

МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАД ЦУВРАЛ
N 19

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН
XXXI ОЛИМПИАД

БОЛОН
П.ЭНХБОЛДЫН НЭРЭМЖИТ
УЛСЫН II УРАЛДААН

Улаанбаатар 1996

Уншигчдын анхааралд.

Улсын болон Олон улсын математикийн олимпиадад бэлтгэгчид, математикийн төрөлжсөн болон гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийн сурагч, оюутан, багш нар математик сонирхогч өргөн олонд зориулсан цувралын ээлжит дугаар уншигч Таны гар дээр очиж байна. Тус гарын авлагыг бэлтгэхэд ММОЗБ Хорроны гишүүд идэвхтэй оролцлоо.

Уг номын талаар аливаа санал хүсэлтээ МУҮИС-ийн алгебр-тооны онолын тэнхимд ирүүлнэ үү.

ГАРЧИГ

Архангай аймгийн засаг дарга М.Гүррагчаагийн хэлсэн үг	1
Олимпиадын дүнгийн тухай	5
ҮП анги Ш даваа (Ц.Лувсандорж)	9
ҮШ анги Ш даваа (Ц.Лувсандорж)	11
ҮШ анги 1Ү даваа (Ц.Лувсандорж)	14
1Х анги Ш даваа (А.Хашбаатар, Д.Пүрэвсүрэн)	16
1Х анги 1Ү даваа (Д.Пүрэвсүрэн)	19
Х анги Ш даваа (Ц.Дашдорж)	22
Х анги 1Ү даваа (Ц.Батхүү)	25
Багш Ш даваа (Ц.Дашдорж)	28
Багш 1Ү даваа (Ц.Батхүү)	31
Багийн олимпиад (Л.Оюунцэцэг)	36
Оюутны 1Ү олимпиад (Ц.Дашдорж)	40
ОУМО 36 (Ц.Дашдорж)	48
П.Энхболдын нэрэмжит П уралдаан (Ц.Дашдорж)	52
Бүсийн ҮП олимпиад	58

Монголын математикийн XXXI олимпиад

Редактор Ц.Дашдорж
Эх бэлтгэсэн Оюунтуяа,
Р.Рэнчинбазар, Б.Түмэндэмбэрэл

Хэмжээ 60х90 1/16 4.0 хэв. хуудас
Эхийг "ТС" компаний ширээний хэвлэх үйлдвэрт
1996 оны 3-р сард бэлтгэж

"Орчлон" компанид 1996 оны 4-р сард 1500 хувь хэвлэв.

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХХІ ОЛИМПИАДЫН
ҮЙЛ АЖИЛЛАГААГ ХААЖ АЙМГИЙН ЗАСАГ ДАРГА
М.ГҮРРАГЧААГИЙН ХЭЛСЭН ҮГ

Хүндэт математикчид аа!

Багш, эцэг эхчүүд ээ!

Эрдэм ухаанд гүн шүтлэгтэй Архангайчууд аа!

Монгол улсын математикийн ХХХІ олимпиадыг нэрт математикчдын өлгий Архангай аймагт явуулах бидний чин хүсэлтийг ёсоор болгож, тунгалаг Тамирын хөвөө, Булган Хайрханы өвөрт морилон ирж, ойуны хурд шандсаа сорин уралдсан, шүүн тунгааж үнэнийг олсон, сэтгэл догдлон хөгжөөн дэмжсэн та бүхэнд нийт Архангайчуудынхаа өмнөөс болон хувиасаа гүн талархал илэрхийлье!

Математикийн олимпиадад алтан медаль хүртсэн сурагчид:

Б.Батбаясгалан (Х)

Ж.Одгэрэл (IX)

Т.Хулан (VIII)

Мөнгөн медаль хүртсэн:

Г.Төгөлдөр (Х)

Г.Цогбадрах (IX)

Б.Энхбаяр (VIII)

Ж.Мөнхзул (Х)

Ц.Чинзориг (IX)

М.Доржоат (VIII)

Хүрэл медаль хүртсэн:

Д.Даянцолмон (Х)

Я.Өлзийболд (Х)

М.Ууганбаяр (IX)

Х.Булганхангай (VIII)

Т.Билэгбаатар (VIII)

О.Батбаатар (Х)

Ж.Батбаяр (IX)

Ц.Ганзориг (IX)

Ж.Амаржаргал (VIII)

нар болон алт, мөнгө, хүрэл медаль хүртсэн багш Б.Ганбилэг, Б.Бат-Орших, Т.Кушей нарт баяр хүргэе.

Ийм сайхан эрүүл саруул, авъяаслаг хөвгүүд, охидыг төрүүлж өсгөсөн эцэг эхчүүд, сурган хүмүүжүүлсэн багш нарт би аймгийнхаа бүх хүн ардын өмнөөс баяр талархлаа дэвшүүлж, сайн сайхныг хүсэн ерөөж байна.

Математикийн олимпиадыг өөрийн аймагт явуулах анхны санал, санаачилга манай математикийн багш нараас анх гарсан бөгөөд энэ нь шинжлэх ухааны хаан болсон математикийн ухаанаар уралдан олимпиадад тогтмол амжилттай оролцож улс, тив, дэлхийд нэрээ

дуурсгасан нэрт математикчдыг төрүүлсэн Архангайн сургууль, багш нарын, хувьд сайхан уламжлалаа сэргээн бататгах, улмаар математикийн сургалтыг сайжруулах, математикт авьяас сонирхолтой шинэ залуу үеийг илрүүлэн хөгжүүлэх, багш нарынхаа мэргэжлийн ур чадварыг дээшлүүлэх төдийгүй цаашдаа бүх хичээлийн сургалтын чанарыг сайжруулахад үлэмж ач холбогдолтой үйлс болно гэж үзэж бид бүх талаар дэмжсэн билээ. Бидний дэмжлэг, хүсэл сэтгэл талаар болсонгүй ээ!

Архангайн хөвгүүд, охид бидний хүслийг хөсөрдүүлсэнгүй. Цэцэрлэг хотын 10 жилийн I дунд сургуулийн VIII ангийн сурагч Х.Булганхангай, Төвшрүүлэх сумын харъяат МУИС-ийн дэргэдэх гүнзгийрүүлсэн сургалттай X ангийн сурагч Д.Даянцолмон нар тус бүр III байр эзэлж, хүрэл медалиар энгэрээ мялаасан явдал бидний баяр бахархалыг төрүүлж байна.

10 жилийн I сургуулийн IX ангийн сурагч Ж.Батоаяр, X ангийн сурагч Д.Нинжбадам нар IV байр эзэлсэнд бид бас баярлаж байна.

Тус аймгаас төрсөн нэрт математикч, олон улсын олимпиадын шагналт доктор Р.Гончигдорж, Р.Батдэлгэр болон улсын олимпиадын аварга математикч олон ах эгч нарынхаа жишээгээр тэдний энд хүрч, тэднээс ч давах зориг, эрмэлзэл, зорилго та нарт бий. Түүндээ хүрнэ гэдэгт итгэж ерөөлийн сайхан үгийг та бүхэнд дэвшүүлж байна.

Аймагтаа энэхүү олимпиадыг зохион байгуулж явуулахын тулд бид бололцооныхоо хирээр ажилласан. Өнгөрсөн 1994 оны 5 дугаар сарын 9-нд математикийн олимпиадыг зохион байгуулах улсын хорооноос ээлжит XXXI олимпиадыг Архангай аймагт явуулах шийдвэр гаргасныг бид баяртай хүлээн авч олимпиадад бэлтгэх аймгийн хороог боловсрол, эрүүл мэнд, соёлын болон орон нутгийн захиргааны удирдах байгууллагуудын төлөөлөгчийн бүрэлдэхүүнтэйгээр байгуулан ажиллуулсан юм.

Олимпиад угтан зохиох ажлын хүрээнд бидний хийж хэрэгжүүлэхээр дэвшүүлсэн олон зорилтуудын нэг нь математикийн сургалтын чанарыг дээшлүүлэх явдал байлаа. Үүний тулд математикийн багш нарын сургалт семинарыг МУИС, УБИС болон ШУА-ийн математикийн хүрээлэнтэй хамтран В.Адьяасүрэн, багш Ц.Лувсандорж, Сандагдорж, Ш.Батхшиг, УБИС-ийн СААЗИ-ийн салбарын эрхлэгч профессор Д.Шагдар, Д.Нэргүй, МУИС-ийн оюутан Д.Хамбаяр нарын чин сэтгэлийн оролцоотойгоор зохион байгуулан явууллаа.

Бидний энэхүү ажилд сэтгэл харамгүй туслалцаа үзүүлж байсан математикийн олимпиадыг зохион байгуулах Улсын хорооны дарга дэд доктор Н.Дашдорж болон дээр нэр дурдсан хүмүүст баяр талархлаа дэвшүүлж байна.

Улсын математикийн VII олимпиадын аварга, Олон улсын олимпиадын шагналт, Монгол Улсын Их Хурлын гишүүн, доктор Р.Гончигдорж, ШУБЯ-ны дээд боловсролын газрын ерөнхий захирал дэд доктор С.Төмөр-Очир, 10 жилийн I сургуулийн багш, Монгол улсын гавьяат багш Банзрагч нар болон бусад хамтран зүтгэгчид, шавь нарын үүсгэл санаачилгаар нэрт математикч агсан П.Нямринчингийн нэрэмжит "Математик сургалтын сан" байгуулан ажиллуулсан билээ.

Архангай аймгийн засаг даргын захирамжаар улсын олимпиадад эхний байрууд эзэлсэн багш сурагчдыг шагнаж урамшуулах байнгын болзол гаргасан нь багш, сурагчдын таашаалд нийцсэн төдийгүй нийт сум сургуулийнхандаа үлгэр дууриал болсон юм. Эрдэнэбулган, Төвшрүүлэх, Цэнхэр, Хотонт, Тариат зэрэг олон сумд өөрийн байнгын болзолтой болсныг иш үндэс болгон би ийнхүү хэлж байна.

Улсын олимпиадын I, II, III-ын давааны бодолтууд ч туйлын хариуцлагатай, нэр хүндтэй ажил байдаг бөгөөд зөвхөн 1994-1995 оны хичээлийн жилд Хотонт сумын 10 жилийн дунд сургууль урд бүсийн сумдын, Эрдэнэбулган сумын 10 жилийн дунд сургууль I-VI ангийн сурагчдын, Төвшрүүлэх сумын 10 жилийн дунд сургууль аймгийн олимпиадыг тус тус хүлээн авч явууллаа. Энэ бол математикийг ойлгодог, тулгуур гол шинжлэх ухаан гэдгийг мэдэж, түүний сайн сайхан ирээдүйд үр хүүхдээ хөтлөн оруулдаг багш, сурган хүмүүжүүлэгчид, эцэг эхчүүдийн нэгэн үзүүрт сэтгэлийн их үр дүн мөн билээ.

Чухам ийм учраас 1994 онд явагдсан Монгол Улсын Шинжлэх Ухаан Боловсролын Яамны үзлэгээр тус аймгийн сургуулиудын математикийн хичээлийн сургалт 72,1 хувийн, чанарын хувьд 34,6 хувийн амжилт үзүүлсэн юм.

Математикийн олимпиадад бэлтгэхэд бага ажиллаж байгаагүй бөгөөд 1994 оны 5-дугаар сард Монгол улсын математикийн XXXI олимпиадын эмблем бүтээх уралдааныг нийт багш, сонирхогчдын дунд зарласнаас 25 бүтээл ирж, Эрдэнэбулган сумын 10 жилийн I сургуулийн багш Д.Цэгмэд, УБИС-ийн багш Д.Дашхүү нарын бүтээл тэргүүн байр эзэллээ.

Математикийн олимпиадад бэлтгэх нь зөвхөн комиссын, сургууль, багш нарын ажил байгаагүй. Бөгөөд түүнд нийгмийн бүх дэвхэргэ, төрөл бүрийн ажил мэргэжлийн хүмүүс, олон аж ахуйн нэгж, байгууллагууд оролцсон юм.

Математикийн олимпиадыг ивээн тэтгэх хөдөлгөөнийг Өндөр-Улаан, Тариат, Мөрөн, Цэнхэр, Хотонт, Цэхир, Цэцэрлэг, Хангай, Ихтамир, Хануй, Хайрхан, Чулуут, Эрдэнэбулган сумдын сургуулиуд, Ой, ан жуулчин нэгтгэл, Архангай корпораци, Таван тэнсэг хүнсний үйлдвэр, Хүнс ХК, ХАА-н бйрж, Гурвантамир компани, Эрчим хүчний үйлдвэр, ЗАХСХГ, Гал ХЭАА зэрэг олон байгууллагууд дэмжин хувь хандив оруулжээ.

Тус аймгийн цагдаагийн хэлтэс, тээврийн газар, соёлын байгууллагууд, Булган зочид буудал зэрэг газрууд олимпиадад оролцогчдод хөнгөн шуурхай сайн үйлчилжээ.

Ийнхүү олимпиадыг ивээн тэтгэсэн, үйлчилсэн бүх байгууллага, хамт олонд чин сэтгэлийн талархал илэрхийлжээ.

Мөн тус олимпиадыг бэлтгэл зохион байгуулалт сайтай, үр дүнтэй явуулахад үнэтэй зөвлөлгөө өгч, дэмжин туслаж байсан, математикийн олимпиадыг зохион байгуулах улсын хорооны дарга дэд доктор Ц.Дашдорж, нарийн бичгийн дарга В.Адъяасүрэн, УИХ-ын гишүүн доктор Р.Гончигдорж, ШУБЯ-ны газрын дарга дэд доктор С.Төмөр-Очир, МУИС-ийн декан дэд доктор С.Тогмид, Д.Сангаа, Сургалтын Агуулга Арга Зүйн Институтын дэд захирал Нэргүй нарт болон олимпиадын шагналын диплом, медаль, дурсгалын зүйлийг чанар үзэмжтэй хэвлэн хийж өгсөн Улаанбаатар хотын Бамбай ББХК-ний хамт олонд талархлаа илэрхийлж байна.

Математикийн олимпиадад оролцогчдод аймаг, орон нутгаа сурталчилах зорилгоор албан газар, байгууллагууд та бүхнийг хүлээн авсан нь бас ч дурсгалт үйл явдал болсон гэж итгэж байна.

Олимпиадад зориулсан олон арван гарын авлага ном товхимол хэвлүүлэн багш, сурагчдад хүргэж үйлчилсэн эрдэмтэн багш нартаа бид талархах ёстой.

Авдар дүүрэн алтнаас, оюун ухааны арвин сан хэрэгтэйг өнөөгийн өндөр хөгжилтэй орнуудын туршлага харуулж байна. Тэр оюуны арвин сан хөмрөг бол математикийн шинжлэх ухааны хөгжлийн түвшин бөгөөд цаашид ч бид энэ сангаа улам арвижуулах шийдвэр төгс байна.

Архангайн математикч хөвгүүд, охид багийн дүнгээр 1992 онд 24, 1993 онд 17, 1994 онд 9 дүгээр байр эзэлж байсан бол 1995 онд 3 дугаар байр эзэлжээ. Аймгаас гаргасан болзлыг биелүүлэв. Бид урагшлан, хүүхдүүд маань хөгжиж явна.

Олимпиадыг Архангайчууд бид хүлээн авч явуулснаар математикийн хичээлийн сургалт сайжирч багш, сурагчдын мэдлэг чадвар, туршлага нь арвижин дэлгэрч, цаашид ч улам өндөр амжилт гаргах шимтэй сайхан хөрсийг бүрдүүллээ.

Эрхэм нөхөд өө!

Энэ удаагийн олимпиадаас бид сургамж авч 1995 оноос эхлэн аймгийнхаа нийт ЕБС-ийн бага ангийн багш нарын математикийн олимпиадыг жил тутам явуулж байхаар шийдвэрлэлээ. Энэ бол хүүхдийн эрдэмд амлах анхны замыг заагч багш нарынхаа мэдлэг чадварыг дээшлүүлэхэд их үр дүн өгнө гэж үзэж байна. Мөн математикийн сургалтаар Архангайн багш, сурагчдын улс, олон улсын хэмжээнд өрсөлдөх боломж, чадавхийг оайнга хадгалж нэмэгдүүлж байх улмаар монголын математикчдын зонхилох төлөөлөгчид Архангайнхан байсаар ирсэн бодит үнэнийг бататган хадгалахын тулд 5 жил тутамд улсын математикийн олимпиадыг өөрийн аймагтаа хүлээн авч, ивээн тэтгэн явуулж байх чин хүсэлтэй байгаагаа математикийн олимпиадын улсын хорооны эрхэм дарга, гишүүд та бүхэнд хандан илэрхийлж байна.

Архангайчууд бид математикт дуртай, авъяастай үр садныхаа оюуны чадавхийг эх орныхоо болон дэлхийн дэвжээнд үзэх хүсэлтэй байна. Үүний тул аймгийн засаг дарга миний өие 1995 оны 2 сарын 15-нд 24 тоот захирамж гарган "авъяастны сургуулийг жинхэнэ ёсоор байгуулах"-аар шийдвэрлэснээ ч оас хэлмээр байна.

Ирэх жилийн олимпиадыг хүлээн авахаар шийдвэрлэж урилга ирүүлсэн Баянхонгор аймгийн багийн хамт олонд та бүхний өмнөөс баяр хүргэе!

Та бүхний оюуны шандас чанга байж, эх орнооо ирээдүйн хөгжлийг эрдэм оюуны тань ариун хур тэтгэх болтугай!

Эрдэм ухаан дэлгэртүгэй!

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХХІ ОЛИМПИАДЫН
ДҮНГИЙН ТУХАЙ

Ц.Дашдорж

Монголын математикийн ХХХІ олимпиад 1995 оны 5-р сарын 1-ний өдрөөс мөн сарын 6-ны өдрүүдэд Архангай аймгийн Цэцэрлэг хотод

амжилттай явагдаж дүнгээ гаргалаа. Энэ удаагийн олимпиадад 21 аймаг, УБ хотын 45 багш, 122 сурагч оролцлоо.

Энэхүү олимпиадыг зохион байгуулахад санаачлага хүч чармайлт гарган зүх нөхцөл бололцоогоор хангаж өгсөн Архангай аймгийн Засаг дарга М.Гүррагчаа, Засаг даргын тамгын газар, олимпиадыг зохион байгуулах Архангайн салбар комиссын дарга Т.Халтар, Тамгын газрын шинжлэх ухаан боловсролын газрын дарга Л.Чадраабал дэс түшмэл Ч.Өсөхжаргал, Боловсролын төвийн мэргэжилтэн Ц.Эрдэнэчулуун, Н.Батсайхан, Ц.Цэдэндамба захиралтай төвийн 1-р сургуулийн хамт олон, аймгийн нийт сургуулиудын захирлууд, Боловсролын төвийн хамт олон, Архангайн олимпиадын комисст монголын нийт математикчдийн өмнөөс талархал илэрхийлье.

Олимпиадад 8-р ангийн 43 сурагч оролцсоноос Улаанбаатарын 11-р сургуулийн сурагч Т.Хулан (багш нь А.Энхжаргал) 27 оноогоор I байр эзэлж улсын математикийн XXXI олимпиадын 8-р ангиудын аварга боллоо. УБ-ын 11-р сургуулийн Д.Энхбаяр (багш нь А.Энхжаргал) 26 оноогоор, УБ-ын 11-р сургуулийн М.Доржоат 19 оноогоор 2-р байр, УБ-ын 11-р сургуулийн Ж.Амаржаргал (багш нь А.Энхжаргал) 18 оноогоор, Архангай аймгийн Цэцэрлэг хотын 1-р сургуулийн Х.Булганхангай (багш нь Д.Ганболд) 14 оноогоор, Хөвсгөл аймгийн Т.Билэгбаатар (багш нь Б.Ганбилэг) 15 оноогоор 3-р байр эзэллээ. 8-р ангиас УБ-ын 1-р сургуулийн Д.Лхагвадорж, 11-р сургуулийн Л.Амар, С.Лхамчимэг, Олонлог багийн Н.Эрдэнэбат нар шагналт байранд шалгарлаа.

9-р ангийн нийт 42 сурагч оролцсоноос УБ-ын 11-р сургуулийн Ж.Одгэрэл (багш нь Б.Наранхүү) хувиараа оролцож 14 оноогоор 1-р байр эзэлж улсын математикийн XXXI олимпиадын 9-р ангиудын аварга сурагч боллоо. Удаах байруудад УБ-ын 11-р сургуулийн Д.Цогбадрах (багш нь Б.Наранхүү) 13,5 оноогоор, Ц.Чинзориг 13 оноогоор 2-р байр, УБ-ын 1-р сургуулийн Ц.Пүрэвдорж (багш нь Н.Энхбаатар) 11 оноогоор, М.Ууганбаяр (багш нь Н.Энхбаатар) 10 оноогоор, П.Ганзориг (багш нь Н.Энхбаатар) 10 оноогоор 3-р байрыг эзэллээ. 9-р ангиас Архангайн Ж.Батбаяр, Хөвсгөлийн Т.Оюунбаатар, УБ-ын 11-р сургуулийн Б.Баяржаргал, Ц.Баасансүрэн нар шагналт байранд шалгарлаа.

10 ангийн нийт 37 сурагч оролцсоноос МУИС-ийн Б.Батбаясгалан 17,5 оноогоор (багш нь Ж.Батболд) Улсын математикийн XXXI

олимпиадын 10-р ангийн аваргаар шалгарлаа. Удаах байруудад УБ-ын 11-р сургуулийн Г.Төгөлдөр (багш нь Ш.Мөнхцэцэг) 17 оноогоор, Ж.Мөнхзул (багш нь Ш.Мөнхцэцэг) 14,5 оноогоор 2-р байр, 11-р сургуулийн О.Батбаатар (багш нь Ш.Мөнхцэцэг) 12,5 оноогоор, Я.Өлзийболд (багш нь Ш.Мөнхцэцэг) 12 оноогоор, МУИС-ийн Д.Даянцолмон (багш нь Ж.Батболд) 11,5 оноогоор 3-р байрыг эзэллээ. Мөн Архангайн Д.Нинжодам, УБ-ын 1-р сургуулийн Ц.Чимэддорж, Д.Бадарсан, Хөвсгөлийн Г.Адьяахүү нар шагналт байранд шалгарав.

Олимпиадад сурагчдаа амжилттай сайн бэлтгэсэн дээрх багш нар болон сургуульд нь олимпиадыг зохион байгуулах хорооны нэрийн өмнөөс чин сэтгэлийн талархал илэрхийлье.

Багш нарын олимпиадад 45 багш оролцсоноос Хөвсгөл аймгийн төвийн математикийн сургуулийн багш Б.Ганбилэг 1-р байр эзэлж XXXI олимпиадын аварга математикч багшаар шалгарлаа.

Багш Б.Ганбилэгийн математикийн авьяас билгийг математикч бид хүндэтгэн үзэх нь зүйтэй. Багш нарын удаах байрыг Увс аймгийн 1-р сургуулийн багш Д.Бат-Орших, Баян-Өлгий аймгийн 4-р сургуулийн захирал Т.Кушей нар эзэлж сайхан амжилт үзүүлээ.

Олимпиадад оролцож авьяас чадвараараа шалгарсан 11-р сургуулийн 8-р ангийн сурагч Т.Хуланд П.Энхболдын нэрэмжит уран бодолтын шагналыг хүртээв.

Олимпиадад оролцсон 23 багаас Б.Ганбилэг ахлагчтай Хөвсгөл аймгийн баг түрүүлж шилжин явах цомыг хоёр дахь удаагаа авлаа. Хоёрдугаар байрыг Ц.Даваадорж ахлагчтай Улаанбаатар хотын баг, 3-р байрыг В.Цэрэндорж ахлагчтай Архангай аймгийн баг эзэллээ.

Багуудын уламжлалт хэлэ тэмцээнд Б.Батгэрэл ахлагчтай Хөдөөгийн багш нарын баг түрүүлэв. Математикийн Олимпиадын Комиссын гишүүнд Архангайн Боловсролын Төвийн мэргэжилтэн Ц.Эрдэнэчулууныг оруулах нь зүйтэй гэж үзэж байна.

Монголын математикийн XXXI олимпиад Архангай аймгийн засаг дарга ноён М.Гүррагчаагийн ивээл дор утга төгөлдөр болж өнгөрлөө. Ноён дарга М.Гүррагчаа математикийг талархан дэмжигч төдийгүй, математик аргыг эдийн засагт хэрэглэх асуудал дээр буурьтай эрдэмтэн гэдгийг бидний үеийнхэн сайн мэдэх юм.

