

МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАДЫН ЦУВРАЛ
№21

**Ц.ДАШДОРЖИЙН НЭР ЭМЖИТ
МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН
XXXIII ОЛИМПИАД
&
П.ЭНХБОЛДЫН НЭР ЭМЖИТ
УЛСЫН III УРАЛДААН**

УЛААНБААТАР, 1998

Өмнөх үг

Улсын болон Олон улсын математикийн олимпиадад бэлтгэгчид, математикийн төрөлжсөн болон гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийн сурагч, оюутан, багш нар математик сонирхогч өргөн олонд зориулсан цувралын ээлжит дугаар уншигч Таны гар дээр очиж байна. Тус гарын авлагыг бэлтгэхэд ММОЗБ Хорооны гишүүд, МУИС-ийн математикийн ангийн оюутнууд идэвхтэй оролцлоо.

Нилээд бодлогын бодолтыг сайжруулахад гүн туслалцаа үзүүлсэн ОУМО-38-ын алтан медальт, I сургуулийн X ангийн сурагч Ө.Баттулгадаа онцгой талархал илэрхийлье.

Уг номын талаархи аливаа санал хүсэлтээ МУИС-ийн Алгебр-Геометрийн тэнхимд ирүүлнэ үү.

ГАРЧИГ

Олимпиадын дүнгийн тухай /Ц.Дашдорж/	3
Од гаригийн барилдлагат онцын сонин олимпиад	
С.Эрдэнэбилэг	6
VII ангийн III даваа /Б.Сандагдорж, Б.Хоролдавга/	9
VIII ангийн III даваа /Ш.Батхишиг, Л.Даваажаргал/	12
IX ангийн III даваа /Д.Пүрэвсүрэн, М.Итгэлт/	15
X ангийн III даваа /Ц.Батхүү/	18
Багын багшийн III даваа /Б.Баяржаргал/	21
Дундын багшийн III даваа /Ц.Дашдорж/	23
VIII ангийн IV даваа /Ж.Батболд, Б.Сандагдорж/	28
X ангийн IV даваа /Б.Баттулга/	33
X ангийн IV даваа /Б.Баясгалан, Д.Батнасан/	38
Багын багшийн IV даваа /Т.Хулан/	42
Дундын багшийн IV даваа /Л.Оюунцэцэг/	45
Олон Улсын Олимпиад /Ц.Дашдорж/	51
Энхболдын III олимпиад /Л.Оюунцэцэг, Ө.Баттулга/	58
Оюутны VI олимпиад /Ц.Дашдорж/	64

Монголын Математикийн XXXIII олимпиад

Редатор Цэрэндоржийн Дашдорж

Хэвлэлийн эхийг бэлтгэсэн Цэрэндоржийн Навчаа

"Тоонот принт" ХХК-д 1998 оны 4-р сард 2500 хувь хэвлэв.

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХХШ ОЛИМПИАДЫН ДҮНГИЙН ТУХАЙ ИЛТГЭЛЭЭС

Ц.Дашдорж

Хүндэт математикчид аа!

Гэгээрлийн сайд эрхэм ноён Лхагважаваа,
Өвөрхангай аймгийн Засаг дарга ноён О.Батмөнхөө,
Эрдэм ухаанд гүн шүтлэгтэй Өвөрхангайчууд аа!

Монголын математикийн 33-р олимпиад 1997.04.27-оос 05.03-ны өдрүүдэд Өвөрхангай аймгийн Хужирт сумын төв Халуун Усанд амжилттай явагдаж дүнгээ гаргаж байна. Энэ удаагийн олимпиадад 21 аймаг, Улаанбаатар хотын 23 багийн бага, дундын 76 багш, 146 сурагчид оролцож нийт 222 хүн оюун ухаанаа сорин уралдлаа. Энэхүү олимпиадыг зохион байгуулахад санаачилга хүч чармайлт гаргаж бүх нөхцөл бололцоогоор хангаж өгсөн Өвөрхангай аймгийн Иргэдийн төлөөлөгчдийн хурлын тэргүүлэгчид, Засаг дарга О.Батмөнх, Тамгын газрын дарга Ж.Шоовдор болон олимпиадыг зохион байгуулах Өвөрхангайн салбар комиссын нарийн бичгийн дарга Б.Мөнхжаргал, Хужирт сумын ИТХТэргүүлэгчид, тус сумын Засаг дарга Ю.Хатанбаатар, Засаг даргын тамгын газрын дарга Пүрэвдорж, Л.Санжаа захиралтай Хужирт рашаан сувиллын хамт олон, Т.Доржсүрэн захиралтай 10 жилийн 1-р сургууль, Ч.Содномдорж захиралтай Хужирт-Тур жуулчны баазын хамт олон, олимпиадад оролцогчдын аюулгүй байдлыг хангахад Л.Зоригт даргатай Хужирт сумын цагдаагийн хэсгийн хамт олон, олимпиадыг зохион байгуулахад өөрсдийн нөөц бололцоогоо дайчилсан Б.Мөнхжаргал захиралтай аймгийн боловсрол соёлын төвийн хамт олон, Хужирт сумын иргэн уран сийлбэрч Б.Ерөөлт, О.Оюунцэцэг захиралтай Хужирт сумын 10 жилийн 2-р сургуулийн хамт олон болон Өвөрхангай аймгийн олимпиадын комисст Монголын нийт математикчдын нэрийн өмнөөс талархал илэрхийлье.

Олимпиадад 8-р ангийн 58 сурагчид оролцсоноос УБ хотын 11-р сургуулийн 8-р ангийн сурагч Б.Лхагва-Очир (багш Л.Эрдэнэсүвд) 22 оноогоор 1-р байр эзэлж, Улсын математикийн 33-р олимпиадын 8-р ангийн аварга боллоо. УБ хотын 11-р сургуулийн 8-р ангийн сурагч Л.Хатанбаатар (багш Л.Эрдэнэсүвд) 20.5 оноогоор, УБ хотын 1-р сургуулийн Д.Мөнгөн (багш Б.Баянбат) 18 оноогоор 2-р байрыг, УБ хотын 11-р сургуулийн Ж.Эрдэнэбилэгт (багш Л.Эрдэнэсүвд) 16.5 оноогоор, 11-р сургуулийн сурагч Б.Очирбат 17 оноогоор, 11-р сургуулийн

сурагч Б.Сансар (багш. Эрдэнэсүвд) 14.5 оноогоор 3-р байр эзэллээ.

9-р ангийн 43 сурагчид оролцсоноос УБ хотын 11-р сургуулийн 8-р ангийн сурагч Б.Баттулга (багш Л.Эрдэнэсүвд) анги өгсөн орж 21.5 оноогоор 1-р байр эзэлж, Улсын математикийн 33-р олимпиадын 9-р ангийн аварга сурагч боллоо. МУИС-ийн дэргэдэх Монгол-Туркийн сургуулийн сурагч Х.Булган-Хангай, Г.Насанбуян (багш Ж.Батболд) нар 8 оноогоор 2-р байрыг, УБ хотын 11-р сургуулийн сурагч Ж.Эрдэнэбилэгт анги өгсөн орж (багш Л.Эрдэнэсүвд) 5 оноогоор, УБ хотын 1-р сургуулийн сурагч Б.Монголжин (багш нь Н.Эрдэнэ) 5 оноогоор, Хөвсгөл аймгийн М.Ариунбат (багш нь Ганбилэг) 5 оноогоор 3-р байрыг тус тус эзэллээ.

10-р ангийн нийт 45 сурагчид оролцсоноос УБ хотын 11-р сургуулийн сурагч Б.Энхбаяр (багш А.Энхжаргал) 18 оноогоор Улсын математикийн 33-р олимпиадын 10-р ангийн аваргаар шалгарлаа. УБ хотын 1-р сургуулийн сурагч Ө.Баттулга (багш Н.Эрдэнэ) анги өгсөн орж 17 оноогоор, Улаанбаатар хотын 11-р сургуулийн Ж.Амаржаргал (багш нь А.Энхжаргал) 13 оноогоор 2-р байрыг, УБ 11-р сургуулийн Т.Хулан 9 оноогоор, УБ 1-р сургуулийн сурагч С.Баяржаргал (багш Пүрэвдорж) 7.5 оноогоор, УБ 11-р сургуулийн Н. Эрдэмбат (багш А.Энхжаргал) 7 оноогоор 3-р байрыг тус тус эзэллээ.

Улсын математикийн 33-р олимпиадад амжилттай оролцсон дээрх нэр бүхий сурагчид, олимпиадад сурагчдаа амжилттай сайн бэлтгэсэн дээрх багш нар болон сургуулиудад олимпиадыг зохион байгуулах хорооны нэрийн өмнөөс чин сэтгэлийн талархал илэрхийлье.

Багш нарын олимпиадыг бага дунд гэсэн 2 ангиллаар явуулсны дотроос дунд ангийн математикийн 46 багш оролцсоноос Булган аймгийн дунд сургуулийн багш Н. Дайвий-Од 24.5 оноогоор 1-р байр эзэлж, 33-р олимпиадын аварга математикч багшаар шалгарч мөн 33-р олимпиадын хамгийн өндөр оноотой үнэмлэхүй аварга боллоо. Өвөрхангай аймгийн Хархорин сумын 10 жилийн 1-р сургуулийн математикийн багш М. Сугар 17 оноогоор 2-р байр, УБ хотын Монгол-Оросын 3-р сургуулийн багш О. Чулуунбаатар 15 оноогоор 3-р байрыг эзэллээ.

Бага ангийн багш нарын олимпиадад нийт 30 багш оролцсоноос УБ хотын 1-р сургуулийн бага ангийн багш Б.Жаргалсүрэн 19.5 оноогоор 1-р байр эзэлж 33-р олимпиадын бага ангийн аварга математикч багшаар шалгарлаа. УБ хотын 24-р сургуулийн багш Г.Өнөрцэцэг 2-р байр, 96-р сургуулийн

багш П. Чимэг нар 3-р байр эзэлж сайхан амжилт үзүүлсэн нийт багш нартаа баяр хүргэе.

П.Энхболдын нэрэмжит уран бодолтын шагналыг УБ 1-р сургуулийн 9-р ангийн сурагч Ө.Баттулга, УБ 11-р сургуулийн сурагч Б.Баттулга нарт олголоо. Энэ хоёр сурагч хоёулаа анги өгсөн оролцов.

Багуудын уламжлалт халз тэмцээнд Д.Хашбаяр ахлагчтай "Комисс" баг 1-р байр, Б.Сандагдорж ахлагчтай "Олонлог" баг 2-р байр, Ж.Батболд ахлагчтай МИУС-ийн баг 3-р байр эзэллээ.

Олимпиадад оролцсон 23 багаас Даваадорж ахлагчтай УБ хотын баг 8.9 дундаж оноотойгоор тэргүүн байр, М. Сутар ахлагчтай Өвөрхангай аймгийн, Н.Дайвий-Од ахлагчтай Булган аймгийн багууд 7.3 онооны дунджаар 2-р байр, Ганбилэг ахлагчтай Хөвсгөл аймгийн баг 6.6 оноогоор 3-р байрыг эзэллээ.

Монголын Математикийн 33-р олимпиад ийнхүү амжилттай явагдлаа. Монголын Математикийн ээлжит Олимпиадууд 1998 онд Хөвсгөлд, 1999 онд Увсад, 2000 онд Сэлэнгэ аймагт болохоор тогтлоо.

Манай энэ удаагийн олимпиадыг явуулахад бүх талын бололцоо нөхцлөөр хангаж өгсөн Өвөрхангайчууд, Хужиртчуудад Монголын нийт математикчдын нэрийн өмнөөс гүн талархал илэрхийлэхийг хүсч байна.

Энэ жилийн 7 сард Аргентинд болох ОУМ-38-р Олимпиадын бэлтгэлд 10-р ангийн сурагч Б.Энхбаяр, Ө.Баттулга, Ц.Амаржаргал, Т.Хулан, Н.Эрдэмбат, С.Баяржаргал, 8-р ангийн сурагч Б.Баттулга нарыг үлдээх нь зүйтэй гэж үзлээ.

ММО-33-ыг өндөр түвшинд зохион байгуулахад авьяас чадлаа дайчилсан Өвөрхангай аймгийн Боловсролын төвийн захирал Б.Мөнхжаргалыг 1998 оны Тайваны Олимпиадад оролцох эрхээр шагнаж байна. Мөн төвийн мэргэжилтэн С.Эрдэнэбилэгийг ММОХорооны гишүүнээр авч ажиллуулах нь зүйтэй гэж үзэж байна.

Эрдэм оюун дэлгэрч Монголд математикчдын оюун ухаан улам хөгжиж бадрах болтугай.

ОД ГАРИГИЙН БАРИЛДЛАГАТ ОНЦЫН СОНИН ОЛИМПИАД

С.Эрдэнэбилэг (Өвөрхангай)

Ц.Дашдоржийн нэрэмжит Монголын Математикийн 33-р Олимпиадыг од гаригийн барилдлагат онцын сонин Олимпиад боллоо гэж үзэх хүмүүс байсныг лавшруулан цааш сонирхоход үнэхээр сонин зүйлс алхам тутамд тааралдав.

- ММО-33-ыг Өвөрхангайд хийх санаачлагыг Өмнөговьд болсон Говийн бүсийн 1-р Олимпиадын үеэр Ц.Дашдорж, Д.Дашдорж (Өвөрхангай аймгийн нийгмийн бодлогын хэлтсийн дарга) нар 1996.03.17-нд гаргаад, албан ёсны эрхээ 1996.05.05-нд ММО-32-ын дүнгийн хурал дээр Д.Дашдорж Ц.Дашдоржоос гардаж авав. Энэ 2 бол хоёулаа Өвөрхангайн унаган иргэд (Дашрамд сониржуулахад ММО-34-ыг Хөвсгөлд хийх саналыг Хөвсгөл аймгийн Засаг даргаас ирүүлсэн албан тоот мөн 1997.03.17-ны өдрөөр үзэглэгджээ).
- ММО-33-д 222 хүн уралдсаны 161 нь албан ёсных 61 нь хувиараа оролцогчид ба Улсын Комиссын 22 хүн ажилласан байв.
- ММО-33-д П.Энхболдын шагналыг Ө.Баттулга, Б.Баттулга нар хүртэв. Энэ 2 бол хоёулаа анги өгсөж орсон бөгөөд ОУМО-38-аас хоёулаа хамгийн өндөр оноо авсан буюу Ө.Баттулга (I сургууль, IX анги) 36 оноогоор Монгол Улсын түүхэнд ОУМО-ийн анхны алтан медалийн эзнээр тодорсон бол, Б.Баттулга мөн Монгол Улсын түүхэнд анх удаа VIII ангийн сурагч хүрэл медаль хүртсэн рекорд амжилт төдийгүй энэ 2 Баттулга хоёулаа 1981 онд төрсөн чацуутнууд юм (П.Энхболдын шагналыг ганц л хүнд өгнө гэж Ц.Дашдорж комиссын бусад гишүүдтэйгээ маргаад эцэст нь арга буюу энэ 2-т өгөхөөр шийдэж байсныг санахад бас сонин юм)
- ММО-34-ыг Хөвсгөлд хийх албан ёсны эрхийг ММО-33-ын дүнгийн хурал дээр Хөвсгөлийн С.Мөнхжаргал, Өвөрхангайн Б.Мөнхжаргалаас гардан авав. Энэ 2 Мөнхжаргал бол хоёулаа Боловсролын төвд ажилладаг математикчид юм.
- ММО-33-д 11-р сургуулийнхан 11 медаль хүртэв.
- ММО-33-д аймаг хотуудыг байр эзлүүлэхэд анх удаа 2 баг яг адил 36.5 оноогоор 2-р байрыг эзлэв, тэр бол Өвөрхангай, Булганы багууд байв.

- ММО-33 дээр анх удаагаа 2 ангийн бодлогыг давхар бодож уралдах явдал гарлаа. Тэр нь 11-р сургуулийн 8-р ангийн сурагч Ж.Эрдэнэбилэгт бөгөөд 8 ба 9-р ангидаа хоёуланд нь 3-р байр эзэлж хос хүрэл медаль зүүв. Эрдэнэбилэгтэй хамт хүрэл медаль хүртсэн 9-р ангийн 3 хүүхэд гурвуулаа 5 оноотой, мөнгөн медаль авсан 2 хүүхэд хоёулаа адилхан 8 оноотой байв гэх мэт.
- ММО-33-ын аваргуудад Өвөрхангай аймгаас өгсөн шагнал нь туйлын уран хийцтэй хос хурдан хөлгийн сийлбэр байв.

ММОХорооны дарга Ц.Дашдоржид Өвөрхангай аймгийн 01 дутаартай соёрхлыг хүртээв:

“Өвөрхангай аймгийн соёрхол”

Цэрэндоржийн Дашдорж танаа

Математикийн Шинжлэх Ухаанд гаргасан амжилт бүтээлээрээ уугуул нутаг Өвөрхангай аймгийнхаа ард түмний бахархал болж, төрсөн нутгийнхаа нэр алдрыг дэлхийн хэмжээнд дуурсгасан гарамгай эрдэмтэн танд “Өвөрхангай аймгийн соёрхол” хүртээв.

Оюун ухааны тань мэлмий хурц байх болтугай.

Аймгийн иргэдийн төлөөлөгчидийн тэргүүлэгчдийн дарга

С.Чинзориг.

1997.05.02

гэжээ.

Алдар цуутан олонтой Өвөрхангай аймгийн соёрхлын анхныхыг математикч хүнд олгосон нь Монголын нийт математикчдын баяр талархлыг төрүүлж байна.

Мөн Өвөрхангай аймгийн нутгийн зөвлөлийн шагналыг Ц.Дашдорж ба түүний гэргий Р.Оюунбат (Ц.Дашдорж, Р.Оюунбат нар Өвөрхангайн Есөнзүйл сумын уугуул иргэд юм, хөгжимчин Р.Оюунбат МУИС-ийн Ардын Урлаг Судлалын тэнхимийн багш) нарт, ММО-33-ын үнэмлэхүй аврага Булганы багш Н.Дайвий-Одод Сайн ноён хаан Намнансүрэнгийн нэрэмжит шагналыг Өвөрхангай аймгийн нутгийн Зөвлөлийн нарийн бичгийн дарга Ч.Надмид гардуулав.

ММО-33. БАГТУУДЫН ДҮН.

№	Аймгуудын нэр	суралчид			багш		нийт оноо	орос-ичигдмэл тоо	дундаж оноо	байр
		VIII	IX	X	бага дунд	дунд				
1	Архангай	2.5	8	0	5.5	7	23	5	4.6	VI
2	Баянхонгор	4	0.5	0	12.5	2.5	19.5	5	3.9	VII
3	Баян-Өлгий	0	0	0	4	4	8	5	1.6	XVI
4	Булган	0.5	0.5	0	11	24.5	36.5	5	7.3	II
5	Говь-Алтай	1	0	0	5	4	10	5	2	XIV
6	Говь-Сүмбэр	0.5	0	0	12.5	0.5	13.5	5	2.7	XI
7	Дархан-Уул	2	0	0	4	6.5	12.5	5	2.5	XII
8	Дорнод	2.5	0.5	0	3	1	7	5	1.4	XVIII
9	Дорноговь	0.5	1	0	12.5	0	14	5	2.8	X
10	Дундговь	0.5	0.5	0	1	3.5	5.5	5	1.1	XIX
11	Завхан	0.5	0	0	8.5	0	9	5	1.8	XV
12	Орхон	3	0	0	14.5	0	17.5	5	3.5	VIII
13	Өвөрхангай	9	2.5	1	7	17	36.5	5	7.3	II
14	Өмнөговь	3	0	0	1	3.5	7.5	5	1.5	XVII
15	Сүхбаатар	0	0	0	7.5	8	15.5	5	3.1	IX
16	Сэлэнгэ	0.5	0.5	2	8	0	11	5	2.2	XIII
17	Төв	1.5	0	1	4.5	4	11	5	2.2	XIII
18	Увс	8	1.5	0.5	6	10	26	5	5.2	V
19	Ховд	1.5	0	0	1	0	2.5	5	0.5	XX
20	Хөвсгөл	7	5	0	7	14	33	5	6.6	III
21	Хэнтий	1.5	0	0	12	0	13.5	5	2.7	XI
22	УБ	120	48	72	55.5	50	345.5	39	8.9	I
23	Олондот	20	2	29			31	8	6.4	IV

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН XXXIII
ОЛИМПИАДЫН VII АНГИЙН III ДАВААНЫ
БОДЛОГО

Б.Сандагдорж

Б.Хоролдагва

VII-A1. $a^2x^2 + ax + 1 - 7a^2 = 0$ квадрат тэгшитгэл хоёр бүхэл шийдтэй байх бүх эерэг a тооны утгуудыг ол.

VII-A2. ABC зөв гурвалжны хавтгайд $\angle AMB = 120^\circ$ байх M цэгийг тэмдэглэв. Хэрэв $|AM| = 1$, $|BM| = 2$ бол $|MC|$ хэрчмийн уртыг ол.

VII-A3. 69 улаан, 101 хөх нийт 170 шагайг тойргоор өрөхөд хооронд нь 33 шагай орших 2 улаан шагай олдохыг батал.

VII-B1. Сөрөг биш бүхэл тоон хосуудыг дараахь байдлаар дэс дараалан бичиж, түүнийг дугаарлая. Үүнд: $(0,0)$; $(0,1)$; $(1,0)$; $(0,2)$; $(1,1)$; $(2,0)$; $(0,3)$; $(1,2)$; $(2,1)$; $(3,0)$; $(0,4)$... гэх мэт. Өөрөөр хэлбэл $C(0,0) = 0$, $C(0,1) = 1$, $C(1,0) = 2$, ..., $C(2,1) = 8$, ... гэсэн дугааруудыг харгалзуулья. Тэгвэл

а) $(33,33)$ хосын дугаарыг ол.

б) 1997 дугаартай хосыг ол.

VII-B2. ABC гурвалжны AB талын дундаж D цэг, харгалзан CA , CB талууд дээр орших дурын E , F цэгийн хувьд DEF гурвалжны талбай DBF , DAE гурвалжнуудын талбайн нийлбэрээс хэтрэхгүйг батал.

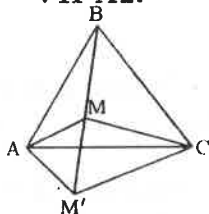
VII-B3. Тус бүр нь 3 ширхэг байдаг ялгаатай 7 зоос өгөгдөв. Эдгээрийг дурын ялгаатай 2 зоос бүр нэг хайрцагт ордог ба хайрцаг бүр ялгаатай 3 зоостой байхаар 7 хайрцагт байрлуулж болох уу? Болдог бол түүнийг харуул.

Бодлогуудын бодолт.

VII-A1. Виетийн томъёогоор $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{1}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{a^2} - 7 \end{cases}$ болох ба

бүхэл шийдтэй байна гэдгээс $\frac{1}{a} \in \mathbb{Z}$ тул $a = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ болно. Нөгөө талаас дискриминант нь $D = a^2 - 4a^2(1 - 7a^2) = 28a^4 - 3a^2 = a^2(28a^2 - 3)$ буюу $28a^2 - 3 = b^2$ байх ёстой болно. $a = \frac{1}{n}$ тул $\frac{28-3n^2}{n^2} = b^2$ буюу $28 - 3n^2 = c^2$ байх n -ийн утгыг олоход хүрнэ. Эндээс $n = 1, 2, 3$ гэж гарах ба $a \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$. Иймд $a = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ тус бүрийн хувьд бүхэл шийдүүдтэй тул бидний олох утга болж бодлого бодогдоно.

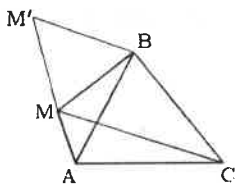
VII-A2.



а) M цэг ABC гурвалжны дотор оршдог байг. Тэгвэл A цэгт төвтэй 60° -ийн эргүүлэлтийг авч үзье. $R_A^{-60^\circ}(B) = C$, $R_A^{-60^\circ}(M) = M'$ бол $\angle AMB = 120^\circ$ учраас $M' \in (BM)$.

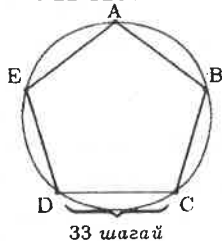
$R_A^{-60^\circ}(\angle AMB) = \angle AM'C = 120^\circ$ тул $\angle CM'M = \angle AM'C - \angle AM'M = 60^\circ$

байна. Нөгөө талаас $BM = CM' = 2$, $MM' = 1$ тул $\triangle MCM'$ -тэгш өнцөгт. Иймд $\sin 60^\circ = \frac{MC}{CM'} \Rightarrow CM = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.



