

Гарчиг

1. ММО—ын Хорооны дарга дэд проф Ц.Дашдоржийн илтгэлээс. 1.
2. YII анги III даваа (Ц.Лувсандорж, Б.Хоролдагва) 6.
3. YIII анги III даваа (Ц.Лувсандорж) 8.
4. YIII анги IV даваа (Ж.Батболд) 13.
5. IX анги III даваа (П.Пүрэвсүрэн) 17.
6. IX анги IV даваа (Ш.Хишигсүрэн, Ө.Энэбиш) 21.
7. X анги III даваа (Ц.Дашдорж) 27.
8. X анги IV даваа (Ц.Батхүү) 35.
9. ББ—ын III даваа (Y.Маам) 41.
10. ББ—ын IV даваа (МУИС—ын мат I оюутан
Г.Баярмагнай) 43.
11. ДБ—ын III даваа (Ц.Дашдорж) 47.
12. ДБ—ын IV даваа (Ц.Дашдорж) 53.
13. Оюутны олимпиад (Ц.Дашдорж) 60.
14. ОУМО 37 (Ц.Дашдорж) 68.
15. Алгебрийн семинарын сониноос (Л.Оюунцэцэг) 75.
16. Говийн бүсийн анхдугаар олимпиад (Ц.Дашдорж) 81.
17. Мэдээлэл (Ц.Дашдорж) 83.

Уншигчдын анхааралд

Улсын болон Олон улсын математикийн олимпиадад бэлтгэгчид, математикийн төрөлжсөн болон гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийн сурагч, оюутан, багш нар математик сонирхогч өргөн олонд зориулсан цувралын ээлжит дугаар уншигч Таны гар дээр очиж байна. Тус гарын авлагыг бэлтгэхэд ММОЗБ Хорооны гишүүд болон Монгол Туркийн сургуулийн сурагчид, МУИС-ийн Мат I-ийн оюу, нууд идэвхтэй оролцлоо.

Уг номын талаар аливаа санал хүсэлтээ МУИС-ийн алгебр-тооны онолын тэнхимд ирүүлнэ үү?

Монголын математикийн XXXII олимпиад

Редактор Ц.Дашдорж

Хэвлэлийн эх бэлтгэсэн Т.Туяа

Хэмжээ 60х90 1/16 4.5 хэв хуудас

1997 оны 4-р сард бэлтгэж «ЖДМ» ХХК хэвлэв.

1997 оны 4-р сард 1500 хувь хэвлэв.

Монголын Математикийн XXXII олимпиадын дүнгийн тухай илтгэлээс

Ц.Дашдорж

Хүндэт математикчид аа!

Эрдэм ухаанд гүн шүтлэгтэй Баянхонгорчууд аа!
Монголын математикийн 32 олимпиад 1996.04.29-нөөс 05.06-ны өдрүүдэд Баянхонгор аймгийн төв Баянхонгор хотод амжилттай явагдаж дүнгээ гаргаж байна. Энэ удаагийн олимпиадад 21 аймаг, Улаанбаатар хот, Оросын Холбооны Саха улс зэрэг нийт 24 багийн бага, дундын 70 багш, 140 сурагч оролцсон нээлттэй олимпиад боллоо.

Энэхүү олимпиадыг зохион байгуулахад санаачилга хүч чармайлт гаргасан бүх нөхцөл бололцоогоор хангаж өгсөн Баянхонгор аймгийн засаг дарга Д.Бордух, засаг даргын тамгын газар, олимпиадыг зохион байгуулах Баянхонгорын салбар комиссын дарга Г.Цэрэн, аймгийн засаг даргын тамгын газрын үйлдвэрлэл санхүүгийн хэлтсийн дарга Амгалан, нийгмийн бодлогын хэлтсийн дарга Д.Батсүх, боловсролын улсын албаны дарга Ц.Энэбиш, дэс түшмэл Л.Бор, Баянхонгор хотын засаг дарга Ш.Самдан, Боловсрол төвийн захирал Ж.Энхбаяр, арга зүйч М.Сэнгэ, Т.Ганболд, Г.Далай захиралтай төвийн 1-р сургуулийн хамт олон, аймгийн нийт сургуулиудын захирлууд, боловсролын төвийн хамт олон, Баянхонгор аймгийн олимпиадын комисст монголын нийт математикчдын нэрийн өмнөөс талархал илэрхийлье.

Олимпиадад 8-р ангийн 55 сурагч оролцсноос Улаанбаатар хотын 11-р сургуулийн 7-р ангийн сурагч Б.Баттулга (багш нь Л.Эрдэнэсүвд) 36 оноогоор 1-р байр эзэлж улсын математикийн 32-р олимпиадын 8-р ангиудын аварга, мөн

32-р олимпиадын хамгийн өндөр оноотой үнэмлэхүй аварга боллоо. Улаанбаатар хотын 11-р сургуулийн Хөлгөн (багш нь Ж.Гансүх) 27 оноогоор, Улаанбаатар хотын 1-р сургуулийн Ө.Баттулга (багш нь Н.Эрдэнэ) 28 оноогоор 2-р байр, Улаанбаатар хотын 11-р сургуулийн Ч.Алтаннар (багш нь Ж.Гансүх) 21.5 оноогоор, Улаанбаатар хотын 1-р сургуулийн Б.Монголжин (багш нь Н.Эрдэнэ) 23 оноогоор, Улаанбаатар хотын 1-р сургуулийн Б.Худан (багш нь Н.Эрдэнэ) 21.5 оноогоор 3-р байр эзэллээ.

9-р ангийн нийт 47 сурагч оролцсноос Улаанбаатар хотын 11-р сургуулийн Ё.Эрдэмбаяр (багш нь А.Энхжаргал) хувиараа оролцож 23.5 оноогоор 1-р байр эзэлж улсын математикийн 32 олимпиадын 9-р ангиудын аварга сурагч боллоо. Улаанбаатар хотын 11-р сургуулийн Б.Энхбаяр (багш нь А.Энхжаргал) 21 оноогоор, 11-р сургуулийн Эрдэмбат (багш нь А.Энхжаргал) 22 оноогоор 2-р байр, Улаанбаатар хотын 11-р сургуулийн Т.Хулан (багш нь А.Энхжаргал) 22 оноогоор, Улаанбаатар хотын 1-р сургуулийн Саруул (багш нь Энхбаатар) 14 оноогоор, 11-р сургуулийн Амаржаргал (багш нь А.Энхжаргал) 11 оноогоор 3-р байрыг эзэллээ.

10-р ангийн нийт 38 сурагч оролцсноос 1-р сургуулийн Ц.Амарбат (багш нь Н.Энхбаатар) 9 оноогоор улсын математикийн 32 олимпиадын 10-р ангиудын аваргаар шалгарлаа. Улаанбаатар хотын 11-р сургуулийн Г.Цогбадрал (багш нь Б.Наранхүү) 8 оноогоор, Улаанбаатар хотын 1-р сургуулийн М.Ууганбаяр (багш нь Н.Энхбаатар) 7 оноогоор 2-р байр, Баянхонгор аймгийн байгалийн ухааны гүнзгийрүүлсэн сургалттай дунд сургуулийн Баярмагнай (багш нь Б.Баяржаргал) 3 оноогоор, Өвөрхангай аймгийн Хархорины Даваадолгор (багш нь М.Сугар) 3.5 оноогоор Улаанбаатар хотын 1-р сургуулийн П.Ганзориг (багш нь Н.Энхбаатар) 4 оноогоор 3-р байрыг эзэллээ.

Олимпиадад сурагчдаа амжилттай сайн бэлтгэсэн дээрх багш нар болон сургуулиудад олимпиадыг зохион байгуулах хорооны нэрийн өмнөөс чин сэтгэлийн талархал илэрхийлье.

Багш нарын олимпиадыг энэ жилээс эхлэн бага, дунд гэсэн 2 ангиллаар явуулсны дотроос дунд ангийн математикийн 45 багш оролцсноос Баянхонгор аймгийн төвийн байгалийн ухааны гүнзгийрүүлсэн сургалттай дунд сургуулийн математикийн багш Б.Баяржаргал 14 оноогоор, Увс аймгийн 1-р сургуулийн математикийн багш Д.Баторших 14 оноогоор тус тус 1-р байр эзэлж 32 олимпиадын аварга математикч багшаар шалгарлаа. Улаанбаатар хотын 1-р сургуулийн Н.Эрдэнэ 2-р байр, Саха улсын Семенов.М.Ф. 3-р байр эзэлж сайхан амжилт үзүүлээ.

Бага ангийн багш нарын олимпиадад 25 багш оролцсноос Улаанбаатар хотын 2-р сургуулийн бага ангийн багш Б.Жаргалсүрэн 15.5 оноогоор 1-р байр эзэлж 32 олимпиадын бага ангийн аварга математикч багшаар шалгарсанд баяр хүргэе. Орхон аймгийн 8-р сургуулийн багш Ц.Батэрдэнэ, Улаанбаатар хотын 48-р сургуулийн багш Саранмижид нар 2,3-р байр эзэлж сайхан амжилт үзүүлээ.

Мөн Баянхонгор аймгийн Болормаа, Якутын Скрябина Октябрина нар шагналт байранд шалгарлаа. 32-р олимпиадын уран бодолтын тусгай шагналыг Улаанбаатар хотын 23-р сургуулийн багш А.Доржпаламд олголоо.

Багуудын улмжлалт халз тэмцээнд Ц.Батхүү ахлагчтай "Комисс" баг 1-р байр, Баяржаргал ахлагчтай "Баянхонгор" баг 2-р байр, Баторших ахлагчтай хөдөөний багш нарын баг 3-р байрыг эзэллээ.

Олимпиадад орлцсон 24 багаас "Олонлог", Улаанбаатар, Орхон, Баянхонгор, Саха багууд эхний 5 байрыг эзэллээ.

Монголын математикийн 32-р Олимпиад Баянхонгор ай-

мгийн засаг дарга Д.Бордох гуайн ивээл дор утга төгөлдөр болж өнгөрлөө. Эрдэмтэн Бордох гуай бол математикийг талархан дэмжигч төдийгүй, математик аргыг эдийн засагт хэрэглэх асуудал дээр тэргүүлэх мэргэжилтэн гэдгийг бидний үеийнхэн сайн мэдэх юм.

Монголын нийт математикчдын нэрийн өмнөөс эрдэмтэн Бордох Танд эрүүл энх, аз жаргалтай амьдарч, урт удаан насалж, хүн ардынхаа сайн сайхны төлөө улам ихийг бүтээхийг хүсэн ерөөж байгааг минь хүлээн авна уу? 32-р олимпиадыг Жинст сум (засаг дарга нь Алтанхуяг), Баянлиг сумын ахмад багш Ч.Цэрмаа, тооны багш Ж.Хүрэлбаатар, Д.Гүнсэн захиралтай Хүрээмаралын сургууль, Өлзийбат захиралтай Заг сумын сургууль, Баянхонгор аймгийн бүх сургуулиуд, мөн аймгийн "Номгон бар" компанийн захирал Б.Бас-Оргил, Хүнсний үйлдвэрийн дарга Ням, аймгийн тамгын газрын аж ахуйн эрхлэгч Ш.Далай, Эмийн сангуудын удирдах газрын дарга А.Буяндэлгэр нар сэтгэл харамгүй ивээн тэтгэж тусаллаа. Мөн Хан-Уул дээд сургууль манай 32-р олимпиадыг ивээн тэтгэлээ. Олимпиадад амжилттай оролцсон нийт багш сурагчид түүнд үнэнхүү санаа тавьсан Баянхонгорчуудын цаашдын ажил үйлс улам дэгжин дээшилж математик боловсролдоо улам өндөр амжилт олохын ерөөлийг өргөн дэвшүүлье. Энэ жил Энэтхэгийн Бомбейд болох Олон улсын Математикийн 37-р Олимпиадын бэлтгэлд Амарбат,Цогбадрал, Ууганбаяр, Ганзориг, Даваадолгор, Баярмагнай, 9-р ангийн аварга Эрдэмбаяр нарыг үлдээлээ. Уг бэлтгэл хичээл 5 сарын 20-нд МУИС дээр эхэлнэ.

ММО-32 олимпиадын дүнг жагсаавал:

Аймгийн нэр	VIII	IX	X	ДБ	ББ	Д/О	Байр
Архангай	7.5	0	2.5	0.5		1.75	15
Баян.өлгий	7.0	3.0	0	0		2.5	11
Баянхонгор	10.0	7.0	3.0	14.0	10.0	8.8	IV
Булган	1.0	0.5	0	0	7.0	1.7	16
Говь-Алтай	5.0	1.0	0.5	0	7.0	2.7	10
Говь-сүмбэр	1.0			2.0	0	0.61	20
Дархан-уул	0.0	0	0	1.0	0	0.2	21-22
Дорно-говь	1.0	0	0	0	9.0	2	13-14
Дорнод	1.0	7.0	0	0		1.6	17
Дундговь	2.0	7.0		2.0	0	2.2	12
Завхан	6.0	0	0	1.0	7.0	2.8	8-9
Олонлог	27	46	10			13.83	I
Орхон	18.0			1.0	27.0	9.2	III
Өвөрхангай	1.0	0	3.5	1.0	0	1.1	19
Өмнөговь	0	0	0	0	7.0	1.4	18
Саха	13.0	0	0.5	10.0	8.0	6.3	V
Сүхбаатар		1.0	0	4.5	8.5	2.8	8-9
Сэлэнгэ	0	0	0	0	0	0	23-24
Төв	7.0	8.0	0	1.0	0	3.2	7
Увс	1.0	7.0	0	14.0	7.0	5.8	6
Ховд	1.0	0	0	0		0.2	21-22
Хөвсгөл	1.0	14.0	0	1.0	0	2	13-14
Хэнтий	0	0	0	0	0	0	23-24
Улаанбаатар	245.5	119.5	20.5	23.5	40.5	11.6	II

ММО-32, VII анги, III даваа

Ц.Лувсандорж.

Б.Хоролдагва.

VII-A1. Гурван сурагч нийт 95 бодлого боджээ. Зөвхөн нэг сурагч бодсон бодлогыг "хүнд", бүх сурагч бодсон бодлогыг "хөнгөн" гэж нэрлэе. Хэрэв сурагч бүхэн 52 бодлого бодсон бол хүнд бодлогын тоо хөнгөн бодлогын тооноос яг хэдээр илүү вэ?

VII-A2. Хуудас нь 1, 2, 3, ..., 192 гэж дугаарлагдсан 96 хуудастай дэвтрээс, дугааруудын нийлбэр 1996 байх 34 хуудсыг сонгон авч болох уу?

VII-A3. $ABCD$ параллелограммын BC талын дундаж цэг M , AM , BD шулуунуудын огтлолцлын цэг N , AD , CN шулуунуудын огтлолцлын цэг P бол $\frac{S_{\triangle APN}}{S_{\triangle MCN}}$ харьцааг ол.

VII-B1. $x^2 + 3x + a = 0$ тэгшитгэлийн язгуур x_1 , x_2 бол $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 1 > 0$ байх a -параметрийн утгыг ол.

VII-B2. Гурван сурагч хожигдсон нь солигдох замаар теннис тоглов. Тоглолтын дараа тоолоход I сурагч 13, II сурагч 27 удаа тоглосон байв. Тэгвэл III сурагч хэдэн удаа тоглосон бэ?

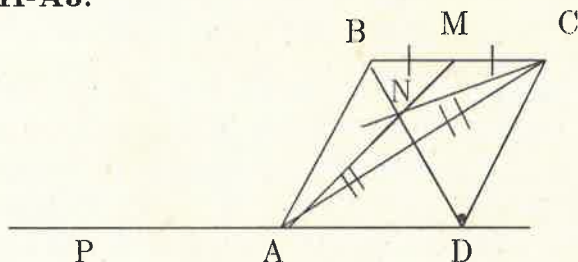
VII-B3. Нэгж талтай ABC зөв гурвалжны AB талын аливаа M цэгийн AC , BC талууд дээрх проекцүүд P, Q ; P, Q цэгүүдийн AB тал дээрх проекцүүд P_1, Q_1 бол $P_1Q_1 = \frac{3}{4}$ батал.

БОДОЛТ

VII-A1. Сурагчид бодсон "хүнд" бодлогын тоог x , "хөнгөн" бодлогын тоог z , "дунд зэргийн хүндрэлтэй" (2 сурагчаар бодогдсон бодлогыг хэлнэ) бодлогын тоог y гэвэл $x+y+z = 95$ болно. Мөн бодлогын нөхцөл ёсоор: $x+2y+3z = 3 \cdot 52$. I тэгшитгэлээс $2x+2y+2z = 190$ ба үүнээс II тэгшитгэлийг хасвал: $x-z = 34$ болсноор бодлого бодогдов.

VII-A2. Нэг хуудасны дугаар болж буй 2 тооны нийлбэр сондгой гэдгээс 4-д хуваахад 3 үлдэгдэл өгөх нь илэрхий. Тэгвэл бодлогын нөхцөл ёсоор 34 хуудас сонгож авч болдог гэвэл эдгээр хуудаснуудын дугааруудын нийлбэр, нэг талаас $102 = 3 \cdot 34 \equiv 2(4)$ нөгөө талаас $1996 \equiv 0(4)$ болсноор зөрчилд хүрлээ.

VII-A3.



BN, AM
шулуу-
нууд эсрэг
орших та-
лаа таллан
хуваадаг

тул N цэг, ABC гурвалжны хүндийн төв болно.

Иймд $H_N^{-2}(A) = M$ гэдгээс гомотетийн чанараар $H_N^{-2}(P) = C$ болно. Иймд $\triangle NMC, \triangle NAP$ гурвалжнууд төсөөтэй бөгөөд $\frac{AN}{NM} = 2$ гэдгээс $\frac{S_{\triangle ANP}}{S_{\triangle MNC}} = 4$ болно.

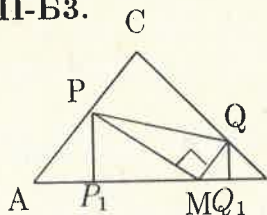
VII-B1. Квадрат тэгшитгэлийн хувьд Виетийн теоремийг анхаарвал

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 \cdot x_2 = a \end{cases}$$

$$0 < \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 1 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} + 1 = \frac{x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2}{x_1 x_2} - 1 = \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 x_2} - 1 = \frac{9}{a} - 1 \text{ буюу } a < 9.$$

VII-Б2. Хүн бүр дараалсан 2 тоглолтын дор хаяж нэг-энд нь оролцсон байх нь илт. I тоглогч 13 удаа тоглосон учир нийт тоглолтын тоо нь $2 \cdot 13 + 1$ тооноос хэтрэхгүй юм. Одоо II тоглогч 27 удаа тоглосныг анхаарвал III тоглогч $27 - 13 = 14$ удаа тоглосон байх нь харагдлаа.

VII-Б3.



$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{ACM} + S_{BCM} = \\ &= \frac{1}{2}(AC \cdot MP + BC \cdot MQ) = \\ &= \frac{1}{2}(MP + MQ) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$$\text{буюу } MP + MQ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\triangle P_1MP, \triangle MQQ_1$$

тэгш өнцөгт гурвалжнуудаас: $P_1M = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot MP, MQ_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot MQ$.

$$MQ. \text{ Эндээс } P_1M + MQ_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(MP + MQ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}.$$

ММО-32; III даваа, VIII анги

Ц.Лувсандорж

$$\text{VIII-A1. } \begin{cases} x + 4 \cdot |y| = |x| \\ |y| + |x - a| = 1 \end{cases} \quad \text{тэгшитгэлийн систем яг}$$

хэд

шийдтэй байх а параметрийн утгыг ол.

VIII-A2. Шатрын тэмцээнд 34 сурагч оролцов. i -р сурагчийн хожлын тоог a_i , хожигдлын тоог b_i гэвэл

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{34}^2 = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_{34}^2$$

батал.

VIII-A3. ABC гурвалжны хүндийн төв M цэгийг дайруулан татсан шулуун AB, AC талуудыг харгалзан P, Q цэгүүдээр огтолдог бол

$$\frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4}$$

батал.

VIII-B1. $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ квадрат гурван гишүүнт $[0, 1]$ завсрын аливаа x - цэгийн хувьд $|f(x)| \leq 1$ бол $|a| + |b| + |c|$ тооны хамгийн их утгыг ол.

VIII-B2. Гишүүн бүхэн нь яг 38 гишүүдийг дэмждэг парламент (их хурал) бие биеэ дэмждэг дор хаяж 2, гишүүнтэй байхын тулд хамгийн олондоо хэдэн гишүүнтэй байх вэ ?

VIII-B3. Тойрог дээр P, P_1, P_2, P_3, P_4 цэгүүд өгөгдөв. P цэгээс $P_i P_k$ шулуун хүртэлх зайг d_{ik} гэвэл $d_{12} \cdot d_{34} = d_{13} \cdot d_{24}$ батал.

БОДОЛТ

VIII-A1. $x \geq 0$ үед (x, y) шийдтэй болог.

I тэгшитгэлээс $y = 0$ буюу $|x - a| = 1$. Эндээс $x = a \pm 1$.

Иймд $a \geq 1$ үед

систем $(a-1, 0); (a+1, 0)$ яг 2 шийдтэй байна.
 $-1 \leq a < 1$ үед

$x \geq 0$ гэдгээс $(a+1, 0)$ гэсэн ганц шийдтэй болно.
 $x < 0$ авч үзье.

Тэгвэл I тэгшитгэлээс $|y| = \frac{-x}{2}$.

II тэгшитгэлээс $|x-a| = 1 + \frac{x}{2}$;

$x-a \geq 0$ үед

$$1 + \frac{x}{2} > 0 \Rightarrow x \geq -2; x-a = 1 + \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \cdot (a+1).$$

$$x-a < 0 \Rightarrow x-a = -1 - \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \cdot (a-1).$$

$$\text{Эндээс } \begin{cases} -2 \leq 2 \cdot (a+1) < 0 \\ -2 \leq \frac{2}{3} \cdot (a-1) < 0 \end{cases} \text{ буюу } \begin{cases} -2 \leq a < -1 \\ -2 \leq a < 1 \end{cases}$$

$x < 0$ үед

(x, y) системийн шийд болж байвал (x, y) шийд болох нь дээрхи анализаас харагдана.

Мөн $a \leq -2$ үед

систем шийдгүй юм.

$a = -2$ үед

$$x = 2 \cdot (a+1) = -2$$

$$x = \frac{2}{3} \cdot (a-1) = -2$$

болсноор систем $(-2, 1); (-2, -1)$ гэсэн

яг 2 шийдтэй болж байна.

$1 > a > -2$ завсарын $2 \cdot (a+1) \neq \frac{2}{3} \cdot (a-1)$ утгуудын хувьд

$x < 0$ үед

4 шийд болж буй тул бидний сонирхлыг татахгүй юм.

Иймд систем $a \geq 1$ үед

$$(a-1, 0); (a+1, 0);$$

$a = -2$ үед

$$(-2, 1); (-2, -1) \text{ шийдтэй болох нь харагдлаа.}$$

VIII-A2. Тоглолт дууссаны дараа бүх ялалтын тоо нь бүх ялагдлын тоотой тэнцүү (ө.х. дурын 2 багийн тоглолтын дараа нийт ялалтын тоо, нийт ялагдлын яг нэгээр нэм-

эгдэнэ.) бөгөөд энэ тоо нь $\frac{33 \cdot 34}{2} = 33 \cdot 17$ болно.

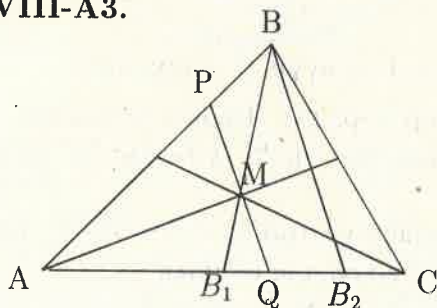
$$\sum_{i=1}^{34} b_i^2 = \sum_{i=1}^{34} (33 - a_i)^2 = 66 \cdot \left(\frac{33 \cdot 34}{2} - (a_1 + a_2 + \dots + a_{34}) \right) +$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{34}^2 = 66 \cdot (33 \cdot 17 - (a_1 + a_2 + \dots + a_{34}))$$

$$+ a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{34}^2 = 66 \cdot 0 + a_1^2 + \dots + a_{34}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{34} a_i^2$$

VIII-A3.



