

МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАДЫН ЦУВРАЛ
№23

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН
XXXV ОЛИМПИАД

УЛААНБААТАР ХОТ, 2000 ОН

ӨМНӨХ VГ

Улсын болон Олон улсын математикийн олимпиадад бэлтгэгчид, математикийн төрөлжсөн сургалттай ангийн сурагч, оюутан, багш нар, математик сонирхогч өргөн олонд зориулсан цувралын ээлжит дугаар уншигч Таны гар дээр очиж байна. Тус гарын авлагыг бэлтгэхэд ММО Зохион Байгуулах Хорооны гишүүд, МУИС-ийн математикийн ангийн оюутнууд идэвхтэй оролцлоо.

Уг номын талаархи аливаа санал хүсэлтээ МУИС-ийн Алгебр-Геометрийн тэнхимд ирүүлнэ үү.

Монголын Математикийн XXXV олимпиад
Редактор Цэрэндоржийн Дашдорж
Хэвлэлийн эхийг бэлтгэсэн Цэрэндоржийн Навчаа
2000 оны 04-р сард 2000 хувь хэвлэв.

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН XXXV ОЛИМПИАДЫГ
НЭЭЖ ТУС ОЛИМПИАДЫГ ЗОХИОН БАЙГУУЛАХ
АЙМГИЙН ХОРООНЫ ДАРГА УВС АЙМГИЙН ЗАСАГ ДАРГА
Ц.БААТАРЫН ХЭЛСЭН ҮГ

1999.05.08.

Улаангом

Олимпиад зохион байгуулах улсын хорооны дарга,
гишүүд ээ!

Хүндэт зочид, багш, сурагчид математикчид аа!

Нөхөд өө!

Манай орны олон зуун сургуулийн мянга, мянган багш сурагчдаас эрдэм ухаан, авьяас чадвараараа шалгаран улсын математикийн XXXV олимпиадад оролцохоор уул усны цэнхэр хязгаар Увс аймагт хүрэлцэн ирсэн та бүхэнд аймгийн нийт иргэд, багш сурган хүмүүжүүлэгчид, сурагч багачууд, боловсрол гэгээрэл, аж ахуй бизнес, төр захиргааны байгууллагуудын нэрийн өмнөөс болон хувиасаа чин сэтгэлийн халуун мэндчилгээ дэвшүүлье.

XX зууны төгсгөлд хоёр мянганы зааг дээр зохиогдож буй тус олимпиад шинэ зууны өнгийг тодорхойлох шилдэг математикчдын чуулга уулзалт болж байгаагаараа онцлог юм.

Тус аймгийн Хяргас сумын уугуул иргэн МУИС-ийн математикийн багш, эрдэмтэн, профессор Лэгцэгийн Өвгөний хөдөлмөрийн алдрыг Увс аймгийн нийт математикчдын баяр болгон өргөтгөн тэмдэглэж байгаа нь манай олимпиадын агуулгыг улам баяжуулж байна. Идэр бага наснаасаа эрдмийн мөр хөөж 1959 онд МУИС төгссөнөөс хойш төрөлх сургуульдаа тасралтгүй 40 жил багшлан эрдмийн өндөрлөгт хүрч, хийж бүтээсэн бүхнээ мэргэжил нэгт нөхөд, олон зуун шавь, гэр бүл, ахан дүүс, найз нөхөдтэйгөө хамтран тэмдэглэхээр бидний санаачлагыг хүлээн авч нутаг усаа зорин ирсэн Л.Өвгөн танд гүнээ талархаж, эрүүл энх, аз жаргал, сайн сайхан бүхнийг хүсэн ерөөж байна.

Хүний сэтгэхүйн дээд чанаруудыг төлөвшүүлэхэд тооны ухаан үлэмж тустай болохыг эрдэмтэд нэгэнт тогтоож математик өөрөө бүх шинжлэх ухааны хаан болжээ. Математикт суурилсан физик, компьютер хурдацтай хөгжиж байна. Ах дүү төрсөн математик, физик, компьютер гурав айл гэрийн амьдрал дотор хүртэл нэвтрэн орж хүн төрөлхтөнийг эзэмдлээ. Математик оюун ухааныг цэгцэлдэг гайхамшиг билээ. Учир иймд ерөнхий боловсролын сургалтын агуулгад математикийн сургалт түлхүү байр суурьтай явж ирсэн бөгөөд хойшид ч ийм байх нь ойлгомжтой. Сурагчид, багш нарын авьяасыг хөгжүүлэх ухааныг задлахад математикийн олимпиад жинтэй хувь нэмэр оруулж иржээ. 1963 онд Увс аймагт математикийн анхны олимпиад зохиогдсоны нэг жилийн дараа улсын анхдугаар олимпиад явагдсанаас хойш 35 жил өнгөрчээ.

Манай аймгийн багш, сурагчид математикийн олимпиад анх зохиогдсоноос нь эхлэн өнөөг хүртэл жил дараалан тогтмол өндөр амжилттай оролцож ирсэн сайхан уламжлалтай билээ. Тухайлбал тус аймгийн багш сурагчид математикийн өнгөрсөн 34 олимпиадад улсын аваргаар 6 хүн 8 удаа, 2,3 дугаар байранд 16 хүн 22 удаа шалгарч нийтдээ 30 гаруй удаа тэргүүлэх байруудыг эзэлжээ. Эдгээрийн дотроос Улаангомын 10 жилийн I сургуулийн багш Донсолын Бат-Орших, 1990 онд X анги төгсөгч Цэнгэлийн Пүрэвбаяр нар улсын аваргаар тус бүр 2 удаа, 1968, 1972, 1978, 1992 онд X анги төгссөн, УБИС-ийн мэдээллийн төвийн захирал Гүнзэнгийн Батнасан, Хан-Уул дээд сургуулийн захирал Цэрэнгийн Дэмбэрэл, "Оргил Тех" компаний захирал Гүнжээгийн Цогтоо Япон улсад сурч буй оюутан Баянсангийн Уламбаяр нар тус бүр тухайн онуудад улсын аваргаар шалгарчээ. Эдгээр аваргуудаас гадна Бүрэнгийн Цэрэнпил, Гээпэлийн Баатарбилэг, Хинятын Цоохүү, Янживын Бат-Очир, Чимэдийн Хүрэлбаатар, Баатарын Цэвээнравдан, Миеэжавын Итгэл нарын олон шилдэг математикчид улсаа төлөөлөн олон улсын математикийн олимпиадад амжилттай оролцож байлаа.

Сурагчдын олимпиадаас Сундуйн Эрхэмбаяр, Даалхайн Баатар, Лонжидын Батсүх, Лхамжавын Хадхүү, Баттогтохын Чойжилсүрэн, Лувсаннъямын Гантөмөр, Волоожийн Батмөнх, Баянсангийн Эрдэнэбаяр, багш Жанчигийн Энхцэцэг нарын олон математикчид улсын математикийн олимпиадуудад 2,3 дугаар байрт шалгарч мөнгө, хүрэл медаль хүртжээ.

Математикийн олимпиадын түүхэнд төрөлх аймгийнхаа нэрийг хүндэтгэлтэйгээр өргөж явсан дээрх нэрт математикчиддаа Увс нутгийн иргэд гүн талархалтай байдгаа илэрхийлэхэд нэн таатай байна.

Монголчууд бид гараа сайн бол бариа сайн гэдэг. Чухамхүү дээрх амжилтуудын анхны суурийг нь тавьж, түүний тасралтгүй давтагдаж байгаа уламжлалыг бий болгоход математикч багш агсан Дамбын Буянхүүгийн эрдэм мэдлэг, ур чадвар хүчин чармайлт шийдвэрлэх үүрэгтэй байсан нь өөрийн эрхгүй нэхэн дурсагдаж байна.

Д.Буянхүү нь хэдхэн сарын өмнө ертөнцийн мөнх бусыг үзүүлсэн боловч түүний нөр хичээнгүй хөдөлмөрч, хүнлэг чанар, өндөр мэдлэг авьяас чадвар амжилт бүтээлийг Увс аймгийн төдийгүй, Монголын математикчид мартахгүй.

Талийгаачийн гэгээн дурсгалыг нэгэн хором босч хүндэтгэхийг зөвшөөрнө үү.

Тус аймагт математикийн олимпиадыг хөгжүүлж, олон шилдэг математикчдыг төрүүлэхэд манай нийт багш нарын оруулсан хувь нэмэр арвин билээ. Энд би ахмад багш нараас Баярын Чимэд, Шагдарын Туваан, Жумдааны Охиндой, Дашийн Бэгэжав, Пүжуугийн Дашээвэг, Жамцын Чулуун, дунд үеийн багш нараас Сундуйн Эрхэмбаяр, Даалхайн Баатар, Лонжидын Батсүх, шинэ үеийн багш нараас Донсолын Бат-Орших, Рагчаадоржийн Одгэрэл нарыг онцлон дурьдахыг хүсч байна.

Увс аймаг эх орны баруун хойт хойморт улсын нийслэлээс 1400-аад км алсад оршдог, 70-аад мянган км квадрат нутагтай, 100-аад мянган хүн амтай хоёр сая шахам толгой малтай, мал аж ахуй, газар тариалан, уул уурхайн салбар голлон эрхэлдэг, хангай говь, тал хээр хосолсон монголдоо төдийгүй дэл-

хийд ховорт тооцогдох байгалийн өвөрмөц тогтоцтой, дөрвөд, баяд, халх, хотон зэрэг олон ястны өлгий нутаг юм.

Увсчууд эртний малч, хөдөлмөрч удамтай, ардын арвин зан заншил өв уламжлалтай бөгөөд бидний дундаас төрөн гарсан дархан аварга Х.Баянмөнх, Их самаанди Гаадан хамба, улсын баатар Т.Дүүдэй академич, доктор, профессор Ч.Жүгдэр, Б.Иргэлбаян, төрийн соёрхолт эмч М.Намсрай, тариаланч баатар Ц.Сундуйжав, ардын жүжигчин Г.Түмэндэмбэрэл, Монгол төрийн зууны зүтгэлтэн Ю.Цэдэнбал дарга, адуучин баатар Г.Шагдарсүрэн нарын олон алдартнаараа бахархаж байдаг. Увсчууд эрдэм ухаан оюун билгийг ямагт дээдлэн хөгжүүлж ирсэн баялаг уламжлалтай билээ.

Увс аймгаас Ганжаагийн Аюушжав, Чалхаажавын Авдай, Цээпэлдоржийн Баатар, Нанирангийн Даваа, Мөнхдоржийн Даш, Чимэдийн Жүгдэр, Мятавын Төмөржав, Хишигтийн Цэрэв нарын 8 академич төрсөн байна.

Увсаас шинжлэх ухааны 38 доктор төрсөн нь Монгол улсын нийт докторуудын 20 хувийг эзэлж байгаагийн дотор зөвхөн физикийн шинжлэх ухаанаар Ойдовын Лхагва, Цээпэлдоржийн Баатар, Зодовын Омбоо, Хинятын Цоохүү нар докторын зэрэг хамгаалжээ.

Шинжлэх ухааны Монголын таван доктор тутмын нэг нь ногдож байгаа ийм өндөр үзүүлэлттэй аймаг Увсаас өөр байдаггүй юм байна. Энэ амжилтаараа ч гэсэн өнөөдөр бид бахархаж байна.

Математик, физикийн шинжлэх ухаанд авьяас чадвар, хүч хөдөлмөрөө зориулж яваа доктор Цовоохүү, УИХ-ын гишүүн А.Ганбаатар нарын олон хүн манай энэ олимпиадад оролцож байгаад талархалтай байна.

Хүүхдийн авьяас чадварыг нээн илрүүлж хөгжүүлэх талаар эцэг эх, сургууль багш нар ихээхэн чармайлт гаргаж байгааг төр захиргааны болон боловсролын байгууллагаас дэмжиж туслах талаар анхаарч зохих үр дүн ч гарч байна.

1998 онд тус аймгийн багш сурагчид бүх төрлийн олимпиадын нэгдсэн дүнгээр улсад хоёрдугаар байранд шалгарсан

бөгөөд энэ жил одоо явагдаад байгаа физик, биологи, гадаад хэл, монгол хэл, мэдээлэл зүйн олимпиадаас нийт 10 гаруй медаль аваад байна. Мөн математикийн шинжлэх ухааны салбар мэдээлэл зүйн олимпиад явагдсан бүх жилүүдэд тогтмол өндөр амжилт үзүүлж ирлээ.