Мөн Архангай аймгийн Өндөр-Улаан, Тариат, Цэнхэр, Мөрөн, Хотонт, Цахир, Цэцэрлэг, Хангай, Их тамир, Хөнуй, Хөйрхан, Чулуут, Өгийнуур сумын сургуулиудад, Цэцэрлэг хотын

1,2,3-р арван жил, найман жилийн сургуулиуд, Багшийн Коллеж, Архангай аймгийн Эрүүл ахуй халдвар судлалын төв, "Архангай" корпораци, Хөдөө аж ахуйн бирж, "Гурван тамир" компани, Эрчим хүчний үйлдвэр, Хүнс хувьцаат компани, "Гал" хувиараа эрхлэх аж ахуйн эзэн Д.Алтансүх, эхнэр Нарайтуяа нар ивээн тэтгэж "Таван тансаг", аймгийн төвийн сургууль, цэцэрлэгүүд, Дулааны эрчим хүчний үйлдвэр, зэм анги, "Жуулчин" ой модны нэгтгэл, аймгийн тээврийн газар г.м бусад олон байгууллага, хувь хүмүүс зохион байгуулах ажилд өөрсдийн цаг, хөрөнгө хүч бололцоогоо дайчлан оролцсонд Олимпиадыг зохион байгуулах хорооны нэрийн өмнөөс гүн талархал илэрхийлье.

Олимпиадыг зохион байгуулах бүхий л ажилд өргөн хүрээтэй оролцсон Ядамцоо даргатай аймгийн цагдаагийн хэлтсийн хамт олонд багш хүүхэд багачуудынхаа өмнөөс ажлын амжилт хүсьс.

Олимпиадад урилгаар оролцогсдыг танилцуулъя. УИХ-ын гишүүн доктор Р.Гончигдорж, А.Ганбаатар, СААЗИ-ийн эрдэмтэн нарийн бичгийн дарга профессор Д.Шагдар, МУИС-ийн декан дэд доктор С.Тогмид, Д.Сангаа дэд доктор Р.Ринчинбазар нар байна.

Манай энэ удаагийн олимпиадын хүрээнд хэд хэдэн онцлог үйл явдал боллоо. Үүнд: Математикийн сургалтын сайхан уламжлалтай олон доктор, дэд докторыг төрүүлсэн Архангай аймгийн хөдөлмөрч хамт олон олимпиадыг зохион байгуулах талаар хүч чармайлт гаргаж ихээхэн туршлага хуримтлуулсныг тэдний гаргасан Цагираг сониноос харж болно. Математикийн олимпиадын хүрээг өргөтгөх зорилгоор 1-ээс 6-р ангийн сурагчдын дунд математикийн нээлттэй олимпиад явуулдаг болсноос гадна сум сургуулиуд тухайлбал Түвшрүүлэх сумын засаг даргын тамгын газар, арван жилийн сургууль 190 гаруй мянган төгрөгөөр ивээн тэтгэж аймгийн олимпиадыг явуулсан нь улсын хэмжээнд анх удаа суманд аймгийн олимпиадыг зохион байгуулсан хэрэг бөгөөд энэ нь тус сумын сургууль багш нар, сурагчдын математик боловсролыг хөгжүүлэхэд ихээхэн хувь нэмрээ өгсөн үйл явдал боллоо. Мөн нэрт сурган хүмүүжүүлэгч математикч багш агсан А.Нямцэрэнгийн гэгээн дурсгал, гавьяаг хүндэтгэж, Монголын Олон аймаг бүр ядаж 1 ийм багштай болбол Монгол орон математик боловсрол ямар түвшинд хүрэхийг төсөөлж болмоор байна.

Ирэх жилийн олимпиадыг Арын сайхан хангайгаас ажил сэтгэл нэгтэй ажилладаг хөрш Баянхонгор аймаг зохион байгуулах

хариуцлагатай бөгөөд нэр хүндтэй үүргийг хүлээн авлаа. Энэ ажлыг хүсэмжлэн ирсэн Баянхонгор аймгийн боловсролын мэргэжлийн улсын байцаагч Ц.Энэбиш, Төвийн 1-р сургуулийн багш Г.Далай, нийт Баянхонгорчуудад олимпиадад оролцогчдынхоо нэрийн өмнөөс баяр хүргэе.

Олимпиадад амжилттай оролцсон нийт багш сурагчид, түүнд үнэнхүү санаа тавьсан Архангайчуудын цаашдын ажил үйлс улам дэгжин дээшилж, математик уламчлал нь бадран дэлгэрэхийн өлзийтэй сайхан өрөөлийг өргөн дэвшүүлье.

ММО-31 YII анги III даваа

Ц.Лувсандорж

A1. $19x^2 - 95y^2 = 1995$ тэгшитгэлийн бүх бүхэл тоон шийдийг ол.

A2. Мөр бүхэнд бичигдсэн тоонуудын нийлбэр нь тэнцүү байхаар 9×9 таблицийг $1, 2, 3, \dots, 81$ тоонуудаар бөглөж болох уу?

A3. Гурвалжны оройнууд хүртлэх зайн нийлбэр хамгийн бага байх цэгийг гурвалжны хавтгайд ол.

B1. Гурван оронтой n -гэсэн тооны бүх цифрийн үржвэр, цифрүүдийн хоёрлосон үржвэрүүд, цифрүүдийн нийлбэрийг $f(n)$, тухайлбал $n = \overline{abc}$ бол $f(n) = abc + ab + bc + ac + a + b + c$ гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $n = f(n)$ байх бүх тоог ол.

B2. Цагаан толгой нь n -ширхэг үсгээс тогтдог хэлэнд, ижил тооны үсгээс бүтдэг бөгөөд зөвхөн нэг л байранд байх үсгээрээ ялгаатай / тухайлбал, Дорж, Дарж үгүүдийг төсөөтэй үгүүд гэж нэрлэдэг. Тэгвэл уг хэлний бүх үгийг, нэг ангид орж буй үгүүд хоорондоо төсөөтэй байх n -ширхэг ангид хувааж болохыг батал.

B3. ABC - зөв гурвалжны дотор талд $\angle AMB = 100^\circ$, $\angle AMC = 101^\circ$ байх M цэг тэмдэглэв. Тэгвэл AM , BM , CM , хэрчмүүдээр гурвалжин байгуулж болохыг баталж, уул гурвалжны өнцгүүдийг ол.

БОДОЛТ

A1. $19x^2 - 95y^2 = 1995$ тэгшитгэлийн 2 талыг 19-д хуваахад $x^2 - 5y^2 = 105$.

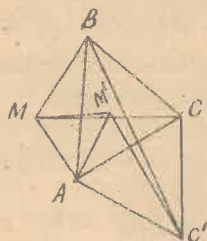
Эндээс $(x-10)(x+10) = 5(y-1)(y+1)$ болсноор бүх олоомжийг шалгаж, тэгшитгэл бүхэл тоон шийдгүй нь харагдана. Мөн тэгшитгэлийг жишээг хэрэглэн шийдэж болохыг тэмдэглэе.

A2. Болно. Эхлээд хүснэгтийн мөр бүхнийг $1, 2, 3, \dots, 9$ тоонуудаар зурагт үзүүлснээр бөглөе.

Одоо хүснэгтийн I баганы тоо бүхэн дээр 9, III баганы тоо бүхэн дээр 18, IV баганы тоо бүхэн дээр 27 гэх мэтчилэн V, VI, VII, VIII, IX багануудын тоо бүхэн дээр харагдсан 36, 45, 54, 63, 72 тоонуудыг нэмж бичихэд хүснэгт 1, 2, 81 тоонуудаар бөглөгдсөн байхыг хамт мөр бүхэнд бичигдсэн тоонуудын нийлбэр нь тэнцүү байх нь хялбар харагдана.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

А3. ABC гурвалжны хавтгайн дурьд M цэгийн хувьд $AM+BM+CM$ тоог доороос нь үнэлье. Үүний тулд A цэгт төвтэй 60° өнцгийн эргүүлэлтийг R авч үзье.



$$R_A^{60}(M)=M', R_A^{60}(C)=C' \text{ гэвэл}$$

AMM', ACC' гурвалжнууд зөв оолох

$$\text{нь мэдээж юм. } R_A^{60}(ACM)=AC'M'$$

Гэдгээс $AM+BM+CM=MM'+BM+M'C'=BM+MM'+M'C'=BC'$ өөрөөр хэлбэл, хавтгайн ямар ч M цэгийн хувьд сонирхож оуй нийлбэр BC' хэрчмийн уртаас багагүй гэдэг нь харагдлаа. Иймд $AM+BM+CM=BC'$

байх M цэгийг олох бодлогод шилжиж байна. Өмнө авч үзсэн эргүүлэлтээс эрж буй чанартай цэг нь BC' хэрчим дээр орших ёстой нь илт юм. Мөн M' цэг BC' хэрчим дээр оршиж байхыг тулд $\angle AMB=120^\circ$, $\angle AMC=120^\circ$. Эндээс, а) Аль ч өнцөг нь 120° -аас бага байх гурвалжны хувьд $AM+BM+CM$ нийлбэр хамгийн бага байх цэг нь гурвалжны талууд нь 120° -өнцгөөр харагдах цэг (Торричелийн цэг) болох нь батлагдлаа.

б). Аль нэг өнцөг нь 120° -аас багагүй гурвалжны хувьд $AM+BM+CM=BC'$ байх M цэгийн байгуулалтыг өөрсдөө хийцгээ. $B1. 100a+10b+c=abc+ab+bc+ac+a+b+c$ буюу $99a+9b=abc+ab+bc+ac$

$$=ab+c(ab+b+a), c=\frac{99a+9b-ab}{ab+b+a}, 0 \leq c \leq 9 \text{ гэдгээс } c=9 \text{ болохыг хялбархан}$$

тогтоож болно. $9ab+9a+9b=99a+9b-ab$ гэдгээс $b=9$. Иймд 199, 299, 399, 499, 599, 699, 799, 899, 999 тоонууд бодлогын нөхцөлийг хангах болно.

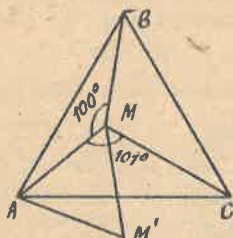
B2. Бодлогод тодорхойлогдсон төсөөтэй харьцаа нь:

а). Үг өөрөө өөртэйгээ төсөөтэй биш байх.

б). Үгтэй 1-р байрныхаа хувьд төсөөтэй үг уг хэлэнд яг n -ширхэг байдаг.

в). Үгтэй 1-р байрын хувьд төсөөтэй үг нь уул үгтэй j -р байрныхаа хувьд төсөөтэй үгтэй төсөөтэй биш байх зэрэг чанаруудыг олж харснаар, аливаа үгтэй сонгогдсон байрын хувьд төсөөтэй байх n -үгээ n хайрцагт нэг нэгээр нь дурваар хийж болсноор бодлого бодогдоно.

B3.



А цэгт төвтэй 60^0 -өнцгийн эргүүлэлтийг авч үзье. Тэгвэл

$$R_A^{60^0}(B)=C, \quad \text{болно.} \quad R_A^{60^0}(M)=M'$$

болог. Эргүүлэлтийн чанарыг анхаарвал:

$$R_A^{60^0}([BM])=[CM'] \quad \text{гэдгээс } AM, BM,$$

CM хэрчмүүдээр гурвалжин бай-гуулагдсан байна.

AMM' -гурвалжин зөв гурвалжинг санавал $\angle M'MC=101^0-60^0=51^0$,

$\angle MM'C=100^0-60^0=40^0$ болсноор бодлого бодогдов.

ММО-31 VIII анги III давса

Ц. Лувсандорж

A1. n, a, b, c, d -натурал тоонуудын хувьд $ab=cd$ бол $a^n+b^n+c^n+d^n$ зохиомол тоо болохыг батал.

A2. Аль ч дөрвөн мөрийг авахад хоёр нь 0,1 цифрийн байраараа яг ижил байхаар 9×9 хүснэгтийг 0,1 цифрээр бөглөв. Тэгвэл 0,1 цифрийн байраараа яг ижил бөглөгдсөн байх 2 багана олдохыг батал.

A3. Шулуун, түүний нэг талд орших хоёр цэг өгөгдөв. Тэглэв хоёр орой нь өгсөн цэгүүд дээр, нөгөө орой нь өгсөн шулуун дээр оршдог хамгийн бага периметртэй гурвалжныг байгуул.

B1. K -натурал тоо болгоны хувьд $u_0=1$, $u_{n+1} \cdot u_{n-1}=k \cdot u_n$ томъёогоор $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ бүхэл тоон дараалал байгуулав. Тэгвэл

$u_{2000} = 2000$ байх бүх k -г ол.

B2. 101 зоосны нэг нь хуурмаг зоос болно. Хуурмаг зоос жинхэнэ зоосноосоо хүнд, хөнгөн нь мэдэгдэхгүй бол туухай ашиглахгүй жигнүүрээр хамгийн цөөндөө хэдэн удаа жигнэж хуурмаг зоосыг таньж болох вэ?

B3. R радиустай тойрогт багтсан гурвалжны гадаад багтсан тойргуудын төвүүд дээр оройнууд нь орших гурвалжныг багтаасан тойргийн радиус R' бол $R' = 2R$ болохыг батал.

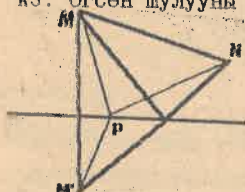
БОДОЛТ

A1. $ab=cd$ гэдгээс $d=\frac{ab}{c}$. $c=p_1 p_2 \dots p_r \cdot p_{r+1} \dots p_s$, p_i -анхны тоо бол a -тоог хувааж буй тоонуудын үржвэрийг $u=p_1 \cdot p_2 \dots p_r$, b -тоог хувааж буй тоонуудын үржвэрийг $v=p_{r+1} \cdot p_{r+2} \dots p_s$ гэж үзэхэд ерөнхий байдал алдагдахгүй. Эндээс $c=u \cdot v$, $a=u \cdot w$, $b=v \cdot t$, w, t -натурал тоо болно.

$$a^n + b^n + c^n + d^n = (u \cdot w)^n + (v \cdot t)^n + (u \cdot v)^n + (w \cdot t)^n = u^n (\omega^n + v^n) + t^n (v^n + \omega^n) = (\omega^n + v^n) (u^n + t^n) \text{ болсноор бодлого бодогдов.}$$

A2. 0,1 цифрийн байраараа яг адил байх мөрүүдийг нэг өнгөөр будсан гэвэл бидэнд ялгаатай гурван өнгө шаардлагатай гэдэг нь мэдээж юм. Иймд бодлого нь 3×9 хүснэгтийг 0,1 цифрээр бөглөхөд 0,1 цифрийн байраар яг адилхан бөглөгдсөн 2 багана олдохыг харахад хангалттай.

A3. Өгсөн шулуун хувьд M цэгтэй тэгш хэмтэй орших цэгийг M' гэвэл $MP=M'R$ учир $MP+PN=M'R+PN$. Иймд дурын P цэгийн хувьд $MP+PN=M'R+PN \geq M'N$ гэдгээс өгсөн шулуун, $M'N$ хэрчимтэй огтлолцсон цэг дээр гурав дахь орой нь орших гурвалжин бодлогын нөхцлийг хангах нь харагдаж байна.



$$B1. u_2 \cdot u_0 = k \cdot u_1 \Rightarrow u_2 = k \cdot u_1 \quad u_3 \cdot u_1 = k \cdot u_2 = k^2 \cdot u_1, \quad u_3 = k^2, \quad u_4 \cdot u_2 = k \cdot u_3 \Rightarrow$$

$$u_4 = \frac{k^2}{u_1} \quad u_5 = \frac{k}{u_1}, \quad u_6 = 1 \text{ болсноор } u_{6n+p} = u_p \text{ болох нь харагдаж байна.}$$

$$\text{Иймд } u_{2000} = u_{6 \cdot 333 + 2} = u_2 = k \cdot u_1 = 2000 = 20 \cdot 100 = 2 \cdot 1000 = 4 \cdot 500 = \dots$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k \cdot u_1 = 2000 \\ \frac{k}{u_1} \in \mathbb{Z} \\ \frac{k^2}{u_1} \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

нөхцлүүдээс бодлогын нөхцлийг хангасан k - тоог шавхаж болно.

В2. Жигнүүрийн 2 таваг дээр 50, 50 ширхэг зоос тавьж үзье. Хэрэв тэнцэж байвал эдгээр 100 зоосныхоо аль нэгтэй үлдсэн нэгийг жигнэж хүнд, хөнгөнийг тогтоож болно. Хэрэв тэнцэхгүй бол хөнгөн жин татаж буй 50 ширхэг зоосоо 25,25 хувааж жигнэхэд тэнцэж байвал хуурамч зоос жинхэнэ зоосноос хүнд болно. Эсрэг тохиолдолд хуурамч зоос нь хөнгөн болно. Өөрөөр хэлбэл, 2 жигнэлтийн дараа хуурамч зоос жинхэнэ зоосноос хөнгөн үү? эсвэл хүнд үү? гэдэг нь тогтоогдоно. Иймд бид, тухайлбал 50 ширхэг зоосон дотор жинхэнэ зоосноос хүнд гэдэг мэдэгдэж буй нэг хуурамч зоос байхад түүнийг хамгийн цөөндөө хэдэн жигнэлтээр олж болох вэ? гэсэн асуултанд хариулахад хангалттай 50 зоосоо 16,16,18 гэж хуваан жигнүүр 2 таваг дээр тус бүр 16 зоос тавьж үзэхэд хэрэв тэнцэж байвал 4 дэх жигнэлтийг хийхээс өмнө $18=6+6+6$ гэж хуваан (6;6) жигнэлтийг хийнэ. Энэ жигнэлтийн дараа $6=2+2+2$ гэж хуваан 5 дахь жигнэлтийг (2,2) гэж хийнэ. 6 дахь жигнэлтийг $2=1+1$ гэж хийснээр хуурамч зоос энэ тохиолдолд тодорхой болно. Хэрэв 3 дахь жигнэлтээр жигнүүрийн тавгууд тэнцэхгүй бол хүнд жин татаж 16 зоосоо $5+5+6=16$ гэж хуваан (5;5) жигнэлтийг хийнэ. Хэрэв тэнцэж байвал өмнөх тохиолдлын V, VI жигнэлтээр бодлого бодогдоно. Тэнцэхгүй бол $5=2+2+1$ хуваан V жигнэлтийг (2;2), IV жигнэлтийг (1,1) хийснээр бодлого бүрэн бодогдлоо. Харин 5 үйлдлээр тогтоож болох эсэхийг сонирхож үзнэ үү!

В3. ABC гурвалжны A, B, C гурвалжны оройнуудын эсрэг орших гадаад багтсан тойргуудын төвүүдийг харгалзан A', B', C' гэвэл A'B'C' гурвалжны өндрүүд нь AA', BB', CC' хэрчмүүд болох нь хялбар харэгдана.

$$\angle A'BC = \frac{\pi - \hat{B}}{2}, \quad \angle BCA' = \frac{\pi - \hat{C}}{2}$$

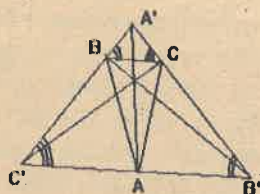
$$\text{гэдгээс } \angle BA'C = \frac{\pi - A}{2}.$$

Одоо $A'B'C'$, $A'BC$ гурвалжнууд төсөөтэйг санавал:

$$B'C' = \frac{BC}{\cos \frac{\pi - A}{2}} = \frac{2R \cdot \sin A}{\sin \frac{A}{2}}$$

$$= 4R \cos \frac{A}{2};$$

$$2R' = \frac{B'C'}{\sin A'} = \frac{B'C'}{\sin \frac{\pi - A}{2}} = \frac{4R \cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = 4R$$



ММО-31 VIII анги IV даваа

Ц.Лувсандорж

A1 (Л.Оюунцэцэг). $(a, b) = 1$ ба $a^2 + b^2 = c^2$, $c > 0$ зэрэг бүхэл тоонууд бол $a + c$ эсвэл $b + c$ нь бүхэл тооны квадрат болно гэж үзүүл.

A2 (Д.Нямсүрэн). $s < n$ -ийн хувьд $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ тоонуудаас $\forall i \in \{1, n-4\}$

авахад $\overline{a_i a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3} a_{i+4}}$ тоо бүр нь 271-д хуваагддаг n -оронтой тооны тоо n -ээс хамаарахгүй гэдгийг батал.

A3 (А.Хашбаатар). $A_1 A_2 A_3$ гурвалжны A_3 оройгоос $A_1 A_2$ талын үргэлжлэл дээр орших аливаа P цэг A_1 -д ойр бол $A_3 P^2 = A_3 A_1^2 + A_3 A_2^2 - PA_1^2$, A_2 -д ойр бол $A_3 P^2 = A_3 A_2^2 + A_3 A_1^2 - PA_2^2$ нөхцөл хангадаг бол энэ гурвалжны хэлбэрийг тогтоо.

B1 (Ш.Самбуу УБИС-ийн оюутан). $11x^2 + x - y^2 = 0$ тэгшитгэл төгсгөлгүй олон натурал тоон шийдтэй болохыг батал.

B2 (Д.Хашбаяр МУИС-ийн оюутан). Нэг хэсэгт орсон хоёр тооны үржвэр тэр хэсэгтээ ордог байхаар бүхэл тоон олонлогийг үл огтолцох 1995 хэсэгт хувааж болох уу?

B3 (В.Адъяасүрэн). Тал тус бүрийн нь урт 1-ээс хэтрэхгүй гүдгэр ABCDEF зургаан өнцөгтийн хувьд AD, BE, CF диагоналуудын ядаж нэгийг нь урт 2-оос хэтрэхгүй гэж батал.

БОДОЛТ

$$A1. \quad a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b) \quad \begin{cases} c-b = t \cdot s^2 \\ c+b = t \cdot e^2 \end{cases} \text{ ба } t \text{ нь ямар нэг тооны квадра-}$$

тад хуваагдахгүй байхаар үржвэр дүрсээр тавьж болно.

$$\begin{aligned} 2c &= t(s^2 + e^2) \\ 2b &= t(e^2 - s^2) \end{aligned} \quad \text{буюу} \quad \begin{cases} c = \frac{t(s^2 + e^2)}{2} \\ b = \frac{t(e^2 - s^2)}{2} \end{cases}$$

а). $s^2 + e^2, e^2 - s^2$ 2-д хуваагддаг гэе. $t|c$ ба $t|b$ гэдгээс $t|a$ ба $(a,b)=1$ гэдгээс $t=1$. Эндээс $c+b=s^2$

б). $s^2 + e^2, e^2 - s^2$ 2-д үл хуваагддаг болог. Тэгвэл t -нь 2-д хуваагдах ба $(a,b)=1$ гэдгээс $t=2$. Иймд (*) ёсоор a -нь тэгш тоо болно. a, b -ээрэг тэгш тоо байж болохгүй тул b -сондгой юм. $b=(c-a)(c+a)$, тоог дээрхи адилаар авч үзвэл а) тохиолдол гарч $c+a=s^2$ болно. Иймд бодлого бодогдов.

A2. Бодлогын нөхцөл ёсоор $\forall i \in \{1; n-4\}$ гэдгээс $\overline{a_i a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3} a_{i+4}} \equiv \overline{a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3} a_{i+4} a_{i+5}} \equiv 0 \pmod{271}$ ба $(271, 10)=1$ учир

$$\begin{aligned} 10 \overline{a_i a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3} a_{i+4}} &= \overline{a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3} a_{i+4} a_{i+5}} \equiv 99999 a_i \pmod{271} \\ + 10 \overline{a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3} a_{i+4}} &= (10 \overline{a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3} a_{i+4}} + a_{i+5}) \equiv a_{i+5} \pmod{271}. \end{aligned}$$

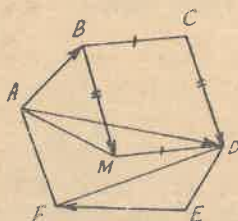
a_i -цифрууд учир 5 модулиар жишигдэх дугаар дахь оронд байх цифрууд тэнцүү байна. Иймд бодлогын нөхцлийг хангах тоонууд хоорондоо, зөвхөн аль нэг зэргэлдээ 5 оронгийн цифруудээр л ялгагдах учир, $5 \leq n$ байхад бодлогын нөхцлийг хангах тоонуудын тоо n -ээс хамаарахгүй болох нь харагдав.

A3. Бодлогын тавилт алдаатай болохыг олон сурагчид тогтоосон болно.

B1. Тэгшитгэл $(0,0)$ шийдтэй нь илт юм. Одоо шийдийг өсгөө. Хэрэв (x,y) шийд болдог бол $(199x+60y+9, 660x+199y+30)$ шийд болохыг шалгаж болно. $(0,0) \rightarrow (9,30) \rightarrow \dots \rightarrow (x,y) \rightarrow (199x+60y+9, 660x+199y+30)$ болсноор бодлого бодогдов.

B2. p_i -нь i -р анхны тоо болог.

$A_i = (\pm p_i^k \mid k \in \mathbb{N})$ байг. $A = \mathbb{Z} \setminus (\bigcup_{i=1}^{1994} A_i)$ гэвэл $A, A_1, A_2, \dots, A_{1994}$ олонлогууд үл огтлолцох бөгөөд тус бүрдээ үржвэрийнхээ хувьд битүү гэдгийг шалгахад хялбар болно.