б) M цэг ABC гурвалжны гадна оршдог байг. Тэгвэл B цэгт төвтэй 60° эргүүлэлтийг авч үзье. $\angle AMB = 120^\circ$ тул M цэгийн дүр M' нь AM шулуун дээр оршино. $R_B^{-60^\circ}(M) = M'$, $R_B^{-60^\circ}(C) = A$ тул $CM = AM' = AM + MM' = AM + MB = 3$.

VII-A3.



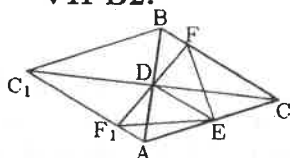
Тойргоор өгөгдсөн 170 шагайнаас зөв 5 өнцөгтийн орой болох 5 шагайг сонгож авъя. Ийм 34 ширхэг зөв 5 өнцөгтийг сонгож авч чадна. Энэ зөв 5 өнцөгтийн орой болж буй 5 шагайны ядаж 3 нь улаан өнгөтэй бол бодлого бодогдоно. Иймд зөв 5 өнцөгтийн орой болж буй

5 шагайн улаан шагайн тоо 3-аас бага бол хамгийн ихдээ $34 \cdot 2 = 68$ улаан шагай оролцох болж зөрчилд хүрэх юм. Үүссэн зөрчлөөс бодлого бодогдоно. Иймд 68 улаан 102 хөх шагайг хооронд нь 33 шагай орших 2 улаан шагай олдохгүй байхаар тойргоор өрж болно гэсэн үг.

VII-B1. $\underbrace{(0,0)}_1; \underbrace{(0,1), (1,0)}_2; \underbrace{(0,2), (1,1), (2,0)}_3; \dots$ гэх мэт.

$a + b = n$ байх (a, b) хосын нийт тоо $n + 1$ байна. Иймд $a + b = n$ байх (a, b) хосын хамгийн сүүлчийн хос $(n, 0)$ дугаар $1 + 2 + 3 + \dots + n + n + 1 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ нийлбэрээс 1-ээр бага байх юм. Учир нь $C'(0,0) = 0$. Эндээс $(65, 0)$ гэсэн хосын дугаар нь $\frac{67 \cdot 66}{2} - 1 = 2210$ болно. Тэгэхлээр $(33, 33)$ хосын дугаар нь $(65, 0)$ хосын дугаар дээр 34-ийг нэмэхэд гарах тул $C(33, 33) = 2244$ байна. Энэ тооцоог хийвэл 1997 дугаартай хос нь $(18, 44)$ болно. Бүр ерөнхий тохиолдолд дурын (x, y) хосын номер нь $1 + 2 + \dots + (x + y - 2) + (x + y - 1) + (x + y) + [(x + 1) - 1] = \frac{(x + y)(x + y + 1)}{2} + x = \frac{(x + y)^2 + 3x + y}{2}$ байна гэдэг нь хялбар харагдаж байна.

VII-B2.



ABC гурвалжныг D цэгийн хувьд тэгш хэмээр хувиргая. C ба F цэгүүдийн дүрийг харгалзан C_1, F_1 гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $S_{\triangle DBF} = S_{\triangle DAF_1}$ ба $S_{\triangle DEF} = S_{\triangle DEF_1}$ болно.

AF_1DE гүдгэр дөрвөн өнцөгт тул $S_{\triangle DBF} + S_{\triangle DAE} = S_{AF_1DE} > S_{\triangle DEF_1} = S_{\triangle DEF}$ болж батлагдана.

VII-B3. Өгөгдсөн 21 зоосныхоо ялгаатай 7 төлөөлөгчийг 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 гэе. Эдгээр нь тус бүр 3 ширхэг байдаг гэсэн үг. Иймд бодлогын нөхцлийг хангасан байхаар 7 хайрцагт байрлуулж болох нь дараахь хүснэгтээс харагдана.

Хайрцгууд	I	II	III	IV	V	VI	VII
хайрцагт	0	3	0	1	1	2	2
орсон	1	4	5	3	4	3	4
зооснууд	2	0	6	5	6	6	5

ММО-33. VIII АНГИЙН III ДАВААНЫ БОДЛОГО

Ш.Батхишиг
Л.Даваажаргал

VIII-A1. a, b, c, d ялгаатай натурал тоонуудын хувьд

$$a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d + c \cdot d < \frac{3}{2}abcd$$

болохыг батал.

VIII-A2. Аливаа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 бүхэл тоонуудын хувьд $x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + x_3 \cdot a_3 + x_4 \cdot a_4 + x_5 \cdot a_5$ нийлбэр 29-д хуваагддаг $x_i \in \{-1; 0; 1\}$ $i = \overline{1, 5}$ байх бүгд тэг биш x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 тоонууд ямагт олдохыг батал.

VIII-A3. ABC адил хажуут ($AB = BC$) гурвалжны оройн өнцөг 100° болно. C өнцгийн биссектрис AB талыг D цэгт огтлох бол $|DB| + |DC| = |AC|$ гэж батал.

VIII-B1. Ижилхэн 11 зоосыг шулууны дагуу байрлуулахдаа тоогоороо харсан зэрэгцээ хоёр зоос байхгүйгээр хичнээн янзаар байрлуулж болох вэ?

VIII-B2. ABC гурвалжны CD медиан дээр орших дурын M цэгийг дайруулан татсан AM, BM шулуунууд нь C оройг дайрсан аливаа шулуунтай харгалзан P, Q цэгүүдэд огтлолцдог бол

$$\frac{AM}{MP} + \frac{PC}{CQ} + \frac{QM}{MB} \geq 3$$

гэж батал.

VIII-B3.

	74			
				186
		103		
0				

Өгөгдсөн хүснэгтийг мөр бүр ба багана бүрт бичигдсэн тоонууд арифметик прогресс үүсгэхээр хоосон нүднүүдийг бөглө.

Бодлогуудын бодолт.

VIII-A1. $a \cdot b \cdot c \cdot d \neq 0$ учир

$$\frac{1}{abcd}(a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d + c \cdot d) < \frac{3}{2}$$

болохыг батлахад хангалттай. $0 < a < b < c < d$ гэвэл $1 \leq a$, $2 \leq b$, $3 \leq c$, $4 \leq d$ болно. Иймд

$$\begin{aligned} & \frac{1}{cd} + \frac{1}{bd} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ad} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} \leq \\ & \leq \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{35}{24} < \frac{36}{24} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

VIII-A2. $y_i \in \{-1; 1\}$ $i = \overline{1, 5}$ байх $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ дарааллуудыг авч үзье. Дараалал бүрт $y_1 \cdot a_1 + \dots + y_5 \cdot a_5 \pmod{29}$ үлдэгдлийг онооё. Нийт 32 ширхэг дараалал зохиож болох учир Дирихлейн зарчмаар үлдэгдэл нь ижил байх $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ ба $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ ялгаатай дарааллууд олдоно. Улмаар

$$\sum_{i=1}^5 u_i a_i - \sum_{i=1}^5 v_i a_i = \sum_{i=1}^5 (u_i - v_i) \cdot a_i$$

нийлбэр нь 29-д хуваагдана. Энд $u_i - v_i \in \{-2; 0; 2\}$ ба ямар

нэг j -ийн хувьд $u_j - v_j \neq 0$ байна. Иймд $\sum_{i=1}^5 \frac{1}{2}(u_i - v_i) \cdot a_i$

нийлбэр 29-д хуваагдах ба $\frac{1}{2}(u_i - v_i) \in \{-1; 0; 1\}$ болно.

VIII-A3. $|DC| = |CM|$ байхаар M цэгийг AC тал дээр авья. Тэгвэл $\hat{C}MD = 80^\circ$ болно. Иймд $DBCM$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. Улмаар

$\hat{DBM} = \hat{DCM} = \hat{DMB} = 20^\circ \Rightarrow \hat{ADM} = 180^\circ - \hat{MDB} = 40^\circ$, $\hat{BAC} = 40^\circ$ тул $AM = MD = DB$ болно.

Эндээс $|DB| + |DC| = |AC|$ болно.

VIII-B1. n ширхэг зоосыг бодлогын нөхцлийг хангахаар байрлуулах нийт тоог x_n гэж тэмдэглэе. n дүгээр зоос эсвэл сүлдээрээ эсвэл тоогоороо байрлаж болно. I тохиолдолд үлдсэн зоосыг x_{n-1} янзаар байрлуулах ба II тохиолдолд $n - 1$ дүгээр зоос зөвхөн сүлдээрээ байрлах тул нийт x_{n-2} янзаар байрлуулна. Иймд $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ болно. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ (сс, ст, тс), $x_3 = 5$, $x_4 = 8 \dots$, $x_{11} = 233$ болно.

VIII-B2. $\angle AMB = \alpha, \angle MBD = \beta, \angle MCQ = \delta, \angle MCP = \psi,$
 $\angle DMB = \gamma, \angle DMA = \varphi$ гэе. $\triangle AMB$ хувьд $\frac{AM}{MB} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha};$
 $\triangle MCQ$ хувьд $\frac{QM}{QC} = \frac{\sin \delta}{\sin \gamma}; \triangle MCP$ хувьд $\frac{PC}{MP} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} \quad (*)$;
 $\delta = \pi - \psi \quad (**); \triangle DMB$ хувьд $\frac{DM}{DB} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}; \triangle ADM$ хувьд
 $\frac{AD}{DM} = \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha}$ болно. Нөхцөл ёсоор $|AD| = |DB|$.

Иймд $\frac{DM}{DB} \cdot \frac{AD}{DM} = 1 = \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \quad (1) \text{ болно.}$

$$\frac{AM}{MP} + \frac{PC}{CQ} + \frac{QM}{MB} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{AM}{MP} \cdot \frac{PC}{CQ} \cdot \frac{QM}{MB}} \stackrel{(2)}{=} 3$$

$$\frac{AM}{MP} \cdot \frac{PC}{CQ} \cdot \frac{QM}{MB} \stackrel{(*)}{=} \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \delta}{\sin \gamma} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} \stackrel{(**)}{=} \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \gamma} \stackrel{(1)}{=} 1 \quad (2)$$

VIII-B3.

4b				
3b	74			
2b				186
b		103		
0	a	2a	3a	4a

$$\begin{cases} 3 \cdot \left(\frac{b+103}{2} - a \right) + a = 74 \\ 2 \cdot \left(4 \cdot \left(\frac{b+103}{2} - b \right) + b - 4a \right) + 4a = 186 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3b + 309 - 6a + 2a = 148 \\ 2 \cdot (2b + 206 - 4b + b - 4a) + 4a = 186 \end{cases} \Rightarrow b = 13, a = 50.$$

52	82	112	142	172
39	74	109	144	179
26	66	106	146	186
13	58	103	148	193
0	50	100	150	200

ММО-33. IX АНГИЙН III ДАВААНЫ БОДЛОГО

Д.Пүрэвсүрэн

М.Итгэл

IX-A1. $n \in N$, $a_1, \dots, a_n$ эерэг тоонуудын хувьд

$$\frac{a_1}{a_2 + 2a_3 + \dots + (n-1)a_n} + \frac{a_2}{a_3 + 2a_4 + \dots + (n-1)a_1} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + 2a_2 + \dots + (n-1)a_{n-1}} \geq \frac{2}{n-1}$$

тэнцэтгэл бишийг батал.

IX-A2. $\triangle ABC$ -ын хувьд BC талтай параллель шулуун AB , AC талуудыг харгалзан D , E цэгүүдэд огтолно. $\triangle ADE$ доторхи P цэгийн хувьд BP , CP шулуунууд DE хэрчмийг харгалзан F , G цэгүүдэд огтолно. $\triangle PDG$ ба $\triangle PEF$ -ийг багтаасан тойргууд дахиад Q цэгт огтлолцдог бол A , P , Q цэгүүд коллинеар гэж батал.

IX-A3. $f: N \rightarrow N$ буулгалт нь

$$(i) \quad f(f(n)) = 4n - 3 \quad n \in N$$

$$(ii) \quad f(2^k) = 2^{k+1} - 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

нөхцлүүдийг хангадаг бол $f(1997)$ -ийг ол.

IX-B1. n нь $2 + 2^{n-1} + 3^{n-1} + \dots + (n-1)^{n-1}$ нийлбэрийн хуваагч байх натурал бол n тоо нэгээс их натурал тооны квадратад хуваагдахгүй болохыг батал.

IX-B2. $\triangle ABC$ -д багтсан тойргийн радиус r болог. D , E , F нь харгалзан BC , CA , AB талууд дээрх цэгүүд ба $\triangle AEF$, $\triangle BDF$, $\triangle CED$ -д багтсан тойргуудын радиус бүгд r_1 -тэй тэнцүү бол $\triangle DEF$ -д багтсан тойргийн радиус $r - r_1$ болохыг батал.

IX-B3. A , B үл огтлолцох төгсгөлөг тоон олонлогууд. Хэрэв $x \in A \cup B$ бол $x + 1 \in A$ эсвэл $x - 2 \in B$ бол $|A| = 2 \cdot |B|$ болохыг батал.

Бодлогуудын бодолт.

$$\text{IX-A1. } A = \frac{a_1}{a_2 + \dots + (n-1)a_n} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + \dots + (n-1)a_{n-1}}$$

гэе. Коши-Буняковскийн тэнцэл биш ёсоор

$$A \cdot \left[a_1(a_2 + \dots + (n-1)a_n) + \dots + a_n(a_1 + \dots + (n-1)a_{n-1}) \right] \geq (a_1 + \dots + a_n)^2$$

болно. Эндээс

$$A \geq \frac{(a_1 + \dots + a_n)^2}{n(a_1a_2 + \dots + a_{n-1}a_n)} = \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n(a_1a_2 + \dots + a_{n-1}a_n)} + \frac{2}{n} \quad (*)$$

гэж гарна.

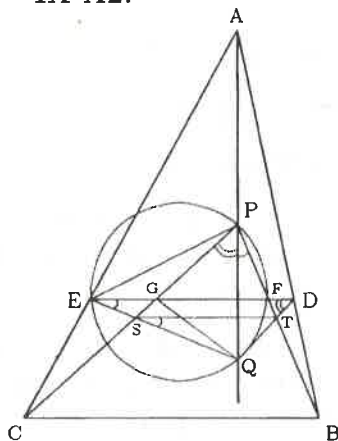
$$2a_ia_j \leq a_i^2 + a_j^2 \Rightarrow 2(a_1a_2 + \dots + a_{n-1}a_n) \leq (n-1)(a_1^2 + \dots + a_n^2)$$

ба үүнийг (*)-д ашиглавал

$$A \geq \frac{2}{n(n-1)} + \frac{2}{n} = \frac{2}{n-1}$$

болж батлагдав.

IX-A2.



$\triangle EPF$ -ийг багтаасан тойргийн AP -тэй огтлолцсон хоёр дахь цэгийг Q , $EQ \cap CP = S$, $QD \cap BP = T$ гэе. $\triangle ACP$ -аас Чевийн теорем бичвэл $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CS}{SP} \cdot \frac{PQ}{QA} = 1$,

$\triangle ABP$ -аас Чевийн теорем бичвэл $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BT}{TP} \cdot \frac{PQ}{QA} = 1$ тус тус

болно. $ED \parallel CB \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$

ба энэ гурваас $\frac{CS}{SP} = \frac{BT}{TP}$ ба $ST \parallel ED$ болно.

Иймд $\angle DEQ = \angle TSQ$ ба $\angle FEQ = \angle QPT \Rightarrow S, P, T, Q$ дөрвөн цэг нэг тойрог дээр оршино. Мөн $\angle SPQ = \angle STQ$ ба $\angle SQT = \angle EDQ \Rightarrow G, P, D, Q$ цэгүүд нэг тойрог дээр орших болж батлагдав.

IX-A3. Уг бодлогын нөхцөл дутуу ба зохиогчийн буруугаар орхигдсон юм. Дурдсан хоёр чанар функцийн бүрэн тодорхойлолт болж чадах эсэх нь тодорхойгүй ба $f(n) = 2n - 1$ нь хоёр нөхцлийг хангадаг функц юм. Өөр функц бий эсэх талаар хийсэн зохиогчийн бүх оролдлого ямарч амжилтанд хүрээгүй юм. Бодлогын нөхцлийг хангасан өөр функц олбол эсвэл бодлогын талаар тодорхой нэг үр дүнд хүрвэл зохиогчид хандаарай.

IX-B1. Энэ бодлогод дараахь леммийг ашиглая.

Лемм:

$$1^k + 2^k + \dots + (p-1)^k \equiv \begin{cases} -1(p), & \text{хэрэв } k \equiv 0(p-1) \\ 0(p), & \text{хэрэв } k \not\equiv 0(p-1) \end{cases}$$

(Энэ лемм нь Ц.Дашдорж, А.Ганбаатар "Математикийн мэргэжлийн курс" номны 1.9.12 бодлого юм.)

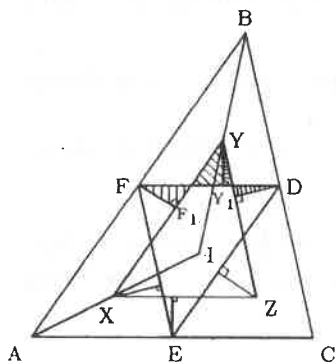
Бид $A = 2 + 2^{n-1} + \dots + (n-1)^{n-1}$ гэе. Эсрэгээс нь $\exists p, n: p^2$ гэе. $n = p \cdot a$ байг (ө.х $a \not\equiv p$ юм).

$$A = 1 + 1^{n-1} + \dots + (p-1)^{n-1} + p^{n-1} + \dots + (pa - (p-1))^{n-1} + \dots$$

$$+ (pa - 1)^{k-1} \underset{\text{лемм ёсоор}}{\equiv} \begin{cases} 1(p), & \text{хэрэв } n-1 \not\equiv 0(p-1) \\ 1 - a(p), & \text{хэрэв } n-1 \equiv 0(p-1) \end{cases}$$

нөхцөл ёсоор $A \equiv 0(p)$ тул $1 - a \equiv 0(p)$ байх ёстой $\Rightarrow a \equiv 1(p)$ болж зөрчилд оров.

IX-B2.



X, Y, Z нь өгөгдсөн гурван гурвалжинд багтсан тойргийн төвүүд. Өгсөн нөхцлөөс $AB \parallel XY$, $BC \parallel YZ$, $AC \parallel XZ$ болно. Иймд $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$ ба төсөөгийн төв I болно. Энд I нь биссектрисийн огтлолцлын төв юм. $YY_1 = FF_1 = r_1$ гэдгээс $FY_1 = YF_1$ болно. Иймд $\triangle EDF$, $\triangle XYZ$ -ийн перимтер ба талбай нь тэнцүү ба эндээс эдгээрт багтсан тойргийн радиусууд тэнцүү байна.

Үүнийг r_2 гэе. r_2 нь I-ээс AB хүртэл зайнаас AB , XY -ын хоорондох зайг хассантай тэнцүү тул $r_2 = r - r_1$ болж батлагдав.

IX-B3. а) $x \in A$, $x-2, x-4 \in B$ байж болохгүйг батлая (ө.х B олонлогт дэс дараалсан тэгш эсвэл сондгой тоо ордоггүй).

$$\begin{array}{l} x \in A \\ x-2, x-4 \in B \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x, \\ x-2, x-4, \dots, x-2n \in B \end{array} \text{ байх } (n \geq 2)$$

 n тоо олдоно. Иймд $x - (2n-1) \in A \cup B \Rightarrow x - (2n+1) - 2 \in B \Rightarrow x - (2n+1) \in B \Rightarrow x - (2n+3) \in B$ болно.

$y = x - (2n-1)$ гэвэл $y \in A$ $y-2, y-4 \in B$ болж а) хэлбэр дахин гарч ирнэ. Иймд энэ нь ∞ үргэлжлэх тул болохгүй.

ММО-33. X АНГИЙН III ДАВААНЫ БОДЛОГО

Ц.Батхүү

X-A1(Б.Баясгалан). k_n -ээр $1, 2, \dots, n$ тоонууд харилцан үл огтлолцох k_n ширхэг геометр прогрессийн гишүүн байх хамгийн бага тоог тэмдэглэе. k_{1997} -г ол.

X-A2(Д.Хашбаяр). $A \subseteq N$ ба $f : A^2 \rightarrow A$, $f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$ байх буулгалт (функц) байг.

а) $|A| < \infty$ бол $f(x, x) = x$ байх x тоо олдохыг батал.

б) $A = N$ бол $\forall x \in N$ хувьд $f(x, x) \neq x$ байх дээрх чанартай f функц олдохыг батал.

X-A3(Ц.Дашдорж). $ABCD$ гүдгэр 4 өнцөгтөд $\angle ABC + \angle BCD < 180^\circ$ ба AB, CD талууд нь E цэгт огтлолцоно.

$AC^2 = CD \cdot CE - AB \cdot AE$ бол $\angle ABC = \angle ADC$ гэж батал.

X-B1(Ц.Дашдорж). $\frac{(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)}{pq} \in Z$ байх бүх анхны тоо p, q -г ол.

X-B2(Ц.Батхүү). $\forall k \in N$ -ийн хувьд $p + ka_1, p + ka_2, \dots$ бүгд анхны тоонууд байх p анхны тоо ба $a_1, a_2, \dots$ эрс өсдөг зэрэг тоон дараалал олдохыг батал.

Х-ВЗ(Ц.Дашдорж). $\triangle ABC$ -ийн A ба B оройгоос гарсан өндрүүд нь h_a, h_b байг. $\angle ACB$ -ийн дотоод биссектрис нь ℓ_c ба O, I нь $\triangle ABC$ -г багтаасан ба $\triangle ABC$ -д багтсан тойргийн төвүүд, H нь $\triangle ABC$ -ийн ортотөв байг. Тэгвэл $\frac{\ell_c}{h_a} + \frac{\ell_c}{h_b} = 2$ бол $|OI| = |IH|$ болохыг батал.

Бодлогуудын бодолт.

Х-А1. ДБ-А1 бодлогод байгуулсан геометр прогрессүүдийн давхацдаг гишүүдийг дарвал (эхний эсвэл сүүлийн гишүүд) бодлогын нөхцлийг хангасан хучилт үүснэ.

Иймд $S_{1997} = 834$.

Х-А2. $f(x, y) = x \circ y$ гэж тэмдэглэвэл бодлогын нөхцөл $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ болж f функцийн (x, y) цэг дээрх утга буюу бидний тэмдэглэснээр $x \circ y$ үйлдэл ассоциатив болохыг илтгэнэ. Иймд $|A| = n < \infty$ тохиолдолд $x, x^2, \dots, x^{n+1}$ элементүүдээс дор хаяж 2 нь тэнцүү байна, ө.х ямар нэг k ба $m = k + \ell$ тоонуудын хувьд $x^k = x^m$ байх ба аливаа i тооны хувьд $x^k = x^{i\ell+k}$ болох нь тодорхой. $i = k, x^k = y, \ell + 1 = s$ гэвэл $y = y^s$ болно. Эндээс $(y^{s-1})^2 = y^{2s-2} = y^s y^{s-2} = y^{s-1}$ болж $f(y^{s-1}, y^{s-1}) = y^{s-1}$ болох нь батлагдана.

б) тохиолдолд гэж авахад хангалттай.

Х-А3. A цэг E ба B цэгийн хооронд, D цэг E ба C цэгийн хооронд оршдог гэж үзээд $\angle ABC = \alpha, \angle ADC = \beta, \angle BAC = \gamma, \angle CAD = \varphi$ гэж тэмдэглэе.

Бодлогын нөхцлийг $\frac{CD}{AC} \cdot \frac{CE}{AC} - \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AE}{AC} = 1$ гэж хувиргаад хэрчмүүдийн харьцааг $\triangle ACD, \triangle ACE, \triangle ABC, \triangle ACE$ -д тус тус синусын томьёо хэрэглэн өнцгийн синусуудын харьцаагаар соливол $\sin(\alpha + \gamma) \sin(\beta + \varphi) \sin \beta - \sin \varphi \sin \gamma \sin \alpha - \sin \beta \sin \alpha \sin(\gamma + \varphi + \beta) = 0$ буюу $(\cos(\alpha + \gamma - \beta - \varphi) - \cos(\alpha + \gamma + \beta + \varphi)) \sin \beta - (\cos(\gamma - \varphi) - \cos(\gamma + \varphi)) \sin \alpha - (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \sin(\gamma + \varphi + \beta) = 0$ болно. Өнцгийн синус, косинусын үржвэр синусын нийлбэрт хувирган $\sin(\alpha + \gamma + \varphi) - \sin(2\beta +$

$\gamma + \varphi - \alpha) + \sin(2\beta + \varphi - \alpha - \gamma) - \sin(\alpha - \gamma + \varphi) = 0$ буюу
 $\sin(\alpha - \beta) \cos(\beta + \gamma + \varphi) + \sin(\beta - \alpha) \cos(\beta + \varphi - \gamma) = 0$ болно
 Иймд $\sin \gamma \neq 0$, $\sin(\beta + \varphi) \neq 0$ тул $\sin(\alpha - \beta) = 0$ буюу $\alpha = \beta$
 болно.