Уг олимпиадаас тус аймгийн багш сурагчид давхардсан тоогоор тэргүүн байр 4, хоёрдугаар байр 5, гуравдугаар байр 8 удаа эзэлсний дотор Улаангомын I арван жилийн сургуулийн багш Б.Цолмонхүү улсын аваргаар 3 удаа шалгарчээ. Ер нь улсын олимпиадаас удаа дараа медаль хүртсээр байгаа математикийн Донсолын Бат-Орших, мэдээлэл зүйн Биньеэгийн Цолмонхүү, физикийн Цэрэнжээгийн Идэрбат, Чулууны Чимэд, биологийн Жамсрангийн Хандмаа, гадаад хэлний Лхайсүрэнгийн Чимгээ, бага ангийн Жанчигийн Энхцэцэг нарын олон идэр залуу багштай, бусад сургуулиудыг үлгэрлэн дагуулж байгаа Чойдонгийн Төгөлсүрэн захиралтай аймгийн математикийн гүнзгийрүүлсэн байгалийн ухааны төрөлжсөн сургалттай 10 жилийн I лицей сургуулийн нийт хамт олонд баяр хүргэж байна.

Манай Олимпиадад ОХУ-ын Тува улсын математикчдын бүрэн баг оролцож байгаад баяр хүргэж амжилт хүсье.

Нөхөд өө!

Математикийн XXXV олимпиад Увс аймагт болж байгаа нь тохиолдлын хэрэг бус бөгөөд бид:

Нэгдүгээрт: Тус аймгийн багш нар математикийн сургалтыг хөгжүүлэх талаар багагүй хүч хөдөлмөр гаргаж, олон шилдэг математикчид төрүүлснийг,

Хоёрдугаарт: Манай багш сурагчид математикийн олимпиадад жил бүр өндөр амжилттай оролцдог уламжлалыг тогтоож, аймгийнхаа нэрийг тогтмол дуурсгаж ирснийг,

Гуравдугаарт: Манай ард иргэд уг олимпиадыг ихэд хүндэтгэж үе үеийн шилдэг математикчдаараа бахархаж байдгийг үндэс болгон энэ удаагийн олимпиадыг өөрийн аймагтаа зохион байгуулах тухай хүсэлтээ математикийн олимпиад зохион байгуулах улсын хороонд уламжилсныг дэмжиж хүлээн

авсанд гүн талархаж байгаагаа нийт увсчуудыг төлөөлөн илэрхийлж байна.

Энэ удаагийн олимпиадад 21 аймаг, нийслэлээс шалгарсан 200 гаруй шилдэг математикчид хүрэлцэн иржээ. Манай аймагт одоо ажиллаж байгаа болон насныхаа чөлөөнд суугаа бүх математикийн багш нар энэ өдрүүдийн арга хэмжээнд оролцож өндөр мэргэжлийн эрдэмтдийн лекц, сургалтад оролцох, үе үеийн багш шавь нартайгаа уулзалдахаар бас хүрэлцэн ирээд байна. Математикийн энэ удаагийн олимпиад Увс аймагт математикийн хөгжилтийг эрс хурдасгаж өгснөөрөө ихээхэн ач холбогдол үлдээж байна. Манай газар шороон дээр хүрэлцэн ирж оюун ухаанаараа цойлон манлайлж амьдралынхаа алтан замыг сонгосон залуу математикчид Увсчуудтай зүрхний холбоотой болох нь эргэлзээгүй.

Олимпиадын бүх зардлыг Увс аймаг бүрэн хариуцаж байгаа бөгөөд энэ арга хэмжээг дэмжиж тус аймгийн олон сум, байгууллага, иргэд санаа сэтгэл, санхүү эд материалын туслалцаа үзүүлээ. Аймгийн иргэдийн төлөөлөгчдийн хурал, Улаангом, Цагаанхайрхан сумын засаг даргын тамгын газар, Боловсрол соёлын төв, Халамж үйлчилгээний төв, Нийгмийн эрүүл мэндийн төв, Татварын хэлтэс, Нийгмийн даатгалын хэлтэс, Баруун бүсийн эрчим хүчний систем, цахилгаан шугам сүлжээний газар, УГТЭШ хүрээлэн, хөдөлмөр зохицуулалтын алба, МАХН-ын болон МСДН-ын аймгийн хороо, аймгийн залуучуудын холбоо зэрэг олон арван байгууллага 75.0—100.0 мянган төгрөгийг хандивлаад байна. Санхүүгийн ийм дэмжлэг одоо ч үргэлжилсээр байна.

Мөн "Алтан хөхийн оргил" ХХК-ний захирал Д.Баяраа 325.0, Улаанбаатар дахь Увс аймгийн нутгийн зөвлөлийн дарга математикч эрдэмтэн З.Батжаргал 100.0 иргэн Даалхайн Баатар, Хасгаагийн Сүхбаатар нар тус бүр 75.0 мянган төгрөгийг хандивлаад байна.

Манай олимпиадыг хүндэтгэж, түүнд өндөр ач холбогдол өгч сэтгэлийн харамгүй туслалцаа үзүүлсэн дээрх ивээн тэтгэгч нарт гүн талархаж байгаагаа олимпиад зохион байгуу-

лах аймгийн хороо болон аймгийн засаг даргын нэрийн өмнөөс илэрхийлж байна. Монгол улсын дөрвөн зүг, найман зовхисоос хуран цугларсан олон зуун математикчдаа сэтгэлийн угаас хүндэтгэж байгаа бүхнээрээ дайлан зочлохыг Увсчуудад уриалж байна.

XXXV олимпиадыг зохион байгуулах аймгийн хороо олон төрлийн арга хэмжээ авч хэрэгжүүлсний нэг нь тус аймгийн санаачилгаар бий болгож буй Монголын математикийн олимпиадын бэлгэдэл бүхий далбаа юм.

Энэхүү далбаа нь энэ зуунд явагдсан 35 олимпиадын түүхийг шинэ зуунд уламжлан хүргэх төдийгүй ирэх зууны шилдэг математикчдын хийморь туг нь байж, олон улсын тавцанд монголынхоо нэрийг ямагт дуурсгаж мандуулахыг бид бэлэгдэж байна.

Уг далбааг математикийн олимпиад зохион байгуулах улсын хорооны дарга эрдэмтэн, профессор Ц.Дашдорж танд гардуулж Монголын математикийн XXXV олимпиадын ажиллагаа нээснийг мэдэгдье.

Эрдэмтэн Профессор Л.Өвгөний хөдөлмөрийн алдар тэмдэглэх ёслолын үйл ажиллагааг энэ олимпиадтай зэрэгцүүлэн эхлүүлж байгааг бас мэдэгдье.

Байгаль эх нь тансаг ариухан хүн ард нь ажилсаг шударга, ахуй соёл нь өвөрмөц жаягтай, адуу мал нь эрэмгий чадалтай, хурдтай, жороотой, охид бүсгүйчүүд нь цэвэр журамтай, цэх шулуун эрчүүд хөвгүүд нь бяр тэнхээтэй, холч ухаантай Увс нутагт тухлан саатаж оюун ухаанаа сорин уралдуулж өндөр амжилт гаргахыг энд цугларсан хүн бүрээс та бүхнээс хүсэн ерөөе.

Эрдэм ухаан дэлгэрэх болтугай.

Анхаарал тавьсанд баярлалаа.

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН XXXV ОЛИМПИАДЫН ДҮНГИЙН ТУХАЙ ИЛТГЭЛ

Ц.Дашдорж

Хүндэт математикчид аа!

Увс аймгийн засаг дарга ноён Ц.Баатар аа!

Эрдэм ухаанд гүн шүтлэгтэй Увсчууд аа!

Монголын математикийн XXXV олимпиад 1999 оны 05-р сарын 07-оос 12-ны өдрүүдэд Увс аймгийн Улаангом хотод амжилттай явагдаж дүнгээ гаргаж байна.

Энэ удаагийн олимпиадад 20 аймаг, Улаанбаатар хотын 22 багийн бага дундын 73 багш, 135 сурагчид оролцож, нийт 208 хүн оюун ухаанаа сорин уралдлаа. Энэхүү олимпиадыг зохион байгуулахад санаачилга хүч чармайлт гаргаж бүх нөхцөл бололцоогоор хангаж өгсөн Увс аймгийн засаг дарга Ц.Баатар, нийгмийн бодлогын хэлтсийн дарга Я.Галбадрах, Олимпиадыг зохион байгуулах Увс аймгийн салбар комиссын гишүүд, олимпиадыг зохион явуулахад нөөц бололцоогоо дайчилсан Ч.Төгөлсүрэн захиралтай 10 жилийн 1-р сургууль, Орших захиралтай 2-р сургууль, Д.Баатар даргатай Улаангом сум, Ц.Батнасан захиралтай Боловсрол соёлын төвийн хамт олон, Дэжидмаа эрхлэгчтэй 3-р цэцэрлэгийн хамт олон болон Увс аймгийн бүх хөдөлмөрчдөд Монголын нийт математикчдын нэрийн өмнөөс гүн талархал илэрхийлье.

Мөн олимпиадад өөрсдийн хувь хандивыг оруулсан аймгийн Иргэдийн төлөөлөгчдийн хурал, БОЯ-ны ус цаг уур, Мониторингийн албаны дарга, доктор З.Батжаргал, МУИС-ийн Математик Компьютерийн сургууль, "Алтан Хөхийн оргил" ХХК, Нефть хангамжийн газар, Татварын алба, Аймгийн нийгмийн даатгалын хэлтэс, БСТ, Халамж төв, Нийгмийн эрүүл мэндийн төв, Хөдөлмөр зохицуулалтын алба, аймгийн бүх сургуулиуд, "Гурил" ХК, МИАТ-ийн Увс дахь салбар, Улаангом сумын засаг даргын тамгын газар, МАХН, МСДН-уудын хороо, Цагдаагийн хэлтэс, Холбооны газар зэрэг байгууллагууд,

бизнес эрхлэгч Буужав, Ч.Ганболд, Д.Баатар нарын хүмүүст мөн талархал илэрхийлье.

Олимпиадад 8-р ангийн 49 сурагч оролцсоноос УБ хотын 1-р сургуулийн сурагч Н.Энхбат (багш Бат-Эрдэнэ) 28 оноогоор I байр эзэлж, улсын математикийн XXXV олимпиадын 8-р ангийн аварга боллоо. УБ хотын 1-р сургуулийн сурагч Уянга (Бат-Эрдэнэ) 22 оноогоор, мөн сургуулийн сурагч Баасанжав (Бат-Эрдэнэ) 19 оноогоор II байрыг, Увс аймгийн 2-р 10 жилийн сургуулийн сурагч Б.Сүх-Очир (Я.Басан) 16 оноогоор, "Олонлог" багийн сурагч Болорбат 15 оноогоор, УБ хотын 1-р сургуулийн сурагч П.Эрдэнэбилэг (Энхбаатар) 14 оноогоор III байр эзэллээ.

9-р ангийн 44 сурагч оролцсоноос УБ, 11-р сургуулийн сурагч Б.Амарсанаа (Батхуяг) 29.5 оноогоор тэргүүн байр эзэлж, ММО-XXXV-ын 9-р ангийн аварга сурагч боллоо. Хөвсгөл аймгийн сурагч Т.Пүрэвдорж (Ж.Батболд) 21 оноогоор II байр, УБ, 1-р сургуулийн А.Амарсанаа (Нарангэрэл) 10 оноогоор, УБ, 11-р сургуулийн сурагч Ш.Ариунболд (Батхуяг) 8.5 оноогоор, Увс аймгийн сурагч Ж.Хосбаяр (Ж.Батболд) 7 оноогоор III байрыг тус тус эзлэв.

10-р ангийн нийт 42 сурагч оролцсоноос "Олонлог" багийн сурагч Л.Хатанбаатар (багш Баянзул) 35 оноогоор I байр эзэлж улсын математикийн XXXV олимпиадын 10-р ангийн аваргаар шалгарлаа. УБ, 11-р сургуулийн сурагч Б.Баттулга (Л.Эрдэнэсүвд) 27 оноогоор, мөн сургуулийн сурагч Ж.Эрдэнэбилэг (Л.Эрдэнэсүвд) 24 оноогоор II байр, мөн 11-р сургуулийн сурагч Б.Очирбат (Л.Эрдэнэсүвд) 23 оноогоор, МУИС-ийн сурагч Д.Хашбаатар (Ж.Батболд) 22 оноогоор, УБ, 11-р сургуулийн сурагч Б.Сансар (Л.Эрдэнэсүвд) 21 оноогоор III байрыг тус тус эзэллээ.

Улсын математикийн XXXV олимпиадад амжилттай оролцсон дээрх нэр бүхий сурагчид, сурагчдаа амжилттай сайн бэлтгэсэн дээрх багш нар болон сургуулиудад олимпиадыг зохион байгуулах хорооны нэрийн өмнөөс чин сэтгэлийн талархал илэрхийлье.

