+1}, 0) \stackrel{(2)}{=} f(x+2^{k+1}, 2^k) \stackrel{(*)}{=} f(x+2^k, 0)f(x+3 \cdot 2^k, 0) \text{ болох ба}$$

эхний илэрхийллийн хоёр талыг $f(x+2^{k+1}, 0)$ нөгөөг нь $f(x+2^k, 0)$ -оор үржүүлбэл $f(x, 0) = f(x+2^k, 0)f(x+2^{k+1}, 0) = f(x+3 \cdot 2^k, 0)$ болж бодлого бодогдлоо.

А3. Тетраэдрийн эзэлхүүнийг V гэвэл $V = \frac{1}{3}(S_a x_a + S_b x_b + S_c x_c + S_d x_d)$ болно, энд $V = \text{const}$. Кошийн тэнцэлбишийг бичвэл

$$(S_a x_a + S_b x_b + S_c x_c + S_d x_d)^2 \leq (S_a^2 + S_b^2 + S_c^2 + S_d^2)(x_a^2 + x_b^2 + x_c^2 + x_d^2) \text{ болно.}$$

Тэнцэлбишийн зүүн гар тал $9V^2$ -тай тэнцүү тогтмол, S_a, S_b, S_c, S_d -үүд тогтмол. $x_a^2 + x_b^2 + x_c^2 + x_d^2$ нь $\min$ утгаа тэнцэл биелэх үед авна. Иймд

$$\text{Кошийн тэнцэлбишийн тэнцэлдээ хүрэх шинж ёсоор } \frac{x_a}{S_a} = \frac{x_b}{S_b} = \frac{x_c}{S_c} = \frac{x_d}{S_d}$$

болж батлагдлаа.

Б1. $y = x + zf(x) + z$ (1) орлуулга хийвэл $f(x + zf(x) + z)f(x + zf(x)) = f(x)f(x + zf(x))$ буюу $f(y) = f(x)$ (2) гэж гарна. Үнэндээ (2) нь $y > x$

байх у бүрийн хувьд снэлэхийг одоо харуулъя. $u > x$ байх у тоог авъя. Тэгвэл (1)-ээс $z = \frac{y-x}{f(x)+1}$ болох тул $z = \frac{y-x}{f(x)+1}$ гэж аваад (1)-ээр энэхүү у-ийг олно. Эндээс $x \in \mathbb{R}^+$ бүрийн хувьд $f(x) = f(1994) = 30 = \text{const}$ гэж гарав.

Б2 бол X-IY-B2 билээ.

Б3. $A_1 A_2 A_3 A_4$ зөв тетраэдр байх үед уул тетраэдрийн хүндийн төвийн хувьдахь тэгш хэмийн хувиргалтаар $A_1 A_2 A_3 A_4$ тетраэдр $C_1 C_2 C_3 C_4$ тетраэдрт шилжих учир $V_{A_1 A_2 A_3 A_4} = V_{C_1 C_2 C_3 C_4}$ болох нь харагдлаа.

Бодлогыг ерөнхий тохиолдолд бодохдоо хүндийн төвийн координатын (барицентр) системийг ашиглах болно.

A_i оройн эсрэг орших талсын талбайг $S_i, A_i A_j$ ирмэгийн уртыг a_{ij} гэж тэмдэглэн, $A_1 A_2 A_3 A_4$ тетраэдрийн огторгуйн хүндийн төвийн координатын системийн суурь болгон авбал $A_1(1, 0, 0, 0); A_2(0, 1, 0, 0);$

$$A_3(0, 0, 1, 0); A_4(0, 0, 0, 1); B_1\left\{0, \frac{S_2}{S_2+S_3+S_4}, \frac{S_3}{S_2+S_3+S_4}, \frac{S_4}{S_2+S_3+S_4}\right\};$$

$$B_2\left\{\frac{S_1}{S_1+S_3+S_4}, 0, \frac{S_3}{S_1+S_3+S_4}, \frac{S_4}{S_1+S_3+S_4}\right\}; B_3\left\{\frac{S_1}{S_1+S_2+S_4}, \frac{S_2}{S_1+S_2+S_4}, 0, \frac{S_4}{S_1+S_2+S_4}\right\};$$

$$B_4\left\{\frac{S_1}{S_1+S_2+S_3}, \frac{S_2}{S_1+S_2+S_3}, \frac{S_3}{S_1+S_2+S_3}, 0\right\}$$
 ба өгсөн тетраэдрийн багтаасан

бөмбөрцгийн тэгшитгэл нь $\sum_{1 \leq i < j \leq 4} a_{ij}^2 \mu_i \mu_j = 0$ болохыг тус тус хялбар

харуулж болно.

A_1, B_1, C_1 цэгүүд нэг шулуун дээр орших учир $\overrightarrow{C_1 A_1} + t_1 \overrightarrow{C_1 B_1} = \vec{0}$ байх нь мэдээж билээ. Дурын O цэгийн хувьд гурвалжны дүрмийг хэрэглэвэл:

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{\overrightarrow{OA_1}}{1+t_1} + \frac{t_1}{1+t_1} \overrightarrow{OB_1} \text{ болно. Энд } S_2 \cdot \overrightarrow{B_1 A_2} + S_3 \cdot \overrightarrow{B_1 A_3} + S_4 \cdot \overrightarrow{B_1 A_4} = \vec{0}$$

буюу өмнөх O цэгийн хувьд гурвалжны дүрмийг хэрэглэвэл:

$$\overrightarrow{OB_1} = \frac{S_2}{S_2+S_3+S_4} \overrightarrow{OA_2} + \frac{S_3}{S_2+S_3+S_4} \overrightarrow{OA_3} + \frac{S_4}{S_2+S_3+S_4} \overrightarrow{OA_4} \text{ болно.}$$

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{1+t_1} \overrightarrow{OA_1} + \frac{t_1}{1+t_1} \frac{S_2}{S_2+S_3+S_4} \overrightarrow{OA_2} + \frac{t_1}{1+t_1} \frac{S_3}{S_2+S_3+S_4} \overrightarrow{OA_3} + \frac{t_1}{1+t_1} \frac{S_4}{S_2+S_3+S_4} \overrightarrow{OA_4}$$

учир

$$C_1 \left(\frac{1}{1+t_1}; \frac{t_1}{1+t_1} \frac{S_2}{S_2+S_3+S_4}; \frac{t_1}{1+t_1} \frac{S_3}{S_2+S_3+S_4}; \frac{t_1}{1+t_1} \frac{S_4}{S_2+S_3+S_4} \right) \text{ байна. Үүнтэй}$$

адилаар

$$C_2 \left(\frac{t_2}{1+t_2} \frac{S_1}{S_1+S_3+S_4}; \frac{1}{1+t_2}; \frac{t_2}{1+t_2} \frac{S_3}{S_1+S_3+S_4}; \frac{t_2}{1+t_2} \frac{S_4}{S_1+S_3+S_4} \right)$$

$$C_3 \left(\frac{t_3}{1+t_3} \frac{S_1}{S_1+S_2+S_4}; \frac{t_3}{1+t_3} \frac{S_2}{S_1+S_2+S_4}; \frac{1}{1+t_3}; \frac{t_3}{1+t_3} \frac{S_4}{S_1+S_2+S_4} \right)$$

$$C_4 \left(\frac{t_4}{1+t_4} \frac{S_1}{S_1+S_2+S_3}; \frac{t_4}{1+t_4} \frac{S_2}{S_1+S_2+S_3}; \frac{t_4}{1+t_4} \frac{S_3}{S_1+S_2+S_3}; \frac{1}{1+t_4} \right)$$

болохыг гаргана.

C_i цэгүүд $A_1 A_2 A_3 A_4$ тетраэдрийн багтаасан бөмбөрцөг дээр оршдог болохыг санавал t_1, t_2, t_3, t_4 параметруудийг a_{ij}, S_i тоонуудаар илэрхийлж болно. Тухайлбал; C_1 цэгийн координатыг бөмбөрцгийн тэгшитгэлд орлуулан $t_1 \neq -1$ болохыг анхаарвал

$$t_1 = - \frac{(a_{12}^2 S_2 + a_{13}^2 S_3 + a_{23}^2 S_4)}{a_{24}^2 \cdot S_2 \cdot S_3 + a_{34}^2 \cdot S_3 \cdot S_4}$$

Үүнтэй адилаар t_2, t_3, t_4 параметруудийг олно.

Бодлогын бодолтонд хэрэглэгдэх чухал теоремыг томъёолъё.

Теорем. Огторгуйн хүндийн төвийн координатын системийн суурь болох $A_1 A_2 A_3 A_4$ тетраэдрийн хувьд тетраэдрийн оройнууд болох $C_1(a_1, a_2, a_3, a_4)$, $C_2(c_1, c_2, c_3, c_4)$, $C_3(d_1, d_2, d_3, d_4)$, $C_4(p_1, p_2, p_3, p_4)$ цэгүүд өгөгдсөн бол

$$\frac{V_{A_1 A_2 A_3 A_4}}{V_{C_1 C_2 C_3 C_4}} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 & p_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 & p_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 & p_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 & p_4 \end{vmatrix} \text{ байна.}$$

Теоремын баталгааг М.Б.Валж, В.Г.Болтянский, "Геометрия масс"

номноос үз.