B -г дайруулж PQ -тэй параллель шулуун татаж AC -тэй огтлолцсон цэгийг B_2 гээ.

Фалесийн теоремоор

$$\frac{BP}{PA} = \frac{QB_2}{QA} \quad (1).$$

Мөн

$$\frac{BM}{MB_1} = \frac{2}{1} \quad \text{ба} \quad NQ \parallel BB_2 \Rightarrow \frac{QB_2}{QB_1} = \frac{2}{1} \quad (2).$$

$$\begin{aligned} \frac{PB}{PA} + \frac{QC}{QA} &\stackrel{(1)}{=} \frac{QB_2}{QA} + \frac{QC}{QA} \stackrel{(2)}{=} \frac{2QB_1 + QC}{QA} = \\ &= \frac{QB_1 + CB_1}{QA} = \frac{QB_1 + B_1A}{QA} = \frac{QA}{QA} = 1. \end{aligned}$$

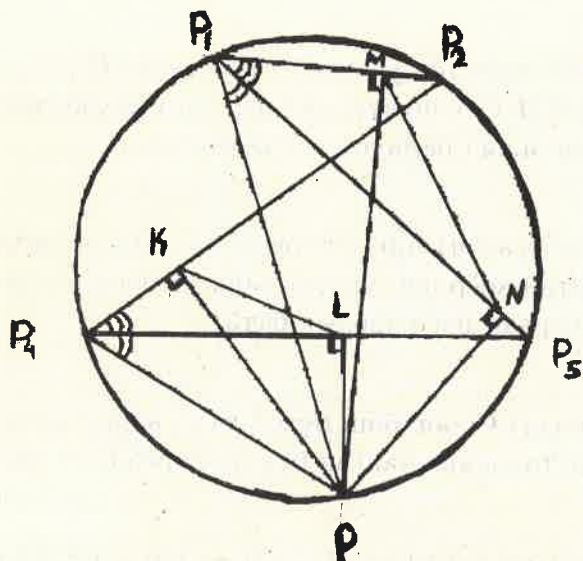
$$\frac{PB}{PA} + \frac{QC}{QA} = 1 \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{\frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA}} \leq 1. \quad \frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4}.$$

VIII-B1. $|f(0)| \leq 1$, $|f(\frac{1}{2})| \leq 1$, $|f(1)| \leq 1$ гэдгээс $|c| \leq 1$, $|a + 2b + 4c| \leq 4$, $|a + b + c| \leq 1$. $A = a + 2b + 4c$, $B = a + b + c$ гэвэл $a = -A + 2B + c$, $b = A - B - 3c$ $|a| \leq |A| + 2|B| + 2|c| \leq 4 + 2 + 2 = 8$. $|b| \leq |A| + |B| + 3|c| \leq 4 + 1 + 3 = 8$. Иймд: $|a| + |b| + |c| \leq 8 + 8 + 1 = 17$.

VIII-B2. Парламентийн A гишүүн B гишүүнийг дэмжиж буйг $\overrightarrow{AB}$ вектораар дүрслэе. Тэгвэл бодлогод өгөгдсөн ёсоор бүх векторын тоо нь $38 \cdot k$ болно (k -нь парламентийн гишүүний тоо). Нөгөө талаас уул тоо нь $C_k^2 = \frac{k(k-1)}{2}$. Одоо бие биеэ дэмждэг хоёр гишүүн олдож байхын тулд Дирихлейн зарчмаар: $\frac{k(k-1)}{2} < 38 \cdot k$ буюу $k < 77$. Одоо $k = 76$ байж болохыг жишээгээр харуулая.

$\overrightarrow{A_1 A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1 A_{39}}, \dots, \overrightarrow{A_2 A_3}, \dots, \overrightarrow{A_2 A_{40}}, \dots,$
 $\overrightarrow{A_{38} A_{39}}, \dots, \overrightarrow{A_{38} A_{76}}, \dots, \overrightarrow{A_{76} A_1}, \dots,$
 $\overrightarrow{A_{76} A_{38}}$ буюу $\overrightarrow{A_{38} A_{76}}, \overrightarrow{A_{76} A_{38}}$ векторууд байгаа тул A_{38} ба A_{76} гишүүд бие биеэ дэмждэг.

VIII-B3.



$$\left. \begin{array}{l} P_2P_4 \perp PK \\ P_4P_3 \perp PL \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \triangle P_4KP \\ \triangle P_4LP \end{array} \right\}.$$

-ҮҮД

тэгш өнцөгт
гурвалжин
ба P_4P гэсэн
диаметртэй
тойрог дээр
 K, L цэгүүд
оршино.

Мөн нөгөө талаас P_1PMN дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана.

$$\left. \begin{array}{l} \angle PP_1P_3 = \angle PP_4P_3 \text{ (нэг нумд тулсан)} \\ \angle P_4LP = \angle P_1NP = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle P_4LP \sim \triangle P_1NP \frac{P_4P}{P_1P} = \frac{PL}{PN} = \frac{P_4L}{P_1N}.$$

Нөгөө талаас $\angle P_4KP = \angle P_1MP = 90^\circ$ мөн

$$\left. \begin{array}{l} \angle P_2P_4P_3 = \angle P_2P_1P_3 \text{ (нэг нумд тулсан)} \\ \angle PP_1P_3 = \angle P_3P_4P \end{array} \right\}.$$

$$\Rightarrow \angle P_2P_1P = \angle P_2P_4P \Rightarrow \angle MP_1P = \angle KP_4P \Rightarrow \triangle MP_1P \sim \triangle KP_4P$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{MP}{KP} = \frac{P_1P}{P_4P} \\ \frac{PL}{PN} = \frac{P_4P}{P_1P} \end{array} \right. \rightarrow (x) = \frac{MP}{KP} = \frac{PN}{PL} \Rightarrow PM \cdot PL = PN \cdot PK \text{ буюу}$$

$$d_{12} \cdot d_{34} = d_{13} \cdot d_{24}.$$

ММО-32; VIII анги. IV даваа

Ж.Батболд

VIII-A1. (Ү.Отгонбаяр) A, B цэгүүдэд огтолцсон γ_1, γ_2 тойргуудын төвүүдийг дайрсан шулуун γ_1 ба γ_2 -ыг N ба M

цэгүүдэд огтлолно (MN -хамгийн урт нь). $AN \cap \gamma_2 = P$,
 $AM \cap \gamma_1 = Q$ ба AB, PM, QN шулуунууд нэг цэгт огтлолцох
 бол өгөгдсөн 2 тойрог ижил радиустай гэж батал.

VIII-A2. (Б.Батбаясгалан) Аль ч гурвыг нь авахад эсвэл
 1 зайтай, эсвэл 2 зайтай хоёр цэг олддог байх 17 цэгээс гур-
 валжны орой болох гурван цэг олдохыг батал.

VIII-A3. (С.Батболд) Сөрөг биш бүхэл утга авдаг $a_1 =$
 $2, a_n^2 - 4 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ тэнцлийг хангах бүх a_n дарааллыг ол.

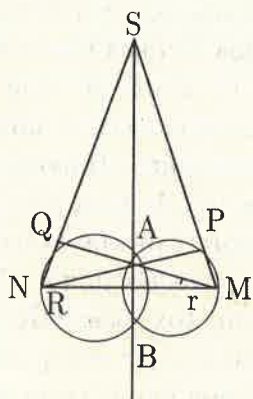
VIII-B1. (Ж.Батболд) $(n^2 + 1) | 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 26 \cdots ((n-1)^2 + 1)$
 байх натурал тоо n төгсгөлгүй олон олдохыг батал.

VIII-B2. (Д.Алтангэрэл) Цагаан толгой 62 үсэгтэй.
 Хэрэв 2 үгийн аль нэг харгалзах байранд байгаа үсгүүд
 ижил бол
 төсөөтэй үгнүүд гээ. Тэгвэл өгөгдсөн 2 урттай 1996 ялгаа-
 тай үгнээс аль ч хоёр нь төсөөтэй биш байхаар 32 үг сонгон
 авч болохыг батал.

VIII-B3. (С.Баасай) $ABCD$ гүдгэр 4 өнцөгт өгөгдөв. AD
 ба CB талын үргэлжлэл M цэгт, CD ба AB талын үргэлжлэл
 N цэгт огтлолцдог бол $AD \cdot AB \cdot NC \cdot MC = BC \cdot CD \cdot MA \cdot NA$
 гэж батал.

БОДОЛТ

VIII-A1.



AB, PM, QN

шулуунууд S цэгт огтлолцдог байг. Нэг цэгээс гарсан огтлогчууд SN, SB, SM-ийн хувьд $SQ \cdot SN =$

$SA \cdot SB = SP \cdot SM \Rightarrow QNPM$ 4 өнцөгт тойрогт багтана $\rightarrow QA \cdot AM =$

$NA \cdot AP$. $\angle PNM = \alpha$,

$\angle QMN = \beta$, γ_1 -ийн радиус R, γ_2 -ийн радиус r гэе.

Тэгвэл $AN = 2 \cdot R \cos \alpha$, $AM = 2 \cdot r \cos \beta$,

$$NA \cdot NP = NM \cdot (NM - 2 \cdot r), \quad MA \cdot MQ = MN \cdot (MN - 2 \cdot R) \Rightarrow$$

$$NA \cdot (NA + AP) = NM^2 - 2 \cdot r \cdot NM$$

$MA(MA + AQ) = NM^2 - 2R \cdot NM$ адилтгалуудыг хасвал $NA^2 - MA^2 + (NA \cdot AP - MA \cdot AQ) = 2 \cdot NM(R - r)$ буюу $NA^2 - MA^2 = 2 \cdot MN \cdot (R - r)$ болов. $NM = AN \cdot \cos \alpha + AM \cdot \cos \beta = 2 \cdot R \cdot \cos^2 \alpha + 2 \cdot r \cos^2 \beta$ ашиглавал $4 \cdot R^2 \cos^2 \alpha - 4 \cdot r^2 \cos^2 \beta = 2(2 \cdot R \cos^2 \alpha + 2 \cdot r \cos^2 \beta)(R - r) = 4 \cdot R^2 \cos^2 \alpha - 4 \cdot r^2 \cos^2 \beta + 4Rr(\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha) \Rightarrow \cos^2 \alpha = \cos^2 \beta$ $\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta$ AMN гурвалжинд синусын теорем бичвэл $\frac{AN}{\sin \beta} = \frac{AM}{\sin \alpha}$ буюу $\frac{R}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{r}{\operatorname{tg} \beta} \Rightarrow R = r$ болж батлах зүйл батлагдав.

VIII-A2. Бодлогын нөхцлийг хангах 17 цэгийг хоёр цэгийн хоорондох зай 1-тэй тэнцүү бол улаан, 2-той тэнцүү бол хөх, 1 ба 2-ын алинтай нь ч тэнцэхгүй бол ногоон хэрчмээр холбоё. Бэхлэгдсэн A цэгээс 3 өнгийн 16 хэрчим гарах ба Дирихлейн зарчмаар нэг өнгийн 6 хэрчим олдоно. Тэдгээрийг $AA_i, i = \overline{1;6}$ гэе.

I тохиолдол. Эдгээр 6 хэрчим ногоон өнгөтэй бол

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ цэгүүд нөхцөл ёсоор зөвхөн улаан ба хөхөөр холбогдоно. Энд бүх тал нь улаан эсвэл бүх тал нь ногоон гурвалжин олдох ба тэр нь зөв гурвалжин юм ("6 цэгийг хоёр өнгөөр холбоход бүх тал нь адил өнгөтэй гурвалжин олдоно" гэсэн нийтэд түгээмэл бодлогоос гарна).

II тохиолдол. 6 хэрчим улаан өнгөтэй байг. Ногоон байх тохиолдол нь үүнтэй ижил. $A_1, A_2, A_3, \dots, A_6$ цэгүүд ядаж нэг улаан хэрчмээр холбогдвол улаан зөв гурвалжин олдоно. Үгүй бол тэдгээр нь хөх ба ногооноор холбогдоно. I тохиолдолтой адилаар сэтгэвэл бүх тал нь хөх, эсвэл бүх тал нь ногоон гурвалжин олдоно. Бодлогын нөхцөл ёсоор ногоон гурвалжин олдохгүй учир хөх өнгөтэй зөв гурвалжин олдох нь ээ. Бодлого бодогдов.

VIII-A3. $a_n = 0$ байх n олддог гэвэл $-4 = a_{n+1} \cdot a_{n-1} < 0$ болж a_n дараалал сөрөг биш утга авдаг гэдэгт зөрчилдөнө.

$$\Rightarrow a_n > 0. \begin{cases} a_n^2 - 4 = a_{n+1} \cdot a_{n-1} \\ a_{n+1}^2 - 4 = a_{n+2} \cdot a_n \end{cases}$$

адилтгалуудыг хасвал $a_{n+1}(a_{n+1} + a_{n-1}) = a_n(a_{n+2} + a_n)$
 $\Rightarrow \frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} = \dots = \frac{a_3 + a_1}{a_2} = \text{const} = k$ болов.

$$\Rightarrow a_{n+2} = ka_{n+1} - a_n \quad \forall n \in N;$$

$a_2^2 - 4 = a_3 a_1 = 2a_3$ -д $a_3 = ka_2 - 2$, -г орлуулбал $a_2^2 = 2ka_2 \Rightarrow a_2 = 2k \Rightarrow a_1 = 2, a_2 = 2k; a_3 = 2k^2 - 2; \dots, a_n = ka_{n-1} - a_{n-2}; k \in N; (k > 1)$ гэж гарна.

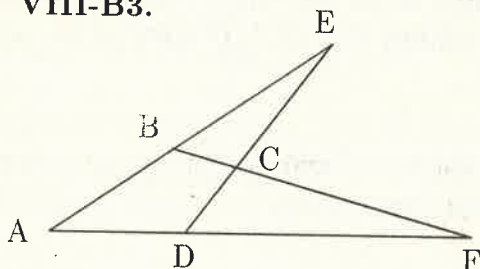
VIII-B1. $(n^2 + 1)((n+1)^2 + 1) = (n^2 + n + 1)^2 + 1$ адилтгалыг ашиглая. $N = (n^2 + n + 1)$ гэж авбал $\forall n \in N$ -ийн хувьд

$$(N^2 + 1) | 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot (n^2 + 1)((n+1)^2 + 1) \cdots ((n^2 + n)^2 + 1)$$

батлах зүйл батлагдав.

VIII-B2. Өгөгдсөн 1996 үгийг эхний үсгүүдээр нь бүлэглэе. $1996 = 62 \cdot 32 + 12$ учир бүлгийн тоо k гэвэл $32 \leq k \leq 62$ болно. Нөгөө талаас 32-аас цөөнгүй үг агуулсан нэг бүлэг 31-ээс цөөнгүй үг агуулсан нэг бүлэг г.м. Ядаж нэг үг агуулсан нэг бүлэг ийм 32 бүлгийг сонгон авах боломжтой. Сүүлчийн бүлгээс нэг үг аваад түүний өмнөхөөс 2 дахь үсэг нь ялгаатай байхаар нэг үг аваад түүний өмнөхөөс 2 дахь үсэг нь урьд сонгосон үгнийхээс ялгаатай байхаар сонгох гэх мэт 32 үг сонгож болох нь илэрхий.

VIII-B3.



$\triangle ABF$ -д

Менелайн теоремийг бичвэл $\frac{AD}{DF} \cdot \frac{FC}{CB} \cdot \frac{BE}{EA} =$

1. Мөн $\triangle ADF$ -д $\frac{AB}{BE} \cdot \frac{EC}{CD} \cdot \frac{DF}{FA} =$

1. Эдгээр адилтгалуудыг үржүүлбэл батлах зүйл гарна.

ММО-32, III даваа, IX анги

Д.Пүрэвсүрэн.

IX-A1. 1001001...001 хэлбэрийн тоонуудын дунд анхны тоо байх уу?

IX-A2. ABC тэгш өнцөгт гурвалжны AD өндөр татав. $\angle DAC$ -ийн биссектрисын суурийг K гэе. BC гипотенузыг K цэгт, AD өндрийг шүргэсэн тойрог ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг дотоод шүргэсэн гэж батал.

IX-A3. n тоог 1995 суурьтай тооллын системд бичээд тэр тоогоо 1996 суурьтай тооллын системд уншихад гарах

тоог a_n гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $a_0, a_1, a_2, \dots$ дараалалд 1996 гишүүнтэй арифметик прогресс олдох уу?

IX-Б1. $x^2 + (x+1)^2 = y^3$ тэгшитгэлийн бүх натурал шийдийг ол.

IX-Б2. $\triangle ABC$ нь багтаасан тойргийн төв нь O , багтсан тойргийн төв I байх адил хажуут биш гурвалжин, D нь A оройгоос BC талд буулгасан өндрийн суурь. Гурвалжныг багтаасан тойргийн радиус R нь BC талд гадаад багтсан тойргийн радиус r_a -тай тэнцүү бол O, I, D цэгүүд коллинеар гэж батал.

IX-Б3. $m \cdot n \cdot p$ ширхэг нэгж кубээс тогтох $m \times n \times p$ хайрцаг хичнээн хайрцгийг агуулах вэ?

БОДОЛТ

IX-A1. $A = 1001 \dots 001$ гэе. $111 \cdot A = \underbrace{1 \dots 1}_{3k}$ болно.

Эндээс $111 \cdot A = \underbrace{1 \dots 1}_k \times 1 \underbrace{0 \dots 0}_{k-1} 1 \underbrace{0 \dots 0}_{k-1}$

гэж гарна. $(\underbrace{1 \dots 1}_k, 111) = q$ болог. $k = 3$ бол 1001001 нь 3-д хуваагдана.

$k \neq 3$ бол $\underbrace{1 \dots 1}_k$ нь q -тэй харилцан анхны хуваагчтай ба

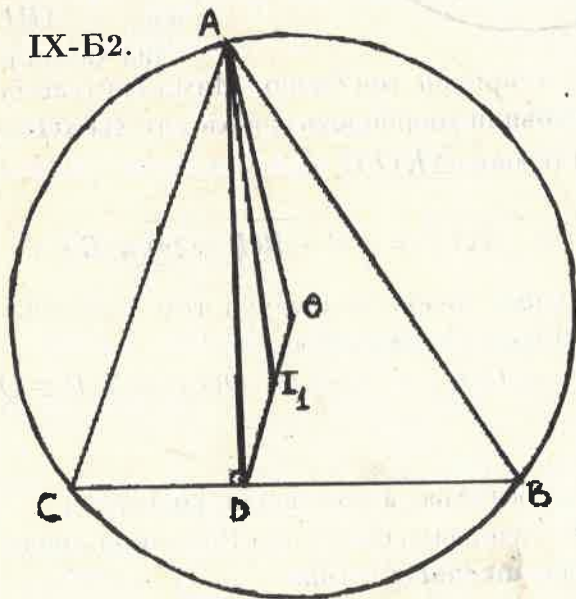
A нь энэ тоонд хуваагдана. Иймд $1001 \dots 001$ хэлбэрийн тоо үргэлж зохиомол тоо байна.

IX-A2.

IX-Б1. $x^2 + (x+1)^2 = y^3 \Rightarrow (2x+1)^2 + 1 = 2y^3$ гэж бичье. Энэхүү тэгшитгэлийг хоёр талыг нь 4-р үржүүлвэл $(2(2x+1))^2 + 4 = (2y)^3$ болно.

Одоо (*) $u^2 + 4 = v^3$ тэгшитгэл авч үзье. Энэ тэгшитгэлийг $(\pm 2, 2); (\pm 11, 5)$ гэсэн хоёр бүхэл тоон шийдтэй болохыг Гауссын тоо ашиглан батлаж болно.¹ Хэрэв манай тэгшитгэл N шийдтэй бол $(2(2x+1), 2y)$ тоонууд (*) тэгшитгэлийн шийд болно. Эндээс анхны тэгшитгэлийг шийдтэй гэвэл $2(2x+1) = 2$, $2y = 2$ ба $y = 1$, $x = 0$ болж энэ $x, y \in \mathbb{N}$ нөхцлийг хангахгүй. Иймд манай тэгшитгэл натурал шийдгүй.

IX-Б2.



O ба D цэгийг холбосон шулууныг

A өнцгийн биссектрисийн огтлосон цэгийг I_1 гээ. $\angle CAD = \angle OAB = 90^\circ - \gamma$ ба AI_1 биссектрис гэдгээс I_1 цэг $\triangle DAO$ -ны A оройн биссектрисийн суурь болно

Өгсөн нөхцлийг бичвэл $r_a = R$ гэдгээс $S = pr = (p-a)R$ болно. Энэ нь $\cos \alpha = \cos \beta + \cos \gamma$ нөхцөлтэй эквивалент юм. $\triangle DAO$ -с AI_1 биссектрисийн уртыг олж.

¹Гауссын тоог диофант тэгшитгэлийг бодоход ашиглах" өгүүлэлийг хар.

$AI_1 = \frac{2 \cdot AD \cdot AO}{AD + AO} \cdot \cos \angle I_1 AD$ томъёонд $AD = 2R \sin \beta \sin \gamma$, $AO = R$

$\angle I_1 AD = \left| \frac{\alpha}{2} + \gamma - 90^\circ \right|$ болохыг тавибал : $AI_1 = \frac{4R \sin \beta \sin \gamma}{1 + 2 \sin \beta \sin \gamma} \cdot \cos \left(\frac{\beta - \gamma}{2} \right)$ гэж гарна.

$AI = 4R \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$ болохыг ашиглан $I \equiv I_1$ байх нөхцөл нь өгсөн нөхцөлтэй эквивалент гэж баталъя.

$AI = AI_1$ нь $\frac{4R \sin \beta \sin \gamma}{1 + 2 \sin \beta \sin \gamma} \cdot \cos \left(\frac{\beta - \gamma}{2} \right) = 4R \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$ ба
 $4 \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \cos \left(\frac{\beta - \gamma}{2} \right) = 1 + 2 \sin \beta \sin \gamma$
 $\Leftrightarrow \cos \beta - \gamma + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 2 \sin \gamma \sin \beta \Leftrightarrow \cos \beta + \gamma + \cos \beta + \cos \gamma \Leftrightarrow \cos \alpha = \cos \beta + \cos \gamma$ болж , $I \equiv I_1$ гэж гарна.
 Эндээс O, J, D цэгүүд коллинеар болох нь батлагдав.

IX-Б3. $n \times m \times p$ хэмжээтэй хайрцагт агуулагдах хайрцаг урт, өндөр, өргөний төгсгөлийн цэгүүдээр нэг утгатай тодорхойлогдоно. Иймд нийт хайрцгийн тоо

$$C_{m+1}^2 \cdot C_{n+1}^2 \cdot C_{p+1}^2 \text{ болно.}$$

ММО-32, IV даваа, IX анги

Ш.Хишигсүрэн, Ө.Энэбиш
 (Монгол-Туркийн сургууль)

IX-A1. (А.Түвшинтулга) Өөрийнхөө цифрүүдийн нийлбэрийн

ямар нэг натурал зэрэгтэй тэнцүү байх 1996-аас их натурал тоо олдох уу?

IX-A2.(В.Адъяасүрэн) a, b, c, d нь эерэг бодит тоонууд ба $a + b + c + d = 1$ нөхцөлийг хангадаг бол

$$\frac{1 + \sqrt{a}}{1 - a} + \frac{1 + \sqrt{b}}{1 - b} + \frac{1 + \sqrt{c}}{1 - c} + \frac{1 + \sqrt{d}}{1 - d} \geq 8$$

гэж батал.

IX-A3.(Ш.Батхишиг) O цэгт гадаад шүргэлцэх γ_1, γ_2 тойргууд өгөгдөв. ω тойрог нь γ_1, γ_2 тойргуудыг гадаад шүргэнэ.

O цэгийг дайрах γ_1, γ_2 тойргуудын ерөнхий шүргэгч нь ω тойргийг 2 нүмд хуваажээ. Тэгвэл эдгээр нумууд нь энэ шүргэгч ба γ_1, γ_2 тойргийн гадаад шүргэгч хоёрын хоорондох өнцгөөс 2 дахин их гэж батал.

IX-B1.(Отгонбаяр.) $\forall \triangle ABC$ -д a, b, c талууд, R багтаасан, r -багтсан тойргийн радиус бол $a^2 + b^2 + c^2 \leq 8R^2 + 2R \cdot \frac{r^2}{R-r}$ гэж батал.