Багш нарын олимпиадыг бага, дунд гэсэн 2 ангиллаар явуулсны дотроос дунд ангийн математикийн 45 багш оролцсоноос Увс аймгийн математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай 10 жилийн 1-р сургуулийн багш Д.Бат-Орших 29 оноогоор тэргүүн байр эзэлж, ММО-XXXV-ын аварга математикч багшаар шалгарлаа. Д.Бат-Орших нь Эрдэнэт хот, Баянхонгор аймгуудад зохион явагдсан олимпиадын аварга багшаар удаа дараа шалгарч байсан манай улсын хүчтэй математикч багш гэдгийг бид бүхэн андахгүй билээ. Тэрээр монголын математикийн багш нарын олимпиадын түүхэнд дархан аварга багш гэсэн нэгэн шинэ амжилтыг анхлан үлдээсэн онцгой үйл явдал боллоо гэж онцлон тэмдэглэхийг хүсэж байна.

Мөн Увс аймгийн 1-р сургуулийн багш Р.Одгэрэл 28 оноогоор удаалж Увсчуудын хүчтэйг батлан харууллаа.

Бага ангийн багш нарын олимпиадад 28 багш оролцсоноос УБ хотын 1-р сургуулийн багш П.Чимгээ 23 оноогоор I байр эзэлж, 35-р олимпиадын бага ангийн аварга математикч багшаар шалгарлаа. II байрыг мөн сургуулийн багш Б.Жаргалсүрэн 20 оноогоор, III байрыг Хөвсгөл аймгийн багш Д.Баясгалан 18 оноогоор тус тус эзэллээ. Дээр нэр дурьдсан болон олимпиадад амжилттай оролцсон нийт багш нартаа баяр хүргэе.

Авьяаслаг математикч агсан П.Энхболдын нэрэмжит уран бодолтын тусгай шагналыг математикийн гоо сайхныг харуулж онцгой уран бодолт хийсэн УБ хотын 11-р сургуулийн 9-р ангийн сурагч Б.Амарсанаад олголоо. Мөн ММО-XXXV-ын үнэмлэхүй аваргын шагналыг нийт оролцогчдоос 35 оноогоор тэргүүлсэн УБ хотын 11-р сургуулийн 10-р ангийн сурагч Л.Хатанбаатарт олгох боллоо.

Энэ удаагийн олимпиадад Увс нутгийн ард түмэнтэй хил залгаа Тува улсын бүтэн баг ирж маш амжилттай оролцлоо. Олимпиадад оролцсон туурга нэгт та бүхэндээ баярласнаа илэрхийлье.

Ийнхүү 23 баг хүч оюунаа сорьсноос Д.Бат-Орших ахлагчтай Увс баг 19.3 онооны дундаж үзүүлэлтээр тэргүүн байр,

С.Мөнхжаргал ахлагчтай Хөвсгөл баг 16.6 онооны дундаж үзүүлэлтээр II байр, Даваадорж ахлагчтай УБ баг 12.6 онооны дундаж үзүүлэлтээр III байр тус тус эзэллээ.

Монголын Математикийн XXXV Олимпиад ийнхүү амжилттай явагдлаа. Манай энэ удаагийн олимпиадыг явуулахад бүх талын бололцоо нөхцлөөр хангаж өгсөн Увсчууд, Улаангомчуудад Монголын нийт математикчдын нэрийн өмнөөс гүн талархал илэрхийлэхийг хүсэж байна.

Монголын математикчид бидэнд Увсын цэнхэр хязгаарыг үзэх завшааныг олгож өгсөн Увс аймгийн засаг дарга Ц.Баатар танд Монголын нийт математикчдын нэрийн өмнөөс математикч ёсны халуун баяр хүргэж танд болон танай аймгийн ард түмэнд сайн сайхны дээдийг хүсэн ерөөе. Товчоор дүгнэн хэлэхэд Увсчууд та нар ММО-XXXV-ыг ОНЦ дүнтэй зохион байгуулж явууллаа. Энэ олимпиад монгол улсын маань өнцөг булан бүрээс энд хуран цугласан математикчид бид бүхний зүрх сэтгэлд үүрд дурсагдан үлдэхээр сайхан зохион байгуулагдаж чадлаа.

Харин Говь-Алтайчууд нутаг ийм ойрхон мөртлөө энэ удаагийн олимпиадад оролцоогүй явдлыг юугаар тайлбарлавал зохих вэ?

Д.Бат-Орших таныг ММО-ын хорооны гишүүнээр элсүүлж, энэ жилийн ОУМО-ын монголын багийн орлогч удирдагчаар томилж байгаад би туйлын баяртай байна. Энэ жилийн 7-р сард Румын улсад болох олон улсын математикийн XL олимпиадын бэлтгэлд Л.Хатанбаатар (УБ, "Олонлог"), Б.Баттулга (УБ-11), Ж.Эрдэнэбилэгт (УБ-11), Б.Очирбат (УБ-11), Д.Хашбаатар (МУИС), Б.Сансар (УБ-11), Б.Амарсанаа (УБ-11, 9-р анги) нарыг үлдээх нь зүйтэй гэж үзлээ.

Эрдэм оюун дэлгэрч Монголд математикчдын оюун ухаан улам хөгжиж бадрах болтугай.

Монголын Математикийн XXXV Олимпиадын нэгдсэн дүн

№	Аймгийн нэр	VIII	IX	X	Бага	Дунд	Нийт оноо	Хүний тоо	Дундаж оноо
1	Увс	16	9.5	-	14	57	96.5	5	19.3
2	Хөвсгөл	9	21	14	18	21	83	5	16.6
3	Улаанбаатар	97.5	77	182	67	55	478.5	38	12.6
4	Олонлог	15	9.5	35	-	-	59.5	5	11.9
5	Орхон	1	4.5	8	15	1	29.5	5	5.9
6	Сүхбаатар	0	0	7	-	18	25	5	5.0
7	Дархан	7	3	1	0	11	22	5	4.4
8	Дорнод	0	0.5	17	-	1	18.5	5	3.7
9	Дорноговь	2	0	0	2	13	17	5	3.4
10	Говьсүмбэр	7	0	0	9	0	16	5	3.2
11	Сэлэнгэ	7	1	0	7.5	0	15.5	5	3.1
12	Дундговь	0	-	-	14	1	15	5	3.0
13	Завхан	0	1	0	0	14	15	5	3
14	Тува	0	0	7	0	8	15	5	3
15	Өвөрхангай	0	1	1	10	0	12	5	2.4
16	Баянхонгор	0	0	3	8	1	12	5	2.4
17	Ховд	0	0	1	8.5	0	9.5	5	1.9
18	Хэнтий	-	1	7	-	0	8	5	1.6
19	Өмнөговь	1.5	-	-	-	1	2.5	5	0.5
20	Булган	1	0	0	0.5	0	1.5	5	0.3
21	Баян-Өлгий	-	1	0	0	0	1	5	0.2
22	Архангай	0	0	0	0.5	0	0.5	5	0.1
23	Төв	0	0	0	0.5	0	0.5	5	0.1
24	Говь-Алтай						оролцоогүй		

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН XXXV
ОЛИМПИАДЫН VII АНГИЙН III ДАВААНЫ
БОДЛОГО

Y.Маам

VII-A1. x, y, z тоонууд $x + y + z - 2(xy + yz + xz) + 4xyz = \frac{1}{2}$ тэнцэтгэлийг хангадаг бол эдгээрийн ядаж нэг нь $\frac{1}{2}$ -тэй тэнцүү болохыг батал.

VII-A2. ABC тэнцүү талт гурвалжны AB ба BC талууд дээр D ба K цэгүүд харин AC тал дээр E ба M цэгүүдийг $DA + AE = KC + CM = AB$ байхаар авчээ. Тэгвэл DM ба KE шулуунуудын хоорондох өнцөг 60° болно гэдгийг батал.

VII-A3. $x^{2000} + x + 1$ олон гишүүнтийг тус бүр нь 2-оос багагүй зэргийн олон гишүүнтүүдийн үржвэрт тавь.

VII-B1. $1 \cdot 2 \cdot 2^1 + 2 \cdot 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 4 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot (n + 1) \cdot 2^n$ илэрхийллийн утгыг ол.

VII-B2. a, b, c нь $abc = 1$ байх эерэг тоонууд бол

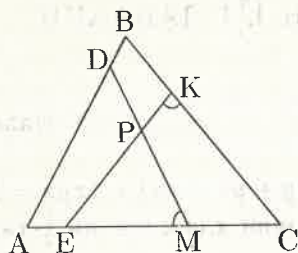
$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+a+c} \leq 1$$

болохыг батал.

VII-B3. Хавтгай дээр 1 урттай хэрчим өгөв. Тэгвэл $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ урттай хэрчмийг шугам ба циркулээр байгуул.

VII-A1. Өгөгдсөн тэнцэтгэлийг хувиргаж бичвэл $x + y + z - 2xy - 2yz - 2xz + 4xyz - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2x + 2y + 2z - 4xy - 4yz - 4xz + 8xyz - 1) = \frac{1}{2}(2x - 1)(2y - 1)(2z - 1) = 0$ болно. Энэ үржвэрийн ядаж нэг үржигдэхүүн нь тэгтэй тэнцүү болж, x, y, z -ийн дор хаяж нэг нь $\frac{1}{2}$ -тэй тэнцэнэ.

VII-A2.



Бодлогын нөхцөл ёсоор $AM = AC - MC = BC - KB = KC$,
 $AM = KC$, $AD = AB - BD = AC - AE = EC$, $AD = EC$
 учир $\triangle MAD = \triangle ECK$ болно.
 Иймд $\angle MPE = 180^\circ - \angle PME - \angle PEM = 180^\circ - \angle PKC - \angle PEC = \angle C = 60^\circ$ болно.

Хэрэв DM ба EK хэрчмүүд нь огтлолцохгүй бол босоо өнцгүүдийн хувьд авч үзэх болно.

VII-A3. $x^{2000} + x + 1 = x^{2000} - x^2 + x^2 + x + 1 = x^2(x^{1998} - 1) + x^2 + x + 1 = x^2((x^3)^{666} - 1) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2(x - 1)(x^{3 \cdot 666 - 3} + x^{3 \cdot 666 - 6} + \dots + x^6 + x^3 + 1) + 1)$ гэж хоёроос багагүй зэргийн олон гишүүнтүүдийн үржвэрт тавигдана.

VII-B1. $A_n = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + (n+1) \cdot 2^n - (2^1 + 2^2 + \dots + 2^n) = \frac{2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + (n+1) 2^{n+1}}{2} - (2-1)(2^n + 2^{n-1} + \dots + 2^2 + 2^1) = \frac{1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n + (n+1) 2^{n+1} - 2}{2} - (2^{n+1} - 2) = \frac{A_n + (n+1) 2^{n+1} - 2}{2} - 2^{n+1} + 2$, $2A_n = A_n + (n+1) 2^{n+1} - 2^{n+2} + 2 \Rightarrow A_n = (n+1) 2^{n+1} - 2^{n+2} + 2 = 2^{n+1}(n-1) + 2$. $S = 1 \cdot 2 \cdot 2^1 + 2 \cdot 3 \cdot 2^2 + \dots + n(n+1) 2^n = 1^2 \cdot 2^1 + 2^2 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 2^3 + \dots + n^2 \cdot 2^n + 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^n = 1^2 \cdot 2^1 + 2^2 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 2^3 + \dots + n^2 \cdot 2^n + A_n$ эндээс $2S = 1 \cdot 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2^3 + \dots + n(n+1) 2^{n+1} = 2^2 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 2^3 + \dots + (n+1)^2 \cdot 2^{n+1} - (2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + (n+1) 2^{n+1})$, $2S - S = S = (n+1)^2 2^{n+1} - 2 - (1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n + (n+1) 2^{n+1} - 2) - A_n = (n+1)^2 \cdot 2^{n+1} - 2 - A_n - (n+1) 2^{n+1} + 2 - A_n = (n+1)^2 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 2^{n+1}(n-1) - 4 - (n+1) \cdot 2^{n+1} = 2^{n+1}(n^2 + 2n + 1 - 2n + 2 - n - 1) - 4 = 2^{n+1}(n^2 - n + 2) - 4$.