Одоо энэхүү теоремыг ашиглан бичихэд үүсэх тодорхойлогчийг 1-ээс хэтрэхгүй болохыг хялбар тооцох бололцоотойгоор бодлого бодогдов.

УМО-30, БАГИЙН ОЛИМПИАД

Л.Оюунцэцэг

Энэ удаагийн багийн олимпиадад нийт 9 баг оролцож, I байрт 11 сургуулийн баг(41оноо), II байрт П.Энхболдын нэрэмжит баг(36оноо) тус тус шалгарлаа. Ийнхүү баг бүрээс дэвшүүлсэн бодлогуудыг сонирхуулъя.

1. (1-р сургууль) Хэрэв ялгаатай 15 анхны тоо арифметик прогрессын дэс дараалсан гишүүд үүсгэдэг бол ялгавар нь 30000-аас их гэж батал.

БОДОЛТ:

1. Эдгээр 15 анхны тоонууд арифметик прогрессийн эхний 15 гишүүн гэж үзэж болно.

$$a_1; a_2=a_1+d, a_3=a_1+2d; \dots a_{15}=a_1+14d \quad (1)$$

d нь 13-аас үл хэтрэх бүх анхны тоонуудад хуваагдана гэдгийг харуулъя. Үүний тулд дараах өгүүлбэрийг баталгаагүй ашиглая.

Өгүүлбэр: Хэрвээ $(d, p)=1$ бол

$a, a+d, a+2d, \dots, a+(p-1)d$ -үүд p модулиар ялгаатай тоонууд байна.

p -нь 13-аас үл хэтрэх анхны тоо байг. Эсрэгээс нь $p \nmid d$ гэж үзье.

$(d, p)=1$ болно. Иймд (1) ба өгүүлбэр ёсоор $a_i \equiv 0 \pmod{p}$ байх i дугаар олдоно.

a_i анхны тоо учир $a_i = p$ байна. $i \leq 2$ гэж харуулъя. $i \geq 3$ байг.

$$a_i = a_1 + (i-1)d \leq 13 \text{ байна. } 2 \leq a_1, \quad i \geq 3 \text{ гэдгийг ашиглавал } 13 \geq a_1 = a_1 + (i-1)d \geq 2 + (3-1)d \Rightarrow d \leq 5,5 \text{ гэж гарна. } d \text{ нь тэгш тоо байх учир } d=2 \text{ эсвэл } d=4 \text{ байна. Аль ч тохиолдолд дэс дараалсан 7 гишүүн дотор 3-т хуваагдах 2 тоо олдоно (өгүүлбэр ёсоор). Иймд бүгд анхны тоо гэдэгт зөрчине. Иймд } i \leq 2 \text{ байна. } a_i \equiv 0 \pmod{p} \text{ гэдгээс } a_{i+p} \equiv 0 \pmod{p} \text{ гэж гарна. } i+p \leq 2+13=15 \text{ учир } a_{i+p} \text{ нь анхны гэдэгт зөрчих болно. Иймд } d \text{ нь 13-аас үл хэтрэх бүх анхны тоонуудад хуваагдана. Эндээс } 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \mid d \text{ гэж гарна. Ийнхүү } d \geq 30030 \text{ болно.}$$

2. (Буриад баг)

Тойргийг багтаасан ABCD дөрвөн өнцөгтийн дотор 4 тойргийг зурагт үзүүлсэн байдлаар байрлуулав. Дор хаяж хоёр тойргийн радиус тэнцүү

гэж батал.

БОДОЛТ:

Тойргийг багтаасан учир $AB+CD=BC+AD$ ба эндээс

$$A_1A_2+C_1C_2=B_1B_2+D_1D_2 \Leftrightarrow \sqrt{(R_1+R_2)^2-(R_1-R_2)^2} + \sqrt{(R_3+R_4)^2-(R_3-R_4)^2} =$$

$$= \sqrt{(R_2+R_3)^2-(R_2-R_3)^2} + \sqrt{(R_1+R_4)^2-(R_1-R_4)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{R_1R_2} + 2\sqrt{R_3R_4} = 2\sqrt{R_2R_3} + 2\sqrt{R_1R_4} \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_3})(\sqrt{R_2} - \sqrt{R_4}) = 0, \Leftrightarrow R_1=R_3 \vee R_2=R_4$$

3. ("Халимаг" баг)

$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 30$ тэгшитгэл бүхэл шийдгүй гэж батал.

БОДОЛТ:

Дээрх тэгшитгэл нь $\begin{cases} a^3+b^3+c^3=30 \\ a+b+c=0 \end{cases}$ тэгшитгэлийн системтэй эквивалент.

$a^3+b^3-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)=30 \Leftrightarrow -ab(a+b)=10$ тэгшитгэлд хүрэх ба энэ тэгшитгэл бүхэл шийдгүйг хялбар харж болно.

4. ("Багш" баг)

$x^2+7y^2=2^z$ (*) тэгшитгэлийн $1 \leq z \leq 1994$ завсар дахь z -үүдийн хувьд бүх натурал шийдүүдийн тоо нь 30^4 -ээс их гэж батал.

БОДОЛТ:

Энэ бодлогыг Баянхонгор аймгийн ӨЗБАС-ийн багш Б.Баяржаргал дэвшүүлсэн ба түүний бодолтыг энд нийтлэв.

1. $\forall z \geq 3$ эерэг бүхэл тооны хувьд (*) тэгшитгэлийг хангах (x, y) сондгой шийд олдохыг үзүүлэе.

Үүний тулд $2^z = x^2 + 7y^2$ байх (x, y) сондгой шийд z -ийн хувьд олдсон гэж үзээд $2^{z+1} = x_1^2 + 7y_1^2$ байх (x_1, y_1) сондгой шийдийг байгуулья.

$2^{z+1} = (x_1 + \sqrt{7} y_1 i)(x_1 - \sqrt{7} y_1 i) = x_1^2 + 7y_1^2$ байх ба үүнд $i^2 = -1$ байх комплекс тоо.

$$a = \frac{1}{2} (x + \sqrt{7} y \cdot i) (1 + \sqrt{7} \cdot i) = \left(\frac{x+y}{2} - 4y \right) + \frac{x+y}{2} \cdot \sqrt{7} \cdot i$$

$$b = \frac{1}{2} (x + \sqrt{7} y \cdot i) (1 - \sqrt{7} \cdot i) = \left(\frac{x-y}{2} - 4y \right) - \frac{x-y}{2} \cdot \sqrt{7} \cdot i \quad \text{комплекс}$$

тоонуудыг авч үзье.

$$\bar{a} = \frac{1}{2} \left(x - \sqrt{7}y \cdot i \right) \left(1 - \sqrt{7} \cdot i \right) = \left(\frac{x+y}{2} - 4y \right) - \frac{x+y}{2} \cdot \sqrt{7} \cdot i$$

$$\bar{b} = \frac{1}{2} \left(x - \sqrt{7}y \cdot i \right) \left(1 + \sqrt{7} \cdot i \right) = \left(\frac{x-y}{2} - 4y \right) + \frac{x-y}{2} \cdot \sqrt{7} \cdot i$$

а, b-нь а, b тоонуудын комплекс хосмог тоонууд

$$a \bar{a} = \frac{1}{4} \left(x + \sqrt{7}y i \right) \left(1 + \sqrt{7} i \right) \left(x - \sqrt{7}y i \right) \left(1 - \sqrt{7} i \right) = \frac{1}{4} \left(x + \sqrt{7}y i \right) \left(x - \sqrt{7}y i \right) \cdot$$

$$\left(1 + \sqrt{7} i \right) \left(1 - \sqrt{7} i \right) = \frac{1}{4} (x^2 + 7y^2) \cdot 8 = \frac{1}{2^2} \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 2^{z+1}$$

Иймд $a\bar{a} = 2^{z+1}$ болно. Яг үүнтэй адилаар $b\bar{b} = 2^{z+1}$ болохыг харж болно.

$\frac{x+y}{2}$; $\frac{x-y}{2} = \frac{x+y}{2} - y$ тоонууд x, y сондгой учир бүхэл тоонууд байх ба

эдгээр тоонуудын тэгш сондгой эерэг. Хэрвээ $\frac{x+y}{2}$ сондгой тоо бол

$$x_1 = \frac{x+y}{2} - 4y, \quad y_1 = \frac{x+y}{2} \quad \text{гэж авах ба } (x_1 + \sqrt{7}y_1 i)(x_1 - \sqrt{7}y_1 i) = 2^{z+1}$$

буюу $x_1^2 + 7y_1^2 = 2^{z+1}$ болж (x_1, y_1) бидний сонирхож буй шийд болно.

$$\text{Хэрвээ } \frac{x-y}{2} \text{ сондгой бол } x_1 = \frac{x-y}{2} + 4y, \quad y_1 = -\frac{x-y}{2} \quad \text{гэвэл } x_1^2 + 7y_1^2 = 2^{z+1}$$

болох тул (x_1, y_1) шийд болно. Ийнхүү $\forall z \geq 3$ эерэг бүхэл тооны хувьд (x, y) сондгой шийд байгууллаа.

2. Одоо $3 \leq z \leq 1994$ завсар дахь бүх z -ийн хувьд нийт натурал шийдийн тоонууд $> 30^4$ гэж харуулъя.