$\vec{AB}, \vec{CD}, \vec{EF}$ - векторуудын
ядаж 2 нь хоорондоо
 120° -аас багагүй өнцөг
үүсгэж байх юм. Тэдгээрийг
 $\vec{AB}, \vec{CD}$ -гээ. $\vec{CD} = \vec{BM}$ байх М
цэгийг таслан авъя. Тэгвэл
 $\angle ABM \leq 60^\circ$ байх тул AM нь
ABM гурвалжны хамгийн их
тал биш юм. Иймд
 $AM \leq \max(AB, BM) \leq 1$. Гурвалжны
тэнцэтгэл биш ёсоор
 $AD \leq AM + MD = AM + BC \leq 1 + 1 = 2$.

ММО-31 IX анги III даваа

А.Хашбаатар (МУИС)

Д.Пүрэвсүрэн (МУИС)

A1 (Д.Пүрэвсүрэн). К тойрог дээр В, С хоёр цэг өгөгджээ. А цэг К тойрог дээгүүр гүйхэд ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төвийн геометрийн байрыг ол.

A2 (А.Хашбаатар). $a_n = n^4 - 5n^3 - 3n^2$ дарааллын хамгийн бага гишүүнийг ол.

A3 (Д.Пүрэвсүрэн). Хавтгайн цэгүүдийг хоёр өнгөөр будахад нэгж талтай, $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ өнцгүүд бүхий нэг өнгийн оройтой гурвалжин олдохыг харуул.

B1 (А.Хашбаатар). Тойрогт багтсан ABCD гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн эсрэг AB, CD хоёр тал E цэгт огтлолцжээ. Хэрэв E, F орой дахь дотоод өнцгийн биссектрисүүд BC, CD талуудыг харгалзан M, N цэгт огтолсон бол BD || MN гэж батал.

B2 (А.Хашбаатар). $x \neq \pm \frac{1}{3}$ байх аливаа x-ийн хувьд тодорхойлогдох

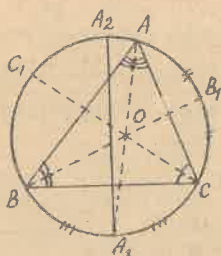
$f\left(\frac{x+1}{1-3x}\right) = x - f(x)$ нөхцөл хангадаг f(x) функцийг ол.

B3 (Д.Пүрэвсүрэн). $y^4 - 3x^2 = 1$ тэгшитгэлийн бүх бүхэл тоон шийдийг ол.

БОДОЛТУУД

A1.

BC нум дээр А цэг авч үзье.



Зураг

$$\angle OBA_1 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$\angle BOA_1 = (\angle B_1 + \angle A_1) = \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

болно. Эндээс $\triangle BA_1O$ адил хажуут гурвалжин, иймд $A_1B = A_1O$ болно. $A_1B = A_1C$ (Учир нь A_1 цэг BC -ын дундаж) тул O цэг A_1 цэгт төвтэй BA_1 радиустай тойрог

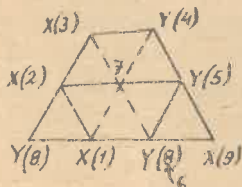
дээр оршино. Буцаагаад BC гэсэн O -г агуулсан нумын бүх цэг ямар нэг AC гэсэн K -д багтсан тойргийн төв болно. Иймд бидний олох геометр байр нь BC нумуудын дундаж A_1, A_2 цэгүүдэд төвтэй BA_1 ба BA_2 радиустай тойргийн зурагт үзүүлсэн тод нум болно.

A2. $a_n = n^4 - 5n^3 - 3n^2$ дарааллын эхний хэдэн гишүүдийг олѳ.

$a_1 = -7, a_2 = -32, a_3 = -81, a_4 = -112, a_5 = -75, a_6 = 108$ болно. $n > 6$ үед

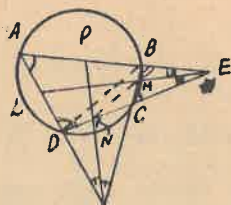
$a_n = n^2(n(n-6) + n-3) > 0$ болно. Иймд энэ дарааллын хамгийн бага гишүүн $a_4 = -112$ болно.

A3. Нэгж талтай зөв 6 өнцөгт авч үзье. Хэрэв аль нэг эсрэг хоёр орой нь ижил өнгийн бол үлдсэн 4 оройн нэг нь дээрхи хоёртой ижил өнгийн тохиолдолд бидний олох гурвалжин нь эдгээр цэгүүдэд оройтой гурвалжин, эсрэг тохиолдолд үлдсэн 4 оройн аль ч гурав дээр оройтой гурвалжин бодлогын нөхцлийг хангана. Иймд аль ч эсрэг орших хоёр орой еер өнгөтэй байг. Хоёр өнгийг X, Y гэж тэмдэглэе. (1) ба (2)-г X өнгийн гэвэл ерөнхийлөл алдагдахгүй (Учир нь нэгж зайтай ижил өнгийн хоёр цэг олдоно. Иймд зөв 6 өнцөгтийг тэр хоёр цэг орой нь байхаар авч болно.) Эндээс (4), (5) Y өнгийн болно. (6) ба (3) еер өнгөтэй учир аль нэг нь X өнгийн байна. Тухайлбал (3)-г X гэе. (6) нь Y өнгийн болно. (Зураг)



Хэрэв (8) X эсвэл (9) Y бол бодлого бодогдоно. Иймд (8) Y ба (9) X тохиолдолд авч үзье. Энэ үед (7) Y бол (8), (7), (6) цэгүүдэд оройтой, (7) X бол (1), (7), (9) цэгүүдэд оройтой гурвалжин бодлогын нөхцөл хангана.

Б1.



$\triangle AED \sim \triangle CEB$ ба M, L нь E оройн
биссектрисын суурь учир
 $\frac{|BM|}{|CM|} = \frac{|DL|}{|AL|}$ ба $\frac{|DL|}{|AL|} = \frac{|DE|}{|AE|}$ болно.

Эндээс $\frac{|BM|}{|CM|} = \frac{|DE|}{|AE|}$ гэж гарна.

Үүнтэй адилаар ($\triangle CED \sim \triangle AEB$)

$\frac{|DN|}{|CN|} = \frac{|BF|}{|AF|}$ болно. Нөгөө талаас $\triangle AED$ -с синусын теорем бичвэл

$\frac{|DE|}{|AE|} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ ба үүнтэй адилаар $\frac{|BF|}{|AF|} = \frac{\sin \alpha}{\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ байна. Эндээс

$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{|BM|}{|CM|} = \frac{|DN|}{|CN|}$ болж Фалесын теорем ёсоор $MN \parallel BD$ болох нь батлагдав.

Б2. $x = \pm \frac{1}{3}$ авч үзье. Өгсөн ёсоор (1) $f\left(\frac{x+1}{1-3x}\right) = x - f(x)$ болно.

(1)-д x -ын оронд $\frac{x+1}{1-3x}$ -г ордуулбал

(2) $f\left(\frac{x-1}{1+3x}\right) = \frac{x+1}{1-3x} - f\left(\frac{x+1}{1-3x}\right)$ болно. (1)-д x -ын оронд $\frac{x-1}{1+3x}$ -г ордуулбал

(3) $f(x) = \frac{x-1}{1+3x} - f\left(\frac{x-1}{1+3x}\right)$ болно. (1)-с (2)-г хасаад (3) нэмбэл

$f(x) = x + \frac{x-1}{1+3x} - f(x) - \frac{x+1}{1-3x}$ ба $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{x-1}{1+3x} - \frac{x+1}{1-3x} \right)$ болно.

Б3. Тэгшитгэлийн зөвхөн эерэг тоон шийдийг олоход хангалттай.

$y = \pm 1$, $x = 0$ шийд болох ойлгомжтой. Үүнээс өөр шийдийг сонирхоё.
Тэгшитгэлийг хувирган

$\sqrt{\frac{(y^2-1)(y^2+1)}{3}} = x \leq 2$ гэж бичье. Эндээс $y^2 \leq 0.1$ (3) тул $y^2 + 1 \leq 1.2$ (3)

болж $\begin{cases} y^2 - 1 = 3x_1^2 \\ y^2 + 1 = x_2^2 \end{cases}$ гэж гарна. Энд $x_1 \cdot x_2 = x$ байна.

$y^2+1=x^2 \rightarrow$ хоёр бүхэл тооны квадратын ялгавар 1 гэдгээс $x_2=1$
 $y=0$ болно. $y=0$ -г эхний тэгшитгэлд тавибал $0-1=3x^2$ болж зөрчилд
хүрнэ. Иймд тэгшитгэл $y=\pm 1$, $x=0$ өөр шийдгүй.

ММО-31 IX анги IV даваа

Д.Пүрэвсүрэн

A1 (Д.Халибаяр). 1995 хүн хос хосоороо яг нэг хэлээр ярилцдаг, дурын 3 хүний хувьд эсвэл бүгд нэг хэлээр ярилцдаг эсвэл аль нь ч нөгөө хоёрынхоо ярилцдаг хэлийг мэддэггүй. Хэрэв бүгд мэддэг хэл байхгүй бол тэд дор хаяж хэдэн хэлээр ярилцдаг вэ?

A2 (У.Отгонбаяр). a, b, c, d зэрэг тоонуудын хувьд

$$\frac{a}{b+c} + \frac{cd}{a(c+d)} + \frac{c}{a+d} + \frac{ab}{c(a+b)} > \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} \text{ болохыг батал.}$$

A3 (Р.Гончигдорж). Биллиардын тэгш өнцөгт хэлбэртэй нүхгүй ширээн дээр А цэг тэмдэглэгджээ. Өгсөн ирмэгээс эхлэн цагийн зүүний эсрэг дэс дараалан ирмэг бүрээс нэг нэг ойгоод өгсөн А цэгийг дайрч гарахаар цохигдож чаддаг шахикийн байршлын муж ямар дүрс үүсгэх вэ? (Шахикийг цэг гэж үзэх ба цохигдсон шахикийн ирмэгт туссан, ойсон өнцөг хоёр тэнцүү байна гэж үзнэ.)

B1 (О.Цэрэнбат). a, b, c, d нь $b^2+1=ac$ ба $c^2+1=bd$ нөхцлүүдийг хангах зэрэг бүхэл тоонууд бол $a=3b-c$ ба $d=3c-b$ болохыг батал.

B2 (Ц.Батхуу). ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төвийг дайруулан түүний AC, BC талуудыг харгалзан E, F цэгүүдэд огтолдог ℓ шулуун татав. Хэрэв a, b нь харгалзан BC, AC талуудын уртууд, P нь ABC гурвалжны хагас периметр бол $CE+CF > \frac{2ab}{P}$ болохыг батал.

B3 (М.Баасай). Бөмбөлгийн гадаргуугийн 12.4 %-ийг эзлэх хэсгүүдийг будав. Будагдаагүй хэсгүүд дээр нь бүх орой нь орших тэгш өнцөгт параллелолипед олдохыг батал.

БОДОЛТ

A1. Өгсөн нөхцлөөс хүнийг цэг, хэлийг шулуун гэж үзэж болно. Иймд бодлого хавтгай дээрх нэг шулуун дээр үл орших 1995 цэгийг дайруулан хамгийн цөөндөө хэдэн шулуун татаж болох вэ? гэсэн бодлого руу шилжинэ. Ерөнхий тохиолдолд n цэг үед хамгийн цөөндөө n шулуун татаж болохыг харуулъя. Өгсөн нөхцлөөс A, B, C гэсэн нэг шулуун дээр үл орших 3 цэг олдоно. Нэг шулуун дээр үл орших k ширхэг цэг байг. Хавтгайд цэг аваад k ширхэг цэгтэй холбоход үүсэх шулуун хамгийн цөөндөө нэг байх нь илэрхий. Иймд A, B, C цэгүүдийг

гарна. Эндээс манай бодлого эцсийн тэгш өнцөгт доторхи А-г дайрсан, IV, III, II, I ирмэгүүдийг огтолсон шулуун татаж болох цэгийн олонлогийг анхны тэгш өнцөгтөөс ол гэсэн бодлогод шилжинэ. Одоо хэрэв А цэг хэвтээ зураасалсан муж дотор байвал тийм цэгүүдийн олонлог хоосон. А цэг босоо зураасалсан муж дотор байвал тийм цэгүүдийн олонлог гурвалжин, А цэг цагаан муж дотор байвал тийм цэгүүдийн олонлог дөрвөн өнцөгт байхыг шууд шалгаж болно.

B1. Өгсөн нөхцлөөс $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ ба $(b, c) = 1$ болно. Мөн $b(b+d) = c(a+c)$ гэж гарна. Эндээс $b+d = \frac{c(a+c)}{b}$, $a+c = e \cdot b$ гэж гарна. Мөн $b+d = ec$

$e \in \mathbb{N}$ Одоо $e=3$ гэж батлая. $a = eb - c$ -ийг $b^2 + 1 = ac - d$ тавибал $b^2 - ebc + c^2 + 1 = 0$ болно. Ө.х (b, c) нь $x^2 - exy + y^2 + 1 = 0$ тэгшитгэлийн бүхэл шийд болно. $x^2 - exy + y^2 + 1 = 0$ бүхэл шийдтэй гэдгээс $e > 2$ байна. Одоо $e > 3$ үед $x^2 - exy + y^2 + 1 = 0$ тэгшитгэл натурал шийдгүйг батлая. Эсрэгээс нь (u, t) гэсэн ямар нэг шийдтэй гээ. $u=t$ бол $2u^2 + 1 - eu^2 = 0 \quad 2 + \frac{1}{u^2} = e$ болж $u=1$ болно. $u=1 \quad e=3$ болон манай $e > 3$ гэсэнд зөрчинэ. Иймд $u < t$ байна. $u > t$ гээ. $f(x) = t^2 - etx + t^2 + 1$ гурван гишүүнт авч үзье. $f(x)$ нь 2 шийдтэй нэг шийд нь u болно. Нөгөө шийдийг нь u' гээ. $u+u' = et$ байна.

$f(t) = t^2 - et^2 + t^2 + 1 = t^2(2-e) + 1 < -t^2 + 1 = 1 - t^2 < 0$ (t -натурал тоо тул) $f(t) < 0$ болно. Эндээс t нь u, u' хоёр шийдийн хооронд байх ба $u > t$ учир $u' < t < u$ болно. Эндээс хэрэв $x^2 - exy + y^2 + 1 = 0$ (u, t) шийдтэй бол (t, u') гэсэн $\max(u', t) < \max(t, u)$ байх шийд байгуулж болох ба энэ нь төгсгөлгүй үргэлжилнэ. Гэтэл өгсөн тооноос бага байх натурал тоонуудын олонлог төгсгөлөг учир энэ нь боломжгүй. Эндээс $e > 3$ $x^2 - exy + y^2 + 1 = 0$ тэгшитгэл шийдгүй. Иймд $e=3$ ба $a=3b-c \quad d=3c-b$ болж батлагдав. Санамж:

Үнэхээр $e=3$ үед $x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$ тэгшитгэл $(1, 1), (5, 13), \dots$ г.м төгсгөлгүй олон шийдтэй юм.

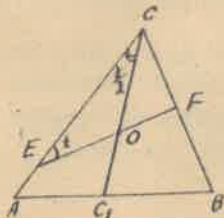
B2.

$\angle CEF = 1$ гээ.

$$(1) \quad \cos = \frac{2ab}{a+b+c} \cdot \frac{\cos \gamma}{2} \quad \text{болохыг}$$

хялбархан гаргаж болно.

$\triangle COE$ ба $\triangle COF$ -д синусын теорем хэрэглэвэл



$$CE = \frac{CO}{\sin t} \cdot \frac{\sin(t+\gamma)}{2}$$

$$CF = \frac{CO}{\sin(\gamma+t)} \cdot \frac{\sin(t+\gamma)}{2} \quad \text{тус} \quad \text{тус}$$

болно.

$$\text{Иймд } CE+CF = CO \cdot \frac{\sin(t+\gamma)}{2} \cdot \frac{\sin t + \sin(\gamma+t)}{\sin t \cdot \sin(\gamma+t)} \text{ болно.}$$

$$\sin t + \sin(\gamma+t) = 2 \sin\left(t+\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \text{ ба}$$

$$\frac{1}{\sin t \cdot \sin(\gamma+t)} \cdot \frac{4}{(\sin t + \sin(\gamma+t))^2} \cdot \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\gamma+t}{2}\right) \cdot \cos^2 \frac{\gamma}{2}} \text{ болохыг ашиглавал}$$

$$CE+CF > \frac{2 \cdot CO \cdot \sin^2\left(t+\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \cos^2 \frac{\gamma}{2}}{\sin^2\left(t+\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \cos^2 \frac{\gamma}{2} \cdot \cos^2 \frac{\gamma}{2}} \text{ болно. Үүнд (1)-ийг орлуулбал}$$

$$CE+CF > \frac{4ab}{a+b+c} \cdot \frac{2ab}{p} \text{ болно. Тэнцэлдээ } \sin t = \sin(\gamma+t) \text{ буюу } 180^\circ - t = \gamma+t,$$

$$t = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} \text{ үед } O, X, C_1 \text{ -д перпендикуляр шулуун байх үед хүрнэ.}$$

ВЗ. Будсан хэсэгт ядаж нэг орой нь орших параллелепипедийн бүх оройнуудыг будья. Тэгвэл нийт хамгийн ихдээ $8 \cdot 12,4\% = 99,2\%$ хэсгийг будна. Иймд ядаж $0,8\%$ будагдаагүй хэсэг үлдэж байна. Будагдаагүй цэг дээр нэг орой нь байрлах параллелепипед байгуулбал бодлогын нөхцөл хангана. Учир нь бусад оройн аль нэг будагдсан бол өмнөх ёсоор бүгд будагдсан байх ёстой. Энэ нь манай параллелепипедийн байгуулалтанд зөрчинө.

ММО-31, X анги III даваа

Ц.Дондорж

A1 (Ш.Болтшиг). Модуль нь 3-аас хэтрэхгүй $x_1, \dots, x_n$ бодит тоонуудын кубүүдийн нийлбэр тэг бол $x_1 + \dots + x_n < n$ гэж батал. Ямар тохиолдолд тэнцэлдээ хүрэх вэ?

A2 (Сандагдорж). $\triangle ABC$ -д багтсан тойрог AB ба BC талыг харгалзан P ба Q цэгт шүргэнэ. BC ба AC талуудын дундажийг харгалзан M ба N цэгүүдээр тэмдэглэе. MN ба PQ шулуунуудаар үүссэн өнцгийн биссектрисүүдийн аль нэг дээр A цэг оршино гэж батал.

А3 (Ц.Дашдорж). Аль ч нэг тоог нь дарахад үлдэх тоонуудыг нь нийлбэр нь тэнцүү байх үл огтлолцох 2 бүлэгт хувааж болдог чанар бүхий 100 натурал тоо орших уу?

Б1 (С.Батболд). $\angle ACB = 90^\circ$ болог. Дурын Р цэг сонгон аваад $AP = m$, $BP = n$, $CP = k$ гэе. Хэрэв $BC^2 m^2 + AC^2 n^2 = AB^2 k^2$ бол Р нь А, В цэгүүдийг холбосон шулуун дээр оршихыг үзүүл.

Б2 (Ц.Дашдорж). Сум 1995 хүнтэй, хэрэв 2 хүн танил бол энэ хоёрын тус бүрийн танилуудын тоо нь тэнцүү ба хэрэв 2 хүн танил биш бол энэ хоёрын тус бүрийн танилуудын тоо нь ялгаатай байв.

а) Тэгвэл дор хаяад 62 танилтай хүн бий гэдгийг батал.

б) Энд 62-ыг 63-аар солиход дүгнэлт хүчинтэй юу?

Б3 (Ц.Дашдорж). a, b, c, d эерэг бодит тоонууд ба $a < b < c < d$, $abcd = 1$ байг.

$$\lambda \text{ нь } x^3 - (a+b+c+d)x^2 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) = 0$$

тэгшитгэлийн эерэг язгуур бол $\lambda > b$ гэж батал.

БОДОЛТ

$$A1. |x| < 3 \quad -3 < x < 3 \quad x+3 > 0 \quad \text{Иймд } (x+3) \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 > 0 \text{ байна.}$$

$$0 < 4(x+3) \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 = (x+3)(4x^2 - 12x + 9) = 4x^3 - 27x + 27$$

Эндээс $|x_1| < 3$ тул

$$\begin{cases} 0 < 4x_1^3 - 27x_1 + 27 \\ 0 < 4x_2^3 - 27x_2 + 27 \\ \vdots \\ 0 < 4x_n^3 - 27x_n + 27 \end{cases} \quad \text{Бүгдийг нь нэмбэл}$$

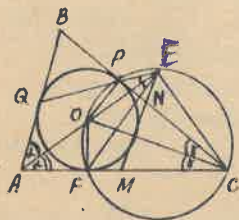
$0 < 4(x_1^3 + \dots + x_n^3) - 27(x_1 + \dots + x_n) + 27n \quad \rightarrow \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq n$ болж батлагдана. Бодолтоос харахад тэнцэлдээ хүрэхийн тулд $x_i = -3$ эсвэл $x_i = \frac{3}{2}$ байх нь харагдаж байна. (-3) -тай тэнцүү тоонуудын тоог m

$\frac{3}{2}$ -тай тэнцүү тоонуудын тоог k гэвэл $\begin{cases} m+k=n \\ m(-3)^3 + k\left(\frac{3}{2}\right)^3 = 0 \end{cases}$ байх ёстой.

$\begin{cases} m+k=n \\ k-8m=0 \end{cases} \rightarrow 9m=n \quad 9|n \text{ байна. Иймд } n=9m \text{ байх үед тэнцэлдээ хүрэх бөгөөд } m \text{ ширхэг нь } (-3)\text{-тай тэнцүү, } 6m \text{ ширхэг нь } \left(\frac{3}{2}\right)\text{-тай тэнцүү}$

үед тэнцэлдээ хүрнэ.

A2. Эхлээд A өнцгийн биссектрис MN шулуунтай огтлолцлын цэгийг E гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $\angle AEC = 90^\circ$ болох нь илэрхий. Учир нь $MN \parallel AB$ ба AE нь гурвалжны биссектрис. ABC гурвалжинд багтсан тойрог AC-тaлыг шүргэсэн цэгийг F гэе.



Нөгөө талаас O, F, C, E, P цэгүүд нэг тойрог дээр орших ба тойргийн төв нь OC-ийн дундаж цэг байна. Мөн E цэг A өнцгийн биссектрис дээр орших тул $EQ = EF$ байх ба $\angle AEF = \angle AEQ = \gamma$ байна. Одоо EQ шулуун дээр P цэг оршино гэдгийг харвал бодлого бүрэн бодогдоно. Гэтэл $\angle OCP = \angle OEP$ (нэг нумд тулна) учир $\angle OEP = \gamma$ болж E, P, Q цэгүүд нэг шулуун дээр оршиж бодлого бодогдлоо. E цэг ABC гурвалжны дотор орших үед үүнтэй яг адилаар батлагдана.

A3. Тийм олонлог оршдог гэж үзье. Тэдгээрээс тоонуудын нийлбэр $s(A)$ нь хамгийн бага байдаг олонлог A-г авч үзье. A-д сондгой тоо бий. $a \in A$ бүрийн хувьд $s(A) - a$ тэгш тоо байх ёстой гэдгээс $a \in A$ бүр сондгой гэж гарна. Иймд $s(A)$ тэгш ба $s(A) - a$ бүр сондгой. Иймд үүнийг бодлогын нөхцөлд тохирох 2 хэсэгт хувааж үл болно.

B1. P цэг өгөгдсөн нөхцлийг хангаж байг.

$P' = \text{пр}_{(AB)}(P)$ байг.

$AP' = m'$ $BP' = n'$ $CP' = k'$ гэе.

$C' = \text{пр}_{(AC)}(P')$ байг. $\angle ABC = \alpha$ гэе.

$$\sin \alpha = \frac{AC}{AB} \quad \cos \alpha = \frac{CB}{AB}$$

$$C'P' = AP' \cos \alpha = m' \frac{CB}{AB} \quad CC' = BP' \sin \alpha = n' \frac{AC}{AB}$$

$$CP'^2 = C'P'^2 + CC'^2 \iff k'^2 = m'^2 \frac{CB^2}{AB^2} + n'^2 \frac{AC^2}{AB^2}$$

$$\iff AB^2 k'^2 = CB^2 m'^2 + AC^2 n'^2$$

$$m'^2 = m^2 - PP'^2 \quad n'^2 = n^2 - PP'^2 \quad \text{тул}$$

$$AB^2 k'^2 = CB^2 m^2 + AC^2 n^2 - PP'^2 (CB^2 + AC^2) = k^2 AB^2 - PP'^2 AB^2 \rightarrow$$

$k'^2 = k^2 - PP'^2$ $\angle PP'C = 90^\circ$ эсвэл $P' = P$ болно. Эхний тохиолдолд $C \in (AB)$ болж зөрчилдөх тул $P = P' \rightarrow P \in (AB)$.