VII-B2. $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$ гэж үзвэл $xyz = 1$ болно.
 Тэгвэл $\frac{1}{1+a+b} = \frac{1}{1+x^3+y^3} = \frac{1}{1+(x+y)(x^2-xy+y^2)} = \frac{1}{z+(x+y)(x^2-xy+y^2)z} = \frac{1}{z+(x+y)(\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x})xyz} = \frac{1}{z+(x+y)(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1)} \leq \frac{1}{z+(x+y)(2-1)} = \frac{1}{x+y+z}$ ЭНЭ мэтчилэн бусдыг хувиргахад $\frac{1}{1+b+c} = \frac{1}{1+y^3+z^3} \leq \frac{1}{x+y+z}$, $\frac{1}{1+a+c} = \frac{1}{1+x^3+z^3}$

ММО-35, VIII АНГИЙН III ДАВАА

Б.Сандагдорж,

Л.Даваажаргал

Б.Хоролдагва

VIII-A1. $f(x) = 3x - x^3$ функцийн $[x, x + 2]$ хэрчим дээрх хамгийн их утга ямар x -үүдийн хувьд 2-оос багагүй байх вэ?

VIII-A2. Хэрэв арван оронтой тоо 11111-д хуваагддаг ба бүх цифрууд нь ялгаатай бол сонирхолтой тоо гэж нэрлэе. Сонирхолтой тоонууд хичнээн ширхэг байх вэ?

VIII-A3. Диагоналийн уртууд нь 3см ба 5см-тэй тэнцүү, харин сууриудын дунджийг холбосон хэрчмийн урт 2см байх трапецийн талбайг ол.

VIII-B1. $\sqrt{3+x} + \sqrt[4]{9-x} < \sqrt{3}$ тэнцэтгэл бишийг бод.

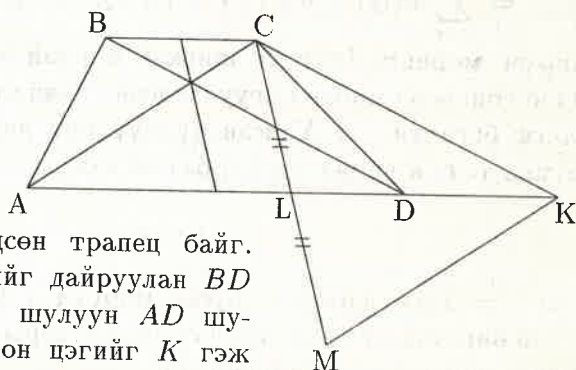
VIII-B2. Тэгш өнцөгт $2n \times 2n$ ($n \in N$) хүснэгтийн яг $3n$ ширхэг нүдийг улаанаар будав. Бүх улаан нүднүүдийг агуулсан байхаар n ширхэг мөр ба n ширхэг баганыг сонгон авч болохыг батал.

VIII-B3. ABC гурвалжны AC талд M , BC талд N цэгийг тэмдэглэв. BM ба AN хэрчмүүд O цэгээр огтлолцдог байг. Хэрэв AOM , AOB , BON гурвалжнуудын талбай харгалзан S_1, S_2, S_3 бол MNC гурвалжны талбайг ол.

VIII-A1. Энэ бодлого нь $g(t) = 3t - t^3 - 2$ функцийн $[t, t+2]$ хэрчим дээрх хамгийн их утга сөрөг биш байх t олох бодлоготой эквивалент байна. Гэтэл $g(t) = -t^3 + 3t - 2 = -(t-1)^2(t+2)$ болно. $g(t)$ функц сөрөг биш байхын тулд эсвэл $t = 1$ эсвэл $t \leq -2$ байна. Иймээс $t = 1$ гэдэг нь $x \leq 1 \leq x + 2$ буюу $x \in [-1, 1]$, харин $t \leq -2$ гэдэг нь $]-\infty, -2]$ болох учир манай бодлогын шийд $x \in]-\infty, -2] \cup [-1, 1]$ болно.

VIII-A2. Бид олох тоогоо $\overline{a_9 a_8 a_7 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0} = A$ гэж тэмдэглэе. A тооны бүх цифрүүд ялгаатай учир уг тооны цифрүүдийн нийлбэр $1+2+3+\dots+9=45$ болох тул уг тоо 9-д хуваагдана. $(9, 11111) = 1$ учир A тоо 99999 тоонд хуваагдахад хүрнэ. Иймээс $A = \overline{a_9 a_8 a_7 a_6 a_5} \cdot 10^5 + \overline{a_4 a_3 a_2 a_1 a_0} = \overline{a_9 a_8 a_7 a_6 a_5} \cdot 99999 + \overline{a_9 a_8 a_7 a_6 a_5} + \overline{a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}$ буюу $\overline{a_9 a_8 a_7 a_6 a_5} + \overline{a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}$ нийлбэр 99999 тоонд хуваагдах болно. Бодлогын нөхцлийг хангахын тулд $\overline{a_9 a_8 a_7 a_6 a_5} + \overline{a_4 a_3 a_2 a_1 a_0} = 99999$ байна. A тоо 10 оронтой учир $a_9 \neq 0$ ба $a_9 + a_4 = 9$, $a_8 + a_3 = 9$, $a_7 + a_2 = 9$, $a_6 + a_1 = 9$, $a_5 + a_0 = 9$ гэдгээс a_9 нь 1, 2, 3, ..., 9 цифрүүдийг авах боломжтой. a_9 -ийн сонгож авахад a_4 сонгогдох тул a_8 -ийн явах утга 8 боломжтой. Үүнтэй адилаар a_7 -г сонгох боломж 6, a_6 -г сонгох боломж 4, a_5 -ийг сонгох боломж 2 учир $9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 3456$ ширхэг сонирхолтой тоо байна.

VIII-A3.



$ABCD$ нь өгөгдсөн трапец байг. $BC \parallel AD$. C цэгийг дайруулан BD параллель татсан шулуун AD шулуунтай огтлолцсон цэгийг K гэж тэмдэглэе.

$\triangle ACK$ талбай трапецийн талбайтай тэнцүү. AC ба CK талууд трапецийн диагоналиудтай тэнцүү. ACK гурвалжны CL медиан AD ба BC -ийн дунджуудын хоорондох зайтай тэнцүү. CL -ийг үргэлжлүүлэн $CL = LM$ байх M цэгийг тэмдэглэе. $\triangle CKM$ талбай $ABCD$ трапецийн талбайтай тэнцүү ба түүний талууд нь трапецийн диагоналиуд болон нэг тал нь сууриудын дундажийг холбосон зайг 2 дахин авсантай тэнцүү. Тэгэхлээр $\triangle CKM$ -ы талууд нь 3, 5, 4 урттай. Иймд талбай нь 6 байна.

VIII-B1. $f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt[4]{9-x} < \sqrt{3}$ $f(x)$ -ийн функцийг тодорхойлогдох муж $-3 \leq x \leq 9$.

а) $0 \leq x \leq 9$ байг. $\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3+x} \geq \sqrt{3} \\ \sqrt[4]{9-x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq \sqrt{3} \\ \sqrt{3} > f(x) \end{cases} \Rightarrow$
 $[0, 9]$ завсарт x цэг олдохгүй.

б) $-3 \leq x < 0$ байг. $\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3+x} \geq 0 \\ \sqrt[4]{9-x} > \sqrt[4]{9} = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) > \sqrt{3} \\ \sqrt{3} > f(x) \end{cases}$
 $\Rightarrow [-3, 0]$ завсарт бодлогын нөхцөл хангах x цэг олдохгүй. $\Rightarrow$
 Уг тэнцэтгэл биш шийдгүй.

VIII-B2. $m(i)$ -ээр i мөр дэх улаан нүднүүдийн тоог тэмдэглэе.

$m(i) \leq 1$ байх мөрүүдийг $I = \{i_1, i_2, \dots, i_t\}$ гэе.

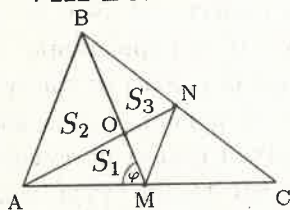
$$t = n + r \quad (r \geq 0) \quad (*)$$

байг. $\Rightarrow \sum_{k=1}^t m(i_k) \leq n + r$. $I = \{i_1, i_2, \dots, i_t\}$ -ээс ялгаатай $n - r$ ширхэг мөрийг, I -ээс $\forall r$ ширхэг мөртэй хамт сонгож авъя. Одоо сонгосон мөрөнд агуулагдсан улаан өнгөтэй нүдний тоо $2n$ -ээс багагүй. $\Rightarrow$ Үлдсэн нүднүүдийг дайруулан n ширхэг багана татаж чадна. $\Rightarrow (*)$ батлагдав.

$$t < n \quad (**)$$

байг. $\Rightarrow I$ -ээс ялгаатай бусад мөрүүд n -ээс олон ба ядаж 2 улаан өнгөтэй нүд агуулах тул эндээс дурын n ширхэг мөрийг сонгож авъя. Бодлого бодогдов.

VIII-B3.



$$\begin{aligned} S_{ABM} : S_{MBC} &= AM \cdot BM \cdot \sin \varphi : MC \cdot \\ BM \cdot \sin \varphi &= AM : MC \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{S_3}{S_{ONM}} \\ \Rightarrow S_{ONM} &= \frac{S_3 \cdot S_1}{S_2} \cdot \frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_{ONM} + S_{NMC}} = \\ &= \frac{S_1 + S_{ONM}}{S_{NMC}} \Rightarrow S_{NMC}(S_2 - S_{ONM}) = \\ &= (S_1 + S_{ONM})(S_3 + S_{ONM}) \Rightarrow \\ S_{NMC} &= \frac{(S_1 + S_{ONM})(S_3 + S_{ONM})}{S_2 - S_{ONM}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_{NMC} = \frac{S_1 \cdot S_3 (S_3 + S_2) (S_1 + S_3)}{S_2 (S_2^2 - S_3 \cdot S_1)}, S_2^2 - S_3 \cdot S_1 > 0 \Leftrightarrow AO \cdot OB > OM \cdot ON \Rightarrow \text{бодлого бодогдов.}$$

ММО-35, VIII АНГИЙН IV ДАВАА

М.Батбилэг

VIII-A1 (В.Адьяасүрэн). Аливаа натурал k тооны хувьд $m^3 + 10 \cdot 3^k$ байх натурал тоо m төгсгөлгүй олон олдоно гэж батал.

VIII-A2 (Г.Баярмагнай). Хэрэв $a \geq \frac{8}{5}b > 0$, $a \geq c > 0$ бол

$$\frac{5}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \frac{2}{c} \geq \frac{27}{2} \cdot \frac{1}{a+b+c}$$

болохыг батал.

VIII-A3 (Д.Нямсүрэн). ABC гурвалжны талууд дээр түүний гадна ABB_1B_2 , BCC_1C_2 , CAA_1A_2 квадратуудыг мөн тэдгээрийн гадна $A_1B_2B_3B_4$, $C_1A_2A_3A_4$, $B_1C_2C_3C_4$ квадратууд байгуулав.

C_3A_4 , A_3B_4 , B_3C_4 хэрчмүүдээр тал хийсэн гурвалжны талбай ABC гурвалжны талбайгаас 16 дахин их болохыг батал.

VIII-B1 (Б.Батбаясгалан). 2000 талбайтай 2000^2 периметртэй гурвалжин дотор 1999 талтай 1999^2 периметртэй гурвалжныг багтааж болох уу?

VIII-B2 (Ө.Баттулга). a, b, c бодит тоонуудын хувьд $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ бол $|a^3 + b^3 + c^3 - abc| \leq 2\sqrt{2}$ гэж батал.

VIII-B3 (М.Итгэл). Хавтгай дээр CD гэсэн ерөнхий хөвч бүхий 2 тойрог өгөв. Энэ хөвчийн M цэгийг дайруулан 1-р тойрогт AB , 2 дахь тойрогт EF гэсэн хөвчүүд тав. Тэгвэл A, E, B, F цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

VIII-A1. Аливаа натурал k тооны хувьд $m^3 + 10 \cdot 3^k$ байх $m \in \mathbb{Z}$ олдоно гэж баталъя. k -аар индукцлэж $a_k^3 + 10 \cdot 3^k$ байх

a_k дарааллыг байгуулья.

$k = 1$ үед $a_1 = 2, a_1^3 + 10:3$

$a_k^3 + 10:3^k$ байх a_k байгуулсан гэж үзээд a_{k+1} -ийг байгуулья.

а) $a_k^3 + 10:3^{k+1}$ байвал $a_{k+1} = a_k$

б) $a_k^3 + 10:3^k$ ба $a_k^3 + 10:3^{k+1}$ гэж үзье.

$$\text{б1) } a_k^3 + 10 = 3^k(3q + 1)$$

б2) $a_k^3 + 10 = 3^k(3q + 2)$ гэсэн 2 хэлбэртэй байна. $a_k:3$ байх илэрхий тул $a_k^2 \equiv 1(3)$ байна.