Хэрвээ (x, y) нь $(*)$ -ийн шийд бол $(2^k x, 2^k y)$ нь $z+2k$ -ийн хувьд шийд болно. (x, y) $z=3$ үед шийд болсон гэвэл $(2^k x, 2^k y)$ нь $3+2k=z$ -ийн

шийд болно. Үүнд $k=1, 995$ байна г.м шийдийг тооцвол

$$2 \cdot (1+2+\dots+995) = 996 \cdot 995 > 30^4 \text{ болно.}$$

5. (П.Энхболдын нэрэмжит баг)

a, b, c бодит тоонуудын хувьд $(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(a^2+ac+c^2) > (ab+bc+ca)^3$ тэнцэтгэл бишийг батал.

БОДОЛТ: (ШУА. Математикийн хүрээлэн В.Адьяасүрэнгийн бодолт)

1. a, b, c гурвуулаа ижил тэмдэгтэй үед a, b, c эерэг тоонуудын хувьд тэнцэлбиш хэвээрээ үлдэнэ.

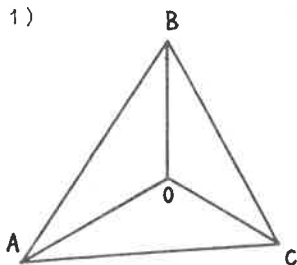
ЭКВИВАЛЕНТ.

2. Үндсэн тохиолдолд a, b, c зэрэг тоонуудын хувьд

$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ac+c^2)(b^2-bc+c^2) \geq (ab+bc+ca)^3 \quad \text{тэнцэл} \quad \text{биштэй}$$

ЭКВИВАЛЕНТ.

1)



$$OA=a \quad OB=b \quad OC=c \quad \text{ба} \quad \angle AOB = \angle BOC = \angle AOC = 120^\circ$$

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$$

$$BC = \sqrt{b^2 + bc + c^2} \quad AC = \sqrt{a^2 + ac + c^2}$$

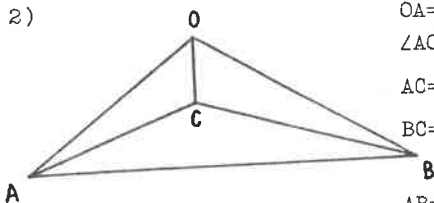
$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(a^2+ac+c^2) = \\ = (AB \cdot BC)(BC \cdot AC)(AB \cdot AC) = \frac{2S}{\sin \beta} \cdot \frac{2S}{\sin \gamma} \cdot \frac{2S}{\sin \alpha}$$

$$S = S_{ABC} \quad \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{тэнцэл бишийг ашиглавал}$$

$$\frac{8S^3}{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma} = \frac{64S^3}{3\sqrt{3}} = \frac{64}{3\sqrt{3}} (S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC})^3 = \frac{64}{3\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{2} ab \sin 120^\circ + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} ac \sin 120^\circ + \frac{1}{2} bc \sin 120^\circ \right)^3 = (ab+bc+ca)^3 \quad \text{болж} \quad (1) \quad \text{тохиолдол}$$

батлагдав.

2)



$$OA=a, \quad OB=b, \quad OC=c$$

$$\angle AOC = 60^\circ, \quad \angle COB = 60^\circ$$

$$AC = \sqrt{a^2 + c^2 - ac}$$

$$BC = \sqrt{b^2 + c^2 - bc}$$

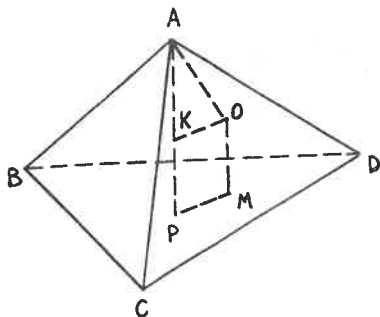
$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 + ab} \quad \text{ба} \quad (1) \quad \text{тохиолдолтой} \\ \text{адилаар батлагдана.}$$

6. ("Комисс" баг)

ABCD пирамидын дотор орших O цэгээс пирамидын орой хүртэлх зайг харгалзан R_A, R_B, R_C, R_D талсууд хүртэлх зайг r_A, r_B, r_C, r_D гэж тэмдэглэе.

$$R_A + R_B + R_C + R_D \geq 3(r_A + r_B + r_C + r_D) \quad \text{тэнцэл бишийг батал.}$$

БОДОЛТ: (В.Адъяасүрэнгийн бодолт)



AP-өндөр

$$h_A = AP = AK + KP \leq AO + OM = R_A + r_A$$

$$S_A \cdot h_A = 3 \cdot V = 3 \cdot V_{OBCD} + 3 \cdot V_{OACD} +$$

$$+ 3 \cdot V_{OABD} + 3 \cdot V_{OABC} =$$

$$= S_A r_A + S_B r_B + S_C r_C + S_D r_D,$$

$$S_A h_A - S_A r_A \leq S_A R_A$$

$$S_A R_A \geq S_B r_B + S_C r_C + S_D r_D \text{ болно.}$$

Энэ тэнцэл бишийг AB ирмэгийг агуулсан биссектор хавтгайн хувьд O цэгтэй тэгш хэмтэй O' цэгийн хувьд бичвэл

$$S_A R_A \geq S_C r_D + S_D r_C + S_B r_B \text{ болно.}$$

Энэ тэнцэл бишийг AD ирмэгийг агуулсан биссектор хавтгайн хувьд O' цэгтэй тэгш хэмтэй O'' цэгийн хувьд бичвэл:

$$S_A R_A \geq S_D r_B + S_C r_D + S_B r_C \text{ буюу}$$

$$R_A \geq \frac{S_D}{S_A} r_B + \frac{S_C}{S_A} r_D + \frac{S_B}{S_A} r_C \text{ байна.}$$

Үүнтэй адилээр

$$R_B \geq \frac{S_D}{S_B} r_C + \frac{S_C}{S_B} r_B + \frac{S_A}{S_B} r_D$$

$$R_C \geq \frac{S_A}{S_C} r_B + \frac{S_B}{S_C} r_D + \frac{S_D}{S_C} r_A$$

$$R_D \geq \frac{S_A}{S_D} r_C + \frac{S_C}{S_D} r_B + \frac{S_B}{S_D} r_A \text{ гэж гарна.}$$

Эдгээр тэнцэл бишүүдийг гишүүнчлэн нэмээд Кошийн тэнцэтгэл бишийг хэрэглэвэл

$$R_A + R_B + R_C + R_D \geq 3(r_A + r_B + r_C + r_D) \text{ болно.}$$

Асуулт: Энэ тэнцэл бишийг сайжруулж болох уу?

7. ("11-р сургууль" баг)

$\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta < \frac{\pi}{3}$ байх α, β бодит тоонуудын хувьд

$$\frac{g(\frac{\pi}{3} - \alpha - \beta)}{\sin(\frac{\pi}{3} - \alpha - \beta)} = \begin{cases} \frac{g(\alpha) + g(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \\ \frac{g(\alpha) - g(\beta)}{\sin(\alpha - \beta)} \end{cases} \begin{array}{l} \text{байх } g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ тогтмол бус функц} \\ \text{олдох уу?} \end{array}$$

БОДОЛТ: (МУУИС-ийн багш Ц.Баясгалангийн бодолт)

$$\alpha = \beta \text{ үед } \frac{g(\frac{\pi}{3} - \alpha - \beta)}{\sin(\frac{\pi}{3} - \alpha - \beta)} = \frac{g(\alpha) + g(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \text{ нөхцөл биелнэ.}$$

$$\alpha = \beta = 20^\circ, \quad \gamma = \frac{\pi}{3} - \alpha - \beta = 20^\circ \text{ болно.}$$

$$\frac{g(20^\circ)}{\sin 20^\circ} = \frac{2 \cdot g(20^\circ)}{\sin 40^\circ} \quad \begin{array}{l} \sin 40^\circ = 2 \sin 20^\circ \\ \sin 20^\circ (\cos 20^\circ - 1) = 0 \end{array}$$

Иймд дээрх нөхцлийг хангах функц олдохгүй.

8. ("Булган-Эрдэнэт" баг)

$$x^4 + \sqrt[5]{7} x^3 + \frac{\sqrt[3]{8}}{3} x^2 - \sqrt[5]{9} x + \frac{\sqrt[30]{1994}}{\sqrt[3]{4^4}} = 0$$

тэгшитгэл дөрвөн эерэг бодит шийдтэй байж чадахгүйг батал.

БОДОЛТ:

x_1, x_2, x_3, x_4 эерэг бодит язгуурууд гэвэл Виетийн томъёо ёсоор

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\sqrt[5]{7}$ болно. Эндээс бүх язгуурууд эерэг бодит байж болохгүй.

9. ("МУУИС" баг)

$A_1, A_2, \dots, A_n$ гүдгэр n өнцөгтөөр суурь хийсэн S оройтой пирамидын $A_1 A_2$ тал дээрх дурын O цэгийн хувьд

$$A_1 A_2 \cdot (SO + \sum_{i=3}^n OA_i) < A_2 O (A_1 S + \sum_{i=3}^n A_1 A_i) + A_1 O (A_2 S + \sum_{i=3}^n A_2 A_i) \text{ болохыг}$$

батал.