Б2. А бүх хүмүүсийн олонлог байг. x, y хоёр танил гэхийг $x \sim y$ -ээр, танил биш гэхийг $x \not\sim y$ -ээр тэмдэглэе. Одоо $\sim$ нь А олонлог дээрхи эквивалентийн харьцаа болохыг үзүүлэе. $x \sim x$ гэж үзэж болно.

$A_x = \{x \in A \mid x \sim x\}$ гэе. $x \sim a$, $a \sim y$ бол $x \sim y$ гэж батлая. $x \sim a$ гэдгээс $|A_x| = |A_a|$, $a \sim y$ гэдгээс $|A_a| = |A_y|$ гэж гарна. Иймд $|A_x| = |A_y|$ болно. Бодлогын нөхцлөөр хэрэв $x \sim y$ бол $|A_x| = |A_y|$ гэж гарах ёстой тул $x \sim y$ боллоо. (*) $x \sim y \iff A_x = A_y$ гэдгийг батлая. $\leftarrow$ илэрхий. $x \sim y$ боловч $A_x \neq A_y$ гэе. Эсвэл $A_x \setminus A_y$ байг, өөрөөр хэлбэл $a \sim x$, $a \not\sim y$ байг. $a \sim x$, $x \sim y$ гэдгээс $a \sim y$ гэж гардгийг бид баталсан. Иймд (*) батлагдав.

а) 62 танилтай хүн байхгүй гэвэл $\forall x, |A_x| < 62$ болно. Иймд ялгаатай бүлгүүдийг $A_1, A_2, \dots, A_n$ гэж дугаарлая. Тэгвэл $1 \neq j$ үед $|A_1| \neq |A_2|$ болно.

$\bigcup_{i=1}^n A_i = A$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ ойлго. Иймд $1995 = |A| = \sum_{i=1}^n |A_i| < 1+2+3+\dots+62 =$

$\frac{62 \cdot 63}{2} = 1953$ Иймд дор хаяж 62 танилтай хүн бий.

б) $1+2+\dots+20+22+23+\dots+63=1995$ тул 63 танилтай хүн байхгүй байж болно. Ө.х энэ тохиолдолд а) хүчингүй байна гэсэн үг.

Б3. $P(x)$ -ээр уг олон гишүүнтийг тэмдэглэе. $abcd=1$ -ээс $\frac{1}{a}=bcd$, $\frac{1}{b}=acd$, $\frac{1}{c}=abd$, $\frac{1}{d}=abc$ болох тул (1) $Q(x)=xP(x)+1=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ болно. $P(\lambda)=0$ байг. $\lambda \neq 0$ ба $Q(\lambda)=1$ (2) болно. $0 < \lambda < a$ байг. Тэгвэл $0 < a-\lambda < a$, $0 < b-\lambda < b$, $0 < c-\lambda < c$, $0 < d-\lambda < d$ тул (1)-ээс $Q(\lambda) < abcd=1$ болж (2)-т зөрчинө. $a < \lambda < b$ бол (1)-ээс $Q(\lambda) < 0$ болж мөн (2)-т зөрчинө. Иймд $\lambda > b$ болов.

ММО-31 Х анги IV давсаа

Ц.Батхүү

А1 (Ү.Отгонбаяр). 2 талт шугам ашиглан 14-ээс хэтрэхгүй удаа шулуун татаж үйлдэл хийж өгөгдсөн шулуунд перпендикуляр тат.

А2 (Б.Баясгалан). $(1, \dots, 1995)$ олонлогийг хоёр ангид хуваасан дурын хуваалтын аль нэг ангиас m -н байх ямар нэг m тооны хувьд $a_1 + \dots + a_m = a$ нөхцөл биелэх $a_1, \dots, a_m$ тоонууд үргэлж олддог бол n тооны шах утгыг ол.

А3 (В.Адьяасүрэн). ABC гурвалжны хувьд

$(\pi-\alpha)(\pi-\beta)(\pi-\gamma) \geq \left(\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}\right)^3 r^3 S$ тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

a, b, c -талууд, α, β, γ -өнцгүүд, r -хагас периметр, S -талбай

В1 (Д.Хашбаяр). Аравтын бичлэгийнх нь төгсгөлийн 1995 цифр нь

зөвхөн a, b -ээр бичигдэх 2^k -тоо олддог байх бүх (a, b) хосуудыг ол.
/Энд a -тэгш, b -сондгой цифр/

B2 (Ц.Лувсандорж). Тетраэдрийг багтаасан бөмбөрцгийн радиус R ,
түүнд багтсан бөмбөрцгийн радиус r бол хамгийн бага өндрийн урт $\frac{4R}{3}$
-ээс хэтрэхгүй, хамгийн их өндрийн урт $4r$ -ээс багагүй болохыг
батал.

B3 (Н.Одбаяр). Сейф нь $0, 1, 2, \dots, 9$ гэсэн цифр бүхий товчтой бөгөөд
сейф онгойх код нь 3 цифрээс бүрдэх бол хамгийн цөөндөө хэдэн удаа
товч дарахад сейф заавал онгойсон байх вэ?

БОДОЛТ

A1. Энэ бодлогын хувьд 2 талт шугамаар хийх байгуулалт гэдгийн дор
зөвхөн өгөгдсөн шулуунд параллель болон өгөгдсөн 2 цэгийг
дайруулан шулуун татахыг хэлж болно. Өөрөөр хэлбэл шугамын өргөн
 d -ээс их зайд орших 2 цэгийг дайруулан параллель 2 шулуун татах
үйлдэл зөвшөөрөгдөөгүй болно. Зохиогчийн 9 удаагийн үйлдлээр
өгөгдсөн шулуунд перпендикуляр шулуун татсаныг сийрүүлэе.

- өгөгдсөн g шулуун дээд талд түүнтэй параллель (1) шулуун
- $g, (1)$ шулууныг огтолсон (2), (3) параллель шулуунууд
- $g, (2)$ ба $(1), (3)$ цэгүүдийг дайрсан (4) шулуун
- (4) шулуун 2 гар талд түүнтэй параллель (5), (6) шулуунууд
- (6), g ба $(1), (3)$ цэгүүдийг дайруулан (7) шулуун
- (5), $g, (3)$ ба (6), $g, (1)$ цэгүүдийг дайруулан (8) шулуунуудыг
татвал (8), (4), (7) нь (2), g ба (6), $g, (1)$ цэгүүдийг дайрсан шулуунд
перпендикуляр тул (7), $g, (8)$ дайрсан (9) шулуун g шулуунд
перпендикуляр болно.

A2. $\{1, 2, \dots, 1995\}$ олонлогоо $A = \{1, 2, \dots, 44\}$, $B = \{45, 46, \dots, 1995\}$
олонлогуудад хуваая. Энэ хуваалтын хувьд $4 \cdot 45 > 44$, $45 \cdot 45 > 1995$ тул
 $n < 45$ болно. Одоо $n = 44$ байж болохыг харуулъя.
 $\{1, 2, \dots, 1995\} = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ ба $1 \in A$ болог. Хэрвээ тах $a_i > 44$ байдаг
 $a_i \in A$

бол A олонлог бодлогын нөхцлийг хангах нь тодорхой. Эсрэг
тохиолдолд $43 + n \in B$, $n = 1, 1995$ болоход хүрч B олонлогоос нийлбэр нь
1995 байх 44 тоо олдоход хүрнэ. Ийм бодлогын нөхцлийг хангах n
тоонуудын хамгийн их 44 болно.

A3. $S = \frac{abc}{4R}$, $p = 4R \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$ болохыг тус тус тооцвол

$$\frac{(\pi-\alpha)(\pi-\beta)(\pi-\gamma)}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} \geq \left(\frac{4\sqrt{3}}{9} \right)^3 \quad \text{тэнцэтгэл бишигд хүрнэ. 10, } \frac{\pi}{2} \text{ завсарт}$$

$$\text{гүдгэр } f(x) = \ln \frac{x}{\sin x} \quad \text{функцийн хувьд } \ln \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}{\sin(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)} \leq$$

$$\leq \alpha_1 \ln \frac{x_1}{\sin x_1} + \alpha_2 \ln \frac{x_2}{\sin x_2} + \alpha_3 \ln \frac{x_3}{\sin x_3}; \quad x_i \in (0, \frac{\pi}{2}), \alpha_i \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

$$\text{Иенсены тэнцэтгэл биш бичиж } \alpha_1 = \frac{1}{3}, \alpha_2 = \frac{1}{3}, \alpha_3 = \frac{1}{3}; \quad x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \frac{\pi}{2}$$

гэж авахад бидний батлах тэнцэтгэл биш гарна.

B1. Сүүлийн N орон нь a ба b байх 2-ын зэрэг олдохыг батлая. $N=1$ үед 2,3,8,6 болно. 2^k -ийн сүүлийн N цифр нь a, b байсан болог. Тэгвэл Эйлерийн теоремоор $2^{\varphi(5^N)} \equiv 1 \pmod{5^N}$ ба $2^{k+i\varphi(5^N)} \equiv 1 \pmod{5^N}$, $i=0,1,2,3,4$ тоонуудын сүүлийн N цифр давхцах ба сүүлээсээ $N+1$ -дүгээр цифрууд нь тэгш сондгой чанар нь ижил байна. Учир нь аль ч хоёрынх нь ялгавар $2 \cdot 10^N$ -д хуваагдана. Хэрэв сүүлээсээ $N+1$ -дүгээр цифрууд нь адил байх 2 тоо эдний дотор байвал ялгавар нь 10^{N+1} -д хуваагдах ба тэр нь мөн 5^{N+1} -д хуваагдана гэсэн үг. Тэр ялгавар нь $2^m(2^{\ell}-1)$ байсан болог. Энд $\ell < \varphi(5^{N+1})$ болох ба энэ нь дараах өгүүдбэрт харшлана. Хэрэв $2^N - 1 \equiv 0 \pmod{5^N}$ бол $n: \varphi(5^N)$ байна. $N=i$ үед илэрхий. $2^{\ell-1} \cdot 5^{N+1}$ байг. $\ell < \varphi(5^{N+1})$ гэвэл $\varphi(5^{N+1}) : \ell$ байх ёстой. $\ell = r(\varphi(5^N))$ ба $0 < r < \varphi(5^N)$ байвал $2^r - 1 \cdot 5^N$ болж индукцийн таамаглалд харшлана. Иймд $r=0$ болох ба $\ell = \varphi(5^N)$ болно. Индукцээр $2^{\varphi(5^{N-1})} \equiv p \cdot 5^{N-1} + 1$, $p \not\equiv 0 \pmod{5}$ болох ба $[2^{\varphi(5^{N-1})}]^5 \equiv 2 \cdot \varphi(5^N) \equiv (p \cdot 5^{N-1} + 1)^5 \equiv 5^{N+1} \cdot q + 5 \cdot p + 1$ тул $2^{\varphi(5^N)} - 1 \not\equiv 0 \pmod{5^{N+1}}$ болж $\ell = \varphi(5^N)$ гэсэнд харшлана. Иймд дээрх 5 тооны аль нэгнийх нь сүүлээсээ $N+1$ дэх цифр a эсвэл b байхад хүрнэ.

B2. Өгөгдсөн ABCD тетраэдриг багтаасан бөмбөрцгийн төв O , хүндийн төв $M; A, B, C, D$ оройнуудаас татсан медиануудыг харгалзан

$$m_A, m_B, m_C, m_D \quad \text{гэвэл } 4R^2 = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OD}^2 = (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA})^2 + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB})^2 + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC})^2 + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MD})^2 = 4\overrightarrow{OM}^2 + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) + \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + \overrightarrow{MD}^2 \quad \text{болно. Эндээс}$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 0 \quad \text{ба } \overrightarrow{MA} = \frac{3}{4} m_A, \quad \overrightarrow{MB} = \frac{3}{4} m_B, \quad \overrightarrow{MC} = \frac{3}{4} m_C, \quad \overrightarrow{MD} = \frac{3}{4} m_D; \quad \text{болохыг}$$

санавал $4R^2 = 4OM^2 + \frac{9}{16}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2)$ болж $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 \leq \frac{64}{9} R^2$
тэнцэтгэл бишид хүрэх ба тетраэдрийн өндөр бүр харгалзах
медиануудаасаа хэтрэхгүй тул $\min(h_A, h_B, h_C, h_D) \leq \frac{4}{3} R$ болно. Нөгөө

талаас $h_A + h_B + h_C + h_D = 3V \left(\frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B} + \frac{1}{S_C} + \frac{1}{S_D} \right) = \frac{3Vr}{r} \left(\frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B} + \frac{1}{S_C} + \frac{1}{S_D} \right) =$
 $= (S_A + S_B + S_C + S_D) \left(\frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B} + \frac{1}{S_C} + \frac{1}{S_D} \right) r \geq 16r$ тул $\max(h_{a_1}, h_{b_1}, h_c, h_{d_1}) \geq 4r$.
болно.

В3. Хэрвээ бид кодыг дарах тоолондоо өмнө үүссэн бүх боломжит
гурвалуудаас ялгаатай гурвал үүсгэж чадаж байвал хамгийн цөөндөө
 $2+10^3$ удаа кодыг дарахад сейф заавал онгойсон байх нь ойлгомжтой.
Иймд энэ нөхцлийг хангасан нэг байгуулалтыг зааж өгөхөд
хангалттай. 0011...889 1020...809 гэсэн 2 бүлэг цифрүүдийн
дараалал авч сүүлийн бүлэг цифрүүд дээр 9-ийн цифр гартал 11-ийг
нэмж түүнээс хойшхи гишүүдийг хаян гарсан дараалал дээр дээрх
үйдлийг давтан хийх замаар гарган авсан

0011...889 1020...809 2131...819... 76869 879 9 0.

гэсэн $1+10^2$ ширхэг тоонуудаас тогтсон дараалал сейфын код 2
цифрээс тогтсон үед манай бодлогын нөхцлийг хангана. Энэ
байгуулалтын аливаа а цифрийг аа, аа-г ааа-аар тус тус сольж,
гарсан дарааллын аххууб, х>у байх 6 дараалсан цифрүүдийг
аххухууб-ээр солиход дор хаяж 2 цифр нь тэнцүү байдаг бүх боломжит
гурвалууд байгуулалтанд тавьсан нөхцлийг хангаж байхаар олдоно.
Эцэст нь энэ дарааллын эхэнд цифр болгон нь ялгаатай байгуулалтын
нөхцлийг хангах гурвалуудыг залгахад бидний тавьсан нөхцлийг
хангах цифрүүдийн дараалал үүснэ.

ММО-31, Багш III даваа

Ц.Дамдорж

A1. (С.Батболд). $f: R \rightarrow R$ тасралтгүй бөгөөд $\forall x \in R$ -ийн хувьд
 $f(f(x)) = -\sin x$ байх бүх f функцийг ол.

A2. (Ж.Батболд). Гүдгэр ABCD дөрвөн өнцөгтөд багтсан тойрог
түүнийг M, N, K, L цэгүүдэд шүргэжээ. Тойргийн дурын S цэгээс ABCD
дөрвөн өнцөгтийн талууд буюу үргэлжлэл хүртэлх зайг харгалзан
 a_1, a_2, a_3, a_4 ; MNKL дөрвөн өнцөгтийн талууд буюу үргэлжлэл хүртэлх

зайг харгалзан b_1, b_2, b_3, b_4 гэвэл $a_1, a_2, a_3, a_4 = b_1, b_2, b_3, b_4$ болохыг батал.

АЗ. (Ц.Дашдорж). Натурал тооны олонлог

1. $a_1 \neq a_2$, $a_1, a_2 \in A$ бүрийн хувьд $a_1 \in a_2 \in B$

2. $b_1 \neq b_2$, $b_1, b_2 \in B$ бүрийн хувьд $b_1, b_2 \in A$ байхаар үл огтлолцох A, B хоёр ангид хувааж болох уу?

Б1. (Ц.Баясгалан). Хэрэв $f(x)$ ба $g(x)$ нь ижил зэргийн бүхэл коэффициенттай олон гишүүнтүүд бөгөөд дурын $n \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд $f(n)$ нь $g(n)$ -д хуваагддаг бол $f(x) = cg(x)$ байх c тоо олдохыг үзүүл.

Б2. (Ц.Баясгалан). Хэрэв P_n, q_n нь натурал тоонууд бөгөөд $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{q_n}$ нь иррационал тоо бол $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$ болохыг батал.

БЗ. (Ц.Дашдорж). k хэсэг чулуу байв. Эдний нийт чулууны тоо нь n^2 байв. Аль ч хэсгийг нь хоосон биш хоёр хэсэгт хуваагаад гарах $k+1$ хэсгийн дотор адил тооны чулуутай хоёр хэсэг заавал байдаг байсан бол k -ийн авч болох хамгийн бага утгыг ол.

БОДОЛТ

А1. $J = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ гээ. $\forall \alpha, \beta \in J$ $f(x) = f(\beta) \Rightarrow f(f(x)) = f(f(\beta)) \Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta \Rightarrow \alpha = \beta \in J$ f J -д монотон. Одоо $f(0) = 0$ болохыг баталъя.

I. $x = f(x)$ заавал шийдтэй. Эсрэгээс нь шийдгүй гээ. Тэгвэл $x - f(x)$ нь тасралтгүй функц тул

эсвэл $\forall x \in \mathbb{R} \ x > f(x)$

эсвэл $\forall x \in \mathbb{R} \ x < f(x)$ байна.

а) $x > f(x) \Rightarrow x > f(x) > f(f(x)) = -\sin x \Rightarrow \forall x, x > -\sin x$

б) $x < f(x) \Rightarrow x < f(x) < f(f(x)) = -\sin x \Rightarrow \forall x, x < -\sin x$ болж зөрчив. Иймд $x_0, f(x_0) = x_0 \Rightarrow -\sin x_0 = f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0 \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

II. $f(0) = a$ гээ. $f(a) = f(f(0)) = -\sin 0 = 0$

$-\sin a = f(f(a)) = f(0) = a \Rightarrow a = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

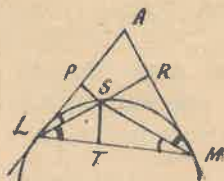
f тасралтгүй $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ f\left(\frac{1}{n}\right) \in J$

f J -д монотон өсдөг байг. $0 < \frac{1}{n} \Rightarrow f(0) = 0 < f\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow 0 < -\sin \frac{1}{n}$ зөрчил

f J -д монотон буурдаг үед $f(0) = 0 > f\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow 0 < -\sin \frac{1}{n}$ зөрчил

Иймд бодлогын нөхцөл хангах f функц оршиж байхгүй.

A2. S цэг LM нум дээр байг. S цэгээс AL, AM, LM шулуунуудад буулгасан перпендикулярууд харгалзан SP, SR, ST бол $ST^2 = SP \cdot SR$ байна гэсэн чанарыг эхлээд батлая.



Ижил нумд тулсан багтсан өнцгүүд $\angle PLS = \angle TMS$ ба $\angle SLT = \angle SMR$. Эндээс $\triangle PLS \sim \triangle TMS$ ба $\triangle SLT \sim \triangle SMR$ гэж гарна. Төсөөгийн харьцаа бичвэл $\frac{PS}{ST} = \frac{LS}{SM}$ ба $\frac{ST}{SR} = \frac{LS}{SM}$. Эндээс

$ST^2 = PS \cdot SR$ чанар батлагдав.

Одоо S цэгээс ABCD ба MNKL-ийн тал тус бүрд перпендикуляр буулгавал тэдгээрийн уртыг харгалзан a_1, a_2, a_3, a_4 ба b_1, b_2, b_3, b_4 гэе. Дээр баталсан ёсоор $a_1 a_2 = b_1^2$, $a_2 a_3 = b_2^2$, $a_3 a_4 = b_3^2$, $a_4 a_1 = b_4^2$ болох ба эдгээрийг гишүүнчлэн үржүүлбэл $a_1 a_2 a_3 a_4 = b_1 b_2 b_3 b_4$ гэж гарна. Бодолтын явцаас S цэг M, N, K, L-ийн аль нэгтэй давхцах буюу аль нум дээр байрласнаас хамаарахгүй үр дүн ижилхэн байх нь харагдаж байна.

A3. Эсрэгээс нь болно гэвэл $1 \notin B$ учир нь $1 \neq b \in B$ бүр A-д ороход хүрнэ. Иймд $1 \in A$ бодлогын нөхцөл ёсоор $\exists a \neq 1 \in A$ ба $A = \{1; a; a^2 - 1; (a-1)(a^2 - 2), \dots\}$

$a - 1 + 1 = a \in A \Rightarrow B = \{a + 1; a - 1; a^2 + a - 1; a^2 - 2, \dots\}$ байна.

Гэтэл $B \ni (a^2 - 1) + (a - 1)(a^2 - 2) = (a - 1)(a^2 + a - 1) \in A$ болж $A \cap B = \emptyset$ болж бодлогын нөхцөл хангах хуваалт байж болно гэдэгт харшлав.

$$B1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + \dots + a_0}{b_k n^k + \dots + b_0} = c \in \mathbb{R}$$

Иймд нөхцөл ёсоор $f(n) = cg(n)$ ($n > N$) болно. Эндээс $f(x) = cg(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) болох нь илт.

B2. Хэрэв $\lim p_n = \lim q_n = \infty$ биелэгдэхгүй бол $\{p_n\}$ болон $\{q_n\}$ дарааллын төгсгөлөг хязгаартай дэд дарааллууд $\{p_{n_k}\}, \{q_{n_k}\}$ олдох бөгөөд

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{n_k}}{q_{n_k}} = r \text{ нь иррационал учир зөрчилд орно.}$$

B3. $l_1, \dots, l_k$ чулуунууд бүхий k хэсэг байна гэвэл $l_1 + \dots + l_k = n^2$ болно. $k > n$ гэж батлая. Тодорхой болгоод $l_1 < \dots < l_k$ гэж үзье. $S \in \{1, \dots, k\}$

оүүрийн хувьд $l_s < 2S$ болохыг харуулъя. $l_s > 2S+1$ гэж үзье. l_s чулуутай хэсгийг (1) $(1, l_s-1), (2, l_s-2), \dots, (S, l_s-S)$ хосуудад хувааж болно. Энд бичигдсэн $2S$ тоонууд бүгд ялгаатай ба $l_1, \dots, l_{s-1}$ тоонуудын алийг нь ч агуулаагүй $(1, l_s-1)$ хос (1)-ээс олдono. (Дирихлен зарчим). Энэ нь бодлогын нөхцөлд зөрчинө. Иймд $l_s < 2S$ буюу $n^2 = 1 + \dots + 1 + 2 \cdot 1 + \dots + 2 \cdot k = k(k+1)$. Хэрэв $k < n-1$ бол $(n-1)n > k(k+1) > n^2$ зөрчил гарна. Иймээс $k > n$ боллоо. $k = n$ үед $n^2 = 1+3+5+\dots+(2n-1)$ гэсэн илэрхий жишээ бий.

БАГШ IV даваа

Ц.Батхүү

A1. (Ц.Батхүү). Аливаа натурал тоон дээр секунд тутам 554 ба 777 гэсэн хоёр тооны аль нэг нь нэмэгддэг байг. Тэгвэл

а) Хэсэг хугацааны дараа сүүлийн 3 цифр нь тэнцүү тоо үүсэхийг батал.

б) 1995 тооны хувьд хамгийн сайн ба муу тохиолдолд хэдэн секундын дараа ийм чанартай тоо үүсэх вэ?

A2. (Ш.Батхилиг). $\frac{1}{\pi} \arctg \frac{4}{3}$ -иррационал тоо болохыг батал.

A3. (Ц.Лувсандорж). Тетраэдрийн бүх ирмэгүүдийн нийлбэрийг L ,

бүтэн гадаргуугийн талбайг S гэе. $L > 2\sqrt{3}\sqrt{3} S$ гэж батал.

B1. (А.Түвшинтулга). n оройтой гүйцэд графын ирмэгүүдийг цагаан, хар, хөх, ягаан өнгөөр будав. Хэрэв орой бүрээс k -аас ихгүй цагаан ирмэг гарсан ба ядаж 1 цагаан биш өнгийн нил (бүх тал нь адил өнгийн) Δ олддог бол k хамгийн ихдээ хэд байх вэ?

B2. (Ц.Батхүү). $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ уламжлалтай функц. Тэгвэл $f'(x) < 1 + f^2(x)$ байх x цэг олдохыг батал.

B3. (Д.Пүрэвсүрэн). ΔABC -ийн AB тал дээр M цэг авчээ. CM ба BM хэрчмүүдийг харгалзан X ба Y цэгүүдэд шүргэсэн бөгөөд ΔABC -г багтаасан тойргийг дотоод шүргэсэн тойрог өгчээ. X, Y цэгүүдийг дайрсан шулуун дээр ΔABC -д багтсан тойргийн төв оршино гэж батал.

БОДОЛТ.

A1. $777 \cdot 2 = 1554$ буюу 554-г нэг удаа нэмэх нь 777-г хоёр удаа нэмэхтэй эквивалент.

$995 + k \cdot 777 \equiv \overline{aaa} \pmod{1000}$, $a = 0, 9$ байх k -уудыг олж.

