

МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАДЫН ЦУВРАЛ
№22

**МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН
XXXIV ОЛИМПИАД**

УЛААНБААТАР ХОТ, 1999 ОН

Өмнөх үг

Улсын болон Олон улсын математикийн олимпиадад бэлтгэгчид, математикийн төрөлжсөн сургалттай ангийн сурагч, оюутан, багш нар, математик сонирхогч өргөн олонд зориулсан цувралын ээлжит дугаар уншигч Таны гар дээр очиж байна. Тус гарын авлагыг бэлтгэхэд ММОЗБ Хорооны гишүүд, МУИС-ийн математикийн ангийн оюутнууд идэвхтэй оролцлоо.

Уг номын талаархи аливаа санал хүсэлтээ МУИС-ийн Алгебр-Геометрийн тэнхимд ирүүлнэ үү.

Монголын Математикийн XXXIV олимпиад

Редактор Цэрэндоржийн Дашдорж

Хэвлэлийн эхийг бэлтгэсэн Цэрэндоржийн Навчаа

"Ё-ЭС-БИ" ХХК-д 1999 оны 4-р сард 2000 хувь хэвлэв.

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН XXXIV ОЛИМПИАДЫН ДҮНГИЙН ТУХАЙ ИЛТГЭЛЭЭС

Ц.Дашдорж

Хүндэт математикчидаа!

Хөвсгөл аймгийн засаг дарга ноён Л.Батсууриа!

Эрдэм ухаанд гүн шүтлэгтэй Хөвсгөлчүүдээ!

Монголын Математикийн 34-р Олимпиад 1998.05.01-нээс 05.07-ны өдрүүдэд Хөвсгөл аймгийн төв Мөрөн хотод амжилттай явагдаж дүнгээ гаргаж байна. Энэ удаагийн олимпиадад 21 аймаг, Улаанбаатар хотын 23 багийн бага, дундын 78 багш, 139 сурагчид оролцон нийт 217 хүн оюун ухаанаа сорин уралдлаа. Энэхүү олимпиадыг зохион байгуулахад санаачилга, хүч чармайлт гарган бүх нөхцөл бололцоогоор хангаж өгсөн Хөвсгөл аймгийн засаг дарга Л.Батсуурь, Б.Содномдорж захиралтай Улсын тэргүүний 10 жилийн сургуулийн хамт олон, Боловсролын соёлын төвийн ажилтан С.Мөнхжаргал, Улсын Гавьяат багш Ж.Нямжав, УИХ-ын гишүүн Д.Цогбадрах, Р.Одонбаатар, Д.Бохьшарга, Э.Бат-Үүл нарын гавьяа зүтгэлийг дурьдах нь зүйтэй гэж үзэж байна. Мөн олимпиадад өөрсдийн хувь хандивыг оруулсан Говь хувьцаат компани, Хөвсгөл Геологи ХК, Хөвсгөл Гурил тэжээл ХК, Хөвсгөл аймгийн 29 сургууль, ХАА-н төв банк, Хөвсгөл дэх ХАА-н салбар ХОТШ банк, Сэргээн босголт банк, Хөвсгөл Хүнс ХК, Эрх чөлөө сонины редакц, Аймгийн Залуучуудын Холбоо (дарга нь Б.Батхүү) зэрэг байгууллагууд, ШУА-ын э.ш.а Д.Орлох, бизнес эрхлэгч Б.Гүнджалам, Монгол улсын Засгийн газрын гишүүн Л.Зориг, ЭМНХЯ-ны ажилтан Д.Бямбаа, НҮБ-ын хүн амын сангийн үндэсний мэргэжилтэн Б.Баярмаа, АНУ-ын ЭСЯ-ны ажилтан Б.Бямбадалай, аймгийн МАХН-ын дэд дарга Г.Төмөрбаатар,

Б.Баатар-Очир, Б.Даваадорж, МГСС-ийн хичээлийн эрхлэгч Л.Чимэд-Аюуш, 1-р сургуулийн хичээлийн эрхлэгч Ц.Баярсайхан, багш С.Батсүх, Мөрөн сумын 2,3,4-р сургуулийн захирал Ш.Баатарчулуун, Д.Цогтоо, Д.Жүгдэр, БСТ-ийн арга зүйч Б.Баясгалан, Хатгал тосгоны захирагч Тогтохням нарт ММОХорооны нэрийн өмнөөс баяр хүргэе. Хөвсгөл аймгийн М.Галбадрах даргатай олимпиадын комисст монголын нийт математикчидын нэрийн өмнөөс талархал илэрхийлье.

Олимпиадад 8-р ангийн 57 сурагч уралдсанаас УБ хотын I сургуулийн сурагч А.Амарсанаа (багш нь Д.Нарангэрэл) 22 оноогоор I байр эзэлж, УМ 34-р Олимпиадын 8-р ангийн аврага боллоо. II байранд УБ хотын XI сургуулийн сурагч А.Амаржаргал (багш нь А.Энхжаргал), Б.Тамир (багш нь Батхуяг) нар адилхан 21 оноо, УБ хотын I сургуулийн Х.Зоригт 15 оноо, Т.Баасанжав 15 оноо (багш нь Д.Нарангэрэл), мөн сургуулийн Э.Цэрэннадмид 14 оноогоор III байранд орлоо.

9-р ангийн 40 сурагч оролцсоноос УБ. XI сургуулийн сурагч Б.Лхавга-Очир (багш нь Л.Эрдэнэсүвд) 16.5 оноогоор I байр эзэлж УМ 34-р Олимпиадын 9-р ангийн аврага боллоо. Дорнот аймгийн У.Наранхүү, УБ I сургуулийн Ч.Энхчулуун нар 15 оноогоор II байранд, Хөвсгөл аймгийн Ганболд 14 оноо, УБ I сургуулийн Б.Сансар (багш нь Л.Эрдэнэсүвд) 14 оноо, мөн сургуулийн Л.Хатанбаатар (багш нь Л.Эрдэнэсүвд) 13 оноогоор 3-р байранд орлоо.

10-р ангийн 42 сурагч оролцсоноос ОУМ 38-р Олимпиадын алтан медальт УБ I сургуулийн сурагч Ө.Баттулга 36 оноогоор I байр эзэлж, УМ 34-р Олимпиадын 10-р ангийн аврага боллоо. Хөвсгөл аймгийн Т.Билэгбаатар (багш нь Ж.Батболд) 30 оноо, УБ I сургуулийн 9-р ангийн сурагч Ж.Эрдэмбилэгт (багш нь Л.Эрдэнэсүвд) 24 оноогоор 2-р байранд, УБ I сургуулийн Б.Дэмчигсүрэн 22 оноо,

МУИС-ын дэргэдэх Монгол-Туркийн сургуулийн сурагч Г.Насанбуян (багш нь Ж.Батболд) 21 оноо, УБ XI сургуулийн сурагч Б.Баттулга 17.5 оноогоор III байранд орлоо.

Багш нарын Олимпиадыг бага, дунд гэсэн 2 ангилалтай явуулсны дотроос бага ангийн 26 багш уралдсанаас Говьсүмбэр аймгийн М.Отгонжаргал 28 оноогоор I байр эзэлж, МУ 34-р Олимпиадын бага ангийн аврага тоочин багшаар шалгарлаа. Увс аймгийн Ж.Энхцэцэг 19.5 оноогоор II байранд, УБ 32-р сургуулийн П.Чимэг 18 оноогоор III байранд орлоо.

Олимпиадад дунд ангийн 52 багш уралдсанаас УБ 32-р сургуулийн багш Б.Баяржаргал 16.5 оноогоор I байр эзэлж, МУ 34-р Олимпиадын дунд ангийн аврага математикч багшаар шалгарлаа. УБ 32-р сургуулийн багш Д.Батнасан 14 оноогоор II байранд, Хөвсгөл аймгийн Чандмань-Өндөр сумын сургуулийн багш Баярдалай 12.5 оноогоор III байранд орлоо.

Улсын Математикийн 34-р Олимпиадад амжилттай оролцсон дээрх нэр бүхий сурагчид, багш нар, тэднийг бэлтгэсэн сургуулийн багш нарт нь Олимпиадыг Зохион Байгуулах Хорооны нэрийн өмнөөс чин сэтгэлийн талархал илэрхийлье.

П.Энхболдын нэрэмжит уран бодолтын шагналыг УБ хотын 32-р сургуулийн багш Б.Баяржаргал, Д.Батнасан нар хүртлээ.

Олимпиадад оролцсон нийт 23 багаас Ганбилэг ахлагчтай Хөвсгөл аймгийн баг I байр, Даваадорж ахлагчтай УБ хотын баг II байр, Бат-Орших ахлагчтай Увс аймгийн баг III байр, Адьяасүрэн ахлагчтай "Олонлог" баг IV байр, Эрдэнэбилэг ахлагчтай Өвөрхангай аймгийн баг V байранд орлоо. Хөвсгөлийн баг 3 дахь удаагаа түрүүлж дархан аврага боллоо.

Багуудын уламжлалт халз тэмцээнд XI сургуулийн баг

I байранд, Хөвсгөлийн баг II байранд, "Комисс" баг III байранд орлоо.

34-р Олимпиадын үнэмлэхүй аврагаар УБ I сургуулийн 10-р ангийн сурагч Ө.Баттулга шалгарлаа.

Манай энэ удаагийн Олимпиадыг амжилттай явуулахад бүх талын бололцоо нөхцлөөр хангаж өгсөн Хөвсгөлчүүддээ Монголын нийт математикчидын нэрийн өмнөөс гүн талархал илэрхийлье.

Энэ жилийн 7-р сард Тайваньд болох ОУМ 39-р Олимпиадын бэлтгэлд 10-р ангийн сурагч Ө.Баттулга, Билэгбаатар, Эрдэмбилэгт, Дэмчигсүрэн, Насанбуян, Б.Баттулга, 9-р ангийн сурагч Лхавга-Очир нарыг оруулахаар боллоо.

Хэнтий аймаг 2 дахь удаагаа Улсын Математикийн Олимпиадад сурагчдаа оруулсангүй, тэндээс 2 хүүхэд л хувийн зардлаар оролцлоо. Хэнтий аймгийн Боловсрол Соёлын төвийн захирал Ц.Энхтүвшин өөрөө математикч багш хүн байж, ард түмний үр хүүхдийн төлөө ийм ухамсаргүй, санаачилгагүй ажиллаж байгаагаараа нийт Хэнтийчүүдийн боловсролын хөгжил дэвшилд багагүй саад учруулж байгаа юм.

Мөн Төв аймаг энэ жилийн Олимпиадын III давааны сэдвийг 3 хоногийн өмнө задалж (Боловсролын төвийн захирал Гончигсүрэн), манай олимпиадын түүхэнд гарч байгаагүй зохисгүй үйлдэл хийж ихээхэн чирэгдэл учрууллаа.

Монголын Математикийн 34-р Олимпиадыг өндөр түвшинд зохион байгуулснаараа Хөвсгөлчүүд манай боловсролын хөгжилд, тэр дундаа математик боловсролд чухал хувь нэмэр орууллаа гэдгийг онцлон тэмдэглэе.

Эрдэм оюун дэлгэрч Монголд математикчидын оюун ухаан улам хөгжин бадрах болтугай.

АЙМГИЙН МАТЕМАТИКЧИД БАЯРТАЙ БАЙНА

Бидний төрөлх нутаг үүлэн цэнхэр хангай Хөвсгөл аймагт ММО-34 явагдахад бүх талын туслалцаа дэмжлэг үзүүлсэн аймгийн Засаг дарга Л.Батсуурь, Аймгийн ЗДТГ-ынханд, дэд проф. Ц.Дашдорж тэргүүтэй ММО-ыг зохион байгуулах хорооныхон, энэ ажлыг зохион явуулах бүх санаачлагыг эхнээс нь аваад эцэст нь хүртэл гартаа авч сайн зохион байгуулсан Аймгийн Боловсрол Соёлын төвийн арга зүйч С.Мөнхжаргал, түүнд тусалж, ажил төрлийг нь дэмжиж ажилласан Улсын тэргүүний I сургуулийн захирал Б.Содномдорж, ХОТШ банкны ерөнхий ня-бо Б.Нямдорж, Матматикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай сургуулийн хичээлийн эрхлэгч Л.Чимэд-Аюуш, 2,3-р сургуулийн захирал Ш.Баатарчулуун, Д.Цогтоо нарт аймгийнхаа нийт математикчидын өмнөөс баяр хүргэж цаашдын ажилд нь улам өндөр амжилт хүсье.

"ММО-34" бэлтгэл зохион байгуулалтын хувьд ч, багийн бэлтгэлийн хувьд ч сайн болсныг ММОХороо өндөрөөр үнэлж энэхүү нэр хүндтэй ажилд биечлэн тусалж ажилласан Улсын тэргүүний I сургуулийн захирал Б.Содномдоржийг олон улсын олимпиадын Монголын багийн бүрэлдэхүүнд орж явах эрхийг олгож, 1999, 2000, 2001 онуудад Сөүл, Румын, АНУ-д болох олимпиадуудаас сонголт хийлгэж 2001 оны АНУ-д болох олон улсын олимпиадын Монголын багийн орлогчоор томилсон ба Боловсрол Соёлын төвийн арга зүйч С.Мөнхжаргалыг ММОХорооны бүрэлдэхүүнд оруулсанд бид бүхэн баяртай байна. Хөвсгөлийн Математикчдын Холбоо /ХМХ/ Математикийн олимпиадын 2-ын даваа үеэр өнгөрсөн жилийнхээ ажлыг дүгнэн, ХМХ-ны "Оны тэргүүн" шалгаруулж байх журам боловсруулж оны тэргүүнүүдээ тодрууллаа.

"Оны тэргүүн" хувь хүнээр 1998 оны олон улсын олимпиадын хүрэл медаль хүртэж төрөлх Монголынхоо, Хөвсгөлийнхөө ард түмнийг, математикчдаа баярлуулсан Т.Билэгбаатар, хандивлагч хувь хүнээр Монголын математикийн олимпиад Хөвсгөл аймагт явуулахад Засгийн газрын нөөцөөс 3 сая 70 мянган төгрөгийн хөрөнгө оруулалт хийсэн УИХ-ын гишүүн Д.Цогбадрах, хандивлагч аж ахуйн нэгжээр 2 сая төгрөгийн хандив оруулсан Ц.Сэдавчиг захиралтай "Говь" компанийг тус тус шалгаруулаа.

Хөвсгөл Математикчдын Холбоо

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН XXXIV ОЛИМПИАДЫН VII АНГИЙН III ДАВААНЫ БОДЛОГО

Б.Сандагдорж
Л.Даваажаргал

VII-A1. Сөрөг биш бүхэл тоон хосуудыг дарааахь байдлаар дэс дараалан бичиж тэдгээрийг дугаарлая. Үүнд:
(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (0, 2), (2, 0), (1, 2), (2, 1),
(2, 2), (0, 3), (3, 0), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3),
(0, 4), ... гэх мэт, өөрөөр хэлбэл $C(0, 0) = 1$, $C(0, 1) = 2$, $C(1, 0) = 3$, ..., $C(2, 1) = 8$, Тэгвэл а) $C(34, 34)$ -ыг ол, б) 1998 дугаартай хосыг ол.

VII-A2. Дөрвөн өнцөгтийн диагоналиудыг татахад үүсэх дөрвөн гурвалжны периметрууд тэнцүү бол уг дөрвөн өнцөгт ромбо болохыг батал.

VII-A3. Хэрэв a, b, c нь $a + b + c = 1$ байх эерэг тоонууд бол $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}$ тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

VII-B1. Дурын сондгой a, b, c гэсэн бүхэл тоонуудын хувьд $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тэгшитгэл рациональ язгуургүйг батал.

VII-B2. $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн хувьд $\angle CAB = 40^\circ$, $\angle ACB = 70^\circ$, $\angle ADB = 35^\circ$, $\angle CDB = 20^\circ$ бол дөрвөн өнцөгтийн диагоналиудын хоорондох өнцгийг ол.

VII-B3. $\overline{abc}$ нь анхны тоо бол $b^2 - 4ac$ тоо нь гүйцэт квадрат биш гэдгийг батал.

Хянан боловсруулсан Б.Сандагдорж, Л.Даваажаргал

ММО-34, Олимпиадын багийн дүн

№	Аймаг, улсын нэрс	Сурагчид			Багш		Нийт оноо	Оролцогчдын тоо	Дундаж оноо	Байр
		VIII	IX	X	Бага	Дунд				
1.	Архангай	14	0	2	0	0.5	16.5	5	3.3	XIII-XIV
2.	Баян-Өлгий	-	1	0	8	7	16	4	4.0	XI
3.	Баянхонгор	8	0	7	0	1.5	16.5	5	3.3	XIII-XIV
4.	Булган	1	0	1	0	9	11	5	2.2	XV-XVI
5.	Говь-Алтай	0	0	0.5	-	1	1.5	4	0.4	XXII
6.	Говьсүмбэр	1	0	1	1	4	7	5	1.4	XIX
7.	Дархан-Уул	2	0	7	0	11.5	20.5	5	4.1	X
8.	Дорноговь	7	1	14	4	0	26	5	5.2	VIII-IX
9.	Дорнод	0	15	0	3	8	26	5	5.2	VII-IX
10.	Дундговь	-	0	17	-	7	24	4	6.0	VII
11.	Завхан	0	0	7	3	7	17	5	3.4	XII
12.	Орхон	3.5	1	7	14	9	34.5	5	6.9	VI
13.	Өвөрхангай	20	-	12	7.5	0.5	40	5	8.0	V
14.	Өмнөговь	0	-	0	-	0.5	0.5	3	0.2	XIII
15.	Сүхбаатар	0	0	0	1	7	8	5	1.6	XVIII
16.	Сэлэнгэ	0	0	0.5	1	7	8.5	5	1.7	XVII
17.	Төв	1	0	0	1	9	11	5	2.2	XV-XVI
18.	Увс	3	1	15	19.5	10.5	49	5	9.8	III
19.	Ховд	2	0	2.5	0	0.5	5	5	1.0	XX
20.	Хөвсгөл	14	14	30	11.5	12.5	82	5	16.4	I
21.	Хэнтий	-	0	1	-	-	1	2	0.5	XXI
22.	Улаанбаатар	144.5	70	143	42	49	448.5	39	11.5	II
23.	Олонгол	14.5	15.5	15	-	-	45	5	9.0	IV

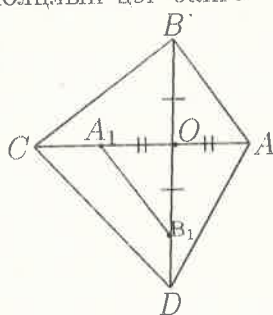
VII-A1.

$(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (0, 2), (2, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 2), \dots$

$\underbrace{(0, 0)}_1, \underbrace{(0, 1), (1, 0)}_3, \underbrace{(1, 1), (0, 2), (2, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 2)}_5, \dots$
гэх мэт. $\max\{a, b\} = n$ байх (a, b) хосын нийт тоо $2n + 1$ байна. Иймд $\max\{a, b\} = n$ байх (a, b) хосын хамгийн сүүлчийн хос болох (n, n) -ийн дугаар $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$ байна. Тэгэхээр $(34, 34)$ хосын дугаар $C(34, 34) = 35^2 = 1225$ болно. Энэ тооцоог хийвэл $C(43, 43) = 44^2 = 1936$ ба $1998 = 1936 + 62$ учир $(44, 30)$ хосын дугаар нь 1998 болох буюу $1998 = C(44, 30)$ байна.

Бүр ерөнхий тохиолдолд дурын (x, y) хосын номер нь $x \geq y$ үед $1 + 3 + \dots + (2x - 1) + 2(y + 1) = x^2 + 2y + 2$, харин $x < y$ үед $1 + 3 + \dots + (2y - 1) + 2(x + 1) - 1 = y^2 + 2x + 1$ байна гэдэг нь хялбар харагдана.

VII-A2. Эхлээд өгөгдсөн дөрвөн өнцөгт диагоналиудынхаа огтлолцлын цэгээрээ хагаслан хуваагддаг, ө.х дөрвөн өнцөгтийг параллелограмм байна гэдгийг батлая. $ABCD$ өгөгдсөн дөрвөн өнцөгт, O диагоналиудын огтлолцлын цэг байг.



Тэгээд $|OB| < |OD|$, $|OA| \leq |OC|$ гэж үзье. OAB гурвалжны O цэгийн хувьд симметр OA_1B_1 гурвалжныг байгуулъя. Тэгэхээр OAB ба OA_1B_1 гурвалжнуудын периметрууд тэнцүү болох ба нөгөө талаас OA_1B_1 гурвалжин нь OCD гурвалжинд багтах юм. Гэтэл OAB ба OCD гурвалжнуудын периметрууд тэнцүү гэж өгсөн тул O цэг

диагоналиудын дундаж цэг байх буюу $ABCD$ дөрвөн өнцөгт параллелограмм болно. Мөн OAB ба OBC гурвалжнуудын периметрууд тэнцүү гэдгээс $AB = BC$ болох бөгөөд $ABCD$ ромбо болж батлагдав.

VII-A3. Коши-Буняковскийн тэнцэтгэл бишийг бич-

вэл $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{1}{3}\left(a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2$ болно. Нөгөө талаас

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

гэсэн арифметик, геометр, гармоник дундажуудын чанараар $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$ тэнцэтгэл биелнэ. Тэгэхээр манай бодлогын нөхцлөөр $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$ болох ба дээрх тэнцэтгэлд орлуулбал $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{1}{3}(1 + 9)^2 = \frac{100}{3}$ болж батлагдана.

VII-B1. a, b, c нь сондгой бүхэл тоонууд гэсэн учир $a = 2n + 1$, $b = 2k + 1$, $c = 2m + 1$ гэж бичиж болно. Өгөгдсөн квадрат тэгшитгэлийн дискриминантыг нь олбол $D = (2k + 1)^2 - 4(2n + 1)(2m + 1) = 4k^2 + 4k + 1 - 16nm - 8(n + m) - 4 = 4k(k + 1) - 16nm - 8(m + n + 1) + 5$ болох ба бүхэл тооны квадратыг 8-д хуваахад 5 үлдэгдэл өгдөггүй тул D нь бүхэл тооны квадрат биш. Иймд уг квадрат тэгшитгэл рациональ язгуургүй.

VII-B2. Энэ бодлого Улсын Математикийн 27-р Олимпиадын VII ангийн III давааны бодлого тул цувралаас бодолтыг үз.

VII-B3. Эсрэгээс нь $b^2 - 4ac = d^2$ гэе (d сөрөг биш бүхэл тоо). $a > 0$, $c > 0$ учир $d < b$ байна. $4a \cdot \overline{abc} = 4a(100a + 10b + c) = 400a^2 + 40ab + 4ac = (20a + b)^2 - (b^2 - 4ac) = (20a + b)^2 - d^2 = (20a + b - d)(20a + b + d)$ ба $\overline{abc}$ анхны тоо учир $20a + b - d$, $20a + b + d$ тоонуудын нэгний нь хуваагч байна. Нөгөө талаас $20a + b + d < 100a + b + b < 100a + 10b + c = \overline{abc}$ мөн $20a + b - d < \overline{abc}$ учир энэ нь зөрчилд хүрч бодлого бодогдов.

ММО-34, VIII АНГИЙН III ДАВАА

Б.Чулуундорж
Н.Баянбат

VIII-A1. $0 \neq a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ бол

$$\frac{2a_1^2}{a_2^2 + a_3^2} + \frac{2a_2^2}{a_1^2 + a_3^2} + \frac{2a_3^2}{a_1^2 + a_2^2} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

биелэхийг батал.

VIII-A2. N олонлогийн аливаа төгсгөлгүй дэд олонлог авахад ямар нэг 2 тоо нь холбогдсон байхаар натурал тоонуудын заримыг нь хооронд нь холбожээ. Дараалсан хоёр гишүүн бүр нь холбогдсон байх $\{a_i\}_{i \in N}$ монотон дараалал олдоно гэж батал.

VIII-A3. $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн диагоналиуд нь перпендикуляр бөгөөд тэнцүү. Хэрэв $AB = 1$, $BC = \sqrt{2}$, $CD = \sqrt{3}$ бол дөрвөн өнцөгтийн өнцгүүдийг ол.

VIII-B1. a_0, d нь өгөгдсөн натурал тоонууд ба $s(a)$ нь a тооны цифрүүдийн нийлбэр бол

1. $a_{n+1} = a_n + d_n, \quad 0 < d_n \leq d, \quad d_n \in N$

2. $s(a_{n+1}) \neq s(a_i) \quad i = \overline{1, n}$ нөхцлүүдийг хангадаг натурал тоон дараалал $\{a_n\}$ төгсгөлөг болохыг батал.

VIII-B2. $1, 2, \dots, m-1$ тоонуудыг зэргэлдээ хэдэн ч тоонуудын нийлбэр m -д хуваагддаггүй байхаар зэрэгцүүлэн бичиж болох бүх m -г ол.

VIII-B3. R_1 ба R_2 радиустай тойргууд гадаад байдлаар шүргэлцжээ. Эдгээр тойргуудын гадаад ерөнхий шүргэгч ба өгөгдсөн тойргуудыг шүргэх R_3 радиустай тойргийн хувьд $\frac{1}{\sqrt{R_3}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}$ болохыг батал.

Хянан боловсруулсан Б.Сандагдорж, Хоролдавга

VIII-A1. Дээрх тэнцэтгэл бишийг хувиргавал

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \left(\frac{2a_1^2}{a_2^2 + a_3^2} + \frac{2a_2^2}{a_1^2 + a_3^2} + \frac{2a_3^2}{a_1^2 + a_2^2} \right) \geq (a_1 + a_2 + a_3)^2$$

болно.

$$A = ((a_2^2 + a_3^2) + (a_1^2 + a_3^2) + (a_1^2 + a_2^2)) \left(\frac{a_1^2}{a_2^2 + a_3^2} + \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_3^2} + \frac{a_3^2}{a_1^2 + a_2^2} \right)$$

гэсэн илэрхийлэлд Коши-Буняковскийн тэнцэтгэл биш хэрэглэвэл: (энд $a_2^2 + a_3^2 \neq 0$, $a_1^2 + a_3^2 \neq 0$, $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$)

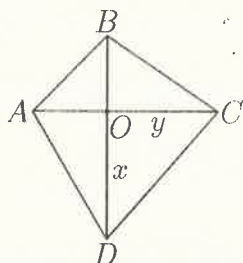
$$A \geq \left(\sqrt{a_2^2 + a_3^2} \cdot \frac{a_1}{\sqrt{a_2^2 + a_3^2}} + \sqrt{a_1^2 + a_3^2} \cdot \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_3^2}} + \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \right)^2 = (a_1 + a_2 + a_3)^2$$

буюу $A \geq (a_1 + a_2 + a_3)^2$ болж батлагдав.