б1) тохиолдолд $a_{k+1} = a_k + 2 \cdot 3^{k-1}$ гэж авъя. $a_{k+1}^3 + 10 = (a_k + 2 \cdot 3^{k-1})^3 + 10 = a_k^3 + 3a_k^2 \cdot 2 \cdot 3^{k-1} + 3 \cdot a_k(2 \cdot 3^{k-1})^2 + (2 \cdot 3^{k-1})^3 + 10 = 3^k(3q + 1) + 3^k \cdot 2a_k^2 + 3a_k(2 \cdot 3^{k-1})^2 + (3^{k-1} \cdot 2)^3$ болох ба $3a_k(2 \cdot 3^{k-1})^2:3^{k+1}, (3^{k-1} \cdot 2)^3:3^{k+1}, 3^{k+1}a_k:3^{k+1}, 3^k(2a_k^2 + 1):3^{k+1}$ учир $a_{k+1}^3 + 10:3^{k+1}$ боллоо.

б2) тохиолдолд $a_{k+1} = a_k + 3^{k-1}$ гэж сонгож авбал $a_{k+1}^3 + 10:3^{k+1}$ болно гэдгийг б1)-ийн адил баталж болно.

Бид $a_k^3 + 10:3^k$ байх $\{a_k\}$ дарааллыг байгууллаа. Одоо $\forall k \in \mathbb{N}$ хувьд $(a_k + 3^k \cdot n)^3 + 10:3^k$ ($n = 0, 1, \dots$) төгсгөлгүй олон $m \in \mathbb{N}$ тоог байгууллаа. Бодлого бодогдов.

$k \leq n$ хувьд $a_n^3 + 10:3^k$ учир бидний батлах зүйл батлагдлаа.

VIII-A2. $b \geq c$ үед $\frac{1}{c} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$ тул

$$\frac{5}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{2}{c} \geq \frac{6}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{6}{4} \cdot \frac{9}{a+b+c} = \frac{27}{2} \cdot \frac{1}{a+b+c}$$

болно.

$b \leq c$ байг. $\frac{c}{a} = x, \frac{c}{b} = y$ гэе. $\Rightarrow y \geq 1 \geq x$ болно. $\Rightarrow a = \frac{c}{x} \geq \frac{8}{5}b = \frac{8}{5}\frac{c}{y} \Rightarrow y \geq \frac{8}{5}x$ байна. $\Rightarrow$ Батлах тэнцэл биш $\frac{5}{4}(x+y) + 2 \geq \frac{27}{2} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 1)} = \frac{27xy}{2(x+y+xy)}$ хэлбэртэй болно. $\Leftrightarrow 5(x+y)^2 + xy(x+y) + 8(x+y+xy) \geq 5xy \Leftrightarrow 5(x^2 + y^2 + xy(x+y)) + 8(x+y) \geq 36xy \Leftrightarrow S = 5(y-x)^2 + 5x(y-1)^2 + 5y(x-1)^2 + 3(x+y) \geq 6xy. S \geq 5(y-x)(\frac{8}{5}x - x) + 3(x+y) \geq 3xy + 3x - 3x^2 + 3y \geq 6xy$ болж батлагдав. Энд $1 \geq x \Rightarrow x \geq x^2$ ба $3y \geq 3yx$ байна.

VIII-A3. I бодолт (М.Батбилэг). Эхлээд дараах 2 түгээмэл бодлогыг авч үзье.

ABC гурвалжны AB, AC талууд дээр $ABXY, ACPQ$ квадратуудыг байгуулсан ба ABC гурвалжинд AD медиан татъя. Тэгвэл

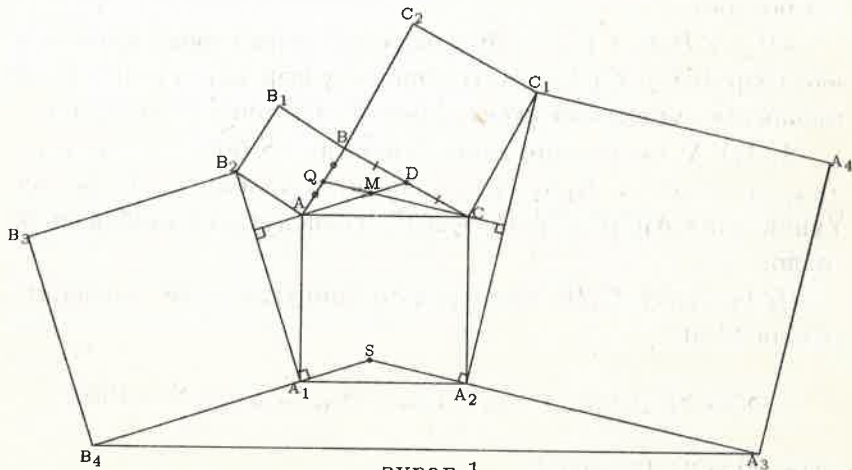
$$2AD = YQ \quad (*)$$

$$AD \perp YQ \quad (**)$$

Уг хоёр бодлогын бодолт хялбар тул уншигчдад үлдээе.

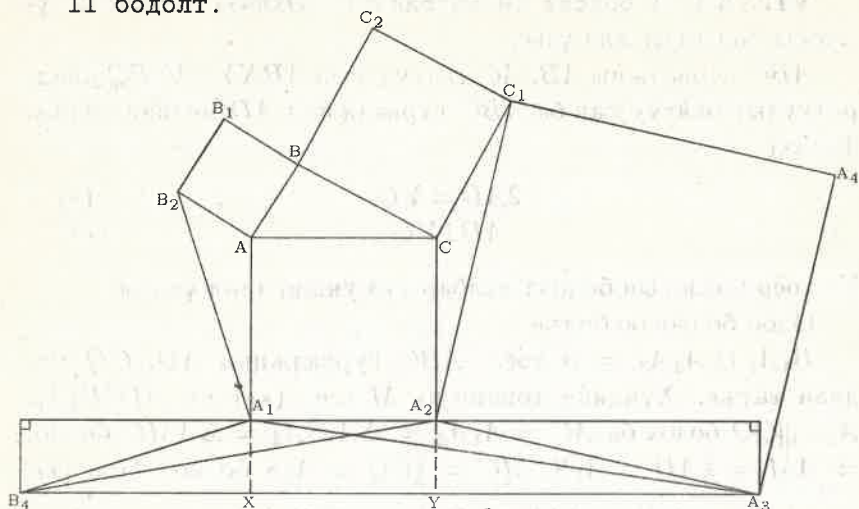
Одоо бодлогоо бодъё.

$B_4A_1 \cap A_2A_3 = S$ гэе. ABC гурвалжинд AD, CQ медиан татъя. Хүндийн төвийг нь M гэе. $(**)$ -оос $AD \parallel B_4A_1, A_2A_3 \parallel CQ$ болох ба $AC = A_1A_2 \Rightarrow \Delta A_1SA_2 = \Delta AMC$ болно. $\Rightarrow AM = \frac{2}{3}AD = A_1S, MC = \frac{2}{3}CQ = A_2S$ болно. Мөн $(*)$ -оос $A_1B_2 = A_1B_4 = 2AD$ ба $C_1A_2 = 2CQ = A_2A_3 \Rightarrow \frac{SA_1}{A_1B_4} = \frac{SA_2}{A_2A_3} = \frac{\frac{2}{3}AD}{2AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ Фалесийн теорем ёсоор $AC \parallel B_4A_3$ болох ба $B_4A_3 = 4AC$ болно. Үүний адил $4AB = B_3C_4$ ба $4BC = C_3A_4 \Rightarrow B_4A_3, B_3C_4, A_4C_3$ хэрчмүүдээр байгуулагдсан гурвалжин нь ABC гурвалжинтай төсөөтэй болох бөгөөд төсөөгийн коэффициент нь 4 болох тул талбайн харьцаа нь 16 болж батлах зүйл батлагдав.



зураг 1.

II бодолт.



зураг 2.

ABC гурвалжны талбайг S гэе. $S_{\triangle AA_1B_2} = S = S_{\triangle C_1CA_2}$ байх нь илэрхий. Мөн $S_{\triangle AA_1B_2} = S_{\triangle B_4A_1A_2}$, $S_{\triangle C_1CA_2} = S_{\triangle A_1A_2A_3}$ байх ба $\Rightarrow S_{\triangle A_1A_2B_4} = S_{\triangle A_1A_2A_3} = S$ болно. A_1A_2 нь $A_1A_2B_4$, $A_1A_2A_3$ гурвалжнуудад ерөнхий тал тул A_3 ба B_4 оройгоос гарсан өндрүүд тэнцүү байна. $\Rightarrow AC \parallel A_1A_2 \parallel B_4A_3$ боллоо. Үүний адил $BC \parallel A_4C_3$, $AB \parallel B_3C_4$ болно. ABC гурвалжин нь B_4A_3 , A_4C_3 , C_4B_3 хэрчмүүдээр байгуулагдсан гурвалжинтай төсөөтэй боллоо.

$AB_2 \rightarrow B_1B$, $CC_1 \rightarrow BC_2$ байх параллель зөөлт хийе. Энэ зөөлтөөр B_1C_2 , C_1A_2 , A_1B_2 хэрчмүүдээр байгуулагдсан $3S$ талбайтай гурвалжин үүснэ. Мөн $X \rightarrow Y$ очих нь илэрхий.

A_1A_2YX тэгш өнцөгтийн талбай нь $2S$ болно. $S_{\triangle B_4A_1X} + S_{\triangle A_2YA_3} = 3S \Rightarrow B_4A_1A_2A_3$ трапецийн талбай нь $5S$ боллоо. Үүний адил $A_4C_1C_2C_3$, $B_1B_2B_3C_4$ трапецуудын талбай нь $5S$ болно.

B_4A_3 , A_4C_3 , C_4B_3 хэрчмүүдээр байгуулагдсан гурвалжны талбай S' нь

$$S' = S_{B_3B_2B_1C_4} + S_{B_4A_1A_2A_3} + S_{A_4C_1C_2C_3} + S = 10S$$

болж бодлого бодогдов.

III бодолт (Д.Нямсүрэн). Эхлээд дараах бодлогыг бодъё.

Бодлого. $KLMN$, $KQPR$ квадратууд бол (зураг 3) KNQ гурвалжны KO медианы

үргэлжлэл KRL гурвалжны RL талд перпендикуляр ба $RL = 2KO$ болохыг батал.

Баталгаа. O цэгийн хувьд төвийн тэгш

хэмтэй хувиргалт зураг 3.

хийвэл $K \rightarrow K_1$, $L \rightarrow L_1$, $M \rightarrow M_1$, $R \rightarrow R_1$, $P \rightarrow P_1$ д тус тус очно. $\Rightarrow QKNK_1$ нь параллелограмм болно. $\Rightarrow \angle KKN_1 = 180^\circ - \angle QKN = \angle BKL$, $KL \perp KN$ ба хоорондоо тэнцүү мөн $BK \perp NK_1$ ба хоорондоо тэнцүү учир $RL \perp KK_1$ ба $\triangle KLR = \triangle NKK_1 \Rightarrow RL = KK_1 = 2KO$ болж батлагдав.

Үндсэн бодлогын бодолтоо хийе. ABC гурвалжны A, C оройнуудаас гарсан медиануудыг харгалзан m_a, m_c гээд тэдгээрийн огтлолцсон цэгийг D гэвэл дээр баталсан ёсоор $A_1B_2 \perp AD \parallel A_1B_4 = 2m_a$, $C_1A_2 \perp CD \parallel A_2A_3 = C_1A_2 = 2m_c$ байна. $(B_4A_1) \cap (A_2A_3) = D_1 \Rightarrow \triangle ADC = \triangle A_1D_1A_2 \Rightarrow AD = A_1D_1 = \frac{2}{3}m_a$, $D_1A_2 = DC = \frac{2}{3}m_c \Rightarrow$

$$\frac{A_1D_1}{B_4A_1} = \frac{D_1A_2}{A_2A_3} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3}m_a}{2m_a} = \frac{\frac{2}{3}m_c}{2m_c} = \frac{1}{3}$$

болох учир Фалесын теорем ёсоор $A_1A_2 \parallel B_4A_3$. Үүний адилаар $C_1C_2 \parallel C_4C_3$, $B_1B_2 \parallel C_4B_3$ гэж гарах ба A_3B_4 , B_3C_4 , C_3A_4 хэрчмүүдээр талаа хийсэн гурвалжин нь ABC гурвалжинтай төсөөтэй, төсөөгийн коэффициент нь

$$\frac{AD}{B_4D_1} = \frac{\frac{2}{3}m_a}{B_4A_1 + A_1D_1} = \frac{\frac{2}{3}m_a}{2m_a + \frac{2}{3}m_a} = \frac{\frac{2}{3}m_a}{\frac{8}{3}m_a} = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

$AD = \frac{1}{4}B_4D_1$ учир үүсэх гурвалжны талбайг S_Δ гэвэл

$$\frac{S_{ABC}}{S_\Delta} = \left(\frac{AD}{B_4D_1}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

болж батлагдав.