$111(7k - a) \equiv 5(1000) \pmod{1000}$

$7k - a \equiv 45(1000)$, $7k \equiv a + 45(1000) \pmod{1000}$

$$(1) \quad k \equiv 143a - 45 \cdot 143(1000) \equiv 143a - 435(1000)$$

энд $a=0,9$ утгуудаа дараалан өгч k -г олбол $a=0,1,\dots,9$ үед харгалзан 565,708,851,994,137,280,423,566,709,852 утгуудыг авна. Нөгөө талаас (708,709); (565,566), (851,852) гэсэн дараалсан утгуудыг хэзээ ч зэрэг алгасч чадахгүй учир 565-3=562-аас илүүгүй үйлдэл хийхэд 000 эсвэл 777-оор төгссөн тоо гарна. Иймд үйлдлийн хамгийн цөөн нь $137=68 \cdot 2 + 1$ -ээс $68+1=69$, олон нь 562 гэж гарч байна. Тухайлбал 69 үйлдлийн дараа 444-ээр төгссөн 562 үйлдлийн дараа 000 юмуу 777-аар төгссөн тоо гарч чадна.

а) (1)-д $a=0$ ба 7, 1 ба 8, 3 ба 9 үед $143a \pmod{1000}$ тоонууд нь дараалсан тоонууд байх тул 1995-ын оронд өөр ямарч тоо авсан а) хүчинтэй болох нь мөрдөн гарна.

А2. Эсрэгээс нь: $\frac{1}{\pi} \arctg \frac{4}{3} = \frac{m}{n}$ ($m, n=1$ байх m, n олддог гэв. $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$)

$\arctg \frac{4}{3} = \frac{m\pi}{n} = \varphi$ гэж тэмдэглэв. $\tg \varphi = \frac{4}{3} \rightarrow \sin \varphi = \pm \frac{4}{5} \quad \cos \varphi = \pm \frac{3}{5}$ n -сондгой

бол $\sin n\varphi = \sin m\pi = 0$ -ийг $\sin n\varphi = \cos \varphi \cdot A + \sin^n \varphi$ (Муаврын томъёоноос үүнийг хялбар гаргаж болно)-д орлуулбал $0 = \sin n\varphi \equiv (\pm 4)^n \pmod{3}$ болж зөрчил үүсэв. n -тэгш бол $(m, 2)=1$, $\cos \frac{n\varphi}{2} = \cos \frac{m\pi}{2} = 0$ -ийг

$\cos \frac{n\varphi}{2} = \cos \left(\frac{n}{2} \right) \varphi + \sin \varphi \cdot B$ -д орлуулбал $0 = \cos \frac{n\varphi}{2} \equiv (\pm 3)^{\left(\frac{n}{2} \right)} \pmod{4}$ болж зөрчил үүсэв.

А3. n өнцөгтийн периметр P , талбай нь F бол изопериметрийн тухай алдарт бодлогоос $L^2 > 4n \cdot F \cdot \tg \frac{\pi}{n}$ тэнцэтгэл биш мөрдөж гарах билээ. (Л.Ф.Том 28-р хуудас). Одоо тетраэдрийн талсуудын хувьд энэхүү тэнцэтгэл бишийг бичиж, тэдгээрийг харгалзан нэмэхэд гарах нийлбэрийг сонирхвол:

$$2L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 > \sqrt{12 \cdot \sqrt{3}} \left(\sqrt{F_1} + \sqrt{F_2} + \sqrt{F_3} + \sqrt{F_4} \right) \text{ болно.}$$

$F_1 = F_2 = F_3 = F_4$ буюу тэнцүү талст тетраэдрийн хувьд

$$\sqrt{F_1} + \sqrt{F_2} + \sqrt{F_3} + \sqrt{F_4} = 4 \cdot \sqrt{F_1} = 2 \cdot \sqrt{F_1 + F_2 + F_3 + F_4} = 2 \cdot \sqrt{F} \text{ болохыг анхаарвал}$$

$L > 2 \sqrt{3 \sqrt{3} F}$ болж буй нь харагдлаа. Ерөнхий тохиолдолд тэнцэтгэл бишийг баталж чадаагүй байна.

Б1. Олох тоог $P(n)$ ба бүх ирмэг нь ижил өнгийн байх гурвалжныг нил

гурвалжин гэе. $0 < q < 16$ бол $p-1 < P(16p+q) < p$ гэж батлая.

а). $P(16p+q) < p$ гэж батлая.

$P(16p+q) < p(16p+16)$ учир $P(16p) < p-1$ болохыг баталбал хангалттай Эсрэгээс нь $P(16p) > p-1$ гэж үзье. Тэгвэл $16p$ оройтой г.г (гүйцэд граф)-ын хувьд $k=p-1$ нь бодлогын нөхцлийг хангах ёстой. $A_1, A_2, \dots, A_{16}$ оройтой г.г-ын ирмэгүүдийг хөх, улаан ягаан гурван өнгөөр нил гурвалжин олдохгүй байхаар будаж болно. Энэхүү будалтыг ϕ гэе. (Энэ чанар нь Рамсейн теоремоос мөрдөнө). Эдгээр орой тус бүрийг p оройтой бүх ирмэг нь цагаан байх г.г гэж үзье. Тэгвэл үүсэх $16p$ оройтой г.г нь ϕ будалтаар цагаанаас ялгаатай нил гурвалжин агуулахгүй ба энэ нь $k=p-1$ нь бодлогын нөхцлийг хангана гэдэгт зөрчинө. Иймд $P(16p) < p-1$.

б) $P(16p+q) > p-1$ гэж батлая. Энэ нь $P(16p+q) > P(16p+1)$ учир $P(16p+1) > p-1$ болохыг тогтоохтой ижил. Ө.х $16p+1$ оройтой г.г-ын хувьд $k=p-1$ нь бодлогын нөхцлийг хангана гэвэл хүрэлцээтэй.

$B_0, B_1, \dots, B_{16p}$ оройтой г.г авч үзье. B_0 оройгоос цагаан ирмэг хамгийн ихдээ $p-1$ гарах учир дор хаяж $5p+1$ хөх (эсвэл улаан, эсвэл ягаан) ирмэг гарна. Эдгээр ирмэгүүдийн төгсгөлийг $B_1, B_2, \dots, B_{5p+1}$ гэж үзье. Хэрэв хоёр нь хөх ирмэгээр холбогдвол хөх нил гурвалжин олдоно. Аль ч хоёр нь хөх ирмэгээр холбогдоогүй байг. Тэгвэл B_1 оройгоос мөн дор хаяж $2p+1$ улаан (эсвэл ягаан) ирмэг гарна. Улаан ирмэгүүдийн төгсгөлийг $B_2, \dots, B_{2p+2}$ гэвэл эдгээр нь еер хоорондоо зөвхөн цагаан, ягаан ирмэгээр холбогдоно (Үгүй бол улаан нил гурвалжин олдоно). B_2 оройгоос дор хаяж $p+1$ ягаан ирмэг гарах ба төгсгөлүүдийг нь $B_3, \dots, B_{p+3}$ гэе. Тэгвэл B_3 оройгоос ядаж нэг ягаан ирмэг гарна. Түүнийг $B_3 B_k$ ($3 < k < p+3$) гэвэл $B_2 B_3 B_k$ ягаан нил гурвалжин болно. Иймд аль ч тохиолдолд цагаан биш дан гурвалжин үргэлж олдох боллоо. Ө.х $P(16p+1) > p-1$ болох нь батлагдана. Эндээс

$$P(n) = \left\lceil \frac{n-1}{16} \right\rceil - 1 \text{ болохыг төвөггүй харж болно.}$$

Б2. Эсрэгээс нь $(-2, 2)$ завсрын аливаа x цэгийн хувьд $f'(x) > 1 + f^2(x)$ гэвэл $F(x)$ монотон функц болоход хүрч $g: \mathbb{R} \rightarrow (-2, 2)$ гэсэн урвуутай. Урвуу функцийн уламжлалын тухай теорем ёсоор

$$g'(y) = \frac{1}{y'(x)} < \frac{1}{1+y^2} = (\arctg^* y) \quad (*)$$

болох ба $g, \arctg$ функцуудын хувьд Кошийн теорем ёсоор аливаа

$u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ тоонуудын хувьд

$$\frac{g(y_1) - g(y_2)}{\operatorname{arctg} y_1 - \operatorname{arctg} y_2} = \frac{g'(\xi)}{(\operatorname{arctg} \xi)'}$$

(байх $\xi \in [y_1, y_2]$ цэг олдоно. Гэтэл

(*) тэнцэлбш ёсоор $|g(y_1) - g(y_2)| < |\operatorname{arctg} y_1 - \operatorname{arctg} y_2|$ буюу $4 < \pi$ болоход хүрч харшлалд хүрв.

БЗ. ХУ-ийг дайрсан шулуунууд CS_1 биссектрис тэй огтлолцсон цэгийг T гэе. $\angle MSB = t$ болог. Кезийн теоремийг

гэе. $\angle MSB = t$ болог. Кезийн теоремийг
 A, B, C цэг, дотоод шүргэсэн тойргийн
хувьд хэрэглэвэл $AY \cdot a = CX \cdot c + BY \cdot b$
болно. $AY = c - BY$ тавибал

$$a(c - BY) = CX \cdot c + BY \cdot b$$

$$CX \cdot c = ac - (a+b) \cdot BY \text{ гэж гарна.}$$

Энд $BY = BM - MY = BM - MX = BM - CM + CX$ учир

$$CX \cdot c = ac - (a+b)(BM - CM + CX)$$

$$GX(a+b+c) = ac + (a+b) \cdot (CM-BM) \text{ БОЛНО.}$$

$$CX = \frac{ac}{a+b+c} + \frac{(a+b)}{a+b+c} \cdot (CM - BM)$$

ΔMSB -д синусын теорем хэрэглэвэл:

$$CM = \frac{a}{\sin(\beta+t)} \cdot \sin \beta \quad BM = \frac{a}{\sin(\beta+t)} \sin t \text{ болно. Эндээс}$$

$$c_x = \frac{ac}{a+b+c} + \frac{a(a+b)}{a+b+c} \left(\frac{\sin \beta}{\sin(\beta+t)} - \frac{\sin t}{\sin(\beta+t)} \right) = \frac{a}{a+b+c} \left(c + \frac{(a+b)(\sin \beta - \sin t)}{\sin(\beta+t)} \right)$$

$$c=2R\sin\gamma=2R\sin(\alpha+\beta), a=2R\sin\alpha, b=2R\sin\beta$$
 —Г орлуулья.

$$CX = \frac{a}{a+b+c} \cdot \left\{ 2Rs \sin(\alpha+\beta) + \frac{(\sin\alpha + \sin\beta)}{\sin(\beta+t)} 2s \sin\left(\frac{\beta-t}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta+t}{2}\right) \right\}$$

$$CX = \frac{2aR}{a+b+c} \cdot \left(2\sin\frac{(\alpha+\beta)}{2}\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2} + \frac{2\sin\frac{(\alpha+\beta)}{2}\cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}}{2\sin\frac{(\beta+t)}{2}\cos\frac{(\beta+t)}{2}} 2\sin\frac{(\beta-t)}{2}\cos\frac{(\beta+t)}{2} \right) =$$

$$= \frac{2aR}{a+b+c} \sin\frac{(\alpha+\beta)}{2} \frac{\left(2\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}\sin\frac{(\beta+t)}{2} + 2\cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}\sin\frac{(\beta-t)}{2} \right)}{\sin\frac{(\beta+t)}{2}}$$

$$\frac{a}{a+b+c} \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma} = \frac{\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{(\alpha+\beta)}{2}\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}}$$

$$= \frac{\sin\alpha}{2\sin\frac{(\alpha+\beta)}{2}\left(\cos\frac{(\alpha-\beta)}{2} + \cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}\right)} = \frac{\sin\alpha}{4\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} \quad \text{болно.}$$

$$2\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}\sin\frac{(\beta+t)}{2} + 2\cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}\sin\frac{(\beta-t)}{2} = \sin\left(\beta + \frac{\alpha+t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t-\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{t+\alpha}{2}\right) + \sin\left(\beta - \frac{\alpha+t}{2}\right) = 2\sin\beta\cos\frac{\alpha+t}{2}$$

$$CX = \frac{2R\sin\alpha}{4\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \frac{2\sin\beta\cos\frac{\alpha+t}{2}}{\sin\frac{(\beta+t)}{2}} = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} \cdot \frac{\cos\frac{\alpha+t}{2}}{\sin\frac{(\beta+t)}{2}}$$

$$\angle CTX - \gamma \text{ авч үзье. } \angle TXC = \frac{\beta+t}{2} \quad \angle TCX = \frac{\gamma}{2} - t \text{ учир}$$

$$\angle CTX = 180^\circ - \left(\frac{\beta+t}{2} + \frac{\gamma}{2} - t \right) = 90^\circ + \frac{\alpha+t}{2} \quad \text{Синусын теорем ёсоор}$$

$$\frac{CT}{\sin\frac{\beta+t}{2}} = \frac{CX}{\sin\left(90^\circ + \frac{\alpha+t}{2}\right)} \quad CT = \frac{CX}{\cos\frac{(\alpha+t)}{2}} \sin\frac{\beta+t}{2} \text{ учир } CT = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

$$I - \text{байгцсан тойргийн төв гэвэл } CT = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} \text{ учир } T-I \text{ оолж батлагдлав.}$$

Энэ удаагийн багийн олимпиадад комисс, МУИС-ийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай анги, багш нар, Архангай аймгийн баг, сурагчдын баг, мөн УБИС-ийн төгсөгчдийн "Тэгш хэм" багууд оролцлоо. Ингээд багуудын бодлогыг танилцуулъя.

1. МУИС (1,2,4,5,7,9,10,12,14,16,17,19,...)

Дарааллын нэгдүгээр гишүүн 1 ба дараахь хоёр гишүүн нь дээд дараалсан хоёр тэгш тоо, дараахь гурван гишүүн нь удаахь дараалсан гурван сондгой тоо, г.м өгөгджээ. Дарааллын ерөнхий гишүүний томъёог бич.

БОДОЛТ. $S_n = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ дарааллын гишүүний дугаар $k=S_n$ болох үед $a_{k+1} = a_k + 1$ болох ба бусад үед $a_{k+1} = a_k + 2$ байна.

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2 - \varepsilon_n \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + 2 - \varepsilon_{n-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\text{үүнд } \varepsilon_i = \begin{cases} 1, & n-1 = \frac{k(k+1)}{2} \\ 0, & n-1 \neq \frac{k(k+1)}{2} \end{cases}$$

$$a_2 = a_1 + 2 - \varepsilon_2$$

$$a_n = a_1 + 2(n-1) - \sum_{i=2}^n \varepsilon_i$$

$$\sum_{i=2}^n \varepsilon_i \text{ -ийг сонирхъя.}$$

$\sum_{i=2}^n \varepsilon_i$ нь $n > \frac{k(k+1)}{2}$ чанартай хамгийн их бүхэл k тоотой тэнцүү. $k > 0$

үед $\frac{k(k+1)}{2} (1)$ эрс өснө. $n-1 = \frac{k(k+1)}{2}, k^2 + k - 2(n-1) = 0 \Rightarrow$

$k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{8n-7}}{2}, k$ бүхэл ба (1) эрс өснө гэдгээс $k = \left\lfloor \frac{-1 + \sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor$ болно.

$$\text{Иймд } a_n = 1 + 2(n-1) - \left\lfloor \frac{-1 + \sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor$$

2. "Комисс" (Отгоносыр МУИС-ийн оюутин)

Хавтгайд ABC гурвалжин, түүний дотор O цэг өгөв. $P(P, Q, R) = (PQ \cap RO, QR \cap PO, RP \cap QO)$, $F^n(A, B, C) = (A_n, B_n, C_n)$ гэв. Тэгвэл

$$3 \left(\frac{1}{AA_3} + \frac{1}{BB_3} + \frac{1}{CC_3} \right) = 2 \left(\frac{1}{AO} + \frac{1}{BO} + \frac{1}{CO} \right) + \left(\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} + \frac{1}{CC_1} \right) \text{ батал.}$$

БОДОЛТ: ОХУ тэгш өнцөгт координатын систем дээр $P_n(x, y) + P_{n-1}(x, y) + \dots + P_1(x, y) + P_0 = 0$ тэгшитгэлийг хангах ү муруй авч үзье. Үүнд $P_k(x, y)$ нь k зэрэгтэй гишүүдийн нийлбэр.

$$P_1(x, y) = Ax + By \text{ байг.}$$

Лемма: 0 цэгийг дайрсан; γ муруйг $A_1, \dots, A_n$ цэгүүдээр огтлох дурын шулууны хувьд 0 цэгээс $OA_1, \dots, OA_n$ хэрчмүүдийн уртуудын (0 цэгийн аль талд оршихоос хамаарч эерэг, сөрөг тэмдэг авна.) гармоник дундажтай тэнцүү зайд орших уг шулуун дээр орших цэгийг авч үзье. Шулуун бүрийн хувьд олдох эдгээр цэгүүд нэг шулуун дээр орших ба уг шулууныг 0 цэгийн поляр шулуун гэнэ.

Леммын баталгаа: 0 цэгийг дайрсан дурын шулууны параметр тэгшитгэлийг

$$\varepsilon: \begin{cases} x = t \sin \varphi \\ y = t \cos \varphi \end{cases} \text{ гэж бичье.}$$

(Үүнд φ тогтмол ба ε шулуун OX -тэй үүсгэх өнцөг байна.)

$$0 = t^n P_n(\cos \varphi; \sin \varphi) + t^{n-1} P_{n-1}(\cos \varphi; \sin \varphi) + \dots + t P_1(\sin \varphi; \cos \varphi) + P_0$$

тэгшитгэлийг γ муруй ба ε шулууны огтлолын цэгүүд хангана.

$A_i = (t_i \cos \varphi, t_i \sin \varphi) \quad i=1, n$ байг. Тэгвэл $|OA_i| = t_i$ болно. $i=1, n$. A_i нь 0 цэгийн аль талд байгаагаас хамаарч эерэг сөрөг тэмдгийг авъя.

$$\frac{n}{OQ} = \frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2} + \dots + \frac{1}{OA_n} = \frac{1}{t_1} + \dots + \frac{1}{t_n} \stackrel{\text{Виет th}}{=} - \frac{P_1(\cos \varphi; \sin \varphi)}{P_0}$$

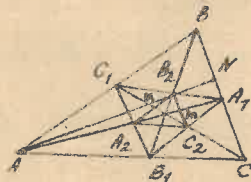
$$OQ = - \frac{P_0 n}{P_1(\cos \varphi; \sin \varphi)}. \quad Q \text{ нь } \varepsilon \text{ шулуун дээр орших цэг учир координат нь}$$

$$Q \left(\frac{-nP \cos \varphi}{P_1(\cos \varphi; \sin \varphi)}, \frac{-nP \sin \varphi}{P_1(\cos \varphi; \sin \varphi)} \right) \text{ ба энэ нь}$$

$$\frac{P_1(x, y)}{n} + P_0 = \frac{Ax}{n} + \frac{By}{n} + P_0 = 0 \quad (1)$$

тэгшитгэлийг хангахыг харж болно. Иймд ямар ч ε шулууны хувьд олдох Q цэг (1) шулуун дээр оршино. Ийнхүү лемма батлагдлаа.

$AB_2 \cap CC_1 = M$, $AB_2 \cap BC = N$ гээ. $ABCO$ дөрвөн өнцөгтийн хувьд $\frac{2}{AB_2} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}$ байна.



$$\frac{3}{AB_2} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{AB_2} \text{ буюу } B_2 \text{ цэг}$$

нь BC , BO, CO шулуунуудаас тогтох куб муруйн хувьд (гурван

шулуун тэгшитгэлүүдийн үржвэр
куб муруй тодорхойлно). А цэгийн
поляр шулуун дээр оршино. Мөн
адилаар C_2 орших нь гарна. Ө.х.

B_2C_2 нь А цэгийн поляр шулуун болно. Поляр шулуун тодорхойлол-
тоос АО шулуунд A_3 цэг поляр цэг болох ба

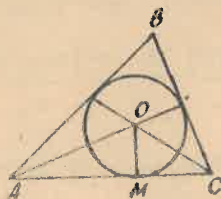
$$\frac{3}{AA_3} = \frac{1}{AO} + \frac{1}{AO} + \frac{1}{AA_1} \text{ гэж гарна. Бусад оройн хувьд аналог}$$

тэнцэтгэлүүдийг бичээд харгалзан нэмбэл бодлого бодогдоно. Энэ
бодлогыг масс ашиглан бодож болох боловч илүү нүсэр тооцоотой.

3. "Тэгш хэм" баг

r, R, p нь өгөгдсөн гурвалжны багтсан, багтаасан тойргийн
радиусууд, мөн хагас периметр $(r^2 + 4Rr + p^2)^3 > 432R^2r^2p^2$ тэнцэтгэл
бишийг батал.

БОДОЛТ



$$BC=a \quad AM=p-a \quad \alpha = \widehat{BAC} \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a}$$

$$a = 2R \sin \alpha = 2R \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = 4R \frac{\frac{r}{p-a}}{1 + \frac{r^2}{(p-a)^2}}$$

$$= 4R \frac{r(p-a)}{(p-a)^2 + r^2}$$

$$a(p-a)^2 + ar^2 = 4Rr(p-a) \Rightarrow a^3 - 2pa^2 + (r^2 + p^2 + 4Rr)a - 4Rrp = 0$$

$$x^3 - 2px^2 + (r^2 + 4Rr + p^2)x - 4Rrp = 0 \quad (1)$$

тэгшитгэлийн шийд а болно. Үүнтэй адилаар b ба c нь (1)

тэгшитгэлийн шийд болно. Виетийн теорем ёсоор $ab + bc + ca = r^2 + 4Rr + p^2$

$$abc = 4Rrp \quad (ab + bc + ca)^3 > 3^3 a^2 b^2 c^2 \Rightarrow$$

$$(r^2 + 4Rr + p^2)^3 > 3^3 (4Rrp)^2 = 432R^2r^2p^2$$

4. "Сурагчид"

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ нийлбэр дурын бүхэл зэрэг n-ийн хувьд

$\frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right)$ ба $\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \left\{1 + \frac{1}{2n+1}\right\}^8$ хоёрын хооронд оршихыг
батал.

БОДОЛТ

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} > 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} +$$

$$+ \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} = \frac{3n+2}{2(n+1)} \cdot \frac{2n}{2n} = \frac{3 \left(2n + \frac{4}{3} \right) 2n}{(2n+2)2n \cdot 2} \xrightarrow{(2n+2)2n < (2n+1)^2}$$

$$\frac{3 \cdot \frac{(2n+4)^2}{3}}{2(2n+2)2n} > \frac{3 \cdot 2n \cdot (2n-1)}{2(2n+1)^2} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \left(1 - \frac{2}{2n+1} \right)$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} = \frac{2n-1}{n}$$

$$\frac{8}{3} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \left(1 + \frac{1}{2n+1} \right) > \frac{8}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{5} \right) (1+0) = \frac{8 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{32}{15} > 2 - \frac{1}{n}$$

$$n \geq 2 \text{ үед } 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{8}{3} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \left(1 + \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$n=1 \text{ үед } 1 < \frac{8}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} - \frac{1}{27} = \frac{71}{27}$$

5. "Багш нар"

121 зоосыг 5 удаагийн хэмжилтээр 1 хуурамч зоосыг олж болох уу? (Хэмжилтийг зөвхөн хүнд хөнгөн эсэхийг харьцуулж болох 2 тавагтай жигнүүрээр хийнэ.)

Бодолт

121 зоосыг 40, 40, 41 гэж 3 хуваая. 40, 40-г жигнэе.

а. (I). $40_I > 40_{II}$ байг. Үлдсэн 41 жинхэнэ зооснууд байна.

$13_I + 27_I > 13_{II} + 27_{II}$ гээд II-аас 27-г аваад жинхэнэ 27-ыг I-т хийж 27_I -ыг II-т тавъя.

II. $13_I + 27_0; 13_{II} + 27_I$ -г жишихэд хэрвээ тэнцүү бол 27_{II} -т хөнгөн хуурамч зоос байна. Хэрвээ $<$ бол 27_I -т хүнд хуурамч зоос байна гэсэн үг. 27 зоосон дотроос хүнд хөнгөн нь мэдэгдэх хуурамч зоосыг 3 хэмжилтээр олж болно гэдгийг хялбар харж болно. (3 тэнцүү хуваах замаар)

$13_I + 27_0 > 13_{II} + 27_I$ байг. Энэ үед $27_I, 27_{II}$ бүгд жинхэнэ зоос болно. $\rightarrow 13_I > 13_{II}$ болно. $4_I + 9_I > 4_{II} + 9_{II}$ гээ. Мөн дээрхийн адилаар 4_{II} -ыг авч 4_0 -ыг I-т, 4_I -ийг II-т тавъя.

III. Мөн дээрхийн адил 4_{1+9_0} 4_{11+9_1} жишихэд

Хэрвээ тэнцүү бол 9_{11} хөнгөн хуурамч зоосыг агуулна.