VIII-A2. Тийм дараалал олддоггүй гэвэл ямар ч холбоост элементүүдийн дараалал төгсгөлөг байна. $a_{11} < a_{12} < \dots < a_{1n_1}$ нь тийм нэг төгсгөлөг дараалал байг. $a_{1n_1} < a_{21}$ байх дурын a_{21} -ийг авахад мөн $a_{21} < a_{22} < \dots < a_{2n_2}$ гэсэн холбоост элементүүдийн төгсгөлөг дараалал олдоно гэх мэт. (1) $a_{k1} < \dots < a_{kn_k}, \dots$ төгсгөлгүй

олон төгсгөлөг дараалал олдоно, энд (1) нь a_{k1} -ээр эхэлсэн хамгийн урт дараалал юм. Тэгвэл $a_{1n_1}, a_{2n_2}, \dots, a_{kn_k}, \dots$ төгсгөлгүй дараалалд холбоост элемент байхгүй болоход хүрч бодлогын нөхцөлд харшилна.

VIII-A3. $AC \cap BD = O, AC = BD = a, OD = x,$



$OC = y$ гээ. Тэгвэл $OB = a - x,$
 $AO = a - y$ болно. $\triangle DOC, \triangle COB,$
 $\triangle AOB$ хувьд пифагорын теорем
 бичвэл

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 3 \\ y^2 + (a - x)^2 &= 2 \\ (a - x)^2 + (a - y)^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 3 \\ y^2 + x^2 + a^2 - 2ax &= 2 \\ (a - x)^2 + y^2 + a^2 - 2ay &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} a^2 - 2ax + 3 &= 2 \\ 2 + a^2 - 2ay &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} a^2 - 2ax &= -1 \\ a^2 - 2ay &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2a(y - x) = 0 \Rightarrow a \neq 0 \text{ тул } y = x \text{ болно.}$$

Үүнийг (1)-д орлуулбал $x = y = \sqrt{\frac{3}{2}}$ гарна. $a^2 - 2ax = -1$ -
 д x -г орлуулбал $a = \sqrt{\frac{3}{2}} \pm \sqrt{\frac{3}{2} - 1}, \quad a > x = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow$

$$a = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow AO = BO = a - x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\triangle DOC$ хувьд $x = y \Rightarrow \angle ODC = \angle OCD = 45^\circ,$

$\triangle BOC$ хувьд $BO = \frac{1}{\sqrt{2}}, OC = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle OCB = 30^\circ$ тул
 $\angle OBC = 60^\circ$

$$\angle A = \angle B = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$$

$$\angle C = \angle D = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ \quad \text{байна.}$$

VIII-B1: (1) нөхцлөөс $\{a_n\}$ дараалал нь эрс өсдөг тоон дараалал гэдэг нь харагдана. Эсрэгээс нь (2) нөхцөл биелэгдэж байх $\{a_n\}$ төгсгөлгүй тоон дарааллыг байгуулж болдог гэж үзье. Өгөгдсөн d тооны оронгийн тоог ℓ гээ.

a_0 өгөгдсөн тоо тул $a_0 < 10^k$, $k > \ell$ нөхцлүүдийг хангах $k \in \mathbb{N}$ тоо олдоно гэдэг нь ойлгомжтой.

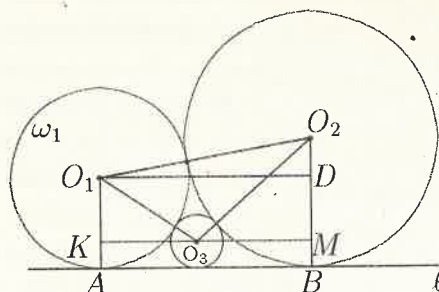
$\{a_n\}$ нь эрс өсдөг тоон дараалал тул $[10^k, 10^k + d]$ хэрчимд уг дарааллын ядаж нэг гишүүн заавал харьяалагдана. Энэхүү гишүүний цифрүүдийн нийлбэр нь $9\ell + 1$ -ээс үл хэтрэх бөгөөд эсрэгээс нь үзсэн ёсоор дарааллын урьд байгуулагдсан гишүүдийн цифрүүдийн нийлбэрээс ялгаатай байна. Мөн үүнтэй адилаар

$$[10^{k+1}, 10^{k+1} + d], [10^{k+2}, 10^{k+2} + d], \dots, [10^{k+9\ell}, 10^{k+9\ell} + d]$$

тоон завсруудад уг дарааллын ядаж нэг гишүүн орох (эрс өсдөг дараалал тул) бөгөөд эсрэгээс нь үзсэн ёсоор эдгээр бүх гишүүдийн цифрүүдийн нийлбэрүүд ялгаатай байна. Гэтэл $[10^{k+9\ell+1}, 10^{k+9\ell+1} + d]$ тоон завсарт уг дарааллаас заавал 1 гишүүн орох бөгөөд энэхүү гишүүний цифрүүдийн нийлбэр нь урьдах бүх гишүүдийн цифрүүдийн нийлбэрээс ялгаатай гэдэг нь зөрчлийг өгнө. Учир нь ялгаатай цифрүүдийн нийлбэрийн тоо $9\ell + 1$, харин бид $9\ell + 2$ ширхэг гишүүнийг авч үзсэн билээ. Иймд уг дараалал төгсгөлөг гэдэг нь батлагдав.

VIII-B2. $1 + 2 + \dots + m - 1 = \frac{m(m-1)}{2}$ тул m тэгш байж болохгүй нь илэрхий. Иймд m сондгой, ө.х $m = 2n - 1$ байна. Тэгвэл $1, 3, \dots, 2n - 1$ тоонуудын дараалсан хоёр болгоны хоорондуур $2n, 2n - 2, \dots, 2$ гэсэн тоонуудыг оруулъя, ө.х $1, 2n, 3, 2n - 2, \dots, 2n - 1, 2$ байдлаар байрлуулбал бодлогын нөхцлийг хангана гэдгийг хялбар баталж болно.

VIII-B3. $(O_1, R_1) = \omega_1, (O_2, R_2) = \omega_2; \omega_1, \omega_2$ шүргэлцсэн, ℓ ерөнхий шүргэгч.



ω_3 нь ℓ -г шүргэсэн ба ω_1, ω_2 -той гадаад шүргэлцсэн бол

$$\frac{1}{\sqrt{R_3}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}$$

гэж баталъя. Хоёр тойрог шүргэлцсэн бол төвийг холбосон хэрчим дээр шүргэлтийн цэг оршдог. $O_1O_2 = R_1 + R_2$, $O_1O_3 = R_1 + R_3$. Бид $R_1 < R_2$ гэж үзье. $\omega_1 \cap \ell = A$, $\omega_2 \cap \ell = B$ гэе. O_1 -оос O_2B -д O_1D , O_3 -оос O_2B -д O_3M , O_3 -оос O_1A -д O_3K перпендикулярууд татъя. Тэгвэл энд O_1DMK тэгш өнцөгт үүсэх тул $O_1D = KO_3 + O_3M$ болно. Нөгөө талаар

$$\left. \begin{array}{l} \Delta O_1DO_2 \text{ хувьд } O_1D = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2D^2} \\ \Delta O_3KO_1 \text{ хувьд } KO_3 = \sqrt{O_1O_3^2 - O_1K^2} \\ \Delta O_3MO_2 \text{ хувьд } MO_3 = \sqrt{O_2O_3^2 - O_2M^2} \end{array} \right\}$$

$O_2D = (R_2 - R_1)$, $O_1K = R_1 - R_3$, $O_2M = R_2 - R_3$ гэдгийг ашиглавал

$$\begin{aligned} & \sqrt{(R_1 + R_2)^2 - (R_2 - R_1)^2} = \\ & = \sqrt{(R_1 + R_3)^2 - (R_1 - R_3)^2} + \sqrt{(R_2 + R_3)^2 - (R_2 - R_3)^2} \text{ болох бөгөөд эмхэтгэвэл } \sqrt{4R_1R_2} = \sqrt{4R_1R_3} + \sqrt{4R_2R_3} \text{ болно.} \end{aligned}$$

2 талыг нь $\sqrt{4R_1R_2R_3}$ -д гишүүнчлэн хуваавал

$$\sqrt{\frac{1}{R_3}} = \sqrt{\frac{1}{R_2}} + \sqrt{\frac{1}{R_1}} \text{ болж батлагдана.}$$

ММО-34, VIII АНГИЙН IV ДАВАА

Д.Нямсүрэн

Б.Түмэндэмбэрэл

VIII-A1(О.Чулуунбаатар). $x^3 - 5x^2 + 1 = 0$ тэгшитгэлийн хамгийн их язгуурыг a гэвэл $[a^{1998}]$ -ийг 11-д хуваахад гарах үлдэгдлийг ол.

VIII-A2(Д.Нямсүрэн). $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн $AB \perp BD \perp DC$, $AB : BD : DC = 2 : 6 : 3$ бол $\angle ADB + \angle DBC = ?$

VIII-A3(Баярмагнай). Сурагч 1998 хоногийн турш өдөрт 1-ээс багагүй, аль ч дараалсан 9 хоногуудад 17-оос илүүгүй бодлого боджээ. Тэгвэл бодсон бодлогын тоо яг 34 байх дараалсан өдрүүд олдох уу?

VIII-B1(А.Хашбаатар). Хэрэв гурвалжны a, b талын эсрэг орших α, β өнцөг нь $2\alpha = 3\beta$ хамааралтай бол $(a^2 - b^2)ac = b^2c^2 - (a^2 - b^2)^2$ байдгийг батал.

VIII-B2(В.Адьяасүрэн).

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{300} + \left(\frac{1}{3}\right)^{299} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{298} \cdot \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{300} + \frac{1}{301} < \frac{1}{90}$$
 болохыг батал.

VIII-B3(Л.Оюунцэцэг). $x_1 = 1$, $x_2 = a - 1$ бол $x_{2n+1} = a \cdot x_{2n} + 1$, $x_{2n+2} = (a-1)(x_1 + x_2 + \dots + x_{2n+1})$ дарааллын ерөнхий гишүүний томьёог бич.

VIII-A1. $x^3 - 5x^2 + 1 = 0$ тэгшитгэлийн гурван язгуур $(-0.5, 0)$, $(0, 0.5)$, $(4, 5)$ завсарт байхыг хялбархан шалгаж болно. Язгуурыг x_1, x_2, a гээд $S_n = x_1^n + x_2^n + a^n$ гэж тэмдэглэе ($x_1 < x_2 < a$). $x_1^3 - 5x_1^2 + 1 = 0$, $x_2^3 - 5x_2^2 + 1 = 0$, $a^3 - 5a^2 + 1 = 0$ адилтгалууд биелэх тул эдгээр адилтгалуудыг харгалзан x_1^n, x_2^n, a^n -ээр үржүүлж хооронд нь нэмбэл: $S_{n+3} - 5S_{n+2} + S_n = 0$ (*) рекурент томьёонд хүрнэ $S_0 = 3$, $S_1 = 5$.

Виетийн теоремоор $x_1x_2 + x_1a + x_2a = 0$ тул $S_2 = x_1^2 + x_2^2 + a^2 = (x_1 + x_2 + a)^2 = 25$ байна. Нөгөө талаас $a^n = S_n - x_1^n - x_2^n$. Мөн (*) рекурент томьёоноос S_n бүхэл гэдэг нь харагдаж байна. Иймд $[a^n] = [S_n - x_1^n - x_2^n] = S_n + [-x_1^n - x_2^n]$ $x_1 + x_2 + a = 5$, $5 > a > 4$ гэдгээс $0 < x_1 + x_2 < 1$ болно.

x_1, x_2 язгуурын хувьд: $|x_1| + |x_2| < 0.5 + 0.5 = 1$ гарна. Иймээс $[-x_1^n - x_2^n] = -1$ гэдэг нь харагдлаа, ө.х $[a^n] = S_n - 1$ (*) рекурент томъёоноос 11 модулиар S_n -ийг олж.

$$S_0 \equiv 3(11)$$

$$S_7 \equiv 5 \cdot 6 - 0 \equiv 8(11)$$

$$S_1 \equiv 5(11)$$

$$S_8 \equiv 5 \cdot 8 - 8 \equiv 10(11)$$

$$S_2 \equiv 3(11)$$

$$S_9 \equiv 5 \cdot 10 - 6 \equiv 0(11)$$

$$S_3 \equiv 5 \cdot 3 - 3 \equiv 1(11)$$

$$S_{10} \equiv 5 \cdot 0 - 8 \equiv 3(11)$$

$$S_4 \equiv 5 \cdot 1 - 5 \equiv 0(11)$$

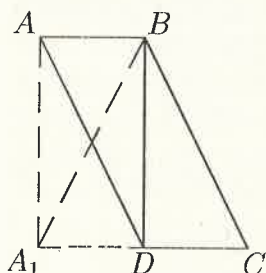
$$S_{11} \equiv 5 \cdot 3 - 10 \equiv 5(11)$$

$$S_5 \equiv 0 \cdot 5 - 3 \equiv 8(11)$$

$$S_{12} \equiv 5 \cdot 5 - 0 \equiv 3(11)$$

$$S_6 \equiv 5 \cdot 8 - 1 \equiv 6(11)$$

$$\dots\dots\dots$$



Эдгээрээс харахад S_0 -оос S_9 хүртэлх үлдэгдэл S_{10} -оос эхлэн дахин гарлаа. Үүнээс S_n -ийн үлдэгдэл 10 үетэй (S_0 -оос эхлэнэ). $1998 \equiv 8(10)$ буюу $S_{1998} \equiv S_8 \equiv 10(11) \Rightarrow [a^{1998}] = S_{1998} - 1 \equiv 10 - 1 \equiv 9(11)$ буюу $[a^{1998}] \equiv 9(11)$

VIII-A2. A цэгийн DC дээрх проекцийг A_1 гэвэл $\angle ADB = \angle A_1BD \Rightarrow \angle ADB + \angle DBC = \angle A_1BD + \angle DBC = \angle A_1BC$ болно. Тэгвэл

$$S_{A_1BC} = \frac{1}{2} \cdot A_1C \cdot BD = \frac{A_1B_1 \cdot BC \cdot \sin(\widehat{A_1BC})}{2}$$

$\Rightarrow \sin(\widehat{A_1BC}) = \frac{A_1C \cdot BD}{A_1B \cdot BC}$ болно. $BD = a$ гэвэл бодлогын нөхцөл ёсоор $AB = A_1D = \frac{a}{3}$, $DC = \frac{a}{2} \Rightarrow A_1C = \frac{a}{3} + \frac{a}{2} = \frac{5a}{6}$, $\triangle A_1DB$, $\triangle CDB$ тэгш өнцөгт гурвалжнууд учраас

$$A_1B = \sqrt{A_1D^2 + BD^2} = \sqrt{\frac{a^2}{9} + a^2} = \frac{\sqrt{10}a}{3},$$

$$BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}a}{2}$$

$$\text{учир } \sin(\widehat{A_1BC}) = \frac{\frac{5}{6}a \cdot a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{10}}{3}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \angle A_1BC = 45^\circ$$

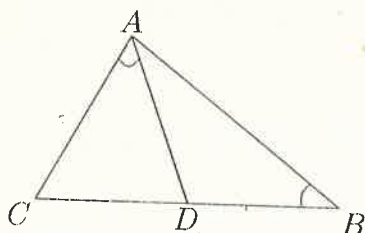
Энэ бодлогыг олимпиадын явцад 8 янзаар бодсон болохыг тэмдэглэе.

VIII-A3. a_i нь i -р өдөрт бодсон бодлогын тоо $1 \leq k \leq$

$$34, \sum_{i=1}^k a_i = b_k \text{ авч үзье.}$$

$b_{34} \leq 3 \cdot 17 + 15 = 66$. Хэрэв $b_i \equiv 0(34)$ байх i дугаар оршин байвал $0 < b_i \leq b_{34} \leq 66$ тул $b_i = 34$ болж бодлогын нөхцлийг хангах өдрүүд олдож байна $\Rightarrow b_i \equiv 0(34)$ байх i дугаар олдохгүй гэвэл $b_s = b_k(34)$ байх $\exists s, k, s \neq k, s > k$ гэж үзэж болно $\Rightarrow a_{k+1} + \dots + a_s \equiv 0(34) \Rightarrow a_{k+1} + \dots + a_s = 34$ болж бодлогын тоо 34 байх дараалсан өдрүүд олдоно.

VIII-B1. Хэрэв ABC гурвалжинд $\angle A > \angle B$ бол BC тал дээр $AD = \frac{bc}{a}, BD = \frac{a^2 - b^2}{a}$ байх D цэг олддогийг баталъя.



ABC гурвалжны BC тал дээр $\angle CAD = \angle B$ байх D цэг байгуулж болно. Учир нь $\angle A > \angle B$. Ингэвэл $\angle CDA = \angle B$ бөгөөд C орой дахь өнцөг ерөнхий учраас $\triangle ADC \sim \triangle BAC$.

$$\text{Эндээс } \frac{AD}{BA} = \frac{DC}{AC} = \frac{AC}{BC} \text{ буюу } \frac{AD}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{b}{a} \text{ болохоор}$$

$$AD = \frac{bc}{a}, DC = \frac{b^2}{a}. \text{ Гэтэл } DB = a - DC = a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a}.$$

Эндээс гарах мөрдлөгөө:

1М. $\angle A = 2\angle B$ буюу $\alpha = 2\beta$ бол $\angle DAB = \beta$ болох тул $AD = DB$. Иймээс өмнө гаргасан ёсоор $\frac{a^2 - b^2}{a} = \frac{bc}{a}$ буюу $bc = a^2 - b^2$ (1).

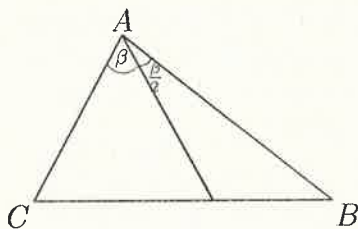
2М. $\alpha = 3\beta$ байхад $\alpha - \beta = 2\beta$ буюу $\angle DAB = 2\beta$ болж ABD гурвалжны хувьд 1М-ийн нөхцөл биелсэн тул (1)

$$\text{ёсоор } AC \cdot AD = BD^2 - AD^2 \text{ эсвэл } c \cdot \frac{bc}{a} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2} - \frac{b^2 c^2}{a^2}.$$

Хялбарчилсны дараа $bc^2 = (a-b)(a^2-b^2)$ (2).

3М. $\alpha = 4\beta$ байхад $\alpha - \beta = 3\beta$ буюу $\angle DAB = 3\beta$ болж ABD гурвалжны хувьд 2М-ийн нөхцөл биелсэн тул (2) ёсоор $AD \cdot AB^2 = (BD - AD)(DB^2 - AD^2)$ буюу зохих орлуулгыг хийсний дараа

$$a^2bc^3 = (bc - (a^2 - b^2))(b^2c^2 - (a^2 - b^2)^2) \quad (3)$$



$\angle CAD = \beta$ байхаар D цэгийг BC дээр байгуулбал $\angle DAB = \frac{\beta}{2}$ буюу $\angle ABD = 2\angle DAB$ болно. 1М ёсоор:

$$BD \cdot BA = AD^2 - BD^2$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a} \cdot c = \left(\frac{b^2c^2}{a^2} - \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2} \right)$$

$(a^2 - b^2)ac = b^2c^2 - (a^2 - b^2)^2$ болох нь батлагдав.

VIII-B2. $n = 1$ үед $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} < \frac{10}{3}$ тул үнэн $n \rightarrow n + 1$ шилжилтийг авч үзье.

$$S_{n+1} = \frac{1}{3}S_n + \frac{1}{n+2} \leq \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} < \frac{20}{9n+9n} + \frac{1}{n+1} < \frac{20}{9n+9} + \frac{1}{n+1} = \frac{29}{9(n+1)} < \frac{30}{9(n+1)} = \frac{10}{3(n+1)}$$

болж батлагдав. $n = 300$ үед манай тэнцэл биш гарна.

VIII-B3. $x_{2n+2} = (a-1)(x_1 + x_2 + \dots + x_{2n-1} + x_{2n} + x_{2n+1}) = x_{2n} + (a-1)(x_{2n} + x_{2n+1}) = ax_{2n} + (a-1)x_{2n+1} = ax_{2n} + (a-1)(ax_{2n} + 1) = a^2x_{2n} + a - 1$.

$x_{2n+2} = a^2x_{2n} + a - 1 = a^4x_{2n-2} + (a-1)(a^2 + 1) = \dots = a^{2n}x_2 + (a-1)(a^{2(n-1)} + a^{2(n-2)} + \dots + a^2 + 1) = a^{2n}x_2 + \frac{(a^2-1)(a^{2(n-1)} + a^{2(n-2)} + \dots + a^2 + 1)}{a+1} = a^{2n}x_2 + \frac{a^{2n}-1}{a+1} = \frac{a^{2n}(a^2-1) + a^{2n}-1}{a+1} = \frac{a^{2n+2}-1}{a+1}$

$$\frac{a^{2n+2}-1}{a+1} \Rightarrow x_{2n} = \frac{a^{2n}-1}{a+1}, x_{2n+1} = \frac{a(a^{2n}-1)}{a+1} + 1 = \frac{a^{2n+1}+1}{a+1}$$

Эдгээрийг нэгтгэвэл: $x_k = \frac{a^k + (-1)^{k+1}}{a+1}$ (дарааллын ерөнхий гишүүн)

ММО-34, IX АНГИЙН III ДАВАА

Ж.Батболд

Т.Пүрэвдорж (Монгол-Турк сургууль, 9-р анги)

IX-A1. $a_1 = 2, a_2 = 10, a_3 = 100, a_{n+3} = 2a_{n+2} \cdot a_{n+1} - a_n$
($n \geq 1$) рекурент харьцаагаар өгөгдсөн дараалалд
1998-д хуваагдах гишүүн төгсгөлгүй олон байна гэж
батал.

IX-A2. $x, y, z \geq 0$ бол

$$2(x + y + z) \leq \frac{x + y + z}{3^x} + \frac{y + z + x}{3^y} + \frac{z + x + y}{3^z}$$

тэнцэтгэл бишийг батал.

IX-A3. Гурвалжны талуудын урт a, b, c бөгөөд $b^2 + c^2 > 5a^2$ бол a урттай талын эсрэг орших өнцөг хамгийн
бага нь байдгийг батал.

IX-B1. $\frac{1}{p}$ тоог аравтын бутархай хэлбэрт бичихэд гарах
үе нь $(a_1 a_2 \dots a_s)$ бол энэ цифрүүдээр бичигдэх
 $\overline{a_1 a_2 \dots a_s}$ тоо 1998-д хуваагдах бүх анхны p тоонуудыг ол.

IX-B2. $a_1, a_2, \dots, a_{31}$ квадратаас чөлөөт тоонууд ба эдгээрийн үржвэр $a_1 a_2 \dots a_{31} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{31}^{\alpha_{31}}$ гэсэн анхны үржигдэхүүнд задрана. $a_1, a_2, \dots, a_{31}$ -ээс аль ч хоёрыг нь авахад $a_s \cdot a_t$ үржвэр нь $(p_i p_j)^2$ -д хуваагдахаар p_i, p_j анхны тоонууд олддоггүй бол $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{31} \leq 186$ гэж батал.

IX-B3. C оройдоо тэгш өнцөгтэй ABC гурвалжны CA катет дээр A оройгоос багтсан тойргийн радиустай

тэнцүү зайд орших P цэг, CB катет дээр түүний дундаж Q цэгүүд тус тус өгчээ. PQ шулуун C өнцгийн биссектрисетэй огтлолцсон M цэгээс гипотенуз хүртэлх зайг ол.

Хянан боловсруулсан Ж.Батболд

IX-A1. $a_4 = 1998$, $a_4 \equiv 0 \pmod{1998}$, $0 \leq r_n < 1998$, $a_n \equiv z_n \pmod{1998}$ байх r_n дарааллын $1998^3 + 1$ ширхэг гишүүнийг авч үзье. (r_k, r_{k+1}, r_{k+2}) , $1 \leq k \leq 1998^3 + 1$ гуравтууд дотор 2 ижил гуравт Дирихлейн зарчмаар олдоно. Эдгээр нь (r_k, r_{k+1}, r_{k+2}) , $(r_{k+s}, r_{k+s+1}, r_{k+s+2})$ гэвэл $r_k = r_{k+s} = r_{k+2s} = \dots$ гэж үелнэ. Энэ үе нь r_k -аас эхэлдэг гэж үзвэл $a_n = 2a_{n+2}a_{n+1} - a_{n+3}$ буюу $r_n = 2r_{n+2}r_{n+1} - r_{n+3}$ болох ба $r_{k-1} = 2r_{k+1}r_k - r_{k+2} = 2r_{k+s+1} \cdot r_{k+s} - r_{k+s+2} = r_{k+s-1}$ болж зөрчилд орно. Энэ нь үе r_1 -ээс эхэлдэг буюу $r_1 = r_{1+s} = r_{1+2s} = \dots$ гэдгийг харуулж байна. $r_4 = 0$ тул $r_4 = r_{4+s} = r_{4+2s} = r_{4+3s} = \dots$ буюу төгсгөлгүй олон a_{k+ts} гишүүн нь 1998-д хуваагдах нь батлагдав.

IX-A2.

$$S = \frac{x + y \cdot 3^{2z}}{3^z} + \frac{y + z \cdot 3^{2x}}{3^x} + \frac{z + x \cdot 3^{2y}}{3^y} =$$

$$= \left(\frac{x}{3^z} + \frac{y}{3^x} + \frac{z}{3^y} \right) + (y \cdot 3^z + z \cdot 3^x + x \cdot 3^y)$$

$g(x) = \frac{1}{3^x}$, $f(x) = 3^x$ гэсэн 2 функц $f''(x) = (3^x)'' = \ln^2 3 \cdot 3^x > 0$, $g''(x) = \left(\frac{1}{3^x} \right)'' = \frac{\ln^2 3}{3^x} > 0$ учраас $[0, \infty)$ завсарт хотгор. Иенсений тэнцэтгэл биш хэрэглэвэл

$$A = \alpha_1 \frac{1}{3^x} + \alpha_2 \frac{1}{3^y} + \alpha_3 \frac{1}{3^z} \leq \frac{1}{3^{\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z}}$$

$$B = \beta_1 3^x + \beta_2 3^y + \beta_3 3^z \geq 3^{\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z}$$

$$\alpha_1 = \frac{y}{x+y+z}, \alpha_2 = \frac{z}{x+y+z}, \alpha_3 = \frac{x}{x+y+z}, \beta_1 = \frac{z}{x+y+z}, \beta_2 = \frac{x}{x+y+z}, \beta_3 = \frac{y}{x+y+z} \text{ гэж авбал}$$

$$S = \left(\frac{x}{3^z} + \frac{y}{3^x} + \frac{z}{3^y} \right) + (y \cdot 3^z + z \cdot 3^x + x \cdot 3^y) \geq \\ \geq \frac{x+y+z}{3^{\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z}} + (x+y+z) 3^{\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z} \geq 2(x+y+z)$$

болж батлагдав.