VIII-B1.

$$S_1 = 2000 \quad p_1 = 2000^2$$

$$S_2 = 1999 \quad p_2 = 1999^2$$

гэж тус тус тэмдэглээд $r = \frac{2S}{p}$ (S —гурвалжны талбай, p —периметр, r —багтсан тойргийн радиус) томъёог ашиглавал

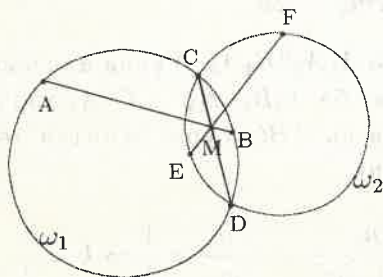
$$r_1 = \frac{2S_1}{p_1} = \frac{2 \cdot 2000}{2000^2} = \frac{2}{2000}$$

$$r_2 = \frac{2S_2}{p_2} = \frac{2 \cdot 1999}{1999^2} = \frac{2}{1999} \Rightarrow r_1 < r_2 \Rightarrow$$

байгуулж болохгүй.

VIII-B2. $|a^3+b^3+c^3-abc| \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |a^3+b^3+c^3-abc|^2 \leq 8 =$
 $(a^2+b^2+c^2)^3 \Leftrightarrow a^6+b^6+c^6+a^2b^2c^2+2a^3b^3+2a^3c^3+2c^3b^3-2a^4bc-$
 $2b^4ac-2c^4ab \leq a^6+b^6+c^6+3a^4b^2+3a^2b^4+3b^4c^2+3c^4b^2+3c^4a^2+$
 $3a^4c^2+6a^2b^2c^2 \Leftrightarrow 5a^2b^2c^2+(a^4b^2-2a^3b^3+b^4a^2)+(a^4c^2-2a^3c^3+$
 $c^4a^2)+(b^4c^2-2b^3c^3+c^4b^2)+(a^4b^2+2a^4bc+a^4c^2)+(b^4a^2+2b^4ac+$
 $b^4c^2)+(c^4a^2+2abc^4+c^4b^2)+(a^4b^2+a^2b^4+c^4a^2+a^4c^2+b^4c^2+c^4b^2)=$
 $5a^2b^2c^2+(a^2b-b^2a)^2+(a^2c-c^2a)^2+(b^2c-c^2b)^2+(b^2a-a^2b)^2+(c^2a-$
 $c^2b)^2+(a^2b-a^2c)^2+(a^4b^2+a^4c^2+c^4a^2+b^4a^2+b^4c^2+c^4b^2) \geq 0,$
 $a = b = 0, c = \pm\sqrt{2}, b = c = 0, a = \pm\sqrt{2}, c = a = 0, b = \pm\sqrt{2}$
 үед тэнцэлдээ хүрнэ гэдэг нь бодолтоос харагдаж байна.

VIII-B3.



ω_1 тойргийн хувьд огтлолцсон хөвчийн теорем ёсоор

$$CM \cdot MO = AM \cdot MB \quad (*)$$

ω_2 тойргийн хувьд огтлолцсон хөвчийн теорем ёсоор

$$CM \cdot MO = EM \cdot MF \quad (**)$$

(*) ба (**) $\Rightarrow AM \cdot MB = EM \cdot MF$ болох ба огтлолцсон хөвчийн теорем ёсоор A, E, B, F цэгүүд нэг тойрог дээр орших нь батлагдав.

ММО-35, IX АНГИЙН III ДАВАА

Ж.Батболд,
Т.Билэгбаатар (КТМС)

IX-A1 (Ж.Батболд). $p > 5$, p анхны тоо, $k \in N$, $p > k^2$ байх $p - 1^2, p - 2^2, \dots, p - k^2$ тоонууд дотор нэг нь нөгөөгөө хуваадаг ялгаатай 2 тоо олдохыг батал.

IX-A2 (В.Адьяасүрэн). R радиустай тойрогт багтсан ABC гурвалжны хүндийн төв M болог. AM, BM, CM шулуунууд багтаасан тойрогтой D, E, F цэгт огтлолцоно.

$$\frac{3}{R} \leq \frac{1}{MD} + \frac{1}{ME} + \frac{1}{MF} \leq \sqrt{3} \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA} \right)$$

байдгийг батал.

IX-A3 (А.Хашбаатар). ABC гурвалжны талууд $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ байжээ. Хэрэв энэ гурвалжны меднануудаар байгуулсан гурвалжин тэгш өнцөгт байсан бол талуудын хамаарлыг ол.

IX-B1 (Ж.Батболд). $f : (1; +\infty) \rightarrow (1; +\infty)$

$$f(x^a y^b) \leq f(x)^{\frac{1}{4a}} \cdot f(y)^{\frac{1}{4b}} \quad \forall x, y > 1, \forall a, b > 0$$

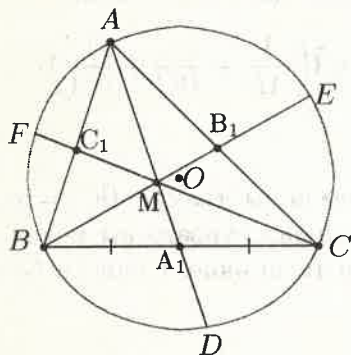
нөхцлийг хангах бүх $f(x)$ функцийг ол.

IX-B2 (Ж.Батболд). n ширхэг хотын аль ч хоёрыг нь авахад аль нэгээс нь гараад нөгөөд нь шууд очих нэг чиглэлт замаар холбогдсон бөгөөд мөн аль ч хотоос нь гараад дурын нөгөө хотод очиж болох чиглэлт зам олддог бол ямар нэг хотоос гараад бүх хотоор нэг нэг удаа дайраад тэр хотдоо буцаж ирж болох чиглэлт зам олдохыг үзүүл.

IX-B3 (А.Хашбаатар). ABC гурвалжинд багтсан тойрог дээр орших P цэгийг дайруулж A, B, C оройн гадаад өнцгийн биссектрис тэй параллель шулуун татахад тойргийг харгалзан A_1, B_1, C_1 цэгт огтолсон бол $A_1B_1C_1$ гурвалжны талбай P цэгийн байрлалаас хамаарахгүйг батал.

IX-A1. $A = \{p - i^2 \mid p > i^2, i \in \mathbb{N}\} = \{p - 1, p - 2^2, \dots, p - k^2\}$ байг. $k^2 < p < (k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1$, p анхны учир $p \neq k^2 + 2k$, $p \neq k^2 + k \Rightarrow k^2 + 1 \leq p < k^2 + 2k$. $a = p - k^2$ гэж тэмдэглэе. $1 \leq |a - k| < n$. Иймд $b = p - (a - k)^2 \in A$ ($a \neq b$) $b = p - (a^2 - 2ak + k^2) = a - a^2 + 2ak = a(1 - a + 2k)$ болно. Гэтэл $a, b \in A$ ба $a|b$ болж батлагдав.

IX-A2.



$$\begin{aligned} AB &= c, & |AA_1| &= m_a, \\ BC &= a, & |BB_1| &= m_b, \\ CA &= b, & |CC_1| &= m_c, \\ A_1 &\equiv BC \cap AD. \end{aligned}$$

Огтлолцсон хөвчийн теоремоор $BA_1 \cdot A_1C = AA_1 \cdot A_1D$, $A_1D = \frac{a^2}{4m_a}$,

$$MD = MA_1 + A_1D = \frac{m_a}{3} + \frac{a^2}{4m_a},$$

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \text{ байна гэвэл}$$

$$\frac{1}{MD} = \frac{6m_a}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$a) \frac{1}{MD} + \frac{1}{ME} + \frac{1}{MF} = \frac{6(m_a + m_b + m_c)}{a^2 + b^2 + c^2} \leq$$

$$\leq \frac{6\sqrt{3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)}}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{9}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \leq \frac{9\sqrt{3}}{a + b + c} \leq$$

$$\leq \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt[3]{abc}} \leq \sqrt{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{BA} + \frac{1}{AC}\right)$$

$$b) 0 \leq (a \cos \alpha - b \cos \beta)^2$$

$$+ \begin{cases} 0 \leq a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta - 2ab \cos \alpha \cos \beta \\ (a \sin \alpha + b \sin \beta)^2 = a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \sin^2 \beta + 2ab \sin \alpha \sin \beta \end{cases}$$

$$(a \sin \alpha + b \sin \beta)^2 \leq a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha + \beta) = \\ = a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma = 2a^2 + 2b^2 - c^2 = 4m_c^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow a \sin \alpha + b \sin \beta \leq 2m_c \Rightarrow a^2 + b^2 \leq 4Rm_c$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \leq 4Rm_c \\ a^2 + c^2 \leq 4Rm_b \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 2R(m_a + m_b + m_c) \\ b^2 + c^2 \leq 4Rm_a \end{cases}$$

$$\frac{3}{R} \leq \frac{6(m_a + m_b + m_c)}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{1}{MD} + \frac{1}{ME} + \frac{1}{MF}.$$

IX-A3. А оройгоос гарсан медианы урт $m_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$ байдаг. $\min(a, b, c) = a$ гэж үзье. Тэгвэл $\max(m_a, m_b, m_c) = m_a$ болно. $\Rightarrow m_a^2 = m_b^2 + m_c^2 \Leftrightarrow 5a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 6a^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Иймд ABC гурвалжны талуудын хамаарал нь

$$6(\min(a, b, c))^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

юм.

IX-B1. Өгсөн нөхцөлд $a = \frac{1}{2}$, $b > 0$ -г авбал $b = \frac{1}{2} \log_y x > 0$ байх $x, y > 1$ олдоно. Түүний хувьд

$$f(x) \leq f(x)^{\frac{1}{2}} \cdot f(y)^{\frac{1}{2 \log_y x}} \Rightarrow f(x) \leq f(y)^{\frac{1}{\log_y x}} \Rightarrow f(x)^{\ln x} \leq f(y)^{\ln y} \quad (1)$$

гэж гарна. Харин дээрх a, b -ийн оронд a, b^{-1} -ийг авбал

$$f(y)^{\ln y} \leq f(x)^{\ln x} \quad (2)$$

гэж гарна. (1) ба (2)-оос $\forall x, y > 1$ хувьд $f(x)^{\ln x} = f(y)^{\ln y} \Rightarrow f(x)^{\ln x} = c > 1$ (c тогтмол тоо) $\Rightarrow f(x) = c^{\frac{1}{\ln x}}$ ($c > 1$).

Өгсөн нөхцлийг уг функц хангахыг харуулъя.

$$f(x^a y^b) = c^{\frac{1}{\ln(x^a y^b)}} = c^{\frac{1}{a \ln x + b \ln y}} \leq c^{\frac{1}{2\sqrt{(a \ln x)(b \ln y)}}} \leq \\ \leq c^{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{a \ln x} + \frac{1}{b \ln y} \right)} = f(x)^{\frac{1}{4a}} \cdot f(y)^{\frac{1}{4b}}$$

IX-B2. Уг n ширхэг хотуудаа $a_1, a_2, \dots, a_n$ гэж тэмдэглэе. Ямар ч хотын хувьд уг хотоос гарсан ба уг хотод ирсэн зам байх ёстой. $(a_i \rightarrow a_j)$ гэсэн тэмдэглэгээг a_i ба a_j хоёрын хоорондох зам нь a_i -ээс a_j рүү чиглэсэн гэж ойлгоё. Мөн

$(a_i \rightarrow A)$ гэсэн тэмдэглэгээг $\forall a_j \in A$ байх a_j -ийн хувьд $a_i \rightarrow a_j$ гэж ойлгоё.

Ямар нэг хотоос гараад яг $(k - 1)$ ширхэг хотыг нэг нэг удаа дайрч уг хотдоо буцаж ирдэг чиглэлт замыг k урттай цикл гэж нэрлэе.