Хэрвээ $<$ бол 9_{11} хүнд хуурамч зоосыг агуулна. Хүнд хөнгөн мэдэгдэх хуурамч зоосыг 9 зоосноос 2 хэмжилтээр олж болно. Иймд $4_{1+9_0} > 4_{11+9_1}$ байг. $\rightarrow 9_{1+9_1}$ бүгд жинхэнэ болно. $4_{1+9_0} > 4_{11+9_1}$ байна.

$4_{1+9_0} = 1_{1+3_1} > 4_{11+9_1} = 1_{11+3_{11}}$ гээд 3_{1-} II-т 3_{0-} I-т, 3_{11-} II-г бүр авъя.

IV. 1_{1+3_0} 1_{11+3_1} болно. Энэ хоёрыг жигнээ.

Хэрвээ тэнцүү бол 3_{11} хуурамч хөнгөн зоостой.

Хэрвээ $<$ бол 3_{11} хүнд хуурамч зоостой. Хүнд хөнгөн нь мэдэгдэж байгаа 1_{11} хуурамч зоосыг 3 зоосноос 1 хэмжилтээр олно.

V. $1_{1+3_0} > 1_{11+3_1}$ бол үлдсэн жинхэнэ зоосноос 1_{1-} авч 1_{0+} 1_{1-} -г жишье.

хэрвээ $=$ бол 1_{11} хуурамч

хэрвээ $<$ бол 1_{11} хуурамч

б). I. $40_{1+40_{11}}$ бол үлдсэн 41 зоосонд хуурамч зоос байна. 27-г авъя. Үүнийг 27_{0+} жинхэнэ зоостой жигнээ.

II. 27_{111+} 27_{0+} хэрвээ тэнцүү биш бол хүнд хөнгөн нь мэдэгдэх хуурамч зоосыг 27_{111+} -аас 3 хэмжиж олно. Хэрвээ $=$ бол $41_{111+} - 27_{111+} = 14_{111+}$ -аас 9_{111+} -ыг авч 9_{0+} жинхэнэ зоостой жигнээ.

III. 9_{111+} 9_{0+} Хэрвээ $=$ бол хүнд хөнгөн нь мэдэгдэх хуурамч 9_{111+} байгаа ба үүнийг 2 жигнээд олж чадна. Хэрвээ $=$ бол $14_{111+} - 9_{111+} = 5_{111+}$ -аас 3_{111+} -ыг авч 3_{0+} жинхэнэ зоостой жишье.

IV. 3_{111+} 3_{0+} Хэрвээ $=$ бол 3_{111+} -ыг хүнд хөнгөн нь мэдэгдэх хуурамч зоос байх ба үүнийг нэг хэмжээнд олно. Хэрвээ $=$ бол

$5_{111+} - 3_{111+} = 2_{111+}$ -аас 1_{111+} -ыг авч 1_{0+} -тэй жишье.

V. 1_{0+} 1_{111+} Хэрвээ $=$ бол 1_{111+} хуурамч хэрэв $=$ бол үлдсэн нэг хуурамч болно.

МОНГОЛЫН ОЮУТНЫ МАТЕМАТИКИЙН IY ОЛИМПИАД

Ц.Дашдорж

а.ЭЧНЭЭ ДАВААНЫ БОДЛОГУУД

1.а) (Ц.Баясгалан) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ ($\alpha_n > 0$) нийлдэг бол $\sum_{n=2}^{\infty} A_n \left\{ A_n = \sqrt{\sum_{k=n-1}^{\infty} \alpha_k} - \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k} \right\}$

цуваа нийлэх бөгөөд $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{A_n} = 0$ болно.

1.б) (Ц.Баясгалан) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ ($\alpha_n > 0$) сарнидаг бол $\sum_{n=2}^{\infty} A_n \left\{ A_n = \sqrt{\sum_{k=1}^n \alpha_k} - \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k} \right\}$

цуваа сарних бөгөөд $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{\alpha_n} = 0$ болно.

2. (Ц.Баясгалан). f функц $[a, b]$ хэрчим дээр тасралтгүй дифференциалчлагдах бөгөөд $f(a)=f(b)=0$ ба $\int_a^b f^2(x) dx = 1$ бол дараах чанарууд биелэгдэнэ гэдгийг батал.

$$\int_a^b x f(x) f'(x) dx = -\frac{1}{2}; \quad \int_a^b [f'(x)]^2 dx \int_a^b x^2 f^2(x) dx > \frac{1}{4};$$

3. (С.Төмөрбат). H нь R цагирагийн идеал ба $f: H \rightarrow S$ гомоморфизмын хувьд $f(H)$ нь нэгжтэй цагираг бол R нь максималь идеалтай гэж батал.

4. (Ц.Дашдорж). $Z[1]/I\langle n \rangle$ талбар $\leftrightarrow n$ анхны тоо ба $n^2 = a^2 + b^2$, $a, b \in Z$ гэж батал (Энд $I\langle n \rangle = nZ[1]$ буюу n -ээр төрөгдсөн идеал).

5. (Ц.Дашдорж) $K[x, y]$ олон гишүүнтийн цагирагт $(xy = yx)$ байх хувьсагчид)

а) K талбар үед

б) $K = Z$ үед бүх максималь идеалыг ол.

6. (Ц.Дашдорж). Бодит тоон аддитив бүлэг $(R, +)$ -ийг S дээрх вектор огторгуй болгож болох уу?

9. (Ц.Дашдорж). $Z[x_i, y_i]$ $i=1, 3$ олон гишүүнтийн цагирагт

$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = (u^2 + v^2 + w^2)$ $u, v, w \in Z[x_i, y_i]$ хэлбэрийн харьцаа биелэгдэхгүй гэдгийг батал.

10. (Д.Пүрэвсүрэн). Ирмэгийн урт нь a, b, c -тэй тэнцүү байх тэгш өнцөгт параллелипипедэд хамгийн том тойрог багтаа.

11. (Д.Пүрэвсүрэн). Зөв дөрвөлжин пирамидэд хамгийн том тойрог багтаа.

12. (Ц.Далайжамц, Д.Пүрэвсүрэн). Хавтгайд аль ч гурав нь уртаараа ялгаатай талууд бүхий гурвалжны орой болдог тийм 6 цэг өгөгдсөн. Аль нэг гурвалжны хамгийн богино тал өөр нэг гурвалжны хамгийн урт тал болохыг батал.

13. (Ц.Далайжамц, Д.Пүрэвсүрэн). Гурвалжны багтаасан ба түүнд багтсан тойргуудын төвүүд гурвалжны аль нэг талын хувьд тэгш

хэмтэй бол түүний өнцгүүдийг ол.

14. (Ц.Далайжамц, Д.Пүрэвсүрэн). Тойрогт багтсан гурвалжны биссектрис, медиан, өндрийн үргэлжлэл тойрогтой огтлолцоход үүссэн цэгүүдээр энэ гурвалжныг байгуул.

15. (Ц.Далайжамц, Д.Пүрэвсүрэн). Х цэг ABC гурвалжны BC тал дээр оршдог бөгөөд X' нь AX шулуун гурвалжныг багтаасан тойрогтой огтлолцсон цэг бол XX' нь боломжит тийм хэрчмүүдээс хамгийн урт нь байхад AX хэрчмийн урт A оройн медиан ба биссектрисийн уртын хооронд оршихыг үзүүл.

16. (Ц.Далайжамц, Д.Пүрэвсүрэн). O цэгийг дайрсан e нэгж чиглүүлэгч вектортой тэнхлэгийг тойрч φ өнцгөөр эргүүлэх хувиргалтын томъёог огторгуйд бич.

17. (Ц.Далайжамц, Д.Пүрэвсүрэн). Геодези гурвалжны өнцгүүдийн нийлбэр 1). O муруйлттай гадаргуу дээр π-тэй тэнцүү, 2). эерэг муруйлттай гадаргуу дээр π-ээс их, 3) сөрөг муруйлттай гадаргуу дээр π-ээс бага болохыг тус тус батал.

БОДОЛТ

1. Бид зөвхөн а)-ийн бодолтыг хийе. б)-ийн бодолт яг адилаар хийгдэнэ. Хэрэв $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ бол $\sum_{n=2}^{\infty} A_n = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{S - (a_1 + \dots + a_{n-2})} \right) =$

$$\sqrt{(S - (a_1 + \dots + a_{n-1}))} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^m \left(\sqrt{S - S_{n-2}} - \sqrt{S - S_{n-1}} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sqrt{S - a_1} - \sqrt{S - S_{m-1}} \right) = \sqrt{S - a_1};$$

Одоо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{A_n} = 0$ гэдэг нь $\frac{a_n}{\sqrt{a_n + \dots}} < 1$ -ээс хялбар харагдана.

$$2. 1 = \int_a^b f^2(x) dx = x f^2(x) \Big|_a^b - 2 \int_a^b x f(x) f'(x) dx = -2 \int_a^b x f(x) f'(x) dx$$

Компийн тэнцэтгэл биш ёсоор

$$\frac{1}{4} \left(\int_a^b x f(x) f'(x) dx \right)^2 < \int_a^b x^2 f^2(x) dx \cdot \int_a^b |f'(x)|^2 dx \text{ болох ба хэрэв өмнөх}$$

тэнцэтгэл биш тэнцэлдээ хүрвэл $\delta x f(x) = f'(x)$ ($x \in (a, b)$) байх тогтмол тоо $\delta \neq 0$ олдоно. Иймд энэ дифференциал тэгшитгэлийн бүх шийд нь

$$f(x) = ce^{\frac{\delta}{2}x^2} \quad (x \in [a, b])$$

хэлбэртэй байх учир $f(a)=f(b)=0$ ёсоор $f(x)=0$ ($x \in [a, b]$) болох ба энэ нь зөрчилд хүргэнэ.

3. $f: H \rightarrow S$ өгсөн гомморфизм байг. $f(e)=1$, $e \in H$ ба $1 \in S$ нь S -ийн нэгж. Одоо R -ийг H -д буулгасан буулгалтыг $R \ni x$ хувьд $\varphi(x) = exe$ гэж тодорхойлъя. Тэгвэл $f(\varphi) = f \circ \varphi: R \rightarrow S$ нь гомморфизм болохыг шалгая. Үүний тулд зөвхөн үржвэрийг шалгахад хангалттай. $\forall x, y \in R$ байг. Тэгвэл $f \circ \varphi(xy) = f(exye) = f(ex) \cdot f(ye) = f(ex) \cdot f(e) \cdot f(e) \cdot f(ye) = f(exe) \cdot f(eye) = f(\varphi(x)) \cdot f(\varphi(y))$ болно. Иймд гомморфизм болов. $f \circ \varphi(R)$ нь нэгжтэй цагираг учир $f \circ \varphi(R)$ нь цорны лемм ёсоор максимал идеальтай байна. Үүний эх дүрийг авбал тэр нь R -д максимал идеал байна.

4. $\Rightarrow: \quad Z[1]/I \langle n \rangle = \{a+b1 \mid a, b \in Z_n\} = (Z_n[1], +, \cdot)$ гэж үзэж болно.

$A = (Z_n[1], +, \cdot)$ талбар байг. Тэгвэл A нь тэгийн хуваагчгүй гэдгээс n анхны тоо гэж гарна. Хэрэв $n = a^2 + b^2$ бол $0 \neq a+b1$, $a-b1 \in A$ гэдгээс $(a+b1)(a-b1) = n = 0 \in A$ болж зөрчил гарна.

$\Leftarrow: \quad n$ нь $a^2 + b^2$ хэлбэртэй тавигддаггүй анхны тоо байг.

$0 \neq a+b1$, $c+di \in A$ -ийн хувьд $0 = (a+b1)(c+di) = ac-bd + (ad+bc)i \in A$ бол

$$\begin{cases} ac-bd=0 \\ ad+bc=0 \end{cases} \quad \text{болно. Эндээс} \quad \begin{cases} a=-b \\ c=-d \end{cases}$$

$0 = -bd + b(-d) = -2bd$, $b=0$ гэвэл $c=0$ болно. Эндээс $ad=0$ болно.

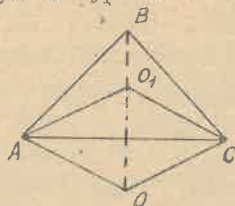
Хэрэв $a=0$ гэвэл $a+b1=0$ болно. $d=0$ гэвэл $c+di=0$ болно.

6. $\mathbb{R}$ -г $\mathbb{C}$ дээр вектор огторгуй болгож болно. Үүний учир нь $\mathbb{R}$ ба $\mathbb{C}$ нь интуиц ба геометрийн талаасаа ялгаатай боловч, тооны онол ба аддитив чанарын үүднээс адил байдагт оршино. Одоо $(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{C}, +)$ гэсэн аддитив бүлгүүд изоморф болохыг харуулъя. $(\mathbb{R}, +)$ ба $(\mathbb{C}, +)$ нь хоёулаа $\mathbb{Q}$ дээр вектор огторгуйнууд болохын хамт адил хэмжээстэй, Иймд $_{\mathbb{Q}}\mathbb{R} \cong _{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$ болох тул $(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{C}, +)$ гэж гарна.

12. Боломжит бүх гурвалжны хамгийн богино талыг нь улаанаар будъя. Ингэхэд бүх тал нь улаан гурвалжин олдono гэж батлахад хангалттай. Цэгүүдийг $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ гэж тэмдэглэе. Дурын нэг, тухайлбал P_1 цэгийг авч түүнийг P_i ($i=2, 6$) цэгүүдтэй холбоход үүссэн хэрчмүүдээс гурав нь жишээ нь P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4 нь улаан бол $\Delta P_2P_3P_4$ -ийн талууд

улаан болно. P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4 нь бүгд улаан байж чадахгүй тохиолдолд ч $P_1P_2P_3, P_1P_2P_4, P_1P_3P_4$ гурвалжнуудад улаан тал байх учир $\Delta P_2P_3P_4$ бас л улаан гурвалжин болно.

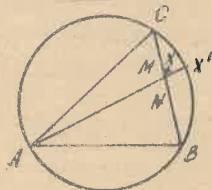
13.



$$\angle ABO = 180^\circ - 2 \cdot \widehat{BAC} = 90^\circ - 2 \cdot \widehat{O_1AC} = 3 \cdot \widehat{O_1AC}$$

Тэгэхлээр ΔABC -ийн өнцгүүд $36^\circ, 36^\circ, 108^\circ$ байна.

15.



O_1 -багтсан тойргийн,
 O -багтаасан тойргийн төв байг.
 O ба O_1 цэгүүд AC талын хувьд
 тэгш хэмтэй тул $AO_1 = AO = OC = O_1C$
 Иймд $\angle CAO = \angle ACO = \angle O_1AC = \angle O_1CA$
 байна. Бас $OA = OB$ учир $\angle ABO = \angle OAB$

$$5 \cdot \widehat{O_1AC} = 90^\circ; \quad \widehat{O_1AC} = 18^\circ$$

$$\Delta ABX \sim \Delta CX', \quad \Delta BX' \sim \Delta ACX \rightarrow$$

$$(\overline{XX'})^2 = \frac{BX \cdot CX \cdot BX' \cdot CX'}{AB \cdot AC}$$

M нь BC -ийн дундаж, N нь BC тал
 оройн өнцгийн биссектрис тэй
 огтлолцсон цэг байг. ($AC > AB$ гэж
 үзье). Тэгвэл $BX \cdot CX$ үржвэрийн

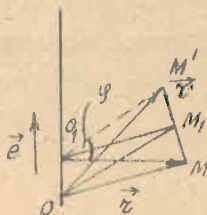
утга: X -г B -ээс M рүү хөдөлгөхөд өснө. M -ээс C рүү хөдөлгөхөд
 суурна. $\Delta BX'C$ -ээс синусийн теорем бичвэл:

$$\frac{BX'}{\sin(\widehat{BCX'})} = \frac{BC}{\sin(\pi - A)}; \quad \frac{CX'}{\sin(\widehat{CBX'})} = \frac{BC}{\sin(\pi - A)} \quad \text{Оолох ба}$$

$$BX' \cdot CX' = \frac{BC^2 \sin(\widehat{CBX'}) \sin(\widehat{BCX'})}{\sin^2 A}$$

$BX' \cdot CX'$ үржвэрийн утга X -г C -ээс N рүү хөдөлгөхөд өснө, N -ээс B
 рүү хөдөлгөхөд суурна. Иймд $BX \cdot CX \cdot BX' \cdot CX'$ үржвэр буюу XX' нь
 хамгийн их утгаа MN дээр авна. Өөрөөр хэмээл AX нь AM ба AN -ийн
 хооронд оршино.

16.



Огторгуйн дурын цэгийг M ,
 түүний энэ хувиргалт дахь
 дүрийг M' , M ба M' -ийн радиус
 векторыг харгалзан r, r' гэж
 тэмдэглэе.

$$(\vec{e}, \vec{r}) = (\vec{e}, \vec{r}') = \beta; (\vec{r}, \vec{r}') = \alpha;$$

$$(\vec{OM}_1, \vec{O_1M_1}) = \gamma. |\vec{r}'| = |\vec{r}| = r \text{ байг.}$$

$\vec{e}, \vec{r}, [\vec{e}, \vec{r}]$ векторууд компланер биш нь мэдээж учир $\vec{r}' - \vec{r} = \vec{e}, \vec{r}, [\vec{e}, \vec{r}]$ векторууд дээр $\vec{r}' = \lambda \vec{e} + \mu \vec{r} + \nu [\vec{e}, \vec{r}]$ (1) гэж задалж болно. Одоо λ, μ, ν тоонуудыг олох зорилго тавья. (1)-ийн 2 талыг $\vec{e}, \vec{r}, [\vec{e}, \vec{r}]$ векторээр скаляр үржүүлбэл

$$(\vec{e}, \vec{r}) = \lambda(\vec{e}, \vec{e}) + \mu(\vec{e}, \vec{r}) \text{ буюу } r = \lambda + \mu \cdot r \cos \beta \quad (2)$$

$$(\vec{r}, \vec{r}') = \lambda(\vec{e}, \vec{r}) + \mu(\vec{r}, \vec{r}') \text{ буюу } r^2 = \lambda r \cos \beta + \mu r^2 \cos \alpha \quad (3)$$

$$(\vec{e}, \vec{r}, \vec{r}') = \nu [\vec{e}, \vec{r}]^2 \text{ буюу } |[\vec{r}, \vec{r}']| \cdot \cos \gamma = \nu r^2 \sin^2 \beta \quad (4)$$

тэнцэтгэлүүд гарна. Харин $OMM'O_1$ гурван талст өнцгийн хувьд косинусын теорем ёсоор $\cos \alpha = \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cdot \cos \phi$ (5) байна. (2) ба (3)-д зохих хувиргалт хийж (5)-г тооцвол

$$\lambda = (1 - \cos \phi)(\vec{e}, \vec{r}); \quad \mu = \cos \phi \text{ болно.}$$

$$|[\vec{r}, \vec{r}']| \cdot \cos \gamma = |[\vec{O_1M}, \vec{O_1M'}]| \text{ тул (4)-г}$$

$|\vec{O_1M}| |\vec{O_1M'}| \sin \phi = \nu r^2 \sin^2 \beta$ буюу $r^2 \sin^2 \beta \sin \phi = \nu r^2 \sin^2 \beta$ гэж бичиж болно. Иймд $\nu = \sin \phi$ байна. Тэгвэл хувиргалтын томъёо вектор хэлбэрээрээ

$$\vec{r}' = (1 - \cos \phi)(\vec{e}, \vec{r})\vec{e} + \cos \phi \vec{r} + \sin \phi [\vec{e}, \vec{r}] \text{ юм.}$$

17. 1) Тэг муруйлттай гадарга буюу торсыг изгибание хийх замаар хавтгай дээр дэлгэж болно. Ингэхэд торсын геодез шугамын нумуудаар үүссэн гурвалжин хавтгайн шулуун шугаман гурвалжинд шилжих тул торс дээрх геодез гурвалжны өнцгүүдийн нийлбэр π -тэй тэнцэнэ.

2) Эерэг тогтмол муруйлттай гадаргыг изгибанаар бөмбөлөгт шилжүүлж болно. Бөмбөлөгийн их тойргийн нумуудаар үүссэн гурвалжин (бөмбөлөгийн геодез гурвалжин)-ы дотоод өнцгүүдийн нийлбэр π -ээс их байдаг. Үүнд үнэмшихийн тулд R радиустай бөмбөлөг дээр α, β, γ хэмжээтэй дотоод өнцөг бүхий A, B, C гурвалжин авч үзвэл AB, BC, CA нумуудыг агуулж буй их тойргийн нумууд A'B'C' гэсэн 2 дахь гурвалжин үүсгэнэ. BC талтай A ба A' оройтой хоёр 2 өнцөгтийн

талбайг S_α гэвэл

$S_\alpha = 4\pi R^2 \cdot \frac{2\alpha}{2\pi} = 4R^2\alpha$ болно. Үүний нэг адилаар $S_\beta = 4R^2\beta$, $S_\gamma = 4R^2\gamma$ байна. 2 өнцөгтүүдийн хос бүрт ABC, A'B'C' гурвалжнууд орох учир $S_\alpha + S_\beta + S_\gamma$ нийлбэр бөмбөрцгийн талбай дээр $\triangle ABC$ -ийн талбайг 4 дахин авч нэмсэнтэй тэнцэнэ.

$$4R^2(\alpha + \beta + \gamma) = 4\pi R^2 + 4S_{\triangle ABC}$$

Эндээс $S_{\triangle ABC} = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$ (*) болно. Иймд $\alpha + \beta + \gamma > \pi$

3) Эерэг тогтмол муруйлттай гадаргын 1-р квадратлаг хэлбэрийг тодорхойлж буй $ds^2 = du^2 + \cos^2 \sqrt{k} u \cdot dv^2$ томьёонд эерэг муруйлтыг сөрөг муруйлтаар нь соливол $ds^2 = du^2 + \cos^2 i \sqrt{-k} u \cdot dv^2$ буюу

$ds^2 = du^2 + \cosh^2 \sqrt{-k} u \cdot dv^2$ болно. Учир нь $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ Эйлерийн томьёоноос $e^{-ix} = \cos ix + i \sin ix$, $e^x = \cos ix - i \sin ix$ болно. Эндээс $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$. Өөрөөр хэлбэл тогтмол сөрөг муруйлттай гадаргын

1-р квадратлаг хэлбэр $ds^2 = du^2 + \cosh^2 \sqrt{-k} u \cdot dv^2$ байна. Тэгвэл сөрөг тогтмол муруйлттай гадаргын дотоод геометрийн бүх томьёог, эерэг тогтмол муруйлттай гадаргын дотоод геометрийн харгалзах томьёонуудаас $k > 0$ байх k -г $k < 0$ байх k -аар солих замаар гарган авч болно. Бөмбөрцгийн хувьд $k = \frac{1}{R^2}$ байх тул R^2 -г $-R^2$ -аар солих хэрэгтэй. Иймээс (*) томьёо $S_{\triangle ABC} = R^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma)$ болж $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ гэж гарна.

б. ЭЦСИЙН ДАВААНЫ БОДЛОГУУД

1. (Ц.Дашдорж) G абелийн бүлэгт $|a|=n$, $|b|=m$ бол $\exists c \in G$, $|c|=(n,m)$ гэж батал.
2. (Ц.Дашдорж) $\bar{x}=(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in S_n$ байг. $\sigma(\bar{x})=(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ гэж тодорхойлъё. $V=(\sum_{\sigma \in S_n} \sigma(\bar{x}) | \sigma \in S_n, a_\sigma \in \mathbb{R})$ дэд огторгуйн хэмжээсийг ол.
3. (Ц.Дашдорж) $m, n \in \mathbb{N}$ бол $x^{m+1} - x^{n+1} = 0$, $x^{n+1} - x^{m+1} = 0$ тэгшитгэлүүдийн ерөнхий шийдтэй байх нөхцлийг тогтоож уг шийдийг ол.
4. (Ц.Лувсандорж) V эзэлхүүнтэй тетраэдрийн ирмэг бүрийг дайруулан эсрэг орших ирмэгтэй параллелиар татсан хавтгайнуудаар үүсэх олон талстн эзэлхүүнийг V' гэвэл $\frac{V'}{V}$ харьцааг ол.
5. (Ц.Лувсандорж) Эллипсоидод өгсөн цэгээс шүргэгч шулууныг зөвхөн

1. $n = \prod_{i=1}^s \alpha_i$, $m = \prod_{i=1}^s \beta_i$, $\alpha_i, \beta_i > 0$ байг. $\left. \begin{aligned} p_i^{\alpha_i} | n_0 &\leftrightarrow \alpha_i > \beta_i \\ p_i^{\beta_i} | m_0 &\leftrightarrow \beta_i > \alpha_i \end{aligned} \right\}$ байхаар n_0 ба m_0 -ийг нэг утгатай

тодорхойлобол $n = n_0 n_1$, $m = m_0 m_1$ ба $(n_0, m_0) = 1$, $(m_0, m_1) = (n_0, n_1) = 1$, $n_0 m_0 = (m, n)$ байх нь илэрхий. $(|a|, |b|) = 1$ бол $|ab| = |a| |b|$ байдгийг

онд мэдэх учир $|a| = n$, $|b| = m$ гэдгээс $|a^{n_1}| = n_0$, $|b^{m_1}| = m_0$ ба

$(n_0, m_0) = 1$ тул $|a^{n_1} b^{m_1}| = n_0 m_0 = (n, m)$ болно.