IX-A3. $a \geq c$ гэж үзвэл $a^2 \geq c^2$, $b^2 < (a+c)^2 \leq 4a^2$ энэ 2 тэнцэтгэл бишийг нэмэхэд $b^2 + c^2 < 5a^2$ болж нөхцөлд зөрчнө. Иймд $a < c$. Мөн $a < b$ гэж гарна. a нь хамгийн бага талын урт болсон тул бодлого бодогдов.

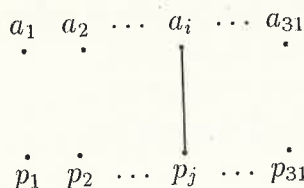
IX-B1. p -ийн 2,3,5,7 утгуудад бодлогын нөхцөлийг хангаж чадахгүй гэдэг нь илт. Эхний гишүүнээсээ эхэлж үелэх учраас $p > 10$ үед $\frac{1}{p} = 0, \underbrace{0 \dots 0}_k a_1 a_2 \dots a_t \underbrace{0 \dots 0}_k \dots = 0, \underbrace{0 \dots 0}_k (a_1 a_2 \dots a_t \underbrace{0 \dots 0}_k) \dots$ хэлбэртэй бичигдэнэ. Төгсгөлгүй буурам геометр прогрессийн нийлбэр хэлбэрт бичье.

$$\frac{1}{p} = \frac{a_1 a_2 \dots a_t \underbrace{0 \dots 0}_k}{10^{t+2k} \left(1 - \frac{1}{10^{t+k}} \right)} = \frac{a_1 a_2 \dots a_t \underbrace{0 \dots 0}_k}{10^k (10^{t+k} - 1)}$$

$$N = a_1 a_2 \dots a_t \underbrace{0 \dots 0}_k \text{ байг. } 10^k (10^{t+k} - 1) = p \cdot N.$$

$N = 1998 \cdot m = 2 \cdot 27 \cdot 37 \cdot m$ тул $p \mid 10^{t+k} - 1$, $27 \cdot 37 \mid 10^{t+k} - 1$ байх ёстой. Эндээс $3 \mid t+k$ мөн Фермагийн теоремыг анхаарвал $10^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, $p-1 = 3q$, $p = 3q+1$. Баталгааны явцад $p \neq 37$ гэж гарна. Иймд ($p > 10$, $p \neq 37$) $3q+1$ хэлбэрийн p анхны тоонууд бодлогын нөхцөлийг хангана.

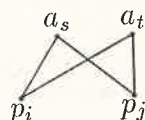
IX-B2. Бодолтыг ойлгомжтой болгохын үүднээс графын хэлэн дээр хөрвүүлье. Тус бүр нь 31 цэгээс тогтох



2 эгнээ 62 цэгийг 1-р эгнээг $a_1, a_2, \dots, a_{31}$ ба 2-р эгнээг $p_1, p_2, \dots, p_{31}$ гэж дугаарлаад a_i оройн хувьд $p_j | a_i$ бол a_i оройг p_j оройтой холбоё.

(Ийм графыг 2 туйлт граф гэдэг.)

Бодлогын нөхцөл ёсоор дээрх графт дараахь зурагт үзүүлсэн шиг ирмэг үүсэх ёсгүй. p_i оройгоос α_i ширхэг ирмэг гардаг бол

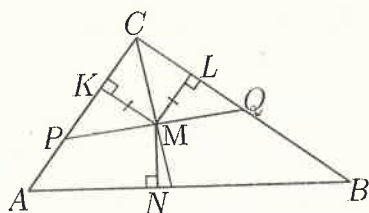


$\frac{\alpha_1(\alpha_1-1)}{2} + \frac{\alpha_2(\alpha_2-1)}{2} + \dots + \frac{\alpha_{31}(\alpha_{31}-1)}{2} \leq C_{31}^2 = \frac{31 \cdot 30}{2}$ гэж нөхцөл ёсоор мөрдөнө. $\alpha_1 + \dots + \alpha_{31} = S$ гэж тэмдэглэе. Коши-Буняковскийн тэнцэл биш ёсоор

$$\left(\sum_{i=1}^{31} \alpha_i \right)^2 \leq 31 \sum_{i=1}^{31} \alpha_i^2 \text{ тул } \begin{cases} \sum_{i=1}^{31} \alpha_i^2 - \sum_{i=1}^{31} \alpha_i \leq 30 \cdot 31 \\ \left(\sum_{i=1}^{31} \alpha_i \right)^2 \leq 31 \cdot \sum_{i=1}^{31} \alpha_i^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow S^2 - 31S \leq 31^2 \cdot 30$ Энэ тэнцэл бишийг бодвол $S \leq 186$ гэж гарна.

IX-В3. M цэгийн AC, BC, AB талууд дээрх проекцийг



K, L, N цэгүүдээр тэмдэглэе. $AC=b, BC=a, AB=c$ болог. $AP=r$ тул $PC=b-r$ болно. $CQ=QB=\frac{a}{2}$. CM нь биссектрис учраас $KM=ML=x$

$$S_{\Delta PCQ} = S_{\Delta PCM} + S_{\Delta CMQ} \Rightarrow \frac{(b-r)x}{2} + \frac{\frac{a}{2} \cdot x}{2} = \frac{(b-r) \cdot \frac{a}{2}}{2}$$

болно. Эндээс x -ийг олвол $x = \frac{(b+c-a)a}{2(b+c)}$ болно. Тэнцэтгэлийн 2 талыг $\frac{1}{r} = \frac{2}{a+b-c}$ -аар үржүүлье. Тэгвэл $\frac{x}{r} = \frac{ab+ac-a^2}{ab+ac+b^2-c^2}$. Пифагорын теоремоор $b^2 - c^2 = -a^2$ болохыг анхаарвал $\frac{x}{r} = 1 \Rightarrow x = r$ болов. $KM = ML = r$ болсон тул $MN = r$ гэж гарна.

ММО-34, IX АНГИЙН IV ДАВАА

Б.Чулуундорж

Ж.Батболд

IX-A1(Б.Батбаясгалан). $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ дээр тасралтгүй функц

$$(1) \quad f(x) \cdot f(1 + f(x)) = f(1 + x).$$

$$(2) \quad \underbrace{f(\dots f(x) \dots)}_{1998} = x$$

нөхцөлийг хангах бүх f функцүүдийг ол.

IX-A2(Л.Оюунцэцэг). $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$, $i = \overline{1, n}$ дарааллын хувьд $n^k \nmid (\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_n x_n)$ чанартай нэгэн зэрэг 0-тэй тэнцэхгүй $x_1, x_2, \dots, x_n$ бүхэл тоонууд олддог байх хамгийн их $n = n(k)$ -г ол.

IX-A3(Г.Баярмагнай). Хавтгайд $AE \parallel BC, AB \parallel CD$ байх $ABCDE$ таван өнцөгт өгчээ. AB, BC, CD, DE, EA талуудын дундажуудыг харгалзан A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 гэе. Тэгвэл BD_1, B_1E_1, C_1A_1 хэрчмүүд 1 цэгт огтлолцохыг батал.

IX-B1(Д.Алтангэрэл). $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{1998})$ нь $(1, 2, \dots, 1998)$ -ийн дурын сэлгэмэл байг.

$$\min_{i \in \{1, 2, \dots, 1996\}} (\sigma_i + \sigma_{i+1} + \sigma_{i+2}) = A_\sigma$$

гэвэл A_σ -ийн максимум утгыг ол.

IX-B2(В.Адьяасүрэн). $P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j, \quad n \geq 2$ олон

гишүүнтийн бүх язгуурууд бодит бөгөөд $(0, 1)$ завсарт оршино. $a_n > 0$ бол дурын $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ -

ийн хувьд $\sum_{j=k}^{n-2} C_j^k \cdot a_j > 0$ болохыг батал.

IX-B3(А.Хашбаатар). ABC гурвалжны A оройн өнцөг α , B оройн өнцөг β байг. $3\alpha = 4\beta$ бол

$$(a^2 - b^2)a^2c^2 = (b^2c^2 - (a^2 - b^2)^2)(bc - (a^2 - b^2))$$

гэж батал (a, b, c -үүд гурвалжны талууд).

IX-A1. $f^{1998}(x) = x$ (2) нөхцөлөөс f харилцан нэг утгатай гэж гарна. Иймд f тасралтгүй тул эрс монотон функц болно. f эрс монотон тул $g(x) = f^2(x)$ нь эрс монотон өснө. Мөн (2)-ээс $g^{999}(x) = x$. Хэрэв $g(x) > x$ гэвэл $g^{999}(x) = g^{998}(g(x)) > g^{998}(x) > \dots > x$ болно. $g(x) < x$ гэвэл мөн адилаар $g^{999}(x) < x$ болох тул $g(x) = x$ буюу $f^2(x) = x$ болно. $f(x) \cdot f(1 + f(x)) = f(1 + x)$ (1)-д $x = f(t)$ орлуулга хийвэл $f^2(t) \cdot f(1 + f^2(t)) = f(1 + f(t))$ буюу $t \cdot f(1 + t) = f(1 + f(t))$ болно. Мөн (1)-ээс $f(t) \cdot f(1 + f(t)) = f(1 + t)$ тул $f(t) = \frac{1}{t}$ болов. Энд t нь чөлөөт хувьсагч билээ.

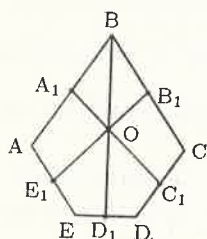
IX-A2. Эхлээд эсрэг өгүүлбэрийг авч үзье, ө.х $\forall x_1, x_2, \dots, x_n$ бүхэл тоонуудын хувьд $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ дараалал олдоод $\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_n x_n$ нь n^k -д хуваагддаг байх n -үүдийг олъё.

$n^k < 2^n$ тэнцэтгэл биш нь тодорхой нэг n_0 -оос эхлэн түүнээс их бүх n -ийн хувьд үнэн байна. Үүнийг баталгааг уншигчдад үлдээе.

n_0 нь $\forall N > n_0$ -ийн хувьд $2^N > N^k$ чанартай хамгийн бага тоог тэмдэглэе. $\forall n > n_0$ байх n -ийг аваад $\forall x_1, x_2, \dots, x_n$ бодит тоонуудыг авч үзье. Түүний бүх дэд олонлогуудын тоо 2^n . $2^n > n^k$ тул уг дэд олонлогийн элементүүдийн нийлбэрүүдийг авч үзвэл n^k модулиар ижил үлдэгдэл өгөх хоёр дэд олонлог олдоно, ө.х $x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k} = x_{j_1} + x_{j_2} + \dots + x_{j_k} \pmod{n^k}$ болно. Эндээс $\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \dots + \varepsilon_n x_n \equiv 0 \pmod{n^k}$ болж бидний

сонирхож буй өгүүлбэр батлагдлаа. n_0 -оос үл хэтрэх n -ийн хувьд $2^n \leq n^k$ байх ба $1, 2, \dots, 2^{n-1}$ гэсэн тоонууд ба $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ дарааллын хувьд $0 < |\varepsilon_1 \cdot 1 + \varepsilon_2 \cdot 2 + \dots + \varepsilon_n \cdot 2^{n-1}| \leq 1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 < n^k$ учир n^k -д үл хуваагдана. Ийнхүү n_0 нь бидний сонирхож буй тоо болно.

IX-A3. $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ гэе. Тэгвэл $\overrightarrow{AE} = \mu\vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \lambda\vec{a}$ болно.



Мөн $(A_1C_1) \cap (B_1E_1) = O$ байг. $\overrightarrow{B_1O} = \alpha\overrightarrow{B_1A_1} + (1-\alpha)\overrightarrow{B_1C_1}$ байх α тоо олдоно. $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$ -г $\vec{a}$, $\vec{b}$ -ээр илэрхийлнэ. Иймд $\overrightarrow{B_1O} = \gamma_1\vec{a} + \gamma_2\vec{b}$. $\overrightarrow{B_1O} = \beta\overrightarrow{B_1B} + (1-\beta)\overrightarrow{B_1D}$ байх β -г олъё.

Эндээс $\overrightarrow{B_1O} = \delta_1\vec{a} + \delta_2\vec{b}$ (энд $\overrightarrow{B_1B}$, $\overrightarrow{B_1D}$ -г $\vec{a}$, $\vec{b}$ -ээр илэрхийлнэ). Нөгөө талаас $\overrightarrow{B_1O}$ нь $\vec{a}$, $\vec{b}$ -ээр нэг утгатай илэрхийлэгдэнэ гэдгээс $\left. \begin{array}{l} \gamma_1 = \delta_1 \\ \gamma_2 = \delta_2 \end{array} \right\}$ болж β олдоно. Иймд батлах зүйл батлагдав.

IX-B1. $666 \cdot A_\sigma \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \dots + (\varepsilon_{1996} + \varepsilon_{1997} + \varepsilon_{1998}) = 1 + 2 + \dots + 1998 = \frac{1999 \cdot 1998}{2}$ эндээс A_σ бүхэл тоо тул $A_\sigma \leq 2998$ болно. Иймд $\max_{\sigma} A_\sigma \leq 2998$. Одоо $A_\sigma = 2998$ байдаг жишээ гаргавал бодлого бодогдоно. $(1, 999, 1998)$, $(3, 998, 1997), \dots, (665, 667, 1666)$, $(1333, 1000, 666)$, $(1334, 1001, 664), \dots, (1665, 1332, 2)$ хосуудыг дараалуулан бичихэд гарах сэлгэмэл нь дээрх нөхцөлийг хангах нь илэрхий байна.

IX-B2. Эхлээд $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, 1)$ хувьд

$$\sum_{j=1}^n (1 - x_j) > 1 - \sum_{j=1}^n x_j \quad (*)$$

болохыг математик индукцийн аргаар батлана.

а) $k = 0$ байг. x_j нь $P(x)$ олон гишүүнтийн язгуурууд бол $P(x) = a_n \prod_{j=1}^n (x - x_j)$ болох ба Виетийн теоремоор

$$\sum_{j=1}^n x_j = -\frac{a_{n-1}}{a_n}. \text{ Иймд}$$

$$\sum_{j=0}^{n-2} C_j^0 a_j = P(1) - a_{n-1} - a_n = a_n \left(\prod_{j=1}^n (1 - x_j) - \sum_{j=1}^n x_j + 1 \right) \stackrel{(*)}{>} 0$$

б) $\forall k \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ байг. $P(x)$ -ээс k эрэмбийн уламжлал авбал: $Q(x) = k! \sum_{j=k}^n a_j C_j^k x^{j-k}$ болох ба энэ нь

$(n-k)$ зэргийн олон гишүүнт бөгөөд ахмад гишүүний коэффициент эерэг. Роллийн теоремоор $(0, 1)$ завсарт язгууртай. Дээрх үр дүнг $Q(x)$ -д хэрэглэвэл: $k! \sum_{j=k}^{n-2} a_j C_j^k > 0$

болж бодлого бодогдов.

IX-B3. VIII ангийн IV давааны B1-ийг хар.

ММО-34, X АНГИЙН III ДАВАА

Ц.Батхүү

10-A1(Д.Батнасан). 1-ээс 1000 хүртэлх тоонууд дотор 13-аас хэтрэхгүй анхны хуваагчдынх нь тоо сондгой байх хичнээн тоо байдаг вэ?

10-A2(Ц.Батхүү). ABC гурвалжны $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 38^\circ$ болог. Уг гурвалжинд багтсан тойргийн төв O -г дайрсан AC талтай параллель шулуун AB талыг F цэгт огтолно. Хэрвээ P нь $3BP = BC$ байх BC талын цэг бол $\angle BFP = \frac{1}{2}\angle B$ болохыг батал.

10-А3(В.Адьяасүрэн). $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n, 1 \leq k \leq n$
байх k -ийн хувьд $a_1 a_2 \dots a_k \leq b_1 b_2 \dots b_k$ байх $a_1, a_2, \dots,$
 $a_n, b_1, \dots, b_n$ тоонуудын хувьд $b_1 + b_2 + \dots + b_n \geq$
 $a_1 + \dots + a_n$ болохыг батал.

10-В1(Б.Сандагдорж). Аль ч 5 хүн нь өөр хоорондоо
бүгд танил биш байх n хүмүүсээс хамгийн ихдээ
 $\left[\frac{3}{8} n^2 \right]$ танилын хос олдono гэж батал.

10-В2(Д.Батнасан). Төвүүдийнх нь хоорондох зай a бай-
даг огтлолцоогүй 2 тойрог өгөгдөв. Тэгвэл гадаад
ба дотоод шүргэгчдийн огтлолцолд орших 4 цэг нэг
тойрог дээр оршихыг баталж, радиусыг ол.

10-В3(Ц.Батхүү). $f(x)$ нь $[0; 1]$ -д тодорхойлогдсон
функц. $f(0)=f(1), x_1 \neq x_2, |f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1|$
нөхцлийг хангадаг.

Тэгвэл $x_1 \neq x_2, |f(x_2) - f(x_1)| < \frac{1}{2}$ гэж батал.

Х-А1. $A_1, A_2, \dots, A_6$ -аар харгалзан 2,3,5,7,11,13-г ху-
ваагдах $\{1, 2, \dots, 1000\}$ олонлогийн тоонуудын олонлогийг
тэмдэглэе. Хэрвээ аливаа A, B олонлогуудын хувьд тэдгээ-
рийн симметр ялгавар гэж нэрлэгдэх $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
олонлогийг тодорхойлбол уг үйлдэл:

симметр ($A \Delta B = B \Delta A$),

ассоциатив ($A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$)

болох нь тодорхой.

$A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_6$ олонлог нь $A_1, A_2, \dots, A_6$ олонлогуу-
дад зөвхөн сондгой тоотой орох элементүүдээс тогтох
тул уг олонлогийн элементийн тоог олоход хангалттай.

$$S_1 = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_6|$$

$$S_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots + |A_5 \cap A_6|$$

$$\dots\dots\dots$$

$$S_6 = |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_6|$$

бол нэгтгэн зайлуулах зарчмаар

$$|A_1 \Delta A_2 \Delta \dots A_6| = S_1 - 2S_2 + 4S_3 - 8S_4 + 16S_5 - 32S_6$$

болно.

Редакторын нэмэлт: Энэ бодлогыг мөн "Математикийн Мэргэжлийн Курс" номны 1.2-17 ба 4.2-5-ын санаагаар бодож болно.

Х-А2. $\angle BFP$, $\angle B$ хурц өнцгүүд учир $\sin \angle BFP = \sin \frac{\angle B}{2}$ болохыг харахад хангалттай. Иймд $\triangle FBP$ хувьд синусын теорем бичихийн тулд FB, BP, FP талуудыг олѐ. $BC = 3$, $BP = 1$ гэвэл ABC гурвалжны багтаасан тойргийн радиус $R = \frac{3}{2\sin 60^\circ} = \sqrt{3}$ болох ба багтсан тойргийн радиус $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = 2\sqrt{3} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ болно. $\angle B = \sin 60^\circ + 2x$, $\angle C = 60^\circ - 2x$ гэвэл $r = 2\sqrt{3} \sin(30^\circ + x) \sin(30^\circ - x) = \sqrt{3}(\cos 2x - \frac{1}{2})$ байна. F цэгээс AC талд буулгасан перпендикулярын суурийг M гэвэл $FM = r$ болох ба $AF = r \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2(\cos 2x - \frac{1}{2})$, улмаар $AB = 2\sqrt{3} \sin(60^\circ - 2x)$ болж $FB = AB - AF = 2\sqrt{3} \sin(60^\circ - 2x) - 2 \cos 2x + 1 = \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x + 1 = 4 \cos x (\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x) = 4 \cos x \cos(60^\circ + x)$ болно. Нөгөө талаас $FP^2 = (4 \cos x \cos(60^\circ + x))^2 + 1^2 - 2 \cdot 4 \cos x \cos(60^\circ + x) \cdot 1 \cdot \cos(60^\circ + 2x) = 4 \cos x \cos(60^\circ + x) + 1 = 2 + 2 \cos(60^\circ + 2x) = 4 \cos^2(30^\circ + x)$ болно. Эцэст нь $\triangle FBP$ гурвалжны хувьд синусын теорем бичвэл $\frac{\sin(\angle B)}{FP} = \frac{\sin(\angle PFB)}{PB}$ буюу $\sin(60^\circ + 2x) = 2 \cos(30^\circ + x) \sin(\angle PFB)$ болно.

Х-А3. Гүдгэр функцийн тухай Йенсений тэнцэтгэл бишээс $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ байх сөрөг биш тоонууд ба $x_1, x_2, \dots, x_n$ эерэг тоонуудын хувьд Кошийн өргөтгөсөн тэнцэтгэл биш гэж нэрлэгдэх $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \geq x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ тэнцэтгэл биш хялбар мөрдөн гардаг.

Уг тэнцэтгэл бишид $x_j = \frac{b_j}{a_j}$, $\alpha_i = \frac{a_i}{\sum_{i=1}^n a_i}$ гэж авбал

$$\frac{\sum_{j=1}^n b_j}{\sum_{i=1}^n a_i} \geq \left(\prod_{j=1}^n \left(\frac{b_j}{a_j} \right)^{a_j} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i}} \geq \left(\left(\frac{b_1}{a_1} \right)^{a_1} \left(\frac{b_2}{a_2} \right)^{a_2} \dots \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^{a_n} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i}} \geq$$

$$\geq \left(\left(\frac{b_1 b_2}{a_1 a_2} \right)^{a_3} \dots \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^{a_n} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i}} \geq \dots \geq \left(\frac{b_1 b_2 \dots b_n}{a_1 a_2 \dots a_n} \right)^{\frac{a_n}{\sum_{i=1}^n a_i}} \geq 1$$

болно. Баталгааны явцаас зөвхөн $a_k = b_k$, $k = \overline{1, n}$ үед л тэнцэтгэл биш тэнцэтгэлдээ хүрэх нь харагдаж байна.

X-B1. Бодлогын нөхцлөөс хүмүүсийн олонлогийг аль ч A_i олонлогийн хүмүүс өөр хоорондоо танил биш, харин $i \neq j$ үед A_i, A_j олонлогийн хүмүүс танил байж болохоор A_1, A_2, A_3, A_4 олонлогуудад хувааж болох юм. Бид хамгийн их танилын хосыг олох гэж буй тул A_i -ийн хүн A_j -ийн хүн бүртэй танил байх явдал мөн. $|A_i| = a_i$, $i = \overline{1, 4}$ гэвэл $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = n$ байх ба хамгийн их танилын хос $\sum_{1 \leq i < j \leq 4} a_i a_j$ нийлбэрийн хамгийн их утгатай тэнцүү болно.

Эцэст нь нийлбэр нь тогтмол тоонуудын хоёрлосон үржвэрүүдийн нийлбэр хамгийн их утгаа тэдгээрийн зөрөө хамгийн бага байхад авдгийг санавал уг нийлбэрийн хамгийн их утга $\left[\frac{3}{8} n^2 \right]$ болно.

X-B2. O_1 төвтэй ω_1 , O_2 төвтэй ω_2 тойргууд өгөгдсөн болог. Эдгээр 2 тойргийн дотоод ба гадаад шүргэгчдийн огтлолцлын цэгүүдийг A, B, C, D гэж тэмдэглэе. M нь AB , N нь AD шулуун дээр оршдог ω_1 тойргийн шүргэлтийн цэгүүд болог. Тэгвэл $O_1 A$ нь $\angle MAN$ -ийн, $O_2 A$ нь $\angle DAB$ -ийн биссектрисүүд болно. Эндээс $\angle O_1 A O_2 = \angle O_1 A D + \angle D A O_2 = \frac{1}{2} \angle MAN + \frac{1}{2} \angle DAB = \frac{1}{2} (\angle MAN +$

$\angle DAB) = 90^\circ$ болно. Иймд A цэг O_1O_2 хэрчмээр диаметрээ хийсэн тойрог дээр оршино. Яг үүнтэй адилаар B, C, D цэгүүдийг уг тойрог дээр оршихыг харж болно. Иймд уг тойргийн радиус $R = \frac{a}{2}$ болох нь тодорхой.

X-В3. $\left. \begin{array}{l} \max f(x) = f(a) \\ \min f(x) = f(b) \end{array} \right\}$ байг. $[0, 1]$ завсарт $|f(a) - f(b)| < \frac{1}{2}$ гэж баталбал болно. Эсрэгээс нь $\frac{1}{2} \leq |f(a) - f(b)|$ гэж үзье.

1) $b > a$ байг.

$$\frac{1}{2} \leq |f(a) - f(b)| < (a - b) = b - a \Rightarrow 0 < b - a - \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\begin{array}{r} f(a) - f(0) < a - 0 = a \\ + \quad f(1) - f(b) < 1 - b \\ \hline f(a) - f(b) < a + 1 - b \end{array}$$

ба (1)-ээс $f(a) - f(b) < \frac{1}{2}$ зөрчил.

2) $a > b$ байг.

$$\frac{1}{2} \leq |f(a) - f(b)| < (a - b) = a - b \Rightarrow 0 < a - b - \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\begin{array}{r} |f(b) - f(0) < b \\ + \quad |f(1) - f(a) < 1 - a \\ \hline -f(b) + f(a) < b + 1 - a \end{array}$$

ба (2) $\Rightarrow f(a) - f(b) < \frac{1}{2}$ зөрчил.

ММО-34, X АНГИЙН IV ДАВАА

Ц.Батхүү

10-A1(Ц.Батхүү). Аливаа $a_1, a_2, \dots, a_n$ бодит тоонуудын хувьд $a_1 + x, a_2 + x, \dots, a_n + x$ тоонууд бүгд иррациональ байх x бодит тоо олдох уу?