Х-В1. $5^p - 2^p$ нь p анхны тоонд хуваагддаг ө.х $5^p - 2^p \equiv 0 \pmod{p}$ болог. Энэ тохиолдолд Фермагийн теорем (аливаа $a \in Z$ бүхэл тоо ба p анхны тооны хувьд $a^p \equiv a \pmod{p}$ байна) ёсоор $0 \equiv 5^p - 2^p \equiv 5 - 2 \equiv 3 \pmod{p}$ болж $p = 3$ болоход хүрнэ. Иймд $5^3 - 2^3 = 3^2 \cdot 13$ гэдгээс q тоо $5^q - 2^q$ тооны хуваагч эсвэл $q = 3$ аль эсвэл $q = 13$ байж бодлогын нөхцлийг хангана. p ба q анхны тоонууд тэгш эрхтэйг бодолцвол $(3,3)$, $(3,13)$, $(13,13)$ хосууд бодлогын нөхцлийг хангах нь тодорхой. Одоо $5^p - 3^p$ нь q тоонд, $5^q - 3^q$ нь p тоонд хуваагддаг тохиолдлыг авч үзье. $p > q$ гэвэл $(p, q-1) = 1$ болж $ap - b(q-1) = 1$ эсвэл $b(q-1) - ap = 1$ байх a, b натурал тоонууд олдоход хүрнэ. $(q, 5) = (q, 2) = 1$ тул Фермагийн теоремоор $5^{q-1} \equiv 1 \equiv 2^{q-1} \pmod{q}$ болж $5^p \equiv 2^p \pmod{q}$ гэдгээс $5^{ap} \equiv 2^{ap} \pmod{q}$ буюу $5^{b(q-1)+1} \equiv 2^{b(q-1)+1} \pmod{q}$ эсвэл $5^{b(q-1)-1} \equiv 2^{b(q-1)-1} \pmod{q}$ болоход хүрнэ. Гэтэл аль ч тохиолдолд $5 \equiv 2 \pmod{q}$ буюу $q = 3$ болоход хүрч зөрчилд орно. Иймд өмнөх тохиолдолд гаргасан 3 хос л бодлогын нөхцлийг хангана.

Х-В2. Бүх анхны тоонуудыг k тоонд хуваахад гарах үлдэгдлүүдээр нь k ширхэг ангид хуваая. Тэгвэл Дирихлейн зарчим ёсоор дор хаяж нэг анги $p_0 < p_1 < p_2 < \dots$ гэсэн төгсгөлгүй олон анхны тоонуудыг агуулна. Одоо $p = p_0$, $a_n = \frac{p_n - p}{k}$ гэж авахад хангалттай. Мөн энэ бодлого Дирихлейн теорем гэж нэрлэгдэх дараахь өгүүлбэрээс шууд мөрдөн гарахыг тэмдэглэе.

$d > 0$ ба $(a, d) = 1$ бол $a, a+d, a+2d, \dots$ арифметик прогресс төгсгөлгүй олон анхны тоо агуулна.

Х-В3. ABC гурвалжинг багтаасан тойргийн радиус R , B оройгоос буулгасан өндөр AC талыг B_1 , C оройгоос татсан биссектрис AB талыг L , багтаасан тойргийг M цэгт тус тус огтолдог болог. $OI = IH$ болохыг батлахад $\angle OCL = \angle HCL$ тул $OC = CH$ болохыг харахад хангалттай. Хэрэв $\angle ACB = \gamma$,

$$CL = \ell_C \text{ гэвэл}$$

$$CH = \frac{CB_2}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \alpha} \cos \gamma = 2R \cos \gamma \quad \text{ба} \quad \ell_C = \frac{2ab \cos \frac{\gamma}{2}}{a+b}$$

болно. $\frac{\ell_C}{h_a} + \frac{\ell_C}{h_b} = 2$ гэсэн бодлогын нөхцлийг ашиглавал $\gamma = 60^\circ$ болох нь хялбархан гарна. Иймд $CH = R = CO$ болно.

ММО-33. БАГЫН БАГШИЙН III ДАВААНЫ БОДЛОГО

Б.Баяржаргал

ББ-А1. Нэг айлын 30-аас олон 100-аас цөөн бог малын 48 хувь нь ямаа байв. 5 бог зарсны дараа хонь, ямааны тоо тэнцсэн бол айл анх хэдэн бог малтай байсан бэ?

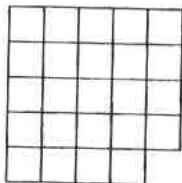
ББ-А2. 0, 4, 18, 48, ?, 180, ... асуултын тэмдгийн оронд байвал зохих тоог бич.

ББ-А3. $N = \underbrace{111 \dots 1}_{10} \underbrace{222 \dots 2}_{10}$ тоо нь дараалсан 2 натурал тооны үржвэр болохыг батал.

ББ-В1. 33 чулуу өгөгдөв. Хоёр тоглогч ээлжлэн 5-аас цөөн чулуу авч тоглоно. Сүүлчийн чулууг авсан нь хожигдох бол аль нь хожих вэ?

ББ-В2. Тойрог дээр нийлбэр нь 37 байх 3-аас олон натурал тоог дурын дараалсан 3-ынх нь нийлбэр тэнцүү байхаар хэдэн янзаар бичиж болох вэ?

ББ-В3.



Зурагт үзүүлсэн дүрсийг  дүрсүүдэд хувааж болох уу?

Бодлогуудын бодолт.

ББ-А1. Нийт бог малын $\frac{48}{100} = \frac{12}{25}$ нь ямаа гэсэн учир бог малын тоо 25-д хуваагдана. Бог малын тоо 30-аас их 100-аас бага учир 50 эсвэл 75 байна. Мөн бог малаас 5-ыг нь зарсны дараа ямаа хонины тоо тэнцсэн буюу бог малын тоо тэгш болсон учир бог малын тоо 50 биш 75 байна.

ББ-А2. 0, 4, 18, 48, ?, 180, ... Дарааллын 2 гишүүний
0, 4, 18, 48, , 180, ... ихээс нь багыг нь хасч
4 14 30 дор нь бичив. Мөн
10 26 үйлдлийг дахин хийгээд
6 байхад хамгийн сүүлд 6

гарна. Энэ үйлдэл нь хэрэв дараалал хэддүгээр гишүүн бэ? гэдгээсээ хамаарч бичигдсэн бол төгсгөлөг алхмын дараа шинээр үүсэж буй дараалал тогтмол дараалал болдог. Үүнийг ашиглан 6 гэсэн тогтмол дараалал гарсан гэе.

0 4 18 48 100 180
4 14 30 52 80
10 16 22 28
6 6 6

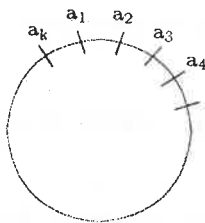
Тэгвэл манай олох тоо 100 гэж гарах ба үүнийгээ дээрх үйлдлээ хийж эсвэл 1, 2, 3, 4 дэх гишүүдийнхээ ерөнхий шинжээ ашиглан $a_i = (i - 1)i^2$ гэж гаргаж батлана.

$$\begin{aligned} \text{ББ-А3. } N &= \underbrace{11 \dots 1}_{10} \underbrace{22 \dots 2}_{10} = \underbrace{11 \dots 1}_{10} \cdot \underbrace{10 \dots 0}_9 2 = \\ &= \underbrace{11 \dots 1}_{10} \cdot \underbrace{3 \dots 3}_9 \cdot \underbrace{34}_{10} = \underbrace{33 \dots 3}_{10} \cdot \underbrace{33 \dots 3}_9 4. \end{aligned}$$

$$\text{ББ-В1. } 33 = 2 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 1$$

I хүн 2 чулууг авъя. II хүн 4-өөс бага буюу тэнцүү k гэсэн чулуу авах ба I хүн $5 - k$ чулуу авахад I ба II хүн энэ ээлжинд яг 5 чулуу авна ($0 < 5 - k \leq 4$ байна). Ийм маягаар I хүн сүүлчийн 5-тын $5 - k$ чулууг авч 1 чулуу үлдээх ба энэ чулууг II хүн авч хожигдоно. Иймд I хүн ямагт хожно.

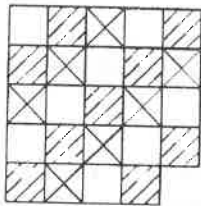
ББ-В2. $k \geq 4$, $a_1 + a_2 + a_3 = a_2 + a_3 + a_4$, $a_1 = a_4$ гэх мэт аргаар $3k + i$ хэлбэрийн дугаартай тоонууд тэнцүү болно ($i = 0, 2$). $k = 3\ell + 1$ үед $a_k = a_1$ ба $a_k = a_3$ буюу $a_{3\ell} = a_{3\ell+1}$ ба $a_{k-1} = a_{3\ell} = a_{3\ell+1} = \dots = a_3 = a_1$ ба $a_{k-1} = a_2$ буюу бүх тоонууд тэнцүү болно.

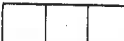


Иймд $a_1 \cdot k = 37$ буюу $k \geq 4$ учир $k = 37$
 $a_i = 1, i = \overline{1, k}$. Мөн аргаар $k = 3\ell + 2$
 үед батлана. $k = 3\ell$ үед $a_1 = a_{3s+1}, a_2 =$
 $a_{3s+2}, (\forall s < [\frac{n}{3}] = \ell)$ ба $a_3 = a_{3s}, s = \overline{1, \ell}$
 буюу $(a_1 + a_2 + a_3)\ell = 37$ буюу $\ell = 37$ ба
 $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ буюу зөрчил.

Иймд $\ell = 1, a_1 + a_2 + a_3 = 37$ буюу $k \geq 4$ гэсэн зөрчилд хүрнэ.
 Иймд $a_i = 1, i = \overline{1, k}$.

ББ-ВЗ.



Ийм байдлаар гурван өнгөөр будвал
 хэлбэрийн дүрс дурын аргаар
 авахад өнгө бүрээс 1,1 заавал орно.
 Иймд хэрэв манай дүрс  дүрс-
 сүүдэд хуваагддаг бол өнгүүдийн тоо
 ижил буюу 8,8 ширхэг байна.

Гэтэл $\times$ будагтай нь 7 ширхэг байгаа тул зөрчил үүснэ. Иймд
 дүрсэд хувааж болохгүй.

ММО-33. Дундын БАГШИЙН III ДАВААНЫ БОДЛОГО

Ц.Батхүү

ДБ-А1(Б.Баясгалан). S_n -ээр $1, 2, \dots, n$ тоонууд S_n ширхэг
 геометр прогрессийн гишүүн байх хамгийн бага тоог
 тэмдэглэе. S_{1997} -г ол.

ДБ-А2(Б.Баясгалан). Хэрэв $x + y$ тэгш бол $f(x, y)$ тэгш
 байх $f : N^2 \rightarrow N$ буулгалтын аливаа суперпозицийг f
 буулгалт гээ. Тэгвэл f буулгалт ямагт тэгш утга авах
 зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь хувьсагч бүр
 тэгш тоотойгоор суперпозицид орох явдал гэдгийг ба-
 тал. Жишээлбэл:

$$g(x, y) = f\left(f\left(f(x, y), f(x, x)\right), f(x, y)\right)$$

гэж бичигдэх f буулгалт ямагт тэгш утга авна.

ДБ-А3(Ц.Дашдорж). 5 талтай квадратыг 4 талтай гурван квадратаар бүрхэж болох уу?

ДБ-В1(Д.Хашбаяр). $a \in \mathbb{Z}$ ба $p > 2$, p анхны тооны хувьд $a^p \equiv 1(p^n)$ бол $a \equiv 1(p^{n-1})$ гэдгийг батал.

ДБ-В2(Ц.Дашдорж). $\triangle ABC$ -ийг багтаасан тойргийн A -г агуулаагүй BC нум дээр D цэг оршино ($C \neq D \neq B$). BD ба CD цацрагууд дээр (B ба C нь эх) $|BE| = |AC|$ ба $|CF| = |AB|$ байхаар E ба F цэгүүдийг авав. EF хэрчмийн дундаж цэг M бол

а) $\angle BMC = \frac{\pi}{2}$, б) D цэг BC нум дээр гүйж байхад M цэгийн геометр байрыг ол.

ДБ-В3(Ц.Дашдорж). Аль ч гурав нь гурвалжин үүсгэх 4 шулуун хавтгайд өгчээ. Эдгээр шулууны нэг нь нөгөө гурваараа үүсгэгдсэн гурвалжны нэг медиантай параллель бол үлдэх гурван шулууны хувьд ч ийм чанар бийг батал.

Бодлогуудын бодолт.

ДБ-А1. Натурал тооны квадратаас чөлөөтэй хуваагчийг энгийн хуваагч гэе. Хамгийн их зэрэгтэй энгийн хуваагчийг иаксималь хуваагч гэе. Максималь хуваагчийн зэрэг i байх n -ээс хэтрэхгүй тоонуудын олонлогийг S_i гэе. Тэгвэл

$$\{1, 2, \dots, n\} = \bigcup_{i=1}^s S_i, \quad s = [\log_2 n] \quad \text{ба} \quad i \neq j \quad \text{үед} \quad S_i \cap S_j = \emptyset.$$

Хэрэв $a \in S_i$ ба a тооны максималь хуваагч нь m бол $a = m^i \cdot q$ байх ба a тоо $\{m^i q, m^{i-1} q, \dots, m q, q\}$ геометр прогрессийг үүсгэнэ. Мөн $m^{i-1} q \in S_{i-1}$ байна. Мөн түүнчлэн ялгаатай a, b тоонуудын хувьд өмнөх байдлаар үүсэх прогрессүүд бүгд ялгаатай. Өгсөн бодлогоо $\{1, 2, \dots, n\} = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i$, Γ_i -геометр

прогресс бол $n_0 = \min k$ -г ол гэж томъёолъё. Хэрэв $|S_i| = n_i$ гэвэл $\{1, 2, \dots, n\}$ олонлогийг $s + 1$ гишүүнтэй n_s ширхэг, s гишүүнтэй $n_{s-1} - n_s$ ширхэг, $\dots$, 3 гишүүнтэй $n_2 - n_3$ ширхэг ялгаатай геометр прогрессууд болон S_1 ангийн $n_1 - n_2$ ширхэг тоонуудын олонлогийн нэгдэлд бичиж болно. Сүүлийн $n_1 - n_2$ тоонуудыг хос хосоор нь авбал $\left[\frac{n_1 - n_2 + 1}{2}\right]$ ширхэг геометр прогресс үүснэ. Иймд $\{1, 2, \dots, n\}$ олонлогийг

$$n_s + (n_{s-1} - n_s) + \dots + (n_2 - n_3) + \frac{1}{2} \cdot (n_1 - n_2 + 1)$$

тооноос хэтрэхгүй ширхэг геометр прогрессийн нэгдэлд задалж болно. Иймд $n_0 \leq \frac{1}{2} \cdot (n_1 + n_2 + 1)$ байна. Мэдээж хэрэг $n_1 + n_2$ нь n -ээс хэтрэхгүй, нэгээс их бүхэл тооны кубэд хуваагддаггүй тоонуудын тоо байна. Иймд

$$n_1 + n_2 = n - \sum_p \left[\frac{n}{p^3} \right] + \sum_{p < q} \left[\frac{n}{p^3 \cdot q^3} \right] - \sum_{p < q < r} \left[\frac{n}{p^3 q^3 r^3} \right] + \dots$$

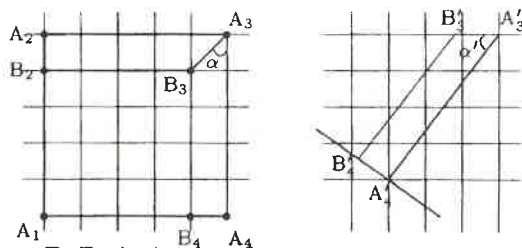
байна, энд p, q, r бүгд анхны тоо. Хэрэв $n = 1997$ бол

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 = 1997 - \left[\frac{1997}{8} \right] - \left[\frac{1997}{27} \right] - \left[\frac{1997}{125} \right] - \left[\frac{1997}{343} \right] - \left[\frac{1997}{1331} \right] + \\ + \left[\frac{1997}{216} \right] + \left[\frac{1997}{1000} \right] = 1664. \end{aligned}$$

Эндээс $n_0 \leq 834$. Нөгөө талаас S_1 ангид харьяалагдах гурван тоо нэг геометр прогресст харьяалагдаж чадахгүй. Мөн түүнчлэн $p^2 \cdot q$ (q нь квадратгүй тоо) тоонууд нийтдээ n_2 ширхэг байгаа бөгөөд ийм хэлбэрийн гурван тоо мөн геометр прогресс үүсгэж чадахгүй нь илэрхий. Иймд $\frac{1}{2}(n_1 + n_2) \leq n_0$ байна. Эндээс $n_0 = 834 (k_{1997} = 834)$.

ДБ-А2. Нэгэнт $f(x, y)$ функц нь $x+y$ тэгш үед л тэгш утга авдаг тул аливаа f буулгалт бүрийг харгалзан нэмэх үйлдлээр солиход тэгш, сондгой асуудал хэвээр үлдэнэ. Иймд $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ хэлбэрийн илэрхийлэл ямагт тэгш байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $a_1, \dots, a_n$ тоонууд тэгш нөхцөл учраас бодлого бодогдов.

ДБ-А3.



4x4 квадратаас $B_4B_3A_3A_4$ дүрийг гаргаж авч чадахыг үзүүлье. $\angle B_3A_3A_4 = \alpha$; $\angle B'_3A'_3A'_4 = \alpha'$ гэж тэмдэглэе. $B_3A_3A_4B_4$ дүрс $B'_3A'_3A'_4B'_4$ дүрсэд агуулагдахыг харъя. $|A'_4A'_3| = |A_4A_3|$ ба $\alpha' > \alpha$; $|A'_4B'_4| > |A_4B_4| \Rightarrow B_3A_3A_4B_4$ дүрс $B'_3A'_3A'_4B'_4$ дүрсэд агуулагдана.

ДБ-В1. $\begin{cases} a^p \equiv 1(p) \\ a^{p-1} \equiv 1(p) \end{cases}$ гэдгээс $a \equiv 1(p)$ гэж гарна.

$a^p - 1 \equiv (a^{p-1} + a^{p-2} + \dots + 1)(a - 1) \equiv 0(p^n)$ гэдгээс $a^{p-1} + \dots + 1 \not\equiv 0(p^2)$ гэж батлахад бодлого бодогдоно. Иймд эсрэгээс нь

$$a^{p-1} + \dots + 1 \equiv 0(p^2) \quad (*)$$

гэж үзье. $a - 1 \equiv 0(p)$ тул $a^p - 1 \equiv 0(p^3)$ $a = kp + 1$ гэж орлуулбал $(kp+1)^p - 1$ -ийн сүүлээсээ хоёр дахь гишүүнээс бусад нь $(\text{mod } p^3)$ -ээр "0" тул $kp^2 \equiv 0(p^3)$ буюу $k \equiv 0(p)$ болно. Иймд $a \equiv 1(p^2)$ үүнийг (*)-д орлуулан тавибал $p \equiv 0(p^2)$ гэсэн зөрчил гарна.

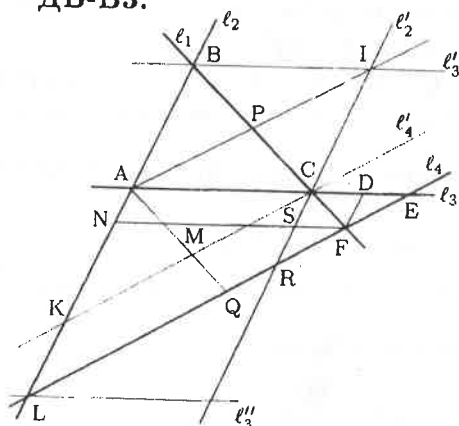
ДБ-В2. $\triangle ABC$ -ийн A, B, C оройн өнцгүүдийг α, β, γ , талуудыг a, b, c гэе. $\angle BCD = \varphi$ байг. $D \in \check{BC} \Rightarrow 0 < \varphi < \alpha$.

а) $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BE}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BE})$,
 $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{CE}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BC}) \Rightarrow$
 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = \frac{1}{4}((\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BE})^2 - \overrightarrow{BC}^2) =$
 $\frac{1}{4}(\overrightarrow{CF}^2 + \overrightarrow{BE}^2 + 2\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{BE} - a^2) =$
 $\frac{1}{4}(c^2 + b^2 + 2bc \cos(\pi - \alpha) - a^2) =$
 $= \frac{1}{4}(c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha - a^2) = 0$ буюу $\angle BMC = \frac{\pi}{2}$.

б) M ба A цэгүүд BC шулуунаар тодорхойлогдох өөр өөр хагас хавтгайнуудад оршино. а) ёсоор $\angle BMC' = \frac{\pi}{2}$ буюу M цэгийн геометр байр нь BC диаметртэй хагас тойрог ℓ дээр оршино. $\angle BCM = \psi$ байг. $CM = a \cos \psi$ ба $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = (a \cos \psi \cdot a) \cos \psi = (a \cos \psi)^2$. Нөгөө талаас синусын теоремоор $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}) \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(a^2 + ab \cos(\pi - (\alpha - \varphi)) + ac \cos \varphi) = \frac{a^2}{2}(1 - \frac{b}{a} \cos(\alpha - \varphi) + \frac{c}{a} \cos \varphi) \stackrel{\text{теор}}{=} \frac{a^2}{2}(1 + \frac{\sin \gamma \cdot \cos \varphi - \sin \beta \cos(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha}) = \frac{a^2}{2}(1 + \frac{\sin(\gamma - \varphi) - \sin(\beta - \alpha + \varphi)}{2 \sin \alpha}) = \frac{a^2}{2}(1 + \cos(\beta + \varphi)) = (a \cos \frac{\beta + \varphi}{2})^2$. Иймд $\cos^2 \psi = \cos^2 \frac{\beta + \varphi}{2} \cdot \frac{\beta + \varphi}{2} < \frac{\beta + \alpha}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \psi = \frac{\beta + \varphi}{2} = \angle BCM$ буюу $\angle BCM \in (\frac{\beta}{2}, \frac{\beta + \alpha}{2})$, $\angle CBM = \frac{\pi}{2} - \angle BCM = \frac{\alpha + \gamma - \varphi}{2} \in (\frac{\gamma}{2}, \frac{\alpha + \gamma}{2})$.

K ба N нь $\angle BCK = \frac{\beta}{2}$, $\angle CBN = \frac{\gamma}{2}$ байх ℓ хагас тойргийн цэгүүд байг. Тэгвэл $\angle BCN = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$ ба $\angle CBK = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \gamma}{2}$. Энэ нь D цэг BC нум дээр гүйхэд $\overrightarrow{CM}$ цацраг $\angle(\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{CN})$ -ийн дотор талыг зурах ба $\overrightarrow{BM}$ цацраг $\angle(\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BN})$ -ийн дотор талыг зурна. Иймд олох геометр байр нь NK болно.

ДБ-В3.



ℓ_4 шулууныг $\triangle ABC$ -ын AP медиантай параллелиар авав. $\ell_4 \parallel AP \parallel \ell'_4$

Батлах нь:

$\ell_1 \parallel AQ$ ($\triangle LAE$)

$\ell_2 \parallel FD$ ($\triangle CFE$)

$\ell_3 \parallel FN$ ($\triangle BFL$)

$\ell_1 \parallel AQ$ гэж батлая.

$\triangle LAE : KC \parallel LE \Rightarrow$

$KM = MC$.

$$\Delta BKC : \quad \begin{array}{l} BP = PC \\ AP \parallel KD \end{array} \Rightarrow AP = \frac{KC}{2} \quad \begin{array}{l} AP = MC \\ AP \parallel MC' \end{array} \Rightarrow APCM$$

параллелограмм ба $AM \parallel PC \Rightarrow AQ \parallel \ell_1$.

$\ell_2 \parallel FD$ (ΔCFE) батлая.