2. $\dim V \in (0, 1, n-1, n)$ гэдгийг харуулъя. а) $v = (2, \dots, 2)$ байх тохиолдолд $\forall \sigma \in S_n$ -ийн хувьд $\sigma(v) = v$ тул

$$\dim V = \begin{cases} 1, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases} \text{ оолох нь илэрхий.}$$

б) $v = (x_1, \dots, x_n)$ ба $\exists x_i = x \neq x_j = y$ гэе. Тэгвэл $\exists \sigma_1, \sigma_2 \in S_n$,

$$\sigma_1(v) = (x, y, a_3, \dots, a_n), \quad \sigma_2(v) = (y, x, a_3, \dots, a_n), \quad \text{тул}$$

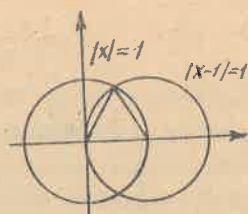
$\frac{1}{y-x}(\sigma_1(v) - \sigma_2(v)) = (-1, 1, 0, \dots, 0) \in V$ буюу $e_2 - e_1 \in V$ ооллоо. Энд

$e_1, \dots, e_n$ нь $\mathbb{K}_n$ -ийн стандарт базис. Үүнтэй адилээр $e_3 - e_1, \dots, e_n - e_1 \in V$ болно. $e_2 - e_1, \dots, e_n - e_1$ элементүүд шугаман хамааралгүй болох нь илэрхий тул $\dim V > n-1$ боллоо. $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = (x_1 + \dots + x_n) e_1 + x_2 (e_2 - e_1) + \dots + x_n (e_n - e_1)$ (*). Эндээс хэрэв $x_1 + \dots + x_n = 0$ бол v нь $e_2 - e_1, \dots, e_n - e_1$ -үүдийн шугаман эвлүүлэгт орно гэж гарах $\sigma(v)$ -ийн хувьд мөн ийм. Иймд $\dim V = n-1$. Хэрэв $x_1 + \dots + x_n \neq 0$ бол (*)-оос $e_1 \in V$ гэж гарах тул $e_2, \dots, e_n \in V$ болно. Энэ тохиолд $V = \mathbb{K}^n$ буюу $\dim V = n$ боллоо.

3. $m > n$ гэе. x нь өгсөн хоёр тэгшитгэлийн ерөнхий язгуур бол $x^n(x+1)(x^{m-n}-1) = 0$ болно. $x=0$ ба $x=-1$ нь өгсөн тэгшитгэлүүдийн язгуурууд биш учир ерөнхий шийд нь (1) $x^{m-n}=1$ ба $x^n(x-1)=-1$ ийг

$$\text{хангана. Эндээс } |x|=1 \text{ ба } |x-1|=1 \text{ буюу } x=\omega=e^{\frac{\pi i}{3}} \vee x=\bar{\omega}=e^{-\frac{\pi i}{3}}$$

$$\omega^3 = -1 \rightarrow \omega^2 - \omega + 1 = 0 \text{ ба } \omega^6 = \omega^{-6} = 1$$



болно. Ө.х $0 < k < 5$ бол $\omega^k \neq 1$.

$$\text{Иймд } \begin{cases} \omega^6 = 1 \\ \omega^{m-n} = 1 \end{cases} \text{ --ээс } m \equiv n \pmod{6} \text{ гэж}$$

гарна. Тэгвэл өгсөн 2

тэгшитгэлээс $x^{k+1} - x^{k+1} = 0$ буюу $\omega^{k+1} - \omega^{k+1} = 0$ гэж гарна. (Энд $k < 5$).

$$\text{Иймд } \begin{cases} \omega^{k+1} - \omega^k = -1, & 1 \leq k \leq 4 \\ \omega^2 - \omega = -1 \end{cases} \text{ байна гэвэл } -1 = \omega^{k-1}(\omega^2 - \omega) = \omega^{k-1}(-1) \text{ буюу}$$

$\omega^{k-1} = 1$, $0 < k-1 < 4$ оос $k-1 = 0$ буюу $k = 1$ гэж гарна. Иймд $n \equiv m \pmod{6}$ боллоо. Үүнээс бусад тохиолдолд өгсөн 2 тэгшитгэл ерөнхий шийдгүй болов.

4. Зөв тетраэдр үед $\frac{V'}{V} = 3$ болохыг хялбархан харж болно. Зөв тетраэдриг тетраэдрт шилжүүлэх аффин хувиргалтыг авч үзсэнээр бодлого ерөнхий тохиолдолдоо бодогдоно.

5. Бөмбөрцөгт өгсөн P цэгээс дурын огтлогчийг сугам ашиглан татаж болох учир ийм 2 огтлогчийн бөмбөрцгийг огтолсон цэгүүдийг харгалзан $A_1, A_2; B_1, B_2$ гэе. $A_1 A_2 B_1 B_2$ дөрвөн өнцөгтийг багтаасан γ тойрог дээр дурын C_1 цэг тэмдэглэе. $C_1 P$ огтлогчийн бөмбөрцгийг огтлох нөгөө цэгийг C_2 гэвэл $A_1 A_2 B_1 B_2; B_1 B_2 C_1 C_2$ дөрвөн өнцөгтүүдийн диагоналиудын огтлолцлын цэгүүдийг дайруулан татсан шулуун P цэгийн поляр болохыг санан түүний γ тойргийг огтлох цэгийг Q гэвэл PQ шулуун өгсөн бөмбөрцөгт шүргэгч шулуун болох нь мэдээж билээ. Одоо бөмбөрцгийг эллипсоидод шилжүүлсэн аффин хувиргалтыг авч үзсэнээр бодлого ерөнхий тохиолдолд бодогдоно.

ОУМО-36

Ц. Дашбоорж

ОУМО-36 1995.7.13-25-нд Канадын Торонтод амжилттай явагдаж өнгөрлөө. Дэлхийн 73 орон оролцсоноос Хятад 236, Румын 230, Орос 227, Вьетнам 220, Унгар 210, Болгар 207, Өмнөд Солонгос 203, Иран 202, Япон 183, Англи 180 оноогоор 10 байрыг эзэлж, өнгөрсөн жилийн үнэмлэхүй аврага АНУ-ийн баг, 178 оноогоор 11-р байр эзэллээ. Манай улс 91 оноогоор 41-р байр эзэлж, өнгөрсөн жилийн амжилтаа 10-аар урагш ахиуллаа. Б.Батбаясгалан (МУИС) 14, Д.Даянцолмон (МУИС) 15, 11-р сургуулийн О.Батбаатар 14, Ж.Мөнхзул 15.

Н.Өлзийболд 13 оноо авав. 11-р сургуулийн 9-р ангийн сурагч С.Цогбадрал 20 оноо авч хүрэл медаль хүртэв.

ОУМО-37 Энэтхэгийн Бомбейд 7-р сарын 5-наас 17-нд болно.

1. А, В, С ба D нь нэг шулуун дээр энэ эрэмбээрээ байрласан ялгаатай цэгүүд байг. AC ба BD дээр диаметртэй тойргууд нь X ба Y цэгүүд дээр огтлолцдог. O нь XY шулууны AD дээр үл орших цэг байг. CO шулуун нь AC диаметртэй тойргийг C ба M цэгүүдэд, харин BO шулуун нь BD диаметртэй тойргийг B ба N цэгүүдэд огтлолдог бол AM, DN ба XY шулуунууд нэг цэгт огтлолцохыг батал.

2. a, b ба c нь $abc=1$ байх эерэг бодит тоонууд байг.

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} > \frac{3}{2} \text{ болохыг батал.}$$

3. Дараах хоёр нөхцөл биелэгдэж байхаар хавтгайн n цэг $A_1, \dots, A_n$ ба $r_1, \dots, r_n$ бодит тоонууд олддог байх бүх бүхэл тоо $3 < n$ -ийг ол.

а) $A_1, \dots, A_n$ цэгүүдийн аль ч гурав нь нэг шулуун дээр үл оршино;

б) ямарч $1, j, k$ ($1 < j < k < n$) гурвалын хувьд $\Delta A_1 A_j A_k$ -ийн талбай $r_1 + r_j + r_k$ -тэй тэнцүү.

4. Дараах хоёр нөхцөл биелж байхаар $x_0, x_1, \dots, x_{1995}$ эерэг бодит тоонуудын дараалал оршин байх x_0 -ийн хамгийн их утгыг ол.

а) $x_0 = x_{1995}$;

б) $x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}, \quad 1=1, 2, \dots, 1995$

5. ABCDEF гүдгэр 6 өнцөгтийн хувьд $AB=BC=CD, DE=EF=FA$ ба $\angle BCD=\angle EFA=60^\circ$ байг. 6 өнцөгтийн дотор орших G ба H цэгүүдийн хувьд $\angle AGB=\angle DHE=120^\circ$ байг. $AG+GB+GH+DH+HE > CF$ гэж батал.

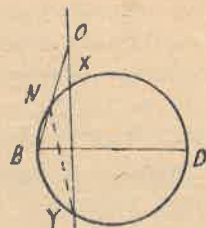
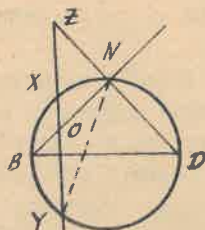
6. p нь сондгой анхны тоо байг.

а) A нь яг p элементтэй

б) A-д байх бүх элементүүдийн нийлбэр p -д хуваагддаг байх $(1, 2, \dots, 2p)$ олонлогийн A дэд олонлогуудын тоог ол.

БОДОЛТ

1. DN нь XY-ийг Z цэгт огтлолдог байг. BDXY гэдгээс ZN ба ON нь $\angle XNY$ -ийн биссектрисүүд болно. O, X, Y цэгүүд бэхлэгдсэн тул Z мөн бэхлэгдэнэ. Тэгш хэмт чанараар AM мөн Z цэгийг дайрна.



зураг

2. $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$ гэвэл $xyz = 1$ ба

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} = S \text{ болно.}$$

Кошийн тэнцэл бишээр $[(y+z)+(z+x)+(x+y)]S \geq (x+y+z)^2$ буюу $S \geq \frac{x+y+z}{2}$ болно. Арифметик ба геометр дундчийн тэнцэл бишийг ашиглавал $S \geq \frac{x+y+z}{3} \cdot \frac{3}{2} \geq \sqrt[3]{xyz} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ болно. $x=y=z=1$ буюу $a=b=c=1$ үед тэнцэлдээ хүрнэ.

3. $n=4$ л бодлогын нөхцлийг хангах ганц тоо гэдгийг харуулъя. $n=4$ үед $A_1 A_2 A_3 A_4$ нь нэгж квадрат ба $p_1=p_2=p_3=p_4=\frac{1}{6}$ гэж авахад болно. $n=5$ нь бодлогын нөхцлийг хангахгүй гэдгийг харуулбал $n>5$ нь мөн адил гэдэг нь илэрхий. Иймд эсрэгээс нь $n=5$ нь бодлогын нөхцлийг хангадаг гэж үзье. $\Delta A_1 A_j A_k$ -ийн талбайг $[ijk]=p_i+p_j+p_k$ -ээр тэмдэглэе, энд $1 \leq i < j < k \leq 5$, $p_i=p_j$ байж үл чадна. Тухайлбал $p_4=p_5$ бол $[124]=[125]$ ба $[234]=[235]$ болох тул $A_4 A_5 \parallel A_1 A_2$, $A_4 A_5 \parallel A_2 A_3$ гэж гарна. Нэгэнт A_1, A_2, A_3 нь нэг шулуун дээр оршихгүй гэж өгсөн тул энэ нь боломжгүй юм. Хэрэв A_1, A_2, A_3 нь нэг шулуун дээр оршихгүй гэж өгсөн тул энэ нь боломжгүй юм. Хэрэв $A_1 A_j A_k A_l$ нь гүдгэр бол $p_i+p_k=p_j+p_l$ болох нь $[ijk]+[kell]=[jkel]+[leij]$ гэдгээс гарна. $A_1, \dots, A_5$ цэгүүдийн гүдгэр мужийг авч үзье. Дараахь 3 тохиол байна.

а). гүдгэр муж нь $A_1 \dots A_5$ гэсэн таван өнцөгт бол $A_1 A_2 A_3 A_4$ ба $A_1 A_2 A_3 A_5$ нь гүдгэр гэдгээс $p_1+p_3=p_2+p_4$ ба $p_1+p_3=p_2+p_5$ буюу $p_4=p_5$ болж зөрчилд хүргэнэ.

б). Гүдгэр муж нь $A_1 A_2 A_3 A_4$ үед $\Delta A_3 A_4 A_1$ -ийн дотор A_5 цэг оршиж байна гэж үзэж болно. Тэгвэл $A_1 A_2 A_3 A_5$ гүдгэр ба а)-ийн адил зөрчил гарна.

в). Гүдгэр муж нь $\Delta A_1 A_2 A_3$ бол $[124]+[234]+[314]=[125]+[235]+[315]$ гэдгээс $p_4=p_5$ гэж мөн зөрчилд хүргэв.

4. Өгсөн нөхцөл нь $2x_i^2 - (x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}})x_{i+1} = 0$ -тэй эквивалент ба үүний

шийд нь $x_i = \frac{1}{2}x_{i-1}$ ба $x_i = \frac{1}{x_{i-1}}$ болно.

$i > 0$ үед $|k_i| < 1$ байх оүх тоо k_i ба $\varepsilon_i = (-1)^{k_i+1}$ -ийн хувьд $\left. \begin{array}{l} x_i = 2^{k_i} x_0^{\varepsilon_i} \text{ болохыг индукцээр харуулъя.} \end{array} \right\} (*)$

$i=0$ үед $k_0=0$ ба $\varepsilon_0=1$ болно. $i=1$ -ийн хувьд $(*)$ хүчинтэй ба

$x_1 = \frac{1}{2}x_0$ оол $k_1=k_{i-1}-1$ ба $\varepsilon_1=\varepsilon_{i-1}$ гэж авна, харин $x_1 = \frac{1}{x_0}$ оол

$k_1=k_{i-1}$ ба $\varepsilon_1=-\varepsilon_{i-1}$ гэж авна. Аль ч тохиолдолд

$|k_i| < 1$ ба $\varepsilon_i = (-1)^{k_i+1}$ болно. Иймд $x_{1995} = 2^k x_0^{\varepsilon}$ энд $k=k_{1995}$ ба

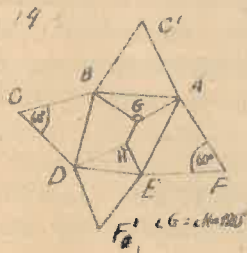
$\varepsilon=\varepsilon_{1995}$, $0 \leq |k| < 1995$ ба $\varepsilon = (-1)^{1995+k}$ болно. Эндээс $x_0 = x_{1995} = 2^k x_0^{\varepsilon}$ болно. Хэрэв k сондгой бол $\varepsilon=1$ ба $2^k=1$ болж $k=0$ гэсэнд зөрчнө.

Иймд k тэгш байх ёстой ба $\varepsilon=-1$ ба $x_0=2^k$ болно. Эндээс $x_0 \leq 2^{997}$.

Тэгвэл $x_0 = 2^{997}$, $x_i = \frac{1}{2}x_{i-1}$, $i=1, 2, \dots, 1994$ ба $x_{1995} = \frac{1}{x_{1994}}$ гэж байж

чадах тул $x_{1994} = 2^{-997}$ ба $x_{1995} = 2^{997} = x_0$ болно.

5. ABCD ба DEFA-үүд нь зөв Δ ууд BE нь ABDE-ийн тэгш хэмийн тэнхлэг. ABCD ба DEFA-үүд BE тэнхлэгийн хувьд ABC'A ба DEF'D-д бууна. $\angle BGA = 180^\circ - \angle AC'B$ гэдгээс G нь $\triangle ABC'$ -ийг огцтаасан тойрог дээр оршино. Иймд Птолемейн теоремоор $AG+GB=C'G$. Үүний адилаар $DH+HE=HF'$. Эндээс $CF=C'F'+C'G+GH+HF'=AG+GB+GH+DH+HE$. Энд тэнцэл биелэх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь G, H $C'F'$ болно.



6. $\sqrt[p]{\epsilon}$ -ийн анхны язгуурыг ϵ гээ, өөрөөр хэлбэл $\epsilon^p = 1$ ба $1 < k < p$ бол $\epsilon^k \neq 1$ байх язгуур нь ϵ байг.

$\prod_{i=1}^{2p} (x - \epsilon^i) = (x^p - 1)^2 = x^{2p} - 2x^p + 1$ —ээс x^p -ийн коэффициентүүд тэнцүү буюу

$$(1) \quad 2 = \prod_{(i_1, \dots, i_p) \in (1, \dots, 2p)} \epsilon^{i_1 + \dots + i_p} = \sum_{j=0}^{p-1} n_j \epsilon^j, \text{ энд } n_j \text{ нь } (1, \dots, 2p)$$

олонлогийн $i_1 + \dots + i_p \equiv j \pmod{p}$ байх p элементтэй дэд олонлогуудын тоо гэвэл

$$\sum_{j=0}^{p-1} n_j = C_{2p}^p \quad (2)$$

болно. Нөгөө талаас $P(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1}$ нь ϵ -ийн Φ дээрхи минимал

олон гишүүнт ба (1)-ээс $n_0 - 2 + \sum_{j=1}^{p-1} n_j x^j = f(x) \in \mathbb{Z}[x] \subseteq \mathbb{Q}[x]$ -ийн хувьд

$f(\epsilon) = 0$ тул $f(x) = c p(x)$ байх ёстой. Иймд $n_0 - 2 = n_1 = n_2 = \dots = n_{p-1}$ болох тул (2) ёсоор

$$n_j = \begin{cases} \frac{1}{p} [C_{2p}^p - 2], & p-1 > j > 1 \\ \frac{1}{p} [C_{2p}^p - 2] + 2, & j=0 \end{cases}$$

гэж гарна. Иймд $n_0 = \frac{1}{p} [C_{2p}^p - 2] + 2$ болно. Яг ийм бодолтыг хийж Болгарын хүүхэд тусгай шагнал хүртэв.

П.Энхболдин нэрэмжит Улсын II уралдаан

Ц.Дашдорж

Нэрт математикч П.Энхболдин нэрэмжит Улсын II уралдаан 1975 оны 12 сарын 27-30-нд Улаанбаатар хотод амжилттай явагдаж өнгөрлөө. Энэ уралдаанд Хөвсгөл, Төв аймаг УБ хотын 35 сургуулийн 163 багш, сурагч, оюутан оролцлоо. "Багш" гэсэн ангилалд Их, дээд сургуулийн багш оюутнууд оролцох боломжийг хангаснаараа агуулгын хувьд улам ч сонирхолтой боллоо. Багш сурагчид тус бүр 21 оноотой 3 бодлогыг бодов. XI сургуулийн сурагч Г.Цогбадрал 17 оноогоор аварга болж диплом 30000 төгрөг, мөн сургуулийн Б.Баяржаргал 11 оноогоор дэд аварга болж диплом 15000 төгрөгөөр шагнагдав. Багш нараас МУИС-ийн оюутан У.Отгонбаяр 8 оноогоор аварга болж диплом

50000 төгрөг, Хөвсгөл аймгийн багш П.Ганбилэг 6 оноогоор дэд аварга болж диплом 25000 төгрөгөөр тус тус шагнагдав. Хөвсгөлийн сурагч Ожунбаатар 11-р сургуулийн Энхбаяр нар тусгай шагналаар, мөн бодлого зохиох уралдаан зарлагдаж математикийн хүрээлэнгийн Б.Баясгалан 20000 төгрөгөөр шагнагдав. Уралдааныг "Бүрэн" ББХК ивээн тэтгэж явуулав. П.Энхболдын нэрэмжит "математикийн авьяастныг дэмжих сан" байгуулагдав. Сангийг данс нь: П.Энхболдын нэрэмжит математикийн авьяастныг дэмжих сан. Монгол бизнес банк 2115017.

С1. (Сандагдорж) Аливаа натурал тоо n -ийн хувьд зөвхөн 0,1,9,8 гэсэн цифрүүдийг агуулсан, n -д хуваагдах, n^4 -ээс үл хэтрэх тоо оршин байхыг үзүүл.

С2. (Батхшиг) Үл огтлолцох γ_1, γ_2 тойрог өгөгджээ. γ_1, γ_2 тойргуудыг дотоод шүргэх ω тойрог татав. γ_1 ба γ_2 тойргуудад багтсан дотоод шүргэгчүүд нь ω тойргийг A, C ба B, D цэгүүдээр огтолжээ. Тэгвэл γ_1 ба γ_2 тойргуудад татсан гадаад шүргэгчүүдийн нэг нь BC -тай нөгөө нь AD -тай паралель гэж батал.

С3. (Б.Баясгалан). Ямар n тооны хувьд хавтгайд бүх орой нь давхцах боловч аль ч 2 тал нь үл давхцах өөр хоорондоо тэнцүү байх $2n+1$ өнцөгт n ширхэг олдох вэ?

Б1. (Б.Баясгалан). $b + \sum_{k+s \leq n} a_{ks} x^k y^s = 0$ хэлбэрийн тэгшитгэлийг n эрэмбийн муруй гээ. Хоёр тоглогч координатын хавтгайд ерөнхий байршилтай цэгүүдийг ээлжлэн тэмдэглэх бөгөөд аль ч тоглогч нь шинэ цэг тэмдэглэхийн тулд урьд тэмдэглэгдсэн бүх цэгийг дайрсан ямар нэг n эрэмбийн муруйг бичих ёстой. Хэрэв хамгийн сүүлд цэг тэмдэглэж чадсан нь хожих бол

а) $n=3$ үед аль тоглогч хожих вэ?

б) n тооны ямар утгад нэгдүгээр тоглогч хожих вэ?

Б2. (Б.Баясгалан). 50 хүнийг авахад ерөнхий танилын нь тоо тэгш байх хоёр хүн олдохыг батал.

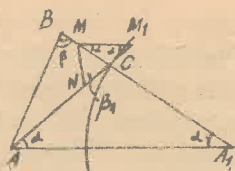
Б3. (Ц.Дашдорж). Тойрог дээр аль ч хоёр нь ерөнхий цэгтэй байх төгслөг тооны нум өгөгдөв. Нум бүр дээр 2 төгсгөлийн нь аль нэг орших диаметр олдохыг үзүүл.

БОДОЛТ

С1. УМО-27 цувралын 27-р хуудаснаас хар.

С2. (11-р сургуулийн сурагч Баяржаргалын бодолт).

Уг бодлогыг бодохын тулд эхлээд дараах леммийг батлая.



$AB = AC + BC$ бол $\widehat{NMC}$ эсвэл $\widehat{MN} = MC + NC$

ABC -тэй, эсвэл BAC -тэй тэнцүү байна. Δ Үүний тулд BC -ийн үргэлжлэл дээр $AC = CA_1$ байх A_1 цэг, AC -ийн үргэлжлэл дээр $CM = CM_1$ байх M_1 цэгүүдийг авъя.

$$NM_1 = NC + CM_1 = NC + MC$$

$$BA_1 = BC + CA_1 = BC + CA$$

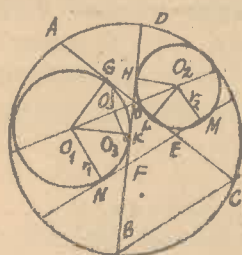
$$\frac{NM_1}{BA_1} = \frac{NC + MC}{BC + CA} = \frac{MN}{AB} \quad (1) \quad MC = CM_1 \rightarrow \Delta CMM_1 \text{ адил хажуут } AC = CA_1 \rightarrow \Delta ACA_1 \text{ адил}$$

хажуут $\angle ACA_1 = \angle CM_1M \rightarrow \angle AA_1C = \angle MM_1C = \alpha$ гэв. $\angle ABM = \beta$, $\angle MNM_1 = \beta_1$ гэв.

$$\left. \begin{aligned} \Delta ABA_1 \text{-ийн хувьд } \frac{\sin \alpha}{AB} &= \frac{\sin(180 - \alpha - \beta)}{BA_1} \\ \Delta NMM_1 \text{-ийн хувьд } \frac{\sin \alpha}{MN} &= \frac{\sin(180 - \alpha - \beta_1)}{NM_1} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{MN}{AB} \cdot \frac{NM_1}{BA_1} = \frac{\sin(180 - \alpha - \beta)}{\sin(180 - \alpha - \beta_1)}$$

(1)-ийг анхаарвал $\sin(180 - \alpha - \beta) = \sin(180 - \alpha - \beta_1) \rightarrow$

а) $\beta = \beta_1$ б) $\beta_1 = 180 - 2\alpha - \beta$ болно. Эндээс леммийн батлах ёстой илэрхийлэл батлагдана. Одоо бодлогоо бодъя.