10-A2(Алтангэрэл). $\sum_{i=1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}|$ нийлбэр максимум утгаа авдаг 1-ээс n хүртэлх тоонуудын $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ сэлгэмлүүдийн тоог ол.

10-A3(Б.Баяржаргал). Хавтгай дээр бүгд нэг шулуун дээр оршдоггүй 4 цэг өгөгдөв. Тэгвэл тэдгээрийн аль ч 3 цэг дээр нь оройтой гурвалжны ялгаатай 3 оройгоос нь гарсан медиан, биссектрис, өндрүүд 1 цэгт огтлолцсон байж болох уу?

10-B1(Л.Оюунцэцэг). n хүн тойргоор шатар тоглов. Тоглогчдын ялалтын тоо ба авсан онооны дарааллууд эрс, урвуу эрэмбэлэгдсэн байх хамгийн бага тойрог тоглолтын тоог ол (хүн бүр бусад хүн бүртэй нэг удаа тоглосон байх тоглолтын тойрог тоглолт гэх ба ялсан хүн 1 оноо, хожигдсон нь 0 оноо, тэнцсэн нь 0.5 оноо авна).

10-B2(А.Хашбаатар). $5 \angle BAC = 3 \angle ABC$ байдаг $\triangle ABC$ -ны $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$ гэвэл

$$(b^2 - a^2)^2 b^2 c^2 = abc^2 (a^2 c^2 - (b^2 - a^2)^2) + (a^2 c^2 - (b^2 - a^2)^2)^2$$

болохыг батал.

10-B3(Ц.Батхүү). $f(n) = \begin{cases} f(n-1) - n, & f(n-1) > n \\ f(n-1) + n, & f(n-1) \leq n \end{cases}$ ба $f(1) = 1$ нөхцлийг хангадаг $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ функц өгөгдөв. Тэгвэл $S = \{n \in \mathbb{N} | f(n) = 1998\}$ олонлогийн хамгийн их ба бага элементүүдийг ол.

Х-A1. Дирихлейн зарчмыг хэрэглэн бодсон 1-р сургуулийн сурагч Мөнх-Эрдэнийн бодолтыг сийрүүлэе.

α иррациональ тоо болог. Тэгвэл $\alpha, 2\alpha, \dots, (n+1)\alpha$ тоонуудын аль нэг нь бодлогын нөхцлийг хангах x тоо болно. Эсрэгээс нь болохгүй гэж үзвэл

$$\alpha + a_1, \alpha + a_2, \dots, \alpha + a_n$$

$$2\alpha + a_1, 2\alpha + a_2, \dots, 2\alpha + a_n$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(n+1)\alpha + a_1, (n+1)\alpha + a_2, \dots, (n+1)\alpha + a_n$$

таблицийн мөр болгон дор хаяж 1 рациональ тоо агуулахад хүрэх ба уг таблицийн баганын тоо n тул Дирихлейн зарчмаар аль нэг баганад дор хаяж 2 рациональ тоо оршиход хүрнэ, ө.х $i \neq j$ үед $i\alpha + a_k, j\alpha + a_k$ тоонууд рациональ байх k индекс олдоно. Эндээс $(i-j)\alpha = (i\alpha + a_k) - (j\alpha + a_k)$ тоо рациональ болоход хүрч зөрчилд хүрэв.

X-A2. $\sum_{i=1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}|$ нийлбэр максимум утгандаа хүрэхийн тулд $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ сэлгэмэл $a_i > a_{i+1} > a_{i+2}$ эсвэл $a_i < a_{i+1} < a_{i+2}$ байх тоонууд агуулахгүй. Эсрэг тохиолдолд a_{i+1} -ийг аль нэг захад нь байрлуулахад нийлбэр ихсэхэд хүрнэ. Иймд $a_1 < a_2 > a_3 < \dots$ эсвэл $a_1 > a_2 < a_3 > \dots$ байх сэлгэмлийн тоог олоход хангалттай. $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ сэлгэмлийг $(n+1-a_1, n+1-a_2, \dots, n+1-a_n)$ -д харгалзуулах замаар дээрх 2 төрлийн сэлгэмлүүдийн тоо тэнцүү болох нь тодорхой. Иймд зөвхөн эхний сэлгэмлийн хувьд $\sum_{i=1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}|$ нийлбэр максимум утгандаа хүрэх сэлгэмлийн тоог олъя.

а) $n = 2k$ болог. $\sum_{i=1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}| = -a_1 + 2a_2 - 2a_3 + 2a_4 - \dots + a_n \leq (k+1) + 2(k+2 + \dots + n) - (k+2(1+2+\dots+k-1)) = 1 + 2(k+1)(k-1)$ болох ба $a_1 = k, a_{2\ell+1} \in \{1, 2, \dots, k-1\}, \ell = \overline{1, n-1}, a_n = k+1, a_{2m} \in \{k+2, \dots, n\}$ үед л тэнцэтгэлдээ хүрнэ. Эндээс дээрх сэлгэмлүүдийн тоо $((k-1)!)^2$ болох ба $\sum_{i=1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}|$ максимум утгандаа хүрэх сэлгэмлүүдийн

тоо $2\left(\left(\frac{n}{2} - 1\right)!\right)^2$ болно.

б) $n = 2k+1$ бол $\sum_{i=1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}| = -a_1 + 2a_2 - 2a_3 + \dots - a_n \leq 2(k+2 + \dots + 2k+1) - (k+k+1 + 2(1 + \dots + k-1)) = 2k+1 + 2(k+1)(k-1)$ болох ба $\{a_1, a_n\} = \{k, k+1\}$ ба $a_{2m+1} \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, $m = 1, k-1$, $a_{2l} \in \{k+2, \dots, n\}$ үед л тэнцэтгэлдээ хүрнэ. Иймд өмнөхтэй адилаар бодлогын нөхцлийг хангах сэлгэмлүүдийн тоо $2 \cdot 2(k-1)!k! = (2n-2)\left(\left(\frac{n-3}{2}\right)!\right)^2$ болно.

X-A3(1-р бодолт). Болно.

$BA = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $CB = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ ба $\angle ABC = 50^\circ$ байх тэгш өнцөгт гурвалжин авъя. $BC_1 = C_1A$, $\angle BAA_1 = \angle CAA_1$, $\angle AB_1B = 90^\circ$ болог. Тэгвэл $\triangle AB_1B \sim \triangle ABC$ гэдгээс $AB_1 = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, $B_1C = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $AB_1 = (B_1C)^2$ болж $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}$ учир $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$ болоход хүрч Чевийн теорем ёсоор AA_1, BB_1, CC_1 хэрчмүүд 1 цэгт огтлолцоно. Иймд A, B, C, B_1 цэгүүд нь бодлогын нөхцлийг хангах нь ойлгомжтой.

2-р бодолт. Олдоно. Ялгаатай оройнуудаас нь гарсан өндөр, биссектрис, медиан 3 нэг цэгт огтлолцсон байх ABC тэнгш өнцөгт гурвалжин олдохыг харуулъя. C өнцгийн биссектрисийн AB талтай огтлолцох цэгийг C_1 , BC тал дээрх өндрийн суурийг A_1 гэж тэмдэглэе. Бодлогын нөхцлийг хангахын тулд Чевийн теорем болон биссектрисийн чанар ёсоор

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{CA_1}{AC} \quad (*)$$

болж $AC = A_1B$ болоход хүрнэ. $AA_1^2 = BA_1 \cdot A_1C$ учир $(*)$ ёсоор $\sin^2 C = \cos C$ байх C өнцөг олдохыг харахад хангалттай, ө/х $x^2 + x - 1 = 0$ тэгшитгэл $]0, 1[$ завсар

дор хаяж нэг шийдтэй гэсэн бодлоготой эквивалент болно. Одоо BC гипотенузээр диагоналя хийсэн тэгш өнцөгтийн оройнууд бодлогын нөхцлийг хангах нь ойлгомжтой.

X-B1. $f(n) = 1$ байх n тоонуудын олонлогийг $b_1, b_2, \dots$ гэж дугаарлавал аливаа n , түүнээс бага j дугааруудын хувьд $f(b_n + 2j - 1) = b_n - j + 3$, $f(b_n + 2j) = 2b_n + j + 3$ болохыг харж болно, ө.х $b_n - j + 3$ тоо 1 гартал f функцийн утгууд дээрх томъёогоор олдох тул $b_n - j + 3 = 1$ гэвэл $j = b_n + 2$ болж $b_n + 2j - 1 = 3b_n + 3$ буюу $b_{n+1} = 3(b_n + 1)$ болно. Эндээс $b_1 = 1$ тул $b_n = \frac{5 \cdot 3^{n-1} - 3}{2}$ гэж гарна. $b_7 = 1821$, $b_8 = 5466$ тул S олонлогийн элементүүд b_8 -аас их дугаартай үед л тодрох тул $1998 = b_n - j + 3$ буюу $j = b_n - 1995$ болно. Иймд $b_n + 2j - 1 = b_n + 2(b_n - 1995) - 1 = 3b_n - 3989$ болж S олонлог $\{3b_n - 3989, n \geq 8\}$ олонлогтой давхцана. Эндээс уг олонлогийн хамгийн бага элемент $3b_n - 3989 = 3 \cdot 5466 - 3989 = 12407$ болно.

X-B2. Лемм. $\triangle ABC$ -ны хувьд $\angle A > \angle B$ байдаг бол $AD = \frac{bc}{a}$, $BD = \frac{a^2 - b^2}{a}$ байх CB тал дээр орших D цэг ямагт олдоно.

$\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ гэвэл $\angle BAD = \alpha - \beta$ байхаар D цэгийг BC тал дээр авъя. Тэгвэл $\triangle ABC \sim \triangle DAC$ учир $\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC}$ буюу $AD = \frac{bc}{a}$, $BD = a - \frac{b^2}{a}$ болно. Уг леммад тус тус $\alpha = 2\beta$, $2\alpha = 3\beta$ гэж авбал гурвалжны талуудын хувьд харгалзан $bc = a^2 - b^2$, $(a^2 - b^2)ac = b^2c^2 - (a^2 - b^2)^2$ гэсэн харьцаанууд биелнэ (8-р ангийн бодлогыг хар). Одоо $5\alpha = 3\beta$ тохиолдолд бидний батлах гурвалжны талуудын хоорондох харьцаа гарахыг харья. $\beta > \alpha$ болно. $\angle ABD = \beta - \alpha$ байх D цэгийг AC тал дээр авъя. Лемм ёсоор $AD = \frac{b^2 - a^2}{b}$, $BD = \frac{ac}{b}$ (*) болно. $\beta - \alpha = \frac{2}{3}\alpha$ учир $3(\beta - \alpha) = 2\alpha$ болж 8-р ангийн B бодлого ёсоор $(BD^2 - AD^2) \cdot BD \cdot c = AD \cdot c^2 - (BD^2 - AD^2)^2$ болно. Уг тэнцэтгэлд

(*) илэрхийллийг орлуулахад

$$(b^2 - a^2)^2 b^2 c^2 = abc^2 (a^2 c^2 - (b^2 - a^2)^2) + (a^2 c^2 - (b^2 - a^2)^2)^2$$

болно.

Х-ВЗ. $r(n)$ ялалтын тоо ба авсан онооны дарааллууд нь урвуу эрэмбэлэгдсэн байх n тоглогчтой шатрын тэмцээний хамгийн бага тойрог тоглолтын тоо болог. Ялалтын тооны хамгийн нягт эрэмбэ $0, 1, \dots, n-1$ -ийг үүсгэхэд дор хаяж нэг тойрог, бодлогын нөхцлийг халгахаар тэнцээний харгалзах нягт дараалал $n-1, n-2, \dots, 1, 0$ гаргахад дор хаяж хоёр тойрог, түүнд харгалзах онооны урвуу дараалал $\frac{n-1}{2}, \frac{n-2}{2}, \dots, \frac{1}{2}, 0$ үүсгэхэд нэг тойрог тус тус шаардагдах тул $r(n) \geq 4$ болно. Одоо $n > 3$ сондгой, $n > 6$ тэгш тоонууд тохиолдолд $r(n) = 4$ болохыг харуулъя, ө/х бодлогын нөхцлийг хангаж байх 4 тойрог тоглолтыг зохион байгуулъя.

$n > 3$ сондгой тоо болог.

1-р байр эзэлсэн тоглогчийг ер хожоогүй k тоглолтын дараа дан тэнцсэн гэвэл түүний оноо $k \cdot 0.5$ болно. 2 дахь тоглогч бодлогын нөхцөл ёсоор нэг ялалт байгуулсан байх ба оноо нь эхний тоглогчоос бага байхын тулд хоёр ялагдсан байхад хүрнэ. Иймд түүний оноо $1 + 0 + 0 + (k-3) \cdot 0.5 = (k-1) \cdot 0.5$ болно. Энэ зохион байгуулалтыг цааш нь үргэлжлүүлбэл хожлын тооноос хожигдлын тоо нь 2 дахин их гарахад хүрэх учир хүн болгонд $\frac{n-1}{2}$ хожлыг нэмж өгөөд нийт онооны дүнг гаргавал $\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + 0.5(0 + 3 + \dots + 3(n-1)) = \frac{7n(n-1)}{4}$ болно. $3C_n^2 < \frac{7}{4}n(n-1) < 4C_n^2$ ба $4C_n^2 - \frac{7}{4}n(n-1) = \frac{1}{4}n(n-1)$ тул одоо хүн болгонд $\frac{1}{2}(n-1)$ тэнцээг нэмж өгөхөд хангалттай. $n \geq 8$ байх тэгш тоо тохиолдолд эхний тоглогчоос $\frac{n}{2}$ дахь тоглогч, $\frac{n}{2} + 1$ тоглогчоос хамгийн сүүлийн тоглогч хүртэл ялалтын тоо 1-ээр, харин яг $\frac{n}{2}$ ба $\frac{n}{2} + 1$ тоглогчийн ялалтын тоо 2-оор ялгагдаж байхаар өмнөхийн адил

зохион байгуулалт хийж нийт оноог бодвол

$$\left(\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{2}\right) + \frac{n^2}{2} + 0.5 \left(0 + 3 + \dots + 3\left(\frac{n}{2} - 1\right) + \left(3 \cdot \frac{n}{2} + 3\right) + \left(3\left(\frac{n}{2} + 1\right) + 3\right) + \dots + 3(n-1) + 3\right) = \frac{7n^2}{4}$$

болно. $3C_n^2 < \frac{7}{4}n^2 < 4C_n^2$ ба $4C_n^2 - \frac{7}{4}n^2 = \frac{n(n-8)}{4}$ тул одоо хүн бүрт $\frac{n-8}{2}$ тэнцээ нэмж өгөхөд бодлогын нөхцлийг хангах ялалтын тоо ба онооны дараалал гарна.

Дээрх зохион байгуулалт $n < 8$ тэгш тоо ба $n = 3$ үед (1-р тоглогчийн тэнцээний тоо үлдсэн хоёр тоглогчийн нийт тэнцээний тооноос илүү гарч байгаа) биелэхгүй нь ойлгомжтой. Иймд $n = 3, 4, 6$ тохиолдлуудыг тусад нь авч үзэх шаардлагатай. Жишээ нь $n = 3$ болог. Тэгвэл тэнцээний тоо 3-аар ялгагдах ба 1-р тоглогчийн тэнцээ үлдсэн хоёр тоглогчийн нийт тэнцээний тоотой тэнцүү байх тул дээрх нөхцлийг хангах хамгийн бага гурвал 9, 6, 3 болох ба 1-р хүн дор хаяж 1 хожигдсон байхад хүрэх тул уг тоглогч дор хаяж 12 буюу 6 тойрог тоглосон байх шаардлагатай. Тухайлбал:

	$\frac{1}{2}$	0		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	1		$\frac{1}{2}$	1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$		0	$\frac{1}{2}$		0	$\frac{1}{2}$		0	$\frac{1}{2}$		1	$\frac{1}{2}$		1	$\frac{1}{2}$		1
1	1		$\frac{1}{2}$	1		$\frac{1}{2}$	1		0	0		0	0		$\frac{1}{2}$	0	

байх зургаан тойрог тоглолт бодлогын нөхцлийг хангана. Иймд $r(3) = 6$ болно.

ММО-34, БАГЫН БАГШ, III ДАВАА

Д.Нарангэрэл

ББ-А1. a ба b -ийн ямар утганд $3a^2 + 16b^2 - 12ab - 24a + 16b + 2110$ илэрхийлэл хамгийн бага утгатай байх вэ?

ББ-А2. 68 ширхэг алмазан шигтгээ өөр өөр жинтэй байв. Туухайгүй тавган жигнүүр дээр 100-аас хэтрэхгүй жигнэлтээр хамгийн хөнгөн ба хамгийн хүнд алмазуудыг ол.

ББ-А3. Тойргийн дагуу суулгасан (тойрог дээр чиглэл тогтоосон) 44 мод тус бүр дээр нэг нэг шувуу сууж байв. Байн байн нэг зэрэг хоёр шувуу эсрэг чиглэлд нисч зэргэлдээ модонд очино. Тэд нэг модон дээр цугларч чадах уу?

ББ-В1. Машины урд дугуйны хээ 25000км яваад, хойт дугуйны хээ 15000км яваад тус тус арилдаг (Шинэ дугуй тавихгүй). Аль болох их явахын тулд хэдийд урд, хойт дугуйгаа сольж тавибал зохих вэ?

ББ-В2. 10×10 хэмжээстэй хүснэгтийн нүднүүдэд 0–99 хүртэлх тоог I мөрөнд 0, 1, ..., 9, II мөрөнд 10, 11, ..., 19 гэх мэтчилэнгээр бичжээ. Дараа нь тоо бүрийн өмнө (+) буюу (–) тэмдгийг багана тус бүрт (+) ба (–) тэмдгийн тоо тэнцүү байхаар тавив. Хүснэгтэд байгаа бүх тооны нийлбэр тэг байна гэж батал.

ББ-В3. Нэгж талтай квадрат дээр аль ч гурав нь нэг шулуун дээр үл орших 101 цэг тэмдэглэв. Талбай нь $\frac{1}{100}$ -ээс их биш байх эдгээр цэгт оройтой гурвалжин олдохыг багал.

Хянан боловсруулсан Ү.Маам

ББ-А1. $S = 3a^2 + 16b^2 - 12ab - 24a + 16b + 2110 = 3(a^2 + 4b^2 - 4ab - 8a + 16b + 16) + 4b^2 - 32b + 2062 = 3(a - 2b - 4)^2 + (2b - 8)^2 + 1998 \geq 1998$ болно, ө.х $\min(S) \geq 1998$ болно.
$$\begin{cases} 2b - 8 = 0 \\ a - 2b - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b = 4 \\ a = 2b + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = 12 \end{cases} \Rightarrow S = 1998 \Rightarrow \min(S) = 1998$$

ба $a = 12$, $b = 4$ үед хамгийн бага утгаа авна.

ББ-А2. Бид 68 алмазыг хоёр хоёроор нь 34 хос болгон хуваая. Хос бүрийн 2 алмазыг жигнүүрээр жигнээд хүндийг нь цуглуулж I хэсэг, хөнгөнийг цуглуулж II хэсэг гээ. Тэгвэл хамгийн хүнд алмаз нь I хэсэгт, хамгийн хөнгөн нь II хэсэг байна. I ба II хэсгийг гаргахад нийт 34 жинлэлт хэрэгтэй (1 хосод 1 жинлэлт). I хэсгийн 34 алмазыг 2,2-оор нь 17 хосод хуваагаад хос тус бүрийн хүндийг нь тус бүр 1,1 жинлэлтээр нийт 17 жинлэлтээр алмазыг авъя. Тэгвэл хамгийн хүнд алмаз нь энэ 17 алмаз дотор байна. Энэ 17 алмазын аль нэг хоёрыг жинлээд хүнд жинтэйг нь дараагийн алмазтай жинлэж хүнд жинтэйг нь авах гэх мэтчилэн энэ үйлдлийг гүйцэтгэвэл 16 жинлэлтийн дараа хамгийн хүнд алмаз олдоно, ө.х I хэсгээс хамгийн хүнд алмазыг $17 + 16 = 33$ жинлэлтийн дараа олж болно. Үүнтэй адилаар II хэсгээс хамгийн хөнгөн алмазыг 33 жинлэлтийн дараа олж болно. Иймд хамгийн хөнгөн ба хүнд алмазыг $33 + 34 + 33 = 100$ жинлэлтийн дараа олж болно.

ББ-А3. Моднуудаа чиглэлийн дагуу аль нэгээс нь эхлэн дугаарлая. Ямар нэг эгшин дэх шувуу бүрийн байрлаж буй моднуудын дугааруудыг өөрт нь харгалзуулсан дарааллууд үүсгэж нийлбэрийг нь сонирхъя. Анхны байрлалд $1 + 2 + \dots + 44 = \frac{44 \cdot 45}{2}$ тоо харгалзана. Нөгөө талаар 2 шувуу нэг зэрэг эсрэг чиглэлд нисч зэргэлдээ моднууддаа очиж дараагийн байрлалыг үүсгэх ба эхний шувууны дугаар ∓ 1 -ээр 2 дахь шувууных ± 1 -ээр нэмэгдэх тул дараагийн байрлалд харгалзах тоо нь өмнөх байрлалд харгалзах тоотой тэнцүү байна. Иймд ямарч байрлалд $\frac{44 \cdot 45}{2}$ тоо харгалзана. Энд бүгд 1 модон дээр очсон үед шувуу бүрт ижил дугаар (k) харгалзах тул нийлбэр нь $44k$ байх

ёстой, ө.х $44k = \frac{44 \cdot 45}{2} \Rightarrow k = \frac{45}{2} \notin \mathbb{N}$ тул шувууд 1 модон дээр цугларч чадахгүй.

ББ-В1. Бид дугуйгаар S км зам яваад сольсон гэе. Тэгвэл урд дугуйны хээний $\frac{S}{25000}$, хойд дугуйны хээний $\frac{S}{15000}$ хэсэг нь элэгдэнэ. Дугуйг сольж тавиад явахад урд дугуйны хээний $1 - \frac{S}{15000}$, хойд дугуйны хээний $1 - \frac{S}{25000}$ хэсэг нь үлдсэн тул урд дугуй $(1 - \frac{S}{15000}) \cdot 25000$ км, хойд дугуй $(1 - \frac{S}{25000}) \cdot 15000$ км зам явах боломжтой. Мөн хамгийн хол зам явах ёстой тул дугуйны хээ ээрэг арилах ёстой буюу урд, хойд дугуй ижил зам явах ёстой.

$$\Rightarrow (1 - \frac{S}{25000}) \cdot 15000 = (1 - \frac{S}{15000}) \cdot 25000 \Rightarrow$$

$$15000 - \frac{15000S}{25000} = 25000 - \frac{25000S}{15000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{25}{15}S - \frac{15}{25}S = 25000 - 15000 \Rightarrow \frac{5}{3}S - \frac{3}{5}S = 10000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{16}{15}S = 10000 \Rightarrow S = \frac{150000}{16} = 9375\text{км}$$

болно, ө.х 9375км яваад дугуйгаа сольж тавибал хамгийн хол явах боломжтой.

ББ-В2. Нөхцөл хангахаар (+), (-) тэмдгүүдийг хүснэгтэд бөглөсөн байг.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Хүснэг-

тээ 2 хүснэгтийн нэгдэлд тавъя. Үүнд I хүснэгтэд нь нүд болгон дахь тоонуудын нэгж, II хүснэгтэд нь нүд болгоны 10-тууд байхаар 2 хүснэгтэд задалбал энэ 2 хүснэгтийн нийлбэр нь анхны хүснэгт гарах юм.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

I хүснэгтийн хувьд багана бүр дэх (+) ба (-) тэмдгийн тоо тэнцүү тул I хүснэгтийн тоонуудын нийлбэр 0 болно.

0	0	0	0	0	0	0	7	8	9
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
40	40	40	40	40	40	40	40	40	40
50	50	50	50	50	50	50	20	50	50
60	60	60	60	60	60	60	60	60	60
70	70	70	70	70	70	70	70	70	70
80	80	80	80	80	80	80	80	80	80
90	90	90	90	90	90	90	90	90	90

II хүснэгтийн хувьд мөр бүр дэх (+) ба (-) тэмдгийн тоо тэнцүү тул хүснэгтийн тоонуудын нийлбэр 0 болно гэдгээс I ба II хүснэгтийн нийлбэр нь анхны хүснэгт тул нийлбэр нь 0 болно.

ББ-В3. Нэгж квадратаа 25 квадратад хуваая. $S_1 = \frac{1}{25}$

				S_1

болно. Дирихлейн зарчмаар 101 цэгээс 5 цэг орших $\frac{1}{25}$ талбайтай квадрат оршино. Түүнийг дахиад голоор нь хуваавал Дирихлейн зарчмаар 3 цэг орших $\frac{1}{50}$ талбайтай тэгш өнцөгт оршино. Тэгвэл гурвалжны талбай хамгийн ихдээ тэгш өнцөгтийн

талбайн хагастай тэнцүү байна. Энэ нь $\frac{1}{100}$ болно.

ММО-34, БАГЫН БАГШ, IV ДАВАА

Ү.Маам

ББ-А1(В.Адьяасүрэн). $n!$ тоо яг 1998 ширхэг тэгээр төгсөж байх n -ийн бүх утгыг ол.

ББ-А2(Ү.Маам). $a \cdot b \cdot c \neq 0$, $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 4$, $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} = 5$ бол $\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3}$ илэрхийллийн утгыг бодож ол.

ББ-А3(Д.Нямсүрэн). $ABCD$ квадратын BC тал дээр M, N цэгүүдийг $BM = MC$, $MN = \frac{1}{2}NC$, $N \in NC$, AM, DN шулуунуудын огтлолцол K бол $\angle AKD$ -г ол.

ББ-В1(В.Адьяасүрэн). $b|a^2-1, b|c^2-1, c|b^2-1, a|b^2-1, a|c^2-1, c|a^2-1$ байх тус бүр нь нэгээс их a, b, c гурван натурал тоо олдох уу?

ББ-В2(Ү.Маам). x, y, z нь $x + y + z = 1$ байх эерэг тоонууд бол $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z}$ илэрхийллийн хамгийн бага утгыг ол.

ББ-В3(Алтангэрэл). $1, 2, \dots, 9$ цифрүүдээс дөрвийг авч ихээс нь багыг хассан ялгавар хамгийн бага байх хоёр оронтой хоёр тоо зохиов. Эдгээр ялгавруудын хамгийн их утгыг ол.