IX-B2.(Д.Хашбаяр)

$\{1, 2, \dots, 1996\}$ олонлогоос $\forall k$ ширхэгийг дарахад үлдсэн тоонууд дотроос өөрөөсөө ялгаатай хамгийн багд нь хуваагддаг тоо ямагт олддог байх хамгийн их k -г ол.

IX-B3.(С.Батболд) Тойрог дээр дурын хоёрын хоорондох зай нь ялгаатай 1997 цэг дээр 1 чоно, 1996 туулай байжээ. Нэгэн эгшинээс эхлэн чоно жигд хурдаар, туулайнууд түүнээс 2 дахин их хурдаар тойрог дээгүүр хөдөлж эхлэв. Ямар нэг амьтан тааралдахад чоно чиглэл ба хурдаа эс өөрчлөх ба туулай хурдаа хадгалан эсрэг чиглэлд хөдөлнө. Яг 500 туулай чонотой эсрэг чиглэлд хөдөлж байх эгшин олдохыг батал.

БОДОЛТ

IX-A1. $7^4 = 2401$. $\rightarrow$ олдоно.

IX-A2. $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-x} = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ функцийг шинжилье.
 $f'(x) = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2} \Rightarrow \forall x, x \in [0; 1[\quad f'(x) > 0 \quad \left. \vphantom{\frac{1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}} \right\} \Rightarrow$
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-\sqrt{x}} = \infty \rightarrow x = 1 \text{ босоо асимптот}$
 $f(x)$ нь $[0, 1[$ завсарт хотгор ²

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n d_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^n d_i x_i\right) \right) \quad d_i = 1/4$$

байхаар сонгож авъя.

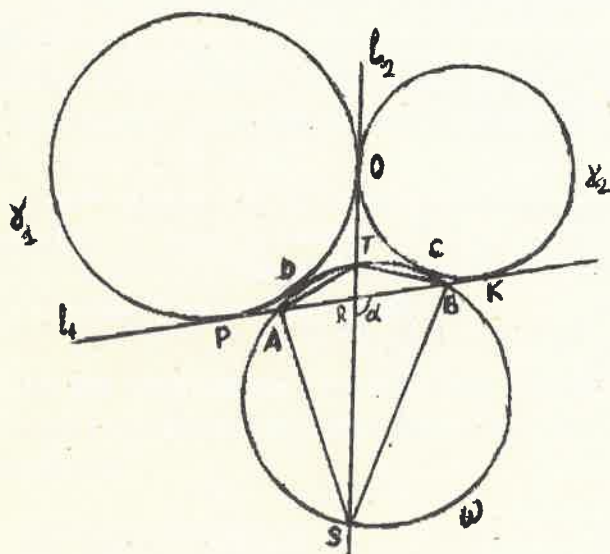
$$1/4 \cdot (f(a) + f(b) + f(c) + f(d)) \geq f(1/4(a+b+c+d)); a+b+c+d =$$

$$1; \frac{1+\sqrt{a}}{1-a} + \frac{1+\sqrt{b}}{1-b} + \frac{1+\sqrt{c}}{1-c} + \frac{1+\sqrt{d}}{1-d} \geq 4f(1/4).$$

$$4 \cdot f(1/4) = 4 \cdot \frac{1}{1-\sqrt{1/4}} = 4 \cdot 2 = 8.$$

IX-A3.

²Иенсений тэнцэл биш. $a = b = c = d$ үед буюу $a + b + c + d = 4a = 1 \Rightarrow a = 1/4$ ба бүгд $1/4$ үед тэнцэлдээ хүрнэ.



γ_1, γ_2 тойргийн ерөнхий шүргэгчийн ω тойрогтой огтлолцсон цэгүүд T, S . γ_1, ω тойргуудын, мөн γ_2, ω тойргуудын шүргэлцсэн цэгүүдийг харгалзан D, C гэе. γ_1, γ_2 тойргуудын гадаад шүргэгч нь ω тойргийг

A, B цэгүүдээр огтлолдог ба түүнийг l_1 гэе. γ_1, γ_2 -ийн ерөнхий шүргэгчийг l_2 гэе. $\gamma_1 \cap l_1 = P, \gamma_2 \cap l_1 = K$. l_1 ба l_2 -ийн огтлолцлоор үүсэх өнцгийг α гэвэл батлах зүйл нь $\alpha = \frac{\angle TBS}{2}$ буюу $\alpha = \angle SAT$ ($l_1 \cap l_2 = R$) гэж батлахтай утга ижил болно. T, A, B ба γ_1 тойргийн хувьд Кезийн теоремийг хэрэглэвэл

$AB \cdot TO + AP \cdot BT = BP \cdot AT$; Мөн T, B, A ба γ_2 тойргийн хувьд $AB \cdot TO + BK \cdot AT = BT \cdot AK$. Эндээс $AP \cdot BT - BK \cdot AT = BP \cdot AT - BT \cdot AK \Rightarrow BT(AP + AK) = AT(BK + BP)$.

$\left. \begin{array}{l} AP + AK = PK \\ BK + BP = PK \end{array} \right\} \Rightarrow BT = AT \Rightarrow \triangle ATB \text{ адил хажуут}$
 $\Rightarrow \angle TAB = \angle ABT \Rightarrow T$ цэг ATB нумыг хагаслан хуваана.

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\sim ADT + \sim BS}{2} \\ \sim ADT &= \sim TCB \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha = \frac{\sim TCB + \sim BS}{2} = \frac{\sim TCS}{2}.$$

IX-Б1. Бодолт 1.

Лемма. Огторгуйн $\forall$ гурван a, b, c векторын хувьд

$$\begin{aligned} (a, a)(b, b)(c, c) + 2(a, b)(b, c)(c, a) &\geq \\ &\geq (a, a)(b, c)^2 + (b, b)(a, c)^2 + (c, c)(a, b)^2 \end{aligned}$$

болохыг батал. Энд (a, b) нь a, b векторуудын скаляр үржвэр.

Баталгаа. $\forall \lambda \in R$ -ийн хувьд $(a + \lambda b, a + \lambda b)(c, c) \geq (a + \lambda b, c)^2$ байна.

$$\Rightarrow \lambda^2((b, b)(c, c) - (b, c)^2) + 2\lambda((a, b)(c, c) -$$

$$(a, c)(b, c)) - ((a, a)(c, c) - (a, c)^2) \geq 0.$$

$$D = ((a, b)(c, c) - (a, c)(b, c))^2 - ((b, b)(c, c) - (b, c)^2)((a, a)(c, c) - (a, c)^2)$$

$b \parallel c$ үед $D = 0$ нь илт. Эсрэг тохиолдолд $4D$ нь $\forall \lambda \in R$

утганд сөрөг биш байдаг квадрат гурван гишүүнтийн дискриминант болох тул $D \leq 0$ байна. Лемм батлагдана.

Одоо бодлогоо бодоё. $(\vec{a}, \vec{a}) = 3$; $(\vec{b}, \vec{b}) = p^2 - 2qr$; $(\vec{c}, \vec{c}) = q^2 - 2p^2$;

$$(\vec{a}, \vec{b}) = p; \quad (\vec{b}, \vec{c}) = 3pr; \quad (\vec{a}, \vec{c}) = q;$$

$$3(p^2 - 2qr)(q^2 - 2p^2) + 2p \cdot pr \cdot q \geq 3(3pr)^2 + (p^2 - 2qr)q^2 + (q^2 - 2p^2)p^2 \text{ болно.}$$

$$4p^4 - (q^2 + qr - 27r^2)p^2 + 4q^3r \leq 0. \Rightarrow$$

$$p^4 - 2(2R^2 + 10Rr - r^2)p^2 + (4R + r)^3r \leq 0$$

$$\Rightarrow p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + \sqrt{(2R^2 + 10Rr - r^2)^2 - 4(4R + r^3)r} =$$

$$= 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{(R - 2r)R}.$$

Энд $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторууд коллинеар үед тэнцэл биелнэ. Өөрөөр хэлбэл x, y, z нь ямар нэг квадрат гурван гишүүнтийн бодит

язгуурууд болох ёстой. $\Rightarrow$ аль нэг хоёр нь тэнцүү үед буюу анхны гурвалжин адил хажуут үед тэнцэл биелнэ.

$$\begin{aligned}\sqrt{R(R-2r)} &= \sqrt{(R-r)^2 - r^2} = (R-r) \sqrt{1 - \frac{r^2}{(R-r)^2}} \leq \\ &\leq (R-r) \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{(R-r)^2}\right) = R-r - \frac{r^2}{2(R-r)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + Rr^2 + \frac{r^2}{R-r} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 8R^2 + \frac{2R}{R-r} \cdot r^2$$

болж батлагдав. $R = 2r$ буюу $a = b = c$ үед тэнцэл биелнэ. Мөн аль нэг 2 тал нь тэнцүү бөгөөд нөгөө тал нь тэг рүү хангалттай ойрхон үед тэнцэл биелнэ.

Бодолт 2. $\triangle ABC$ -ын багтсан, багтаасан болон Эйлерийн тойргийн төвүүдийг харгалзан I, O, E гэвэл гурвалжны тэнцэл биш ёсоор $IE + EO \geq IO$ болох ба эднийг p, R, r -ээр илэрхийлсэн бэлэн томъёонуудаар бичвэл

$$1/2(R-2r) + 1/2\sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)} \geq \sqrt{R(R-2r)}$$

болно. Эндээс манай тэнцэл биш батлагдана.

IX-Б2. $\forall m$ -ийн хувьд, $(m \in 1, 2, \dots, 1996)$ m хамгийн бага болохын тулд

$$\underbrace{1, \dots, m-1}_{m-1} \underbrace{m, \dots, 1996}_{\left[\frac{1996}{m}\right]-1 \text{ ширхэг } m - \text{ийн хуваагдагч}}$$

k -ширхэг тоог дарахад үлдсэн тоонуудын дотор хамгийн бага нь m байсан ба мөн m -ийн ямар нэг хуваагдагч үлдсэн гэвэл $m-1 + \left[\frac{1996}{m}\right] - 1 > k$, $m-1 + \frac{1996}{m} - 1 > k$ (1) $m +$

$$\frac{1996}{m} > k + 2.$$

$m + \frac{1996}{m} \geq 2\sqrt{1996} > 89$, $89 > k + 2$ (2) $87 > k$ гэж (1) -ийг хангах k -ийн хамгийн их утгыг олохын оронд k -г багасгаж (2)-г хангах k -ийн хамгийн их утгыг $k=86$ гэж оллоо. Одоо үед $k = 87$ үед болохгүй гэдгийг жишээгээр харуулъя. Эсрэгээс болдог гээд $m = 45$ гэж сонговол $45 - 1 + [\frac{1996}{45}] - 1 > 87$, $87 > 87$. гэж (1) биелэх ёстой гэдгийг зөрчив.

Б3. 2 туулай уулзахад бие биеэ нэвтэрч байна гэж үзэж болно. Чоныг тооллын эх болгож авбал тойргийн I чиглэлд (чонын эсрэг) $3V$ хурдаар, II чиглэлд (чонотой ижил) V хурдаар явж үзэгдэнэ. (Энд V нь чонын хурд) I чиглэлд яваа туулай тооллын эх O цэгт тулмагц II чиглэлд шилжих ба урвуу бас хүчинтэй. Иймд I, II чиглэлд яваа туулайнуудыг 2 тойргоор гүйж байгаа ба 2 тойрог O цэгээр шүргэлцсэн гэж үзвэл болно. I чиглэлийн тойргийг 3 дахин богиносгож түүгээр яваа туулайнуудыг V хурдтай яваа гэж загварчилъя. Тэгвэл бодлого I тойрог дээр яг 500 туулай олдохыг батлахад шилжинэ. $f(t)$ -р t эгшин I тойрог дээр байх туулайн тоог тэмдэглэе. Дирихлейн зарчимаар $f(t_n) \geq \frac{1996}{4} = 499$ байх эгшин олдоно. Эсрэгээс $f(t) = \text{const} = 499$ гэвэл бүх туулайнуудын хоорондын зай өөр гэдэгтэй зөрчилдөнө. $\Rightarrow \exists t_r, f(t_r) \geq 500$ $f(t)$ функц дискрет ба утгаа нэг нэгээр өөрчилнө. $\Rightarrow \exists t_0; f(t_0) = 500$.

ММО-32, X анги, III даваа

Ц.Дашдорж

X-A1. (А.Хашбаатар) A цэгт оройтой өнцгийн нэг тал дээр B, C хоёр цэг, нөгөө тал дээр P цэг тус тус өгчээ. $\triangle ABP$, $\triangle ACP$ тус бүрт багтсан тойргийн BA, BP талуудтай шүргэлцсэн цэгүүдийг дайрсан шулууныг l_1 , харин CA, CP тал-

тай шүргэлцсэн цэгүүдийг дайрсан шулууныг l_2 гэв. Хэрэв P цэг A оройгоос гарсан өгөгдсөн цацрагаар гүйх бол l_1, l_2 шулуунуудын огтлолцлын цэгүүдийн геометр байрыг ол.

Х-А2.(Ц.Баясгалан) Дараахь нөхцөлүүдийг хангах бүх $f : R \rightarrow R$ функцүүдийг ол.

а. f нь монотон өсдөг ($x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$);

б. $f(x + f(y)) = f(x + y) + 1$; ($x, y \in R$).

Х-А3.(Ц.Баясгалан) x_n дараалал нь

$$x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}, (n \geq 1), \quad 0 < x_1 < 1$$

нөхцлийг хангадаг байг. Энэ дараалал зааглагдсан гэдгийг батал. ($\exists c \in R : x_n < c (\forall n \in N)$).

Х-Б1.(Д.Пүрэвсүрэн.) $\triangle ABC$ -ны хавтгайд өгсөн цэгийг A, B, C оройнуудтай холбоход эсрэг талуудыг огтлох цэгүүдийг харгалзан K, L, M гэв. M цэгийг дайрсан KL -тэй параллель шулуун AK -г V цэгээр, BC -г W -цэгээр огтолдог бол $|VM| = |MW|$ гэж батал.

Х-Б2.(А.Энхбаяр.) Хэрэв $a_n = n^{n!}$, s_n нь a_n тооны сүүлчийн цифр бол $0, s_1 s_2 s_3 \dots s_n \dots$ бутархай рациональ тоо болохыг батал.

Х-Б3.(В.Адъяасүрэн)

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 1$ бодит тоонууд¹ $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ нь

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

¹1)Зохиогч сөрөг биш бодит тоонууд гэж томъёолсон ба тэр тохиолдолд бодолтоо хийж өгөөгүй байна.

тул $AM = AB \cdot \cos \alpha = c \cdot \cos \alpha$. Эндээс B цэгийг хөдөлгөхгүй бол C орой тэр тал дээгүүрээ гүйхэд M цэг хувирахгүй. Харин B орой тэр тал дагуугаа хөдөлбөл M цэг AA_1 биссектрис дагуу хөдлөх тул түүний геометр байр энэ биссектрис болно. Харин бодлогод B оройг P гээд AC тал дээр бас нэг B цэг авсан, M цэгийг өгсөн байгааг тооцно биз ээ.

X-A2. f функц монотон эрс өсдөг гэж харуулъя. Эсрэгээс нь $\exists y, a \in R, f(y) = f(y+a)$ гэж үзье.

$$\begin{aligned} f(a+f(y)) &= f(a+y) + 1 = f(a+f(a+y)) = f(2a+y) + 1 \\ \Rightarrow f(a+y) &= f(2a+y) \quad f(y) = f(y+a) = f(y+2a) = \dots = f(y+na); \\ n \in N \quad f(-a+f(y)) &= f(y-a) + 1 = f(-a+f(y+a)) = f(y) + 1 \Rightarrow \\ f(y) &= f(y-a) \quad f(y) = f(y+na); \quad n \in Z \Rightarrow \forall t, \exists n; y < t < y+na \\ \Rightarrow f(y) &< f(t) < f(y+a) = f(y) \quad \forall t, \quad f(y) = f(t) = \text{const.} \end{aligned}$$

Энэ нь б) нөхцөлд зөрчнө. Иймд $f(x)$ функц монотон эрс өсдөг болно. ($x < y$ бол $f(x) < f(y)$)

$$f(x+f(y)) = f(x+y) + 1 = f(y+x) + 1 = f(y+f(x))$$

$$\Rightarrow f(x+f(y)) = f(y+f(x)) \Rightarrow x+f(y) = y+f(x);$$

$y = 0$ гэвэл $f(x) = f(0) + x; f(0) = 1$ г. олъё.

$$\begin{cases} f(1) = f(0) + 1 \\ f(f(0)) = f(0) + 1 \end{cases} \Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow f(x) = x + 1.$$

X-A3.

$$x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}; x_n < nx_1$$

гэж индукцээр батлая.

$$x_2 = x_1 + x_1^2 \Rightarrow x_2 < 2x_1$$

үнэн. $x_n < nx_1$ байг.

$$0 < x_1 < 1; x_{n+1} = x_n + x_n^2/n^2 < nx_1 + n^2 x_1^2/n^2 = nx_1 + x_1^2 < (n+1)x_1$$

$$\Rightarrow \forall n; x_n < nx_1. \quad \exists m; x_m < m - 1$$

гэж үзүүлье! Эсрэгээс нь

$$\forall m; \quad x_m \geq m - 1, \quad x_n < nx_1 \quad (n > 2)$$

гэдгээс

$$n - 1 \leq x_n < nx_1 \Rightarrow (n - 1)/n < x_1$$

эндээс n хангалттай их үед зөрчилд орно. Иймд $\exists m; x_m < m - 1$ болов. Одоо энэ m -г бодлогондоо ашиглая! $(n > 2)$ үед

$$1/x_n - 1/x_{n+1} = x_n/(n^2 x_{n+1}) < n^{-2} < 1/(n(n-1)) = 1/(n-1) - 1/n$$

$(n > m)$ үед

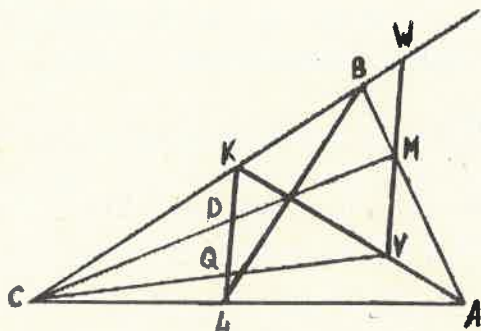
$$\begin{aligned} 1/x_m - 1/x_n &= (1/x_m - 1/x_{m+1}) + (1/x_{m+1} - 1/x_{m+2}) + \dots + \\ &+ (1/x_{n-1} - 1/x_n) < (1/(m-1) - 1/m) + \dots + (1/(n-2) - 1/(n-1)) = \end{aligned}$$

$$1/(m-1) - 1/(n-1) < 1/m - 1 \quad x_m < m - 1 \Rightarrow$$

$$1/x_n > 1/x_m - 1/(m-1) > 0 \Rightarrow x_n < (m-1)x_m/(m-1-x_m) = \text{const}$$

болж бодлого бодогдов.

Х-Б1.



$(BC, K) =$
 $\alpha, (CA, L) =$
 $\beta, (AB, M) = \gamma,$
 гэж хуваа-
 сан бол Чевийн
 теорем ёсоор
 $\alpha\beta\gamma = 1$ C-
 г туйлын эхээр
 авъя.

$$\vec{K} = 1/(1+\alpha) * \vec{B}; \vec{L} = \beta/(1+\beta) * \vec{A}; \vec{M} = 1/(1+\gamma) * \vec{A} + \gamma/(1+\gamma) * \vec{B};$$

Одоо $\vec{B} = 1/2 * (\vec{K} + \vec{Q})$ гэж харуулъя!

$$KL \parallel WV \Rightarrow \triangle CKQ \sim \triangle CWV \Rightarrow$$

төсөөгийн коэффициентийг (δ) гэвэл

$$\vec{D} = a\vec{K} + (1-a)\vec{L} = a/(1+\alpha) * \vec{B} + (1-a)\beta/(1+\beta) * \vec{A}$$

$$\vec{D} = \delta\vec{M} = \delta(1+\gamma) * \vec{A} + \delta\gamma/(1+\gamma) * \vec{B}, \quad \vec{D}$$

нь $\vec{A}$ ба $\vec{B}$ -ийн нийлбэрт нэгэн утгатай задарна.

$$\Rightarrow a/(1+\alpha) = \delta\gamma/(1+\gamma) \Rightarrow \delta = \beta(1+\gamma)/(\beta(1+\gamma) + 2);$$

$$(1+a)\beta/(1+\beta) = \delta/(1+\gamma), \vec{Q}$$

-ийг олж.

$$\vec{Q} = \delta\vec{V} = \delta c\vec{K} + \delta(1-c)\vec{A} \Rightarrow \delta c/(1+\alpha) = b/(1+\alpha)$$

$$\Rightarrow \vec{Q} = b\vec{K} + (1-b)\vec{L}; \quad (1-c)\delta = (1-b)\beta/(1+\beta); \quad b = \delta(1+\beta) - \beta$$

$$\begin{aligned}
 c &= \delta(1 + \beta) - \beta / \delta; 1/2(\vec{K} + \vec{Q}) = \\
 &1/2(\vec{K} + (\delta(1 + \beta) - \beta)\vec{K} + (1 + \beta)(1 - \delta)\vec{L}) \\
 &= 1/(\alpha(\beta(1 + \gamma) + 2))\vec{B} + \beta/(\beta(1 + \gamma) + 2)\vec{A} = \beta/(\beta(1 + \gamma) + 2) * (\gamma\vec{B} + \vec{A}) \\
 &\text{ба}
 \end{aligned}$$

$$\vec{D} = \delta/(1 + \gamma) * (\vec{A} + \gamma\vec{B}) = \beta/(\beta(1 + \gamma) + 2) * (\vec{A} + \gamma\vec{B}) \Rightarrow 1/2(\vec{Q} + \vec{K}) = \vec{I}$$

болж батлагдав.

X-Б2. $n > 3$ үед S_n дараалал үелэхийг баталъя! $n > 3$
ба

$$(n, 10) = 1 \Rightarrow \varphi(10) < n \Rightarrow n^{\varphi(n)} \equiv 1(10) \Rightarrow n! = \varphi(10)k,$$

$$k \in N \Rightarrow n^{n!} \equiv 1(10) \Rightarrow 1, 3, 7, 9$$

-өөр төгссөн 3-аас их тоонууд 10-тай харилцан анхны тул $(m10 + i)^{(m10+i)!} \equiv 1(10), i = 1, 3, 7, 9$ (Энд $i=1, 3$ үед $m > 1$ ба $i=7, 9$ үед $m > 0$ байна).

$$\forall k \in N, \quad 5^k \equiv 5(10) \quad 6^k \equiv 6(10), \quad 10^k \equiv 0(10).$$

Иймд 2, 4, 8 -аар төгссөн тоонуудын хувьд S_i -г олъё!

$$m > 1, (m10 + 2)^{(m10+2)!} \equiv 2^{(m10+2)!} \equiv (2^4)^k \equiv 6^k \equiv 6(10), k \in N$$

$$m > 0, (m10 + 4)^{(m10+4)!} \equiv 4^{(m10+4)!} \equiv (4^2)^k \equiv 6^k \equiv 6(10)$$

$$(m10 + 8)^{(m10+8)!} \equiv 8^{(m10+8)!} \equiv (8^4)^k \equiv 6^k \equiv 6(10), \quad k \in N.$$

$$s_1 = 1, s_2 = 4, s_3 = 9 \Rightarrow 0, s_1 s_2 s_3 \dots =$$

$$0.149(6561610161)(6561610161 \dots)$$

ГЭХ МЭТ ҮЕЛЭНЭ.

$$\Rightarrow 0, s_1 s_2 s_3 s_4 \dots$$

бутархай нь үелэж байгаа тул рациональ тоо болно.