$\ell_2 \parallel \ell'_2 \Rightarrow ABIC$ параллелограмм $\Rightarrow AP = PI$;

$\ell_3 \parallel \ell'_3$

$$\begin{array}{l} AI \parallel \ell_4 \\ \angle ACI = \angle RCE \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \Delta APC \sim \Delta CFE \\ \Delta PIC \sim \Delta RCF \end{array} \Rightarrow \frac{RF}{FE} = \frac{AP}{PI} = 1 \Rightarrow$$

$$RF = FE. \quad \begin{array}{l} RF = FE \\ CD = DE \end{array} \Rightarrow DF = \frac{CR}{2} \Rightarrow DF \parallel CR \Rightarrow DF \parallel \ell_2.$$

$\ell_3 \parallel FN$ (ΔBFL) батлая.

$$\begin{array}{l} \ell'_3 \parallel \ell_3 \parallel \ell'_3 \\ \ell_2 \parallel \ell'_2 \end{array} ; \quad \begin{array}{l} AB = IC \\ BN = IS \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} BN - AB = IB - IC \Rightarrow AN = CS \\ AN \parallel CS \end{array} \Rightarrow$$

$ACSN$ параллелограмм $\Rightarrow AC \parallel NS \Rightarrow \ell_3 \parallel FN$.

ММО-33. VIII АНГИЙН IV ДАВААНЫ БОДЛОГО

Б.Сандагдорж

Ж.Батболд

VIII-A1(Б.Сандагдорж). Дурын натурал n -ийн хувьд $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y = 2n$ тэгшитгэл цор ганц сөрөг биш бүхэл тоон шийдтэй гэж харуул.

VIII-A2(Ж.Батболд). Аль ч ангиас нь $2x + 3y = 7z$ нөхцлийг хангах x, y, z тоо олдохгүй байх натурал тоон олонлогийн төгсгөлөг хуваалт олдох уу? •

($N = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$; $A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$ бол натурал тоон олонлог N -ийн төгсгөлөг хуваалт өгөгдлөө гэнэ.)

VIII-A3(М.Итгэл). Өгөгдсөн натурал n -ийн хувьд тойрогт багтах $3n$ өнцөгт нь

$$A_i A_{i+n} = a \quad i = 1, 2, \dots, n$$

нөхцлийг хангах бол багтаасан тойргийн $\forall M$ цэгийн

$$\text{хувьд } \sum_{i=1}^{3n} |MA_i|^4 = \text{const гэж батал.}$$

VIII-B1(В.Адяасүрэн). a, b өгөгдсөн тоонууд. x, y, z нь $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$ нөхцлийг хангах эерэг тоонууд бол

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{y} + b\sqrt{z})(a\sqrt{z} + b\sqrt{y})} + \frac{y^2}{(a\sqrt{x} + b\sqrt{z})(a\sqrt{z} + b\sqrt{x})} + \frac{z^2}{(a\sqrt{x} + b\sqrt{y})(a\sqrt{y} + b\sqrt{x})}$$

илэрхийллийн хамгийн бага утгыг ол.

VIII-B2(М.Итгэл). Координатын хавтгайн бүхэл координаттай цэг бүр дээр радиостанц байрлана. Станц бүр өөрөөсөө 5 нэгж зайд орших станцуудтай ярьж чадна. $(0,0)$ координаттай цэгээс дамжуулсан мэдээ хүрэх боломжгүй станц оршин байх уу?

VIII-B3. Тойрог ба түүний диаметрийн төгсгөлийн A, B цэгүүд, AB нумын дундаж цэг M өгөгдсөн бол уг тойрогт багтсан зөв 6 өнцөгтийг зөвхөн нэг талт шугам ашиглан байгуул.

Бодлогуудын бодолт.

VIII-A1. Өгөгдсөн тэгшитгэлийг хувиргаж бичвэл

$$(2x + 2y + 1)^2 + 8x = 8n + 1 = (2x + 2y + 3)^2 - 8y - 8$$

болно. Эндээс

$$\text{ба} \quad 2x + 2y + 1 \leq \sqrt{8n + 1} < 2x + 3y + 3$$

$$x + y + 1 \leq \frac{\sqrt{8n + 1} + 1}{2} < x + y + 2$$

болно. Иймд

$$x + y + 1 = \left\lfloor \frac{\sqrt{8n + 1} + 1}{2} \right\rfloor$$

болох ба эндээс x -г y -ээр орлуулж тэгшитгэлдээ тавихад y нэг утгатай олдоно.

VIII-A2. Олдоно. Хуваалтын нэг жишээг байгуулахад хангалттай. Дурын натурал тоо n нь

$$n = 13^\alpha(13t + k), \quad 1 \leq k \leq 12$$

хэлбэрт нэгэн утгатай бичигдэнэ. $n \in A_i \Leftrightarrow n = 13^\alpha(13t + i)$ гэж хуваалт хийе. $N = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{12}$ болов. Одоо дурын ангид нь $2x + 3y = 7z$ нөхцөл хангах x, y, z олдохгүй гэж харуулъя. Эсрэгээс нь

$$x = 13^\alpha(13t_1 + i); \quad y = 13^\beta(13t_2 + i); \quad z = 13^\gamma(13t_3 + i),$$

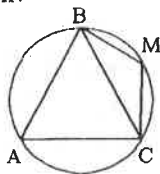
$$2x + 3y = 7z \text{ байх } i \text{ олдоно гэвэл}$$

$$2 \cdot 13^\alpha(13t_1 + i) + 3 \cdot 13^\beta(13t_2 + i) - 7 \cdot 13^\gamma(13t_3 + i) = 0$$

$$\Leftrightarrow i(2 + 3 - 7) \equiv 0 \pmod{13} \quad \text{буюу} \quad i \equiv 0 \pmod{13}$$

болж зөрчилд хүрэв.

VIII-A3. Зөвхөн зөв гурвалжны хувьд батлахад хангалттай.



$\triangle ABC$ -ийн хувьд $MA^4 + MB^4 + MC^4 = \text{const}$ гэж харуулъя. $AB = BC = AC \Rightarrow$ Птолмейн теоремоор $AB \cdot MC + AC \cdot BM = AM \cdot BC \Rightarrow MC + BM = AM$. $\triangle BMC$ -д косинусын теоремоор $BC^2 = BM^2 + MC^2 + BM \cdot MC$
 $(BC^2 - BM^2 - MC^2)^2 = (BM \cdot MC)^2 \Rightarrow BC^4 + BM^4 + MC^4 + 2(BM^2 \cdot MC^2 - BC^2 \cdot BM^2 - BC^2 \cdot MC^2) = BM^2 \cdot MC^2$

$$BC^2 = (BM + MC)^2 - BM \cdot MC = AM^2 - BM \cdot MC$$

$$(AM^2)^2 = (BC^2 + BM \cdot MC)^2$$

$$BM^4 + CM^4 = 2BC^2 \cdot BM^2 + 2BC^2 MC^2 - BM^2 \cdot MC^2 - BM^4 + AM^4 = BC^4 + BM^2 \cdot MC^2 + 2BC^2 \cdot MC \cdot BM$$

$$AM^4 + BM^4 + CM^4 = 2BC^2(BM^2 + MC^2 + MC \cdot BM) =$$

$$= 2BC^4 = 2a^4 = \text{const} \Rightarrow \sum_{i=1}^{3n} MA_i^4 = 2n(A_i A_{n+1})^4 = 2na^n.$$

VIII-B1.

$$S = \frac{x^2}{(a\sqrt{y} + b\sqrt{z})(a\sqrt{z} + b\sqrt{y})} + \frac{y^2}{(a\sqrt{x} + b\sqrt{z})(a\sqrt{z} + b\sqrt{x})} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{z^2}{(a\sqrt{x} + b\sqrt{y})(a\sqrt{y} + b\sqrt{x})} = \frac{x^2}{\sqrt{yz}(a^2 + b^2) + ab(y + z)} + \\
& + \frac{y^2}{\sqrt{xz}(a^2 + b^2) + ab(x + z)} + \frac{z^2}{\sqrt{xy}(a^2 + b^2) + ab(x + y)} \geq \\
& \geq \frac{2}{(a + b)^2} \cdot \left(\frac{x^2}{y + z} + \frac{y^2}{x + z} + \frac{z^2}{x + y} \right) = \frac{2}{(a + b)^2} \cdot A \\
& \frac{x^2}{y + z} + \frac{y^2}{x + z} + \frac{z^2}{x + y} = A \text{ гэж тэмдэглэв.} \\
& \frac{x}{\sqrt{y + z}} \cdot \sqrt{y + z} + \frac{y}{\sqrt{x + z}} \cdot \sqrt{x + z} + \frac{z}{\sqrt{x + y}} \cdot \sqrt{x + y} \leq \\
& \sqrt{A} \cdot \sqrt{2(x + y + z)} \Leftrightarrow A = \frac{x^2}{y + z} + \frac{y^2}{x + z} + \frac{z^2}{x + y} \geq \\
& \frac{x + y + z}{2} = \frac{x + y + y + z + z + x}{4} \geq \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}}{2} = \frac{1}{2}. \\
& \min(S) = \frac{2}{(a + b)^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{(a + b)^2}.
\end{aligned}$$

VIII-B2. Бид $(0; 0)$ цэгээс $(1; 0)$ цэгт очиж чадна гэж харуулбал үүнтэй адилаар $(-1; 0)$, $(0; 2)$, $(0; -1)$ цэгт очиж чадахыг харууллаа гэсэн үг. Энэ 4 цэгт очиж чаддаг бол дурын бүхэл цэгт очиж чадна. Иймд $(0; 0) \rightarrow (1; 0)$ гэж харуулъя.

$(0; 0)$ -оос $(3; -4)$, $(-5; 0)$, $(3; 4)$ гэх мэт 12 цэгт очиж чадна. Тэдгээрийг вектор мэт сэтгэж болно. $(3; -4) + (-5; 0) + (3; 4) = (1; 0)$ болно.

VIII-B3. Уг тойрогт багтсан зөв 6 өнцөгтийг 5 шаттайгаар байгуулъя.

I. AB -д перпендикуляр ямар нэгэн хөвч байгуулах.

II. AB -д перпендикуляр диаметр MM_4 -г байгуулах. Ингэснээр тойргийн төвийг олох.

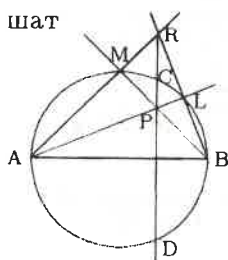
III. OM -ийн дундаж K -г байгуулах.

IV. K -г дайрсан AB -тэй параллель хөвч байгуулах.

Түүний тойрогтой огтлолцох цэгүүд нь M_2 , M_6 бол M_3 , M_5 -г III, IV-г хэрэглэн байгуулснаар $MM_2M_3M_4M_5M_6$ нь той-

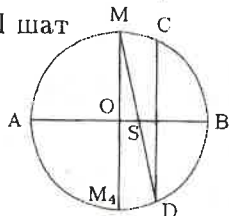
рогт багтсан зөв 6 өнцөгт болно.

I шат



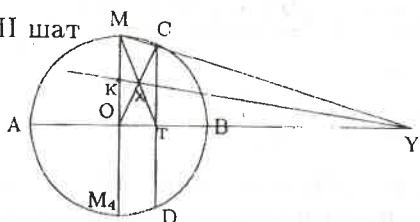
MB нум дээр L цэг авч AM, BL шулуунууд татъя. $AM \cap BL = R$ гэе. $AL \perp BL$, $BM \perp AM$ учир AL, BM нь ABR гурвалжны өндрүүд болно. $AL \cap BM = P$ гэе. Тэгвэл $RP \perp AB$ болж AB диаметрт перпендикуляр шулуун бэлэн болно. Энэ шулууны тойрогтой огтлолцох цэгүүдийг C, D гэе.

II шат



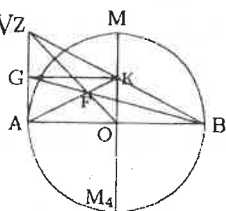
$MD \cap AB = S$, CS шулууны тойрогтой огтлолцох цэг M_4 гэвэл $MM_4 \parallel CD$ буюу MM_4 диаметр болно. $AB \cap MM_4 = O$ тойргийн төв олдов.

III шат



$CD \cap AB = T$ гэе. $MCTO$ трапецийн OM суурийн дундажийг олохын тулд $OC \cap MT = X$, $MC \cap AB = Y$ цэгүүдийг олох ба XY шулуун MO -г хагаслан хуваах K цэг олдов.

IV Z



A -г дайрсан дурын шулуунтай BK -г огтлолцуулж огтлолын цэгийг Z гэе. $OZ \cap AK = F$ гэвэл BF шулууныг татаж AZ -тэй огтлолцох G цэгийг олно. $AGKB$ нь трапец болох ба $GK \parallel AB$ юм.

V шат



GK -ийн тойрогтой огтлолцох цэгүүдийг M_6, M_2 гэвэл M_2O, M_6O -ийн тойрогтой огтлолцох цэгүүд харгалзан M_5, M_3 болно. Одоо $MM_2M_3M_4M_5M_6$ нь бидний байгуулах ёстой зөв зургаан өнцөгт юм.

ММО-33. IX АНГИЙН IV ДАВААНЫ БОДЛОГО

Б.Баттулга XI сургуулийн сурагч

IX-A1(Б.Хоролдагва). Дөрвөн өнцөгтөд O төвтэй R радиустай тойрог багтав. Тойргийн төвөөс дөрвөн өнцөгтийн диагоналиудын огтлолцлын цэг хүртэлх зай d бол O цэгээс эсрэг талуудын огтлолцлын цэгүүдийг холбосон шулуун хүртэлх зайг ол.

IX-A2(Г.Цогбадрал). Хурц өнцөгт ABC гурвалжны хувьд

$$p \leq r(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)$$

болохыг батал.

IX-A3(В.Адьяасүрэн). 34×34 хэмжээтэй квадратын зангилааны 1225 цэгийг 5 өнгөөр будав. Зангилааны цэгүүд дээр оройтой, квадратын талуудтай параллель талууд бүхий, ижил өнгийн оройтой тэгш өнцөгт дор хаяад 700 олдохыг батал.

IX-B1(Д.Хашбаяр). $f: N_0 \rightarrow N_0$ байх

$$1. 2f(n^2 + m^2) = f(n)^2 + f(m)^2$$

2. $m \geq n \Rightarrow f(m^2) \geq f(n^2)$ чанаруудтай бүх функцийг ол.

IX-B2(Ш..Батхишиг). γ_1 ба γ_2 тойргууд нь өөр хоорондоо шүргэлцэх ба a шулууныг шүргэнэ. γ_3 тойрог нь γ_1 ба γ_2 тойргууд ба a шулууныг шүргэнэ. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ тойргуудыг шүргэх γ тойрог татав. Хэрэв γ тойргийн радиус r бол γ тойргийн төвөөс шулуун хүртэлх зайг ол. (хариуг хялбарчлан гарга.)

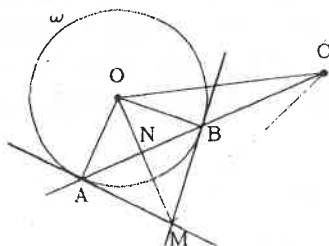
IX-B3(Б.Сандагдорж). S нь $|S| = n$ байх олонлог байг. $T_i \subseteq S$ дэд олонлогуудын хувьд

$$T_1 \subseteq T_2 \supseteq T_3 \subseteq T_4 \supseteq \dots T_k$$

нөхцлийг хангах $(T_1, T_2, \dots, T_k)$ олонлогуудын дарааллын тоог ол.

Бодлогуудын бодолт.

IX-A1. Лемм 1.

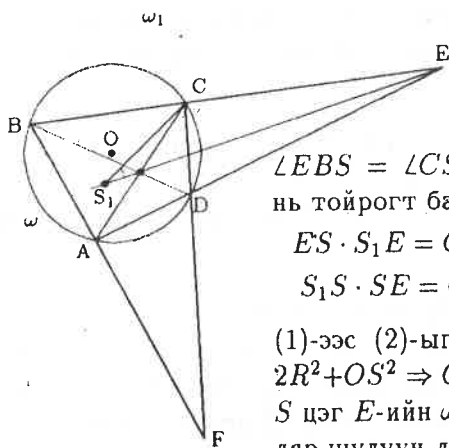


C цэгээс ω тойрогт A ба B цэгт огтлох огтлогч татъя. A -д ба B -д татсан шүргэгчүүд M -д огтлолцоно.

$$OM^2 - MC^2 = OB^2 + BM^2 - (NC^2 + NM^2) = OB^2 + BM^2 - (OC^2 - ON^2 + NM^2) = OB^2 + BM^2 - (OC^2 + NM^2 + NB^2 - NB^2 - ON^2) = OB^2 + BM^2 - (OC^2 + BM^2 - OB^2) = 2OB^2 - OC^2 = 2R^2 - OC^2.$$

Иймд M цэг C -ийн ω тойргийн хувьд дахь поляр шулуун дээр оршино.

Лемм 2.



ω тойргийн радиусыг R гээ. BCS -ийг багтаасан ω_1 тойрог SE -тэй S_1 цэгт огтлолцдог гээ.

$\angle EBS = \angle CS_1S = \angle SAD \Rightarrow AS_1CE$ нь тойрогт багтана.

$$ES \cdot S_1E = CE \cdot BE = OE^2 - R^2 \quad (1)$$

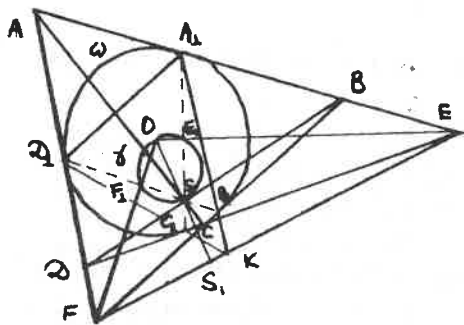
$$S_1S \cdot SE = CS \cdot AS = R^2 - OS^2 \quad (2)$$

(1)-ээс (2)-ыг хасвал $ES^2 = OE^2 - 2R^2 + OS^2 \Rightarrow OS^2 - SE^2 = 2R^2 - OE^2 \Rightarrow S$ цэг E -ийн ω тойргийн хувь дахь поляр шулуун дээр оршино.

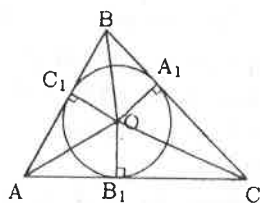
$D_1B_1 \cap A_1C_1 = S$ гээ. K -ийн ω тойргийн хувь дахь поляр шулуун дээр B, S, D оршино. Иймд $BD \in S, AC \in S \Rightarrow D_1B_1; A_1C_1; DB; AC$ нь S цэгт огтлолцоно. E цэгийн ω тойргийн хувь дахь поляр шулуун дээр S цэг оршино. Иймд S -ийн поляр шулуун дээр E ба F оршино. OS диаметртэй γ тойрог татъя. $OE \cap \gamma = E_1, OF \cap \gamma = F_1 \Rightarrow OE_1 \perp E_1S; OF_1 \perp F_1S$. Иймд E -ийн поляр шулуун дээр E_1, F -ийн поляр шулуун дээр F_1 оршино.

$$\Rightarrow OE_1^2 - E_1E^2 = 2R^2 - OE^2 \Rightarrow R^2 = OE_1 \cdot E_1E. \text{ Мөн адилаар}$$

$R^2 = OF_1 \cdot F_1F \Rightarrow \omega$ тойргийн хувьд хийсэн инверсээр F_1 нь F -д E_1 нь E -д бууна $\Rightarrow \gamma$ тойрог EF -д бууна. S -д татсан шүргэгч OS -д перпендикуляр. Иймд $(OS \cap EF = S_1)$ $OS_1 \perp EF$ Иймд O -оос EF хүртэлх зай нь OS_1 -тэй тэнцүү. $OS \cdot OS_1 = R^2 \Rightarrow OS_1 = \frac{R^2}{d}$.



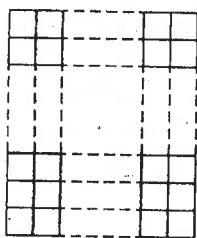
IX-A2.



$\operatorname{tg} \alpha$ функц нь хотгор функц учраас
 Энсений тэнцэтгэл биш бичвэл $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma \geq \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha+\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta+\gamma}{2}$.
 $\angle AOB_1 = \frac{\beta+\gamma}{2}$ $\angle BOA_1 = \frac{\alpha+\gamma}{2}$
 $\angle B_1OC = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Иймд $r(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma) \geq$
 $\geq r\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha+\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta+\gamma}{2}\right) = AB_1 + B_1C + A_1B = P.$

IX-A3.



i -р баганад a өнгөөр a_i цэг, b өнгөөр b_i ,
 c өнгөөр c_i , d өнгөөр d_i , e өнгөөр e_i цэг
 тус тус будагдсан байг. Нэг баганад ор-
 ших ижил өнгийн цэгээр хос үүсгэх нийт
 боломжийн тоо

$$\frac{1}{2}(a_1(a_1 - 1) + a_2(a_2 - 1) + \dots + a_{35}(a_{35} - 1) + b_1(b_1 - 1) + \dots + e_{35}(e_{35} - 1)) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}((a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{35}^2 + \dots + e_{35}^2) - (a_1 + a_2 + \dots + e_{35})) \geq$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{(a_1 + a_2 + \dots + e_{35})^2}{35 \cdot 5} - (a_1 + a_2 + \dots + e_{35})\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1225^2}{35 \cdot 5} - 1225\right) = 3675.$$

Нийт ялгаатай хос үүсгэх боломж нь $\frac{35 \cdot 34}{2} \cdot 5 = 2975$. $3675 - 2975 = 700$. Иймд дор хаяж 700 ижил өнгийн нэг мөрөнд орших хосуудын хос бий. Тиймээс дор хаяж 700 бодлогын нөхцлийг хангах тэгш өнцөгт үүснэ.

IX-B1. 1)-д $m = 0$ гэвэл $2f(n^2) = f(n)^2 + f(0)^2$ болно.
 $m \leq n$ үед

$$f(m^2) \leq f(n^2) \Rightarrow f(m)^2 + f(0)^2 \leq f(n)^2 + f(0)^2 \Rightarrow f(m) \leq f(n) \quad (*)$$

болно. Ө.х f нь үл буурах функц.

$$n = m = 0 \text{ гэвэл } 2f(0) = 2f(0)^2 \Rightarrow f(0) = 0 \text{ эсвэл } f(0) = 1.$$

$$x_1 = 1; x_n = 2 \cdot x_{n-1}^2 \text{ гэсэн } \{x_n\} \text{ дараалал авъя.}$$

$$n = m \text{ гэвэл } f(2n^2) = f(n)^2 \text{ болно.}$$

1) $f(0) = 1$ байг. 1-р чанарт $m = 0$ гэвэл $2f(n^2) = f(n)^2 + 1$ болох ёстой. $n = 1$ гэвэл $f(1) = 1$ болно. Одоо эндээс индукцээр $f(x_n) = 1$ гэж гарна. $\{x_n\}$ нь төгсгөлгүй өсөх дараалал тул $\forall k \in N$ хувьд $x_m \leq k < x_{m+1}$ байх $m \in N$ оршино. Эндээс (*) ёсоор $f(k) = 1$ болно.

2) $f(0) = 0$ байг. $m = 0$ гэвэл $2f(n^2) = f(n)^2$ болно. $\forall n \in N$ хувьд $f(n)$ тэгш тоо тул $f_1(n) = \frac{f(n)}{2}$ дараалал нь сөрөг биш бүхэл тооноос тогтоно. Өгсөн тэнцэтгэлдээ орлуулбал $f_1(n^2 + m^2) = f_1(n)^2 + f_1(m)^2$ болно. $m = 0$ гэвэл $f_1(n^2) = f_1(n)^2$.

$$n = 1 \text{ гэвэл } f_1(1) = 0 \text{ эсвэл } f_1(1) = 1 \text{ байна.}$$

а) $f_1(1) = 0$ байг. Тэгвэл 1)-ийн адилаар $\forall n \in N$ хувьд $f_1(x_n) = 0$ гэдгээс $\forall k \in N_0$ хувьд $f_1(k) = 0$ болно $\Rightarrow f(k) = 0$

$$\text{б) } f_1(1) = 1 \text{ байг. } f_1(n) = n \text{ гэж батлая.}$$

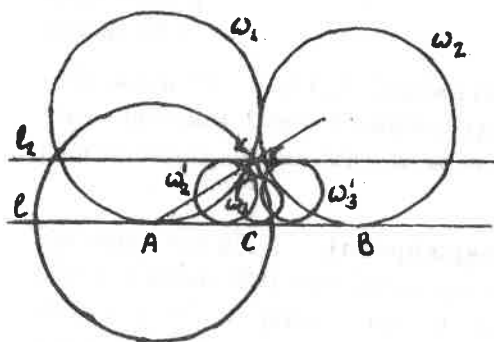
$\forall n \in N$ хувьд $f_1(x_n) = x_n$ байх нь индукцээр гарна. Иймд ямар ч $k \in N$ хувьд $f_1(k) = f_1(k+1)$ байж болохгүйг харуулахад хангалттай. Эсрэгээс нь ямар нэг $k \in N$ хувьд $f_1(k) = f_1(k+1)$ байдаг гэж үзье. $n = k, m = 1$ гэвэл $f_1(k^2 + 1) = f_1(k)^2 + f_1(1)^2 = f_1(k)^2 + 1 > f_1(k^2 + 2k + 1)$ болно (учир нь $f_1(k^2) = f_1(k)^2 = f_1(k+1)^2 = f_1(k^2 + 2k + 1)$). Энэ нь (*) нөхцөлд зөрчинө $\Rightarrow f_1(n) = n \Rightarrow f(n) = 2n$.

$$f(n) = 0, \quad \forall n \in N_0$$

$$\text{Хариу: } f(n) = 1, \quad \forall n \in N_0$$

$$f(n) = 2n, \quad \forall n \in N_0$$

IX-B2. γ тойргийн төвөөс ℓ шулуун хүртэлх зайг d гэе.