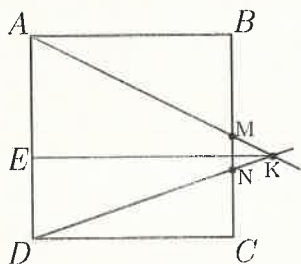
ББ-А1. n -тоог 5-тын тооллын системд бичье.
 $n = a_k 5^k + a_{k-1} 5^{k-1} + \dots + 5a_1 + a_0$, $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $i = 1, 2, \dots, k$, $n!$ -д орох 5-ын зэрэг нь: $\beta = (a_k 5^{k-1} + \dots + a_1) + (a_k 5^{k-2} + \dots + a_2) + \dots + (a_k 5 + a_{k-1}) + a_k = a_k(1 + 5 + \dots + 5^{k-1}) + a_{k-1}(1 + 5 + \dots + 5^{k-2}) + \dots + a_1 = a_k \frac{5^k - 1}{4} + a_{k-1} \frac{5^{k-1} - 1}{4} + \dots + a_2 \frac{5^2 - 1}{4} + a_1 \frac{5 - 1}{4}$. $n!$ тооны төгсгөлийн тэгийн тоо $n!$

тоонд оролцсон 5-ын зэргийн тоотой тэнцүү. $a_k \frac{5^k-1}{4} + a_{k-1} \frac{5^{k-1}-1}{4} + \dots + a_2 \frac{5^2-1}{4} + a_1 \frac{5-1}{4} = 1998$. Эндээс $a_k(5^k-1) + a_{k-1}(5^{k-1}-1) + \dots + a_1(5-1) = 7992$ гэж гарна. $5^6-1 > 7992$ тул $k \leq 5$. $2(5^5-1) + 2(5^4-1) + 4(5^3-1) + 0(5^2-1) + 0(5-1) = 7992$ учраас $n = 2 \cdot 5^5 + 2 \cdot 5^4 + 4 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + a_0 = 8000 + a_0$, $a_0 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Хариу: 8000, 8001, 8002, 8003, 8004.

ББ-А2. $\frac{a}{b} = x$, $\frac{b}{c} = y$, $\frac{c}{a} = z$ гэе. Тэгвэл $xyz = 1$, $x+y+z = 4$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 5$ болох ба $5 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = xy + xz + yz$ болно. $\frac{a^3}{b^3} = x^3$, $\frac{b^3}{c^3} = y^3$, $\frac{c^3}{a^3} = z^3$ тул $\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3} = x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz) + 3xyz = (x+y+z)((x+y+z)^2 - 3(xy+yz+xz)) + 3xyz = 4(16 - 3 \cdot 5) + 3 = 7$ байна.

ББ-А3. 1-р арга:



K -аас AD -д KE перпендикуляр буулгавал $AB \parallel KE \parallel DC$ болох учир $\angle EKD = \angle KDC = \alpha$, $\angle EKA = \angle KAB = \beta$ гэе. Бодлогын нөхцөл ёсоор

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{CN}{DC} = \frac{1}{3},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 1$$

Эндээс $\alpha + \beta = \angle DKE + \angle EKA = \angle DKA = 45^\circ$ болно.

2-р арга: Квадратын талыг a гэвэл бодлогын нөхцөл ёсоор $BM = \frac{a}{2}$, $MN = \frac{a}{6}$, $NC = \frac{a}{3}$ болно. Иймд $\triangle AMB$, $\triangle DNC$ гурвалжнууд тэгш өнцөгт гурвалжнууд гэдгээс

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{3}a,$$

$$DN = \sqrt{DC^2 + CN^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}a.$$

$\triangle MKN \sim \triangle AKD$ ба төсөөгийн коэффициент $\eta = \frac{MN}{AD} = \frac{\frac{1}{6}a}{\frac{1}{6}a} = \frac{1}{6}$ тул $MK = \frac{1}{5}AM = \frac{\sqrt{5}a}{10}$, $NK = \frac{1}{5}DN = \frac{\sqrt{10}a}{15}$. $\triangle MKN$ -ны K оройгоос буулгасан өндөр нь $\frac{1}{5}AB = \frac{1}{5}a$ болох учраас $S_{MKN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}a \cdot \frac{1}{6}a = \frac{a^2}{60}$, нөгөө талаас $S_{MKN} = \frac{1}{2} \cdot MK \cdot NK \cdot \sin(\angle MKN) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}a}{10} \cdot \frac{\sqrt{10}a}{15} \cdot \sin(\angle MKN) = \frac{\sqrt{2}}{60}a^2 \sin(\angle MKN)$, $\sin(\angle MKN) = \frac{a^2}{60} : \frac{\sqrt{2}a^2}{60} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ болж $\angle MKN = 45^\circ$ байна гэх мэт олон аргаар бодож болно.

ББ-В1. Олдохгүй. Эсрэгээс нь олддог гээ. $a \geq b \geq c$ байг. $b|a^2 - 1$ гэдгээс $(a, b) = 1$ гэж гарна.

$$\left. \begin{array}{l} a|c^2 - 1 \\ b|c^2 - 1 \\ (a, b) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a \cdot b|c^2 - 1 \Rightarrow c^2 - 1 \geq a \cdot b \Rightarrow c^2 > ab$$

болох ба нөгөө талаас $\left. \begin{array}{l} a \geq c \\ b \geq c \end{array} \right\} \Rightarrow ab \geq c^2$ болж зөрчилдөв.

ББ-В2.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} &= \frac{1}{x}(x + y + z) + \frac{4}{y}(x + y + z) + \frac{9}{z}(x + y + z) = \\ &= 14 + \left(\frac{y}{x} + \frac{4x}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{9x}{z}\right) + \left(\frac{4z}{y} + \frac{9y}{z}\right) \end{aligned}$$

болох ба хаалган доторхи илэрхийлэл тус бүр Кошийн тэнцэл биш ёсоор $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} \geq 14 + 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{4x}{y}} + 2\sqrt{\frac{z}{x} \cdot \frac{9x}{z}} + 2\sqrt{\frac{4z}{y} \cdot \frac{9y}{z}} = 14 + 4 + 6 + 12 = 36$. Коши-Буняковскийн тэнцэл биш хэрэглэж бодвол:

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} = (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} \right) \geq$$

$$\geq \left(\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y} \cdot \frac{2}{\sqrt{y}} + \sqrt{z} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} \right)^2 = 36$$

ББ-В3. Авсан 4 цифр дотор ялгавраас хамгийн бага байдаг нь a, b байг. Энд $a > b$ гэж үзвэл $a - b \leq 2$ байна. Эсрэг тохиолдолд 4 цифрийн хамгийн их, хамгийн бага хоёрын ялгавар нь 9-өөс багагүй болоход хүрнэ. Үлдсэн 2 тоог c, d гэе. $c > d$ гэвэл $c - d \geq 2$ тул $\overline{ad} - \overline{bc} = 10a + d - 10b - c = 10(a - b) - (c - d) \leq 18$ болно. Иймд ямар ч 4 тооны хувьд бидний сонирхсон тоо 18-аас ихгүй байна. Одоо яг 18 байдаг 4 тоо олоход хангалттай, жишээ нь 1,3,6,8 тоонуудын хувьд хамгийн бага ялгавар нь 18 байна.

ММО-34, Дундын багш, III ДАВАА

В.Адьяасүрэн

ДБ-А1. $x^3 + ax^2 + bx + 1998$ олон гишүүнтийн бүх язгуур нь сөрөг бодит хэсэгтэй байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцлийг ол.

ДБ-А2. Хоёр тойрог A, B цэгүүдээр огтлолцов. A цэгийг дайруулан татсан шулуун эхний тойргийг C цэгээр, хоёр дахийг D цэгээр тус тус огтолно. Хэрэв M, N нь A цэгийг агуулаагүй BC, BD нумуудын дундаж цэгүүд, харин K нь CD хэрчмийн дундаж цэг бол MKN өнцөг тэгш болохыг батал.

ДБ-А3. 3^n тооны цифрүүдийн нийлбэр нь 3^{n+1} тооны цифрүүдийн нийлбэрээс багагүй байх төгсгөлгүй олон n тоо олдохыг үзүүл.

ДБ-В1. Шулуун дээр n ширхэг цэг өгөв. Уг шулуун дээр эдгээр цэгүүд хүртэлх зайнуудын нийлбэр хамгийн бага байх цэгүүдийг ол.

ДБ-В2. Олон өнцөгтийн (гүдгэр биш байж болно) 100 ширхэг тэгш өнцөгтөд хувааж болох авч 99 ширхэг тэгш өнцөгтөд хувааж болдоггүй байг. Тэгвэл уг олон өнцөгтийг 100 гурвалжинд хувааж болохгүйг батал.

ДБ-В3. 5 радиустай багтсан бөмбөрцөг тетраэдрийн нэг талсыг хүндийн төвөөр, хоёр дахийг орто төвөөр, гурав дахийг багтсан тойргийн төвөөр тус тус цүргэнэ. Тэгвэл уг тетраэдрийн эзэлхүүн 1998-аас бага болохыг батал. Радиус 6 үед үнэн үү?

Хянан боловсруулсан Б.Баясгалан, В.Адьяасүрэн

ДБ-А1. $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ олон гишүүнтийн бүх язгуурууд сөрөг бодит хэсэгтэй байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $a > 0$, $ab > c$, $c > 0$ гэж баталъя.

$P(x)$ олон гишүүнтийн язгууруудыг x_1, x_2, x_3 гэж тэмдэглэе.

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a$$

Вьетийн теоремоор $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b$ байх ба

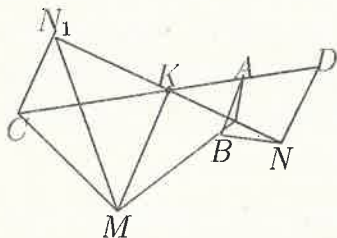
$$x_1x_2x_3 = -c$$

эндээс $-(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) = ab - c$ гэж гарна.

Хэрэв олон гишүүнтийн бүх язгуур бодит бөгөөд сөрөг байвал $a > 0$, $c > 0$, $ab - c > 0$ байна. Хэрэв x_1 язгуур нь бодит, бусад хоёр язгуур x_2, x_3 нь сөрөг бодит хэсэгтэй хосмог комплекс язгуур байвал $x_2 + x_3 < 0$, $x_2x_3 > 0$, $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3) > 0$ байна. Иймд $a > 0$, $c > 0$, $ab - c > 0$ болж зайлшгүй нөхцөл батлагдав. $a > 0$, $c > 0$, $ab - c > 0$ байг. Хэрэв олон гишүүнтийн гурван язгуур гурвуулаа бодит байвал $c > 0$ гэдгээс нэг язгуур нь (x_1) сөрөг, нөгөө 2 язгуур нь ижил тэмдэгтэй гэж мөрдөн гарна. $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ байвал $-x_1 - x_2 = a + x_3 > 0$, $-x_1 - x_3 = a + x_2 > 0$ болно. Тэгвэл $-(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) < 0$ болж $ab - c > 0$ гэдэгт зөрчинө. Иймээс $x_2 < 0$, $x_3 < 0$.

б) x_1 нь бодит, x_2 ба x_3 нь хосмог комплекс язгуурууд байвал $x_2 x_3 > 0$, $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3) > 0$ байна. $c > 0$ гэдгээс $x_1 < 0$ гэж гарна. $ab - c > 0$ гэдгээс $2\Re(x_2) = x_2 + x_3 < 0$ гэж гарна. Хүрэлцээтэй нөхцөл батлагдав.

ДБ-А2. $Z_k(N) = N_1$ гэе.



Тэгвэл гурвалжнууд тэнцэх ТӨГ шинжээр $\triangle KCN_1 = \triangle KDN$. Эндээс $CN_1 = ND$, $\angle N_1CK = \angle NDK = \pi - \angle ABK$ гэж гарна. Нөгөө талаас $\angle MCK = \pi - \angle ABM$. Иймд $\angle N_1CM = \angle MBN$.

Бодлогын нөхцлөөс $CM = MB$, $BN = ND = CN_1$. Иймд $\triangle MCN_1 = \triangle MBN$ болох ба эндээс $MN_1 = MN$ гэж гарна. Ийнхүү MK нь MNN_1 ($MN = MN_1$) адил хажуут гурвалжны медиан болох учраас $\angle MKN = 90^\circ$.

ДБ-А3. Эсрэгээс нь бодлогын нөхцөлийг хангах n тоо төгсгөлөг гэж үзье. Тодруулан хэлбэл ямар нэг n -ээс эхлээд $S(3^n) < S(3^{n+1})$ гэж үзье. Энд $S(n)$ -ээр n тооны цифрүүдийн нийлбэрийг тэмдэглэв.

3^n , 3^{n+1} тоонууд тус бүрдээ 9-д хуваагдах тул $S(3^n)$, $S(3^{n+1})$ тоонууд 9-д хуваагдана. Иймээс $S(3^n) < S(3^{n+1})$ гэдгээс $S(3^n) \leq S(3^{n+1}) - 9$ гэж гарна. Эндээс аливаа натурал k -ийн хувьд $S_{3^{n+k}} \geq S(3^n) + 9k > 9k$ гэж мөрдөнө. Иймд $3^{n+k} > 10^k$. $n = k$ үед $3^{2n} > 10^n \Leftrightarrow 9^n > 10^n$ болж зөрчилд хүрэв. Ийнхүү зөрчил нь бодлогын нөхцлийг хангах n тоо төгсгөлгүй олон олдоно гэдгийг нотолж байна.

ДБ-В1. Өгөгдсөн шулууны координатын шулуун болгоод, өгөгдсөн цэгүүдийн координатыг зүүн талаас нь эхлэн $a_1, a_2, \dots, a_n$ гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Бидний авч үзэж буй бодлого нь $f(x) = |x - a_1| + \dots + |x - a_n|$ функц хамгийн бага утгаа авах x -үүдийг олох

бодлогод шилжинэ.

а) $n = 2m$ байг.

$$1) \forall x \in]-\infty, a_1[: f(x) = (a_n - a_1) + \dots + (a_{m+1} - a_m) +$$

$$2(a_1 - x) + \dots + 2(a_m - x) > (a_n - a_1) + \dots + (a_{m+1} - a_m)$$

$$2) \forall x \in [a_k, a_{k+1}[, k = 1, 2, \dots, m-1 f(x) = (a_n - a_1) + \dots +$$

$$(a_{m+1} - a_m) + 2(a_{k+1} - x) + \dots + 2(a_m - x) > (a_n - a_1) + \dots + (a_{m+1} - a_m)$$

$$3) \forall x \in [a_m, a_{m+1}]: f(x) = (a_n - a_1) + \dots + (a_{m+1} - a_m)$$

$$4) \forall x \in]a_k, a_{k+1}], k = m+1, m+2, \dots, n-1 f(x) = (a_n -$$

$$a_1) + \dots + (a_{m+1} - a_m) + 2(x - a_k) + \dots + 2(x - a_{m+1}) >$$

$$(a_n - a_1) + \dots + (a_{m+1} - a_m)$$

$$5) \forall x \in [a_n, \infty[: f(x) = (a_n - a_1) + \dots + (a_{m+1} - a_m) + 2(x -$$

$$a_1) + 2(x - a_2) + \dots + 2(x - a_n) > (a_n - a_1) + \dots + (a_{m+1} - a_m)$$

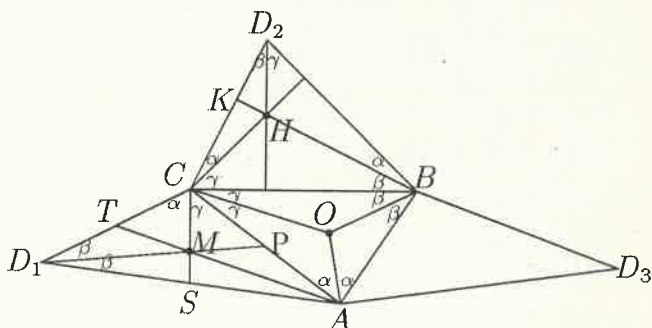
Ийнхүү $n = 2m$ үед $f(x)$ функц хамгийн бага утгадаа хүрэх x -үүдийн олонлог нь $[a_m, a_{m+1}]$ хэрчим болно.

б) $n = 2m + 1$ байг. а) тохиолдолтой адилаар бодож $f(x)$ функц хамгийн бага утгадаа хүрэх x -үүд нь a_{m+1} цэг болно гэж гарна.

ДБ-В2. Лемм. $2n$ өнцөгтийг тэгш өнцөгтүүдэд хувааж болдог байвал түүний $(n - 1)$ -ээс илүүгүй тэгш өнцөгтүүдэд хувааж болно. Олон өнцөгтийн бүх өнцгүүдийн нийлбэр $S = (2n - 2) \cdot 180^\circ$ ба уул олон өнцөгтийг тэгш өнцөгтүүдэд хувааж болох учраас өнцгүүд нь 90° буюу 270° байна. Хэрэв бүх өнцгүүд нь 90° байвал уул олон өнцөгт тэгш өнцөгт байна. Ямар нэг A өнцөг нь 270° байг. Түүний аль нэг талын олон өнцөгтийн хилтэй огтлолцох хүртэл үргэлжлүүлбэ. Энэ үйлдлээр 270° хэмжээтэй өнцгийн тоо багасна. Энэ үйлдлийг давтсаар олон өнцөгтийг 270° хэмжээтэй өнцөг агуулаагүй m хэсэгт хуваая. Энэхүү m тэгш өнцөгтийн дотоод өнцгүүдийн нийлбэр $360^\circ \cdot m$ -тэй тэнцүү. Дээр тэмдэглэсээр $360^\circ \cdot m \leq (2m - 2) \cdot 180^\circ$. Эндээс $m \leq n - 1$ гэж гарна. Энэхүү лемм болон бодлогын нөхцлийг ашиглавал өгөгдсөн

олон өнцөгт 200-аас олон оройтой гэж гарна. Олон өнцөгтийн k ширхэг гурвалжинд хуваая. Эдгээр гурвалжны дотоод өнцгүүдийн нийлбэр $S = 180^\circ \cdot k$. Гурвалжны өнцгүүд нь олон өнцөгтийн өнцгийн бүрэлдэхүүнд орох ба олон өнцөгтийн өнцөг бүр 90° -аас багагүй тул $180^\circ \cdot k > 200 \cdot 90^\circ$. Эндээс $k > 100$. Ийнхүү олон өнцөгтийг 100 гурвалжинд хувааж болохгүй.

ДБ-В3. $ABCD$ тетраэдрт багтсан бөмбөлөг ABC талсын багтсан тойргийн төв O -г, ACD талсын хүндийн төв M , BCD талсын ортотөв H -ийг шүргэж байг. $ABCD$ тетраэдрийн дэлгээсийг авч үзье.



$AM = AO$, $CM = CO$ гэдэг нь илт. Гурвалжнууд тэнцэх ТТТ шинжээр $\triangle AMC = \triangle AOC$. Эндээс $\angle MAC = \angle OAC$, $\angle MCA = \angle OCA$. Үүний адилаар $\angle OBC = \angle CBH$, $\angle OCB = \angle BCH$ гэж батлагдана. Ийнхүү

$$\angle OAC = \angle OAB = \angle CAM = \alpha$$

$$\angle OBA = \angle OBC = \angle CBH = \beta$$

$$\angle OCB = \angle OCA = \angle ACM = \angle BCH = \gamma$$

ABC гурвалжнаас $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.

BKC гурвалжнаас $\beta + \gamma + \angle HCK = 90^\circ$. Иймд $\angle HCK = \alpha$.

Иймээс $\angle KBD_2 = \alpha$, $\angle HD_2C = \beta$. Ийнхүү $\angle HD_2B = \gamma$.

Тэгвэл $\angle MCD_1 = \angle HCD_2 = \alpha$, $\angle MD_1C = \angle HD_2C = \beta$.

D_1PC гурвалжнаас $\angle D_1PC = 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = 90^\circ$.

Тодруулан хэлбэл D_1P нь AD_1C гурвалжны медиан ч, өндөр ч болно. Иймд $AD_1 = D_1C$ ба $\alpha = \gamma$. Ийнхүү $\triangle AD_1T = \triangle CD_1S \Rightarrow \angle D_1AT = \angle D_1CS = \alpha$. Цаашилбал AT нь D_1AC гурвалжны биссектрис ч ба медиан ч болно. Ийнхүү $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$. Тодруулан хэлбэл $ABCD$ тетраэдр нь зөв тетраэдр болно.

а) багтсан бөмбөлгийн радиус $R = 5$ үед $V_{ABCD} < 1998$

б) багтсан бөмбөлгийн радиус $R = 6$ үед $V_{ABCD} > 1998$.

Эдгээр үнэлгээг хялбархан шалгаж болно.

ММО-34, ДУНДЫН БАГШ, IV ДАВАА

В.Адьяасүрэн

ДБ-А1(Ц.Дашдорж). $\{a_n\}$ дараалал $\sum_{d|n} a_d = 3^n$ гэж то-

дорхойлогдсон бол $n|a_n$ болохыг батал.

ДБ-А2(Л.Оюунцэцэг). $P(x)$ нь $x_1, x_2, \dots, x_n$ гэсэн n ширхэг бодит ялгаатай язгууртай n зэргийн олон гишүүнт бол

$$\sum_{i < j} \frac{1}{x_j - x_i} \left(\frac{1}{P''(x_j)} - \frac{1}{P''(x_i)} \right) = 0$$

болохыг батал.

ДБ-А3(В.Адьяасүрэн). ABC гурвалжны AB, AC талууд болон түүний багтаасан тойргийг D цэгт дооод байдлаар шүргэсэн тойрог татав. ADC өнцгийн биссектрис ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төвийг дайрна гэж батал.

ДБ-В1(Ц.Батхүү). Эерэг бүхэл тоон $\{f(n)_{n=1}^\infty\}$ дараалал $f(1) = 1$, $f(n) = \begin{cases} f(n-1) - n, & f(n-1) > n \\ f(n-1) + n, & f(n-1) \leq n \end{cases}$,

$n \geq 2$ гэж тодорхойлогджээ. $S = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = 1998\}$ байг. S -ийн хамгийн бага ба хамгийн их элементийг ол.

ДБ-В2(Б.Чулуундорж). $a_n = 1998^n + 1999^n - 2000$, $n \geq 1$ дараалал өгөгдөв. Энэ дараалалд аль ч хоёр нь харилцан анхны байх төгсгөлгүй олон тоо олдохыг батал.

ДБ-В3(Л.Оюунцэцэг). Хавтгайн квадрат торны оройн зарим цэгүүдийг n өнгөөр будав. Тэдгээрийн аль ч дөрвөн ижил өнгийн цэгүүд нэг тойрог дээр үл оршдог бол уг будагдсан цэгүүдээс нэгийг ч агуулаагүй 1998 радиустай дугуй олдохыг батал.

ДБ-А1. Мёбиусын хувиргалтын томъёогоор

$$\sum_{d|n} a_d = 3^n \Rightarrow a_n = \sum_{d|n} 3^d \mu\left(\frac{n}{d}\right) \quad (1)$$

болно. $n = \prod_{i=1}^s p_i^{\alpha_i}$ байг. $\mu(k) = \begin{cases} 0, & p^2 | k \\ (-1)^s, & k = p_1 p_2 \dots p_s \\ 1, & k = 1 \end{cases}$

гэж тодорхойлогддог тул $\mu\left(\frac{n}{d}\right) \neq 0$ байхын тулд $p_i, i = \overline{1, s}$ бүрийн хувьд $p_i^{\alpha_i - 1} | d$ байх ёстой. $p_1^{\alpha_1} | a_n$ гэж баталбал хангалттай. a_n -ийг $\pm(3^{p_1^{\alpha_1} \cdot q} - 3^{p_1^{\alpha_1 - 1} \cdot q})$ хэлбэрийн нэмэгдэхүүнүүдэд задалж болно. Эйлерийн теоремоор $(p, 3) = 1$ бол $3^{p_1^{\alpha_1} \cdot q} - 3^{p_1^{\alpha_1 - 1} \cdot q} = (3^{p_1^{\alpha_1}} - 3^{p_1^{\alpha_1 - 1}} - 1)B = 3^{p_1^{\alpha_1 - 1}}(3^{p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}} - 1)B \equiv 0 \pmod{p_1^{\alpha_1}}$ болно. Учир нь $\varphi(p_1^{\alpha_1}) = p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}$ байдаг билээ. Хэрэв $p_1 = 3$ бол $3^{p_1^{\alpha_1 - 1}} \equiv 0 \pmod{p_1^{\alpha_1}}$ гэдэг нь илт.

$$\Delta M'A'B' \Rightarrow \frac{M'K'}{M'A'} = \frac{M'L'}{M'B'}. \quad \text{ГЭВЧ } M'K' = \frac{k^2 \cdot KM}{DK \cdot DM},$$

$$M'A' = \frac{k^2 \cdot MA}{DM \cdot DA}, \quad M'L' = \frac{k^2 \cdot ML}{DM \cdot DL}, \quad M'B' = \frac{k^2 \cdot MB}{DM \cdot DB} \text{ туйл}$$

$$\frac{KM}{DK} \cdot \frac{DA}{MA} = \frac{ML}{BM} \cdot \frac{DB}{DL} \quad (1)$$

болно. Нөгөө талаас Птолемейн теоремоор $DK \cdot MA = AD \cdot KM + AK \cdot MD$, $BM \cdot DL = BD \cdot ML + MD \cdot LB$ байх учраас (1)-ээс

$$AK \cdot ML \cdot DB = KM \cdot DA \cdot LB \quad (2)$$

гэж гарна.

ω тойргийн төвийг O , радиусыг нь R , ω_1 тойргийн төвийг O_1 , радиусыг нь R_1 гэж тэмдэглэе. ADO гурвалжин ба AO_1 чевианы хувьд Стюартын теорем хэрэглэвэл: $AO_1^2 \cdot R = AD^2(R - R_1) + R^2 R_1 - R(R - R_1)R_1 = AD^2(R - R_1) + RR_1^2 \Rightarrow$

$$AD^2(R - R_1) = R(AO_1^2 - R_1^2) = R \cdot AK^2 \quad (3)$$

Үүний адилаар BDO гурвалжин ба BO_1 чевианы хувьд Стюартын теорем хэрэглээд

$$BD^2(R - R_1) = R \cdot BL^2 \quad (4)$$

гэж олно. (3) ба (4)-өөс

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AK}{BL} \Leftrightarrow AD \cdot BL = AK \cdot BD \quad (5)$$

Иймд (1) ба (5)-аас $ML = KM$ гэж гарт бодлого бодогдох.