Х-БЗ. (МУИС-ийн Мат- I оюутан Г.Баярмагнайн бодолт)
 n -ээр индукцлэе. $n = 2$ үед $x^x + y^y \geq x^y + y^x (1)$ гэж батлая.
 (1)-д $x \geq y > 1$ гэж үзэж болно.

$$(1) \iff x^x - y^y \geq y^x - y^y \iff x^y(x^{x-y} - 1) \geq y^y(y^{x-y} - 1)$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^y(x^{x-y} - 1) \geq (y^{x-y} - 1), \quad \frac{x}{y} \geq 1$$

ба $x \geq y > 1$ тул сүүлчийн тэнцэл биш илэрхий үнэн, иймд
 (1) үнэн тэнцэл биш болов. $n \geq k$ бүрийн хувьд үнэн гэж
 үзье.

$$n = k + 1 \text{ үед}$$

$$x_1^{x_1} + \dots + x_{k+1}^{x_{k+1}} \geq x_1^{y_1} + \dots + x_{k+1}^{y_{k+1}} \quad (2)$$

гэж батлая. Хэрэв $A = x_1^{y_1} + x_2^{y_2} + \dots + x_{k+1}^{y_{k+1}}$ нь

$$A = (x_1^{y_1} + y_1^{z_1} + z_1^{z_2} + \dots + z_s^{x_1}) + (t_1^{t_2} + t_2^{t_3} + \dots + t_c^{t_1}) + \dots + \\ + (y_{k+1}^{z_{k+1}} + z_{k+1}^{z_{k+2}} + \dots + x_{k+1}^{y_{k+1}})$$

гэж хоёроос цөөнгүй циклүүдийн нийлбэрт тавигддаг бол
 индукцийн өмнөх алхамуудаар (2) шууд батлагдана. Иймд

$$A = x_1^{y_1} + y_1^{z_2} + z_2^{z_3} + \dots + z_k^{x_1}$$

гэсэн ганц цикл байна гэж үзье. $x_1 \geq x_i$, $i = 2, n$ гэж
 үзэж болох нь ойлгомжтой. $A = x_1^{y_1} + z_k^{x_1} + (y_1^{z_1} + z_2^{z_3} + \dots + z_{k-1}^{z_k} + z_k^{y_1}) - z_k^{y_1}$ индукцэд үзэж буйгаар $x_2^{x_2} + \dots + x_{k+1}^{x_{k+1}} \geq y_1^{z_2} + z_2^{z_3} + \dots + z_k^{y_1}$ үнэн, учир нь энд x_1 хаана нь ч орохгүй.
 Иймд $x_1^{x_1} \geq x_1^{y_1} + z_k^{x_1} - z_k^{y_1} - z_k^{y_1}$ -ийг батлах үлдэв. $x_1 \geq z_k$ тул
 $x_1^{y_1}(x_1^{x_1-y_1} - 1) \geq z_k^{y_1}(z_k^{x_1-y_1} - 1)$ тэнцэл биш үнэн. Бодлого
 бодогдов.

ММО-32, IV даваа, X анги

Ц.Батхүү

X-A1. (А.Түвшинтулга) Доорхи 2 чанарыг хангадаг k ширхэг хүмүүсийг олонлог өгөгджээ. 1) Дурын 32 хүн авахад бие биетэйгээ танил 2 хүн олддог. 2) Ямар ч хүн танилтайгаа зэрэгцэн суусан байхаар 1996 хүнийг дугуй ширээнд сонгон суулгаж болдог. Тэгвэл энэ k -ийн хамгийн бага утгыг ол.

X-A2. (Отгонбаяр.)

$$\begin{cases} f(x, f(y, z)) + f(f(x, y), z) = 2y \\ f(x, f(x, y)) = y; \forall x, y \in R \end{cases}$$

нөхцөлүүдийг хангах бүх

$f: R^2 \rightarrow R$ функцийг ол.

X-A3. (Ц.Батхүү.) Зөв гурвалжны тал бүрийг а) 42 б) $6k$ тэнцүү хэсгүүдэд хувааж, хуваалтын цэгүүдийг талуудтай паралель шулуунуудаар холбон а) 1764 б) $36k^2$ жижиг гурвалжингуудад хуваав. Тэгвэл энэ жижиг гурвалжингуудын оройнуудаас аль ч 2 нь татсан нэг шулуун эсвэл нэг тал дээр оршдоггүй байхаар хамгийн ихдээ хичнээн цэг сонгон авч болох вэ?

X-B1. (Ц.Батхүү) $f(x)$ бүхэл коэффициенттэй олон гишүүнт. Хэрвээ $f(1), f(2), \dots$ тоонуудыг 100 оронтой m тоонд хуваахад зөвхөн 0, 1 үлдэгдлүүд өгдөг бол $m = 3^n, n \in N$ хэлбэрийн эсвэл m нь 11 ижил цифр агуулсан тоо болохыг батал.

X-B2. (Өлзийнасан) Хурц өнцөгт гурвалжныг багтаасан тойрог дээр орших M цэгээс уг тойргийн төвийг гурвалжны оройнуудтай холбосон шулуунуудад перпендикуляр шулуун татав.

Тэдгээрийн сууриар оройнуудаа хийсэн гурвалжинд багтсан тойргийн төв нь M цэгийн симпсоны шулуун дээр оршихыг батал.

Х-БЗ. (Д.Хашбаяр) Төгсгөлгүй дөрвөлжин шугамтай насны мөр бүхний яг нэг нүдэнд нь тойрог багтжээ. Дор хаяж

а) 3 ширхэг, б) 4 ширхэг тойрог огтолсон шулуун ямагт олдох уу?

БОДОЛТ

Х-А1. Дурын 32 хүн авахад бие биенээ таньдаг 2 хүн ямагт олддог тул k ширхэг хүмүүсийн дунд бие биенээ таньдаггүй

хүмүүсийн тоо хамгийн ихдээ 30 байх нь ойлгомжтой. Тэгвэл $k - 30 \geq 1996$ тэнцэтгэл биш биелнэ. Учир нь $k - 30 < 1996$ гэвэл ямар ч 1996 хүн авахад нэг ч танилгүй хүн заавал олдоход хүрч бодлогын 2 дахь нөхцөлд харшилна. Одоо бодлогын нөхцөлийг хангах яг $k = 2026$ хүн олдохыг харахад хангалттай. Гэтэл бүгд бие биенээ таньдаг 1996 хүн, бие биенээ таньдаггүй 30 хүнээс тогтсон олонлог бодлогын нөхцөлийг хангах нь ойлгомжтой.

Х-А2. Бичлэг хялбарчлах зорилгоор

$$\begin{cases} x \circ (y \circ z) + (x \circ y) \circ z = 2y(1) \\ x \circ (x \circ y) = y(2) \end{cases} \quad \text{гэж тэмдэглэе. Тэгвэл (1)-}$$

д $y \rightarrow x$ сольж (2) -г ашиглавал $(x \circ x) \circ y = 2x - y(3)$ болно. (1)-д $z \rightarrow y \circ z$ гээд гарсан илэрхийлэлд $x \rightarrow x \circ x$ гэвэл $2x - z + (2x - y) \circ (y \circ z) = 2y(4)$ болно. $2x - y \rightarrow x$; $x \circ (y \circ z) = -x + y + z(5)$ болох ба (5)-д $x \rightarrow 0 \circ 0$ гээд (3)-г анхаарвал $y \circ z = 0 \circ 0 - y - z$ болно. Иймд $\forall x, y \in R$

хувьд $f(x, y) = a - x - y$ функц бодлогын нөхцөлийг хангах нь тодорхой, энд $a = 0$ оо

Х-А3. Жижиг гурвалжингуудын оройн цэг болгонд тэр цэгийн оршин байгаа шулуунтай параллель талаас уг шулуун хүртэлх дугааруудыг харгалзуулвал нийлбэр нь ямагт а) 42, б) 6k байх 3 тооноос тогтох координатын систем оруулж ирж болно. Бодлогын нөхцөлийг хангах n ширхэг цэгүүдийн 1-р координатууд ялгаатай тул тэдгээрийн нийлбэр $0 + 1 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}$, бүх 3 координатуудын нийлбэр $\frac{3n(n-1)}{2}$ -ээс багагүй байна. Нөгөө талаас энэ нийлбэр а) $42n$ б) $6kn$ гэдгээс а) $\frac{3n(n-1)}{2} \leq 42n$ буюу $n \leq 29$, б) $\frac{3n(n-1)}{2} \leq 6kn$ буюу $n \leq 4k + 1$. Одоо яг а) $n = 29$ б) $4k + 1 = n$ байх байгуулалтыг эхлээд өгөхөд хангалттай. Гурвалжны медиануудын дагуу орших $3k + 1$ ширхэг оройнуудын талаас нь эхлэн $2k + 1$ оройг авбал үлдсэн $2k$ шулуун бүр дээр бодлогын нөхцөлийг хангахаар 1 цэгийг авч болно. Энэ байгуулалт нэг утгатай биш ба бусад n-ийн хувьд ($n \neq 6k$) түүний хамгийн их утгад харгалзах байгуулалт ямагт олдох уу гэдэг асуудал сонирхолтой юм.

Х-В1. Эсрэгээс нь p ба q нь m тооны анхны тоон хуваагчид болог. Тэгвэл $f(a) = 0(\text{mod } p)$, $f(b) = 1(\text{mod } q)$ байх a, b тоонууд олдох нь бодлогын нөхцөлөөс илт. Үлдэгдлийн тухай хятадын теоремоор

$$\begin{cases} x \equiv a(\text{mod } p) \\ x \equiv b(\text{mod } q) \end{cases} \text{ систем } x_0 \text{ гэсэн шийдтэй. Энэ } x_0 \text{-ын хувьд}$$

$f(x_0) = 0(\text{mod } m)$, $f(x_0) = 1(\text{mod } m)$ болоход хүрч $f(x_0) = 0(\text{mod } p)$, $f(x_1) = 1(\text{mod } q)$ гэдэгт харшилна. Иймд $m = p^n$, p-анхны тоо, байхад хүрнэ. Хэрвээ $m \neq p^n$ ба 11 ижил цифр агуулдаггүй гэвэл m гэвэл цифрүүдийн нийлбэр $10(0 + 1 + \dots + 9) = 450$ болж m тоо нь 3-т хуваагдахад хүрнэ. Дашрамд

хэлэхэд бодлогын нөхцөлийг хангадаг олон гишүүнт оршин байхыг харах нь сонирхолтой.

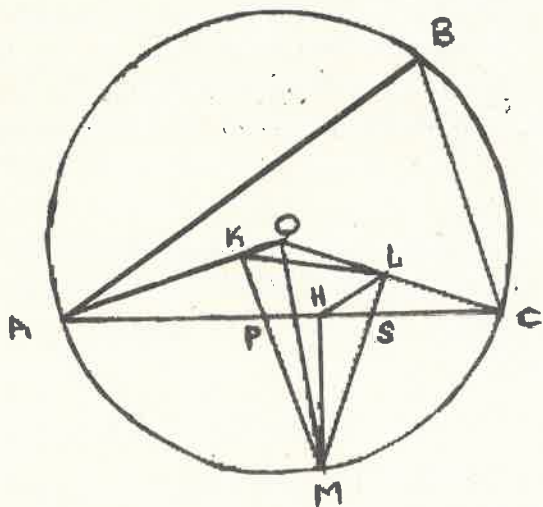
Х-Б2. Математикийн I ангийн Б.Баяржаргалын бодолт

$$\left. \begin{aligned} \angle OAC = \alpha = \angle LCS \quad \angle APK = 90^\circ - \alpha = \angle HPM \\ \angle LSC = 90^\circ - \alpha = \angle HSM \end{aligned} \right\} \Rightarrow PM = MS$$

Эндээс MH нь $\triangle MPS$ -ийн биссектрисс болно.

(1) Мөн $\angle PMS = 2\alpha^*$

$\angle MCH = \beta$ гэе. $\angle MHC = \angle MLC = 90^\circ \Rightarrow MHLC$ нэг тойрог дээр оршино. Эндээс $\angle HLM = \beta$ (2) $\angle OKM = \angle OLM = 90^\circ \Rightarrow KOLM$ нэг тойрог дээр оршино. Эндээс $\angle KCM = \angle KLM$ (3) Мөн $\angle KOL = 180^\circ - \angle KML \stackrel{(*)}{=} 180^\circ - 2\alpha$, $\angle MOC = 180^\circ - 2\angle OCM = 180^\circ - 2(\alpha + \beta) = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$ (3), $\angle KOM = \angle AOC - \angle MOC = 180^\circ - 2\alpha - 180^\circ + 2\alpha + 2\beta = 2\beta = \angle KLM$ (4) (2) ба (4)-өөс LH мөн.



$\angle KLM$ -ийн биссектрис болно. Мөн (1) буюу MH нь $\angle KML$ -ийн биссектрис гэдгээс H нь $\triangle KLM$ -д багтсан тойргийн төв болох ба M цэгийн Симпсоны шулуун нь H -ийг дайрдаг (тодорхойлолтоос) учир батлагдав.

Х-Б3. Дарааллын дэд дарааллын хязгааруудын олонлогийн доод (дээд) торгон заагийг нь дарааллын доод (дээд) хязгаар гэнэ. Доод хязгаар руу нь нийлдэг дэд дараалал

олдоно. Өгсөн $f(x)$ функцийн хувьд

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

байх $\{x_n\}$ дараалал авч хэрвээ $f(x)$ дарааллын хязгаар оршдог өөрөөр хэлбэл

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0} f(x_n) = a$$

байдаг бол a тоог $f(x)$ функцийн $x \rightarrow x_0$ үеийн тухайн хязгаар гэнэ. $x \rightarrow x_0$ үеийн тухайн хязгааруудын олонлогийн доод (дээд) тогон заагийг $f(x)$ -ийн $x \rightarrow x_0$ доод (дээд) хязгаар гэнэ. Доороосоо зааглагдсан функц нь эсвэл доод хязгаартай байна эсвэл тухайн хязгаар бүр нь хязгааргүй байна.

Өгүүлбэр. Хавтгайд бүгд адил l радиустай тоологдом ширхэг тойргийн олонлог өгчээ. Бэхэлсэн Z цэгийн хувьд $N(R)$ нь Z дээр төвтэй R радиустай тойрогт бүтнээрээ агуулагдах тойргийн тоо байг. Хэрэв хавтгайн дурын шулуун өгсөн олонлогоос l -ээс ($l \in N$) цөөн тойрог дайрдаг бол

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N(R)}{R} = 0$$

байна.

Баталгаа. Эсрэгээс нь

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N(R)}{R} \neq 0$$

гэж үзье. $\frac{N(R)}{R} > 0$ тул

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N(R)}{R} = \infty$$

эсвэл a , $a > 0$ байх ёстой. Иймд

$$\exists \{R_n\}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$$

ба $\exists R_0 > 0$; $\exists c > 0$; $R_0 < R_n, \frac{N(R_n)}{R_n} > c$ байна. Z -ээс тойргууд хүртэлх зай үл буурах байхаар өгсөн олонлогийн элементүүдийг дугаарлая. i -р тойргийн төв ба Z -г дайрсан шулуунд перпедикуляр диаметрийн үзүүрээс Z хүртэлх зайг d_i гэе.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{d_i} \quad (1)$$

нийлбэрийг авч үзье. $\forall d > 0$ тоо сонгон авъя. $d > d_i$ байх d_i -ийн тоог m гэвэл $\exists R_k > R_0$; $\frac{2m}{R_k} < c$ байна. R_k -аас бага d_i -ийн тоог M гэе. Тодорхойлолт ёсоор $M \geq N(R_k)$ байх нь илэрхий.

$$S = \frac{1}{d_{m+1}} + \dots + \frac{1}{d_M}$$

нийлбэрийг авч үзвэл

$$S \geq \frac{M-m}{R_k} = \frac{M}{R_k} - \frac{m}{R_k} > \frac{N(R_k)}{R_k} - \frac{m}{R_k} > c - \frac{c}{2} > \frac{c}{2}$$

тул (1) нийлбэр зааглагдахгүй. Z дээр нэгж радиустай тойрог татаад тойргуудынхаа авч үзсэн диаметруудийг проекцлоё. i -р тойргийн диаметрийн проекцын урт a_i байг. $a_i > \frac{2r}{d_i}$ байх нь илэрхий. Иймд $\exists m \in N$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m > 2r \left(\frac{1}{d_1} + \dots + \frac{1}{d_m} \right) > 2\pi l$$

болж Дирихлейн тасралтгүй зарчмаар ℓ ширхэг нум ерөнхий цэгтэй. Энэ цэг ба Z -ийг дайрсан шулуун ℓ ширхэг тойрог дайрах болж зөрчил гарна.

Одоо өгсөн бодлогыг бодъё. Эсрэгээс нь 3 тойрог дайрсан шулуун байхгүй гэж үзье. Мөрийн шулуунуудыг дэс дараалуулан Z тоонуудаар дугаарлая. i ба $i+1$ -р мөрийн хооронд орших тойргийг i -ээр дугаарлая. 0 ба 1 тойргийн шулуунтай параллель биш дотоод шүргэгчийг татаад l_1 , 0 ба -1 тойргийн дотоод шүргэгчийг l_{-1} гэе. Тэгвэл 2-оос их дугаартай тойргууд нь l_1 ба l_{-1} завсар орших болно. l_1 ба l_{-1} -ийн О шулуунтай аль бага өнцөг үүсгэдэгийг нь l гэе. Мөн l_1 ба l_{-1} огтлолыг Z гэе. l -ийн i -р шулуунтай огтлолцох цэгийг Z_i гэж тэмдэглэвэл Z төвтэй Z_i дайрсан тойрогт дор хаяж $n-2$ ширхэг тойрог бүтнээрээ агуулагдана. $\forall R > 0$ ба $ZZ_{n-1} < R < ZZ_n$ тооны хувьд $N(R) \geq n-3$ иймд $\frac{N(R)}{R} \geq \frac{n-3}{ZZ_n}$ тул

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N(R)}{R} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{ZZ_1} = \frac{n-3}{ZZ_n + (n-1)Z_1Z_2} = \frac{1}{Z_1Z_2} > 0$$

болж зөрчил гарна.

ММО-32, багын багш, III -даваа

Ү.Маам

ББ-А1. 36-д хуваагддаг $\overline{34x5y}$ хэлбэрийн бүх 5 оронтой тоонуудыг ол.

ББ-А2. Өглөө дэлгүүрт 15,16,18,19,20,31-н литрийн 6 савтай сүү ирсэн. Эдгээр савтай сүүнээс үдээс өмнө гурван савтай сүү нь зарагдаж харин үдээс хойш хоёр савтай сүүг зарсан. Үдээс өмнө зарагдсан сүү нь үдээс хойшхи зарагдсан сүүнээс 2 дахин их байсан бол үдээс өмнө ямар савтай сүүнүүд зарагдсан бэ?

ББ-А3. 12 хүнд 12 талхыг хувааж өгөхдөө эрэгтэй хүнд 2 талх, эмэгтэй хүнд $1/2$ талх, хүүхдэд $1/4$ байхаар бодож хуваарилсан бол хэдэн эрэгтэй, эмэгтэй хүүхэд байсан бэ?

ББ-А4. 1-ээс 96 хүртэлх тоог аль нь ч хөрш хоёр тооны нийлбэр анхны тоо байхаар цувруулан бичиж болох уу?

БОДОЛТ

ББ-А1. $3+4+x+5+y = 9k$ байх ёстой. Үүнээс $3+x+y = 9(k-1)$ Энд $3 < 9(k-1) < 21$ болно. $\begin{matrix} a.k-1=1 \\ b.k-1=2 \end{matrix}$ Тэгвэл

$k=2; k=3$ байх

$k=2$ үед $3+x+y = 9 \Rightarrow x+y = 6$ болж 4|5y байх ёстой.

$50+y = 4m \Rightarrow$ эндээс $y = 2$; эсвэл $y = 6$.

Хэрэв $y = 2$ үед $x = 4$

$y = 6$ үед $x = 0$ болно.

$k = 3$ үед $3+x+y = 18 \Rightarrow x+y = 15$ болж $y = 2$ бол $x = 13$ буюу шийдгүй $y = 6$ бол $x = 9$ болно. Иймд 34452, 34056, 34956 гэсэн гурван шийдтэй.

ББ-А2. Үдээс хойшхи зарагдсан сүүнээс 2 дахин их гэвэл бүтэн өдрийн зарагдсан сүүний хэмжээ 3-т хуваагдана. Гэтэл нийт дэлгүүрт $15+16+18+19+20+31=119$ л сүү ирсэн. 119-ыг 3-т хуваахад 2 үлдэгдэл өгөх ёстой болно. Тэгвэл зарагдаагүй сүүний хэмжээ 3-т хуваахад 2 үлдэгдэл өгнө. Тэгвэл 15,16,18,19,20,31 гэсэн тоонуудаас зөвхөн 20 нь 3-т хуваахад 2 үлдэгдэл өгнө. Иймд бүтэн өдрийн турш $119-20=99$ л сүү зарагдсан ба өглөө нь $99 \cdot \frac{2}{3} = 66$ л, үдээс хойш 33 л сүү тус тус зарагджээ. Тэгвэл 15,16,18,19,31 гэсэн тоонуудаас 15 ба 18 гэсэн 2 тооны нийлбэр 33-тай тэнцэх учраас өглөө 16,19 ба 31 литрийн савтай сүү зарагдаж үдээс хойш 15,18 литрийн савтай сүү зарагдсан байна.

ББ-А3. Тэгшитгэлээр бодвол $\begin{cases} x+y+z=12 \\ 2x+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=12 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 8x + 2y + z = 48 \end{cases} \Rightarrow 7x + y = 36 \Rightarrow x = \frac{36-y}{7}$$
 Энд y -ийн авч болох утга нь $(1, 8, 15, 22, 29)$ болох ба зөвхөн $y=1$ үед нөхцөл биелэх тул $x=5$; $y=1$; $z=6$ болно. 5 эрэгтэй, 1 эмэгтэй 6 хүүхэд байжээ.

ББ-А4. (Мат II оюутан Б.Батбаясгалангийн бодолт) $s \leq 92$ үед $a_s = \begin{cases} 4 + s; & s - \text{сондгой} \\ 98 - s; & s - \text{тэгш} \end{cases}$ гэж тодорхойлогдох a_s дараалал авч үзье. $\{a_s\}$ дарааллын хувьд $a_n + a_{n+1}$ нь n сондгой бол 101, n тэгш бол 103 гэсэн анхны тоонууд болох ба 5, ..., 96 тоонууд тус бүр 1 удаа орно. $a_{92} = 6$ ба $a_{93} = 1, a_{94} = 2, a_{95} = 3, a_{96} = 4$ гэвэл бид 1, ..., 96 тоонуудыг дараалсан 2-ынх нь нийлбэр анхны тоо байхаар цувуулан бичиж чадаж байна.

ММО-32, IV даваа, Багын багш

Г.Баярмагнай (МУИС, мат I оюутан)

ББ-А1. Аль ч хоёрынх үржвэр нийлбэртээ хуваагдах харилцан ялгаатай арван натурал тоог ол!

ББ-А2. 1, 2, 3, ..., 29, 30 тоонуудыг гурав гурваар нь хэсэг бүр дэх тоонуудын аль нэг нь нөгөө хоёрынхоо нийлбэртэй тэнцүү байхаар 10-н хэсэгт хувааж болох уу?

ББ-А3. $S_1 = \{1, 2\}, S_2 = \{1, 2, 3\} \dots, S_9 = \{1, 2, \dots, 9, 0\}$ байх 9-н олонлог өгөв. Тэгвэл $a_i \in S_i$ ба $i \neq j$ хувьд $a_i \neq a_j$ байх $\overline{a_1 a_2 \dots a_9}$ гэсэн 9-н оронтой тооны нийт тоог ол!

ББ-Б1. N натурал тоо бол $N(N-1)$ ба $(N+1)^2$ тоонуудын цифрүүдийн нийлбэр нь ялгаатай болохыг батал.

ББ-Б2. Тойргийг 32 ширхэг 1 урттай, 1996 ш 2 урттай, 32 ш 3 урттай 2060 нумд хувааж хуваалтын цэгүүдийг тэмдэглэв. Диаметрийн төгсгөлүүд болох тэмдэглэгдсэн 2 цэг олдоно гэж батал.

ББ-Б3. А хотоос В хот руу өглөө 7⁰⁰-д гарч 22⁰⁶-д хүрчээ. Буцахдаа 5⁰⁰-д гарч 16⁵⁴-д гарч ирсэн. Ирэх ба буцахдаа замын гуанзыг нэгэн ижил цагт дайран өнгөрсөн ба 2 хотын хоорондох зай 630 км бол гуанз хаана орших вэ?