БАГИЙН ТЭМЦЭЭНИЙ ДҮН

Багууд	№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Оноо	Байр
Комисс	1	⋮	6	6		5	6		6	6	35	IV
Энхболд	2		⋮	6	6	6	6	6	6		36	II
Халимаг	3	1		⋮		6	6				13	IX
11-р сургууль	4	6	6	6	⋮	6	5		6	6	41	I
Буриад	5	1	6	6		⋮	6				19	VI
1-р сургууль	6			6		6	⋮		5		17	VIII
Багш	7		6	6		6	6	⋮	6	6	36	III
МУУИС	8		6	6		6	6		⋮	6	30	V
Булган- Эрдэнэт	9			6		6	6			⋮	13	VII

ОУМО-35

ОУМО-35 Гонконгод 1994 оны 7 сарын 8-20-нд боллоо.

Дэлхийн 69 орон оролцсон тэмцээний дүн гарахад АНУ 252, Хятад 229, Орос 224, Болгар 223, Унгар 221 оноогоор эхний 5 байрыг эзэллээ. Олимпиадын түүхэнд анх удаа бүтэн оноо авсан баг нь АНУ-ийн баг боллоо.

Манай улс 65 оноогоор 51 байранд орж өнгөрсөн жилийнхээ байрыг 10-аар урагш ахиуллаа.

Манай улсын 1994 оны үнэмлэхүй аврага Ү.Отгонбаяр 32 оноогоор мөнгөн медаль хүртэж сайхан амжилт үзүүлээ.

Сурагчдын англи хэлний мэдлэгт нэмэр болно гэж үзээд бодлогуудыг англи хэлэн дээр авч үзье.

Problem 1.

Let m and n be positive integers. Let $a_1, a_2, \dots, a_m$ be distinct elements of $\{1, 2, \dots, n\}$ such that whenever $a_i + a_j \leq n$ for some $i, j, 1 \leq i < j \leq m$, there exists $k, 1 \leq k \leq m$ with $a_i + a_j = a_k$. Prove that

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}$$

Problem 2.

ABC is an isosceles triangle with $AB=AC$. Suppose that

- (i) M is the midpoint of BC and O is the point on the line AM such that OB is perpendicular to AB ;
- (ii) Q is an arbitrary point on the segment BC different from B and C ;
- (iii) E lies on the line AB and F lies on the line AC such that E, Q and F are distinct and collinear.

Prove that OQ is perpendicular to EF if and only if $QE=QF$.

Problem 3.

For any positive integer k , let f_k be the number of elements in the set $\{k+1, k+2, \dots, 2k\}$ whose base 2 representation has precisely three 1s.

- (a) Prove that for any positive integer m , there exists at least one positive integer k such that $f(k)=m$.
- (b) Determine all positive integers m for which there exists exactly one k with $f(k)=m$.

Problem 4.

Determine all ordered pairs (m, n) of positive integers such that

$\frac{n^3+1}{mn-1}$ is an integer.

$mn-1$

Problem 5.

Let S be the set of real numbers greater than -1 . Find all functions $f: S \rightarrow S$ satisfying the two conditions;

- (i) $f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x)$ for all x and y in S ;
- (ii) $f(x)/x$ is strictly increasing for $-1 < x < 0$ and for $0 < x$.

Problem 6.

Show that there exists a set A of positive integers with the following property: For any infinite set S of primes, there exist positive integers $m \in A$ and $n \notin A$, each of which is a product of k

distinct elements of S for some $k \geq 2$.

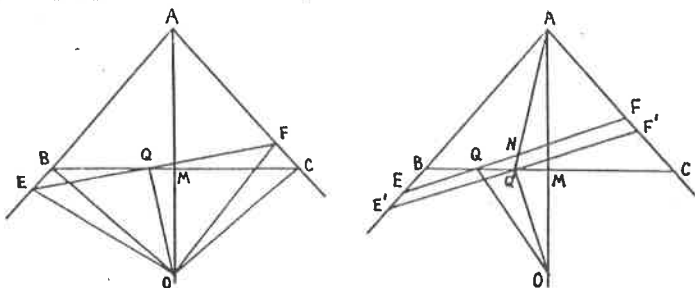
SOLUTION

P1. We may assume that $a_1 > a_2 > \dots > a_m$. We claim that $a_i + a_{m+1-i} \geq n+1$ for $1 \leq i \leq m$. If $a_i + a_{m+1-i} \leq n$ for some i , then $a_i < a_i + a_m < a_i + a_{m-1} < \dots < a_i + a_{m+1-i} \leq n$. Hence each of the i numbers $a_i + a_m, a_i + a_{m-1}, \dots, a_i + a_{m+1-i}$ is a different one of $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$. This is impossible. It follows that

$$2(a_1 + a_2 + \dots + a_m) = (a_1 + a_m) + (a_2 + a_{m-1}) + \dots + (a_m + a_1) \geq m(n+1)$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}$$

P2. First, assume that OQ is perpendicular to EF . Now $OEBQ$ and $OCFQ$ are cyclic quadrilaterals. Hence $\angle OEQ = \angle OBQ = \angle OCQ = \angle OFQ$. It follows that we have $\triangle OEQ \cong \triangle OFQ$ and $QE = QF$. Suppose the perpendicular through O to EF meet BC at $Q' \neq Q$. Draw the line through Q' parallel to EF , meeting the lines AB and AC at E' and F' respectively. Then $Q'E' = Q'F'$ as before. Let AQ' meet EF at N . Then $N = Q$ and $NE = NF$, so that $QE = QF$. It follows that if $QE = QF$, then OQ is perpendicular to EF .



P3. (a) Let g_k denote the number of elements in the set $\{1, 2, \dots, k\}$ whose base 2 representation has precisely three 1s. Clearly, $f(k)$ and $g(k)$ are non-decreasing functions, and $f(k) = g(2k) - g(k)$. Hence

$$\begin{aligned} f(k+1) - f(k) &= g(2k+2) - g(k+1) - (g(2k) - g(k)) \\ &= g(2k+2) - g(2k) - (g(k+1) - g(k)). \end{aligned}$$

Now either both $2k+2$ is counted in $g(2k+2)$ and $k+1$ is counted in $g(k+1)$, or neither is. It follows that $f(k+1)-f(k)=1$ or 0 depending on whether $2k+1$ is counted in $g(2k+2)$. In any case, $f(k)$ does not skip over any positive integers. Note the $g(2^n) = g(2^n-1) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$, so that $f(2^n) = g(2^{n+1}) - g(2^n) = \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Hence $f(k)$ is not bounded above. It follows that the range of $f(k)$ is the set of all non-negative integers. For any positive integer m , $f(k)=m$ has at least one solution.

(b) Suppose $f(k)=m$ has a unique solution. Then $f(k+1)-f(k)=1=f(k)-f(k-1)$. The former holds if and only if $2k+1$ is counted in $g(2k+2)$. Equivalently, there are precisely two 1s in the base 2 representation of k . The same holds for $k-1$. This is possible if and only if the last digit of $k-1$ is 1, the second last digit is 0 and there is precisely one other digit being 1. In other words, $k=2^n+2$ for some integer $n \geq 2$. Now

$$\begin{aligned} f(2^n+2) &= g(2^{n+1}+4) - g(2^n+2) \\ &= 1 + g(2^{n+1}) - g(2^n) \\ &= 1 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

It follows that the set of positive integer m for which $f(k)=m$ has a unique solution is $\{1 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \mid n \geq 2\}$.

P4. Note that $mn-1$ and m^3 are relatively prime. That $mn-1$ dividing n^3+1 is therefore equivalent to $mn-1$ dividing $m^3(n^3+1) = m^3n^3-1+m^3+1$, which is in turn equivalent to $mn-1$ dividing m^3+1 .

If $m=n$, we have $\frac{n^3+1}{n^2-1} = n + \frac{1}{n-1}$. This is an integer if and only if $n=2$. We now consider the case $m > n$. If $n=1$, $\frac{2}{m-1}$ is an integer. This is so if and only if $m=2$ or 3 . Suppose $n \geq 2$. Note that $n^3+1 \equiv 1 \pmod{n}$

while $mn-1 \equiv -1 \pmod{n}$. Hence $\frac{n^3+1}{mn-1} = kn-1$ for some positive integer k .

Now $kn-1 < \frac{n^3+1}{n^2-1} = n + \frac{1}{n-1}$ or $(k-1)n < 1 + \frac{1}{n-1}$. Hence $k=1$, so that $n^3+1 =$

$=(mn-1)(n-1)$. This yields $m = \frac{n^2+1}{n-1} = n+1 + \frac{2}{n-1}$, which is an integer if

and only if $n=2$ or 3 . In each case, we have $m=5$. In summary, there are 9 solutions, namely, $(2,)$, $(2,1)$, $(3,1)$, $(5,2)$, $(5,3)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,5)$ and $(3,5)$, the last four obtained by symmetry.