ДБ-В1. Х ангийн ВЗ. бодлогын бодолтыг үз.

ДБ-В2. Лемм. $a_{\varphi(x)} = 1998^{4x+1} + 1999^{4x+1} - 2000 \equiv 0(q)$ жишлэг (энд $A \geq 2$ байх $499 \nmid A$ тэгш тоо, $q = 499k + 1$)

хэлбэрийн анхны тоо) үл биелэх, 499 $\nmid x$ байх x гэсэн бүхэл тоо олдоно.

Баталгаа. Эсрэгээс нь дурын 499 $\nmid x$ тооны хувьд

$$a_{\varphi(x)} = 1998^{Ax+1} + 1999^{Ax+1} - 2000 \equiv 0(q) \quad (*)$$

жишлэг биелдэг байг. Тэгвэл

$$1998^{2Ax+1} + 1999^{2Ax+1} \equiv 2000(q) \quad (1)$$

мөн эндээс

$$1998^{2Ax+2} + 1998 \cdot 1999^{2Ax+1} \equiv 1998 \cdot 2000(q) \quad (2)$$

$$1999 \cdot 1998^{2Ax+1} + 1999^{2Ax+2} \equiv 1999 \cdot 2000(q) \quad (3)$$

(2) ба (3)-ыг нэмбэл

$$\begin{aligned} 1998^{2Ax+2} + 1999^{2Ax+2} + 1998 \cdot 1999^{2Ax+1} + 1999 \cdot 1998^{2Ax+1} &\equiv \\ &\equiv 2000(1998 + 1999)(q) \end{aligned} \quad (4)$$

ба (*)-ийг квадрат зэрэгт дэвшүүлбэл

$$1998^{2Ax+2} + 1999^{2Ax+2} + 2 \cdot 1998^{Ax+1} \cdot 1999^{Ax+1} \equiv 2000^2(q) \quad (5)$$

$$(4) \text{ ба } (5)\text{-аас } 2000^2 - 2 \cdot 1998^{Ax+1} \cdot 1999^{Ax+1} + 1998 \cdot 1999^{2Ax+1} + 1999 \cdot 1998^{2Ax+1} \equiv 2000 \cdot 3997(q) \Rightarrow$$

$$1998 \cdot 1999 \cdot (1999^{2Ax} + 1998^{2Ax} - 2 \cdot 1998^{Ax} \cdot 1999^{Ax}) \equiv 2000 \cdot 1997(q)$$

Эндээс

$$(1999^{Ax} - 1998^{Ax})^2 \equiv 2000 \cdot 1997 \cdot 1998^{-1} \cdot 1999^{-1}(q) \quad (6)$$

тэнцэтгэл $\forall x$ хувьд биелэх тул $x = 2$ үед

$$(1999^A - 1998^A)^2 \cdot (1999^A + 1998^A)^2 \equiv 2000 \cdot 1997 \cdot 1998^{-1} \cdot 1999^{-1}.$$

$$\cdot (1999^A + 1998^A)^2 \equiv 2000 \cdot 1997 \cdot 1998^{-1} \cdot 1999^{-1}(q) \quad (7)$$

Хэрвээ $q \neq 1997$ гэвэл эндээс $1998^A + 1999^A = \pm 1(q)$.

$$(*) \Rightarrow 1998 \cdot (1998^{Ax} + 1999^{Ax}) \equiv 2000 - 1999^{Ax}(q)$$

а) $1998^A + 1999^A = 1(q)$ гэвэл $1998 \cdot 1 \equiv 2000 - 1999^A(q) \Rightarrow 1999^A \equiv 2(q) \Rightarrow 1998^A \equiv -1(q)$. Иймд $(*)$ нь $1998^{Ax+1} + 1999^{Ax+1} \equiv 1998 \cdot (-1)^x + 1999 \cdot 2^x \equiv 2000(q)$. Энд $x = 2$ гэж сонговол $1998 + 1999 \cdot 4 \equiv 2000(q)$ гэсэн худлаа тэнцэлд хүрнэ.

б) $1998^A + 1999^A \equiv -1(q)$ гэвэл $-1998 \equiv 2000 - 1999^A(q)$, $1999^A \equiv 3998(q) \Rightarrow 1998^A \equiv -1 - 3998(q) \equiv -3999(q)$. Иймд $1999^A = 3998(q)$ ба $1998^A \equiv -3999(q)$. Эндээс $(*)$ нь $(-3999)^x \cdot 1998 + (3998)^x \cdot 1999 \equiv 2000(q)$ болох бөгөөд уг жишлэг $x = 2$ үед илэрхий худлаа юм.

Хэрвээ $q = 1997 = 4 \cdot 499 + 1$ гэвэл $(6) \Rightarrow 1999^{Ax} - 1998^{Ax} \equiv 0(1997) \Rightarrow 2^{Ax} - 1 \equiv 0(1997)$. Гэтэл $499 \nmid A$ тул уг жишлэг $499 \mid A$ үед ө/х $499 \mid x$ үед л зөвхөн биелэх тул $x = 1$ авахад хангалттай. Лемм батлагдав.

Одоо бодлогын бодолтыг хийе. Уг дараалалд аль ч 2 нь харилцан анхны төгсгөлөг тоо багтдаг бөгөөд тэдгээрийг $b_1, \dots, b_s$ гэж тэмдэглэвэл $\prod_1^s b_i = \prod_1^k p_j^{\alpha_j} \cdot \prod_1^{\ell} q_i^{\beta_i}$, энд $p_j \neq 1(499)$ ба $q_i \equiv 1(499)$ байх анхны тоонууд. $\varphi(x) = x \cdot \prod_1^k (p_j - 1) + 1$ дугаартай $a_{\varphi(x)}$ гишүүнийг сонирхъя.

$\forall n \in \mathbb{N}$ хувьд $a_n = (-1)^n - 2(1998)$ ба $1998 = 3^2 \cdot 2 \cdot 37 \Rightarrow a_n \equiv -1(3)$, $a_n \equiv -1(37)$ тул $(a_n, 1998) = 1$. Мөн $a_{2n-1} \equiv (-1)^{2n-1} + 0 - 1 \equiv -2(1999)$. Иймд Фермагийн бага теорем ёсоор $a_{\varphi(x)} \equiv 1998 + 1999 - 2000 \equiv 1997(p_j)$, $j = \overline{1, k}$ болох бөгөөд $(a_{\varphi(x)}, q_i) = 1$, $i = \overline{1, \ell}$ байх $\exists x \in \mathbb{N}$ гэж харуулбал бодолт бодогдох юм (энд $1997 = 499 \cdot 4 + 1$ байдгийг анхаар). Эсрэгээс нь $\forall x \in \mathbb{N}$ хувьд $a_{\varphi(x)} \equiv 0(q_i)$ (энд $q_i = 499k + 1$ хэлбэртэй ямар нэг анхны тоо) байх

ёстой. Энэ нь леммд харшлах тул $(a_{\varphi(x)}, q_i) = 1, i = \overline{1, \ell}$ байх x тоо олдож бодлого бодогдов.

ДБ-В3. Эсрэгээс нь 1998 радиустай дугуй бүрт ядаж нэг будагдсан цэг олддог гэж үзье. Тэгвэл $2 \cdot 1998 = 3996$ талтай ямар ч квадрат авахад будагдсан цэг заавал агуулна. Нэг мөрийн дагуу зэрэгцэн байрласан 3996×3996 хэмжээтэй $3997n + 1$ ширхэг квадрат авахад аль нэг мөр дээр ижил өнгийн хоёр цэг олдоно. $3997n + 1$ ширхэг квадратын зангилааны цэгийг будах буултын тоо төгсгөлөг учир хүрэлцэхүйц их N -ийн хувьд N ширхэг мөрийн дагуу харгалзан баганаар зэрэгцэх мөр бүрт $3997n + 1$ ширхэг квадрат байх хүснэгт авч үзвэл ижил будалттай хоёр мөр олдоно. Энэ хоёр мөрөөс тэгш өнцөгтийн орой болох ижил өнгийн дөрвөн цэг олдоно. Энэхүү дөрвөн цэг нэг тойрог дээр орших тул өгөгдсөн нөхцөлд зөрчинө. Бодлого бодогдов.

ОЛОН УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН XXXIX ОЛИМПИАДАД ОРОЛЦСОН ТУХАЙ

Ц.Дашдорж

ОУМО-39 1998.07.10-21-нд Тайваны нийслэл Тайбэй хотод болж өнгөрлөө. Дэлхийн 76 орон оролцсон энэ тэмцээнд Иран-211, Болгар-195, Унгар, АНУ-186, Тайвань-184, Орос-175, Энэтхэг-174, Украин-166, Вьетнам-158, Югослав-156, Румын-155, Солонгос-154, Австрали-146, Япон-139, Чех-135, Герман-129, Турк, Англи-122, Белорусс-118, Канад-113 оноогоор эхний 20 байранд орж, Монгол, Бразил хоёр 91 оноогоор 30 байранд орлоо. Манайхаас:

Ө.Баттулга	(I сургууль, 10-р анги)	26 оноо
Б.Дэмчигсүрэн	(I сургууль, 10-р анги)	25 оноо
Ж.Эрдэмбилэгт	(XI сургууль, 9-р анги)	15 оноо
Т.Билэгбаатар	(МУИС, Монгол-Турк сур, 10-р анги)	17 оноо
Ч.Алтаннар	(XI сургууль, 10-р анги)	5 оноо
Б.Хөлгөн	(XI сургууль, 10-р анги)	3 оноо

авлаа. Ө.Баттулга, Б.Дэмчигсүрэн нар мөнгөн медаль, Ж.Эрдэмбилэгт, Т.Билэгбаатар нар хүрэл медаль хүртлээ. Багийн орлогч удирдагчаар Өвөрхангай аймгийн Боловсрол Соёлын Төвийн Захирал Б.Мөнхжаргал явлаа.

ОУМО-40 Румынд 1999.07.10-22-нд болно.

ОУ-1. $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн AC , BD диагоналиуд перпендикуляр ба AB , DC эсрэг талууд параллель биш. AB ба DC талуудын дундаж перпендикулярууд нь $ABCD$ дотор орших P цэгт огтлолцдог байг. $ABCD$ багтсан дөрвөн өнцөгт байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь ABP , CDP гурвалжуудын талбай тэнцүү байх явдал гэдгийг батал.

ОУ-2. Тэмцээнд a өрсөлдөгч, b шүүгч оролцсон ба $3 \leq b$ сондгой тоо. Шүүгч бүр өрсөлдөгч бүрийг "ээрэг" эсвэл "сөрөг" гэж үнэлнэ. Ямар ч хоёр шүүгчийн хосыг авахад тэдний үнэлнээ хамгийн ихдээ k өрсөлдөгч дээр давхацдаг үед $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$ гэж батал.

ОУ-3. $d(n)$ -ээр натурал тоо n -ийн бүх натурал хуваагчдын тоог тэмдэглэе (1 ба n -г оруулаад). Ямар нэг n -ийн хувьд $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$ байх бүх натурал тоо k -г ол.

ОУ-4. $xy^2 + y + 7$ нь $x^2y + x + y$ -г хуваадаг байх натурал тоонуудын бүх (x, y) хосыг ол.

ОУ-5. $\triangle ABC$ -д багтсан тойргийн төв нь I байг. Уг тойрог $\triangle ABC$ -ийн BC , CA , AB талуудыг K , L , M цэгүүдэд шүргэнэ. B -г дайрсан MK -тэй параллель шулуун нь LM ба LK шулуунуудыг R ба S цэгт огтолно. $\angle RIS$ хурц гэж батал.

ОУ-6. Дурын $s, t \in \mathbb{N}$ хувьд $f(t^2 f(s)) = s(f(t))^2$ байх бүх $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ функцүүдийг авъя. $f(1998)$ -ийн боломжит бага утгыг ол.

ОУ-1. $AC \cap BD = E$ байг. Тэгш хэмт чанараар $P \in \triangle BEC$ гэж үзэж болно. $\angle ABE = \varphi$, $\angle ACD = \psi$ гэе. $\triangle ABP$, $\triangle CDP$ -үүд адил хажуут. $PM \perp AB$, $PN \perp CD$. M, N, P -үүд нэг шулуун дээр үл оршино. Тэгш өнцөгт $\triangle ABE$ -ны EM медианыг авч үзье. $\angle BEM = \varphi$, $\angle AME = 2\varphi$, $\angle EMP = 90^\circ - 2\varphi$ болно. Мөн үүний адилаар $\angle CEN = \psi$, $\angle DNE = 2\psi$, $\angle ENP = 90^\circ - 2\psi$. $\angle MEN = 90^\circ + \varphi + \psi$ тул $\angle NPM = 360^\circ - (\angle EMP + \angle MEN + \angle ENP) = 90^\circ + \varphi + \psi = \angle MEN$. $AB = 2EM$, $CD = 2EN$ тул $S_{ABP} = S_{CDP} \Leftrightarrow EM \cdot PM = EN \cdot PN \Leftrightarrow EM/EN = PN/PM$. $\angle MEN =$

$\angle NPM$ гэдгээр $\triangle EMN \sim \triangle PNM \Leftrightarrow \angle EMN = \angle PNM$,
 $\angle ENM = \angle PMN \Rightarrow EMPN$ параллелограмм гэж гарна.
 $EMPN$ -ийн E ба P оройнууд дахь эсрэг өнцгүүд тэнцүү.
Иймд $EMPN$ параллелограмм $\Leftrightarrow \angle EMP = \angle ENP \Leftrightarrow$
 $90^\circ - 2\varphi = 90^\circ - 2\psi \Leftrightarrow \varphi = \psi \Leftrightarrow ABCD$ багтсан дорвөн
өнцөгт.

ОУ-2. Шүүгчдийн хосын тоо C_b^2 ба хос бүр хам-
гийн ихдээ k өрсөлдөгч дээр санал нийлэх (давхцах) тул
нийт санал нийлэлтийн тоо kC_b^2 -оос үл хэтэрнэ. i -р өрсөл-
дөгчид x_i шүүгч "ээрэг", y_i шүүгч сөрөг үнэлгээ өгсөн
байг. $x_i + y_i = b$ тул энэ өрсөлдөгч дээр санал нийлэх
шүүгчдийн хосын тоо $C_{x_i}^2 + C_{y_i}^2 = \frac{1}{2}(x_i^2 + y_i^2 - x_i - y_i) \geq$
 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x_i + y_i)^2 - b\right) = \frac{1}{4}((b-1)^2 - 1)$ b сондгой учир энэ доод
үнэлгээг $\frac{1}{4}(b-1)^2$ гэж сайжруулж болно. Иймд $kC_b^2 \geq$
 $\sum_{i=1}^a (C_{x_i}^2 + C_{y_i}^2) \geq a \cdot \frac{(b-1)^2}{4} \Rightarrow \frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$ гэж гарна.

ОУ-3. $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ бол

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = \frac{(2\alpha_1 + 1) \dots (2\alpha_s + 1)}{(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_s + 1)} \quad (1)$$

тул сондгой тоо k бүрийг (1) хэлбэрт тавьж болно гэж
харуулбал бодлого бодогдоно. $k = 3$ нь (1) хэлбэртэй.
 $3 = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2 + 1} \cdot \frac{2 \cdot 4 + 1}{4 + 1} = \frac{5}{3} \cdot \frac{9}{5}$. Иймд $k_0 < k$ байх k_0 бүр нь (1)
дүрслэлтэй гээ. $k = 2^\alpha \cdot k_0 - 1$, $\alpha \geq 1$, $k_0 < k$ гэж бичье. $\frac{k}{k_0} =$
 $\frac{2^\alpha \cdot k_0 - 1}{k_0}$ нь (1) хэлбэртэй гэж харахад хангалттай. $\frac{2^\alpha k_0 - 1}{k_0} =$
 $\frac{2k_0 - 1}{k_0} \cdot \frac{4k_0 - 1}{2k_0 - 1} \dots \frac{2^\alpha k_0 - 1}{2^{\alpha-1} k_0 - 1}$ нь (1) хэлбэртэй байна.

ОУ-4. $xy^2 + y + 7 \mid y(x^2y + x + y) - x(xy^2 + y + 7) = y^2 - 7x$,
 $1 \leq x \Rightarrow y^2 - 7x < xy^2 + y + 7$. Иймд $y^2 - 7x \geq 0$ бол
заавал $y^2 - 7x = 0$ буюу $y = 7z$, $(x, y) = (7z^2, 7z)$, $z \in \mathbb{N}$
болно. Үүний урвууд хэрэв $(x, y) = (7z^2, 7z)$, $z \in \mathbb{N}$ бол
 $x^2y + x + y = 7z(49z^4 + z + 1)$ нь $xy^2 + y + 7 = 7(49z^4 + z + 1)$ -д
хуваагдана. $y^2 - 7x < 0$ гэж үзье. Тэгвэл $\mathbb{N} \ni 7x - y^2 < 7x$

ба $xy^2 + y + 7 \mid 7x - y^2$ болно. Энэ нь зөвхөн $y = 1 \vee 2$ үед л боломжтой, учир нь эсрэг тохиолдолд $xy^2 + y + 7 > 9x$.
 $y = 1$ бол $x + 8 \mid 7x - 1$ болох буюу $7x - 1 = 7(x + 8) - 57$,
 $57 = 1 \cdot 57 = 3 \cdot 19 \Rightarrow x = 11 \vee 49$. $(x, y) = (11, 1) \vee (49, 1)$
 нь бодлогын нөхцлийг хангах шийд болно. $y = 2$ үед $4x + 9 \mid 7x - 4$,
 $4(7x - 4) = 7(4x + 9) - 79$ ба 79 нь $4x + 9$ хэлбэрийн хуваагчгүй тул энэ үед шийдгүй. Иймд бодлогын бүх шийд нь $(x, y) = (7z^2, 7z)$, $z \in \mathbb{N}$ ба $(11, 1)$ $(49, 1)$ болно.

ОУ-5. $KL \parallel RS$ тул $\triangle BKR$ -д $\angle BKR = \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$, $\angle KBR = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}$, $\angle BRK = 90^\circ - \frac{\angle C}{2}$ болох учир синусын теоремоор

$$BR = \frac{\cos(\angle A/2)}{\cos(\angle B/2)} BK \quad (1)$$

Мөн адилаар $\triangle BLS$ -д $\angle BLS = 90^\circ - \frac{\angle C}{2}$, $\angle BSL = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$, $\angle LBS = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}$,

$$BS = \frac{\cos(\angle C/2)}{\cos(\angle A/2)} BL = \frac{\cos(\angle C/2)}{\cos(\angle A/2)} BK \quad (2)$$

$BI \perp RS$, $IK \perp AB \Rightarrow IR^2 + IS^2 - RS^2 = (BI^2 + BR^2) + (BI^2 + BR^2) + (BI^2 + BS^2) - (BR^2 + BS^2) = 2(BI^2 - BR \cdot BS) =$
 $(1), (2)$ -оор $= 2(BI^2 - BK^2) = 2IK^2 > 0$ болж косинусын теоремоор хурц гэж гарна.

ОУ-6. S -ээр ийм бүх функцүүдийн олонлогийг тэмдэглэе. $f \in S$, $f(1) = a$ гээ. $1 = n \vee m$ гэвэл

$$f(f(m)) = a^2 m, \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad (2)$$

$$f(an^2) = (f(n))^2 \quad (3)$$

$$(f(m)f(n))^2 \stackrel{(3)}{=} (f(m))^2 f(an^2) \stackrel{(1)}{=} f(m^2 f(f(an^2))) \stackrel{(2)}{=}$$

$$\stackrel{(2)}{=} f(m^2 a^2 a n^2) = f(a(amn)^2) \stackrel{(3)}{=} (f(amn))^2$$

Эндээс $\forall m, n \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд

$$f(amn) = f(m \cdot n) \quad (4)$$

тухайн тохиолдолд

$$f(am) = af(m) \quad (5)$$

буюу

$$af(mn) = f(m)f(n), \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad (6)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a|f(n)$ гэж баталъя. $p \in P$ -ийн хувьд p^α ба p^β нь a ба $f(n)$ -г хуваах хамгийн их ээргүүд байг. (6) ба индукц ашиглан $(f(n))^k = a^{k-1} \cdot f(n^k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ гэж олно. $(f(n))^k$ ба a^{k-1} -г хуваах p -ийн хамгийн их ээргүүд нь $p^{k\beta}$ ба $p^{(k-1)\alpha}$ болох тул $\forall k \in \mathbb{N}$, $k\beta \geq (k-1)\alpha$ болно, энэ зөвхөн $\beta \geq \alpha$ үед л боломжтой $\Rightarrow a|f(n)$. Иймд $g(n) = \frac{f(n)}{a} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ болно. f -ийн хувьд баталсан үр дүнгүүдийг g -ийн хэлэнд хөрвүүлбэл

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad g(a) = a, \quad g(mn) = g(m)g(n), \quad g(g(m)) = m \quad (7)$$

болно. $g(mn) = g(m)g(n) \Leftrightarrow (6)$ ба $ag(g(m)) = g(a)g(g(m)) = g(ag(m)) = g(f(m)) = \frac{f(f(m))}{a} = \frac{a^2 m}{a} = am \Rightarrow g(g(m)) = m$ болно. $(7) \Rightarrow \forall m, n \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд $g(n^2 g(m)) = g(n^2) \cdot g(g(m)) = m(g(n))^2$ гэж гарах буюу $g \in S$ боллоо. Мөн $g(n) \leq f(n)$ ба g нь (7)-г хангаж байгаа. Одоо $p \in P$ бол $g(p) \in P$ гэж харуулъя. $g(p) = uv$ байг. $p \stackrel{(7)}{=} g(g(p)) = g(uv) = g(u)g(v)$, $g(u) = 1$ гэвэл $u \stackrel{(7)}{=} g(g(u)) = g(1) = 1 \Rightarrow$

$g(p) = P$ болов. Одоо олох ёстой хамгийн бага утгаа олохын тулд (7)-г хангаж байгаа ямар нэг g функцийг авъя. $g(m) = g(n) \Rightarrow m = g(g(m)) = g(g(n)) = n$ гэж гарах тул g нь инъектив буулгалт буюу ялгаатай анхны тоонуудыг ялгаатай анхны тоонуудад буулгана. Иймд доод хязгаар нь $g(1998) = g(2 \cdot 3^3 \cdot 37) = g(2)(g(3))^3 g(37)$ -д $g(3) = 2$, $g(2) = 3$, $g(37) = 5$ гэхэд гарна. Үнэхээр ийм функц оршино.

МОНГОЛЫН ОЮУТНЫ МАТЕМАТИКИЙН VII ОЛИМПИАД

Ц.Дашдорж

а) Эчнээ давааны бодлогууд

1(Ц.Дашдорж). $A \neq 0$, $B_i \in M_2(R)$ ба

$$\det(A + B_i) = \det A + \det B_i, \quad i = \overline{1, 4} \text{ бол}$$

$$\exists k_1, \dots, k_4 \in R \quad (\exists k_i \neq 0), \quad \sum_{i=1}^4 k_i B_i = 0 \text{ гэж батал.}$$

2(Ц.Дашдорж). $f_1, f_2, \dots, f_n$ нь шугаман хамааралгүй ба дифференциалчлагдах функцүүд бол $f'_1, f'_2, \dots, f'_n$ -үүдийн ямар нэг $n-1$ нь шугаман хамааралгүй гэж батал.

3(Ц.Дашдорж). F талбар, $a \neq b, c \neq d \in F$ бол

$$F[x] / \langle (x-a)(x-b) \rangle \cong F[x] / \langle (x-c)(x-d) \rangle$$

гэж батал.

4(Ц.Дашдорж). $G = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ ба a_i бүр төгсгөлөг эрэмбэтэй ба төгсгөлөг тооны хослогтой бол G төгсгөлөг бүлэг гэж үзүүл.

5(Ц.Дашдорж). $G = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, a_i бүр төгсгөлөг эрэм-
бэтэй ба өөрийн хосмогуудтайгаа байр сольдог бол
 G төгсгөлөг бүлэг гэж батал.

6(Ц.Дашдорж). 2-р эрэмбийн $n+1$ бүлгийн чөлөөт үрж-
вэр нь G байг. G -ийн тэгш урттай элементүүд нь 2
индексстэй нормаль хуваагч болох ба мөн n үүсгэгч-
тэй чөлөөт бүлэг болж чадахыг үзүүл.

7(Ц.Дашдорж). $H = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ ба $w_1 w_2 \dots w_m = 1 \Rightarrow$
 $w_m \dots w_2 w_1 = 1$, энд $w_i \in \{u_1, \dots, u_k, u_1^{-1}, \dots, u_k^{-1}\}$
бол H -ийг $v_0, \dots, v_k$ гэсэн 2-р эрэмбийн элементүүдээр
төрөгдсөн G бүлгийн 2 индексстэй дэд бүлэг байхаар
багтааж болохыг батал.

8(Ц.Дашдорж). $1 \in A$ цагираг ба $|A| = \infty$ үед A -ийн
тэгээс ялгаатай урвуугүй элементүүдийн олонлог
хоосон биш бол төгсгөлгүй гэж батал.

9(Ц.Дашдорж). A төгсгөлөг хэмжээст коммутатив F -
алгебр байг, энд F талбар.

а) A төгсгөлөг тооны максимал идеалтай гэж ба-
тал. $N(A) = \{a \in A \mid a \text{ нильпотент элемент, } \exists n \in \mathbb{N}, a^n = 0\}$ байг.

б) $N(A) = \cap A_i$ гэж батал, A_i -макс.идеал.

в) $A^{red} \cong A/N(A)$ нь тэгээс өөр нильпотент элемент-
гүй гэж батал.

г) $A/N(A)$ нь F -ийн өргөтгөл болох $F_1, \dots, F_s$ талба-
руудын шулуун нийлбэртэй изоморф ба $s \leq (A : F)$
гэж батал.

10(Ц.Далайжамц). Аливаа гурвалжин пирамидийн

хувьд $\sum_{i=1}^n S_i \leq \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot Q$ гэж батал.

Энд S_i талсуудын талбай, Q ирмэгүүдийн уртын квадратын нийлбэр.

11(Ц.Далайжамц). Хавтгайд өгөгдсөн M цэгийг дайруулан параболыг A, B цэгээр огтлох огтлогч татав. M_1, A_1, B_1 нь харгалзан M, A, B цэгийн, параболын тэнхлэгт перпендикуляр шулуун дээрх проекц бол $|M_1 A_1| \cdot |M_1 B_1|$ үржвэр огтлогчийн сонголтоос үл хамаарна гэж батал.