AK нь γ -д татсан шүргэгч байг. AK радиустай α тойрог татъя. α тойргийн хувьд инверсээр хувирахад

ω_1 тойрог ℓ_1 шулуунд, ω_2 тойрог ω'_2 тойрогт, ω_3 тойрог ω'_3 тойрогт, γ тойрог өөртөө бууна. $\ell_1 \parallel \ell$ байна. γ болон ω_1 нь шүргэлцсэн учраас ℓ_1 шулуун γ тойрог хоорондоо шүргэлцэнэ.

ℓ_1 ба ℓ -ийн хоорондох зай нь $d + R$ байна. ω'_2 -ийн радиус нь $\frac{d+R}{2}$ байна. $\left(\frac{d+R}{2} + R\right)^2 = \left(\frac{d+R}{2}\right)^2 + \left(\frac{d+R}{2} - R\right)^2 = \left(\frac{d+R}{2}\right)^2 \cdot 2 + R^2 - 2\left(\frac{d+R}{2}\right) \cdot R \Rightarrow \left(\frac{d+R}{2}\right)^2 = 2(d+R) \cdot R \Rightarrow \frac{d+R}{4} = 2R \Rightarrow d = 7R$.

IX-B3. $|S| = n$ ба S -ийн дэд олонлогуудаас бодлогын нөхцлийг хангах $(T_1, T_2, \dots, T_k)$ олонлогуудын дарааллын тоог S_n^k гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $S_{n+1}^k = S_n^k \cdot S_1^k$ рекурент харьцаа биелэхийг харж болно $\Rightarrow$

$$S_n^k = S_{n-1}^k \cdot S_1^k = \dots = \underbrace{S_1^k \cdot S_1^k \cdot \dots \cdot S_1^k}_n = (S_1^k)^n.$$

Мөн S_1^k дарааллын хувьд $S_1^1 = 2$; $S_1^2 = 4$ ба $S_1^k = S_1^{k-1} + S_1^{k-2}$ байна. Одоо уг рекурент дарааллын хувьд характеристик тэгшитгэл бичих замаар ерөнхий гишүүний томьёог олбол

$$S_1^k = \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{6+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+5} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \Rightarrow$$

$$S_n^k = \left[\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+5}\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \right]^n.$$

ММО-33. Х АНГИЙН IV ДАВААНЫ БОДЛОГО

Б.Баясгалан

Д.Батнасан

Х-А1(Б.Баясгалан, Д.Батнасан). 1, 3, 9, ..., 3^{10} нэгж жинтэй туухайнууд тус бүр хоёрыг болон 2 тавагтай жинлүүр ашиглан 10000 нэгж жинтэй ачааг хэдэн янзаар жигнэж болох вэ?

Х-А2(Б.Баясгалан, Б.Баяржаргал). Хоёр хүн хавтгайд цэг тэмдэглэж тоглохдоо эхний хүн 1997 ширхэг улаан цэг, хоёр дахь хүн нэг ширхэг цэнхэр цэг тэмдэглэнэ. Квадратын оройнууд болох дөрвөн цэнхэр цэг тэмдэглэж чадсан хоёр дахь тоглогч хожих бол эхний тоглогч хожигдохгүй байх боломжтой юу?

Х-А3(Б.Баясгалан, Б.Баяржаргал, Г.Цогбадрал). Хавтгайд аль ч хоёр нь огтлолцоогүй гадаад байрлалтай 3 тойрог өгөгджээ. Уг тойргуудад татсан шүргэгчүүдийн урт тэнцүү байх цэгийг нэг талт шугам ба гортиг ашиглан байгуул.

Х-В1(Б.Хоролдавга). Аль нэг гурав нь 1997 нэгж хажуу талтай адил хажуут гурвалжны оройнууд болох бөгөөд аль ч хоёрынх нь хоорондын зай бүхэл байх 9 цэг хавтгайд олдох уу?

Х-В2(Д.Батнасан). $A_1 A_2 A_3 A_4$ тетраэдрт $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ бөмбөрцгүүд ω_i бөмбөрцөг A_i оройд тулсан ба хоорондоо үл огтлолцох байдлаар багтсан ба ω бөмбөрцөг $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ бөмбөрцгүүдтэй гадаад байдлаар харгалзан B_1, B_2, B_3, B_4 цэгүүдэд шүргэдэг бол $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3, A_4 B_4$ шулуунууд нэг цэгт огтлолцохыг батал.

Х-В3(Д.Хашбаяр). 1, 2, 3, 4, 5 гэсэн тоонууд дээр ижил 5 гэсэн утга авдаг, бүхэл коэффициенттэй олон гишүүнтүүдийн үржвэрт үл задрах бүхэл коэффициенттэй олон гишүүнт төгсгөлгүй олон гэж батал.

Бодлогуудын бодолт.

Х-А1. $1, 3, \dots, 3^k$ жинтэй туухайнууд тус бүр 2-ыг болон 2 тавагтай жинлүүр ашиглан n жинтэй ачааг жигнэх боломжийн тоог $f(n, k)$ гэж тэмдэглэе.

$$\left. \begin{aligned} f(3n, k) &= 2f(n, k-1) \\ f(3n+1, k) &= f(n, k-1) + f(n+1, k-1) \\ f(3n+2, k) &= f(n, k-1) + f(n+1, k-1) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

рекурент томъёонууд биелнэ. (1)-ийн 2-р томъёог баталъя (бусад нь ижил). $1, 1, 3, 3, \dots, 3^{k-1}, 3^{k-1}$ туухайнуудаар n масстай ачааг жигнэх жигнэлт бүрд ачаа ба туухайнуудыг 3 дахин хүнд ачаа ба туухайнуудаар соливол тохиол бүрд $3n$ масстай ачаа жигнэгдэнэ. Ачаатай жинлүүрт 1 жинтэй туухайг тавибал $3n+1$ жинтэй ачаа жигнэгдэнэ. Энд 1-ээс 3^k жинтэй туухайнууд оролцож болно.

$n+1$ жинтэй ачааг $1, 3, \dots, 3^{k-1}$ жинтэй туухайнууд тус бүр 2-ыг ашиглан жигнэх ямар нэг жигнэлтийн хувьд ачаа ба туухайнуудыг 3 дахин хүнд ачаа ба туухайгаар солиод, ачаагүй тавагт нэгж жинтэй 2 туухай тавибал $3n+1$ жинтэй ачааг $1, 1, 3, 3, \dots, 3^k, 3^k$ -ээр жигнэнэ. 2-р томъёо батлагдав. (1)-ийг дараалан ашиглах замаар $f(10000, 10) = f(3333, 9) + f(3334, 9) = 2f(1111, 8) + (f(1111, 8) + f(1112, 8)) = \dots = 256 f(1, 2) = 256 \cdot 7 = 1792$. Энд $f(1, 2) = 7$ гэдгийг шалгаж болно. Хариу: 1792.

Х-А2. ДБ-А2-ыг хар.

Х-А3. Анализ: Өгсөн хоёр тойрогт тэнцүү урттай шүргэгч татах цэгийн геометр байрыг олѐе.

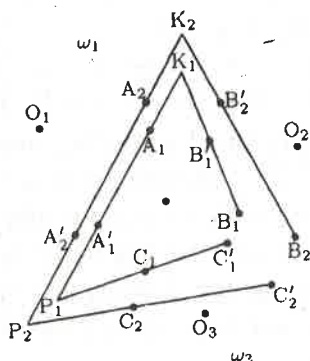
ω_1, ω_2 тойрог өгсөн ба төвүүдийг нь O_1, O_2 ; радиусуудыг нь R_1, R_2 гэе. А-аас ω_1, ω_2 -т татсан шүргэгчийн урт тэнцүү буюу d гэе.

$$O_1 A^2 - O_2 A^2 = (R_1^2 + d^2) - (R_2^2 + d^2) = R_1^2 - R_2^2 = \text{const}$$

тул А цэгийн геометр байр нь $O_1 O_2$ -д перпендикуляр шулуун байна.

Байгуулалт: ω_1, ω_2 тойргийн хувьд дээрх чанартай цэгүүдийн

олонлогийг ℓ_{12} гэе. Мөн үүнтэй адилаар ℓ_{23} -ийг тодорхойлъя. Гурван цэгийг дайруулж тойрог татаж чадах нь мэдээж. $\omega_1 \ni A_1, A_2$; $\omega_2 \ni B_1, B_2$; A_1, B_1, C_1 ба A_2, B_2, C_2 цэгүүд гурвалжин болж байхаар авъя.



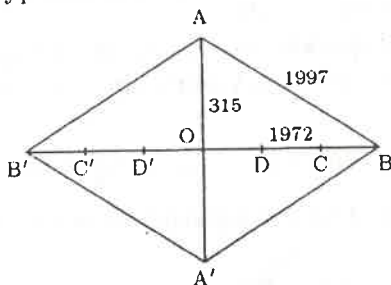
Дээрх гурвалжныг багтаасан тойргууд татъя. Шинэ татсан тойргууд ба $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ тойргуудын бүх огтлолын цэгүүдийг зураг дээр тэмдэглэв.
 $A_2A'_2 \cap C_2C'_2 = P_2$;
 $A_1A'_1 \cap C_1C'_1 = P_1$;
 $A_1A'_1 \cap B_1B'_1 = K_1$;
 $A_2A'_2 \cap B_2B'_2 = K_2$ гэе.
 $P_1P_2 \cap K_1K_2 = O$ цэг нь манай олох цэг юм.

Баталгаа: Шүргэгч огтлогчийн коэффициентээр P_1 ба P_2 цэгээс ω_1, ω_3 -т татсан шүргэгчүүд тэнцүү тул P_1P_2 нь ℓ_{13} -тай давхцна. Мөн K_1K_2 нь ℓ_{12} -тай давхцна. $\Rightarrow O$ нь бодлогын нөхцлийг хангах нь илэрхий.

Шинжилгээ: а) O_1, O_2, O_3 нь ерөнхий байршилтай үед шийдтэй.

б) O_1, O_2, O_3 нэг шулуун дээр орших үед шийдгүй (учир нь ℓ_{12} ба ℓ_{13} шулуунууд огтлолцохгүй).

Х-В1. $1997 = 29^2 + 34^2 \Rightarrow 1997^2 = (34^2 - 29^2)^2 + (2 \cdot 29 \cdot 34)^2 = 315 + 1972^2$. 1997, 1972, 315 талтай AOB тэгш өнцөгт гурвалжныг авъя.



$315^2 = 45 \cdot 2205 = 225 \cdot 441 \Rightarrow 315^2 = 1125^2 - 1080^2 = 333^2 - 108^2 \Rightarrow OB$ дээр $OC = 1080$, $OD = 108$ байх C, D цэгүүдийг аваад, бүх цэгээ O -ийн хувьд тэгш хэмээр хувиргавал нийт 9 цэг үүснэ. Эдгээр нь бодлогын нөхцлийг хангана.

Х-В2. Лемм. $(O_1; k_1), (O_2; k_2)$ гомотетүүдийн үржвэр гомотет ба төв нь O_1O_2 шулуун дээр оршино.

Бодолт. $A_1A_2A_3A_4$ тетраэдрт багтсан бөмбөрцгийг ω_0 гэе. A_i цэгт төвтэй $\omega_0 \rightarrow \omega_i$ гомотет оршино. B_i цэгт төвтэй $\omega_i \rightarrow \omega$ гомотет оршино. Лемм ёсоор $\omega_0 \rightarrow \omega_i \rightarrow \omega = \omega_0 \rightarrow \omega$ гомотетын төв A_iB_i шулуунд оршино. $\omega_0 \rightarrow \omega$ гомотет ганц тул A_iB_i шулуунууд нэг цэгт, $\omega_0 \rightarrow \omega$ гомотетийн төвөөр огтлолцоно.

Х-В3. Олох олон гишүүнт нь

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) \cdot Q(x) + 5$$

хэлбэртэй байх нь илэрхий.

$$Q(x) = 5 \cdot (x-6)(x-7) \dots (x-(2k+1))$$

гэж авъя.

$$P(x) = 5 \left(\prod_{i=1}^{2k+1} (x-i) + 1 \right)$$

болно. $P(x) = g(x) \cdot f(x)$ байх 1-ээс багагүй зэргийн g, f бүхэл коэффициенттэй олон гишүүнтүүд олдог гэж үзье.

$$5 \left(\prod_{i=1}^{2k+1} (x-i) + 1 \right) = g(x) \cdot f(x) \Rightarrow g \text{ ба } f$$

-ийн ядаж нэгний бүх коэффициент нь 5-д хуваагдана гэдгийг хялбархан баталж болно. $f(x) = 5 \cdot h(x)$, $h(x)$ нь бүхэл олон

гишүүнт байг. $\prod_{i=1}^{2k+1} (x-i) + 1 = g(x) \cdot h(x)$ болно. $i = \overline{1, 2k+1}$

үед $g(i) \cdot h(i) = 1$ ба $g(i), h(i) \in \mathbb{Z} \Rightarrow g(i) = h(i) = 1$ эсвэл $g(i) = h(i) = -1$ $\deg(g(x)) > \deg(h(x))$ байг $\Rightarrow \deg(h(x)) \leq n$. Гэтэл $h(x)$ нь $i = \overline{1, 2n+1}$ цэгүүд дээр ± 1 -ийн авна $\Rightarrow n+1$ цэг дээр $(=)$ утга авна $\Rightarrow h(x) = \text{const}$ олон гишүүнт болов.

ММО-33. БАГЫН БАГШИЙН IV ДАВААНЫ БОДЛОГО

Т.Хулан

ББ-А1(Д.Хашбаяр). Тойрог дээр зэргэлдээ хоёрынх нь ихийг багад нь хуваахад анхны тоо гардаг байхаар а) 6, б) 5 ялгаатай тоо бичиж болох уу?

ББ-А2(А.Хашбаатар). $\triangle ABC$ -ын BC талын дундажад босгосон перпендикулярын A орой дахь гадаад өнцгийн биссектрис тэй огтлолцсон цэгээс $AB = a$, $AC = b$ талын их рүү татсан перпендикулярын суурь нь P бол AP -г ол.

ББ-А3(Б.Сандагдорж). Ялгаатай 9 өнгийн харандаануудыг 12 хайрцагт хайрцаг бүр 3 өнгийн харандаатай, харандаа бүр 4 хайрцагт ордог ба ялгаатай 2 өнгийн харандаа бүр 1 хайрцагт ордог байхаар байрлуулж болох уу? Болдог бол түүнийг харуул.

ББ-В1(Д.Ганзориг, Д.Хашбаяр). $\{1, 2, \dots, 8\}$ олонлогийн аль ч хоёр элементийн нийлбэр нь 9 байдаггүй бүх дэд олонлогийн тоог ол.

ББ-В2(В.Адьяасүрэн). Дугуйтай 3 хүний I ба II нь A өртөөнөөс, III нь тэдэнтэй угталцан уулзахаар B өртөөнөөс нэгэн зэрэг хөдөлжээ. 1,5 цагийн дараа I нь нөгөө хоёр дугуйчнаас ижил зайд, харин 2 цагийн дараа III нь I ба II-аас ижил зайд байсан бол хэдэн цагийн дараа II нь I ба III-аас ижил зайд байх вэ?

ББ-В3(М.Итгэл). $\triangle ABC$ гурвалжны биссектрисүүдийн суурийг A_1, B_1, C_1 гээ. $A_1B_1C_1$ гурвалжны тал дээр орших дурын P цэгийн хувьд ABC гурвалжны талууд хүртэлх зайн аль нэг нь нөгөө хоёрын нийлбэртэй тэнцүү гэж батал.

Бодлогуудын бодолт.

ББ-А1. а) $p_1 \cdot p_2; p_1; p_1 \cdot p_3; p_3; p_3 \cdot p_2; p_2$ (p_1, p_2, p_3 нь ялгаатай анхны тоонууд). Эдгээр 6 тоог тойрог дээр тавихад бодлогын нөхцлийг хангана.

б) Тийм 5 тоо олддог гэж үзье. Эдгээр нь a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 байг.

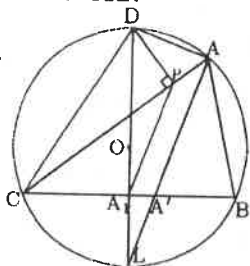
$$(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_5)^2 = (a_1 a_2)(a_2 a_3) \dots (a_5 a_1) = A^2$$

зэргэлдээ хоёрынх нь үржвэр $a^2 \cdot p$ (p анхны) хэлбэртэй байна.

$$\Rightarrow A^2 = B^2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 \quad (p_i \quad i = \overline{1,5} \text{ анхны})$$

$\Rightarrow p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 = C^2$. Гэтэл энэ нь боломжгүй зүйл юм. Иймд тийм 5 тоо олдохгүй.

ББ-А2.



$b > a$ гэж үзэж болно. $BC = c$ гэе. AD нь $\angle A$ -ийн гадаад өнцгийн биссектрис болно. ($\angle DAL = 90^\circ$; $\angle CAL = \angle LAB$) DPA_1C дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. ($\angle DPC = \angle DA_1C$) Иймд $\angle CDA_1 = \angle CPA_1$ байна. $\angle CDL = \angle CAL \Rightarrow \angle CAL = \angle CPA_1$.

$$\text{Иймд } PA_1 \parallel AL \Rightarrow \frac{CP}{CA} = \frac{CA_1}{CA'}; CA_1 = \frac{c}{2}; CA' = \frac{b}{a+b} \cdot c \Rightarrow$$

$$CP = \frac{c}{2} \cdot b \cdot \frac{a+b}{bc} = \frac{a+b}{2} \Rightarrow AP = b - \frac{CP}{2} = \frac{b-a}{2}.$$

$$\text{Ерөнхий тохиолдолд } AP = \frac{|a-b|}{2}.$$

I-1,2,3 IV-1,4,7 VII-1,5,9 X-1,6,8

ББ-А3. II-4,5,6 V-2,5,8 VIII-2,6,7 XI-2,4,9

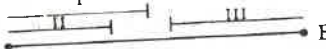
III-7,8,9 VI-3,6,9 IX-3,4,8 XII-3,5,7

өнгийг тус тус хийхэд бодлогын нөхцлийг хангана.

ББ-В1. Хэрэв уг олонлогт 1 орсон бол 8 орохгүй, 8 орсон бол 1 орох ёсгүй, эсвэл аль нь ч ороогүй байж болно. Энэ чанар (2;7), (3;6), (4;5)-ийн хувьд биелнэ. Иймд нийт дэд олонлогийн тоо нь $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ байна.

ББ-В2. $|AB| = S$. I, II, III-ын хурдууд нь харгалзан v_1, v_2, v_3 байг.

а) I нь II-аасаа их хурдтай гэж үзвэл

1,5 цагийн дараа A  B

2 цагийн дараа A  B

? цагийн дараа A  B

$$\frac{S}{1,5} = (v_1 - v_2) + (v_1 + v_3) = 2v_1 + v_3 - v_2$$

$$\frac{2S}{2} = (v_1 + v_3) + (v_2 + v_3) = v_1 + v_2 + 2v_3$$

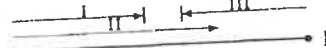
$$\frac{S}{x} = (v_3 + v_2) - (v_1 - v_2) = v_3 + 2v_2 - v_1$$

$$(2v_1 + v_3 - v_2) + (v_3 + 2v_2 - v_1) = v_1 + v_2 + 2v_3$$

$$\frac{S}{1,5} + \frac{S}{x} = \frac{2S}{2} = S \Leftrightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x = 3 \text{ цаг.}$$

б) I нь II-аасаа бага хурдтай гэж үзвэл

1,5 цагийн дараа A  B

2 цагийн дараа A  B

? цагийн дараа A  B

$$\frac{S}{1,5} = v_2 + v_3$$

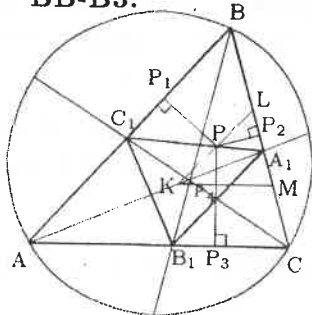
$$\frac{2S}{2} = (v_1 + v_3) + (v_2 + v_3) = v_1 + v_2 + 2v_3$$

$$\frac{S}{x} = v_1 + v_3$$

$$(v_1 + v_3) + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2 + 2v_3)$$

$$\frac{S}{1,5} + \frac{S}{x} = S \Rightarrow x = 3 \text{ цаг.}$$

ББ-В3.



P -г дайруулан AB талтай параллель LK шулуун татъя. $KM \parallel AC$. Хэрэв PM нь $\angle KML$ -ийн биссектрис бол $PP_2 = PP_4$; $P_1P = P_3P_4$ болж $PP_1 + PP_2 = PP_3$ болно. $\angle KML = \angle ACB \Rightarrow CC_1 \parallel PM$ гэж батлахад хангалттай. $\frac{A_1P}{A_1C_1} =$

$$\frac{A_1K}{A_1A} = \frac{A_1M}{A_1C} \Rightarrow CC_1 \parallel PM \text{ болно.}$$

ММО-33. Дундын Багшийн IV давааны бодлого

Л.Оюунцэцэг

ДБ-А1(Л.Оюунцэцэг). n натурал тоо 12 хуваагчтай. Тэдгээр нь $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{12} = n$ байг. Хэрэв $d_4 - 1 \mid (d_1 + d_2 + d_4)d_8$ бол n тооны бүх утгыг ол.

ДБ-А2(Б.Баясгалан, Б.Баяржаргал). Хоёр хүн хавтгайд цэг тэмдэглэн тоглохдоо эхний хүн 1000 ширхэг улаан цэг, удаахь хүн нэг цэнхэр цэг тэмдэглэдэг. Квадратын оройнууд болох 4 цэнхэр цэг тэмдэглэж чадсан удаахь тоглогч хожих бол эхний тоглогч хожигдохгүй байх боломжтой юу?

ДБ-А3(А.Хашбаатар). $\triangle ABC$ -ны AB талын хагас нь түүнд багтсан тойргийн төвөөс 90° өнцгөөр харагддаг бол багтсан тойргийн радиус нь багтаасан тойргийн радиусын $\frac{4}{9}$ -өөс хэтрэхгүй гэж батал.

ДБ-В1(Д.Хашбаяр). $N = \bigcup_{i=1}^{1997} A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ байх дэд олонлогууд бол ямар нэг A_k -ийн хувьд

$$f(x) = x^{33} + a_{32}x^{32} + \dots + a_0, \quad a_i \in A_k, \quad i = \overline{0, 32}$$

олон гишүүнт нь нэгээс багагүй зэрэгтэй олон гишүүн-
түүдийн үржвэрт задрах тийм $f(x)$ олон гишүүнт төгс-
гөлгүй олон олдохыг батал.

ДБ-В2(Б.Хоролдавга). Тал тойргийн дундаж цэг M бол
тойргийг багтаасан зөв 6 өнцөгтийг нэг талт шугамаар
байгуул.

ДБ-В3(Ц.Дашдорж). Огторгуйд n вектор өгчээ $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$.

$$\frac{1}{6} \sum_{k=1}^n |\vec{a}_k| \leq \left| \sum_{i \in I} \vec{a}_i \right|$$

байх $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ дэд олонлог олдохыг батал.

Бодлогуудын бодолт.

ДБ-А1. $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ гэвэл тэдгээрийн нийт хуваагч-
дын тоо $(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_n) = 12$ болно. $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 =$
 $2 \cdot 6 = 4 \cdot 3$ байна. Эндээс n -ийн бүх анхны тоон хувааг-
чид 3-аас ихгүй ба тэдгээрийн зэргүүд $(1; 1; 2), (1; 5), (3; 2)$
болно. Хэрвээ n сондгой гэвэл бүх хуваагчид сондгой болно.
 $\underbrace{(d_4 - 1)}_{\text{тэгш}} \underbrace{(1 + d_2 + d_4)}_{\text{сондгой}} \underbrace{d_8}_{\text{сондгой}}$ болж зөрчилд хүрнэ. Иймд n тэгш

байна $\Rightarrow d_2 = 2$ болно. $(d_4 - 1) \mid (3 + d_4)d_8$ болно.