БОДОЛТ

ББ-А1. Эхлээд $\frac{ab}{a+b} \in N$ байх a, b гэсэн 2 натурал тоо олъё. Энэ 2 тоог $a = 2x, b = 4x$ хэлбэртэйгээр хайя. $\frac{ab}{a+b} = \frac{8x^2}{6x} = \frac{4x}{3}, 3|x$ байвал a, b нь бидний олох тоонууд мөн. Одоо дээрх чанартай 3-н тоог $a = 2x, b = 4x, c = 8x$ хэлбэртэйгээр хайя. $\Rightarrow \frac{ab}{a+b} = \frac{8x^2}{6x} = \frac{4x}{3}, \frac{ac}{a+c} = \frac{16x^2}{10x} = \frac{8x}{5}, \frac{bc}{b+c} = \frac{32x^2}{12x} = \frac{8x}{3} \Rightarrow x : 15$ байвал a, b, c нь бидний олох тоонууд мөн. Энэ мэтчлэнгээр $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ тоог олъё.

$a_i = 2^i x, i = \overline{1, 10}$, хэлбэртэйгээр 10-н тоогоо хайя. $10 \geq m > n \geq 1, \forall m, n \in N$ тоонуудын хувьд $\frac{a_m \cdot a_n}{a_m + a_n} = \frac{2^{n+m} \cdot x^2}{2^n x (2^{n-m} + 1)} = \frac{2^m x}{2^{n-m} + 1} \Rightarrow 2^{n-m} + 1 | x$ байх ёстой. m, n нь дурын учраас $9 \geq m - n \geq 1$ байна. $\Rightarrow ((2^1 + 1)(2^2 + 1) \dots (2^9 + 1)) | x$ байх ёстой.

$$\Rightarrow a_i = \bigcup_{j=1}^9 (2^j + 1) 2^i, \quad i = \overline{1, 10}$$

тоонууд нь бидний олох тоонууд болно.

ББ-А2.Болохгүй. Эсрэгээс нь болдог гэе. Тэгвэл хэсэг тус бүр дэх тоонуудын нийлбэр тэгш тоо байна гэдгээс арван хэсэгт байх нийт тоонуудын нийлбэр нь тэгш тоо болно. Нөгөө талаас хэсэгт байгаа тоонуудын нийлбэр $(1 + 2 + \dots + 30) = 31 \cdot 15$ гэсэн сондгой тоо байх тул зөрчил үүснэ.

ББ-А3. $s_1 = \{1, 2\}, \dots, s_i = \{1, 2, \dots, i + 1\}$ ($1 \leq i \leq 8$) олонлогууд өгөгдөөд $a_i \in s_i$ ба $i \neq j$ хувьд $a_i \neq a_j$ байх $\overline{a_1 a_2 \dots a_i}$ гэсэн i оронтой тоонуудын тоог k_i -ээр тэмдэглэе. Тэгвэл бидний олох ёстой тоо k_9 болно. $i = 1$ үед 1,2 гэсэн тоо л байна. $\rightarrow k_1 = 2$ болно. Одоо k_9 -г олъё. $\overline{a_1 a_2 \dots a_8}$ -ийн ард a_9 -ийг тавих үеийг авч үзье. $\overline{a_1 a_2 \dots a_8}$ -тоонуудын тоо k_8 байна. $a_9 \in \{1, 2, 3, \dots, 9, 0\}$. $a_1, a_2, \dots, a_8$ цифрүүд нь ялгаатай 8-н ширхэг цифр байх ба 1,2,...,9-ийн аль нэг нь байхгүй. Мөн 0 байхгүй гэдгээс $\overline{a_1 a_2 \dots a_8}$ -ийн ард тэр байхгүй цифрийг мөн 0-ийг залгаж бичих боломжтой $\Rightarrow k_9 = 2 \cdot k_8$ болно. Мөн адилаар $k_8 = 2 \cdot k_7 \dots k_2 = 2k_1$ болох нь ойлгомжтой. $\Rightarrow k_9 = 2 \cdot k_8 = 4 \cdot k_7 = \dots, 2^7 k_2 = 2^8 \cdot k_1 = 2^4 \Rightarrow k_9 = 2^9$ болно.

ББ-Б1. $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ тоог авч үзье.

$$A = a_1 \cdot 10^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n = a_1(10^{n-1} - 1) + \dots$$

$$+ a_{n-1}(10 - 1) + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1)$$

$$10^k - 1 = \underbrace{9 \dots 9}_k \text{ тул } (*) \quad A = 9 \cdot \ell + (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \text{ хэлбэртэй}$$

бичигдэнэ. Одоо бодлогоо бодёе. $N(N-1)$ ба $(N+1)^2$ тоонуудын цифрүүдийн нийлбэрийг C ба B гэе. Тэгвэл $(*)$ ёсоор $N(N-1) = 9k_1 + C$, $(N+1)^2 = 9k_2 + B$ хэлбэртэй бичигдэнэ. $B=C$ гэе. $\Rightarrow N^2 - N - 9k_1 = C = B = N^2 + 2N + 1 - 9k_2 \Rightarrow$

$$3(3k_2 - 3k_1 - N) = 1 \Rightarrow 3|1 \text{ гэсэн зөрчил үүсч } B \neq C \text{ болов.}$$

ББ-Б2.



Дурын тэмдэглэгдсэн цэгээс ямар ч тэмдэглэгдсэн цэг хүртэлх зай бүхэл байх нь мэдээж. Ямар нэг 1 урттай AB нум авъя. Түүний эсрэг орших нум нь 1 эсвэл 2 урттай байдаг гэвэл уг нумын аль нэг цэг нь A, B цэгүүдийн аль нэгтэй диаметрчлэн орших болно

гэдгээс AB нумын эсрэг 3 урттай нум байна. Түүнийг CD гэе. Эндээс 1 урттай нумын эсрэг 3 урттай нум, 3 урттай нумын эсрэг 1 урттай нум байна (энд 1 ба 3 урттай нумын тоо тэнцүү учир).

$\cup CKA$ нумд $\left. \begin{array}{l} n \text{ ширхэг } 1 \text{ урттай нум} \\ m \text{ ширхэг } 3 \text{ урттай нум} \\ p \text{ ширхэг } 2 \text{ урттай нум} \end{array} \right\} \text{ байдаг гэвэл}$

$\cup DSB$ нумд $\left. \begin{array}{l} m \text{ ширхэг } 1 \text{ урттай нум} \\ n \text{ ширхэг } 3 \text{ урттай нум} \\ 1996-p \text{ ширхэг } 2 \text{ урттай нум} \end{array} \right\} \text{ байна. Энд-}$

ээс 1 урттай нийт нумын тоо $n + m + 1 = 32$ болно. Эндээс $n + m = 31$. $\cup CKA$ -нумын уртыг ℓ гэвэл $\ell = n + 3m + 2p = \frac{32+32 \cdot 3 + 1996 - 4}{2}$ болно. Эндээс $n + 3m + 2p = n + m + 2(m + p) = 2(m + p) + 31 = 32 \cdot 2 + 1996 - 2$ гэдгээс тэгш сондгой 2 тоо тэнцэх болж зөрчил үүснэ гэдгээс 1 урттай нумын эсрэг 1 эсвэл 2 урттай нум заавал олдох ёстой. Бодлого бодогдов.

ББ-Б3. t нь C гуанзыг дайран өнгөрсөн цаг.

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow B \text{ хүрэхэд} \\ (t-7) \rightarrow A - \text{гаас } C \text{ хүртэлх хугацаа} \\ |AC| = x \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} B \rightarrow A \text{ хүрэхэд} \\ (t-5) \text{ нь } B - \text{ээс } C \text{ хүртэл зарцуулсан хугацаа} \\ |BC| = 630 - x \\ (16^{56} - t) \text{ нь } C \text{гээс } A \text{ хүртэлх хугацаа} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Эндээс } \begin{cases} \frac{x}{t-7} = \frac{630-x}{22,1-t} \\ \frac{630-x}{t-5} = \frac{x}{16,9-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (22,1-t)x = (630-x)(t-7) \\ (t-5)x = (630-x)(16,9-t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 22,1x - 630t + 4410 - 7x = 0 \\ 16,9x + 630t - 10647 - 5x = 0 \end{cases} \Rightarrow 39x - 6237 - 12x = 0 \Rightarrow 27x = 6237 \Rightarrow x = 231 \text{ буюу } |AC| = 231 \text{ км боллоо.}$$

ММО-32, III даваа, Дундын багш

Ц.Дашдорж.

ДБ-А1. (Хашбаатар.) $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ гурвалжин призм дотор орших M цэгийг дайрсан аливаа хавтгай хажуу ирмэгүүдийг огтлохдоо призмийн эзлэхүүнийг тэнцүү хэсэгт хуваадаг байг. Ийм M цэгийн геометр байрыг ол.

ДБ-А2. (Адъяасүрэн.) 7,8,9 цифрүүдээр зохиогдсон аль ч зэрэгцээ хоёр цифр нь ялгаатай. Мөн эхний ба сүүлчийн цифр нь ялгаатай бүх n оронтой тоог ол.

ДБ-А3. (Ц.Баясгалан.) $f: R \rightarrow R$ тасралтгүй бөгөөд $(+)$ ба $(-)$ утгыг авна. Тэгвэл $f(a) + f(b) + f(c) = 0$ байх арифметик прогресс a, b, c олдоно гэж батал.

ДБ-Б1. (Д.Хашбаяр.) $\forall n \in N$ тооны хувьд дараалсан n гишүүн нь хос хосоороо харилцан анхны байх арифметик прогресс олдоно гэж батал.

ДБ-Б2. (Д.Хашбаяр.) Хэрэв $P_n(x) \in R[x]$ олон гишүүн-

түүдийн хувьд $P_k(x) \neq 0$ байх

$$\sum_{n=0}^k P_n(x)(y(x))^n = 0$$

тэгшитгэлийн шийд болох $y(x)$ функцийг алгебрийн гэе.

а) e^x

б) $\sin x$ алгебрийн функц мөн үү?

ДБ-БЗ. (Д.Хашбаяр.) 1996 өргөнтэй, нэг тийшээгээ төгсгөлгүй дөрвөлжин шугамтай цаасны 1-р баганыг ± 1 -ийн аль нэгээр бөглөв. Цаасны нүд бүрийн хувьд түүнд байгаа тоог ерөнхий ирмэгтэй нүднүүд дэх тоогоор үржүүлсэн үржвэр 1 байхаар цаасны нүд болгоныг ± 1 -ээр бөглөж болохыг батал. Мөн энэ цааснаас хайчлаж авсан ямар нэг 1996хк тэгш өнцөгтийн хувьд дээрх нөхцөл дангаараа биелэгдэж байх натурал k олдоно гэж батал.

БОДОЛТ

ДБ-А1.

$$V_2 = \frac{h}{3} \cdot S_{CC'B} = \frac{h}{3} \cdot \frac{S_{ABC}}{AB} \cdot BC' = \frac{S}{c} \cdot BC'$$

$\triangle B_0C'B \sim \triangle A_0C'A$ тул

$$\frac{BC'_0}{AC'} = \frac{2m}{2(m+n)} = \frac{m}{m+n}.$$

$$V_2 = \frac{hmS}{3c(m+n)} \cdot AC' = \frac{hmS}{3c(m+n)} \cdot \frac{(m+n) \cdot c}{(2m+n)} = \frac{m}{2m+n} \cdot \frac{hS}{3};$$

$$V_3 = \frac{m^2}{n(2m+n)} \cdot \frac{hS}{3} \cdot \frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} = \frac{AB' \cdot AC'}{AB \cdot AC}$$

$$\text{байдгаас } S_{AB'C'} = \frac{(m+n)^2}{(2m+n)(m+2n)} \cdot S$$

$$\text{Тиймээс } S_{CB'C'B} = \left(1 - \frac{(m+n)^2}{(2m+n)(m+2n)}\right) \cdot S.$$

$$\begin{aligned} \bar{V} = \frac{hS}{3} & \left(\frac{m^2}{n(2m+n)} + \frac{m}{2m+n} + 1 - \frac{(m+n)^2}{(2m+n)(m+2n)} \right) = \\ & \frac{(m+n)^3}{n(2m+n)(m+2n)} \cdot \frac{hS}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{A_0C'B'A} = \frac{H}{3} \cdot S_{AB'C'} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{m+n}{n} \cdot h \cdot \frac{(m+n)^2}{(2m+n)(m+2n)} \cdot S = \\ & \frac{(m+n)^3}{n(2m+n)(m+2n)} \cdot \frac{hS}{3}. \end{aligned}$$

ДБ-А2. $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ ($a_i \in \{7, 8, 9\}$)-ээр аль ч зэрэгцээ хоёр цифр нь ялгаатай тоог тэмдэглэе. P_n -ээр аль ч зэрэгцээ хоёр цифр нь ялгаатай, эхний ба эцсийн цифр нь ялгаатай, P'_n -ээр аль ч зэрэгцээ хоёр цифр нь ялгаатай, эхний ба эцсийн цифр нь адил байх n оронтой тоонуудын тоог тэмдэглэе.

$\overbrace{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} a_n$ байг. P_n -ийг илэрхийлье.

$a_1 = a_{n-1}$ бол a_n -ийг 2 янзаар

$a_1 \neq a_{n-1}$ бол a_n -ийг 1 янзаар тус тус сонгоно.

$$\Rightarrow P_n = 2P'_{n-1} + P_{n-1} \quad (1)$$

$\overbrace{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} a_n$ байг. P'_n -ийг илэрхийлье.

$$\begin{cases} a_2 = a_{n-1} \text{ бол } (a_1 = a_n) a_1 \text{ -ийг 2 янзаар} \\ a_2 \neq a_{n-1} \text{ бол } (a_1 = a_n) a_1 \text{ -ийг 1 янзаар сонгоно} \end{cases} \Rightarrow$$

$$P'_n = 2P'_{n-2} + P_{n-2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow P_{n-1} = 2P'_{n-2} + P_{n-2} = P'_n \Rightarrow P'_{n-1} = P_{n-2},$$

$$P_n = 2P_{n-2} + P_{n-1} \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0, x_1 = 2, x_2 = -1, P_n = C_1 2^n + C_2 (-1)^n$$

$$\begin{cases} P_1 = 0 = 2C_1 - C_2 \\ P_2 = 6 = 4C_1 + C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 2, \Rightarrow P_n = 2^n + (-1)^n \cdot 2.$$

ДБ-А3. Ямар нэг x цэгт $f(x) > 0$ учир энэ цэгийн орчинд $a_0 < b_0 < c_0, f(a_0) + f(b_0) + f(c_0) > 0$ байх a_0, b_0, c_0 олдоно. Мөн адилаар $f(a_1) + f(b_1) + f(c_1) < 0$ байх $a_1 < b_1 < c_1$ чанартай a_1, b_1, c_1 олдоно. Дурын $t \in [0, 1]$ -ын хувьд дараахь арифметик прогрессийг авч үзье. $a(t), b(t), c(t)$, энд $a(t) = a_0(1-t) + a_1 t, b(t) = b_0(1-t) + b_1 t, c(t) = c_0(1-t) + c_1 t$. Тэгвэл $F(t) = f(a(t)) + f(b(t)) + f(c(t))$ функц тасралтгүй бөгөөд $t = 0$ үед $F(t) > 0, t = 1$ үед $F(t) < 0$ байна. Иймд ямар нэг t -ийн хувьд $F(t) = 0$ байна. Эндээс харгалзах арифметикийн прогресс энэ бодлогын шийд болно. Асуулт:

1. Бодлогын нөхцөлд дурын төгслөг урттай арифметик прогресс олдох уу?

2. Бодлогын нөхцөлд дурын төгслөг урттай геометр прогресс олдох уу?

3. Бодлогын нөхцөлд дурын урттай $a_0 + d \cdot n + b_0 q^n$ олдох уу?

4. Бодлогын нөхцөлд өөр дурын тасралтгүй $y = g(x)$ функц өгөгдсөн үед $f(y_1) + \dots + f(y_n) = 0$ байх $y_1, \dots, y_n$ утга олдох уу?

ДБ-Б1. $(a_i, a_{i+k}) = 1$, $1 \leq k < n$ тул $(a_i, a_i + d(k-1)) = (a_i, d(k-1)) \Rightarrow (a_i, k-1) = 1$ буюу a_i нь n -ээс бага бүх тоотой харилцан анхны байх ёстой. Мөн $\div$ -н ялгавар нь k -тай харилцан анхны бол $k | a_{i+k} - a_i$ тул d нь n -ээс бага бүх тоонд хуваагдах ёстой ба a_1 нь энэ бүгдтэй харилцан анхны байна гэдгээс $a_1 = 1$; $d = (n-1)!$ гэж авбал бодлогын нөхцөл хангах $\div$ болно.

ДБ-Б2.

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

байдгийг ашиглая.

$$\sum_{i=0}^k P_i(x) e^{ix} = 0$$

байг. Тэнцлийн 2 талыг e^{kx} -д хуваагаад $x \rightarrow \infty$ хязгаар авбал

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P_k(x) = 0$$

болж зөрчил гарна.

б) Хэрэв $f(x)$ нь алгебрийн функц бол

$$\sum_{i=0}^n P_i f(x) = 0$$

байх хамгийн бага n тоо олдох ба энэ үед $P_0(x) \neq 0$ байх нь илэрхий. Үүнийг минималь олон гишүүнт гээ. $\sin x$ -ийн

минималъ олон гишүүнт нь

$$\sum_{i=0}^n P_i(x) \sin^i(x) \text{ байг. } x = k\pi$$

орлуулгаар $P_0(x)$ олон гишүүнт хязгааргүй олон язгууртай болж зөрчил гарна.

ДБ-БЗ. Дэс дараалсан 2 багана нь ард ба урд баганаа нэг утгатай тодорхойлох нь илэрхий ба энэ хослолуудын боломж төгслөг тул эхний баганаас эхлэн үелэх болно. Иймд 0-дугаар баганыг 1-р баганатай ижил бүтэцтэйгээр өмнө нь нэмж залгасан гэж үзвэл мөрүүд нь эхнээс эхлэн үелэх тул үүнтэй адил 2 багана тохиолдох ба энэ багануудын дундуур таслахад бодлогын нөхцөлийг хангана.

ММО-32, IV даваа, Дундын багш

Ц.Дашдорж

ДБ-А1. (Б.Баясгалан, Д.Батнасан.) $\{1, 2, \dots, 16\}$ олонлогийг дурын аргаар 3 хуваахдаа нийлбэр нь 17 байдаг 2 тоог нэг ангид оруулав. Тэгвэл $a + b = c, a \neq b$ байх гурвал хуваалтын аль нэг ангид олдохыг батал.

ДБ-А2. (Б.Сандагдорж) $OABC$ гурвалжин пирамид өгөгдөв. ABC талс дээр орших N цэгийг дайруулан OAB, OAC, OBC талсуудтай параллель хавтгайгаар огтлоход үүсэх параллелипедийн эзлэхүүн хамгийн их байх N цэгийн геометр байрыг ол.

ДБ-А3. (Ц.Дашдорж) $31 \mid m^{100} + n^{100} + k^{100}$ боловч m, n, k -ийн аль нь ч 31-д хуваагдахгүй байх натурал тоонууд олдохыг батал.

ДБ-Б1.(В.Адъяасүрэн) $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ байг.

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_2 + a_3}{2} \dots \frac{a_n + a_1}{2} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \cdot \frac{a_2 + a_3 + a_4}{3} \dots \frac{a_n + a_1 + a_2}{3}$$

батал.

ДБ-Б2.(Б.Сандагдорж) $|S| = n$ байх S олонлогийн дэд олонлогууд L_i ба T_i -үүдийн хувьд $T_1 \cap T_2 \cap \dots \cap T_k = \emptyset$ байх $(T_1, T_2, \dots, T_k)$ олонлогуудын дарааллын тоо нь $L_1 \subseteq L_2 \subseteq \dots \subseteq L_k$ байх $(L_1, L_2, \dots, L_k)$ олонлогуудын дарааллын тоонд хуваагдах бүх $2 \leq k$ -ийн утгыг ол.

ДБ-Б3.(Б.Баясгалан) Тэгш өнцөгт координатын системд шидсэн гурвалжин дотроо бүхэл цэг агуулж байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөлийг ол.

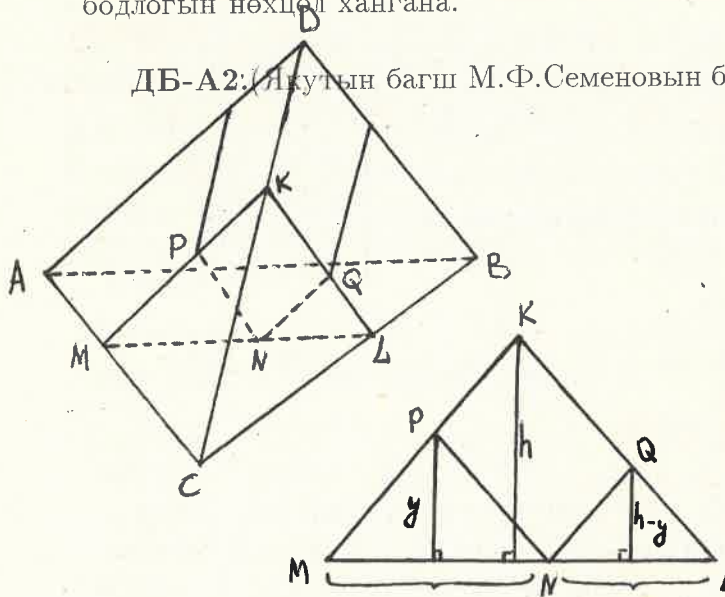
БОДОЛТ

ДБ-А1. $\{1, 2, \dots, 16\} = X_1 \cap X_2 \cap X_3$ гэж хуваасан болог.

Хавтгайн $A_1, A_2, \dots, A_{17}$ цэгүүдийг дараахь байдлаар гурван өнгийн хэрчмээр холбоё. A_i, A_j цэгүүдийн хувьд $|i - j| \in X_1$ бол 1-р өнгөөр, $|i - j| \in X_2$ бол 2-р өнгөөр, $|i - j| \in X_3$ бол 3-р өнгөөр холбосон гэе. Аливаа 17 цэгийг 3 өнгийн хэрчмээр дурын байдлаар холбоход бүх тал нь ижил өнгийн ядаж нэг гурвалжин олдоно гэсэн өгүүлбэр байдгийг бид мэднэ. Иймд дээрх будалтанд ядаж нэг гурвалжин үүснэ. $A_i A_j A_k, (i > j > k)$ гурвалжин үүссэн болог. $i - j, j - k, i - k$ нэг өнгийн тоонууд хуваалтын нэг ангид орно. Мөн $(i - j) + (j - k) = (i - k)$ байна. $i - j \neq j - k$ бол

$i-j, j-k, i-k$ тоонууд бодлогын нөхцөл хангана. $i-j = j-k$ болог. $i-j = a, i-k = b$ гэе. $2a = b$ болно. Бодлогын нөхцөл ёсоор $17 - 2a, 17 - a, a$ тоонууд хуваалтын нэг ангид орно. $(17 - 2a) + a = (17 - a)$ болохыг тэмдэглэе. $17 - 2a = a$ ба $a = 17/3$ байх боломжгүй. Иймд $17 - 2a, a, 17 - a$ тоонууд бодлогын нөхцөл хангана.

ДБ-А2: (Якутын багш М.Ф.Семеновын бодолт)



$N \in ML; ML \parallel$

$AB;$

M, K, l

цэгүүдийг бэх-

элж

авъя. Тэгвэл

$V = S_{PKQN} \cdot$

H , үүнд $H =$

$const$. Эндээс

$\max(S_{PKQN})$

утгыг олѐе.

$$S_{PKQN} = S_{\Delta MKL} - \frac{xy}{2} - \frac{x(ML-x)(h-y)}{2} - \frac{x^2}{2}$$

$$\Delta MPN \sim \Delta NQL \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{h-y}{ML-x} \Rightarrow y = \frac{xh}{ML}.$$

$$S_{PKQN} = S_{\Delta MKL} - \frac{x^2 h}{2ML} - \frac{(ML-x)(h - \frac{xh}{ML})}{2} =$$

$$S_{\Delta MKL} - \frac{x^2 h}{2ML} - \frac{h(ML-x)(ML-x)}{2} =$$

$$S_{\Delta MKL} - \frac{x^2 h}{2ML} - \frac{h(ML-x)(ML-x)}{2}$$

$$S'_{PKQN} = \frac{-h}{2ML} (2x - 2(ML-x)) = 0; \quad x = \frac{ML}{2}$$

Эндээс $\max(S_{PKQN}) = \frac{SMKL}{2}$ болно. Үүнээс $MN = NL$ болох ба N цэг (ACB -өнцгийн) медиан дээр оршино. Нөгөө талаас BAC өнцгийн медиан дээр, бас ABC -өнцгийн медиан дээр тус тус орших болно. Үүнээс N цэг $\triangle ABC$ -ийн медиануудын огтлолцлын цэг болох юм.