12(А.Хашбаатар). Хос хосоороо перпендикуляр 3 толин дээр гэрлийн цацраг тусахдаа дараагийн толь руугаа ойж байв. Тэгэхэд гурав дахь толиноос ойсон цацраг анх туссан цацрагтайгаа параллель гэж батал.

13(С.Чимидцэрэн). $R \ni x_j, x_j + x_{j+1} \neq 0, x_{n+j} = x_j, j = \overline{1, n}, \forall n$

$$\inf \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{x_j + x_{j+3}}{x_{j+1} + x_{j+2}} \right\} = 1$$
 гэж батал.

14(Ц.Баясгалан). Шулуун шугам дээр ямар нэг олонлог авъя. Энэ олонлогийн дэд олонлог болгон Лебегээр хэмжигдэх бол уг олонлогийн Лебегийн хэмжээ 0 гэж батал.

15(Ц.Баясгалан). Хавтгай дээрх задгай олонлог бүрийг хоорондоо үл огтлолцол тэгш өнцөгтүүдийн нэгдэлд тавьж болохыг батал.

16(Ц.Баясгалан). $f: R \rightarrow R$ ба $f(x+f(y)) \equiv f(x+y)+1, x, y \in R$ нөхцөлийг хангах үл буурах функцүүдийг ол.

Эцнээ даваанд Математикийн Ш-Б.Батбаясгалан, Математикийн II-Б.Баяржаргал, Г.Баярмагнай нар 1,2,3-р байрыг эзлэв.

Бодлогуудын бодолт.

1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B_i = \begin{pmatrix} w_i & x_i \\ y_i & z_i \end{pmatrix}$, $i = \overline{1,4}$ байг. $\forall i$, $\det(A + B_i) = \det A + \det B_i \Rightarrow$

$$dw_i - cx_i - by_i + az_i = 0 \quad (1)$$

$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid dx_1 - cx_2 - bx_3 + ax_4 = 0\} \leq \mathbb{R}^4$ ба $A \neq 0$ тул $\dim_{\mathbb{R}} M = 3$ байх нь илэрхий. (1)-ээс $\overline{B_i} = (w_i, x_i, y_i, z_i) \in M$, $i = \overline{1,4}$ гэж гарна. Иймд эдгээр нь шугаман хамааралтай буюу $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,4}$, $\sum_1^4 \lambda_i \cdot \overline{B_i} = 0 \Rightarrow \sum_1^4 \lambda_i B_i = 0$ гэж мөн гарна.

2. $\exists a_i$, $i = \overline{1, n}$, $\sum_1^n a_i f'_i = 0$, $a_n \neq 0$ гэж үзэж болно. $f'_1, \dots, f'_{n-1}$ -үүд шугаман хамааралгүй гэж харуулъя. Өмнөхийн хоёр талаас интеграл авах замаар $\sum_1^n a_i f_i = C = \text{const}$ болох ба f_i -үүд шугаман хамааралгүй тул $C \neq 0$ болно. Хэрэв $\sum_1^{n-1} b_i f'_i = 0$ бол

$$\sum_1^{n-1} b_i f_i = D = \text{const} \quad (1)$$

болно. Тэгвэл $\sum_1^{n-1} (Da_i - Cb_i)f_i + Da_n f_n = 0$ болох ба $f_1, \dots, f_n$ шугаман хамааралгүй гэдгээс $Da_n = 0$, $D = 0$

болно. Тэгвэл (1)-ээс $b_i = 0$, $i = \overline{1, n-1}$ болно. Үүгээр f'_i , $i = \overline{1, n-1}$ -үүд шугаман хамааралгүй боллоо.

3. Лемм1. $1 \in R$, $1 \in S$ коммутатив цагиргууд ба $\varphi : R \rightarrow S$ нь $\varphi(1_R) = 1_S$ байх гомоморфизм байг. Тэгвэл $s_1, \dots, s_n \in S$ бол $\overline{\varphi} : R[x_1, \dots, x_n] \rightarrow S$, $\overline{\varphi}|_R = \varphi$, $\overline{\varphi}(x_i) = s_i$, $i = \overline{1, n}$ байх ганц гомоморфизм оршин байна. Лемм1-ийн баталгаа нь илэрхий. R ба S -үүд нь нэгжгүй байхад ч Лемм1 хүчинтэй нь илэрхий. F талбар ба $a \in F$ байг. Лемм1-ийн үндсэн дээр $F[x] \xrightarrow{\varphi_a} F$, $\varphi_a(x) = a$ байх гомоморфизмыг a дээрх үнэлгээ эсвэл a -аар орлуулах гомоморфизм гэж нэрлэе. $\varphi_a(f(x)) = f(a)$ ба $\ker \varphi_a = id(x-a) = \{(x-a)f(x)/f(x) \in F[x]\}$ байх нь илэрхий, ө.х $F[x]/id(x-a) \cong F$. $f(x) \in F[x] \xrightarrow{\varphi_{a,b}} (f(a), f(b)) \in F \oplus F$ эпиморфизм ба $\ker \varphi_{a,b} = id((x-a)(x-b))$ тул

$$F[x]/id((x-a)(x-b)) \cong F \oplus F \cong F[x]/id((x-c)(x-d))$$

4(1-р бодолт). $t_1, \dots, t_m$ нь $a_1, \dots, a_n$ -үүд ба эдгээртэй хосмог элементүүдийн олонлог байг.

$$(1) \quad g \in G, \quad g = t_{i_1}^{k_1} \dots t_{i_s}^{k_s}, \quad i_k \neq i_{k+1}$$

бол $\ell(g) = s$ -ийг g элементийн энэ дүрслэл дэх үеийн урт гэж нэрлэе. Элементийн үеийн уртаар индукцлэж ямар ч элементийг

$$(1') \quad t_{i_1}^{k_1} \dots t_{i_s}^{k_s}, \quad \text{энд } p \neq q \text{ бол } i_p \neq i_q$$

хэлбэрт бичиж болохыг харуулъя. (1) дүрслэлд t_ν элемент хоёр удаа ордог байг, ө.х

$$(2) \quad g = Pt_\nu^k St_\nu^\ell T$$

байг. Тэгвэл

$$(3) \quad g = Pt_\nu^{k+\ell} t_\nu^{-\ell} St_\nu^\ell T$$

гэж бичиж болох ба $\forall i, t_\nu^{-\ell} t_i t_\nu^\ell \in \{t_1, \dots, t_n\}$ тул (3) дүрслэл дэх g -ийн үеийн урт нь (2) дүрслэл дэх үеийн уртаас бага болов. Иймд индукцээр g -г (1') хэлбэрт бичиж ямагт болно. Үүгээр бодлого бодогдов.

4(Б.Батбаясгалангийн бодолт). $a_1, \dots, a_n$ -үүдийн хосмогууд төгсгөлөг тул тэдгээрийг $b_1, \dots, b_m$ гэе. $G = \langle b_1, b_2, \dots, b_m \rangle$ ба b_j бүрийн эрэмбэ нь төгсгөлөг ба хосмог нь $\{b_1, \dots, b_m\}$ олонлогт байна. Иймд $\forall j \in \overline{1, m}$ хувьд $\exists k : b_1 b_j b_1^{-1} = b_k$ буюу $b_1 b_j = b_k b_1$ байна. Хэрэв $b_1^{n_1} = 1$ бол $b_1, b_2, \dots, b_m$ -ээр бичигдсэн n_1 -ээс олон ширхэг b_1 -тэй үг болгоны уртыг багасгаж болно. Үүнтэй адил өгүүлбэрийг b_j бүрийн ($j \in \overline{1, m}$) хувьд бичиж болно. Эндээс $b_1, b_2, \dots, b_m$ -ээр бичигдсэн $n_1 + n_2 + \dots + n_m = m + 1$ -ээс урт үг бүхнийг багасгаж болно. Иймд G бүлэг төгсгөлөг.

5(Б.Батбаясгалангийн бодолт). $d = ca_1 b$ байг. $da_1 d^{-1} = ca_1 b a_1^{-1} a_1^{-1} c^{-1} = c b a_1 b^{-1} a_1 a_1^{-1} c^{-1} = c b a_1 b^{-1} c^{-1}$. байх тул $\exists f \in \langle a_2, \dots, a_n \rangle = G_1 : da_1 d^{-1} = f a_1 f^{-1}$, индукцээр G_1 бүлэг төгсгөлөг тул a_1 элемент төгсгөлөг тооны хосмогтой. Үүнтэй адилаар a_i бүр ($i = \overline{1, n}$) төгсгөлөг тооны хосмогтой болно. Иймд өмнөх бодлого ёсоор G бүлэг төгсгөлөг бүлэг болно.

6. $G_i, i \in I$ бүлгүүд өгсөн бол тэдгээрийн чөлөөт үржвэр гэдгээр $G \Rightarrow \prod_i G_i = \{g_{i_1} \dots g_{i_n} \mid g_{i_k} \in G_{i_k}, i_k \neq i_{k+1}, n \geq 0\}$, $g_{i_1} \dots g_{i_n} = g_{j_1} \dots g_{j_s} \Leftrightarrow \begin{cases} n = s \\ g_{i_k} = g_{j_k} \end{cases}$ гэж тодорхойлогдох олонлог дээр $x = g_{i_1} \dots g_{i_n}, y = g_{j_1} \dots g_{j_s} \in G$ -ийн чөлөөт үржвэр гэж тэднийг залгаж бичихэд үүсэх $xy = g_{i_1} \dots g_{i_n} g_{j_1} \dots g_{j_s}$ үгийг авахад гарах ($i_n = j_1$ бол $g_{i_n} g_{j_1}$ -ийн оронд тэдний үржвэр $g_{i_n} g_{j_1} = g \in G_{i_n}$ -ийг авч) үгийг ойлгох

замаар үүсгэгдэх бүлгийг ойлгоно. Манай бодлогын тохиолдолд

$$G = \{x = c_{i_1} \dots c_{i_s} \mid c_{i_j} \in \{a, b_1, \dots, b_n\} = A, c_{i_k} \neq c_{i_{k+1}},$$

$$a^2 = b_i^2 = e\} = \prod_{i=1}^{n+1} Z_2^i.$$

болно. $\ell(x) = s$ -г x элементийн (үгийн) урт гэж тодорхойлж болно. $G^{[2]} = \{x \in G \mid \ell(x) \text{ тэгш тоо}\} \leq G$ байх нь илэрхий ба $G^{[2]}$ нь ab_i , $i = \overline{1, n}$ чөлөөт үүсгэгчид бүхий бүлэг (тэгэхээр чөлөөт бүлэг) юм гэдгийг одоо харуулъя: $b_i a = (ab_i)^{-1}$, $b_i b_j = (ab_i)^{-1} ab_j$ тул $t_i = ab_i$, $i = \overline{1, n}$ нь $G^{[2]}$ -ийн үүсгэгчид боллоо. Иймд $x \in G^{[2]}$ бол $x = t_{i_1}^{k_1} \dots t_{i_s}^{k_s}$, $k_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $i_k \neq i_{k+1}$ гэж бичиж болно, үүнийг x элементийн t_i үүсгэгчдийн хувь дахь үл хураагдах бичлэг гэж нэрлэе. Ийм үл хураагдах бичлэгийн хувьд

$$t_{i_1}^{k_1} \dots t_{i_s}^{k_s} = t_{j_1}^{\ell_1} \dots t_{j_p}^{\ell_p} \Leftrightarrow \begin{cases} s = p \\ i_k = j_k \end{cases}, k = \overline{1, s}$$

гэдгийг $\sum_1^s k_i$ -ээр индукцлэн хялбархан баталж болох тул t_i -үүд нь чөлөөт үүсгэгчид боллоо. $G \xrightarrow{\psi} (\{\pm 1\}, \cdot)$, $\psi(x) = (-1)^{\ell(x)}$ гомоморфизм гэдгийг хялбархан харж болох ба $\ker \psi = G^{[2]}$ тул бодлого бодогдов.

7. $W = \{u_1, \dots, u_k, u_1^{-1}, \dots, u_k^{-1}\}$ гээ. $\alpha: H \longrightarrow H$,

$$(1) \quad \alpha(w_1 \dots w_k) = w_1^{-1} \dots w_k^{-1}, w_i \in W, k \in \mathbb{N}$$

гэвэл $\alpha \in \text{Aut} H$ болохыг харуулъя:

$x = w_1 \dots w_k = t_1 \dots t_\ell$, $w_i, t_j \in W$ байг. $\alpha(w_1 \dots w_k) \neq \alpha(t_1 \dots t_\ell)$ байна гэвэл $w_1^{-1} \dots w_k^{-1} \neq t_1^{-1} \dots t_\ell^{-1}$ буюу $t_\ell \dots t_1 \neq w_k \dots w_1$ болоход хүрч бодлогын нөхцөлд харшилна (энд бүлэгт $a \neq b$ бол $\forall x$ -ийн хувьд $ax \neq bx$ байна гэдгийг

ашиглав). Үүгээр (1) харгалзаа буюу α нь буулгалт боллоо. $x, y \in H$ ба $x \neq y$ бол $\alpha(x) \neq \alpha(y)$ буюу α мономорфизм, $\forall y \in H$ -ийг авахад $\exists x \in H$, $\alpha(x) = y$ буюу α эпиморфизм болох нь хялбархан батлагдана. Үүгээр α биекц боллоо. $x = w_1 \dots w_k$, $y = t_1 \dots t_\ell$ бол $\alpha(xy) = w_1^{-1} \dots w_k^{-1} t_1^{-1} \dots t_\ell^{-1} = \alpha(x)\alpha(y)$ буюу $\alpha \in \text{Aut} H$ боллоо. Мөн $\alpha^2 = 1_H$. $A = \{\alpha, \alpha^2 = 1_H\} \leq \text{Aut} H$ тул H -г A -аар өргөтгөсөн хагас шулуун үржвэр $G = H \rtimes A$ оршино, тэр нь $G = H \rtimes A = \{h\alpha^i | h \in H, i = 0, 1\}$, $h\alpha^i \cdot h_1\alpha^j = hh_1\alpha^{i+j} \in G$ бүлэг байдаг (энд $h_1\alpha^i = \alpha^i(h_1)$ гэсэн мультипликатив бичэглэлийг ашиглав). H -ийн нэгжийг e гээд $v_0 = e\alpha$, $v_1 = u_1\alpha, \dots, v_k = u_k\alpha$ гэвэл $G = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ болно: $v_s v_0 = u_s \alpha \cdot e\alpha = u_s e \alpha^2 = u_s 1_H$ тул $v_0, v_1, \dots, v_k$ нь G -ийн үүсгэгч болох нь шууд гарна. $v_s^2 = u_s \alpha \cdot u_s \alpha = u_s \alpha_s^2 \alpha^2 = u_s u_s^{-1} 1_H = e 1_H$ нь G -ийн нэгж билээ. G -ийн тодорхойлолт ёсоор $H \trianglelefteq G$ ба $A \subseteq (G\text{-ийн дотоод автоморфизмын бүлэг})$ ба $G/H \cong A$ байдаг.

8. $A_0 = \{0 \neq a \in A | a \text{ урвуугүй элемент}\} = \{a_1, \dots, a_n\}$, $A^* = \{a \in A | \exists a^{-1} \in A\}$ гэе. $0 \neq a \in A^0$, $x \in A^*$ бол $ax \in A^0$ байх нь илэрхий. Иймд $ax = a_i$ бол x -г a_i дугаартай хайрцагт хийе. $|A^*| = \infty$ учир Дирихлейн зарчмаар $\exists a_k \in A^0$, $I = \{i \in \mathbb{N} | ax_i = a_k\}$, $|I| = \infty$ болно. $x_i = x$ -г бэхлэе. Хэрэв $ax = ax_j$ бол $a(x - x_j) = 0$ ба $j \in I$ үед $x - x_j$ -үүд бүгд ялгаатай буюу $\exists x - x_j \in A^*$. Тэгвэл $a = 0$ болно. Иймд $|A^0| = \infty$. Энэ баталгаанд A баруун альтернатив алгебр үед $ax \cdot x^{-1} = a$ байдгийг л хоёр удаа ашиглав.

9. а) $1 \in A$ коммутатив F алгебр ба A_i , $i = \overline{1, n}$ нь A -ийн максималь идеалууд байг. Тэгвэл $i \neq j$ үед $A_i + A_j = A$ тул Хятадын теоремоор $A/\cap A_i \cong \bigoplus_1^n A/A_i$ болно. Иймд $\dim_F A \geq \dim_F A/\cap A_i \geq n$, учир нь $\dim_F A/A_i \geq 1$.

б) 1. A төгсгөлөг хэмжээст тэгийн хуваагчгүй F ал-

гебр нэгжтэй гэж батал.

Тод. $I \triangleleft A$ ба $xy \in I \rightarrow x \vee y \in I$ бол I -г энгийн идеал гэдэг. $Z, Z_n, F[x], Z[x]$ -ийн энгийн идеалуудыг ол.

2. $1 \in A$ коммутатив цагираг ба $I \triangleleft A$ байг.

а) I энгийн идеал $\Leftrightarrow A/I$ бүхлийн муж

б) I максималь идеал $\Leftrightarrow A/I$ нь алгебр гэж батал.

Цаашид A бодлогын нөхцөлд өгсөн алгебр ба $I \triangleleft A$ байг. Тэгвэл

3. I энгийн идеал $\Leftrightarrow I$ максималь идеал. 1-3 нь маш хялбар батлагдана.

4. $a \in A$ нильпотент биш элемент байг. I_a нь $I_a \cap \{a, a^2, \dots\} = \emptyset$ байх максималь идеал бол I_a нь максималь идеал гэж батал. 3-ын үндсэн дээр I_a нь энгийн идеал гэж баталъя. $x, y \in A \setminus I$ байг. (x) -ээр $x \in A$ -аар төрөгдсөн A -ийн идеалыг тэмдэглэе, ө.х, $(x) = xA = \{xa | a \in A\}$. Тэгвэл $\exists k, \ell \in \mathbb{N}, a^k \in (x) + I, a^\ell \in (y) + I \Rightarrow a^{k+\ell} \in (xy) + I \Rightarrow xy \notin I$ гэж гарч байна, ө.х I энгийн идеал гэж гарлаа. 2б-ээс $N(A) \subset \bigcap A_i$ гэж гарна. 4-өөс $\bigcap A_i = N(A)$ болох нь гарна. в) ба г)-ийн баталгаа илэрхий.

б) Багуудын тэмцээн

Монголын Оюутны 7-р Олимпиадын багийн тэмцээн 1998 оны 4-р сарын 18-нд боллоо. МУИС-ийн Математик III ангийн Б.Батбаясгалан ахлагчтай баг 9 оноогоор I байр, Математик II ангийн Б.Баяржаргал ахлагчтай баг 8 оноогоор II байр эзлэв.

1. G бүлэг, $a, b \in G$ ба $a^5 = b^3 = 1, b^{-1}ab = a^2$ бол $a = 1$ гэж батал.

2.
$$\begin{cases} a_1x_1 + \dots + a_nx_n \leq b, & a_i, b > 0 \\ x_i \geq 0, & i = \overline{1, n} \end{cases}$$
 биеийн эзэлхүүнийг ол.

3. rA төгсгөлөг хэмжээст алгебр $a, b, c, d \in A, a^{-1}, c^{-1} \in A$ ба $\forall k \geq 1$ -ийн хувьд $a^k b = c^k d$ бол $b = d$ гэж батал.

4. 255 эрэмбийн бүлэг бүр цикл гэж батал.

5. $I \triangleleft Z[x]$ максимал идеал $\Rightarrow Z[x]/I$ нь төгсгөлөг талбар гэж батал.

Оноо тэнцсэн багуудын байр эзлүүлэхийн тулд блиц бодлого 5'-ийг тавив.

Бодлогуудыг дэвшүүлсэн Ц.Дашдорж

5'. n тооны хуваагчдын тоо нь $2k$ ширхэг бол бүх хуваагчдын үржвэрийг ол.

1. Илэрхий.

2. (1) $V_n = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n \frac{b}{a_i}$ болохыг индукцээр баталъя.

$n = 1$ үед $\begin{cases} a_1 x_1 \leq b \\ x_1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x_1 \leq \frac{b}{a_1}, V_1 = \frac{b}{a_1}$ буюу (1)

үнэн.

$n = k$ үед (1) үнэн гэж үзье.

$n = k + 1$ үед $\begin{cases} a_1 x_1 + \dots + a_k x_k + a_{k+1} x_{k+1} \leq b \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, k+1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a_1 x_1 + \dots + a_k x_k \leq b - a_{k+1} x_{k+1} \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, k+1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a_1 x_1 + \dots + a_k x_k \leq b - a_{k+1} x_{k+1} \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, k \\ 0 \leq x_{k+1} \leq \frac{b}{a_{k+1}} \end{cases}$

$$V_{k+1} = \int_0^{\frac{b}{a_{k+1}}} \frac{1}{k!} \prod_{i=1}^k \frac{b - a_{k+1} x_{k+1}}{a_i} dx_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} \prod_{i=1}^{k+1} \frac{b}{a_i}$$

3. $\dim_F A = n$ гээ. $a^0 = e, a, a^2, \dots, a^n \in A$ -үүд F дээр шугаман хамааралтай, ө.х $\exists \alpha_i \in F, i = \overline{0, n}, \sum_0^n \alpha_i \cdot$

$a^i = 0 \in A$. Эндээс $0 \neq f(x) = \sum_0^n \alpha_i x^i \in F[x], f(a) = 0$ болно. Иймд $f, g \in F[x]$ -үүд нь $f(a) = 0$ ба $g(c) = 0 \in A$ байх хамгийн бага зэргийн олон гишүүнтүүд гэж үзэж чадна. Тэгвэл $f(0) \neq 0 \neq g(0)$ болно. $h = fg \in F[x]$ гэвэл $h(a) = h(c) = 0 \Rightarrow h(a)b = h(c)d$. $h = h_0 + h_1x + \dots + h_sx^s$ гэвэл $h(a)b = (h_0 + h_1a + \dots + h_s a^s)b = h_0b + h_1ab + \dots + h_s a^s b$ ба $h(c)d = h_0d + h_1cd + \dots + h_s c^s d$ тул өгөгдсөн нөхцлөөс $h_0b = h_0d \in A$ гэж гарна. $h_0 = h(0) = f(0)g(0) \Rightarrow 0 \neq h_0 \in F$ тул $b = d$.

4. $|G| = 255 = 3 \cdot 5 \cdot 17, G_{17}$ -ийн тоо $= 1 + 17k \mid 15 \Rightarrow k = 0$ буюу $G_{17} \triangleleft G$ болно. $|G/G_{17}| = 15$ тул G/G_{17} абелийн (цикл) бүлэг болно. Иймд $G' = \langle [G, G] \rangle \leq G_{17}$ болно. Эндээс (1) $|G'| = 1 \vee 17$. G_3 -ийн тоо $= 1 \vee 85, G_5$ -ийн тоо $= 1 \vee 51$ болно. 3 эрэмбэтэй 85 дэд бүлгээс 3 эрэмбийн 170 элемент, 5 эрэмбэтэй 51 дэд бүлгээс 5 эрэмбийн 204 элемент буюу $374 + 1 = 375$ ялгаатай элемент G -д байна гэж зөрчилд хүрлээ. Иймд $G_3 \vee G_5 \triangleleft G$ болно (түүнийг K гээ). $|G/K| = 3 \cdot 17 \vee 5 \cdot 17 \rightarrow G/K$ абелийн бүлэг буюу $G' \leq K \Rightarrow |G'| = 3 \vee 5 \vee 1$ энэ нь (1)-тэй нийлж $|G'| = 1$ болохыг үзүүлж байна. Үүгээр $G' = e, G/G' = G$ абелийн боллоо.

5. $\mathbb{Z} \cap I = \{0\}$ бол $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}[x]/I = (R, +, \cdot)$ ба R талбар тул $\mathbb{Q} \leq R$ болно. $(R, +, \cdot) = \langle \bar{1}, \bar{x} \rangle$ байна, энд $\bar{1} = 1 + I, \bar{x} = x + I$ ба $\mathbb{Z}$ нетерийн цагираг (идеалуудын өсөх гинж бүхэн тасардаг) тул Гильбертийн теоремоор $\mathbb{Z}[x]$ мөн нетерийн цагираг, тэгвэл $\mathbb{Z}[x]/I = R$ нетерийн цагираг болох нь илт байна. Гэтэл $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ нетерийн ца-

гираг биш ($< 2 > \subseteq \left(\frac{1}{2}\right) \subseteq \dots \subseteq \left(\frac{1}{2^n}\right) \subseteq \dots$ гинж үл тасарна), энэ нь нетерийн цагиргийн дэд цагираг ба гомоморф дүр мөн нетерийн цагираг байна гэсэн хялбархан батлагдах үр дүнд харшилна. Иймд $\mathbb{Z} \cap I \neq \{0\}$ боллоо. $\mathbb{Z} \cap I \leq (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ тул $\mathbb{Z} \cap I = \langle m \rangle$, $\exists m \in \mathbb{Z}$ ба $\mathbb{Z}[x]/I = R$ талбар тул $p = m \in P$ болно. Хэрэв $I = p\mathbb{Z}[x]$ бол $\mathbb{Z}[x]/I = R \cong \mathbb{Z}_p[x]$ талбар биш болоход хүрнэ. Иймд $\exists f(x) \in I$, $f(x) \not\equiv 0(p)$ ба $f(x)$ -ийг ийм чанартай хамгийн бага зэрэгтэй гэж үзье. $\mathbb{Z}[x]/I \cong \mathbb{Z}[x]/(p)/I/(p)$ ба

$\mathbb{Z}[x]/(p) \cong \mathbb{Z}_p[x]$ -д үлдэгдэлтэй хувааж болох тул $\forall g \in \mathbb{Z}[x]$ -г авахад $g \equiv r(x) \pmod{I}$, $\deg r(x) < \deg f$ ба $r(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ гэж үзэж болох тул $\mathbb{Z}[x]/I$ төгсгөлтэй цагираг (талбар) боллоо, мөн $I = \text{id} \langle p, f(x) \rangle$, $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ үл задрах олон гишүүнт болж байна.

	I	II	III	IV	V	V'	нийт оноо	байр	шагнал
МУИС.Мат I	2						2		1000т
МУИС.Мат II	2	2	4				8	II	8000т
МУИС.Мат III	2	2	4			1	9	I	9000т
МУИС.Мат IV	2	2					4		
МУИС.Физ III	2	2				1	5	III	5000т
УБИС.Мат II	2	2					4		2000т

ӨМНӨХ ОНУУДЫН ОЛИМПИАДЫН ЗАРИМ БОДЛОГУУДЫН БОДОЛТ

В.Адъяасүрэн

Бодлого-1(1995 он, ДБ). Тетраэдрийн бүх ирмэгүүдийн нийлбэрийг L , бүтэн гадаргуун талбайг S -ээр тэмдэглэе. $L \geq 2\sqrt{3\sqrt{3}S}$ болохыг батал.