1) $(3 + d_4, d_4 - 1) = 1$ байг $\Rightarrow (4, d_4 - 1) = 1$ болно. $((a, b) =$
 $(a + zb, b) \quad z \in Z \text{ чанар ёсоор}).$ Иймд d_4 тэгш. $d_4 - 1$ сондгой ба
 $d_4 - 1 \mid d_8$ болно. n нь сондгой анхны тоон хуваагчтай. Хэрвээ
 $d_3 \neq p$ бол $d_3 = 4, d_4 = 8$ болно. Эсрэг тохиолдолд $d_4 = p > 4$
болж зөрчилд хүрнэ. $d_4 = 8$ үед $d_4 - 1 = 7 \mid d_8$ болж $i \geq 5$ i -ийн
хувьд $d_i = 7 \mid d_i < d_4$ болж зөрчилд хүрнэ. $d_3 = p$ байг.

а) $p \geq 5$ байг. $d_4 = 2p \quad n = 2 \cdot p^\alpha \cdot q^\beta$ болно. $2p - 1 \mid d_8 \Rightarrow$
 $q \mid 2p - 1. \quad q \neq d_3 < d_4$ ба $q \mid n$ болж зөрчилд хүрнэ.

б) $d_3 = p = 3$ байг. $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot p^\gamma$ ($\alpha, \beta \geq 1, \gamma \geq 0$). $\alpha \geq 2$ байг $\Rightarrow d_4 = 4$ болно. $3 = d_4 - 1 \mid d_8 = \frac{n}{d_5}$ болно. $\Rightarrow d_5 = 5$ байж болно. $n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $d_5 \leq d_2 \cdot d_3 = 2 \cdot 3 = 6$ байна. Иймд $d_5 = 6$ байг. $d_8 = \frac{n}{d_5} = \frac{n}{6} : 3$ болох тул $\beta \geq 2$ байна. $\Rightarrow n = 2^2 \cdot 3^3$ $n = 2^3 \cdot 3^2$ байна. $\alpha = 1$ байг. $n = 2 \cdot 3^\alpha p^\beta$ $\alpha \geq 1$ учир $d_3 = 3$, $d_4 = 6$ байна. $d_4 > d_4 - 1 = 5$ нь n -ийн хуваагч болж зөрчилд хүрнэ.

2) $(3 + d_4, d_4 - 1) \neq 1$ байг. $\Rightarrow (d_4 - 1, 4) \neq 1$ болно. d_4 сондгой анхны тоо болно.

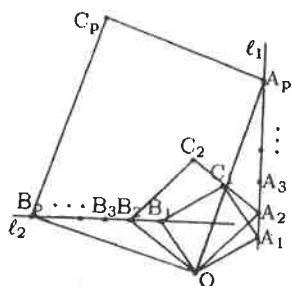
а) $d_3 = 4$ байг. $d_4 \geq 5$ болно. $d_4 = 5$ бол $d_4 - 1 = 4$. $3 + d_4 = 3 + 5 = 8 : 4$ болж манай бодлогын нөхцөл хангана. $n = 2^2 \cdot 5 \cdot q$ эсвэл $n = 2^{55}$. $n = 2^2 \cdot 5^3 \vee n = 2^3 \cdot 5^2$ болно. $d_4 > 5$ байг. (*) $n = 2^{2p^\alpha q^\beta}$ $\alpha, \beta \geq 0$ $d_4 = p$ $d_4 - 1 = p - 1 > 4$ болж $\exists q$ сондгой анхны тоо. $q \mid d_8 \Rightarrow q$ нь d_4 -өөс бага хуваагч болж зөрчилд хүрнэ. (**) $n = 2^5 p$ байг. $d_4 = p$ учир $d_4 < 8$ болно. $d_4 = 7$ гэвэл $d_4 - 1 = 6 \Rightarrow 3 \mid d_8 \Rightarrow$ (**) хэлбэрт зөрчинө.

б) $d_3 = q$ бол $d_4 = p$ болно (учир нь d_4 сондгой). Энэ тохиолдолд $n = 2^{p^\alpha q^\beta}$ $\alpha, \beta \geq 1$ байна. $d_4 - 1 = p - 1 > 4$ ба $d_4 - 1 \mid (3 + d_4) d_8 \Rightarrow p - 1 \mid (p + 3) d_8 \Rightarrow q \mid p - 1$ байх болно. $p - 1 = sq$ ба $s \geq 2$ гэвэл d_3, d_4 -ийн хооронд өөр хуваагч бий болно. Энэ бол зөрчил $s = 1$ гэвэл $q = p - 1$ болж хоёул сондгой анхны тоо гэдэгт зөрчинө.

Ийнхүү бүх тохиолдлыг нэгтгэвэл:

$$\begin{array}{llll} 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60 & 2^2 \cdot 3^3 = 108 & 2^3 \cdot 3^2 = 72 & 2^5 \cdot 5 = 160 \\ 2^2 \cdot 5^3 = 500 & 5^2 \cdot 2^3 = 200 & 2^2 \cdot 5 \cdot q & q > 5 \text{ анхны тоо.} \end{array}$$

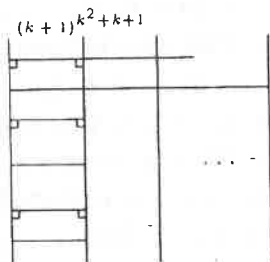
ДБ-А2.



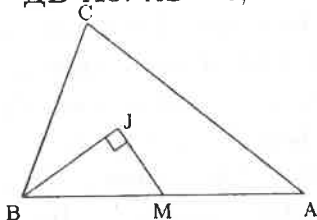
Эхний хүн төгсгөлөг k ширхэг улаан цэг тавьдаг гээд n хүн хожихыг баталъя. $|A_i A_{i+1}| = |B_i B_{i+1}|$ байх $\ell_1 \perp \ell_2$ шулуунууд дээр $A_1, \dots, A_p, B_1, \dots, B_p$ цэгүүд байвал O гэсэн төвтэй $A_i \rightarrow B_i$ байх эргүүлэлт олдоно. Ингэхэд $OA_i C_i B_i$ гэсэн квадратын орой болдог $C_1, \dots, C_p$ гэсэн цэгүүд үүснэ.

$k^2 + k + 1$ ширхэг параллель шулуун ба тэдгээртэй перпендикуляр ℓ гэсэн шулуун дээр $k + 1$ ширхэг харгалзах байршил нь ижил байдаг (нийт $(k^2 + k + 2)(k + 1)$ ширхэг цэг) цэнхэр цэгүүдийг тавьж чадвал II хүн хожно (учир нь II хүн 1 эргүүлэлтийн төвийг тавибал $k + 1$ ширхэг квадратын 4 дэх оройнууд үүснэ).

Үүний тулд II хүн ямар нэг шулуун авч түүн дээрээ $(k + 1)^{k^2+k+2}$ ширхэг цэнхэр цэгийг тэмдэглэнэ. I хүнийг тавьж дуусахад тэмдэглэгдсэн цэг агуулаагүй байх анхны шулуунтай параллель шулуун олдох ба 1-р шулуун дээр тэмдэглэсэн цэгүүд дээрээ перпендикуляр босгож 2 дахьтай огтлолцож буй цэгүүд дээрээ II хүн цэнхэр цэгүүдээ $(k + 1)^{k^2+k+2}$ $(k + 1)^{k^2+k}$ $(k + 1)^2$ тавьсаар $(k + 1)^{k^2+k+1}$ ширхэг цэнхэр цэг тавьж чадна. Ийм аргаар шинэ шулуунууд авч түүн дээрээ цэнхэр цэгүүдээ мөн аргаар авсаар $k^2 + k + 1$ дэх шулуун дээр $(k + 1)^2$ ширхэг цэнхэр цэг тавина. Эдгээр $(k + 1)^2$ ширхэг цэнхэр цэгүүд нь яг байрлалаараа өмнөх шулуун дээрээ байна. Одоо эдгээртэй перпендикуляр ℓ гэсэн шулуун авч түүн дээрээ $((k + 1)^2$ ширхэг) сүүлчийн цэгүүдтэй ижил байрлалтай цэгүүдийг II хүн тэмдэглэсээр $k + 1$ ширхэг тавьж чадах ба энд тэмдэглэгдээгүй байх 1 төв байх ба тэр цэг дээрээ цэнхэр цэгээ тавьж II хүн хожино.



ДБ-АЗ. $AB = c$, $MA = MB = \frac{c}{2}$, J -багтсан тойргийн төв.



$\angle BJM = \frac{\pi}{2}$ бол нэг талаас $BJ =$

$$BM \cos \frac{\beta}{2} \Rightarrow BJ = \frac{c}{2} \cos \frac{\beta}{2}.$$

Нөгөө талаас $BJ = \frac{a+c}{2p} \ell_B$

ℓ_B -гурвалжны B оройгоос татсан биссектрисийн урт. Иймээс

$$\frac{c}{2} \cos \beta = \frac{a+c}{2p} \cdot \frac{2ac}{a+c} \cos \frac{\beta}{2} \text{ буюу } p = 2a \quad (1). \text{ Эндээс } 3a = b+c.$$

Героны томьёо ёсоор

$$p^2 r^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \quad pr^2 = a \cdot \frac{2c-b}{3} \cdot \frac{2b-c}{3}.$$

Эндээс $bc - 2(c-b)^2 = 18r^2 \quad (2).$ Талбайн томьёо ёсоор

$$pr = \frac{bc}{2} \sin \alpha \quad 2pr = bc \sin \alpha$$

(1) ёсоор

$$4ar = bc \sin \alpha \text{ буюу } 8Rr \sin \alpha = bc \sin \alpha$$

болохоор $bc = 8Rr$. (2)-д орлуулахад $8Rr - 18r^2 = 2(c-b)^2 \geq 0$.
Эндээс $\frac{4}{9}R \geq r$.

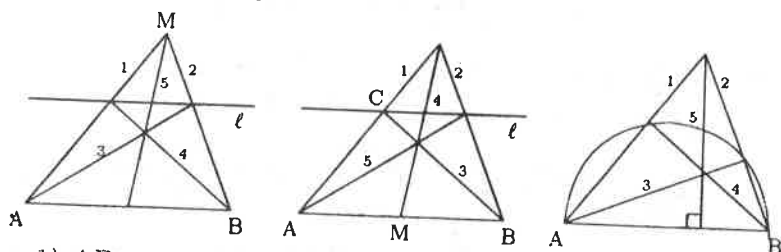
ДБ-В1. Эйзенштейний шинжүүр:

$f(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ нь $p \nmid a_n, p \nmid a_i \quad i = \overline{0, n-1}$ ба $p^2 \nmid a_0$ бол $f(x)$ олон гишүүнт нэгээс их зэрэгтэй бүхэл олон гишүүнтүүдийн үржвэрт задрахгүй.

p анхны тоо сонгон авбал $p + ip^2$ арифметик прогрессийн гишүүд нь p^2 -д хуваагдахгүй, p -д хуваагдана. $N = \bigcup_{i=1}^{1997} A_i$

тул ямар нэг A_k -д дээрх прогрессийн ∞ олон гишүүн орно. Эдгээрээс $a_i \quad i = \overline{1, 32}$ -г ∞ олон янзаар сонгон авч болно. Ийм олон гишүүнт Эйзенштейний шинжүүрээр үл задарна.

ДБ-В2. Байгуулалтыг хийхийн өмнө дараахь хялбар байгуулалтуудыг авч үзье.



1) AB хэрчим ба (AB) шулуунтай параллель ℓ шулуун өгөгдсөн бол AB хэрчмийн дундаж цэгийг байгуул (зураг 1).

2) AB хэрчмийн дундаж цэг M бол өгсөн C цэгийг дайруулан AB шулуунтай параллель ℓ шулуун тат (зураг 2).

3) AB диаметртэй тал тойрог өгөгдсөн бол AB -д перпендикуляр шулуун тат (зураг 3).

Дээрх гурван байгуулалтын тусламжтайгаар өгсөн бодлогыг хялбархан бодож болох тул уншигч танд үлдээе.

ДБ-В3. Тодорхой нэг тэгш өнцөгт координатын систем дээр $a_i = (x_i, y_i, z_i)$ ($i = \overline{1, n}$) байг.

$$|a_i| = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} \leq |x_i| + |y_i| + |z_i| \quad (i = \overline{1, n})$$

биелэхийг харуулж болно.

$$\sum_{i=1}^n |a_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i| + |z_i|)$$

байна. Тэнцэтгэлийн баруун талын координат бүрийг ижил тэмдэгтэйгээр бүлэглэе.

$$\sum_{i=1}^n |a_i| \leq \sum_{x_i \geq 0} |x_i| + \sum_{x_j < 0} |x_j| + \sum_{y_i \geq 0} |y_i| + \sum_{y_j < 0} |y_j| + \sum_{z_i \geq 0} |z_i| + \sum_{z_j < 0} |z_j|$$

болно. Эдгээр 6 нэмэгдэхүүний аль нэг нь тах байх ба уг тах-аар соливол ихэснэ. Түхайн тохиолдолд (тодорхой ойлголт өгөхийн тулд) $\sum_{x_j < 0} |x_j|$ тах болсон гэе. Тэгвэл

$$\sum |a_i| \leq 6 \sum_{x_j < 0} |x_j| = 6 \left| \sum x_j \right|$$

болно. Бүгд ижил тэмдэгтэй учир $\sum |x_j| = \left| \sum x_j \right|$ байна.

$A = \{a_j | a_j = (x_j, y_j, z_j) \quad x_j < 0\}$ гэж тэмдэглэе.

$$\sum_{a_j \in A} a_j = \left(\sum_{x_j < 0} x_j, \sum y_j, \sum z_j \right)$$

болно. $a = \sum_{a_j \in A} a_j = (x, y, z)$ гэвэл $x = \sum_{x_j < 0} x_j$ болно.

$$\left| \sum_{x_j < 0} x_j \right| = |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |a| = \left| \sum_{a_j \in A} a_j \right|$$

болно. Ийнхүү нэгтгэвэл: $\sum_{i=1}^n |a_i| \leq 6 \left| \sum_{a_j \in A} a_j \right|$ болж батлах зүйл

батлагдав.

Олон Улсын Математикийн XXXVIII Олимпиадад оролцсон тухай

Ц.Дашдорж

ОУМО-38 1997.07.18-31-нд Аргентиний Мар-дель-Плато хотод явагдаж өнгөрлөө. Дэлхийн 82 орон оролцсон энэ тэмцээнд Хятад 227, Унгар 219, Иран 217, Орос 202, АНУ 222, Украин 195, Болгар 191, Румын 191, Австрали 188, Вьетнам 183 оноогоор эхний 10 байранд, Өмнөт Солонгос 164, Япон 163, Герман 161, Тайван 148, Англи 144, Белорусс 140, Чех 139, Швед 128, Польш 125, Югослав 125 оноогоор дараагийн 10 байранд Монгол 106 оноогоор 30 байранд орлоо. Манайхаас:

Ө.Баттулга (I сургууль. 9-р анги) 36 оноо

Б.Баттулга (XI сургууль. 8-р анги) 23 оноо

Т.Хулан (XI сургууль. 10-р анги) 16 оноо

Б.Энхбаяр (XI сургууль. 10-р анги) 19 оноо

Н.Эрдэмбат (XI сургууль. 10-р анги) 10 оноо

Ч.Алтаннар (XI сургууль. 9-р анги) 2 оноо

авлаа. Монгол улсын түүхэнд Олон Улсын Математикийн Олимпиадаас анхны алтан медалийг авсан Ө.Баттулгадаа маш их баярлаж байгаагаа Монголын нийт математикчдын өмнөөс илэрхийлье. Б.Баттулга, Т.Хулан, Б.Энхбаяр нар хүрэл медаль хүртлээ. Т.Хулан Олимпиадын хошой хүрэл медальтан боллоо.

ОУМО-39 Тайванд 1998.07.10-21-нд болно.

Олон Улсын Математикийн Олимпиадын БОДЛОГО

ОУ-1. Оройнууд нь бүхэл тоон координаттай цэгүүд дээр орших нэгж квадратуудад хавтгайг хуваажээ. Квадратуудыг ээлжлэн хар, цагаанаар (шатрын хөлөг) буджээ. Натурал тооны m, n хос бүрийн хувьд бүхэд цэгүүд дээр оройнуудтай, квадратуудын талуудыг дайрсан m, n уртууд бүхий катетуудтай тэгш өнцөгт гурвалжинг авъя.

Энэ гурвалжны хар хэсгийн талбай нь S_1 , цагаан хэсгийн талбай нь S_2 байг.

$$f(m, n) = |S_1 - S_2|$$

гэе.

а) Эсвэл хоёул тэгш, эсвэл хоёул сондгой байх бүх натурал тоо m, n -ийн хувьд $f(m, n)$ -г бод.

б) Бүх m, n -ийн хувьд $f(m, n) \leq \frac{1}{2} \max\{m, n\}$ гэж батал.

в) Бүх m, n -ийн хувьд $f(m, n) < C$ байх тогтмол C олдохгүй гэж батал.

ОУ-2. $\triangle ABC$ -д өнцөг A хамгийн бага нь. Энэ гурвалжныг багтаасан тойргийг B, C цэгүүд 2 нумд хуваана. B, C төгсгөлүүдтэй A -г агуулаагүй нумын дотоод цэг нь U байг. AB ба AC хэрчмүүдийн дунд босгосон перпендикулярууд нь AU шулууныг V ба W цэгүүдэд харгалзан огтлодог байг. BV, CW шулуунуудын огтлолцлын цэг T байг. $AU = TB + TC$ гэж батал.

ОУ-3. $x_1, x_2, \dots, x_n$ бодит тоонууд нь $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| = 1$ ба $|x_i| \leq \frac{n+1}{2}, i = 1, 2, \dots, n$ нөхцлүүдийг хангадаг байг.

$$|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}$$

байхаар $x_1, x_2, \dots, x_n$ тоонуудын сэлгэмэл $y_1, y_2, \dots, y_n$ олдохыг батал.

ОУ-4. Хэрэв $S = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ олонлогийн тоонуудаар бөглөсөн $n \times n$ хүснэгтийн i -р мөр ба i -р баганын нэгдэл нь $i = 1, 2, \dots, n$ бүрийн хувьд S -ийн бүх тоог агуулдаг бол уг хүснэгтийг бүрхэгч гэе.

а) $n = 1997$ үед бүрхэгч хүснэгт олдохгүйг батал.

б) n -ийн төгсгөлгүй олон утгын хувьд бүрхэгч хүснэгт олдохыг батал.

ОУ-5. $a^{b^2} = b^a$ тэгшитгэлийг хангах бүхэл тоо $a \geq 1, b \geq 1$ -ийн бүх хос (a, b) -г ол.

ОУ-6. n тоог 2-ын сөрөг биш бүхэл зэргүүдийн нийлбэрт тавих боломжийн тоог $f(n)$ гэе. Зөвхөн нэмэгдэхүүнүүдийнхээ эрэмбээр ялгагдах дүрслэлүүдийг адил гэж үзнэ. Жишээ нь: $f(4) = 4$ болно, учир нь 4-г: 4, $2+2$, $2+1+1$, $1+1+1+1$ гэж дөрвөн янзаар дүрсэлж болно.

$n \geq 3$ байх бүхэл тоо n бүрийн хувьд

$$2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}}$$

гэж батал.

Бодлогуудын бодолт.

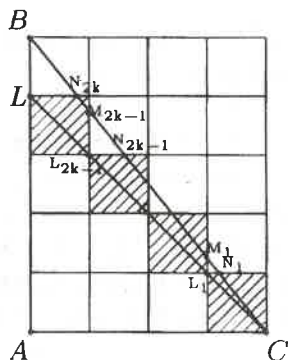
ОУ-1. а) ABC нь оройнууд нь бүхэл координаттай буюу зангилааны цэгүүд байх, талууд нь хүснэгтийн шугамуудын дагуу байрлах, $\angle A = 90^\circ$, $AB = m$, $AC = n$ байх тэгш өнцөгт гурвалжин байг. $ABCD$ нь зурагт үзүүлсэн $m \times n$ тэгш өнцөгт байг (зураг 1). Дурын олон өнцөгт P -ийн хувьд $S_b(P)$ -ээр P -ийн хар хэсгийн талбайг, $S_\omega(P)$ -ээр P -ийн цагаан хэсгийн талбайг тэмдэглэе. $m \equiv n \pmod{2}$ бол $ABCD$ нь BC гипотенузын дундаж цэгийн хувьд төвийн тэгш хэмтэй байна. Иймд

$$S_b(ABC) = S_b(BCD) \quad \text{ба} \quad S_\omega(ABC) = S_\omega(BCD).$$

Тэгвэл

$$f(m, n) = |S_b(ABC) - S_\omega(ABC)| = \\ = \frac{1}{2} |S_b(ABCD) - S_\omega(ABCD)| = \begin{cases} 0 & \text{хэрэв } m, n - \text{тэгш} \\ \frac{1}{2} & \text{хэрэв } m, n - \text{сондгой} \end{cases}$$

б) Хэрэв $m \equiv n \pmod{2}$ бол а)-аар батлагдана. m -сондгой, n -тэгш гэж үзье. $AL = m-1$ байх AB дээр орших цэг нь L байг (зураг 2). $m-1$ тэгш тул а)-аар $f(m-1, n) = 0$, ө.х $S_b(ALC) = S_\omega(ALC)$. Тэгвэл $f(m, n) = |S_b(ABC) - S_\omega(ABC)| = |S_b(LBC) - S_\omega(LBC)| \leq S_{LBC} = \frac{n}{2} \leq \max(m, n)$.


$$BLN_{2k}, \quad M_{2k-1}L_{2k-1}N_{2k-1}, \quad \dots, \quad M_1L_1N_1$$
$$S_{\omega}(LBC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2k}{2k+1} \left[\left(\frac{2k}{2k} \right)^2 + \left(\frac{2k-1}{2k} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2k} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{4k(2k+1)} \left[1^2 + 2^2 + \dots + (2k)^2 \right] = \frac{4k+1}{12}$$

$$S_b(LBC) = k - \frac{4k+1}{12} = \frac{1}{12}(8k-1), \quad f(2k+1, 2k) = \frac{2k-1}{6}$$

гэж гарна. $\angle TBC + \angle TCB = \angle B + \angle C - \angle A = 180^\circ - 2 \cdot \angle A \Rightarrow \angle BTC = 2 \cdot \angle A$.
Мөн нэг нумд тулсан өнцгүүд = учир $\angle YBA = \angle YCA = \angle CAU = \angle CBU$
болно. $\angle TYB = \angle BTC - \angle TBY = \angle A \Rightarrow \angle TBY = \angle A \Rightarrow \triangle TYB$ адил хажуут
 $\Rightarrow TY = TB \Rightarrow BT + CT = CY$.

$LCBY = LCBA + LABY = LCBA + LCBU = LABU \Rightarrow CY, AU$ хөвчүүд $\Rightarrow CY = AU \Rightarrow BT + CT = AU$.

ОУ-3. $(x_1, \dots, x_n)$ -ийн сэлгэмэл $\pi = (y_1, \dots, y_n)$ бол $S(\pi) = y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n$ гэе. $r = \frac{n+1}{2}$ байг. Ямар нэг сэлгэмэл π -ийн хувьд $|S(\pi)| \leq r$ гэж харуулах ёстой. π_0 нь адилтгал сэлгэмэл $\pi_0 = (x_1, \dots, x_n)$ ба $\tilde{\pi} = (x_n, \dots, x_1)$ байг. Хэрэв $|S(\pi_0)| \leq r$ эсвэл $|S(\tilde{\pi})| \leq r$ бол бодлого шууд бодогдлоо. Иймд $|S(\pi_0)| > r$ ба $|S(\tilde{\pi})| > r$ (1) гэж үзье. $S(\pi_0) + S(\tilde{\pi}) = (x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n) + (x_n + 2x_{n-1} + \dots + nx_1) = (n+1)(x_1 + \dots + x_n)$ буюу $|S(\pi_0) + S(\tilde{\pi})| = n+1 = 2r$. Иймд (1)-ийг анхаарвал $S(\pi_0)$ ба $S(\tilde{\pi})$ нь эсрэг тэмдэгтэй байх ёстой буюу нэг нь r -ээс их нөгөө нь r -ээс бага болно. π_0 -оос эхлэн зэрэгцээ хоёр элементийн байрыг солих замаар ямарч сэлгэмэлийг гаргаж авч чадна. Тухайлбал $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_m$ -д $\pi_m = \tilde{\pi}$ ба π_{i+1} нь π_i -ийн зэрэгцээ хоёр үсгийн байрыг солиход гарна. Энэ нь хэрэв $\pi_i = (y_1, \dots, y_n)$ ба $\pi_{i+1} = (z_1, \dots, z_n)$ бол $\exists k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $z_k = y_{k+1}$, $z_{k+1} = y_k$ ба $j \neq k, k+1$ бол $z_j = y_j$ байна гэсэн үг. $\forall i, |x_i| \leq r$ тул

$$\begin{aligned} |S(\pi_{i+1}) - S(\pi_i)| &= |kz_k + (k+1)z_{k+1} - ky_k - (k+1)y_{k+1}| = \\ &= |y_k - y_{k+1}| \leq |y_k| + |y_{k+1}| \leq 2r \end{aligned}$$

ба (1) биелж байгааг анхаарвал $S(\pi_0), S(\pi_m)$ нь $[-r; r]$ -ийн 2 талд гадна талд нь оршино гэдгээс $S(\pi_i)$ тоонуудын ядаж нэг нь $[-r; r]$ завсарт унана, ө.х $\exists i, |S(\pi_i)| \leq r$ болно.