ДБ-А3. $(x, 31) = 1$ бол Фермагийн теоремоор $x^{100} = (x^{30})^3 \cdot x^{10} \equiv x^{10}(31)$ тул (1) $0 \equiv x^{100} + y^{100} + z^{100} \equiv x^{10} + y^{10} + z^{10}(31)$ боллоо. (2) $x^{10} \equiv a(31)$ тэгшитгэл Z -д ($Z_{31} -$

d) шийдтэй $\iff a^3 \equiv 1(31)$ байдаг тул³ $\begin{cases} x^{10} \equiv a(31) \\ y^{10} \equiv b(31) \\ z^{10} \equiv c(31) \\ a + b + c \equiv 0(31) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a^3 \equiv 1(31) \\ b^3 \equiv 1(31) \\ c^3 \equiv 1(31) \\ a + b + c \equiv 0(31) \end{cases}$ систем биелнэ. $\iff t^3 \equiv 1(31)$ -ийн

3 шийд t_1, t_2, t_3 -ийн хувьд $t_1 + t_2 + t_3 \equiv 0(31)$ биелнэ. Гэтэл энэ сүүлчийн өгүүлбэр нь илэрхий үнэн өгүүлбэр юм. Иймд $t^3 \equiv 1(31)$ тэгшитгэлээ бодож a, b, c параметруудийнхээ авах утгыг олъё. $0 \equiv t^3 - 1 \equiv (t-1)(t^2 + t + 1) = (t-1)(t^2 + t - 30) = (t-1)(t-5)(t+6)(31)$ буюу $t_1 = a \equiv 1(31), t_2 = b \equiv 5(31), t_3 = c \equiv -6(31)$ гэж авах ёстой болов. Одоо энэ параметруудэд харгалзах x, y, z шийдээ олъё. (2) ёсоор $t^3 \equiv 1(31) \Rightarrow t^{10} \equiv (t^3)^3 t \equiv t(31)$ тул $t_1^{10} + t_2^{10} + t_3^{10} = t_1 + t_2 + t_3 \equiv 0(31)$ буюу $x = t_1, y = t_2, z = t_3$ нь бидний олох 1 шийд гэдэг нь батлагдав. Бусад бүх шийд $\forall \lambda \in Z_{31}$ -ийн хувьд $(\lambda t_1, \lambda t_2, \lambda t_3)$ болно.

ДБ-Б1.УБ хотын багш А.Доржпалам дараахь бодолтыг хийж П.Энхболдын уран бодолтын шагнал хүртэв.

³Энэ талаар Мэргэжлийн курсын 1.7.13-ыг хар.

$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ байг.

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_1 + a_2} \cdot \frac{a_2 + a_3 + a_4}{a_2 + a_3} \cdot \frac{a_3 + a_4 + a_5}{a_3 + a_4} \dots \frac{a_n + a_1 + a_2}{a_n + a_1} = A(n)$$

гэсэн үржвэрийг сонирхоё.

$$A(n) = \frac{2^n A(n)}{2^n} = \frac{2a_1 + 2a_2 + 2a_3}{a_1 + a_2} \cdot \frac{2a_2 + 2a_3 + 2a_4}{a_2 + a_3} \dots \frac{2a_n + 2a_1 + 2a_2}{a_n + a_1} \cdot \frac{1}{2^n} =$$

$$\frac{(a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + (a_1 + a_3)}{a_1 + a_2} \cdot \frac{(a_2 + a_3) + (a_3 + a_4) + (a_2 + a_4)}{a_2 + a_3} \dots \frac{(a_n + a_1) + (a_1 + a_2) + (a_n + a_2)}{a_n + a_1} \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2^n} = \left(1 + \frac{a_2 + a_3}{a_1 + a_2} + \frac{a_1 + a_3}{a_1 + a_2}\right) \left(1 + \frac{a_3 + a_4}{a_2 + a_3} + \frac{a_2 + a_4}{a_2 + a_3}\right) \dots \left(1 + \frac{a_1 + a_2}{a_n + a_1} + \frac{a_n + a_2}{a_n + a_1}\right) \cdot \frac{1}{2^n}$$

Хаалтууд доторх III нэмэгдэхүүний хүртвэрийг багасгаж 3

тооны хувьд арифметик геометр дундаж ашиглая.

$$\frac{a_1 + a_3}{a_1 + a_2} \geq \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2} = 1 \quad \frac{a_2 + a_4}{a_2 + a_3} \geq \frac{a_2 + a_3}{a_2 + a_3} = 1 \dots \frac{a_n + a_2}{a_n + a_1} \geq \frac{a_n + a_1}{a_n + a_1} = 1$$

$$A(n) = \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{a_2 + a_3}{a_1 + a_2} + \frac{a_1 + a_3}{a_1 + a_2}\right) \dots \left(1 + \frac{a_1 + a_2}{a_n + a_1} + \frac{a_n + a_2}{a_n + a_1}\right)$$

$$\geq \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{a_2 + a_3}{a_1 + a_2} + 1\right) \left(1 + \frac{a_3 + a_4}{a_2 + a_3} + 1\right) \dots \left(1 + \frac{a_1 + a_2}{a_n + a_1} + 1\right)$$

$$\geq \frac{1}{2^n} 3 \sqrt[3]{1 \cdot \frac{a_2 + a_3}{a_1 + a_2} \cdot 1} \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{a_3 + a_4}{a_2 + a_3} \cdot 1} \dots 3 \sqrt[3]{\frac{a_4 + a_2}{a_n + a_1} \cdot 1} =$$

$$\frac{1}{2^n} \cdot 3^n \cdot \sqrt[3]{\frac{a_2 + a_3}{a_1 + a_2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{a_2 + a_3} \dots \frac{a_n + a_1}{a_{n-1} + a_n} \cdot \frac{a_1 + a_2}{a_n + a_1}} = \frac{3^n}{2^n}$$

$$A(n) \geq \frac{3^n}{2^n} \text{ гэдгээс}$$

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \cdot \frac{a_2 + a_3 + a_4}{3} \dots \frac{a_n + a_1 + a_2}{3}$$

$$\geq \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_2 + a_3}{2} \dots \frac{a_n + a_1}{2}$$

батлах зүйл гарна. $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ үед тэнцэл биелэхийг хялбархан харж болно.

ДБ-Б2. $T_1 \cap T_2 \cap \dots \cap T_k = \emptyset$ байх $(T_1, T_2, \dots, T_k)$ олонлогуудын дарааллын тоог $f(k, n)$ гэж тэмдэглэе.
 $T_1 \cap T_2 \cap \dots \cap T_{k-1} = X$ ба $|X| = i$ байг. Хэрэв $Y_i = T_i - X$ гэвэл $Y_1 \cap Y_2 \cap \dots \cap Y_{k-1} = \emptyset$ ба $Y_i \subseteq S - X$ байна. Эндээс $T_1 \cap T_2 \cap \dots \cap T_{k-1} = X$ байх $(T_1, T_2, \dots, T_{k-1})$ дараалал нь $f(k-1, n-i)$ ширхэг байна. Одоо дарааллын T_k нь $S - X$ олонлогийн 2^{n-i} дэд олонлогийн аль нь ч байж болно. S олонлогийн i элементтэй X дэд олонлог C_n^i байх тул

$$f(k, n) = \sum_{i=0}^n C_n^i \cdot 2^{n-i} \cdot f(k-1, n-i) \quad (*)$$

байна.

$$F_k(x) = \sum_{n \geq 0} f(k, n) \cdot \frac{x^n}{n!}$$

цувааг авч үзье.

$$e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

гэдгийг санавал $(*)$ -оос $F_k(x) = e^x \cdot F_{k-1}(2x)$ гэж гарна. Нөгөө талаас $F_1(x) = e^x$ тул

$$F_k(x) = \exp(x + 2x + 4x + \dots + 2^{k-1}x) = \exp((2^k - 1)x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(2^k - 1)^n x^n}{n!}.$$

Иймд $f(k, n) = (2^k - 1)^n$ байна. Одоо S олонлогийн $L_1 \subseteq L_2 \subseteq \dots \subseteq L_k$ нөхцөлийг хангах L_i дэд олонлогуудын $(L_1, L_2, \dots, L_k)$ дарааллын тоог олъя. Иймд дурын $x \in S$ элементийн хувьд $x \in L_i$ байх (хэрэв ямар аль нэгэнд нь харъяалагддаг бол) хамгийн бага i -тоогоор тодорхойлох юм. x элемент бүрийн хувьд $k+1$ тохиолдол байх ба иймээс нийт дарааллын тоо

нь $(k+1)^n$ болно. Бид $(T_1, T_2, \dots, T_k)$ ба $(L_1, L_2, \dots, L_k)$ дарааллуудын тоог дээр тус тус оллоо. Бодлогын нөхцөл $(k+1)^n | (2^k - 1)^n$ байх, өөрөөр хэлбэл $(k+1) | (2^k - 1)$ байх k тоог олох болно. Эндээс $k+1$ нь анхны тоо байна гэж гарах ба бидний олох k тоо маань хоёроос эрс их анхны тоонуудаас 1-ээр бага тоонууд байх нь ээ. Бодлого бодогдов.

ДБ-БЗ. Тэгш өнцөгт координатын системд шидсэн гурвалжны талуудыг $a, b, c (a \leq b \leq c)$, мөн c талд буулгасан өндрийг h гэж тэмдэглэе. Эхлээд c талын хэвтээ тэнхлэгтэй параллель байх тохиолдлыг сонирхоё. Энэ үед үүсэх гурвалжин дотоод муждаа бүхэл цэг агуулдаггүй, хамгийн их талбайтай байх c талын эсрэг оройн байрлалыг сонирхоё. Мэдээж хэрэг, хамгийн их талбайд хамгийн их өндөр харгалзана. Энэ бүгдийг харгалзан талбайг тооцоолбол, төсөөгийн харьцаанаас $\frac{1}{c} = \frac{h-1}{h}$ болж $h = \frac{c}{c-1}$ буюу $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{c-1}$ байна. Иймд тэгш өнцөгт координатын системд шидсэн гурвалжин дотоод муждаа бүхэл цэг агуулж байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $S \geq \frac{c^2}{2(c-1)}$, (c -талуудын тах урт) гэсэн таамаглал үүснэ. Үүнийг батлая. Хэрэв $S < \frac{c^2}{2(c-1)}$ бол өмнө хийсэн байгуулалтаар дотроо бүхэл цэг агуулдаггүй гурвалжин олдоно. Иймд $S \geq \frac{c^2}{2(c-1)}$ бол зайлшгүйгээр бүхэл цэг агуулахыг батлая. $|AB| = c$ талыг агуулах шулууны тэгшитгэлийг $y = kx + b, 0 \leq k \leq 1$, мөн c талын эсрэг C оройг уг шулууны эерэг хэсэгт оршдог, A цэгийн координатууд нэгээс бага гэж үзэх болно. (зураг 2). Тэгвэл $y = kx + b$ шулуунд нь эерэг талаасаа хамгийн ойр орших бүхэл цэгүүдийн координат нь

$$(m, [km + b] + 1), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq m \leq \frac{kc}{\sqrt{k^2 + 1}} + 1$$

байна. Уг зайнууд $d = \frac{[km+b]+1-km-b}{\sqrt{k^2+1}}$ илэрхийллээр бичигдэнэ.

Мэдээж хэрэг, уг зайнууд хамгийн их утгаа авдаг үед c суурьтай гурвалжны талбай их утгандаа хүрнэ. Иймд $k = 0$ үеийг шинжлэхэд хангалттай юм. Энэ үед $y = kx + b$ шулуун хэвтээ тэнхлэгтэй параллель болж өмнөх шинжилгээнд шилжих юм. Энэ бодлогонд гурвалжин дотроо агуулна гэдгийг уг гурвалжны талуудыг оролцуулж буйг анхаарсан буй зээ. Хэрэв талуудыг оролцуулахгүй бол $S \geq \frac{c^2}{2(c-1)}$ нөхцөлийг $S > \frac{c^2}{2(c-1)}$ нөхцөлөөр сольж болно. Бодлого бодогдов.

Монголын оюутны математикийн V олимпиад

Ц. Дашдорж

Энэ удаагийн Монголын оюутны математикийн олимпиадыг МУИС-ийн магадлалын онолын тэнхим УБИС-ийн алгебр, анализын тэнхим, хамтран зохион явуулж байна.

Эчнээ давааны бодлогууд

1. (Ц. Баясгалан | МУИС |)

$f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ тасралтгүй, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ $f^{(n)}(x) = (f \circ \dots \circ f)(x) = x$ ($\forall x \in [0, 1]$) бол $f(x) = x$, ($x \in [0, 1]$) болохыг батал.

2. (Ц. Баясгалан | МУИС |)

$f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ монотон бол $\forall x \in [0, 1]$ хувьд дараах хоёр боломжийн нэг нь биелэгдэнэ. Үүнд: x үл хөдлөх цэг ($f(x) = x$) эсвэл $\{f^{(n)}(x)\}$ дараалал ямар нэг үл хөдлөх цэг рүү нийлнэ.

3. (Б. Сандагдорж | УБИС |)

$\det[XIEH(i, j)]_{i,j=1}^n = \bigcup_{k=1}^n \varphi(k)$ болохыг батал. φ -Эйлерийн

функц.

4.(Б.Сандагдорж|УБИС|)

$P(n)$ нь n периметртэй бүхэл тоон талуудтай хос хосоороо конгруэнт биш гурвалжны тоо байг.

$$\sum_{n \geq 3} P(n)x^n$$

функцийг ол.

5.(Д.Пүрэвсүрэн|МУИС|)

Гурвалжин ABC дотор дурын P цэг өгчээ. PA, PB, PC шулуун татаад PAC, PBA, PCB өнцгүүдийг харгалзан α, β, γ гэе. Тэгвэл $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma \geq t \cdot (\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2})$ байх t -ийн хамгийн их утгыг ол.

6.(Д.Пүрэвсүрэн|МУИС|)

Гурвалжин ABC -ны талууд параболыг шүргэнэ. Параболын фокус гурвалжныг багтаасан тойрог дээр оршихыг батал.

7.(С.Төмөрбат|УБИС|)

Z_p^∞ бүлэг дээр үржих үйлдэл тодорхойлж ямар нэг цагираг үүсгэв.

Тэгвэл уг цагиргийн аливаа x, y элементүүдийн хувьд $xy = 0$ болохыг батал.

8.(А.Түвшинтулга|УБИС|)

Хавтгайд ерөнхий байршилтай 6 цэг өгчээ. Эдгээр цэгүүдийг хос хосоор нь бүх боломжит хэрчмээр холбоё. Хэрэв ямар ч хэрчим авахад түүнтэй паралель ядаж нэг ирмэг олддог бол өгсөн цэгүүд эллипс дээр оршино гэж батал.

9. (Цэдэнбаяр | УБИС |)

$$L(Z) = Z^{(n)} + P_1 Z^{(n-1)} + \dots + P_{n-1} Z' + P_n Z = 0 \quad (1)$$

нэгэн төрлийн шугаман дифференциал тэгшитгэлийн шийдүүдийн фундаменталь систем $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$ (2) нь

$$Z_1 = \frac{1}{a_1}, \quad Z_2 = \frac{1}{a_1} \int \frac{dx}{a_2}, \dots, \quad Z_n = \frac{1}{a_1} \int \frac{dx}{a_2} \dots \int \frac{dx}{a_n}$$

гэсэн хэлбэрт тавигддаг бол Вронскиан нь

$$W[Z_1, \dots, Z_n] = \frac{1}{a_1 a_2^2 \dots a_n^{n-1}}$$

болохыг үзүүл. Энд $a_k = a_k(x)$ $P_k = P_k(Z)$ нь тодорхой завсарт тасралтгүй гэж харуул.

10. (Ш. Батхишиг | УБИС |)

S төгсгөлөг хагас бүлэг. Хэрэв $\forall a \in S$ элементийн хувьд $a^2 = a$ биелэгдэнэ гэдгээс a нэгж элемент гэж мөрддөг бол S бүлэг болно гэж батал.

11. (Ш. Батхишиг | УБИС |)

Дараах нөхцлийг хангах үл огтлолцох A_1 ба A_2 олонлогууд ба $f: A_1 \rightarrow A_2$ биекц оршин байх уу?

Үүнд: 1) $A_1 \cup A_2 = [0, 1]$

2) Хэрэв $a \in A_1, b \in A_2$ ба $a \leq b$ бол $f(a) \leq f(b)$.

12. (Ш. Батхишиг | УБИС |)

$f: R \rightarrow R$ ба хоосон биш дэд олонлог $A \subset R$ бүр дээр f нь максималь утгатай байх инъектив буулгалт оршин байх уу?

13. (Ш. Батхишиг | УБИС |)

Идемпотент хагас бүлгийг авч үзье. (ө.х. $\forall a \in S$ хувьд $a^2 =$

а) Тэгвэл аливаа төгсгөлөг төрөгдсөн идемпотент хагас бүлэг бүр төгсгөлөг эрэмбийн хагас бүлэг болно гэж батал.

14.(Ц.Лувсандорж|УБИС|)

Бөмбөрцөг дээр аль ч гурав нь хоосон биш огтлолцолтой байх төгсгөлөг сегментүүдийн систем өгөгдөв. Тэгвэл аль ч сегмент нь аль нэг төгсгөлийг нь агуулж байх диааметр олдоно гэж батал.

Багийн тэмцээн

Монголын Оюутны Математикийн Ү Олимпиадын багийн тэмцээн 1996.04.21 нд боллоо. МУИС, УБИС -ийн оюутнууд, багш нарын 8 баг оролцсоноос МУИС-ийн МАТ-IV ангийн О.Чулуунбаатар ахлагчтай баг аварга боллоо. II байранд МУИС-ийн МАТ-I ба Магиструудын баг адилхан 18 оноо авахад нэмэлт бодлогоор блиц бодолт хийхэд Мат-I ангийн Б.Батбаясгалан 2 минутын бодолт хийж олныг баясгалаа. Эчнээ даваанд Мат-IV ангийн О.Чулуунбаатар түрүүллээ. Энэ удаагийн Олимпиадыг УБИС 30000 төгрөгөөр ивээн тэтгэлээ. Одоо багийн тэмцээний бодлогууд ба оноог танилцуулъя.

1.(Ц.Лувсандорж) $ABCD$ трапецийн AB суурьтай паралелиар p, q шулуунууд татав. p шулууны AD, AC шулуунтай огтлолцсон цэгүүдийг M, P, q шулууны BC, BD -тэй огтлолцсон цэгүүдийг Q, N гээ. MN, PQ шулуунуудын огтлолцлын цэгүүдийн геометр байрыг ол. (6 оноо)

2.(Ц.Дашдорж) H нь төгсгөлөг бүлэг G -ийн жинхэнэ дэд бүлэг бол

$$G \neq \bigcup_{x \in G} x^{-1} H x$$

гэж батал.(6 оноо)

3. (Ц. Дашдорж) F төгсгөлгүй талбар, $1 \in A$ нь F дээрх төгслөг хэмжээст алгебр ба $a \in A$ бол $\exists \mu \in F$, $a - \mu$ нь A -д урвуутай элемент гэж батал. (10 оноо)

4. (Ц. Дашдорж) $a, b \in Z$ байг. $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ тэгшитгэл бүхэл шийдтэй $\iff \forall m \in N$ -ийн хувьд $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b(m)$ тэгшитгэл Z_m -д шийдтэй. (6 оноо)

Нэмэлт бодлого. (Ц. Дашдорж) H ба M нь G бүлгийн жинхэнэ дэд бүлгүүд бол $G = H \cup M$ байж чадах уу?

Багийн тэмцээний дүн

	1	2	3	4	
Мат-I (МУИС)	6	6		6	II байр
Мат-II (МУИС)	6			6	
Мат-III (МУИС)	6			6	
Мат-IV (МУИС)	6	6	10	6	I байр
Магистр (МУИС)	6	6		6	
Мат-II (УБИС)					
Мат-III (УБИС)					
Багш (УБИС)				6	

Зарим бодлогын бодолтыг сонирхуулъя.

$$2. \quad N(H) = \{x \in G \mid x^{-1}Hx = H^x = H\} \geq H. H^G = \{H^x \mid x \in G\}$$

$$H^x = H^y \iff x, y \in N(H)z, \quad \exists z \in G.$$

$$\text{Эндээс } |H^G| = [G : N(H)] = m \leq [G : H] = s.$$

$$|H^x| = |H| = |xH|, \quad G = \bigcup_{i=1}^s Hy_i$$

$$\text{ба } Hy_i\text{-нүүд үл огтлолцоно гэдгээс } |G| = sh. \quad G = \bigcup_{i=1}^m H^{x_i}$$

гэж үзвэл $|G| < mh$, учир нь $1 \in \cap H^i$. Эндээс $sh < mh$ буюу $s < m$ болж $m \leq s$ байх ёстойд зөрчив.

3.1) Зохиогчийн бодолт.

1. $e \in A$ нь A алгебрийн нэгж, $1 \in F$ нь F талбарын нэгж бол $\varphi : F \rightarrow A$, $x \in F$, $\varphi(x) = x \cdot e \in A$ буулгалт нь F талбарыг A алгебрийн төв $Z(A)$ -д изоморфоор багтааж чадна: $\varphi(F) = Fe \leq A$. Иймд Fe -ийг F -тэй адилтгаж үзэж $\mu \in F$ бүрийн хувьд $\mu e \in A$ элементийг μ гэж бичдэг билээ. Тухайлбал $a - \mu e$ гэхийг $a - \mu$ гэж бичдэг уламжлалтай билээ. Ингэснээр A ба F -ийн тэгүүд ч мөн нэг адил тэмдэглэлтэй болно. $0 \in F$, $0e = 0 \in A$ ёсоор $0=0$ болно. Үүнийг мөн $0 \in F$ -ээр л тэмдэглэдэг. $\dim_F A = n$ гэе. $a \in A$ бол $1, a, a^2, \dots, a^n$ -үүд шугаман хамааралтай тул

$$\exists \lambda_i \in F, \quad i = \overline{0, n}, \quad \lambda_0 a^n + \lambda_1 a^{n-1} + \dots + \lambda_n = 0 \in A$$

буюу

$$f_a(x) = \lambda_0 x^n + \dots + \lambda_n \in F[x]$$

олон гишүүнтийн язгуур нь $a \in A$ болов. Хэрэв $\lambda_n \neq 0 \in F$ бол

$$a(\lambda_0 a^{n-1} + \dots + \lambda_{n-1}) = ag(a) = -\lambda_n \in A$$

буюу a урвуутай. Хэрэв $\lambda_n = 0$ бол $\forall \mu \in F$ -ийн хувьд $f_a(x + \mu) = g_\mu(x) + f_a(\mu)$, энд $g_\mu(x)$ -сул гишүүнгүй олон гишүүнт. $\forall \mu \in F$ -ийн хувьд $f_a(\mu) = 0 \in F$ бол $f_a(x) = 0 \in F[x]$ болохсон (Энэ дүгнэлт $|F| = \infty$ гэдгээс гарна). Иймд $\exists \mu \in F$. $f_a(\mu) \neq 0$. $x + \mu = a$ буюу $x = a - \mu$ гэж авбал $f_a(a - \mu + \mu) = f_a(a) = 0 = g_\mu(a - \mu) + f_a(\mu) = (a - \mu)h(a) + f_a(\mu)$. Эндээс $(a - \mu)h(a) = -f_a(\mu) \in F$ буюу $(a - \mu)^{-1} = h(a) \cdot \frac{1}{-f_a(\mu)} \in A$.

Тэмдэглэл. Энэ бодолт нь A нь дурын зэргэн ассоциатив алгебр тухайн тохиолдолд ассоциатив, альтернатив, баруун

альтернатив, йорданы алгебр байхад нь ч хүчинтэй нь харагдана.

2). Математикийн 4-р курсын оюутан Р.Отгонбаатарын бодолт.