Бодолт: Эхлээд аливаа ABC гурвалжны хувьд

$$ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3}S_{ABC} \quad (1)$$

болохыг баталъя. $\sin(\gamma + 30^\circ) \leq 1 \Leftrightarrow 2\sin(\gamma + 30^\circ) \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\gamma + \cos\gamma \leq 2$. Косинусын теорем ашиглавал $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \Rightarrow \sin\gamma = \frac{2S_{ABC}}{ab}$$

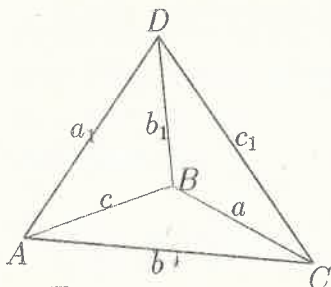
Ийнхүү,

$$\sqrt{3} \cdot \frac{2S_{ABC}}{ab} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \leq 2 \Leftrightarrow c^2 - a^2 - b^2 + 4ab \geq 4\sqrt{3}S_{ABC}$$

Үүний адилаар

$$a^2 - b^2 - c^2 + 4bc \leq 4\sqrt{3}S_{ABC}, \quad b^2 - a^2 - c^2 + 4ac \leq 4\sqrt{3}S_{ABC}$$

гэж батлагдана. Сүүлийн гурван тэнцэтгэл бишээс $4(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 12\sqrt{3}S_{ABC}$ гэж гарах ба $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ тэнцэтгэл бишийг мөн ашиглавал, $4(ab + bc + ca) - (ab + bc + ca) \geq 12\sqrt{3}S_{ABC} \Leftrightarrow ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3}S_{ABC}$ болж (1) тэнцэтгэл биш батлагдав. Баталгааны явцаас (1) тэнцэтгэл биш $a = b = c$ үед л тэнцэтгэл болно гэж гарч байна. (1) тэнцэтгэл бишийг хэрэглэвэл,



$$\begin{aligned} ab + bc + ca &\geq 4\sqrt{3}S_{ABC}, \\ ac_1 + c_1b_1 + b_1a &\geq 4\sqrt{3}S_{BCD}, \\ a_1c_1 + c_1b + ba_1 &\geq 4\sqrt{3}S_{ADC}, \\ a_1b_1 + b_1c + ca_1 &\geq 4\sqrt{3}S_{ABD} \end{aligned}$$

Эдгээр тэнцэтгэл биш бүрийг 3-аар үржүүлээд нэмбэл,

$$\begin{aligned} 12\sqrt{3}S &\leq 2(ab+bc+ca+ac_1+c_1b_1+b_1a+a_1c_1+c_1b+ba_1+a_1b_1+b_1c+ca_1) + (a+a_1)(b+b_1) + (b+b_1)(c+c_1) + (c+c_1)(a+a_1) \leq \\ &2(ab+bc+ca+ac_1+c_1b_1+b_1a+a_1c_1+c_1b+ba_1+a_1b_1+b_1c+ca_1) + \\ &(a+a_1)^2 + (b+b_1)^2 + (c+c_1)^2 = (a+a_1+b+b_1+c+c_1)^2 = L^2 \Leftrightarrow \\ 12\sqrt{3} &\leq L^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{3\sqrt{3}S} \leq L \text{ болж батлах тэнцэтгэл биш} \\ &\text{батлагдав. Харин тэнцэтгэл биш зөвхөн зөв тетраэдрийн} \\ &\text{хувьд л тэнцэтгэл болно.} \end{aligned}$$

Бодлого-2(1996 он, X). Эерэг $x_1, x_2, \dots, x_n$ тоонуудын хувьд $x_1^{x_1} + x_2^{x_2} + \dots + x_n^{x_n} \geq x_1^{x_2} + x_2^{x_3} + \dots + x_n^{x_1}$ болохыг батал.

Бодолт: n -ээр индукцлэн баталъя. $n = 1$ үед батлах зүйл биелнэ. Одоо $n - 1 \rightarrow n$ шилжилтийг хийе.

Индукцийн таамаглалаар

$$x_1^{x_1} + x_2^{x_2} + \dots + x_{n-1}^{x_{n-1}} \geq x_1^{x_2} + \dots + x_{n-2}^{x_{n-1}} + x_{n-1}^{x_n} \text{ Хэрэв бид}$$

$$x_n^{x_n} \geq x_{n-1}^{x_n} + x_n^{x_1} - x_{n-1}^{x_1} \quad (2)$$

гэж баталбал индукцийн шилжилт батлагдах болно. (2) тэнцэтгэл биш $x_n = x_{n-1}$ үед биелнэ. Мөн $x_n^{x_1} = x_1^{x_1}$ үед ч биелнэ. Иймд $x_n \neq x_{n-1}$, $x_n \neq x_1$ гэж үзье.

1) $x_1, x_2, \dots, x_n$ -үүдийн ядаж нэг нь 1-ээс багагүй байг.

$$x_n = \max_{1 \leq i \leq n} x_i \text{ гэж үзэж болно. Тэгвэл } x_n \geq 1. \text{ } x_n = x_1 + t,$$

$$\begin{aligned} t > 0 \text{ гэе. } x_n > x_{n-1} &\Rightarrow x_n^{x_1} > x_{n-1}^{x_1}, x_n^t - 1 > x_{n-1}^t - 1 \text{ ба} \\ x_n^t - 1 &\geq 0 \text{ тул } x_n^{x_1}(x_n^t - 1) \geq x_{n-1}^{x_1}(x_{n-1}^t - 1) \Leftrightarrow x_n^{x_1+t} - x_n^{x_1} \geq \\ x_{n-1}^{x_1+t} - x_{n-1}^{x_1} &\Leftrightarrow x_n^{x_n} - x_n^{x_1} \geq x_{n-1}^{x_n} - x_{n-1}^{x_1} \Leftrightarrow x_n^{x_n} \geq x_{n-1}^{x_n} + x_n^{x_1} - \\ x_{n-1}^{x_1} &\text{ болж энэ тохиолдолд (2) тэнцэтгэл биш батлагдав.} \end{aligned}$$

2) $x_1, x_2, \dots, x_n$ -үүд бүгд 1-ээс бага байг. x_n -ийг хамгийн бага нь гэж үзэхэд явцуурах зүйлгүй. $0 < x_n < x_{n-1} < 1, x_n + z = x_1, z > 0$.

$f(t) = t^{x_n+z} - t^{x_n}$ функцийг авч үзье. $f'(t) = (x_n + z)t^{x_n+z-1} - x_n t^{x_n-1} > 0 \Leftrightarrow t^{x_n-1}((x_n + z)t^z - x_n) > 0 \Leftrightarrow t > \left(\frac{x_n}{x_n+z}\right)^{\frac{1}{z}} = t_0$. Тодруулан хэлбэл, $t > t_0$ үед $f(t)$ функц монотон өснө. Бернуллийн тэнцэтгэл биш хэрэглэвэл,

$$\frac{1}{t_0} = \left(\frac{x_n+z}{x_n}\right)^{\frac{1}{z}} = \left(1 + \frac{z}{x_n}\right)^{\frac{1}{z}} > 1 + \frac{z}{x_n} \cdot \frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{x_n} > \frac{1}{x_n}$$

Ө.х $x_{n-1}^1 > x_n > t_0$. Иймээс $f(x_{n-1}) > f(x_n) \Rightarrow x_{n-1}^{x_n+z} - x_{n-1}^{x_n} > x_n^{x_n+z} - x_n^{x_n} \Leftrightarrow x_n^{x_n} > x_{n-1}^{x_n} + x_{n-1}^{x_n} - x_{n-1}^{x_n-1}$ болж индукцийн шилжилт батлагдав.

Бодлого-3(1995 он, ДБ). ABC гурвалжны AB тал дээр

M цэг авчээ. CM ба BM хэрчмүүдийг харгалзан X ба Y цэгт шүргэсэн бөгөөд ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг дотоод байдлаар шүргэсэн тойрог татжээ. X, Y цэгүүдийг дайрсан шулуун дээр ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв оршино гэж батал.

Бодолт: ABC гурвалжинд CC_1 биссектрис татъя. ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төвийг I гэвэл энэхүү цэг CC_1 хэрчим дээр орших бөгөөд $\frac{C_1I}{IC} = \frac{c}{a+b}$ байдаг билээ. X, Y цэгүүдийг дайрсан шулууны CC_1 биссектрис тэй огтлолцсон цэгийг T гэе. Хэрэв бид $\frac{C_1T}{TC} = \frac{c}{a+b}$ гэж баталчихвал бодлого бодогдох болно.

Кезийн теоремыг A, B, C цэг болон дотоод шүргэсэн тойргийн хувьд хэрэглэвэл, $AY \cdot a = CX \cdot c + BY \cdot b$. $AY = c - BY$ тул $a(c - BY) = CX \cdot c + BY \cdot b \Leftrightarrow CX \cdot c = ac - (a + b)BY$. Гэтэл $BY = BM - MY = BM - MX =$

$BM - CM + CX$ учир $CX \cdot c = ac - (a+b)(BM - CM + CX) \Leftrightarrow CX = \frac{ac}{a+b+c} + \frac{a+b}{a+b+c} \cdot (CM - BM)$. Цаашилбал, $CM - BM = CX + XM - BM = CX + MY - BM = CX - YB = CX - C_1B + C_1Y = CX - \frac{ac}{a+b} + C_1Y$ учраас

$$CX = \frac{ac}{a+b+c} + \frac{a+b}{a+b+c} \cdot \left(CX - \frac{ac}{a+b} + C_1Y \right) \Rightarrow \frac{C_1Y}{CX} = \frac{c}{a+b}$$

C_1CM гурвалжин ба TY огтлогчийн хувьд Менелайн теорем хэрэглэвэл, $\frac{C_1T}{TC} \cdot \frac{CX}{XM} \cdot \frac{MY}{YC_1} = 1$ болно. $MX = MY$

гэдгийг тооцвол сүүлчийн тэнцэтгэлээс $\frac{C_1T}{TC} = \frac{YC_1}{CX} = \frac{c}{a+b}$ гэж гарч бодлого бодогдов.

Бодлого-4(1993 он, X). $\forall x, y \in \mathbb{R}$ -ийн хувьд

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}) = 1993^{x^2 y^2} f(x) f(y) \quad (3)$$

байх бүх тасралтгүй $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ функцийг ол.

Бодолт: (3) нөхцлөөс

$$\log_{1993} f(\sqrt{x^2 + y^2}) = x^2 y^2 + \log_{1993} f(x) + \log_{1993} f(y)$$

гэж гарах ба $g(x) = \log_{1993} f(x)$ орлуулга хийвэл

$$g(\sqrt{x^2 + y^2}) = x^2 y^2 + g(x) + g(y)$$

$h(x) = g(x) - \frac{1}{2}x^4$ орлуулга хийвэл

$$\begin{aligned} h(\sqrt{x^2 + y^2}) &= g(\sqrt{x^2 + y^2}) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 = x^2 y^2 + g(x) + g(y) - \\ &- \frac{1}{2}x^4 - x^2 y^2 - \frac{1}{2}y^4 = \left(g(x) - \frac{1}{2}x^4 \right) + \left(g(y) - \frac{1}{2}y^4 \right) = h(x) + h(y) \end{aligned} \quad (4)$$

$x = y = 0$ гэж авбал $h(0) = h(0) + h(0) \Rightarrow h(0) = 0$. $y = 0$ гэж авбал $h(x) = h(\sqrt{x^2}) = h(|x|)$ болох тул $h(x)$ нь тэгш функц болно.

$$h(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}) = h(x_1) + \dots + h(x_n) \quad (5)$$

болохыг математик индукцийн аргаар баталъя. $n = 2$ үед (5) биелнэ гэдгийг дээр шалгачихсан. Иймд индукцийн суурь үнэн. Одоо $n \rightarrow n + 1$ шилжилт хийе.

$$h(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2}) \stackrel{(4)}{=} h(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}) + h(x_{n+1}) = \\ = h(x_1) + h(x_2) + \dots + h(x_n) + h(x_{n+1})$$

болж индукцийн шилжилт батлагдав. Энд, сүүлчийн тэнцэтгэл нь индукцийн таамаглал болмой.

(5)-д $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \sqrt{\frac{k}{n}}$ гэж авбал

$$k \cdot h(\sqrt{\frac{k}{n}}) = h(\sqrt{k}) = h(\sqrt{1^2 + \dots + 1^2}) = h(1) + \dots + h(1) = kh(1)$$

буюу $h(\sqrt{\frac{k}{n}}) = a \cdot \frac{k}{n}$, энд $a = h(1)$. $x = \frac{p}{q}$ гэсэн эерэг рациональ тоо авбал $h(x) = h(\sqrt{\frac{p^2}{q^2}}) = a \cdot \frac{p^2}{q^2} = ax^2$. Дурын эерэг иррациональ x тоо авъя. Тэгвэл $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ байх рациональ тоонуудын $\{r_n\}$ дараалал олдоно. $h(x)$ тасралтгүй гэдгийг анхаарвал $h(r_n) = ar_n^2$ гэдгээс $h(x) = ax^2$ гэж гарна. $h(x)$ функц тэгш учраас дурын бодит x -ийн хувьд $h(x) = ax^2$ байна. Иймд $g(x) \equiv \frac{1}{2}x^4 + ax^2$, цаашилбал $f(x) = 1993\frac{1}{2}x^4 + ax^2$. Энэ функц бодлогын нөхцөл хангана гэдгийг шууд шалгачихна.

Бодлого-5(1991 он, ОУМО). P нь ABC гурвалжны дооод цэг байг. Тэгвэл PAB, PBC, PCA өнцгүүдийн ядаж нэг нь 30° -аас хэтрэхгүй гэж батал.

Бодолт(Эрдеш-Морделлийн тэнцэтгэл биш): ABC гурвалжны дотор орших P цэгээс оройнууд хүртэлх зай R_a, R_b, R_c , харин талууд хүртэлх зай d_a, d_b, d_c бол

$$R_a + R_b + R_c \geq 2(d_a + d_b + d_c)$$

тэнцэтгэл биш биелнэ.

Бодлогод батлах зүйлийг эсрэгээс нь $\angle PAB > 30^\circ$, $\angle PBC > 30^\circ$, $\angle PCA > 30^\circ$ гэж үзье. $y = \sin x$ функц $(0, \frac{\pi}{2})$ завсарт өснө гэдгийг ашиглавал,

$$\frac{d_c}{R_a} = \sin(\angle PAB) > \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow 2d_c > R_a$$

$$\frac{d_a}{R_b} = \sin(\angle PBC) > \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow 2d_a > R_b$$

$$\frac{d_b}{R_c} = \sin(\angle PCA) > \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow 2d_b > R_c$$

болно. Эндээс $2(d_c + d_a + d_b) > R_a + R_b + R_c$ гэж гарна. Энэ нь Эрдеш-Морделлийн тэнцэтгэл бишид зөрчнө. Иймээс PAB, PBC, PCA өнцгүүдийн ядаж нэг нь 30° -аас хэтрэхгүй. Бодлого бодогдов.

Тэмдэглэл: Эрдеш-Морделлийн тэнцэтгэл бишийн баталгааны арга, батлах явцад батлагдах тэнцэтгэл биш өргөнөөр ашиглагддаг. Тухайлбал 1996 онд ОУМО-д дэвшигдсэн дараахь бодлого Эрдеш-Морделлийн тэнцэтгэл бишийн баталгааны санааг ашиглаад шийдвэрлэгджээ. Энэ бодлогын бодолтыг бие даан гүйцэтгэхийг санал болгож байна.

Бодлого-6(1996 он, ОУМО). $ABCDEF$ гүдгэр зургаан өнцөгтийн хувьд $AB \parallel ED, BC \parallel FE, CD \parallel AF$ байв. R_A, R_C, R_E нь FAB, BCD, DEF гурвалжнуудыг багтаасан тойргийн радиус, P нь зургаан өнцөгтийн периметр байг. $R_A + R_C + R_E \geq \frac{P}{2}$ гэж батал.

Бодлого-7(1991 он, ОУМО). $S = \{1, 2, \dots, 280\}$ байг.

S -ийн n элементтэй дэд олонлог бүр нь хос хосоороо харилцан анхны 5 тоо агуулдаг байх n -ийн хамгийн бага утгыг ол.

Бодолт: $A_i = \{k \in S | k \vdots i\}$, $i = 2, 3, 5, 7$ байг. $A = A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7$ гээ. $|A| = 216$ болохыг үнэмшихэд төвөггүй. A -аас ямар ч 5 тоо авахад тэдний аль нэг хоёр нь ямар нэг A_i , ($i = 2, 3, 5, 7$)-д орох тул тэрхүү хоёр тоо харилцан анхны биш байна. Иймд $n \geq 217$. Одоо $n = 217$ гэж баталъя.

$$B_1 = \{k | k \in S \text{ ба } k \text{ анхны тоо эсвэл } k = 1\}$$

$$B_2 = \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2\}$$

$$B_3 = \{2 \cdot 131, 3 \cdot 89, 5 \cdot 53, 7 \cdot 37, 11 \cdot 23, 13 \cdot 19\} \quad B_4 = ?$$

$$B_5 = \{2 \cdot 113, 3 \cdot 79, 5 \cdot 41, 7 \cdot 29, 11 \cdot 17\}$$

$$B_6 = \{2 \cdot 109, 3 \cdot 73, 5 \cdot 41, 7 \cdot 23, 11 \cdot 13\}$$

$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6$ байг. Тэгвэл $|B_1| = 60$, $|B| = 88$. Иймд $|S \setminus B| = 192$. $217 - 192 = 25$ тул B_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) олонлогуудын ядаж нэг нь бидний сонгон авах 217 тооноос 5-ыг нь агуулна. Энэхүү 5 тоо харилцан анхны тоо байна. Иймээс $n = 217$ боллоо.

НЭГЭН ОРЧИЛТ НИЙЛБЭР

С.Чимэдцэрэн

Дурын $n \in \mathbb{N}$ тооны хувьд орчилт

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i + x_{i+3}}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq n \quad (1)$$

тэнцэтгэл биш

$$x_i > 0, \quad x_{i+n} = x_i \quad (i = \overline{1, n}) \quad (2)$$

нөхцөлд биелэгдэх нь нилээд ерөнхий тэнцэтгэл бишийн тухайн тохиолдол байдлаар [1]-д тогтоогдсон. Харин (2) нөхцөлд орчилт

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{x_{i+1} + x_{i+2}}{x_i + x_{i+3}} \geq n \quad (3)$$

тэнцэтгэл биш биелэгдэх n тоо олдох уу?

Олдоно, гэхдээ (3) нь $n \leq 6$ үед биелэгдэнэ. Жишээ нь $n = 5$ үед баталъя. $x_i + x_{i+3} = z_i$, ($z_{i+5} = z_i$) гэвэл

$$f_5(x_1, \dots, x_5) = \sum_{i=1}^5 \frac{z_{i+2} + z_{i+3} - z_i}{z_i} = \sum_{i=1}^5 \left(\frac{z_{i+2}}{z_i} + \frac{z_i}{z_{i+2}} \right) - 5 \geq 5.$$

$n \geq 7$ үед (3) тэнцэтгэл биш биелэгдэх нь албагүйг харуулсан эсрэг жишээ хялбархан гаргаж болно. Түүгээр ч барахгүй $x_1 = x_2 = x_3 = x$, $x_i = x^{3-i}$, ($i = 4, 5, \dots, n$) гэж авбал

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 6$$

байна.

Бяцхан таамаглал: (2) нөхцөлд $n \geq 6$ байхад

$$\inf f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 6$$

гэж батлагдах уу?

С.Чимэдцэрэн

[1] С.Чимэдцэрэн "Циклические неравенства"
МУИС-ийн Эрдэм Шинжилгээний Бичиг 4(62) 1977.97-98.

Монголын Математикийн Нийгэмлэгийн товч танилцуулга

Монголын Математикийн Нийгэмлэг нь 1994 оны 11 дүгээр сарын 12-нд байгуулагдсан. Нийгэмлэгийн ерөнхийлөгч нь дэд профессор Ц.Дашдорж, нарийн бичгийн дарга нар нь дэд доктор Б.Баясгалан, Р.Энхбат. 1996 онд тус нийгэмлэг нь Америкийн математикийн нийгэмлэгт гишүүнээр элссэн. АНУ, Герман, Орос, Японы математикийн нийгэмлэгүүдтэй хамтын ажиллагаатай ажилладаг. Эгнээндээ дотоодын 50, гадаадын 4 гишүүнтэй. Нийгэмлэг гишүүдийн татвар, хандивын тусламжтайгаар өөрийгөө санхүүжүүлдэг. Монголын Математикийн Нийгэмлэгийн сэтгүүлийг жил бүр англи хэл дээр гаргадаг.

Одоогоор сэтгүүлийн 3 дугаарыг гаргасан бөгөөд сэтгүүлд гадаад, дотоодын математикчидын онолын бүтээлийг хэвлэдэг.

Нийгэмлэгийн цаашдын зорилт нь санхүүгийн хувьд бэхжих, гадаад харилцаагаа өргөтгөх, авьяаслаг математикчидыг дэмжих зэрэгт оршино.

Жич: Манай нийгэмлэг одоо математикийн зарим чухал сэтгүүлийг захиалж авах, олон улсын математикийн бага хурлыг зохион байгуулах, гадаад гишүүддээ тусгай үнэмлэх олгох, өөрийн сэтгүүлийг тогтмол хэвлэдэг болох зэрэг олон ажил гүйцэтгэх шаардлагатай байгаа бөгөөд эхний хэдэн жил гишүүдээсээ сард 50-100 ₮-ний татвар авч байсан боловч, дээрх үйл ажиллагаануудыг явуулахад хүрэлцэхгүй байгаа билээ. Иймд тус нийгэмлэг нь санхүүгийн хувьд баталгаатай болох үүднээс гишүүд та бүгдийг нийгэмлэгтээ амьдралдаа ганц удаа тодорхой хэмжээний хандив өргөхийг урийлж байна. Энэ тухай мэдээллийг олимпиадын цувралаар дамжуулан тогтмол мэдээлж байх болно.

**Монголын Математикийн Нийгэмлэгт хандив өгсөн
хүмүүсийн жагсаалт**

	Нэрс	Албан газар	Утас	Хэдэн онд хаана ямар сургууль, мэргэжлээр төгссөн	Хандивын хэмжээ	Хэзээ өгсөн
1.	Б.Бат	"Их ялт" ком- паний ерөнхий захирал	99115441	МУИС, Мат, 1987 он	250US\$	1998.04
2.	Б.Батбаасан	"Космо" ком- паний ерөнхий захирал	99115561	МУИС, Мат, 1987 он	100.000₮	1998.09
3.	Ц.Дашдорж	МУИС-ийн багш	372828	МУИС, Мат, 1969 он	50.000₮	1998.04
4.	Ү.Бадам	ШУА, ФТХ	368209	Эрхүү, УИС, 1969 он	4.000₮	1998.05
5.	С.Будням	ШУА, ФТХ	358949	Эрхүү, УИС, 1966 он	5.000₮	1998.05
6.	С.Тогмид	УБИС-ийн захирал	322705	МУИС, Мат, 1969 он	10.000₮	1998.06
7.	Д.Бямбажав	Математик хүрээлэнгийн захирал	451136	МУИС, Мат, 1970 он	5.000₮	1998.05
8.	Ш.Эрдэнэ	"Ээргэд" бро- керын пүү- сийн захирал	99112152	МУИС, Мат, 1985 он	200US\$	1998.10
9.	Р.Ринчинбазар	ЭГО	326454	МУИС, Мат, 1980 он	10.000₮	1999.03
10.	Н.Тунгалаг	МУИС-ийн ня-бо бүртгэл		МУИС, Ня-бо.	5.000₮	1998.05
11.	Ц.Болдсүх	МУИС-ийн э.ш.хариуцсан орлогч захирал	322508	ХБНГУ, 1982 он	4.000₮	1998.05
12.	Н.Намсрай	УБИС-ийн багш	323626	ЛГУ, 1966 он	5.000₮	1998.05
13.	Р.Энхбат	МУИС-ийн багш	351007	ИГУ, 1980-он	5.000₮	1998.05
14.	Т.Жанлав	МУИС-ийн багш	325631	МУИС, Мат, 1970 он	5.000₮	1998.05
15.	Х.Гэндэнжамц	МУИС-ийн багш	325022	МУИС, Мат, 1955 он	3.000₮	1998.05
16.	Л.Дорж	ФТХ	452313	Эрхүү, УИС, 1966 он	5000₮	1998.05

Нийгэмлэгийн дотоод данс: • Голомт банк (I салбар)
2250704 Р.Энхбат

Валютын данс: Голомт банк (I салбар)
2270409 Р.Энхбат

Гарчиг

Олимпиадын дүнгийн тухай /Ц.Дашдорж/	3
VII ангийн III даваа /Б.Сандагдорж, Л.Даваажаргал/	9
VIII ангийн III даваа /Б.Чулуундорж, Н.Баянбат/	12
VIII ангийн IV даваа /Д.Нямсүрэн, Б.Түмэндэмбэрэл/	16
IX ангийн III даваа /Ж.Батболд, Т.Пүрэвдорж/	21
IX ангийн IV даваа /Б.Чулуундорж, Ж.Батболд/	25
X ангийн III даваа /Ц.Батхүү/	28
X ангийн IV даваа /Ц.Батхүү/	32
Багын багшийн III даваа /Д.Нарангэрэл/	38
Багын багшийн IV даваа /Ү.Маам/	43
Дундын багшийн III даваа /В.Адьяасүрэн/	46
Дундын багшийн IV даваа /В.Адьяасүрэн/	51
Олон улсын олимпиад /Ц.Дашдорж/	58
Оюутны VII олимпиад /Ц.Дашдорж/	63
Өмнөх онуудын Олимпиадын зарим бодлогууд /В.Адьяасүрэн/	75
Нэгэн орчилт нийлбэр /С.Чимэдцэрэн/	81
Монголын Математикийн Нийгэмлэгийн товч танилцуулга /Р.Энхбат/	83
ММН-т хандив өгсөн хүмүүсийн жагсаалт	84