P5. Condition (ii) implies that $f(x)=x$ has at most three solutions, one in $(-1,0)$, one equal to 0 and one in $(0,\infty)$. Suppose $f(u)=u$ for some u in $(-1,0)$. Setting $x=y=u$ in condition (i), we have $f(u^2+2u)=u^2+2u$. Since $0 < u+1 < 1$, $u^2+2u=(u+1)^2-1$ is also in $(-1,0)$. Hence $u^2+2u=u$, but then u is not in $(-1,0)$. That $f(v)=v$ for some v in $(0,\infty)$ leads to a similar contradiction. However, $f(x+(1+x)f(x))=x+(1+x)f(x)$ for all x in S . We must have $x+(1+x)f(x)=0$, so that $f(x)=-\frac{x}{1+x}$. We now prove that this function does have the desired properties. Clearly $f(x)/x=-\frac{1}{1+x}$ is strictly increasing on S . For all x and y in S , we have

$$y+(1+y)f(x)=y-\frac{x(1+y)-y-x}{1+x \quad 1+x}$$

and

$$f(x+(1+x)f(y))=f\left(\frac{x-y}{1+y}\right)=-\left(\frac{x-y}{1+y}\right)/\left(1+\frac{x-y}{1+y}\right)=\frac{y-x}{1+x}.$$

P6. Let A be the set of all positive integers of the form $q_1 q_2 \dots q_{q_1}$, where $q_1 < q_2 < \dots < q_{q_1}$ are primes. In other words,

$$A=\{2 \times 3, 2 \times 5, 2 \times 7, \dots\} \cup \{3 \times 5 \times 7, 3 \times 5 \times 11, \dots\} \\ \cup \{5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17, \dots\} \cup \dots$$

For any infinite set $S=\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ of primes with $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$, we can satisfy the requirement of the problem by taking $k=p_1$, $m=p_1 p_2 \dots p_k$ and $n=p_2 p_3 \dots p_{k+1}$.

МОНГОЛЫН ОЮУТНЫ МАТЕМАТИКИЙН III ОЛИМПИАД

Д.Гүрэвсүрэн

Монголын оюутны III олимпиадын эцнээ даваа 1994.1.25-3.25-ны хооронд МУУИС ба УБИС-ийн математикийн ангийн оюутнуудын дунд явагдаж дүнгээ гаргалаа. Тус олимпиадыг МУУИС-ийн Геометр, заах аргын тэнхим, УБИС-ийн Алгебр, геометрийн тэнхим хамтран зохион байгууллаа. Олимпиадад нийт 13 бодлогыг бодож оюн ухаанаа

сорьсноос

Гантөмөр (МУУИС - Мат II) I байр

Сандагдорж (УБИС - Мат V) II байр

Хашбаяр (МУУИС - Мат III) II байр

Чулуунбаатар (МУУИС - Мат II) III байрт шалгарч 2000, 1500, 1000 төгрөгөөр тус тус шагнууллаа.

1994.4.9-нд олимпиадын эцнээ давааны дүнг гарган МУУИС ба УБИС-ийн математикийн ангиудын хооронд багийн тэмцээн зохиогдлоо. Энэхүү тэмцээнд С.Батболд ахлагчтай МУУИС-ийн Математикийн V анги I байр, Ш.Эрдэнэбат ахлагчтай МУУИС-ийн Математикийн I анги II байр тус тус эзэлж мөнгөн шагналаар шагнуулав. Багийн тэмцээнд онолын нилээд гүнзгий чиглэлийн бодлогууд орсон бөгөөд бас хэд хэдэн хялбархан бодлогуудыг энд оруулаагүй болохыг дурдая.

ОЛИМПИАДЫН ЭЦНЭЭ ДАВААНЫ БОДЛОГУУД

1 (УБИС, Ц.Луvsсандорж). 94 эрэмбийн проектив хавтгайн бүх дэд хавтгайнуудын загваруудыг байгуул.

2 (УБИС, Ц.Луvsсандорж). Эллипсийн нум, түүнийг нэг цэгт огтлох шулуун өгөгдөв. Тэгвэл зөвхөн шугамын тусламжтайгаар эллипстэй уул шулуун огтлолцох нөгөө цэгийг байгуул.

3 (УБИС, Ц.Луvsсандорж). Бүх талсууд нь төвийн тэгш хэмтэй дүрсүүд байх аливаа олон талстыг аль нь ч анхны олон талстаас, 1-ээс бага, эерэг коэффициенттэй гомотетээр гардаг хамгийн цөөндөө хэдэн биетээр хучиж болох вэ?

4 (МУУИС, Д.Пүрэвсүрэн). V эзэлхүүнтэй ABCD тетраэдрийн BCD, CDA, DAB, ABC талсуудын талбайг харгалзан S_A, S_B, S_C, S_D гэж тэмдэглэе. Тэгвэл уул тетраэдрийн дотор орших дурын M цэгийн хувьд $S_A|MA| + S_B|MB| + S_C|MC| + S_D|MD| > 9V$ болохыг батал.

5 (МУУИС, Д.Пүрэвсүрэн). S-талбайтай ABC ($AB=c, BC=a, CA=b$) гурвалжны A оройн хувьд AB, AC талуудын үргэлжлэл дээр харгалзан $AA_1=AA_2=a$ байх A_1, A_2 цэгүүдийг тэмдэглэв. B, C оройнуудын хувьд дээрхийн адилаар цэгүүдийг байгуулахад үүсэх зургаан өнцөгтийн талбай S' бол $\frac{S'}{S} > 13$ болохыг батал.

6 (МУУИС, Ц.Дашдорж). Бие биеийнхээ жинхэнэ дэд бүлгүүдтэй изоморф байх хоёр бүлэг изоморф байх уу?

7 (МУУИС, Ц.Дашдорж). К-коммутатив цагирэг ба $f(x,y) \in K[x,y]$ олон гишүүнтийн хувьд $f(x,x)=0$ бол $f(x,y)$ нь $x-y$ -д хуваагдах уу?

8 (МУУИС, Ц.Дашдорж). Аддитив ба мультипликатив бүлгүүд нь изоморф байх талбар орших уу?

(УБИС, Б.Баясгалан). $a_{i-j} = a_{ij}$, $a_0 = 0$ ба $\{a_1, \dots, a_n\} \neq \emptyset$ бол $A = (a_{ij})_{n+1, n+1}$ матрицын хувийн утгуудыг ол.

10 (УБИС, Н.Намсрай). Нэгж дугуй дээрх Хардийн огторгуйг еерт нь буулгасан $(A_f) = z \circ f(z)$ оператортай компакт операторын идеалын нарийвчлалтайгаар байр сэлгэдэг операторуудын зураглалыг хий.

Тухайлбал

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ 2 & 2 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ 3 & 3 & 3 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad \text{матрицтай оператор энэ ангийнх мөн үү?}$$

11 (МУУИС, Д.Пүрэвсүрэн). $[x]$ -р x -ийн бүхэл хэсгийг тэмдэглэе. $[0,1)$ завсарын дурьд x_1 цэгийн хувд $x_1, x_2, x_3, \dots$ дарааллыг хэрэв $x_n = 0$ бол $x_{n+1} = 0$ ба бусад тохиолдолд $x_{n+1} = \frac{1}{x_n} \left[\frac{1}{x_n} \right]$ томъёогоор тодорхойлгоё. Тэгвэл

$$x_1 + \dots + x_n \leq \frac{F_1}{F_2} + \frac{F_2}{F_3} + \dots + \frac{F_n}{F_{n+1}}$$

(Энд $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $\forall n \geq 1$) болохыг батал.

12 (МУУИС, Д.Пүрэвсүрэн). Кубыг зүсээд түүнийгээ эвлүүлэх замаар зөв тетраэдр гарган авч болох уу?

13 (МУУИС, Р.Энхбат). Өгөгдсөн $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ олон талст олонлогт хамгийн их радиустай бөмбөрцөг багтаа. Үүнд $A_{m \times n}$ -матриц $b \in \mathbb{R}^m$.

БОДОЛТУУД

Одоо зохиогчдын өгсөн зарим бодолтыг өгье.

6. Бие биенийхээ дэд бүлгүүдтэй изоморф боловч хоорондоо изоморф биш тийм 2 бүлэг оршин байхыг үзүүлэе.

$\mathbb{Q}=(\mathbb{Q},+)$, $\mathbb{Z}=(\mathbb{Z},+)$ аддитив бүлгүүд байг.

G -ээр $\mathbb{Q}$ бүлгийн төгсгөлгүй шулуун үржвэрийг авъя.

$$G=\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}\oplus\ldots=\{(x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)|x_i\in\mathbb{Q}),+\}$$

Энд $\bar{x}+\bar{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots)$ байна. Н нь $\mathbb{Z}$ ба G -ийн шулуун үржвэр байг, ө.х: $H=\mathbb{Z}\otimes G=\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}\oplus\ldots=\{(n,\bar{x})|n\in\mathbb{Z},\bar{x}\in G\},+$, энд $(n,\bar{x})+(m,\bar{y})=(n+m,\bar{x}+\bar{y})$ байна. G -нь H -ын дэдбүлэгтэй изоморф байх нь илэрхий. $H_1=\{(0,\bar{x})\in H|\bar{x}\in G\}$ гээд $\varphi:H_1\rightarrow G$ буулгалтыг $\varphi(0,\bar{x})=\bar{x}$ гэвэл $\varphi:H_1\cong G$ изоморфизм болно. Харин

$$H\cong H_1\oplus\mathbb{Z}=\{(0,n,x_1,x_2,\ldots)\rightarrow(n,0,x_1,x_2,\ldots)=h'\in G \text{ буулгалт}$$

$H\cong(G_1,+)=\{(0,n,x_1,x_2,\ldots)\in G|n\in\mathbb{Z},x_i\in\mathbb{Q}\},+$ гэсэн бүлгүүдийн изоморфизмыг өгнө. Гэвч G ба H бүлгүүд нь изоморф байж чадахгүй. Учир нь G нь хуваалттай бүлэг ө.х $\forall n\in\mathbb{N}, \forall g\in G, \exists g'\in G:g=ng'$ чанартай. Гэтэл H нь ийм чанаргүй болох нь илт билээ.