$End A = \{\varphi | \varphi : (A, +) \rightarrow (A, +) \text{ эндоморфизм}\}, \quad \varphi, \psi \in End A, a$
бол

$$(\varphi + \psi)(a) = \varphi(a) + \psi(a), \quad \varphi \cdot \psi(a) = \varphi(\psi(a))$$

гэж тодорхойлогдох нэмэх ба үржих үйлдлийн хувьд $End A$ олонлог ассоциатив цагираг болно. $a \in A$ бүрийн хувьд $l_a(x) = ax$,

$x \in A$ гэж тодорхойлогдох $l_a : A \rightarrow A$ буулгалт нь $(A, +)$ эндоморфизмыг өгөх нь илэрхий учир $l_a \in End A$ болов. Мөн $l_{a+b} = l_a + l_b$ ба A нь ассоциатив алгебр бол $l_{ab} = l_a l_b$ байна. $n = \dim_F A < \infty$ тул F алгебр A -д тодорхой суурь сонгосон үед l_a бүр нь M_a матрицан дүрслэлтэй байна. $1 \in A$ элементэд ямар ч суурьт $M_1 = E_n$ нэгж матриц харгалзана. Үүгээр $l : A \rightarrow End A$ буулгалтыг $l(a) = l_a \in End A$ гэж тодорхойлоё.

$$l(a - \mu) = l_{a-\mu} = l_a - l_\mu = M_a - M_\mu = M_a - \mu E, \quad |M_a - \mu E| = 0$$

байх $\mu \in F$ бүр нь M_a матрицын характеристик олон гишүүнт

$$|M_a - xE| = x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \dots + \lambda_n \in F[x]$$

-ийн язгуур болно. Нэгэнт $|F| = \infty$ тул $\exists \mu_1 \in F, \quad |M_a - \mu_1 E| \neq 0$ гэтэл $M_a - \mu_1 E \in M_n(F)$ -ийн хувьд

$$|M_a - \mu_1 E| \neq 0 \iff \exists (M_a - \mu_1 E)^{-1} = B \in M_n(F) \subset End(A)$$

билээ. $B(1) = b \in A$ гэе. $(M_a - \mu_1 E)B = E = B(M_a - \mu_1 E)$ байгаа. $\forall x \in A$ -ийн хувьд $(M_a - \mu_1 E)B(x) = E(x) = x$ тухайлбал $x = 1$ үед $(a - \mu_1)b = 1$ боллоо. Одоо A -д $b(a - \mu_1) = 1$ гэдгийг харуулах л үлдлээ. A -альтернатив (тухайн тохиолдолд ассоциатив) алгебр бол

$$(M_a - \mu_1 E)[b(a - \mu_1) - 1] = (a - \mu_1)[b(a - \mu_1) - (a - \mu_1)] = \\ [(a - \mu_1)b](a - \mu_1) - (a - \mu_1) = 1(a - \mu_1) - (a - \mu_1) = 0, \quad M_a - \mu_1 E$$

матрицийн тодорхойлогч нь тэг биш тул харилцан нэг утгатай буулгалт тодорхойлно гэдгээс

$$(M_a - \mu_1 E)z = 0 \iff z = 0$$

байх ёстой тул $b(a - \mu_1) - 1 = 0$ болно. Иймд $b(a - \mu_1) = 1$ буюу $(a - \mu_1)^{-1} = b \in A$ боллоо.

Тэмдэглэл. 1-р бодолт нь a элемент, алгебрийн элемент байх шинж чанар дээр нь тулгуурласан бол 2-р бодолт нь a -элементээр манай алгебр дээр тодорхойлогдох шугаман хувиргалтын мөн чанар дээр тулгуурлав.

4. $\Rightarrow$ байх нь илэрхий.

1-р бодолт. а) $1 < m = a_1 c_1 + \dots + a_n c_n \in N$ байхаар $c_i \in Z$ -үүдийг дураараа сонгож авъя. Тэгвэл $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \equiv b(m)$ шийдтэй тул шийд нь $(x'_1, \dots, x'_n) \in Z^n$ гэвэл

$$\exists k \in Z, \quad a_1 x'_1 + \dots + a_n x'_n = b + km = b + ka_1 c_1 + \dots + ka_n c_n \Rightarrow$$

$$a_1(x'_1 - kc_1) + \dots + a_n(x'_n - kc_n) = b$$

буюу $(x'_1 - kc_1, \dots, x'_n - kc_n) \in Z_n$ нь $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$ тэгшитгэлийн бүхэл тоон шийд болно.

б) 2-р бодолт. $m = (a_1, \dots, a_n)$ гэж авъя. Тэгвэл $\exists (u_1, \dots, u_n) \in$

$Z^n, u_1 a_1 + \dots + u_n a_n = m$ байдаг ба энэ m -ийн хувьд а) тохиолдлын адилаар шийдэж болно.

Нэмэлт бодлогын бодолт. $G = H \cup M$, $E < H$, $M < G$ байдаг гэж үзье. $\exists h \in H$, $h \notin M$, $\exists m \in M$, $m \notin H$. $hm \in G$ байх ёстой. $hm \in H$ бол $hm = h_1 \Rightarrow m = n^{-1}h_1 \in H$ болж зөрчил гарав. $hm \in M$ бол мөн үүний адил зөрчил гарна.

Олон Улсын Математикийн 37-р Олимпиадад оролцсон тухай

Ц.Дашдорж

ОУМ-37 1996 оны 7 сарын 5- 17 нд Энэтхэгийн Бомбей хотод явагдаж өнгөрлөө. Дэлхийн 75 орон оролцсон энэ тэмцээнд Румын 187, Америк 185, Унгар 167, Орос 162, Англи 161, Хятад 160, Вьетнам 155, Өмнөд Солонгос 151, Иран 143, Герман 137, Япон 136, Болгар 136, Польш 122, Энэтхэг 118, Израиль 114, Канад 111, Словак 108, Украин 105, Турк 104, Тайван 100 оноогоор эхний 20 байрыг, Монгол 49 оноогоор 44-р байрыг эзлэв. Манайхаас:

Б.Энхбаяр 3, (11-р сургууль IX анги)

Т.Хулан 16, (11-р сургууль IX анги)

Т.Баярмагнай 11, (Баянхонгор, X анги)

Б.Баяржаргал 13, (11-р сургууль X анги)

Г.Цогбадарал 3, (11-р сургууль X анги)

Ц.Чинзориг 3, (11-р сургууль X анги) оноо авлаа. Т. Хулан,

П.Баяржаргал нар хүрэл медаль хүртлээ. ОУМО-38 Аргентинд 1997.07.18- 31 нд явагдана.

A1. $AB = 20$, $BC = 12$ талуудтай $ABCD$ тэгш өнцөгт өгөв. Үүнийг 20×12 ширхэг нэгж квадратад хуваав. r нь өгсөн эерэг бүхэл тоо байг. Хэрэв аль нэг 2 квадратын төвүүдийн

хоорондох зай нь $\sqrt{r}$ бол мөнгийг нэгээс нь нөгөөд шилжүүлж болно. Нэг орой нь A байх квадратаас, нэг орой нь B байх квадратад мөнгийг шилжүүлэх алхамуудын дарааллыг олох шаардлагатай байг. а) Хэрэв r нь 2-т эсвэл 3-т хуваагддаг бол энэ даалгаврыг биелүүлж чадахгүй гэж батал. б) $r = 73$ бол даалгаврыг биелүүлж болохыг батал. в) $r = 97$ бол даалгаврыг биелүүлж болох уу?

A2. P нь ABC гурвалжны дотоод цэг ба $\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$ байг. D ба E нь APB ба APC гурвалжнуудад багтсан тойргуудын төвүүд. AP, BD ба CE шулуунууд нэг цэгт огтолцохыг батал.

A3. $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ нь сөрөг биш бүхэл тоонуудын олонлог. Дурын $m, n \in S$ -ийн хувьд $f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$ байх S дээр тодорхойлогдсон ба S -д утгаа авдаг f функцүүдийг ол.

A4. $15a + 16b$ ба $16a - 15b$ -үүд нь натурал тоонуудын квадратууд байх тийм натурал нь a ба b байг. Энэ хоёр квадратын хамгийн багын авч болох боломжит хамгийн багыг ол.

A5. $ABCDEF$ гүдгэр 6 өнцөгтөд AB нь ED -тэй, BC нь FE -тэй, CD нь AF -тэй параллель байг. R_A, R_C, R_E нь FAB, BCD, DEF гурвалжнуудыг багтаасан тойргийн радиусууд, p нь 6 өнцөгтийн периметр байг.

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}$$

гэж батал.

A6. n, p, q нь $n > p + q$ байх натурал тоонууд байг. $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ бүхэл тоонууд нь дараахь нөхцөлүүдийг хангадаг:

$$a) x_0 = x_n = 0$$

б) $1 \leq i \leq n$ байх бүхэл i бүрийн хувьд $x_i - x_{i-1} = p$ эсвэл $x_i - x_{i-1} = -q$

байдаг. Тэгвэл $x_i = x_j$ байх $i < j, (i, j) \neq (0, n)$ чанар бүхий (i, j) индексийн хос олдохыг үзүүл.

Бодолт

A1.

$$A = \{(i, j) \in Z^2 \mid 0 \leq i \leq 19, 0 \leq j \leq 11\}$$

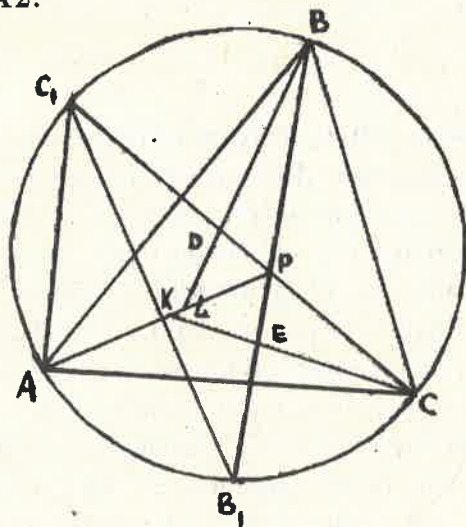
тус бүр нь $\sqrt{r}$ урттай алхамуудыг хийж A -ийн цэгүүдийг дайрч $(0,0)$ -ээс $(19,0)$ -д хүрэх ёстой. Иймд $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$ хэлбэрийн, алхаам бүрийн хувьд $a^2 + b^2 = r$ байх ёстой.

а) Хэрэв r -тэгш бол $a^2 + b^2 = r$ -ийн (a, b) шийд бүрийн хувьд $a + b$ тэгш, иймд $(0,0)$ цэгээс хүрч болох (x, y) цэгийн хувьд $x + y = 0 + 0 \pmod{2}$ буюу $x + y$ тэгш байх ёстой. Иймд $(0,0)$ -оос $(19,0)$ -д хүрч чадахгүй. Хэрэв $3 \mid r$ бол $a^2 + b^2 = r$ -ийн (a, b) шийд бүрийн хувьд $3 \mid a, b$ болно. Иймд $(0,0)$ -оос (x, y) цэгт хүрч болдог бол $3 \mid x, y$ байна. Иймд $(0,0)$ -оос $(19,0)$ -д хүрч мөн чадахгүй.

б) $r = 73 = 8^2 + 3^2$ тохиолдлыг авч үзье. a, b, c, d нь харгалзан $\pm(8,3); \pm(8,-3); \pm(3,8); \pm(3,-8)$ төрлийн алхамуудын тоо байг. Тодруулбал a нь $(8,3)$ хэлбэрийн алхамуудын тоо ба $(-8,-3)$ хэлбэрийн алхамуудын тооны ялгавар байг. $(0,0)$ -оос $(19,0)$ -д хүрч чадна гэдгээс $8(a+b) + 3(c+d) = 19, 3(a-b) + 8(c-d) = 0$ болно. $(a+b, c+d) = (2, 1)$ нь I тэгшитгэлийн, $(a-b, c-d) = (-8, 3)$ нь II тэгшитгэлийн шийд

болох нь илэрхий харагдаж буй тул эндээс $a = -3, b = 5, c = 2, d = -1$ гэж олно. Одоо A дотроо үлдэж байхаар алхамуудаа зохицуулж авах л үлдлээ. $(0, 0) \rightarrow (3, 8) \rightarrow (11, 5) \rightarrow (19, 2) \rightarrow (16, 10) \rightarrow (8, 7) \rightarrow (0, 4) \rightarrow (8, 1) \rightarrow (11, 9) \rightarrow (3, 6) \rightarrow (11, 3) \rightarrow (19, 0)$ $c)r = 97$ бол $97 = 9^2 + 4^2$ гэдгээс алхам бүр нь $(\pm 9, \pm 4), (\pm 4, \pm 9)$ хэлбэрийн аль нэг л байна. $B = \{(i, j) \in A | 0 \leq i \leq 19, 4 \leq j \leq 7\}$, $C = A \setminus B$ гээд авбал $A = B \cup C$ гэсэн хуваалт үүснэ. $(\pm 9, \pm 4)$ гэсэн хэлбэрийн алхамууд нь B -ээс C -д, мөн C -ээс B -д хүргэнэ. Гэтэл $(\pm 4, \pm 9)$ хэлбэрийн алхамууд нь C -ээс C -д хүргэнэ. Ганц алхамаар B -ээс B -д хүрч чадахгүй нь бас илэрхий. $(\pm 9, \pm 4)$ хэлбэрийн алхам бүр шилжиж буй цэгийн x - координатын тэгш сондгойг өөрчлөх тул $(0, 0)$ -оос $(19, 0)$ -д хүрэхэд сондгой тооны тийм алхам шаардагдана. Ийм алхам бүр нь B -ээс C -д, C -ээс B -д хүргэх ба эхлэлийн цэг $(0, 0) \in C$ тул заавал B -дээр ирж төгсөх ёстой, гэтэл $(19, 0) \in C$. Иймд энэ тохиолдолд шаардлагатай алхамуудын дараалал оршихгүй.

A2.



Эсрэгээс нь K ба L цэгээр AP -г, CE ба BD шулуунууд огтолдог гэе. $\angle C_1PA = 180^\circ - \angle CPA$
 $\angle AC_1P = \angle ABC$ (Үчир нь энэ 2 өнцөг AC нум дээр тулсан.)

$$\angle C_1AP = 180^\circ - \angle AC_1P - \angle C_1PA = 180^\circ - \angle ABC - 180^\circ + \angle CPA = \angle CPA - \angle ABC (*)$$

$$\angle APB_1 = 180^\circ - \angle APB$$

$$\angle AB_1P = \angle ACB$$

$$\angle B_1AP = 180^\circ - \angle APB_1 - \angle AB_1P \quad \left. \begin{array}{l} \angle B_1AP = \angle APB - \angle ACB (**)\end{array} \right\} \Rightarrow$$

(**) - үүд тэнцүү буюу $\angle CPA - \angle ABC = \angle APB - \angle ACB =$

$\angle C_1AP = \angle B_1AP = \varphi$ гээ. $\angle CAB = \alpha; \angle ABC = \beta; \angle ACB = \gamma$

гээ. $\triangle APB_1$ ба $\triangle AC_1P$ дээр синусын теорем бичвэл

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\sin \angle B_1AP}{\frac{PB_1}{AP}} = \frac{\sin \angle AB_1P}{\frac{AP}{PB_1}} \Rightarrow \frac{\sin \varphi}{\frac{PB_1}{AP}} = \frac{\sin \gamma}{\frac{AP}{PB_1}} \\ \frac{\sin \angle AC_1P}{\frac{AP}{C_1P}} = \frac{\sin \angle C_1AP}{\frac{C_1P}{AP}} \Rightarrow \frac{\sin \beta}{\frac{AP}{C_1P}} = \frac{\sin \varphi}{\frac{C_1P}{AP}} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\sin \varphi \cdot \sin \beta}{PB_1 \cdot AP} = \frac{\sin \gamma \sin \varphi}{AP \cdot C_1P} \Rightarrow$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{PB_1}{C_1P} \quad \triangle C_1PB_1 \sim \triangle PBC \rightarrow \frac{PB_1}{C_1P} = \frac{CP}{PB} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} =$$

$\frac{AC}{AB}$ (1) (Учир нь ABC гурвалжны хувьд Синусын теорем бич-
вэл $\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{AC}{AB}$ гэж гарна.) (1)-ээс $\frac{CP}{PB} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{CP}{AC} = \frac{PB}{AB}$ (2) СК

ба BL-үүд биссектрисүүд учир $\frac{AB}{BP} = \frac{AL}{LP}$ ба $\frac{AC}{PC} = \frac{AK}{KP}$ (2)-
оос $\frac{AL}{LP} = \frac{AK}{KP}$ болох ба AP нь нэг шулуун дээр орших ба

$$\left. \begin{array}{l} AK + KP = AL + LP \\ AL = \frac{LP \cdot AK}{KP} \end{array} \right\} \Rightarrow LP = KP \text{ буюу } K = L \text{ гэж}$$

гарна.

А3. $m = n = 0$ гэж авбал $f(0) = 0$ болох тул $\forall n \in N_0$ -ийн хувьд $f(f(n)) = f(n)$ (1) болно. Иймд өгсөн функциональ тэгшитгэл $\Leftrightarrow f(m + f(n)) = f(m) + f(n), f(0) = 0$ (2) болно. Хэрэв f нь тэг биш функц бол (1) ёсоор f функц нь тэг биш үл хөдлөх цэгтэй болно. а нь f функцийн тэг биш хамгийн бага үл хөдлөх цэг байг. Хэрэв $a=1$ бол $f(2)=2$ байх нь илэрхий ба $\forall n \in N_0$ -ийн хувьд индукцээр $f(n)=n$ болно. $a > 1$ гэж үзвэл индукцээр мөн $\forall k \geq 1$ -ийн хувьд $f(ka) = ka$ болно. f -ийн үл хөдлөх цэг бүр $ka, k \in N$ хэлбэртэй гэдгийг харуулъя. f -ийн 2 үл хөдлөх цэгийн нийлбэр мөн үл хөдлөх цэг байх нь илэрхий тул b нь f -ийн дурын нэг үл хөдлөх цэг

гэвэл $b = aq + r, 0 \leq r < a, \exists q, r \in Z$ болно. Тэгвэл $b = f(b) = f(aq + r) = f(r + f(aq)) = f(r) + f(aq) = f(r) + aq \rightarrow f(r) = r$ ба $r < a$ гэдгээс $r = 0$ болно. $\{f(n)/n \in N_0\}$ олонлог f -ийн үл хөдлөх цэгүүдээс тогтох тул тухайн тохиолдолд $i \in N, i < a$ байх i бүрийн $f(i) = an_i$ болно. $n \in N$ -ийг $n = ka + i, 0 \leq i < a$ гэж бичиж болох тул өгсөн функциональ тэгшитгэлээс $f(n) = f(i + ka) = f(i + f(ka)) = f(i) + ka = n_i a + ka = (n_i + k)a$ гэж гарна. Одоо ийм f функц нь өгсөн функциональ тэгшитгэлийг хангана гэдгийг үзүүлье. $m = ka + i, n = la + j, 0 \leq i, j < a$ байг. Тэгвэл $f(m + f(n)) = f(ka + i + f(la + j)) = f((k + l + n_j)a + i) = (k + l + n_j + n_i)a = f(m) + f(n)$. Ийнхүү хэрэв f нь адилтгал тэг биш бол f нь дараахь ерөнхий хэлбэртэй байна. $a \in N$ ба $n_1, n_2, \dots, n_a \in N_0$ дураараа сонгогдсон байхад $f(n) = ([\frac{n}{a}] + n_i)a$ гэж тодорхойлогдоно.

A4. $15a + 16b = r^2, 16a - 15b = s^2, r, s \in N$ байг. $r^4 + s^4 = (15^2 + 16^2)(a^2 + b^2) = 481(a^2 + b^2), 481 = 13 \cdot 37$ буюу $r^4 + s^4 \equiv 0(13), r^4 + s^4 \equiv 0(37)$ болно. Хэрэв $s \neq 0$ бол $\exists s^{-1}(13), \exists s^{-1}(37)$ гэдгээс $(\frac{r}{s})^4 \equiv 1(13), (\frac{r}{s})^4 \equiv -1(37)$ болоход хүрнэ. Энд $\frac{r}{s} \in Z_{13}, \frac{r}{s} \in Z_{37}$ билээ. Өөрөөр хэлбэл $x = \frac{r}{s}$ гэвэл $x^4 \equiv -1(13)$ боллоо. Фермагийн теоремоор $x^{12} \equiv 1(13)$ байх ёстой тул $x^{12} = (x^4)^3 = (-1)^3 \equiv 1(13)$ гэж зөрчилд хүрэв. $\text{mod} 37$ -ийн хувьд мөн л ийм байна. Үүгээр $r \equiv s \equiv 0(13), r \equiv s \equiv 0(37)$ боллоо. Ийнхүү $481 = 13 \cdot 37/s, r$ буюу $r, s \geq 481$ боллоо. $r = s = 481$ гэж авч болно. Тэгэхэд $a = 481 \cdot 31, b = 481$ буюу манай бодлогын хариу 481^2 болно.

A5. AB, BC, CD, DE, EF , ба FA талуудын уртыг харгалзан

a, b, c, d, e, f гэе. Зургаан өнцөгтийн эсрэг өнцгүүд тэнцүү. $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F. AP \perp BC, AS \perp EF, DQ \perp BC, DR \perp EF$ перпендикуляруудыг татвал $PQRS$ тэгш өн-

цөгт ба $BF \geq PS = QR$ болно. Тэгвэл $2BF \geq PS + QR = (a \sin B + f \sin C) + (c \sin C + d \sin B)$,
 $2DB \geq (c \sin A + b \sin B) + (e \sin B + f \sin A)$,
 $2FD \geq (e \sin C + d \sin A) + (a \sin A + b \sin C)$.
 $\triangle FAB, \triangle BCD, \triangle DEF$ -үүдийг багтаасан тойргийн радиусуудын хувьд $R_A = \frac{BF}{2 \sin A}$, $R_C = \frac{DB}{2 \sin C}$, $R_E = \frac{FD}{2 \sin B}$. Иймд

$$4(R_A + R_C + R_E) \geq a\left(\frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin B}\right) + b\left(\frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin B}\right) + \dots \geq 2(a + b + \dots) = 2P.$$

Хэрэв $\angle A = \angle B = \angle C$, $BF \perp BC$ буюу зөв зургаан өнцөгтийн тохиолд тэнцэл биелнэ.

А6. $(p, q) = 1$ гэж үзэж чадна; учир нь хэрэв $p = p'd, q = q'd, d > 1$ бол $p', q', x'_i = \frac{x_i}{d}$ -үүдийн хэлэн дээр бодлогыг өөрчлөн томъёолж чадна. $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ байх k ширхэг индексийн хувьд $x_i - x_{i-1} = p$ байна гэвэл $x_i - x_{i-1} = -q$ байх $i \in \{1, 2, \dots, \}$ индексийн тоо нь $n - k$ болно. $x_n = x_0 = 0$ гэдгээс $kp = (n - k)q$ болно. Энд $(p, q) = 1$ гэдгийг анхаарвал $\exists a \in \mathbb{N}, k = aq, n - k = ap, n = a(p + q), a > 1$ гэж гарна. $i \in \{0, 1, \dots, n - p - q\}$ -ийн хувьд $y_i = x_{i+p+q} - x_i$ гэж авъя. $n > p + q$ гэдгээс нэгээс илүү y_i байх нь гарна. Ядаж нэг y_i тэгтэй тэнцүү гэдгийг харвал бодлого бодогдоно. $i \in \{0, 1, \dots, n - p - q\}$ бүрийн хувьд $S_i = \{i + 1, i + 2, \dots, i + p + q\}$ гэе. $x_j - x_{j-1} = p, j \in S_i$ байх j индексийн тоо r гэвэл $x_j - x_{j-1} = -q, j \in S_i$ байх j индексийн тоо $p + q - r$ болно. Энэ бүх тэнцлүүдийг бүх $j \in S_i$ -ээр нь нийлбэрчилбэл $y_i = rp - (p + q - r)q = (p + q)(r - q)$ болно. i бүрийн хувьд $p + q | y_i$ болно. $y_{i+1} - y_i$ илэрхийллийг авч үзвэл $y_{i+1} - y_i = (x_{i+1+p+q} - x_{i+1}) - (x_{i+p+q} - x_i) = (x_{i+p+q+1} - x_{i+p+q}) - (x_{i+1} - x_i)$ болно. Энд буй хаалт бүр p эсвэл $-q$ гэдгийг анхаарвал $(1)y_{i+1} - y_i = 0$ эсвэл $\pm(p + q)$

болно. $y_0 + y_{p+q} + y_{2(p+q)} + \dots + y_{n-p-q} = 0$ байна гэдгээс y_i -үүдийн зарим нь эерэг, зарим нь сөрөг байх нь гарна. Иймд $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-p-q-1}, y_{n-p-q}$ дараалалд эерэг тэмдэгтэй зэрэгцээ хоёр y олдоно. $\forall i, p+q|y_i$ ба (1) байна гэдгээс $\exists i, y_i = 0$ гэж гарна.