ОУ-4. а) $1 < n \in N$ байг. Бүрхэгч $n \times n$ матриц A оршин байна гэе. $(a_{ij}) = A$ -ийн диагональ дээр оршдоггүй M олонлогийн нэг элемент x -ийг авч үзье. A -ийн i -р мөр ба i -р баганын нэгдлийг i -р хэрээс $(\bar{A})$ гэе. Хэрээс бүрд x элемент яг 1 удаа тааралдана. Хэрэв $x = a_{ij}$ бол $x \in \bar{A}_i, x \in \bar{A}_j$ байна. Энэ үед $\bar{A}_i$ ба $\bar{A}_j$ хэрээсүүд x холбогдсон байна гэе. Эндээс бүх n хэрээс нь x холбогдсон хэрээсүүдийн хосуудад хуваагдах нь гарна. Иймд n тэгш байна. Гэтэл 1997 сондгой тоо. Иймд энэ үед 1997×1997 бүрхэгч матриц оршихгүй.

б) $n = 2$ үед $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ бүрхэгч матриц юм.

$$n = 4 \text{ үед } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ ба } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ -үүд нь}$$

бүрхэгч матриц болж чадна. A нь $n \times n$ бүрхэгч матриц бол $2n \times 2n$ бүрхэгч матриц D -г дараахь маягаар байгуулж болно.

$$D = \begin{pmatrix} A & B \\ C & A \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ij}) \text{ бол } b_{ij} = a_{ij} + 2n \text{ байхаар } B = (b_{ij}),$$

$$C = (c_{ij}) \text{ -г } c_{ij} = \begin{cases} b_{ij}, & i \neq j \\ 2n, & i = j \end{cases} \text{ гэж авъя. } D \text{-ийн } i \text{-р хэрээсийг}$$

авч үзье. $i \leq n$ бол $D_i = \overline{A_i} \cup B_i \cup C^i$, энд B_i ба C^i нь B ба C -ийн i -р мөр ба багана юм. Гэтэл $\overline{A_i} = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$, $B_i \cup C^i = \{2n, 2n+1, \dots, 4n-1\}$. Иймд $D_i = \{1, 2, \dots, 4n-1\}$ буюу D нь бүрхэгч $2n \times 2n$ матриц боллоо. $i > n$ байх үе үүнтэй адил хийгдэнэ.

ОУ-5. $\frac{a}{b^2} = k \in Q$ гэе. $a = b^2 k$ -г орлуулбал

$$(b^2 k)^{b^2} = b^{b^2 k} \Rightarrow \left| \frac{1}{b^2} \right| \Rightarrow b^2 k = b^k \Rightarrow k = b^{k-2}$$

болно. Эндээс k нь N тооны рациональ зэрэг учир бүхэл болно $\Rightarrow k \in N$.

$$k = 1 \Rightarrow b = 1, \quad a = 1$$

$$k = 2 \Rightarrow b = 1, \quad \emptyset$$

$$k = 3 \Rightarrow b = 3, \quad a = 27$$

$$k = 4 \Rightarrow b = 2, \quad a = 16$$

$$k \geq 5 \text{ байг. } b \geq 2 \Rightarrow k \geq 2^{k-2} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{k-2} \geq 2 \cdot 2 \cdot \frac{k-3}{k-4} \cdot \dots$$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} = 4(k-3) > k \text{ болж зөрчил үүснэ.}$$

ОУ-6. $x_0 + 2x_1 + 4x_2 + \dots + 2^n x_n = 2^n$ (1)-ийн
сөрөг биш бүхэл шийдийн тоог олохтой, эсвэл

$$2x_1 + 4x_2 + \dots + 2^n x_n \leq 2^n \quad (2)$$

-ийн сөрөг биш бүхэл шийдийн тоог олохтой манай бодлого эквивалент юм.

а) Дээд үнэлгээ: $1 \leq i \leq n$ байх i бүрийн хувьд $2^i x_i = 2^n$ байх ганц шийд бий. Бусад ямарч шийдийн хувьд

$$\forall i, \quad 2^i x_i < 2^n \quad (3)$$

байх ба (3) биелэх x_i -ийн яг 2^{n-i} утга байна. Иймд

$$(2)\text{-ийн шийдийн тоо} \leq n + \prod_{i=1}^{n-1} 2^{n-i} = n + 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

ба $n \geq 3$ бол $n + 2^{\frac{n(n-1)}{2}} < 2^{\frac{n^2}{2}}$ болох нь илэрхий билээ.

б) Доод үнэлгээ: $a_1, \dots, a_n, k$ эерэг бодит тоонууд ба

$A = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n \mid x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n} \text{ ба } a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \leq k\}$ олонлогийн гавч үзье. $t = (t_1, \dots, t_n) \in A$ бүхэл цэгээр $K_t = t + [0, 1]^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n \mid \forall i, \quad t_i \leq x_i \leq t_i + 1\}$ гиперкубыг байгуулъя. (Тийм бүх гиперкубүүдийн нэгдлийн эзэлхүүн) $=$ (А дахь бүхэл цэгүүдийн тоо) ба уг нэгдэл А-г бүрхэнэ. Иймд А дахь бүхэл цэгүүдийн тоо А-ийн эзэлхүүнээс багагүй. Энэ өгүүлбэрийг $2x_1 + \dots + 2^{n-1}x_{n-1} \leq 2^n$ -д хэрэглэвэл ($x_n = 1$ тохиолдол нь зөвхөн ганц шийдийг өгөх тул авч үзсэнгүй).

$$f(2^n) \geq \frac{1}{(n-1)!} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{2^n}{2^i} = \frac{1}{(n-1)!} 2^{\frac{n^2-n}{2}} \quad (*)$$

ба $n \geq 9$ бол энэ доод хязгаар $> 2^{\frac{n^2}{4}}$. $x_{n-1} = x_n = 0$ байх тохиолдлыг авбал $2x_1 + \dots + 2^{n-2}x_{n-2} \leq 2^n$ болох тул

$$f(2^n) > \frac{1}{(n-2)!} \prod_{i=1}^{n-2} \frac{2^n}{2^i} = \frac{1}{(n-2)!} 2^{\frac{n^2-n}{2}-1}$$

болж $n \geq 4$ үед энэ доод хязгаар $\geq 2^{\frac{n^2}{4}}$ болно.

$n = 3$ -ийн хувьд $f(2^3) = 10 > 2^{\frac{9}{4}}$ билээ.

Тэмдэглэл: (*)-г гаргахдаа $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \leq b$, $0 < a_i$ гэсэн харилцан перпендикуляр $\ell_1 = \frac{b}{a_1}, \dots, \ell_n = \frac{b}{a_n}$ ирмэгүүдтэй тетраэдрийн эзэлхүүн $V = \frac{1}{n!} \ell_1 \dots \ell_n$ байдгийг ашиглав. Энэ томъёог $n = 1, 2, 3$ үед бид сайн мэднэ.

ЭНХБОЛДЫН НЭРЭМЖИТ УЛСЫН III УРАЛДААН

Л.Оюунцэцэг
Ө.Баттулга

П.Энхболдын нэрэмжит Улсын III уралдаан 1997 оны 12-р сарын 25-наас 30-нд Математик Эдийн засгийн тусгай сургалттай 32-р дунд сургууль дээр боллоо. Авьяаслаг математикч маань анх энэ сургуульд орж алтан номын үсгийг заалгаж байсан билээ. Энэ жилийн уралдаанд УБ, Хөвсгөл, Төв, Сэлэнгэ, Хэнтий, Дархан, Эрдэнэт зэрэг газруудаас 250-аад сурагч 80 гаруй багш оюутнууд оролцлоо. VII-VIII ангийн сурагчдаас 32-р сургуулийн А.Амарсанаа, 11-р сургуулийн Эрдэнэсайхан нар I, II байранд, IX-X ангид 1-р сургуулийн 10-р ангийн сурагч Ө.Баттулга, 11-р сургуулийн 9-р ангийн Б.Баттулга нар тэнцүү оноогоор I, II байрт, багш оюутнуудын категорт ШУА-гийн Математикийн хүрээлэнгийн ЭША Л.Оюунцэцэг, 1-р сургуулийн Ө.Баттулга (давхар бодож) I, II байр эзэллээ. Байр эзэлсэн хүмүүст 80.000, 60.000 төгрөгийн шагналыг гардууллаа.

VII-VIII-1. a, b, c нь $abc = 1$ байх эерэг тоонууд бол

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+a+c} \leq \frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c}$$

болохыг батал.

VII-VIII-2. $a + b + c = 0$ бол 3-т үл хуваагдах $n \in N$ бүрийн хувьд $a^n + b^n + c^n$ тоо $(ab + bc + ca)$ -д хуваагдахыг батал.

VII-VIII-3. $(\pm\sqrt{1} \pm \sqrt{2} \dots \pm \sqrt{100})$ хэлбэрийн бүх боломжит илэрхийллүүдийн үржвэр бүхэл тооны квадрат болохыг батал.

VII-VIII-4. Хурц өнцөгт $\triangle ABC$ -ын AB, AC, BC талууд дээр $AK = KL = LM = MC$ байхаар K, L, M цэгүүдийг ол.

Бодлогуудын бодолт.

VII-VIII-1. Энэ бодлогын бодолтыг хийж чадаагүй байгаа тул уншигчиддаа үлдээе.

VII-VIII-2. $n = 1$ ба $n = 2$ үед баталгаа илэрхий. Харин n -ээс $n + 3$ -д шилжих индукцийн шилжилт нь $S(a) = a + b + c$ гэсэн тэмдэглэл хийвэл

$$S(a^{n+3}) = S(a)S(a^{n+2}) - (ab + bc + ac)S(a^{n+1}) + abcS(a^n)$$

адилтгалаас шууд мөрдөгдөнө.

VII-VIII-3. $(1 \pm \sqrt{2} \dots \pm \sqrt{100})$ хэлбэрийн бүх илэрхийллийн үржвэрийг A гэе. Тэгвэл анхны үржвэр $A^2 \cdot (-1)^{299} = A^2$ -тай тэнцүү. Иймд A зохиомол гэж батлахад хангалттай.

$$A = \sum_{i=1}^{100} a_i = 100 \quad \left(k \cdot \sqrt{1}^{a_1} \cdot \sqrt{2}^{a_2} \dots \sqrt{100}^{a_{100}} \right)$$

$(Z \ni a_i \geq 0, k \in Z)$ хэлбэрт тавигдана. $\sum_{i=1}^{100} a_i = 100$ ба ямар нэг a_i , $(1 < i \leq 100)$ сондгой байх тоонуудыг авч үзье.

$$\sqrt{1}^{a_1} \cdot (\pm\sqrt{2})^{a_2} \dots (\pm\sqrt{100})^{a_{100}} \quad (*)$$

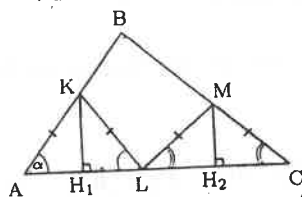
хэлбэрийн бүх гишүүд A -ийн задаргаанд орно. $\sqrt{i}$ -ийн зэрэг сондгой учир түүний тэмдгийг урагш гаргаж болно. Гэтэл $\sqrt{i}$ -ийн тэмдэг $(+)$, $(-)$ байх нэмэгдэхүүний тоо тэнцүү $\Rightarrow (*)$. хэлбэрийн нэмэгдэхүүнүүд устана. Иймд $1 < i \leq 100$ бүрийн хувьд a_i тэгш байх нэмэгдэхүүнүүд үлдэнэ.

$a_i = 2b_i$, $(i = \overline{2, 100})$ гэвэл $b_i \in Z$ ба

$$(\pm\sqrt{1})^{a_1} \cdot (\pm\sqrt{2})^{2b_2} \dots (\pm\sqrt{100})^{2b_{100}} = 2^{b_2} \cdot 3^{b_3} \dots 100^{b_{100}} \Rightarrow$$

A нь бүхэл нэмэгдэхүүнүүдийн нийлбэрт тавигдана $\Rightarrow A \in Z$.

VII-VIII-4.



K, M цэгүүдээс AC тал руу H_1, H_2 перпендикуляруудыг буулгая.

$$AK = KL = LM = MC = p,$$

$\angle A = \alpha, \angle C = \gamma$ гэе.

$$AC = b, AB = c, BC = a.$$

$$\Delta AKH_1 \Rightarrow AH_1 = \frac{AK}{2} = AK \cos \alpha \Rightarrow AL = 2p \cos \alpha \Rightarrow$$

$$+ \Delta CMH_2 \Rightarrow CH_2 = \frac{CM}{2} = CM \cos \gamma \Rightarrow CL = 2p \cos \gamma$$

$$2p(\cos \alpha + \cos \gamma) = AL + CL = AC \Rightarrow p = \frac{AC}{2(\cos \alpha + \cos \gamma)}$$

$$AL = 2p \cos \alpha = \frac{AC \cos \alpha}{\cos \alpha + \cos \gamma} < \frac{AC \cos \alpha}{\cos \alpha} = AC \text{ учир } L \text{ цэг } AC$$

дээр оршино. $p = \frac{AC}{2(\cos \alpha + \cos \gamma)} > c$ бол K цэг, $p > a$ бол M

цэг харгалзах тал дээрээ оршихгүй $\Rightarrow \alpha > 3\gamma$ үед K цэг AB

тал дээр оршихгүй, $3\alpha < \gamma$ үед M цэг BC тал дээр оршихгүй.



IX-X-1(Ц.Дашдорж). 33×33 тэгш өнцөгтийг хэлбэрийн дүрсүүдэд хувааж болох уу?

IX-X-2(Ц.Дашдорж). Хавтгайд $2n+1$ ширхэг ерөнхий байршилтай шулуун өгөгдөв. Эдгээр дээр бүх талууд нь орших хурц өнцөгт гурвалжны тоо $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ -аас хэтрэхгүйг батал.

IX-X-3(Ц.Дашдорж). Аль ч 98-ынх нь нийлбэр үлдсэн хоёрын нийлбэрт хуваагддаг ялгаатай 100 натурал тоо олдох уу?

IX-X-4. Аль ч хоёрын аль нэг нь нөгөөгөө хуваадаг тоонуудын дэд олонлогууд нь, мөн аль ч хоёр нь нэгийгээ үл хуваах тоонуудын дэд олонлогууд нь 1997-оос цөөн элементтэй байх натурал тоон олонлог төгсгөлөг гэж батал.

IX-X-1. Тэгш өнцөгтөө шатрын хөлөг шиг будъя. Хэрэв манай тэгш өнцөгтийг заасан дүрсүүдэд хувааж болдог бол хар ба цагаан нүднүүдийн ялгавар 3-т хуваагдах ёстой. Гэтэл тэр ялгавар манай дүрст 1 билээ. Иймд хувааж үл болно.

IX-X-2. Эдгээр шулуунуудын дотор параллель, перпендикуляр ба нэг цэг дээр огтлолцдог 3 шулуун байхгүй гэж үзье, ө.х аль ч 3 шулуун нь эсвэл хурц өнцөгтэй, эсвэл мохоо өнцөгтэй гурвалжин үүсгэдэг гэж үзье. A ба B нь зураг дээр байгаа хурц ба мохоо өнцөгт гурвалжнуудын тоо байг. a, b, c шулуунуудаар үүсгэгдсэн гурвалжны хувьд a дээр орших талд налсан өнцгүүд нь хурц бол түүнийг a -ийн хувьд зэрэмдэг хурц өнцөгт гурвалжин гэе. Өгсөн олонлогоос $\forall \ell$ шулууныг сонгож аваад түүнийг хэвтээ байхаар зургаа эргүүлб. Үлдэх $2n$ шулуунууд нь ℓ -тэй налалтын эерэг коэффициенттэй шулуунууд ба налалтын сөрөг коэффициенттэй шулуунууд гэж 2 ангид хуваагдана. (ℓ дээр чиглэл тогтооно). 2 шулуун ℓ -тэй хамт ℓ -ийн хувьд зэрэмдэг хурц өнцөгт гурвалжин үүсгэнэ $\Leftrightarrow$ тэр 2 шулуун өөр өөр ангид орно. Иймээс тийм гурвалжнуудын тоо 2 анги дахь шулуунуудын тооны үржвэртэй тэнцүү буюу n^2 -аас үл хэтэрнэ. Энэ үнэлгээг бүх шулуунуудын хувьд бичвэл (ℓ , ℓ -ийн хувьд зэрэмдэг хурц өнцөгт гурвалжин) гэсэн хосуудын нийт тоо $n^2(2n+1)$ -ээс үл хэтэрнэ. Энд хурц өнцөгт гурвалжин бүр 3 удаа, мохоо өнцөгт гурвалжин бүр 1 удаа тоологдоно, ө.х $3A + B \leq n^2(2n+1)$. Нийт гурвалжны тоо

$$A + B = C_{2n+1}^3 = \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6}$$

тул

$$2A \leq \frac{3n^2(2n+1)}{3} - \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3} = \frac{n(2n+1)(n+1)}{3}.$$

Энэ үнэлгээг сайжруулж болохгүйг жишээгээр харуулж болно.

IX-X-3. Оршдог гэж үзье. $x_1 > \dots > x_{100}$ ба $S = x_1 + \dots + x_{100}$ болог. $\forall i \neq j, x_i + x_j \mid S - x_i - x_j$ тул $x_i + x_j \mid S$ болно. М $x_1 > \frac{S}{100}$ байна. $x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_{100}$ нь S -ийн ялга

IX-X-1. Тэгш өнцөгтөө шатрын хөлөг шиг будъя. Хэрэв манай тэгш өнцөгтийг заасан дүрсүүдэд хувааж болдог бол хар ба цагаан нүднүүдийн ялгавар 3-т хуваагдах ёстой. Гэтэл тэр ялгавар манай дүрст 1 билээ. Иймд хувааж үл болно.

IX-X-2. Эдгээр шулуунуудын дотор параллель, перпендикуляр ба нэг цэг дээр огтлолцдог 3 шулуун байхгүй гэж үзье, ө.х аль ч 3 шулуун нь эсвэл хурц өнцөгтэй, эсвэл мохоо өнцөгтэй гурвалжин үүсгэдэг гэж үзье. A ба B нь зураг дээр байгаа хурц ба мохоо өнцөгт гурвалжнуудын тоо байг. a, b, c шулуунуудаар үүсгэгдсэн гурвалжны хувьд a дээр орших талд налсан өнцгүүд нь хурц бол түүнийг a -ийн хувьд зэрэмдэг хурц өнцөгт гурвалжин гэе. Өгсөн олонлогоос $\forall \ell$ шулууныг сонгож аваад түүнийг хэвтээ байхаар зургаа эргүүлбэ. Үлдэх $2n$ шулуунууд нь ℓ -тэй налалтын эерэг коэффициенттэй шулуунууд ба налалтын сөрөг коэффициенттэй шулуунууд гэж 2 ангид хуваагдана. (ℓ дээр чиглэл тогтооно). 2 шулуун ℓ -тэй хамт ℓ -ийн хувьд зэрэмдэг хурц өнцөгт гурвалжин үүсгэнэ $\Leftrightarrow$ тэр 2 шулуун өөр өөр ангид орно. Иймээс тийм гурвалжнуудын тоо 2 анги дахь шулуунуудын тооны үржвэртэй тэнцүү буюу n^2 -аас үл хэтэрнэ. Энэ үнэлгээг бүх шулуунуудын хувьд бичвэл (ℓ , ℓ -ийн хувьд зэрэмдэг хурц өнцөгт гурвалжин) гэсэн хосуудын нийт тоо $n^2(2n+1)$ -ээс үл хэтэрнэ. Энд хурц өнцөгт гурвалжин бүр 3 удаа, мохоо өнцөгт гурвалжин бүр 1 удаа тоологдоно, ө.х $3A+B \leq n^2(2n+1)$. Нийт гурвалжны тоо

$$A+B = C_{2n+1}^3 = \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6}$$

тул

$$2A \leq \frac{3n^2(2n+1)}{3} - \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3} = \frac{n(2n+1)(n+1)}{3}.$$

Энэ үнэлгээг сайжруулж болохгүйг жишээгээр харуулж болно.

IX-X-3. Оршдог гэж үзье. $x_1 > \dots > x_{100}$ ба $S = x_1 + \dots + x_{100}$ болог. $\forall i \neq j, x_i + x_j \nmid S - x_i - x_j$ тул $x_i + x_j \mid S$ болно. Мөн $x_1 > \frac{S}{100}$ байна. $x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_{100}$ нь S -ийн ялгаатай 99

хуваагчид ба бүгд $\left(\frac{S}{100}; S\right)$ завсарт оршино. Гэтэл энэ завсарт байх S -ийн хуваагчид хамгийн ихдээ л $\frac{S}{2}, \frac{S}{3}, \dots, \frac{S}{99}$ гэсэн 98 ширхэг байх ёстой. Зөрчил.

IX-X-4. Эсрэгээс нь тийм төгсгөлгүй олонлог оршдог гэж үзье. Уг олонлогийн элементүүдийг $x_1 < x_2 < \dots$ гэж дараалуулан бичсэн гэж үзье. Тэгвэл уг дарааллын аль ч гишүүн өөрөөсөө өмнө орших гишүүнд хуваагдахгүй. Уг дарааллын ямар нэг x_{i_1} гишүүнийг авч үзье. Тэгвэл x_{i_1} -ээс ялгаатай, x_{i_1} -т хуваагдах хамгийн бага гишүүн нь x_{i_2} болог. x_{i_2} -оос $\neq$, x_{i_2} -т хуваагдах хамгийн бага гишүүнийг x_{i_3} гэе. Тэгвэл энэ операци 1996-аас ихгүй үйлдлийн дараа зогсоно. Эсрэг тохиолдол аль ч 2-ын нэг нь нөгөөдөө хуваагддаг 1997 гишүүнтэй дэд олонлог олдоно (тэр нь $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{1997}}\}$ болно). Эндээс дарааллын ямар ч гишүүнийг хуваадаггүй дарааллын гишүүн олдоно. Ийм гишүүнийг P чанартай гэе. x_1 -ийг авч үзвэл түүнээс их, P чанартай x_{j_1} гэсэн гишүүн олдоно. Мөн түүнээс их P чанартай x_{j_2} гэсэн гишүүн олдоно, $\dots, \Rightarrow P$ чанартай $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{1997}}$ гэсэн гишүүд олдоно. Одоо $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{1997}}\}$ дэд олонлогийг авч үзвэл аль ч хоёр гишүүний нэг нь нөгөөгөө хуваахгүй $\Rightarrow$ зөрчил.

Б-1(Ц.Дашдорж). 33×33 тэгш өнцөгтийг бэрийн дүрсүүдэд хувааж болох уу?



хэл-

Б-2(Ц.Дашдорж). p нь сондгой анхны тоо ба $p^2 = A^2 + 2B^2$ дүрсээр тавигддаг бол $p = a^2 + 2b^2$ байх a, b натурал тоонууд олдохыг үзүүл.

Б-3(Ц.Дашдорж). $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \in R[x]$, $a_0 > 0$ ба $q(x) = p(x) - p'(x)$ гэе. Хэрэв $q(q(x))$ бодит язгуургүй бол $p(p(x))$ бодит язгуургүй гэж батал.

Б-4(В.Адьяасүрэн). A нь натурал тоонуудын олонлог ба A -ийн хамгийн бага элемент 1, хамгийн их элемент нь

2¹⁹⁹⁸ – 1. A -ийн нэгээс ялгаатай элемент бүр нь A -д орох хоёр тооны нийлбэртэй тэнцүү бол (тэнцүү байж болно) A нь хамгийн багадаа хэдэн элементтэй вэ?