1-р алхам: "уг $n \geq 3$ ширхэг хотод 3 урттай цикл олдоно." гэсэн өгүүлбэрийг баталъя. $M = \{a_i | a_1 \rightarrow a_i\}$, $N = \{a_j | a_j \rightarrow a_1\}$ ($M \neq \emptyset \neq N$) байг. M -ийн ямар нэг a_i хотоос гараад N -ийн ямар нэг a_j хотод ирдэг зам олдоно. Учир нь олдохгүй гэж үзвэл M -ийн аль ч хотоос N -ийн ямар ч хот руу очиж чадахгүйд хүрэх ба энэ нь бодлогын нөхцөлд харшилна. Иймд $a_1 \rightarrow a_i \rightarrow a_j \rightarrow a_1$ нь 3 урттай цикл юм.

2-р алхам: Ямар нэгэн k ($k < n$) урттай $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_k \rightarrow a_1$ гэсэн цикл олддог бол k -аас их урттай цикл олдохыг баталъя. Эсрэгээс нь k -аас их урттай цикл олдохгүй гээ.

$B = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $C = \{a_{k+1}, \dots, a_n\}$ гээ. $\forall a_s \in C$ байг. $B_1 = \{a_i | a_i \in B_1, a_s \leftarrow a_i\}$, $B_2 = \{a_j | a_j \in B, a_s \rightarrow a_j\}$,

$$\begin{cases} B_1 \neq \emptyset \\ B_2 \neq \emptyset \end{cases} \text{ гэж үзвэл: } a_1, a_2, \dots, a_k \text{ цикл учир } a_1 \in B_1 \text{ гэж авч}$$

болно. $t = \min\{i | a_s \rightarrow a_i\}$ гэвэл $a_{t-1} \rightarrow a_s$ ба $a_s \rightarrow a_t$ болох ба эндээс $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_{t-1} \rightarrow a_s \rightarrow a_t \rightarrow \dots \rightarrow a_k \rightarrow a_1$ гэсэн $k+1$ урттай цикл олдоход хүрнэ. Иймд B_1 ба B_2 хоёрын аль нэг нь хоосон олонлог юм. $\Rightarrow \forall a_s \in C$ байх a_s -ийн хувьд $a_s \rightarrow B$ байна эсвэл $a_s \leftarrow B$ байна.

$C_1 = \{a_i | a_i \in C, a_i \leftarrow B\}$, $C_2 = \{a_j | a_j \in C, a_j \rightarrow B\}$ гээ. Хэрэв $C_1 = \emptyset$ гэж үзвэл B -ийн аль ч хотоос C -ийн ямар ч хот руу очих зам олдохгүй бол зөрчинө.

Харин $C_2 = \emptyset$ гэж үзвэл C -ийн аль ч хотоос B -ийн аль ч хот руу очих зам олдохгүй болж бодлогын нөхцөлд зөрчилдөнө. Иймд C_1 ба C_2 нь хоосон биш олонлогууд болно.

Ямар нэг $a_i \in C_1$ ба $a_j \in C_2$ хотуудын хувьд $a_i \rightarrow a_j$ байх ёстой. Учир нь эсрэг тохиолдолд C_1 -ийн аль ч хотоос C_2 -ийн ямар нэг хот руу очих зам олдохгүй болж мөн бодлогын нөхцөлд харшилна. Эндээс $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_k \rightarrow a_i \rightarrow a_j \rightarrow a_1$

гэсэн $(k+1)$ урттай цикл олдох болно (Энэ нь k -аас их урттай цикл олдохгүй гэсэнд зөрчив). Иймд 2-р алхам батлагдав.

3-р алхам: Төгсгөлөг индукцийн зарчим ёсоор 2-р алхам $k = n$ болох тохиолдолд дуусах болж n урттай цикл олдох нь батлагдав.

IX-B3.

ABC гурвалжны гадаад өнцгийн биссектрисүүдээр үүсэх гурвалжинг $A_0B_0C_0$ гэе. $\forall P \in \gamma$ байг.

$$\begin{aligned} PC_1 &\parallel A_0B_0 \\ PA_1 &\parallel B_0C_0 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \angle A_0B_0C_0 &= \angle A_1PC_1 \\ \angle A_0B_0C_0 &= \angle A_1B_1C_1 \end{aligned}$$

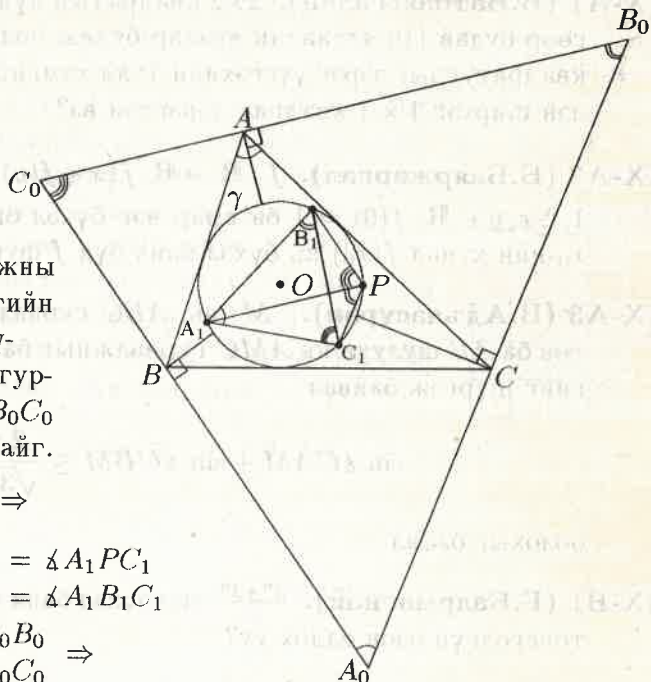
$$\begin{aligned} \text{Мөн } PA_1 &\parallel C_0B_0 \\ PB_1 &\parallel A_0C_0 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \angle A_0C_0B_0 &= \angle A_1PB_1 & \angle A_0B_0C_0 &= \angle A_1B_1C_1 \\ \angle A_0C_0B_0 &= \angle A_1C_1B_1 & \angle A_0C_0B_0 &= \angle A_1C_1B_1 \\ \Rightarrow \angle B_0A_0C_0 &= \angle B_1A_1C_1 \Rightarrow \Delta A_0B_0C_0 \sim \Delta A_1B_1C_1. \end{aligned}$$

ABC гурвалжны багтсан ба багтаасан тойргийн радиусууд r ба R байг. $A_0B_0C_0$ гурвалжны багтаасан тойргийн радиус $2R$ байна (есөн цэгийн тойрог). $A_1B_1C_1$ гурвалжны багтаасан тойрог нь γ юм.

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta A_0B_0C_0}} = \left(\frac{r}{2R}\right)^2 \Rightarrow S_{\Delta A_1B_1C_1} = \left(\frac{r}{2R}\right)^2 S_{\Delta A_0B_0C_0}$$

$r, R, \Delta A_0B_0C_0$ -ууд нь P цэгийн байрлалаас хамаарахгүй учир $S_{\Delta A_1B_1C_1}$ нь P цэгийн байрлалаас хамаарахгүй нь батлагдав.



ММО-35, IX АНГИЙН IV ДАВАА

Б.Баяржаргал

IX-A1 (Б.Батбаясгалан). 2×2 квадратын нүднүүдийг 2 өнгөөр будав (16 ялгаатай янзаар будаж болно). Ийм бүх квадратуудыг зэрэг үүсгэхийн тулд хамгийн цөөндөө хэдэн ширхэг 1×1 квадрат хэрэгтэй вэ?

IX-A2 (Б.Баяржаргал). $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x + f(y)) = f(x + y) + 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ ба ямар нэг бүхэл биш рациональ x_0 -ийн хувьд $f(x_0)$ нь бүхэл байх бүх f функцийг ол.

IX-A3 (В.Адъяасүрэн). M нь ABC гурвалжны хүндийн төв ба AB шулуун нь AMC гурвалжныг багтаасан тойргийг шүргэж байвал

$$\sin \angle CAM + \sin \angle CBM \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

болохыг батал.

IX-B1 (Г.Баярмагнай). $\frac{3^n + 2^n}{n}$ тоо бүхэл байх n натурал тоо төгсгөлгүй олон олдох уу?

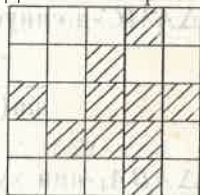
IX-B2 (Б.Баяржаргал). ABC өнцөг дотор D цэг өгөгдөв. B, D -г дайрсан тойрог AB, BC шулууныг харгалзан M, N цэгүүдээр огтолдог бол MN -ийн дундаж цэгийн геометр байрыг ол (D цэг, B цэгийг дайрсан тойрог хувирч байхад).

IX-B3 (Б.Баяржаргал). $7^n, 3^n$ тоонууд зэрэг 10 ... эхэлдэг байхаар n тоо олдохыг батал.

IX-A1. Бодлогын нөхцөл хангах 1×1 квадратуудаас үүсэх дүрсийн хувьд нэгж квадрат бүр нь баруун эсвэл зүүн нэг нүд, мөн доод эсвэл дээд талын нэг шүд уг дүрсэд орсон байх ёстой. Мөн уг дүрс маань холбоост гэж үзэж болно. 25 нэгж

квадратаас тогтох хамгийн олон 2×2 квадрат агуулсан дээрх шаардлагыг хангах дүрс нь 5×5 квадрат гэж баталъя. Уг дүрсийг багтаасан тэгш өнцөгт авч үзье. Талууд нь a, b гэвэл тэгш өнцөгтийн талбай $ab \geq 25$ тул $a + b \geq 10$ болно (*). Иймд 16 ширхэг нэгж квадрат уг дүрсийн ирмэг дээр байх ба үүний ядаж 4 нь оройн квадрат байна. Оройн нэгж квадрат бүр хамгийн ихдээ 1 ширхэг 2×2 квадратад, ирмэгийн квадрат бүр хамгийн ихдээ 2 ширхэг 2×2 квадрат бусад нь 4-өөс ихгүй 2×2 квадратад багтах тул хамгийн ихдээ $\frac{4 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 9 \cdot 4}{4} = 16$ ширхэг 2×2 квадрат агуулна. (*) зөвхөн $a = b = 5$ үед л тэнцэлдээ хүрэх тул батлах зүйл батлагдлаа. Эндээс 24 ширхэг нэгж квадратаас тогтох дүрс ч 16-аас багагүй 2×2 квадрат агуулахгүй нь гарна.

Одоо бодлогын нөхцөл хангах хамгийн багтао нь 25 гэж батлахад жишээ үзүүлэх үзүүлэх л үлдлээ. Жишээг зурагт үзүүлэв.



IX-A2. $f(x + f(y)) = f(x + y) + 1$ -д $y = 0$ гэвэл

$$f(x + f(0)) = f(x) + 1 = f(x + 1).$$

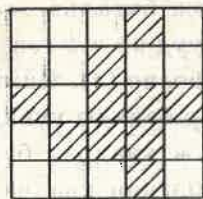
$$f(x + n) = f(x + n - 1) + 1 = f(x + n - 2) + 2 = \dots = f(x) + n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

$$f(x + y) + 1 = f(x + y + 1) = f(x + f(y)) \Rightarrow$$

$$f(x) = f(x + f(y) - y - 1) \quad (2)$$

буюу $\forall y \in \mathbb{R}$ хувьд $f(y) - y - 1$ гэсэн үетэй функц. Бодлогын нөхцөлд өгсөн x_0 -ийн хувьд $f(x_0) - x_0 - 1 = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ (2) ёсоор $f(x) = f(x + f(x_0) - x_0 - 1) = f(x + \frac{p}{q}) = f(x + \frac{2p}{q}) = \dots = f(x + q \cdot \frac{p}{q}) = f(x + p)$ (1) ёсоор $f(x) = f(x + p) = f(x) + p \Rightarrow p = 0$ буюу $f(x_0) - x_0 - 1 = 0$ $f(x_0) - 1 = x_0$, $f(x_0) - 1 \in \mathbb{Z}$ ба $x_0 \notin \mathbb{Z}$ учир зөрчилд хүрч ийм функц оршин байхгүй.

IX-A3.



$\triangle AMC$ -г багтаасан тойрог AB -г A цэгт шүргэнэ. $\angle CAM = \varphi$, $\angle MBC = \theta$, $\triangle AMC$ -г багтаасан тойргийн төв O , A_1 , B_1 , C_1 нь дундаж цэгүүд байг. $\angle AOC = 2\alpha$, $\angle AMC = 180^\circ - \alpha$ (AB нь тойрог шүргэнэ гэдгээс гарна).