Зураг дээр H, L, M, G, K, N -үүд шүргэлцлийн цэгүүд. Кезийн теоремийг B ба C дээр хоёр тойрог нь мөхсөн байдлаар γ_1, γ_2, C, B дөрөв дээр бичье.

$$BK \cdot CL + MN \cdot BC = CG \cdot BH = (CL + LG) \cdot (BK + KN) = CL \cdot BK + LG \cdot BK + CL \cdot KN + LG \cdot KN \rightarrow$$

$$MN \cdot BC = LG \cdot BK + KN \cdot CL + LG \cdot KN \quad (1)$$

$$OH = OL, OG = OK, GL = HK \quad (2)$$

$$KF = EL, KN = FE \quad (3)$$

$$MN = NF + FE + EM = FK + KN + LB = OE + OF \quad (4)$$

(1)-д (2), (4)-ийг орлуулбал $MN \cdot BC = HK \cdot BK + HK \cdot CL + HK^2 = (OE + OF) BC$

(3)-ийг орлуулбал $\frac{BC \cdot BK + CL + HK}{FE} = \frac{BO + OC}{OE + OF} \rightarrow \frac{EO + OF}{FE} = \frac{BO + OC}{BO} \rightarrow$ болно. Лемма-ыг

ашиглавал $\widehat{OFE} = \widehat{OSB}$ эсвэл $\widehat{OFE} = \widehat{OBS}$ (5) болно. $r_1 = 0_1 N > 0_2 M = r_2$ гэж үзье. Тэгвэл $|0_1 O| > |0_2 O|$ ба ω тойргийн төвийг 0_3 гээд түүний $0_1 0_2$ шулуун дээрх проекцийг $0_3'$ гэвэл O цэг нь

$\{0_3' 0_2\}$ хэрчим дээр оршино. $0_3'$ -ийг дайруулж AC ба BD -тэй параллель шулуунууд татвал эдгээр шулуун нь $0_3' 0_3$ -ийн хувьд тэгш хэмтэй байна.

Эндээс $A B > C D$ болох ба $\widehat{ACB} > \widehat{BDC} \rightarrow OB > OC$ болно. Мөн (5)-ийг

ашиглавал $OF > OE \rightarrow \frac{OF}{OB} = \frac{OE}{OC} = \frac{FE}{BC} \rightarrow (FE) \parallel (BC)$ ө.х $\widehat{OFE} = \widehat{OSB}$ байж болохгүй.

(Тэнцвэл $r_1 = r_2$ байна.) Энэ бодлого нь γ_1, γ_2 тойргууд нь хоёулаа гадаад, нэг нь дотоод, нэг нь гадаад шүргэх үед мөн үнэн болно. Үүнийг томъёолж өөрсдөө бодогсоогоорой.

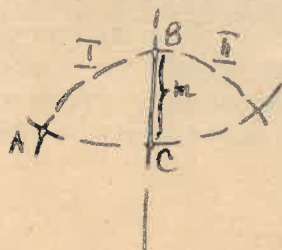
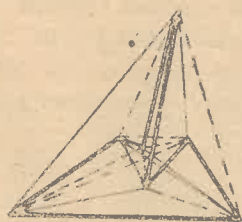
СЗ. Эрж буй тоо нь зөвхөн $n=3$ гэдгийг л батлая. Үүний тулд бүх орой нь давхцах боловч аль ч хоёр тал нь үл давхцах 7 өнцөгт 3 олдohыг батлая. Үүнийг дараах зургаас харж болно. Улаан, хар болон

зураасан 7 өнцөгтүүд нь ижилхэн бөгөөд $\frac{2\pi}{3}$ хэмжээтэй эргүүлтүүдээр бие биедээ буух нь илэрхий. Одоо $n=2$ үед боломжгүйг батлая. Юуны

өмнө $2n+1$ цэгийг холбосон хэрчмийн нийт тоо нь $n(2n+1)$ болохыг тэмдэглэе. Түүнчлэн n ширхэг $(2n+1)$ өнцөгтөд байх талын нийт тоо нь $n(2n+1)$ байна. Иймд эдгээр хэрчмүүд нь бодлогын нөхцлийг хангасан байхын тулд бүгд ямар нэг олон өнцөгтийн тал болох ёстой. Одоо ямар нэгэн 5 цэгийг авч үзээд

тэдгээрийн хамгийн хол хоёр цэгийн хоорондох зайг m гэе. Хэрэв олдох ижилхэн хоёр олон өнцөгтийг хар ба улаан гэвэл m урттай хэрчим мөн л улаан ба хар өнгөтэй олдоно. Иймд үлдсэн 3 цэг маань I ба II хэсэгт (зураг үз) орших ёстой. Хэрэв I ба II хэсэгт дор хаяж нэг нэг цэг оршдог бол эдгээр 5 цэгийг хар өнгийн өөрийг үл огтлох 5 шугамаар холбож үл болно. Иймд үлдсэн 3 цэг нь тухайлбал

I хэсэгт оршино. Тэгвэл AB , эсвэл AC хэрчим улаан өнгөтэй байх ёстой. Нөгөө талаас m урттай хэрчмийн тоо тэгш байх

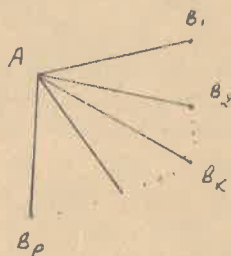


ёстой. Гэтэл ийм хэрчмийн гурав
л байна. $n > 3$ тохиолдолд m урттай
хэрчмийн тоо мөн л n -ээс
багагүй байх ёстой. Гэтэл гурав

л байна. Эндээс $n=3$ болж бодлого бодогдов.

Б1. Хэрэв $\frac{n(n+3)}{2}$ тоо сондгой бол II тоглогч, тэгш бол I тоглогч
хожихыг батлая. n эрэмбийн муруйн тэгшитгэлд нийт a_{hs}
коэффициентүүдийн тоо $\frac{1}{2}n(n+3)$ байна. Иймд $\frac{1}{2}n(n+3)$ ширхэг цэгээр
(ерөнхий байршилтай) n эрэмбийн муруй бүрэн тодорхойлогдоно. Учир
нь $\frac{1}{2}n(n+3)$ ширхэг цэг сонгож авсны дараа бүх a_{hs} коэффициентууд
нэг утгатай тодорхойлогдох юм. ($\frac{1}{2}n(n+3)$) хувьсагчтай $\frac{1}{2}n(n+3)$ ширхэг
шугаман тэгшитгэлийн системийн шийдүүд гэсэн үг.) Иймд $\frac{1}{2}n(n+3)+1$
цэг бий болбол n эрэмбийн муруйг бичиж чадахгүй юм. Эндээс $n=4k$,
 $n=4k+1$ үед I тоглогч, $n=4k+2$, $n=4k+3$ үед II тоглогч тус тус хожих
юм.

Б2. Ерөнхий байршилтай 50 цэгийг ямар нэг байдлаар хэрчмээр
холбоё. Хэрвээ ямар нэг оройгоос сондгой хэрчим гарсан бол өөр
хоорондоо хэрчмээр холбогдсон ба хоёулантай нь хэрчмээр
холбогдсон оройн тоо тэгш байх А ба В орой олдono гэж батлая.



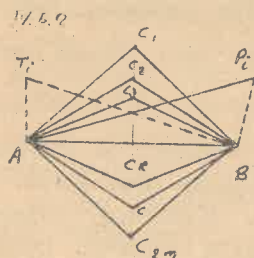
А оройгоос сондгой тооны хэрчим
гарсан байг. Түүнийг
 $B_1, B_2, \dots, B_p$ (p -сондгой тоо)
гэж тэмдэглэе. B_i оройн үлдсэн
 B_j ($i \neq j$) оройнуудтай холоогдсон
ирмэгийн тоог a_i гээ. ($i=1, p$).
Тэгвэл $a_1 + a_2 + \dots + a_p$ нийлээр
тэгш байна. Учир нь ямар ч
ирмэг хоёр удаа тоологдоно.

Сондгой тоонуудын сондгой ширхэг нийлээр сондгой болох учир ядаж
нэг a_r ($1 \leq r \leq p$) тэгш байна. Иймд А ба B_r орой нь өгүүлбэрийн
нөхцөлийг хангана. Одоо бодлогоо хоёр тохиолдолд салгаж бодъё.

I тохиолдол: Ямар нэг танилын тоо сондгой байг. Хавтгайд хүмүүсийг
цэгээр тэмдэглэе. Хэрвээ хоёр хүн бие биенээ танидаг бол хэрчмээр
холбоё. Тэгвэл ямар нэг оройгоос сондгой хэрчим гарна. Энэ нь дээр
баталсан өгүүлбэрийн нөхцөлийг хангах учир мөн бодлогын нөхцөлийг

хангах хоёр хүн олдоно.

II тохиолдол: Бүх хүний танилын тоо нь тэгш байг. Тэгвэл ямар ч хүний танил биш хүний тоо сондгой байна. Хоёр хүний танил биш харьцааг хэрчмээр, танил бол тасархай хэрчмээр холбоё. Тэгвэл өгүүлбэр ёсоор өөр хоорондоо хэрчмээр холбогдсон ба хоёуланттай нь хэрчмээр холбогдсон оройн тоо тэгш байх A, B орой олдоно.



A, B орой нь бодлогын нөхцлийг хангана гэж батлая. Эсрэгээс нь хоёуланттай нь тасархай хэрчмээр холбогдсон оройн тоог сондгой гэж үзээд $T_1, T_2, \dots, T_{2n+1}$ гэе. Хоёуланттай нь бүтэн хэрчмээр холбогдсон оройн тоог $2m$ гээд $C_1, C_2, \dots, C_{2m}$ гэж тэмдэглэе. Үлдсэн оройнуудыг $P_1, P_2, \dots, P_r$ гэвэл $r = 50 - 2m - 2 - (2n+1)$ болно.

P_i ($i = \overline{1, r}$) оройнууд нь A, B оройнуудын яг лэгэнтэй нь бүтэн хэрчмээр холбогдоно. $P(M)$ -ээр M оройгоос гарсан тасархай хэрчмийн тоог тэмдэглэе. Тэгвэл:

$$\begin{cases} P(A) = 2n+1+k \\ P(B) = 2n+1+l \end{cases} \text{ бол } k+l=r \text{ байна.}$$

Нөгөө талаас r сондгой учир k ба l -ийн яг нэг нь тэгш байна. Хэрвээ k тэгш бол $P(A)$ сондгой, l тэгш бол $P(B)$ сондгой болж II тохиолдлын нөхцөлд авсан ямар ч оройгоос гарсан тасархай хэрчмийн тоо тэгш гэсэнд зөрчилдөнө. Иймд A ба B -ийн ерөнхий танилын тоо тэгш болж бодлого бодогдов.

Тайлбар. Энд бид танил гэдгийг тэгш хэмтэйгээр ойлгов. Ө.х B -г A таньдаг бол B мөн A -г таньдаг гээд хэрчмээр холбов. Харин B -г A таньдаг байхад B нь A -г таньдаг байх нь албагүй тохиолдолд $A \rightarrow B$ гэж чиглэлт хэрчмээр холбох болно. Энэ үеийн бодолт ямар байхыг уншигчиддаа үлдээв.

БЗ. о Урт нь π -ээс багагүй нумыг дурын диаметр дайрах тул хойшид зөвхөн π -ээс бага нумуудыг авч үзье. Өгсөн тойрог T болог.

$b_1, b_2, \dots, b_k$ нумуудын хувьд $ub_1 = T$ бол $A \in T$, $A \notin ub_1$ байх A цэг олдох тул уг цэгээр тойргийг таслаад b_i ($i = \overline{1, k}$)-үүдийг шулуун дээр

орших аль ч хоёр нь огтлолцолтой хэрчмүүд гэж үзье. Тэгвэл эдгээр нь Хеллийн теорем ёсоор ерөнхий цэгтэй. $\bigcup_{i=1}^k b_i \neq T$ байх k -ийн максимум утга нь m ба түүнд харгалзах нумууд нь $c_1, c_2, \dots, c_m$ байг.

m шах тул $\forall a, a \in c_i$ ($i = \overline{1, m}$) хувьд $\bigcup_{i=1}^m c_i \cap a = T$ болно. (*)
 $\forall c_i$ байх B цэг олдох ба $|c_i| < \pi$ ($i = \overline{1, m}$) тул (*) ёсоор $B' \in a$.

(Энд B' нь B -тэй нэг диаметр дээр орших цэг) Эндээс BB' нь бодлогын нөхцөл хангах диаметр болов.

Бүсийн VII олимпиад

Олимпиад 1996 оны 1-р сарын 7-ноос 9-нд Дорноговь аймгийн Сайншанд суманд болж өнгөрлөө. Тус олимпиадад Дархан-Уул, Орхон, Төв, Булган, Сэлэнгэ, Говьсүмбэр, Дорноговь, Сүхбаатар зэрэг 8 аймгийн 10 багийн 60 гаруй багш сурагчид оролцов. Энэхүү олимпиадад багш нараас Сүхбаатар аймгийн М.Эрдэнэ тэргүүн байранд шалгарч 10000 төгрөг, аваргын тууз, Орхон аймгийн Г.Батдалай 2-р байрт шалгарч 8000 төгрөг, Баянчандманы сумын захирал Ганболд 3-р сайрт шалгарч 6000 төгрөгөөр тус тус шагнуулав. Бага ангийн багш нараас Сэлэнгэ аймгийн С.Баярсүлд 1-р байр, Баянчандманийн Б.Аюуш 2-р байр, Дорноговь аймгийн Т.Наранбат 3-р байрт тус тус шалгарав. Сурагчдаас 10-р ангид Дархан-Уул аймгийн Л.Пүрэвсүрэн 1-р байр, Сүхбаатар аймгийн Ш.Тунгалаг 2-р байр, Төв аймгийн Мөнхзолбоо 3-р байр, 9-р ангид Дархан-Уул аймгийн О.Эрдэнэчимэг, 1-р байр, Орхон аймгийн Б.Энхтүвшин 2-р байр, Дорноговийн Н.Хонгорзул 3-р байр, 8-р ангид Дорноговийн Ө.Энх-Амгалан, Орхон аймгийн Ц.Энхмандах, Говьсүмбэрийн Ч.Хишигсат нар 1,2,3-р байр, 7-р ангид Дархан-Уулын, П.Байгальмаа, Орхон аймгийн Б.Галбадрах, Дорноговийн А.Энхжаргал нар 1,2,3-р байрыг тус тус эзлэв. Тус олимпиадад Г.Батдалай ахлагчтай Орхон аймгийн баг түрүүлэн шилжин явах цом авлаа. Энэхүү математикийн наадмыг амжилттай зохион байгуулсан Дорноговь аймгийн Соловсролын төв болон Одончимэг даргатай аймгийн засаг даргын тамгийн газарт ИМО-ын зохион байгуулах хорооны өмнөөс талархал илэрхийлье. Тус олимпиадад дэвшигдэн бодогдсон бодлогуудыг дор сийрүүлье. Ирэх жилийн бүсийн олимпиадыг Орхон аймаг зохион байгуулахвар болов.

YII анги.

1. $19^{96} + 96^{19}$ - тооны сүүлчийн 2 цифрийг ол.
2. Дөрвөлжин шугамтай бүхэл тооны нүд бүхий квадрат хэлбэртэй хуудас цааснаас, 1996 нүд үлдэхээр бүхэл тоон нүдтэй квадрат хэлбэртэй цаас огтлон авчээ. Анхны хуудас цаас ямар нүдтэй байсан бэ?
3. Гурвалжны талын уртууд нь 52, 56, 60 см байв. Уг гурвалжны их талтай параллель шулуунаар уг гурвалжныг огтлоход үүсэх дөрвөн өнцөгтийн (трапецийн) периметр 156 см бол уг дөрвөн өнцөгтийн талбайг ол.
4. 13-д хуваагдах цифрүүдийн нийлбэр нь 17-той тэнцүү байдаг хамгийн бага натурал тоог ол.
5. Тойргийн системээр тоглосон шатрын тэмцээнд бүгд 55 өрөг тогложээ. Тэмцээний явцад хоёр шатарчин тэмцээнээ орхисон бөгөөд нэг нь 10 өрөг, нөгөө нь нэг өрөг тоглосон байв. Энэ хоёр шатарчин хоорондоо тоглосон уу?
6. ABC гурвалжны тал тус бүр дээр түүнийг 10 тэнцүү хэсэгт хуваахаар 9 цэгийг тэмдэглэв. Эдгээр тэмдэглэгдсэн цэгүүд дээр оройтой гурвалжны тоог ол. Мөн эдгээр гурвалжнууд дотроос аль ч тал нь ABC гурвалжны аль нэг талтай параллель биш байх гурвалжин хичнээн байх вэ?

YIII анги.

1. Гүдгэр 4 өнцөгтийн аль нэг оройг дайрсан уул 4 өнцөгтийг талбайгаар нь тэнцүү хоёр хэсэгт хуваадаг шулууныг тат.
2. n ширхэг бүхэл тоо өгөгджээ. ($n > 1$). Тэдгээрээс алийг нь ч аваад үлджээ тоонуудын нийлбэрээс 1-ээр их тоогоор үржүүлэхэд энэ нь бүх (анх өгөгдсөн) n тоонуудынхаа нийлбэрт хуваагддаг байв. Тэгвэл эдгээр тоонуудын квадратуудын нийлбэр уг тоонуудынхаа нийлбэрт хуваагдахыг батал.
3. Эерэг бодит a, b, c тоонуудын хувьд

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2} \quad \text{болохыг батал.}$$

4. ABC гурвалжны В орой дахь өнцөг 120° . ABC өнцгийн биссектрисс AC талыг М цэгт огтлов. Харин ВСА өнцгийн гадаад биссектрисс АВ талын үргэлжлэлийг Р цэгт огтлов. МР хэрчим ВС талыг К цэгт огтолдог бол $\angle AKM = 30^\circ$ болохыг батал.
5. x, y -ээрэг бүхэл тоонуудын хувьд $2x+1$ нь y -д хуваагддаг, мөн $2y+1$ нь x -д хуваагддаг байх бүх (x, y) -хосуудыг ол.

6. Төв цахилгаан шүрдэнгийн газар 20 мөнгийг 15,2,2,1 мөнгүүдээр 15 мөнгийг 10,2,2,1 мөнгүүдээр, 10 мөнгийг 3,3,2,2 мөнгүүдээр тус тус задалдаг автомат машинууд байжээ. (20,15,10 мөнгүүд мөнгөөр, 3,2,1 мөнгө нь зэсээр тус тус хийгдсэн байв.) Петя 1 төг 25 мөнгөний (мөнгөн) зоосуудыг зөвхөн зэс зоосууд болгон задлуулжээ. Вася задлуулсан мөнгөнүүдийг хараад (үр дүнг үзээд) "Анх чамд ямар ямар мөнгөн зоосуудыг байсныг би яг мэдлээ" гэж хэлээд эдгээр мөнгийг нэрлэв. Та бас үүнийг нэрлэнэ үү.

IX анги

1. $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ - тоо бүхэл байдаг a, b натурал тоонууд өгчээ. Тэгвэл

a ба b тоонуудын хамгийн их ерөнхий хуваагч нь $\sqrt{a+b}$ -ээс хэтрэхгүй болохыг батал.

2. ABCD квадратыг агуулсан хавтгай, τ хавтгайтай α өнцөг үүсгэдэг байв. Харин AB тал энэ хавтгайтай β өнцөг үүсгэдэг бол AD тал энэ τ хавтгайтай үүсгэх өнцгийг ол.

3. 12008 тооны хоёр ширхэг тэг цифрийн хооронд хичнээн ч 3 цифрийг тавьсан 19-д хуваагдах тоо үүсэхийг батал.

4. ABCD гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн диагоналуудын огтолцлын цэг M, ABM, ба CDM гурвалжуудыг багтаасан тойргийн төв P ба Q байг. Тэгвэл $|AB| + |CD| \leq 4 \cdot |PQ|$ болохыг батал.

5. Дараах нөхцлийг хангасан f функц хичнээн байх вэ? Үүнд: f функцийн тодорхойлогдох муж $\{1, 2, 3, 4, 6\}$, f функцийн утгын муж нь $\{1, 2, 3, 4\}$ ба $f(6)$ тоо $f(3)$ -д үлдэгдэлгүй хуваагдана.

6. Тэгш өнцөгт координатын системийн координатын эхээс $(1, 0)$, $(-1, 0)$ буюу $(0, 1)$ хэлбэрийн замаар явдаг өөрийгөө үл огтлох n урттай тахир шугамын тоог ол.

X анги.

1. 9-р ангийн 1-р бодлого.

2. O төвтэй тойргийн гадна P цэг өгөгджээ. P цэгийг дайрсан ℓ_1 шулуун тойргийг A цэгт шүргэнэ, ℓ_2 шулуун нь тойргийг B ба C цэгт огтлоно. B ба C цэгт татсан шүргэгчүүд X цэгт огтлолцдог бол AX шулуун PO-д перпендикуляр болохыг батал.

3. а) A олонлогийн ялгаатай дөрвөн бодит тоо a, b, c, d -ийн хувьд $ab+cd$ тоо нь мөн A-д харьяалагддаг байх 4-өөс багагүй элементтэй A-гэсэн төгслөг (бодит тоон) олонлог оршихыг харуул.

б) дээрх нөхцөл биелэх зэрэг тоонуудын төгслөг олонлог A орших уу?

4. ABC гурвалжны AA_1 -медиан, AA_2 -биссектрисс К цэг нь AA_1 дээр орших ба $KA_2 \perp AC$ байг. Тэгвэл AA_2 шулуун KS -тэй перпендикуляр болохыг батал.

5. Хоёр язгуур нь 1 ба 2 той тэнцүү бүхэл коэффициенттэй тэг биш олон гишүүнт байг. Тэгвэл уг олон гишүүнтийн ядаж нэг коэффициент нь (-2) -оос хэтрэхгүй гэж батал.

6. 9-р ангийн 6-р бодлого.

Бага ангийн багш нар

1. Тэгш енцөгт координатын системд $A(-1,2)$, $B(2,3)$ буюу $C(1,-1)$ координаттай цэгүүд өгөгдөв. Эдгээр цэгүүдээр үүсэх гурвалжны талбайг ол.

2. Хэмжээ ба хэлбэрээрээ нэг ижил 78 шарикны нэг нь жингээрээ хөнгөн шарик байв. Тэгвэл туухайгүй хөшүүргэн жигнүүрийн тусламжтайгаар дөрвөөс илүүгүй хэмжээд уг шарикийг олж болох уу?

3. Хэрвээ нэг ангийн 30 сурагчийг кино танхимийн эгнээ бүрд тараан суулгавал ядаж нэг эгнээнд нэг ангийн хоёроос цөөнгүй сурагч суудаг байжээ. Хэрэв 26 сурагчийг дээрхийн адил тараан суулгавал ядаж 3 эгнээ хоосон үлдэх байв. Кино танхим хичнээн эгнээтэй вэ?

4. 25-тын дэвсгэрийг зөвхөн 1-т, 3-т, 5-т оролцсон яг 10 дэвсгэрээр задалж болох уу?

5. Нэгэн эр алсын замд явахынхаа өмнө жирэмсэн эхнэртээ: Хэрэв чамаас эрэгтэй хүүхэд төрвөл сар бүрийнхээ цалингийн $2/3$ -ийг хүүдээ, $1/3$ -ийг өөртөө, харин эмэгтэй хүүхэд төрвөл $1/3$ -ийг охиндоо үлдсэн $2/3$ -ийг өөртөө зориулан хэрэглээрэй гэжээ. Гэтэл эхнэр нь эрэгтэй, эмэгтэй хоёр ихэр хүүхэд төрүүлсэн учир нөхрийнхөө захиас ёсоор сарынхаа цалинг яаж хуваариалан хэрэглэвэл зохих вэ?

6. Нэг хайрцагт 50 улаан, 41 шар, 33 цагаан, 29 хүрэн, 27 хөх, 20 ногоон бөмбөг тус тус байв. Хайрцагнаас тавьмгаар авсан бөмбөгүүд дотор нэг энгийн 28 бөмбөг заавал орсон байхын тулд хайрцагнаас дор хаяж хэдэн бөмбөг авах вэ?

Багш нар

1. $x^{3n} - x^{3m+1} + x^{3p+2}$ олон гишүүнт $x^2 - x + 1$ олон гишүүнтэд хуваагдах нөхцөлийг тогтоо.

2. ABC гурвалжны хүндийн төв M, ортотөв H цэгийг дайрсан шулуун BC талтай параллель бол $\frac{\sin B \cdot \sin C}{\cos A}$ харьцааг ол.

3 - 5. 10-р ангийн 3-5-р бодлого.

6. $a_0 = a_1 = 1$ ба $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$ ($n \geq 2$) гэсэн рекуррент томъёогоор өгөгдсөн дараалалын ерөнхий гишүүний томъёог ол.