Бодлогуудын бодолт.

Б-1. X -1-ийг хар.

Б-2. $p^2 = A^2 + 2B^2$ байг. $(A, B) = 1$ байх нь ойлгомжтой. A нь сондгой ба $B = 2^s \cdot B_1$, B_1 -сондгой гэж үзье. $p^2 \equiv A^2 \equiv 1 \pmod{4}$ учир $p^2 - A^2 \equiv 0 \pmod{4}$ болж B нь тэгш ба ө.х $s \geq 1$ байна. $p^2 - A^2 = (p - A)(p + A) = 2^{2s+1} \cdot B_1^2$ болно.

$$p - A = 2^{t_1} \cdot A_1$$

$$p + A = 2^{t_2} \cdot A_2$$

$$t_1, t_2 \geq 1 \text{ ба } t_1 + t_2 = 2s + 1.$$

A_1, A_2 -сондгой. Ингээд p сондгой учир

$$2p = 2^{t_1} \cdot A_1 + 2^{t_2} \cdot A_2$$

$t_1 = 1, t_2 = 2s$ эсвэл $t_2 = 1, t_1 = 2s$ болно. $A_1 \cdot A_2 = B_1^2$ ба $(A_1, A_2) = 1$ учир $A_1 = a_1^2, A_2 = a_2^2$ болно.

а) $t_1 = 1, t_2 = 2s$ үед $2p = 2a_1^2 + 2^{2s}a_2^2, p = a_1^2 + 2^{2(s-1)+1} \cdot a_2^2$ ($s \geq 1$ гэдгийг мартаж болохгүй). $p = a_1^2 + 2 \cdot 2^{2(s-1)} \cdot a_2^2 = a^2 + 2b^2, a = a_1, b = 2^{s-1}a_2$.

б) $t_1 = 2s, t_2 = 1$ үед мөн адилаар $p = a^2 + 2b^2$ дүрсээр тавигдана.

Б-3. x -ийн их утганд $q(x) > 0$ байна. Тасралтгүй функцийн завсрын утгын тухай теоремыг ашиглавал $q(q(x))$ бодит язгуургүй $\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \min q(x) > x_0$, энд $\min(q(x))$ -ээр $q(x)$ -ийн хам-

гийн бага утгыг, x_0 -оор $q(x)$ -ийн хамгийн их бодит язгуурыг тэмдэглэв. $m = p(a) = \min p(x)$ байг ($\exists m$ байх нь илэрхий, эсрэг тохиолдолд $p(R) = R \Rightarrow q(R) = R \Rightarrow q(q(x))$ бодит язгууртай болоход хүрнэ). $q(a) = p(a) - p'(a) = p(a) - 0 = m \Rightarrow \min q(x) \leq m$ (2) Хэрэв x_1 нь $p(x)$ -ийн хамгийн их язгуур бол $q(x_1) = p(x_1) - p'(x_1) = -p'(x_1) \leq 0$, учир нь $p'(x_1) \geq 0$.

Иймд $x_0 \geq x_1. m = \min p(x) \stackrel{(2)}{\geq} \min q(x) \stackrel{(1)}{>} x_0 \geq x_1$ болж (1) ёсоор $p(p(x))$ бодит язгуургүй боллоо.

Б-4. Энэ бодлогыг олонлогийн элементийн тоог аль болох хамгийн бага байхаар байгуулалт хийн бодлоо. Хэрэв та хам-

гийн бага тоо гэдгийг баталж чадвал бодолтоо олимпиадын хороонд ирүүлж болно.

K_s гэдгээр $2^s - 1$ нь тах элемент нь байх дээрх чанартай олонлогийн элементүүдийн min тоог тэмдэглэе.

$$2^{1998} - 1 = 2^{999}(2^{999} - 1) + 2^{999} - 1.$$

гэвэл $K_{1998} = K_{999} + 999 + 1$ болно. Учир нь $2^{1998} - 1$ нь $2^{999} - 1$ ба түүнийг 999 удаа 2-оор үржүүлж үүсэх тоонууд, хамгийн сүүлд дээрх хоёр тооны нийлбэрээр үүсэх юм. K_{999} -г олохын тулд $2^{999} - 2^3 + 2^3 - 1 = 2^3(2^{996} - 1) + 2^3 - 1$ гэж бичвэл дээрхтэй адилаар $K_{999} = K_{996} + 3 + 1 + \varepsilon \cdot K_3$ байна. Үүнд $\varepsilon = 0$ гарах юм. Учир нь $2^3 - 1$ -ийг үүсгэх K_3 тоо K_{996} дотор тоологдохоор байгуулалт хийсэн юм. $2^{996} - 1 = 2^{498}(2^{498} - 1) + (2^{498} - 1)$ учир $K_{996} = K_{498} + 498 + 1$. Мөн адилаар $K_{498} = K_{249} + 249 + 1$ болно. $2^{249} - 1 = 2(2^{248} - 1) + (2 - 1)$ гээ. $K_{249} = K_{248} + 1 + 1$ болно. Мөн адилаар $K_{248} = K_{124} + 124 + 1$, $K_{124} = K_{62} + 62 + 1$, $K_{62} = K_{31} + 31 + 1$ болно. $2^{31} - 1 = 2^3(2^{28} - 1) + (2^3 - 1)$ гэвэл $K_{31} = 3 + 1 + K_{28}$, $K_{28} = K_{14} + 14 + 1$, $K_{14} = K_7 + 7 + 1$ болно. $2^7 - 1 = 2(2^6 - 1) + 2 - 1$, $K_7 = K_6 + 1 + 1$, $K_6 = K_3 + 3 + 1$ болно. $K_3 = 5$ байхыг хялбархан харна. $K_6 = 9$, $K_7 = 11$, $K_{14} = 19$, $K_{28} = 34$, $K_{31} = 38$, $K_{62} = 70$, $K_{124} = 133$, $K_{248} = 258$, $K_{249} = 260$, $K_{498} = 510$, $K_{996} = 1009$, $K_{999} = 1013$, $K_{1998} = 2013$.

МОНГОЛЫН ОЮУТНЫ МАТЕМАТИКИЙН VI ОЛИМПИАД

Ц.Дашдорж

1(Ц.Дашдорж). Бүхэл тоон шугаман тэгшитгэлүүдийн систем бүхэл шийдтэй байх, $\Leftrightarrow \forall m \in N$ -ийн хувьд m модулиар уг систем бүхэл шийдтэй.

2(Ц.Дашдорж). $\sigma \in S_n$ байг. Тэгвэл $\exists \alpha, \beta \in S_n$, $\sigma = \alpha\beta$ ба $\alpha^2 = \beta^2 = e$

а) энэ өгүүлбэр дурын төгсгөлөг бүлэгт хүчинтэй юү?

б) S_∞ -д хүчинтэй юү?

3(Ц.Дашдорж). $\varphi : Y \rightarrow V$ шугаман хувиргалт, $P \leq Y$ бол

а) $\dim \varphi(P) = \dim P - \dim(P \cap Q)$, $Q = \ker \varphi$ гэж батал.

б) $r(\varphi) = r$ гэвэл $\dim P + r - \dim Y \leq \dim \varphi(P) \leq \min(\dim P, r)$

в) $\psi : V \rightarrow W$ бол $r(\varphi) + r(\psi) - \dim V \leq \dim \psi \varphi(Y) \leq \min(r(\varphi), r(\psi))$

г) $P \leq Q \leq Y$ бол $\dim \varphi(Q) - \dim \varphi(P) \leq \dim Q - \dim P$ гэж батал.

4(Ц.Дашдорж). G төгсгөлөг бүлэг, $x \in G \rightarrow \sigma_x \in S(G)$ түүний Кэлийн дүрслэл байг. Үүнийг регуляр дүрслэл гэе.

а) Регуляр дүрслэлд σ_x орлуулга бүр x -ийн эрэмбэтэй адил урттай циклүүдийн үржвэрт задрана гэж батал.

б) G бүлгийн регуляр дүрслэлийн орлуулгуудын дотор сондгой орлуулга олдоно $\Leftrightarrow |G| = n = 2^k \cdot n_1$ тэгш тоо (n_1 сондгой тоо) ба G -д 2^k эрэмбэтэй элемент олдоно.

в) $|G| = n = 2^k \cdot n_1$ тэгш тоо (n_1 сондгой тоо) ба G -д 2^k эрэмбэтэй элемент олддог бол $N = \{x \in G \mid |x| = \text{сондгой тоо}\} \triangleleft G$, $|N| = n_1$ гэж батал.

5(Ц.Дашдорж). $|G| < \infty$ ба P түүний Силовын p дэд бүлэг байг. Хэрэв $N_G(P) \leq H \leq G$ бол $N_G(H) = H$ гэж батал.

6(Ц.Дашдорж). Төгсгөлөг төрөгдсөн бүлэгт өгөгдсөн төгсгөлөг m индекстэй дэд бүлэг төгсгөлөг тоотой байна гэдгийг батал.

7(Ц.Далайжамц). O цэгт төвтэй γ гэсэн адил талт гипербол өгөгдсөн.

а) γ дээр орших P цэгт төвтэй $2|OP|$ радиустай тойрог, γ -г гурван цэг нь зөв гурвалжны орой болж байхаар тийм дөрвөн цэгээр огтолно гэж батал.

б) нэг орой нь өгөгдсөн тохиолдолд адил талт гиперболд зөв гурвалжин багтаа.

8(Ц.Далайжамц). $ABCD$ параллелограмм өгөгдсөн C оройтой AB, BD, DA шулууну хувьд тэгш хэмтэй C_1, C_2, C_3 цэгүүд болон A орой нэг тойрог дээр эсвэл нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

9(Ц.Далайжамц). M орой дахь хавтгай өнцгүүд нь тэгш байх $MABC$ тетраэдр өгөгдөв. ABC талс дээр орших аливаа D цэгийн хувьд

$$S_{ABC}^2|MD|^2 = S_{BCD}^2|MA|^2 + S_{CAD}^2|MB|^2 + S_{ABD}^2|MC|^2$$

гэж батал.

Эцнээ даваанд Математикийн II-Б.Батбаясгалан, Математикийн I-Б.Баяржаргал, Г.Баярмагнай нар 1,2,3-р байрыг эзлэв.

Бодлогуудын бодолт.

1(Б.Батбаясгалан).

[illegible]

(1)-ийн хувьд $\forall j$ -р баганын элементүүдийн нийлбэр

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \geq 0 \quad (2)$$

гэж үзээд батлах зүйлээ батлахад явцуурахгүй. Тэгшитгэлийн тоо m -ээс бага байхад бодлого үнэн гээд $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} \in N$ тоогоор

индукцлэж батлая. $m = 1$ үед $a_1x_1 + \dots + a_nx_n \equiv b \pmod{a_1}$ $a_1 \neq 0$ гэвэл $\exists p \in Z : a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_1p = b$ ба $(x_1 + p, x_2, \dots, x_n)$ нь тэгшитгэлийн шийд болно. $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} = 1$ бол (1) нь $ax = b$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \geq \sum_{i=1}^m a_{ij'}, \quad j \neq j' \quad (3)$$

бол

[illegible]

(1') системийн хувьд

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} > \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} - \sum_{i=1}^m a_{ij'} > 0$$

тул индукц ёсоор (1') нь $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ шийдтэй. Иймд (1) нь $(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_j^0, -x_j^0, \dots, x_n^0)$ шийдтэй болно. Хэрэв (3) нөхцөл биелдэггүй бол аль нэг j дугаарын хувьд $\sum_{i=1}^m a_{ij} > 0$ ба $j' \neq j$ бүрийн хувьд

$$\sum_{i=1}^m a_{ij'} = 0 \quad (4)$$

эсвэл $\forall j$ дугаарын хувьд

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} = 0 \quad (5)$$

болно. Хэрэв (4) биелдэг бол бид (1) системийг түүнтэй эквивалент

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m-11}x_1 + \dots + a_{m-1n}x_n = b_{m-1} \\ \sum_{i=1}^m a_{ij}x_j = \sum_{i=1}^m b_i \end{array} \right. \quad (1'')$$

системээр сольж болно. $(1'')$ нь $\forall \ell \in N$ модулиар шийдтэй
 $\Leftrightarrow (1'')$ нь $\forall \ell \in N$ хувьд $\ell \sum_{i=1}^m a_{ij}$ модулиар шийдтэй $\Leftrightarrow$

задалж бичихэд 2-оос их урттай цикл орохгүй. $(c_1) \in \alpha$ буюу (c_1) гэсэн 1 урттай цикл α -ийн цикл задаргаанд орно гэвэл $(c_1, c_1 + 1) \in \beta \Rightarrow (c_1 - 1, c_1 + 1) \in \alpha \Rightarrow (c_1 - 1, c_1 + 2) \in \beta \Rightarrow (c_1 - 2, c_1 + 2) \in \alpha$ гэх мэт. $(c_1 - n, c_1 + n) \in \alpha$ болно. $(c_1) \in \alpha$, $(1, 2c_1 - 1) \in \alpha$ учир α -ийн цикл задаргаанд нэгж урттай циклийн тоо 1-ээс хэтрэхгүй буюу ө.х 2 урттай циклийн тоо ∞ олон. $(\alpha_1, \beta_1) \in \alpha$ гэвэл дээрхийн адилаар $(\alpha_1 - n, \alpha_1 + n) \in \alpha$ болно. $(\alpha_1, \beta_1) \in \alpha \rightarrow (1, \alpha_1 + \beta_1 - 1) \in \alpha \Rightarrow \forall (\alpha_i, \beta_i) \in \alpha$ -ийн хувьд $\alpha_i + \beta_i - 1 = \text{const}$ болно. α -д 2 урттай циклийн тоо ∞ олон байгаа учир ийм байж болохгүй.

3. Хялбар тул бодолтыг уншигчдад үлдээе.

4. а) $|x| = m$ байг. $\pi_g = (g, gx, gx^2, \dots, gx^{m-1})$ гэсэн яг m урттай цикл $\forall g \in G$ элемент орно. Иймд $n = m\ell$ гэвэл $\sigma_x = \pi_{g_1} \dots \pi_{g_\ell}$ болно, энд π_{g_i} -үүд үл хамаарах циклүүд тул $\forall 2$ нь байр солино.

б) $|x| = m$, $n = md$ байг. Тэгвэл а) ёсоор σ_x орлуулга нь m урттай d ширхэг циклүүдийн үржвэрт задрах тул $\text{inv} \sigma_x = d(m-1)$ байна. $\text{inv} \sigma_x$ -сондгой тоо бол σ_x -сондгой орлуулга гэж тодорхойлогддог тул, σ_x -сондгой орлуулга $\Leftrightarrow d$ -сондгой, m тэгш тоо $\Leftrightarrow (n = 2^k n_1, n_1\text{-сондгой тоо гэвэл}) \Leftrightarrow 2^k |m| = 2^k m_1$. Иймд $y = x^{m_1}$ гэж авбал $|y| = |x^{m_1}| = 2^k$ ба $\text{inv} \sigma_y = (2^k - 1)n_1 = \text{сондгой тоо тул бодлого бодогдов}$.

в) $G \xrightarrow{\pi} S_n$ регуляр дүрслэл буюу $x \in G$ бол $\pi_x \in S_n$ гээ. $G \xrightarrow{\varphi} \{\pm 1\}$, $\varphi(x) = (-1)^{\text{inv} \pi_x} = \varepsilon_{\pi_x} \in \{\pm 1\}$ буулгалт нь гомоморфизм болдог (Кострикин...).

б)-ийн бодолтоос харвал $(\sigma_x\text{-тэгш орлуулга} \Leftrightarrow 2^k \nmid m = |x| \text{ болох тул}) G_1 = \text{Ker} \varphi = \{x \in G \mid 2^k \nmid m = |x|\}$ болно. $G + G_1 + xG_1$, π_x -сондгой орлуулга тул $|G_1| = 2^{k-1} n_1$ ба $\exists x_1 \in G_1$, $|x_1| = 2^{k-1}$ болно. G_1 бүлэг нь мөн л бодлогын нөхцөлд оршиж байгаа тул $G_1 \xrightarrow{\exists \varphi_1} \{\pm 1\}$, $\text{Ker} \varphi_1 = G_2 = \{x_1 \in G_1 \mid 2^{k-1} \nmid |x_1|\} = \{x \in G \mid 2^{k-1} \nmid |x|\}$ г.м. $G_k = \{x_k \in G_{k-1} \mid 2 = 2^{k-(k-1)} \nmid |x_k|, \text{ ө.х}$

x_k -сондгой тоо} = { $x \in G \mid |x| = \text{сондгой тоо}$ }. $G_1, \dots, G_k \triangleleft G$ болно, учир нь эдгээр нь элементийн эрэмбээр л тодорхойлогдох ба эрэмбэ хосмоглолоор үл өөрчлөгддөг билээ.

5(Г.Баярмагнай). $P \leq N_G(P) \leq H \leq G$ бол $|P| \mid |H|$ тул P нь мөн H -ийн Силовын p дэд бүлэг. $N_G(H) = \{g \in G \mid H^g = gHg^{-1} = H\} \geq H$ ба $b \in N_G(H)$ бол $P^b \leq H$ нь мөн H -ийн Силовын p дэд бүлэг. Иймд Силовын 2-р теоремоор $\exists h \in H$, $P^b = P^h$ буюу $P = P^{bh^{-1}} \Rightarrow bh^{-1} \in N_G(P) \leq H \rightarrow b \in H$ буюу $H = N_G(H)$.

6. $G = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, $H \leq G$, $[G : H] = m$, ба $G = H + H_{g_2} + \dots + H_{g_m}$, $H_{g_i} = H_i$, $g_1 = \ell$ гэе. $g \in G$ элемент авахад $\varphi(g) = \begin{pmatrix} H_1, \dots, H_m \\ H_1g, \dots, H_mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1, \dots, H_m \\ H_{i_1}, \dots, H_{i_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, \dots, m \\ i_1, \dots, i_m \end{pmatrix} \in S_m$ -ээр $\varphi : G \rightarrow S_m$ гомоморфизм тодорхойлогдоно.

$[G : H] = [G : H'] = m$ бол H' дэд бүлэг нь мөн $\varphi' : G \rightarrow S_m$ гэсэн өөр нэг гомоморфизмыг өгнө.

$$\left. \begin{aligned} \varphi(g)(1) &= 1 \Leftrightarrow g \in H = H_1 \\ \varphi'(g)(1) &= 1 \Leftrightarrow g \in H' = H'_1 \end{aligned} \right\}$$

тул $H_1 \neq H'_1$ бол $\varphi \neq \varphi'$ гэж гарна. Нөгөө талаас φ нь $\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)$ -ээрээ бүрэн тодорхойлогдох тул $\varphi : G \rightarrow S_m$ гэсэн гомоморфизмын нийт тоо нь $(m!)^n$ -ээс үл хэтэрнэ. Иймд H дэд бүлгүүдийн тоо ч мөн $(m!)^n$ -ээс үл хэтэрнэ.

БАГУУДЫН ТЭМЦЭЭН

Монголын Оюутны 6-р Олимпиадын багийн тэмцээн 1997 оны 4-р сарын 20-нд боллоо. МУИС-ийн Математик II ангийн Б.Батбаясгалан ахлагчтай баг 14 оноогоор I байр, Математик I ангийн Б.Баяржаргал ахлагчтай баг 6 оноогоор II байр эзлэв.

1(Ц.Дашдорж). n хүү ба n охин бүжгийн үдэшлэгт ирэв. Үдэшлэгийн дараа үзэхэд охин бүр тэгш тооны хүүтэй нь бүжиглэсэн байхаар k ($1 \leq k \leq n$) хүү бүхий нэг бүлэг олдож байв (0 тэгш тоо). Тэгвэл хүү бүр тэгш тооны

охинтой нь бүжиглэсэн байхаар охидын хоосон биш дэд олонлог олдохыг батал. (8 оноо)

2(Ц.Дашдорж). G төгсгөлөг p бүлэг, $\{e\} \neq K \triangle G$ бол $K \cap Z(G) \neq \{e\}$ гэж батал ($Z(G) = \{z \in G | \forall x \in G, xz = zx\}$ бүлгийн төв). (6 оноо)

3(Ц.Дашдорж). $(A, +, \cdot)$ нь $\chi(A) = 2$ ($\forall x \in A, x + x = 2x = 0 \in A$) байх цагираг ба $\forall x \in A, \exists k = k(x) \in N, x^{2^k+1} = x$ бол $\forall x \in A, x^2 = x$ болохыг батал. (6 оноо)

4(Б.Баясгалан). $N_0 = N \cup \{0\}$ бол $(N, \cdot) \rightarrow (N_0^\infty, +)$ гэсэн хагас бүлгүүдийн мономорфизм гомоморфизм багтаалт олдохыг батал. (6 оноо)

	1	2	3	4	нийт оноо	байр
МУИС.Мат I				6	6	II
МУИС.Мат II	8			6	14	I
МУИС.Мат III						
МУИС.Мат IV						

1. $a_{ij} = \begin{cases} 1 \in Z_2, & \text{хэрэв } i\text{-р хүү } j\text{-р охинтой бүжиглэсэн} \\ 0 \in Z_2, & \text{эсрэг тохиолдолд} \end{cases}$

$A = (a_{ij}) \in M_n(Z_2)$ -г авч үзье. $A_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, $A^i =$

$(a_{1i}, \dots, a_{ni})^T = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$ -ээр A матрицийг i -р мөр ба i -р ба-

ганыг тэмдэглэе. $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, $|I| = K$ нь бодлогын нөхцөлд өгөгдсөн хөвчүүдийн олонлог гэвэл $\sum_{i \in I} A_i = (0, \dots, 0)$

буюу A -ийн мөрүүд шугаман хамааралтай болох тул матрицийн рангийн тухай үндсэн теорем ёсоор A -ийн баганууд ч бас шугаман хамааралтай байх ёстой буюу $\exists J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\sum_{j \in J} A^j = (0, \dots, 0)^T = \begin{pmatrix} \sum_j a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_j a_{nj} \end{pmatrix} \text{ болно. Эндээс } J \text{ нь бидний}$$

олбол зохих охидын олонлог гэдэг нь харагдаж байна.

2. $G \times K \rightarrow K$ буулгалтыг $g, x \in G \times K \rightarrow g * x =^g g \times g^{-1} \in K$ гэж тодорхойлбол энэ нь G бүлгийн K олонлог дээрх үйлчлэлийг өгнө. $(e, x) \rightarrow x^e = x$, $(g_1 g_2) * x = g_1 * (g_2 * x)$. G_x орбитыг $G_x = x^G = \{x^g | g \in G\}$ гэж тэмдэглэе. $K = \bigcup_{i \in I} x_i^G, x_i^G$

үл огтлолцох орбитууд болох тул $e^G = \{e\}$ гэдгийг анхаарвал

$$|K| = \sum_{i \in I} |x_i^G| = 1 + |x_2^G| + \dots + |x_m^G| \cdot |s^G| = |G_s| = (G : G_s) |K| = p^n \quad (1)$$

энд $G_s = \{g \in G | g * s = s\}$ стационар дэд бүлэг байдгийг анхаарвал (1)-ээс $\exists i \geq 2, |x_i^G| = 1 \rightarrow x_i \in Z(G), x_i \in K$.

3. $y \in A$ ба $y^2 = 0$ бол $y^{2^{k(y)}+1} = 0 = y$. $x \in A$ байг. $x^{2^k+1} = x$ гэдгээс

$$(x^{2^{k-1}+1} - x)^2 = x^{2^k+2} + x^2 = x(x^{2^k+1} + x) = x \cdot 0 = 0$$

буюу $x^{2^{k-1}+1} = x$. Ийм маягаар K -г багасгасаар $K = 0$ гэж үзэж чадна. Тэгвэл $x^2 = x$ болно.

4. $N_0^\infty = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_m, \dots) = (x_i) | x_i \in N_0\} = \{f | f : N \rightarrow N_0\}$ гэсэн декартын үржвэр дээр $(f + g)(m) = f(m) + g(m)$ буюу $X + Y = (x_m + y_m)$ гэж + үйлдлийг тодорхойлбол $(N_0^\infty, +)$ нь хагас бүлэг болно. $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$ гэж анхны тоонуудыг дугаарлая. $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ бол $\varphi(n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_s, 0, \dots) \in N_0^\infty$ гэж $\varphi : N \rightarrow N_0^\infty$ буулгалтыг тодорхойлбол $\varphi(nm) = \varphi(n) + \varphi(m)$ байх болно, φ инъектив буулгалт болох нь илэрхий буюу $\varphi : (N, \cdot) \rightarrow (N_0^\infty, +)$ гэсэн багтаалтыг өглөө.