7. 1) Хэрэв K талбар бол $K[x]$ олон гишүүнтийн цагирагт үлдэгдэлтэй хуваах алгоритм оршиж байна. Үүнийг дараах байдлаар томъёолдог.

$f(x), 0\neq g(x)\in K[x]$ бол $f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$ байх $q(x), r(x)\in K[x]$ олон гишүүнтүүд оршин байх ба $\deg r(x)<\deg g(x)$ эсвэл $r(x)=0$ байна.

2) Хэрэв K нь талбар биш харин коммутатив цагираг бол $0\neq f(x)\in K[x]$ нь ахмад гишүүний коэффициент нь 1 байх олон гишүүнт (унитар гэдэг) байхыг шаардвал үлдэгдэлтэй хуваах алгоритм мөн хүчинтэй байдаг. Нэгэнт бид $f(x,y)=a_0x^n+\ldots+a_1x+f^*(x), a_i\in K[y]$ гэж бичиж чадах тул $0\neq g^*=x-y\in K[y][x]$ гэсэн унитар олон гишүүнт авч эдний хувьд үлдэгдэлтэй хуваах алгоритм бичвэл

(1) $f^*(x)=f(x,y)=(x-y)q^*(x)+r^*(x)$ байх $q^*(x), r^*(x)\in K[y][x]$ олон гишүүнтүүд олдох ба $\deg r^*(x)<\deg(x-y)=1$ эсвэл $r^*(x)=0$ байна. (1)-д $x=y$ гэж авбал $0=0+r^*(x)$ буюу эндээс $r^*(x)=0$ гэж гарна. Иймд ямагт $x-y|f(x,y)$ байна.

8. Тийм талбар оршин байхгүйг харуулъя. Эсрэгээс нь тийм талбар F оршдог гэвэл $|F|=\infty$ байна. Учир нь $|F|=n$ гэвэл F -ийн аддитив бүлэг n элементтэй, мультипликатив бүлэг нь $n-1$ элементтэй болж тэдгээр нь изоморф байж чадахгүй. $|F|=\infty$ тохиолдолд хэрэв тийм изоморфизм φ оршдог гэвэл φ нь $x^2=1$ элементүүдийг $2\varphi(x)=0$ байх $\varphi(x)$ элементүүдэд буулгана. Гэтэл $x^2=1$ тэгшитгэл нь F -д 1 ($\text{char} F=2$), эсвэл 2 ($\text{char} F\neq 2$) шийдтэй байхад, $2x=0$ тэгшитгэл

2(char F=2), эсвэл 1 (char F=2) шийдтэй байна.

9. Энэхүү бодлого нь бодогдоогүй бодлого болохыг дурдаад уг матрицыг Теплицын матриц гэж нэрлэдгийг тэмдэглэе.

10. $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ба H^2 бол түүн дээрх Хардийн ердийн огторгуй, $LB(H^2)$ бол бүх шугаман зааглагдсан операторын банахын алгебр, $KLB(H^2)$ бол компакт операторын идеал ба

$$(Af)(z) = z \cdot f(z), \quad \forall f \in H^2, \quad \forall z \in D \text{ болог.}$$

$E_A := \{B \in LB(H^2) : A \cdot B = B \cdot A \in KLB(H^2)\}$ -ыг A -ийн гоц коммутант гэдэг. $e_n(z) = z^n$ томъёогоор өгөгдсөн $e_0, e_1, \dots$ систем H^2 -д базис үүсгэдэг. Түүний харьцаанд $LB(H^2)$ -ын элемент болгон тодорхой матрицаар төлөөлөгддөг. Тухайлбал A -ийнх

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad \text{ба } A^* \text{-ийнх нь } A^* = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \dots \end{pmatrix} \quad \text{болно.}$$

A^*A ба AA^* хоёр I -тэй $KLB(H^2)$ -д модулиар нэг ангид орох нь одоо илэрхий байна. Тиймээс $B \in E_A \iff A^*BA = B \in KLB(H^2)$ болно. Эндээс $KLB(H^2) \subseteq E_A$. Тухайлбал A нь еерийнхөө коммутантанд орохгүй гэхэд л болох юм.

12. Энэхүү бодлого нь Гильбертийн III асуудал гэдэг нэртэй юм. Бодлогыг бодохын өмнө хэд хэдэн ерөнхий ойлголтуудыг авч үзье. $\mathbb{R}$ ба түүн дээрх $\mathbb{R}^n$ вектор огторгуй!

Тодорхойлолт:

а) $S_0, S_1, \dots, S_p \in \mathbb{R}^n$ хувьд $\overrightarrow{S_0 S_i} \quad (i=1, p)$ векторууд шугаман хамааралгүй бол $[S_0, \dots, S_p] := \left\{ \sum_{i=0}^n C_i S_i : \forall C_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^n C_i = 1 \right\}$ олонлогийг

тэдгээр дээр оройтой n хэмжээст симплекс гэж тодорхойлоё.

б) Төгсгөлөг тооны симплексүүдийн нэгдлийг политоп (полиэдр) гэнэ. Хэрэв түүнд орсон симплексүүд нь n -ээс бага хэмжээстэй бол политопыг бөхсөн политоп гэнэ.

Хэрэв P -политопын хувьд

$P = P_1 \cup \dots \cup P_r$ ба $P_i \cap P_j$ нь $i \neq j$ үед бөхсөн политоп бол P -г

$P_1, \dots, P_r$ политоцуудад хуваагдсан гэнэ.

в) Хэрэв P -г $T_1, \dots, T_k$ гэсэн симплексүүдэд P' -г $T'_1, \dots, T'_k$ гэсэн симплексүүдэд T_i бүр нь T'_i -тэй конгруэнт байхаар хувааж болдог бол P ба P' -г хуваалтын хувь дахь эквивалент политоцууд гэнэ. Эквивалент политоцууд тэнцүү эзэлхүүнтэй байна. (Үүнийг баталж болно).

Гильбертийн III асуудлыг: Хоёр тэнцүү эзэлхүүнтэй политоцууд эквивалент байх уу? гэж тодотгож болно.

Ден 1900 онд $n=3$ үед тэнцүү эзэлхүүнтэй хоорондоо эквивалент хоёр политоп оршин байна гэж баталжээ.

Тодорхойлолт. $\forall P \subset \mathbb{R}^n$ политопд $I(P)$ гэсэн ямар нэг коммутатив Γ бүлгийн элементийг харгалзуулаад

а) P, P' политоп бол

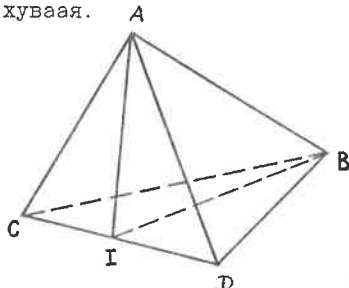
$$I(P \cup P') + I(P \cap P') = I(P) + I(P')$$

б) P бөхсөн бол $I(P) = 0$

в) Хэрэв $g \in G$ (Ортогональ хувиргалтын бүлэг) ба $P' = gP$ бол $I(P) = I(P')$ чанартай бол политоцуудын хувьд $\sum$ инвариант тодорхойлогдлоо гэж ярьдаг. Эндээс P, P' политоцууд эквивалент бол $I(P) = I(P')$ болох нь илэрхий км. $n=3$ үед Ден дараах D инвариантыг байгуулжээ. P нь $L_1, \dots, L_n$ ирмэгүүдтэй бол $\Gamma = \mathbb{R} \otimes \Delta$ гэж авъя.

Энд Δ нь 2 шулууны хоорондох өнцгийн бүлэг ($\Delta = \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$) $D(P) = \sum_{i=1}^k |L_i| \otimes \delta_i$ гэж тодорхойлъя. (Энд $|L_i|$ нь L_i -ийн урт, δ_i нь L_i -д нийлэх 2 талсын хоорондох өнцөг км.)

Одоо энэхүү инвариант тодорхойлолтыг хангана гэж харуулъя. Эхлээд тетраэдрийн хувьд батлая. $P = ABCD$ тетраэдрийн $P' = ABCI$ ба $P'' = ABDI$ гэж хуваая.



$|CD| = |CI| + |ID|$ CI ба ID дахь хоёр талст өнцгүүд адилхан учир $|CD| \otimes \delta = |CI| \otimes \delta + |ID| \otimes \delta$ болно.

AB гурван тетраэдрийн ерөнхий ирмэг ба түүн дэх хоёр талст өнцгүүд P -д δ , P' -д δ' , P'' -д δ'' гэвэл $\delta = \delta' + \delta''$ ба

$|AB| \otimes \delta = |AB| \otimes \delta' + |AB| \otimes \delta''$ болно.