Алгебрийн семинарын сониноос

Л.Оюунцэцэг (Математикийн хүрээлэн)

МУИС-ийн Алгебрийн тэнхим жараад оны дунд үеэс эхлэн алгебрийн тэнхимийн багш оюутнуудын дунд алгебрийн семинарыг тогтмол явуулж ирлээ. Уг семинарын талаар тодорхой ойлголт өгөхийн тулд 1995-1996 оны хичээлийн жилд явагдсан семинар дээр алгебрийн тэнхимийн эрхлэгч Ц.Дашдоржийн дэвшүүлсэн хоёр бодлогыг хэрхэн бодсоноо семинарт оролцогчдын хүсэлтийн дагуу сонирхуулья.

§1 Төгслөг талбар болох тухай

Бодлого 1: F талбарын мультипликатив бүлэг F^* нь төгслөг төрөгдсөн бүлэг бол F талбар төгслөг байх уу?

Бодолт: а) F талбар төгслөг p характеристиктай гэдгийг харуулья. Хэрвээ F тэг характеристиктай бол Q рационал тоон талбар F -д агуулагдана (нэгжээр үүсгэгдсэн талбар). F^* нь төгслөг төрөгдсөн абелийн бүлэг тул түүний ямар ч дэд бүлэг төгслөг төрөгдсөн байна. Гэтэл Q нь үржих үйлдлийн хувьд төгслөг төрөгдөхгүй. Учир нь анхны тоонууд үржих үйлдлийн хувьд хамааралгүй. Иймд F нь төгслөг характеристиктэй байна.

б) Одоо F талбарын элемент бүр Z_p дээр алгебрийн гэж харуулья. Эсрэгээс нь a -трансцендент элемент агуулдаг гэж

(Үүнд e нь F талбарын нэгж) гэж гарна. Дээрх тэнцэтгэлд сөрөг илтгэгчтэй үржигдэхүүнийг тэнцэтгэлийн нөгөө талд ялгаад шинээр дугаарлан тэмдэглэсэн гэвэл:

$$c_1^{\mu_1} c_2^{\mu_2} \dots c_r^{\mu_r} = c_{r+1}^{\mu_{r+1}} \dots c_s^{\mu_s}$$

болно. $\forall i \in \overline{1, n}$ -ийн хувьд $\exists j \in \overline{1, s}$ $c_i = b_j = 1 + a^{k_j}$ байна. $k_j = t_i$ гэж i -тэй адил дугаарлая.

$c_i = 1 + a^{t_i}$ болно. t_1 -г $t_i (i = \overline{1, s})$ тоонуудын хамгийн бага гэж үзэж болно. (хамгийн бага t_i -г олоод шинээр дугаарлана гэсэн үг.)

$$c_1^{\mu_1} c_2^{\mu_2} \dots c_r^{\mu_r} = c_{r+1}^{\mu_{r+1}} \dots c_s^{\mu_s} \text{ учир}$$

$$(1 + a^{t_1})^{\mu_1} (1 + a^{t_2})^{\mu_2} \dots (1 + a^{t_r})^{\mu_r} = (1 + a^{t_{r+1}})^{\mu_{r+1}} \dots (1 + a^{t_s})^{\mu_s}$$

болно. Хоёр талыг задлан a -гийн зэргүүдээр бичье. a -трансцендент учир ижил зэргийн өмнөх коэффициентүүд тэнцүү байна. t_1 хамгийн бага учир тэнцэтгэлийн зүүн талд $C_{\mu_1}^1 a^{t_1} = \mu_1 a^{t_1}$ гишүүн баруун талд a^{t_1} гишүүн гарахгүй. Эндээс $\mu_1 = 0$. F нь p характеристиктай учир $\mu_1 = 0$ эсвэл $p | \mu_1$ болно. $\mu_1 = 0$ бол манайд сонирхолгүй. $\mu_1 \neq 0$ бол $\mu_1 = p\mu'_1$

$$(1 + a^{t_1})^{\mu_1} = (1 + a^{t_1})^{p\mu'_1} = (1 + a_1^{pt_1})^{\mu'_1}$$

болно.

Одоо $pt_1, t_2, \dots, t_s$ -үүдийн хамгийн багыг авч үзье. Дээрхийн адилаар түүнд харгалзах μ_i нь эсвэл 0, эсвэл p -д хуваагдана гэж гарна гэх мэтчилэн энэ үйлдлийг давтан хийнэ. Аль ч $t_i \neq pt_j$ гэсэн учир төгсгөлөг алхмын дараа бүх μ_i -нүүд p -д хуваагдана гэж гарна.

Энэ нь $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = 1$ гэдэгт харшилна.

Ийнхүү a -нь алгебрийн элемент болно.

с) Одоо F -ийг төгслөг элементтэй гэж баталъя.

$g_1, g_2, \dots, g_n$ үүсгэгчид, s_i нь g_i элементэд харгалзан минималь олон гишүүнтийн зэрэг байг.

$\forall x \in F$ бол $x = g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_n^{\alpha_n}$ байна.

Хэрвээ $\alpha_i \geq s_i$ бол $g_i^{\alpha_i} = g_i^{s_i-1} g_i^{s_i-2} + \dots + g_i^{s_i-1}$ байна.

Ийнхүү зэргийг бууруулбал

$$x = \sum \alpha g_1^{i_1} g_2^{i_2} \dots g_n^{i_n} \quad 0 \leq i_j < s_j$$

байна. F нь Z_p дээр $g_1^{i_1} g_2^{i_2} \dots g_n^{i_n}$ ($0 \leq i_j < s_j$) хэлбэрийн суурьтай төгслөг хэмжээтэй болно. Z_p дээр төгслөг хэмжээтэй учир төгслөг элементтэй байна.

Асуулт 1: (Ц.Дашдорж) F талбарын оронд бие авч үзвэл дээрхи дүгнэлт хүчинтэй юу? Өөрөөр хэлбэл F^* нь төгслөг төрөгдсөн бүлэг бол F бие төгслөг байх уу? Энэ асуудалд одоогоор хэн ч хариу өгөөгүй байна. Харин F^* бүлэг нь төгслөг төрөгдсөн PI бүлэг бол F бие төгслөг байна гэдгийг Изриалын математикч Амицур 1950-иад онд баталжээ.

Асуулт 2: (Л.А.Бокуть) F бие нь цагираг болохынхоо хувьд төгслөг төрөгдсөн бол F бие төгслөг байх уу?

Асуулт 2 эерэгээр шийдэгдвэл Асуулт 1 эерэгээр шийдэгдэх нь хялбар мөрдөгдөнө.

§2

Бодлого 2: $R = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ $A_i \triangleleft R$ ба φ нь R цагиргийн гомоморфизм бол

$$\varphi(R) = \varphi(A_1) \oplus \dots \oplus \varphi(A_n) \quad (1)$$

байж чадах уу?

Бодолт: $\varphi(R)$ (1) дүрсээр шулуун нийлбэрт үргэлж тавигдах албагүй.

$\varphi(R) = \varphi(A_1) \oplus \dots \oplus \varphi(A_n)$ байх гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл $\ker \varphi = A'_1 \oplus \dots \oplus A'_n$ $A'_i \subset A_i$ байх явдал юм.

$\Leftarrow \Rightarrow$: $\varphi(R) = \varphi(A_1) \oplus \dots \oplus \varphi(A_n)$ байг. $\forall r \in \ker \varphi$

$\varphi(r) = 0$. Нөгөө талаас $r = a_1 + \dots + a_n$ $a_i \in A_i$.

$\varphi(r) = \varphi(a_1) + \dots + \varphi(a_n) = 0$ $\varphi(R)$ нь шулуун нийлбэрт задарна гэдгээс $\varphi(a_i) = 0$ $i = \overline{1, n}$ болно.

Эндээс $a_i \in \ker \varphi \Rightarrow a_i \in \ker \varphi \cap A_i = A'_i$. $i = \overline{1, n}$ $r \in \oplus_1^n A'_i$

Эндээс $\ker \varphi = \oplus_{i=1}^n A'_i$.

$\Leftarrow$: $\ker \varphi = A'_1 \oplus \dots \oplus A'_n$ байг.

$$\varphi(R) \subset \sum_{i=1}^n \varphi(A_i)$$

шулуун нийлбэрт тавигдахгүй гэвэл

$$\varphi(a_1) + \dots + \varphi(a_k) + \dots + \varphi(a_n) = 0 \quad \varphi(a_k) \neq 0$$

байна. $\varphi(a_1 + \dots + a_n) = 0$ гэдгээс

$a_1 + \dots + a_n \in \ker \varphi = A'_1 \oplus \dots \oplus A'_n \Rightarrow a_i \in A'_i$; $i = \overline{1, n} \Rightarrow a_i \in \ker \varphi$ $\varphi(a_i) = 0$ $i = \overline{1, n} \Rightarrow \varphi(a_k) \neq 0$ гэдэгт харшилна. $\triangleright$.

Ийнхүү R цагиргийн идеал шулуун нийлбэрт тавигдах уу? гэсэн бодлогод шилжлээ. Учир нь ямар ч идеалын хувьд түүгээр цөмөө болгосон гомоморфизм олдоно.

Өгүүлбэр: $R = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ ба $A_i^2 \neq A_i$ $i = \overline{1, n}$ F талбар дээрх алгебр бол шулуун нийлбэрт тавигдахгүй идеал олдоно гэдгийг харуулъя.

Баталгаа: $A_i^2 \neq A_i \Rightarrow \forall i$ ийн хувьд $a_i \in A_i$ $a_i \notin$

A_i^2 байх a_i олдоно. $a = a_1 + \dots + a_n$ ба

$$I = \langle a \rangle = \{ka + ra + ar' + \sum r_1 ar_2 \mid r, r', r_1, r_2 \in R; k \in F\}$$

байг.

Эсрэгээс нь $A'_i = A_i \cap I$ ба $I = A'_1 \oplus A'_2 \oplus \dots \oplus A'_n$

шулуун нийлбэрт тавигддаг байг.

$a \in I$ ба I шулуун нийлбэрт тавигдана гэдгээс $a_i \in I$ байна.

Эндээс

$$a_i = ka + ra + r'a + \sum r^{(1)} ar^{(2)} \quad (2)$$

байна. I шулуун нийлбэрт тавигдана гэдгээс (2) илэрхийллийн баруун талд i -ээс ялгаатай бүх компонент 0 байна.

$$\forall j \neq i, \quad 0 = ka_j + r_j a_j + r'_j a_j + \sum r_j^{(1)} a_j r_j^{(2)} \quad (3)$$

Нэгдүгээр нэмэгдхүүнээс бусад бүх нэмэгдэхүүн A_j^2 -д орно. Эндээс $ka_j \in A_j^2$ болно. Хэрвээ $k \neq 0$ бол R -ийг F талбар дээрх алгебр гэсэн тул $a_j \in A_j^2$ болж $a_j \notin A_j^2$ гэж авсанд харшилна. Хэрвээ $k = 0$ бол $a_i \in A_i^2$ болж мөн зөрчилд хүрнэ. Иймд I идеал шулуун нийлбэрт тавигдахгүй. (R -ийн компонентоор)

Нэмэлт: а) R нь F талбар дээрх нильпотент алгебр бол $\forall A \triangleleft R$ -ийн хувьд $A^2 \neq A$ байх ба R_F нь шулуун нийлбэрт тавигдах нильпотент алгебр оршин байна.

б) R цагираг нь нильпотент ба R -ийн шулуун нийлбэрийн компонент бүрийн хувьд R/A_j^2 цагиргийн аддитив бүлэг үегүй (ө.х. дурын тэг биш элемент + үйлдлийн хувьд төгсгөлгүй эрэмбийн) бол мөн дээрх өгүүлбэр хүчинтэй.

Говийн бүсийн аймгуудын Математикийн анхдугаар олимпиад

Ц.Дашдорж

Говийн бүсийн аймгуудын математикийн анхдугаар олимпиад 1996.03.16-23 нд Даланзадгад хотод амжилттай явагдааж өнгөрлөө. Олимпиадад Дундговь, Өмнөговь, Өвөрхангай, Баянхонгор

аймгууд оролцлоо. Говь-Алтайн баг оролцохоор нутгаасаа гарсан боловч цаг агаарын байдлаас болж замаасаа буцлаа. Анхдугаар олимпиадыг Даланзадгад хотын I сургууль, аймгийн боловсролын

төвийн санаачлагаар Аймгийн засаг даргын Тамгын газар, "Ажнай" корпорацийн ивээн тэтгэлгээр зохион байгууллаа. Олимпиадыг өндөр хэмжээнд зохион явуулахад Аймгийн засаг даргын орлогч

Ц.Баярсайхан (ЗБХ-ны дарга, одоо УИХ-ын гишүүн) I сургуулийн захирал

Б.Равжир, хичээлийн эрхлэгч А.Рагчаа, Боловсролын төвийн захирал Батчулуун нар онц идэвх зүтгэл гаргасныг дурьдахад таатай байна. Мөн Өмнөговь аймгийн Засаг дарга Ц.Мижиддорж гуай Олимпиадад их анхаарал тавьж байсныг тэмдэглэн хэлье. Олимпиадад байр эзлэгчдэд төрийн дархан Сугар гуайн хийсэн алт, мөнгө, хүрэл медалийг мөнгөн шагналын хамт гардууллаа.

8-р ангийн сурагчдаас Дагвасүрэн(Баянхонгор), Батбилэг(Дундговь), Олонгэрэл(Өмнөговь);

9-р ангийн сурагчдаас Мөнхгэрэл(Баянхонгор), Адъяажав(Өвөрхангай), Сугиррагчаа(Дундговь);

10-р ангиас Г.Баярмагнай(Баянхонгор), Даваадолгор(Өвөрхангай), Гантогтох(Өмнөговь);

Дунд ангийн багш нараас Н.Дашбат(Өмнөговь),

Самданпэрэнлэй(Дундговь), Баяржаргал(Баянхонгор);
Бага ангийн багш нараас Сарангэрэл(Өмнөговь),
Оюун-Эрдэнэ(Дундговь), Болормаа(Баянхонгор);
Багийн дүнгээр Баянхонгор, Өмнөговь, Дундговь тус тус
1,2,3-р байрыг эзэлээ. Олимпиадад нийтдээ 1 сая орчим тө-
грөг зарцууллаа.

Говийн аймгуудын математикийн олимпиадын сэдэв

VIII-A1. Аливаа бодит a, b тооны хувьд $a^n + b^n + 2\alpha a^2 b^2 \leq (\alpha + 1)(a^3 b + ab^3)$ нөхцөл биелэгдэж байх бүх α тоог ол.

VIII-A2. a, b, c тоо тус бүр 101 хуваагчтай. $\overline{abc}$ нь 1996 хуваагчтай байж болох уу?

VIII-A3. $\triangle ABC$ -ын AB тал дээр K, L цэгүүдийг тэмд-
эглэв. $AK \cdot LB = AB \cdot KL$, $\angle LCK = \angle LCB$ бол $\angle ACL = 90^\circ$ гэж батал.

VIII-B1. $p, q \in \mathbb{Z}$ бол $x^2 + 3xp - 3(q^2 + 1) = 0$ бүхэл язгу-
ургүй гэж батал.

VIII-B2. 8-ын A -гийн хүүхэд болгон 8-ын Γ -ийн яг 2,
8-ын Γ -ийн хүүхэд болгон 8-ын A -ын яг 2 хүүхэдтэй найз
бол 8^A ба 8^Γ -ийн хүүхдийн тоо ижил гэж батал.

VIII-B3. Тэгш өнцөгт дотор 1 цэг өгөв. Тэгвэл тэр цэгийг
оройнуудтай холбосон хэрчмүүдээс гурвалжин байгуулж бо-
лох 3 хэрчим сонгож болохыг үзүүл.

IX-A1. $P(x+1) = P(x) + 2x + 1$ нөхцөл хангах $P(x) \in \mathbb{R}[x]$
олон гишүүнтийг ол.

IX-A2. $n > 1$ натурал тоо, $A_n = \{x \in N | (x, n) \neq 1\}$ $\forall x, y \in A_n \Rightarrow x + y \in A_n$ байх бүх n -ийг ол.

IX-A3. Хавтгай дээр $\triangle ABC$ өгөв. N, M нь BC, AB -ын K нь AM -ын дундаж цэг, $\angle ACK = \angle BCM$ бол $\triangle AMC \sim \triangle CNK$ гэж батал.

IX-B1. Хэрэв зөв явж буй цагийн зүү, минутын зүү секундн зүүнүүд хоорондоо бүхэл градусын өнцөг үүсгэж байсан бол секундн зүү хэдийг зааж байсан бэ?

IX-B2. Дурын квадрат 3 гишүүнтийг бодит язгуургүй 2 квадрат 3 гишүүнтийн нийлбэрт тавьж болохыг батал.

IX-B3. Аль ч хоёрынх нь нийлбэр нэгээс ялгаатай 3 бодит тоо өгөв. Аль нэг хоёрынх нь хувьд $\frac{xy}{x+y-1} \notin (0, 1)$ болохыг батал.

X-A1. $d_1 = 1996^{1996}$, $d_n = S(d_{n-1})$, $n > 1$ бол d_4, d_5 -ыг ол.

X-A2.

$\sum d_i = 1$, $d_i > 0$, $k \geq 1$ бол $\sum_1^n (d_i + \frac{1}{d_i})^k \geq n(n + \frac{1}{n})^k$ гэж батал.

X-A3. M ба N 2 тойргийн огтлолцлын цэгүүд M цэг дээрх шүргэгчүүд нь тэдгээрийг A ба B цэгүүдэд огтолдог. AN нь нэг тойргийг C цэгт BN нь нөгөө тойргийг D цэгт огтлолцдог бол $\triangle MAC \equiv \triangle MAB$ гэж батал.

Х-Б1. $a)f = x, б) f(x) = x^2 \sin x$ функцүүдийг тэгш ба ует функцүүдийн нийлбэрт тавьж болох уу?

Х-Б2. $\{a_n\}, n = 1, 2, \dots, a_n \in N$ дараалал нь $p \neq q; p|q$ бол $a_p \neq a_q, a_p|a_q$ чанартай бол $a_{1000} < 64$ байж чадах уу?

Х-Б3. 12 ялгаатай номыг өнгө бүрээс ядаж 2 ном хавтаслагдсан байхаар 3 өнгөөр хавтаслах боломжийн тоог ол. (Хариуг томъёогоор)

ДБ-А1. $0 \leq k \in Z, 1 < a \in N, p$ сондгой анхны тоо ба $p^{k+1}/a^{p^k} + 1$ бол $p^{k+2}/a^{p^{k+1}+1}$ гэж батал.

ДБ-А2. $n = 10$ тоо бичигдсэн байв. n -ийн ямар нэг хуваагч d -ийн хувьд n -г $n + d$ -ээр солих үйлдлийг ээлжлэн хийж 2 хүү тоглов. Хэрэв $n + d > 19961997$ болбол тоглолт дуусна. 2-р хүү тоглолтыг дуусгаж хожигдож байхын тулд 1-р хүү яаж тоглох вэ ?

ДБ-А3. $a + b + c + d \leq 1, a, b, c, d > 0$ бол $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{d} + \frac{d}{c} \leq \frac{1}{64abcd}$ батал.

ДБ-Б1. 12 ялгаатай номыг өнгө бүрээс ядаж 2 ном хавтаслагдсан байхаар 3 өнгөөр хавтаслах боломжийн тоог ол. (Хариуг томъёогоор)

ДБ-Б2. $(d, m) = 1$ ба m нь анхны язгууртай байг. $x^n \equiv a(m)$ шийдтэй $\iff a^{\frac{\varphi(m)}{d}} \equiv 1(m), d = (n, \varphi(m))$ гэж батал.

ДБ-Б3. $N_0 = N \cup \{0\}, f : N_0 \rightarrow N_0$ функц нь $f(f(n)) + f(n) = 2n + 3, \forall n \in N_0$ бол $f(1996) = ?$

ББ-А1. Хоёр хотын хоорондох зайг онгоц 4,5 цаг нисэв. Замын эхний хагасыг 180км/ц -ийн хурдтай, үлдсэн хагасыг 225км/ц хурдтай нисэв. Хоёр хотын хоорондох зайг ол.

ББ-А2. 0-ээс 9 хүртэлх тоог зөв 10 өнцөгтийн оройнуудад аль ч зэргэлдээх гурван тооны нийлбэр нь а) 14-өөс б) 15-аас хэтрэхгүй байхаар байрлуулж болох уу?

ББ-А3. Багш нь Бат, Дорж, Болд, Цэрэн, Ням нарыг самбаарт гаргаж цифр үржүүлэх дасгал ажиллуулав. Сурагч бүрийн үржүүлсэн үржвэр өмнөх сурагчийнхаасаа $\frac{3}{2}$ дахин их байсан бол Цэрэн ямар цифрүүдийг үржүүлсэн бэ?

ББ-Б1. 6х6 таблицы нүднүүдэд 1-ээс 36 хүртэлх тоог хэлбэрийн дүрс бшрийн нүднүүдэд бичигдсэн тоонуудын нийлбэр 9-д хуваагдаж байхаар бичиж болох уу?

ББ-Б2. Цогт нь 3 оронтой тооны бүх цифрүүдийг сольсон бөгөөд нэг ч цифр хуучин байрандаа үлдээгүй болно. Дараа нь тэр гарсан шинэ тоог анхны тооноосоо нэг удаа хасав. Энэ гарсан тоо нь хоёр оронтой тооны квадрат бол үр дүнг ол.

ББ-Б3. Бүх N тоог сайн ба муу гэж нэрлэгдэх хоёр хэсэгт хуваажээ. Хэрэв A нь сайн тоо бол $A+6$ нь мөн сайн тоо, B нь муу бол $B+15$ нь мөн муу тоо байна гэж мэдэгдэнээ. Эхний 2000 тооны дотор яг 1000 сайн тоо байж болох вэ ?

МЭДЭЭЛЭЛ

Ц. Дашдорж

Сэтгүүлч С.Жамбалдорж гуай 1997.2-3 сард АНУ-ын хэд хэдэн Их Сургуульд урилгаар очиж, лекц уншиж явахдаа энд англиар бичигдсэн зүйлийг тэндхийн математикчдад сонирхуулж явжээ. Доорхи 2 бодлогын талаар манай хэвлэлүүдэд 1 бус удаа нийтлэгдэж байсан ба сонирхож оролцогчдын тоо ч нилээд хэд байгаа боловч одоогоор бодогдоогүй хэвээр байгаа бөгөөд Монголоос гадна Америкийн математикчид ч мөн үүнийг сонирхож байгаа гэдгийг та бүхэндээ сонордуулъя.

Unsolved mathematical problems

These two problems were proposed to Mongolian mathematicians a few years ago, but no solution found up to now.

Problem 1. Let $n_1^* = \overline{a_s \dots a_1}$ be the number which is obtained from the decimal representation of the given number $n_1 = \overline{a_1 \dots a_s} \in N$. Put $|n_1 - n_1^*| = n_2$ and repeat the same procedure with n_2 as in n_1 , so that $n_3 = |n_1 - n_2^*|$.

At last we obtain the sequence $n_1, n_2, \dots$. It is obvious, that this sequence is periodical. Find the all possible periods.

Problem 2. Let $A = \{1, 2, \dots, 24\}$. Prove that for every partition A into three subset $A_i \subseteq A$, such that $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, there exists subset A_i , which contains three different element $x, y, z \in A_i$, $x + y = z$.

It is interesting that Problem 1 was suggested by famous Mongolian journalist S.Jambaldorj, and he would like to call these numbers as Jamson number. Problem 2 belongs to Ts.Dashdorj, who is now the president of Mongolian Mathematical Society.

If You announce about journals, where your solution is published to the address Ts.Dashdorj, Ulaanbaatar 46/534, Mongolia, we will be very glad to You.