Үлдсэн бүх ирмэг ерөнхий ба хоёр талст өнцгүүд хамар өнцгүүд эсвэл

тэнцүү өнцгүүд учир $D(P)=D(P')+D(P'')$ болно. Эндээс манай $E(P)$ инвариант $(a),(b),(c)$ нөхцлийг хангана. Одоо C куб ба T зөв тетраэдр авч үзье. Эдгээр нь адилхан эзэлхүүнтэй болог.

C нь l ирмэгтэй, T нь l' ирмэгтэй байг. C кубын бүх хоёр талст өнцөг нь $\frac{\pi}{2}$ ба 12 ширхэг ирмэгтэй учир $D(C)=(121)\otimes\frac{\pi}{2}=61\otimes\pi=0$

(Учир нь π -нь Δ бүлгийн тэг учир) Үүнтэй адилаар

$$D(I)=61'\otimes\phi\text{ ба энд }\cos\phi=\frac{1}{3}\text{ болно.}$$

Δ -д $l\otimes\delta=0$ байх $\Leftrightarrow$ нь δ нь π -г рациональ тоогоор үржүүлсэнтэй тэнцүү байна гэдгийг хялбархан харжболно. $\cos\phi=\frac{1}{3}$ байх ϕ нь π -г

рациональ тоогоор үржүүлсэнтэй тэнцүү биш болохыг харуулъя. Хэрэв

$\cos\phi=\frac{1}{3}$ ба $\phi=\frac{m}{n}\pi$, $(m,n)=1$ гэвэл $\{\cos 2^m\phi\}_{m=1}^{\infty}$ дараалал үетэй байна.

Нөгөө талаас $\cos 2^n\alpha=\frac{S}{t}$, $(S,t)=1$ бол $\cos 2^{n+1}\alpha=2\frac{S^2-t^2}{t^2}-1=\frac{2S^2-t^2}{t^2}$ болно.

$(2S^2-t^2, t^2)=(2S^2, t^2)\leq 2$ байна. Иймд $(t, 2)=1$ бол $\frac{2S^2-t^2}{t^2}$ үл хураагдах

байна. Эндээс $\cos\phi, \cos 2\phi, \cos 4\phi, \dots$ дарааллын бүх гишүүд зөв бутархай болох ба хуваариуд нь $3, 3^2, 3^4, \dots$ дараалал үүсгэн $\{\cos 2^n\phi\}_{n=1}^{\infty}$ дараалал үетэйд зөрчнө. Иймд $D(T)\neq 0$ болно. Иймд C, T нь эквивалент биш болж бодлого бодогдов.

Нэмэлт: $n=2$ тэнцүү талбайтай дүрс бүхэн эквивалент. 1965 онд Сидир "Хоёр полигон (олон талст) эквивалент байх $\Leftrightarrow$ нь тэдгээрийн эзэлхүүн ба Денийн инвариант тэнцүү байх явдал мөн" гэсэн үр дүнгээрээ Данийн вангийн нийгэмлэгийн шагнал авчээ. $n\geq 4$ үед Денийн инвариантыг Хадвигер өргөтгөсөн ба Хадвигерийн инвариантууд гэж нэрлэх нийт $n-1$ ширхэг инвариант байдаг бөгөөд Хадвигерийн гипотез гэж нэрлэгдэх " P ба P' полигонууд эквивалент байх $\Leftrightarrow$ нь тэдгээрийн Хадвигерийн инвариантууд тэнцүү байх явдал мөн" гэсэн таамаглал дэвшүүлжээ. Энэхүү таамаглалыг $n=4$ үед Ионсен баталжээ. Энэхүү асуудал $n\geq 5$ үед шийдэгдээгүй болохыг дурдая.

13. А матрицын мөрүүдийг харгалзан

$a^1, a^2, \dots, a^m$ гэж тэмдэглэе. $a^i=(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})^T \in \mathbb{R}^n$ $i=1, m$

Тэгвэл өгөгдсөн D олонлогийг

$D=\{x \in \mathbb{R}^1 | \langle a^i, x \rangle \leq b_i, i=1, m\}$ хэлбэрт бичиж болно. Үүнд: $\langle, \rangle$ скаляр үржвэр. Энэ аргыг бодох 2 арга байдаг боловч геометр дээр

тулгуурласан дараах аргаар бодъё.

$\langle a^i, x \rangle \leq b_i$ ($i=1, m$) олонлогийг D олонлогийн i -р талс гэж нэрлэе. $\forall x \in D$ цэг авч, түүн дээр төвтэй D -д багтсан хамгийн их радиустай тойргийн радиусыг x_{n+1} гээ. Тэгвэл x цэгээс ямарч талс хүртэлх зайнаас x_{n+1} бага байна.

$$\frac{|\langle a^i, x \rangle - b_i|}{\|a^i\|} \geq x_{n+1} \quad (i=1, m) \text{ байна.}$$

Эндээс $-\langle a^i, x \rangle + b_i \geq \|a^i\| x_{n+1}$ болно, $i=1, m$.

Одоо манай бодлого

$$(*) \quad \begin{cases} \langle a^i, x \rangle + \|a^i\| x_{n+1} \leq b_i & (i=1, m) \\ r \rightarrow \max \end{cases}$$

гэсэн $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ хувьсагчаас хамаарсан шугаман программчлалын бодлого руу шилжинэ.

Энэ бодлогын шийд (x^*, x_{n+1}^*) нь бөмбөрцгийн төв ба радиусыг тодорхойлно.

Жишээ 1.

$$D: \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 50 \\ -5x_1 + 12x_2 \leq 60 \\ 15x_1 - 8x_2 \leq 120 \\ x_1 \geq 2, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

бол энэхүү D -д харгалзах (1) бодлого нь

$$\begin{cases} x_3 \rightarrow \max \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 50 \\ -5x_1 + 12x_2 + 13x_3 \leq 60 \\ 15x_1 - 8x_2 + 17x_3 \leq 120 \\ -x_1 + x_2 \leq -2 \\ -x_2 + x_3 \leq 0 \end{cases}$$

гэсэн бодлогод шилжинэ. Энэхүү бодлогыг симплекс эсвэл хосмог симплекс аргаар бодвол

$x_1^* = \frac{41}{7}$, $x_2^* = \frac{25}{7}$, $x_3^* = \frac{25}{7}$ болно. Иймд бидний олох тойрог маань $M(\frac{41}{7}, \frac{25}{7})$

цэгт төвтэй $r = \frac{25}{7}$ радиустай тойрог байна.

Багийн тэмцээн дээр дэвшигдсэн зарим нэг сонирхолтой бодлогуудыг томъёолбол

В1 (Ц.Дашдорж). Вектор огторгуй нь еерийн жинхэнэ дэд огторгуйнуудын олонлог нэгдэл байж чадах уу?

В2 (Ц.Дашдорж). $(\mathbb{Q}, +)$ нь максималь дэд бүлэгтэй юу?

БОДОЛТ

В1. Энэ бодлогыг зохиогчийн бодолтоор авч үзье.

а). F төгсгөлгүй талбар үед F вектор огторгуй нь еерийн төгсгөлөг тооны жинхэнэ дэд огторгуйнуудын олонлог нэгдэл болж чадахгүйг харуулъя. Эсрэгээс нь $V = \bigcup_{i=1}^n S_i$ F $S < F_i$ гэж үзье. (Жинхэнэ гэдэг нь $0 \neq S = V$ гэсэн үг, тухайн тохиолдолд $n \neq 1$). Аль ч S_j нь үлдэх S_i -үүдийн нэгдэлд орохгүй гэж үзэж болно (Эсрэг тохиолдолд S_j -г авч үзэхгүй орхиж болно). $x_0 \notin S_1, x_1 \in S_1, x_1 \notin \bigcup_{i=2}^n S_i$ байг. $L = \{x_0 + \alpha x_1 \mid \alpha \in F\}$ гэвэл $L \cap S_1 = \emptyset$ болно: Хэрэв $x_0 + \alpha x_1 = y \in S_1$ гэвэл $x_0 = y - \alpha x_1 \in S_1$ болоход хүрнэ. $j \neq 1$ үед $|L \cap S_j| \leq 1$: Хэрэв $\alpha \neq \beta \in F$ үед $x_0 + \alpha x_1, x_0 + \beta x_1 \in S_j$ гэвэл $(\alpha - \beta)x_1 = (x_0 + \alpha x_1) - (x_0 + \beta x_1) \in S_j$ буюу $x_1 \in S_j \cap \bigcup_{i=2}^n S_i$ болж x_1 -ийн сонголтод эерчине. Нэгэнт $|F| = \infty$ тул бас $|L| = \infty$ байна.

Гэтэл саяын баталснаар $|L \cap (\bigcup_{j=1}^n S_j)| \leq n-1$ байх ёстой. Нөгөө талаас

$|L| = |L \cap V| = |L \cap (\bigcup_{j=1}^n S_j)| = \infty$ болж эерчилд хүргэв.

б) Хэрэв F нь төгсгөлөг талбар бол ийм дүгнэлтийг ямагт хийж болохгүй юм. Тухайлбал $F = \mathbb{Z}_2$ үед V нь 2 хэмжээст огторгуй бол тухайлбал $V = \{0, x, y, x+y\}$ бол $S_1 = \{0, x\}, S_2 = \{0, y\}, S_3 = \{0, x+y\}$ гэж дэд огторгуйнуудыг авахад $V = \bigcup_{i=1}^3 S_i$ болно.

В2. Тус тэмцээн дээр математикийн I ангийн оюутан Ш.Эрдэнэбат энэхүү бодолтыг эхний 30 минутад хийж олныг баясгав. $(\mathbb{Q}, +)$ максималь дэд бүлэг байхгүйг харуулъя. А нь максималь дэд бүлэг байг.

1) $\mathbb{Z} \subseteq A$ болохыг харуулъя. $0 \neq a \in A, a = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$ байг. X нь $\mathbb{Q}$ -ийн

дэд бүлэг гэхийг $X \leq Q$ гэж тэмдэглэж байна.

$\frac{1}{m}A = \{\frac{a}{m} / a \in A\} \leq Q$ байна. $a \cdot n = m \in A$ тул $\frac{m}{m} = 1 \in \frac{1}{m}A$ болох ба эндээс $\mathbb{Z} = \frac{1}{m}A$ болно $x \in A$ бол $mx \in A$ болно. Эндээс $\frac{m \cdot x}{m} = x \in \frac{1}{m}A$, тул $A \subseteq \frac{1}{m}A$ болов. Одоо $\frac{1}{m}A \neq Q$ гэж харуулъя. $\frac{1}{m}A = Q$ гэж үзье. $mQ = Q$ байх нь илэрхий тул $m \cdot \frac{1}{m}A = A = mQ = Q$ гэж зөрчилд хүрэв. Иймд $A \subseteq \frac{1}{m}A \subseteq Q$, $\frac{1}{m}A \neq Q$ гэдгээс $A = \frac{1}{m}A \supseteq \mathbb{Z}$ болов.

2) Одоо Q ба A -ийн хооронд орших дэд бүлгийг байгуулъя. $b = \frac{t}{s} \in Q$, $b \notin A$ байг. $S = P_1^{l_1} \dots P_q^{l_q}$, P_i -анхны тоонууд ба $P = \max P_i$, $\max l_i = 1$ гээ. $\frac{1}{(P!)^l} A = A \supseteq A$ ба $\frac{t}{s} (P!)^l \in \mathbb{Z} \subseteq A$ тул $b = \frac{1}{(P!)^l} \cdot \frac{t}{s} \cdot (P!)^l = \frac{t}{s} \in A$ болно. Иймд $A \subseteq A$, $A \neq A$ болов. Хөгөө талаас $b \cdot \frac{1}{(P!)^l} \in A$ тул $A \neq Q$ буюу $A \subsetneq Q$ болж A -ийн максимал гэдэгт зөрчил гарав. Иймд $(Q, +)$ -д максимал дэд бүлэг байхгүй.

Багуудын тэмцээнд математикийн I ба математикийн Y ангиуд тэнцсэн тул 20 минутын нэмэлт хугацаа өгч дараахь бодлогыг бодуулав.

ВЗ (Ц.Дашдорж). $Q^* = Q \setminus 0$, $(Q^*, \cdot)$ -д максимал дэд бүлэг төгсгөлгүй олон байна гэдгийг батал. Математикийн Y ангийн баг хамгийн түрүүнд бодож аварга багаар шалгарав. Тэд P анхны тоо бүрийн хувьд $Q^*(P) = \{\frac{m}{n} \in Q / P^{2s} | m, n, S > 0\}$ максимал дэд бүлэг болохыг харуулав.

Редакторын нэмэлт. Монголын Оюутны II Олимпиадыг МУУИС ба УБДС-ийн математик анализын тэнхимүүд хамтран зохион байгуулсан боловч энэ олимпиадын үр дүнгээр өгүүлэл бичих ёстой байсан МУУИС-ийн багш Ц.Баярсайханы хариуцлага болоод математикаа гэх сэтгэл нь дутсанаас энэ олимпиадын мэдээ одоо хүртэл уншигч олондоо хүрч чадахгүй байна гэдгийг мэдэгдэе. Харин тэр олимпиадын эцнээ даваанд дэвшигдэх нэгэн сонирхолтой бодлогын 2 янзын бодолтыг та бүхэндээ толилуулъя.

N нь G -ийн дэд бүлэг ба $[G:N]$ нь $|G|$ -ийг хуваагч хамгийн бага тоо бол $N \triangleleft G$ гэж батал.

Бодолт. $[G:N] = p$ нь $p = |G|$ -г хуваагч хамгийн бага тоо байг. $N \triangleleft G$

биш гээ. Тэгвэл $N(H) \neq G$ ба $[G:N(H)][N(H):H]=p$ гэдгээс $N(H)=H$, $[G:N(H)]=p=|H^G|$, энд $H^G=\{H^g=gHg^{-1} | g \in G\}=\{H^{1^x}, \dots, H^{p^x} | i \neq j \text{ үед } H^{1^x} \neq H^{j^x}\}$ $g \in G$ бүр нь H^G олонлог дээр $\sigma_g = \begin{pmatrix} H^x \\ (H^x)^g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^x \\ H^{xg} \end{pmatrix}$ гэсэн орлуулгыг төрүүлнэ, учир нь $H^x \neq H^y$ боловч $H^x g = H^y g$ гэвэл $H^x = (H^y g) g^{-1} = H^y$ болохсон.

$\sigma_{g_1} \cdot \sigma_{g_2} = \begin{pmatrix} H^x \\ H^{xg_1 g_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^x \\ (H^{xg_1}) g_2 \end{pmatrix} = \sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2}$ тул $g \xrightarrow{\varphi} \sigma_g$ буулгалт нь $(G, \cdot) \xrightarrow{\varphi} (S, \circ) \leq (S_p, \circ)$ гэсэн бүлгийн гомоморфизмыг өгнө, энд $S=G\varphi$ ба

$$(S_p, \circ) = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix} \right\}, \circ \right\} \quad p \text{ зэргийн орлуулгын тэгш хэмт бүлэг}$$

$H \subseteq \text{Ker} \varphi$ ба $|\text{Ker} \varphi| = d$ гэвэл $G/\text{Ker} \varphi \cong S$ ба $\frac{n}{d} = |S| : |S_p| = p!$ байх ба p нь n -ийг хуваагч хамгийн бага тоо гэдгийг анхаарвал $|S| = p = [G:\text{Ker} \varphi]$ ба $H \subseteq \text{Ker} \varphi$ гэдгээс $H = \text{Ker} \varphi \triangleleft G$ гэж зөрчил гарна.

НЭГЭН БОДЛОГЫН ТУХАЙ

Д.Пүрэвсүрэн

П.Энхболдын нэрэмжит улсын I уралдааны II-д бодолтгүй тавигдсан нэгэн бодлогын бодолтыг одоо толилуулъя.

1. Бүх талс нь паралелограмм байх гүдгэр 1994 талс оршин байх уу?

Бодолт: Бүх талсууд нь тэгш хэмийн төвтэй гүдгэр олон талст тэгш хэмийн төвтэй гэсэн Минковскийн теорем ёсоор хэрэв тийм олон талст оршин байвал төвийн тэгш хэмтэй байна. л ирмэг авч үзье. F_1 ба F_2 нь л гэсэн ерөнхий ирмэгтэй талс болог. F_3 нь F_2 -той л-тэй паралель ирмэгээр огтлолцох талс гэх мэтчилэн $F_1, F_2, F_3, \dots$ дараалал байгуулъя. Нийт талс төгсгөлөг учир энэ нь төгсгөлөг алхмын дараа үелэнэ. $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n, F_{n+1}$ ба $F_1 = F_{n+1}$ болно. Учир нь $F_{n+1} = F_k$ ($k \geq 2$) бол F_k нь F_{k-1}, F_{k+1}, F_n гэсэн гурван талстай л-тэй паралель 2 ирмэгтэй учир зөрчилд хүрнэ. Энэхүү дарааллыг бүс гэж

нэрлэв. Тэгвэл бүс нь олон талстыг хоёр "малгай"-д хуваана. Олон талст тэгш хэмтэй учир тэдгээр нь хоорондоо тэгш хэмтэй байна. Иймд бүсээр хуваагдах хоёр "малгай"-н талстуудын тоо тэнцүү байна. Эндээс ямар ч хоёр бүс огтлолцоно. Учир нь L', L'' бүс огтлолцохгүй гэвэл L' нь L'' -ын хоёр "малгай"-н аль нэгд орно.

L' -ын хоёр "малгай" S', S'' гээ.

L'' -ын хоёр "малгай"-г P', P'' гээ. $L' \cap P''$ гэвэл $S' \cap P'$ ба $S'' \cap P''$ болно. (S) -р малгайн талсын тоог тэмдэглэвэл

$(S') > (P') = (P'') > (S'')$ болж $(S') = (S'')$ -д зөрчнө.

Талс болгон яг хоёр бүсэд харьяалагдана. Хоёр бүс яг хоёр талсаар огтлолцоно. Иймд нийт n бүс байдаг гэвэл нийт талсын тоо $\sum_{n=1}^n n(n-1)$ байна. Иймд $n(n-1) = 1994$ болно. Гэтэл $n(n-1) = 1994$ байж болохгүй учир бодлогын нөхцөлийг хангах гүдгэр 1994 талст оршин байхгүй.