Эндээс $\angle ACM = \alpha - \varphi = \angle BAM$,

$$\sin \varphi = \frac{S}{b \cdot m_a} \quad \sin \theta = \frac{S}{a \cdot m_b} \quad (1)$$

$\triangle AMC$ -д синусын теорем бичвэл

$$\frac{b}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{MC}{\sin \varphi} \quad \sin \varphi = \frac{2}{3} m_c \frac{\sin \alpha}{b} \quad (2)$$

$\triangle ABA_1$ -ийн хувьд синусын теорем бичвэл $\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\frac{a}{2}} = \frac{\sin \beta}{m_a}$

ба $\frac{\sin \varphi}{\frac{2}{3} m_c} = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\frac{2}{3} m_a}$ гэдгээс

$$\sin \varphi = \frac{m_c \frac{a}{2} \overline{\sin \beta}}{m_a} m_a = \frac{am_c \sin \beta}{2m_a^2} \quad (2) \quad \frac{2m_c \sin \alpha}{3b}$$

Эндээс $m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} b$ гэж гарна. $4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2 = 3b^2 \Rightarrow$

$$a^2 + b^2 = 2c^2 \quad (3)$$

$m_c = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ болно. (1)-ээс

$$\sin \varphi + \sin \theta = S \left(\frac{1}{bm_a} + \frac{1}{am_b} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} S \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \quad (*)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \Rightarrow 2ab \cos \gamma = c^2 \quad (4)$$

$\sin 2\gamma \leq 1 \Rightarrow 2c^2 \leq \frac{c^2}{\cos \gamma \sin \gamma}$. Энд (4), (3)-ыг орлуулбал $a^2 + b^2 \leq \frac{2ab}{\sin \gamma} \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \leq \frac{2}{ab \sin \gamma} = \frac{1}{S}$. (*) ёсоор

$$\sin \varphi + \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{3}} S \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \leq \frac{2}{\sqrt{3}} S \cdot \frac{1}{S} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

оршин байна.

Одоо бодлогоо бодъё. $10^k < 3^n < 10^k + 10^{k-2}$, $10^s < 7^n < 10^s + 10^{s-2}$ байх $n \in \mathbb{N}$ тоо олдвол бодлого бодогдоно. Энэ нь $k < n \lg 3 < k + \lg 1.01$, $s < n \lg 7 < s + \lg 1.01$ болно. Кроеке-рийн теоремд $\alpha_1 = \lg 3$, $\alpha_2 = \lg 7$, $\varepsilon = \frac{1}{2} \lg 1.01$ гэвэл $\{n_1, \alpha_1\}$, $\{n_1, \alpha_2\} \in [0, \varepsilon[\cup]1 - \varepsilon, 1[$ байх $\exists n_1 \in \mathbb{N}$. Энд n_1 -ийг хамгийн бага нь гэж үзэж болно. $\{n_1 \alpha_1\} = \varepsilon'_1$ эсвэл $\{n_1 \alpha_2\} = 1 - \varepsilon'_1$ ($\varepsilon'_1 < \varepsilon$) байна. $\{n_1 \alpha_1\}$ ба $\{n_1 \alpha_2\}$ -д харгалзах ε -уудын багыг нь ε_1 гэе. Кроекекийн теоремд $\alpha_1 = \lg 3$, $\alpha_2 = \lg 7$, $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2}$ гэвэл $\{n_2 \alpha_1\}$, $\{n_2 \alpha_2\} \in [0, \frac{\varepsilon_1}{2}[\cup]1 - \frac{\varepsilon_1}{2}, 1[$, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ (n_2 -ийг мөн min гэж үзэж болно). $n_1 < n_2$ болно. $\{n_2 \alpha_1\}$, $\{n_2 \alpha_2\}$ -д харгалзах ε -уудын багыг нь ε_2 гэе. Тэгвэл дээрх үйлдлээ хийсээр $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ дараалал олж болно. Энд $\varepsilon_1 > 2\varepsilon_2 > 4\varepsilon_3 > \dots$ байна. $\{n_i \alpha_1\}$, $\{n_i \alpha_2\} \in [0, \frac{\varepsilon_{i-1}}{2}[$ байх $\exists i$ бол мөн $\{n_i \alpha_1\}$, $\{n_i \alpha_2\}$, $\{n_j \alpha_1\}$, $\{n_j \alpha_2\} \in]1 - \frac{\varepsilon_{i-1}}{2}, 1[$ байх $\exists i < j$ бол $\{(n_j - n_i) \alpha_1\}$, $\{(n_j - n_i) \alpha_2\} \in [0, \varepsilon[$ болж бодогдоно.

$\{n_i \alpha_1\} = \varepsilon_1$, $\{n_i \alpha_2\} = 1 - \varepsilon'_1$, $\{n_j \alpha_1\} = 1 - \varepsilon_2$, $\{n_j \alpha_2\} = \varepsilon'_2$, $\{n_k \alpha_1\} = \varepsilon_3$, $\{n_k \alpha_2\} = 1 - \varepsilon'_4$, $\{n_\ell \alpha_1\} = 1 - \varepsilon_4$, $\{n_\ell \alpha_2\} = \varepsilon'_4$, $\varepsilon_i, \varepsilon'_i < \frac{\varepsilon}{2}$ байх n_i, n_j, n_k, n_ℓ -үүд олдоно. $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \cdot \frac{\varepsilon'_1}{\varepsilon'_2} > 0$ бол $\{(n_j p - n_i q) \alpha_1\} < \varepsilon$, $\{(n_j p - n_i q) \alpha_2\} < \varepsilon$ байх $p, q \in \mathbb{N}$ олж болно. $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \cdot \frac{\varepsilon'_1}{\varepsilon'_2} < 0$. Эндээс $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon'_1} < \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon'_2}$. Мөн адил аргаар $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon'_1} > \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon'_3} < \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon'_2} < \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon'_4}$ гэж гаргаж болно. Ө.х. $\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon'_4} > \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon'_2} > \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon'_1} > \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon'_3}$, $0 < \varepsilon_2 - \varepsilon_4 < \varepsilon_1$ ба $0 < \varepsilon_2 + \varepsilon_4 < \varepsilon_1$ учир $\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_4}{\varepsilon'_2 - \varepsilon'_4} < \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon'_1}$, $\frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_4}{\varepsilon'_2 + \varepsilon'_4} < \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon'_1}$ болно.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_2 \varepsilon'_1 - \varepsilon_4 \varepsilon'_1 &< \varepsilon'_2 \varepsilon_1 - \varepsilon'_4 \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \varepsilon'_1 + \varepsilon_4 \varepsilon'_1 &< \varepsilon'_2 \varepsilon_1 + \varepsilon'_4 \varepsilon_1 \end{aligned} \right\} + 2\varepsilon_2 \varepsilon'_1 < 2\varepsilon'_2 \varepsilon_1$$

$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon'_2} < \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon'_1}$ болж зөрчилд хүрэв. Иймд дээрх тэнцэл бишүүдийн нэг нь худлаа буюу манай бодлого бодогдов.

ММО-35, Х АНГИЙН III ДАВАА

Л.Хадхүү

О.Чулуунбаатар

X-A1. $x^4 - y^4 = z^2$ тэгшитгэлийн натурал тоон шийдийг ол.

X-A2. Бүхэл коэффициенттэй олон гишүүнт $x = 1$, $x = 2$ гэсэн 2 язгууртай бол аль нэг коэффициент нь -1 -ээс бага болохыг батал.

X-A3. а) Талууд нь 120° -аар харагдах цэгээс оройнууд хүртэлх зайнууд нь бүхэл байх бүхэл тоон талтай тэгш өнцөгт гурвалжин олдох уу?

б) Дээрх нөхцөл биелэх тэгш өнцөгт гурвалжин олдох уу?

X-B1. $f(x)$ функц $\begin{cases} f(x+1) = xf(x) \\ f(1) = 1 \end{cases}$ нөхцлийг хангадаг ба

$\varphi(x) = \ln f(x)$ функц нь хотгор функц бол $0 < x \leq 1$ мужид

$$\ln n < \frac{\varphi(n+1+x) - \varphi(n+1)}{x} \leq \ln(n+1)$$

тэнцэл биелэхийг батал.

X-B2. Квадратыг 25 тэнцүү квадратад хуваав. Хамгийн олондоо хэдэн жижиг квадратад ерөнхий цэггүй диагональ татаж болох вэ?

X-B3. $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн AB, CD талын үргэлжлэл O цэгт огтлолцдог байг. Тэгвэл $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн диагоналиудын дундаж E, F ба O цэгээр байгуулагдах EFO гурвалжны талбайг $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн талбайтай жиш $\left(\frac{S_{EFO}}{S_{ABCD}} = ?\right)$.

X-A1. Тэгшитгэл натурал тоон олонлогт шийдгүй гэдгийг эсрэгээс нь баталъя. $(x, y, z) = 1$ гэж үзэж болно. Хамгийн бага x -тэй шийд нь x, y, z болог. y, z -ийн аль нэг нь сондгой байх нь илт.

1) y тэгш болог. Тэгвэл x, z сондгой ба $y^2 = 2uv, z = u^2 - v^2, x^2 = u^2 + v^2, (u, v) = 1, u, v$ -ийн нэг нь тэгш, нөгөө нь сондгой байх юм. Иймд u тэгш, v сондгой гэж үзэж болно. Тэгвэл

$$\left. \begin{aligned} y^2 = 2uv &\Rightarrow u = 2a^2, & v = b^2 \\ x^2 = u^2 + v^2 &\Rightarrow u = 2u_1v_1, & v = u_1^2 - v_1^2, & x = u_1^2 + v_1^2 \end{aligned} \right\}$$

$\Rightarrow u_1 \cdot v_1 = a^2, (u_1, v_1) = 1 \Rightarrow u_1 = a_1^2, v_1 = a_2^2, b^2 = a_1^4 - a_2^4$ энд $a_1^4 = u_1^2 < u_1^2 + v_1^2 = x \leq x^4 \Rightarrow a_1 \leq x$ гэж харшлал гарна.

2) z тэгш байг. Тэгвэл x, y сондгой байна. Иймд $z = 2uv, y^2 = u^2 - v^2, x^2 = u^2 + v^2, (u, v) = 1, u$ -сондгой, v тэгш

$$\left. \begin{aligned} y^2 + v^2 = u^2 &\Rightarrow v = 2ab, & y = a^2 - b^2, & u = a^2 + b^2, & (a, b) = 1 \\ u^2 + v^2 = x^2 &\Rightarrow v = 2a_1b_1, & u = a_1^2 - b_1^2, & x = a_1^2 + b_1^2, & (a_1, b_1) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$a = c_1c_2, b = c_3c_4, a_1 = c_1c_3, b_1 = c_2c_4, (c_i, c_j) = 1 (i \neq j)$ байх c_1, c_2, c_3, c_4 олдоно. a_1 сондгой, b_1 тэгш гэж үзэж болох учир c_4 тэгш, c_1, c_2, c_3 сондгой гэж болно.

$$c_1^2c_3^2 = c_2^2c_4^2 + c_1^2c_2^2 + c_3^2c_4^2 \Rightarrow 2c_1^2c_3^2 = \underbrace{(c_2^2 + c_3^2)}_{\text{тэгш}} \underbrace{(c_1^2 + c_4^2)}_{\text{сондгой}}.$$

$$(c_1^2, c_1^2 + c_4^2) = 1, (c_3^2, c_2^2 + c_3^2) = 1 \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} 2c_1^2 &= c_2^2 + c_3^2 \\ 2c_3^2 &= c_1^2 + c_4^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} c_1^2 &= c_2^2 + c_4^2 \\ c_3^2 &= c_1^2 + c_4^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} c_4 &= 2ef, & c_2 &= e^2 - f^2, & c_1 &= e^2 + f^2 \\ c_4 &= 2e_1f_1, & c_1 &= e_1^2 - f_1^2, & c_3 &= e_1^2 + f_1^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} e_1^2 &= e^2 + f^2 + f_1^2, \\ ef &= e_1f_1 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Ийнхүү бид } \left. \begin{aligned} a_1^2 &= b_1^2 + a^2 + b_1^2 \\ ab &= a_1b_1 \end{aligned} \right\} \text{ системээс } \left. \begin{aligned} e_1^2 &= f_1^2 + e^2 + f^2 \\ ef &= e_1f_1 \end{aligned} \right\}$$

систем гаргаж авсан ба энд $a_1 = c_1c_3 \geq c_3 = e_1^2 + f - 1^2 > e_1^2 > e_1$ учир уг систем натурал тоон олонлогт шийдгүй юм. Ийнхүү бид ахин зөрчилд хүрлээ.

X-A2. $P(x) = a_0x^n + \dots + a_n$ нь өгөгдсөн олон гишүүнт болог. Эсрэгээс нь $a_i \geq -1 (i = \overline{1, n})$ гэж үзье. Тэгвэл $0 \leq m \leq n$

X-B1.

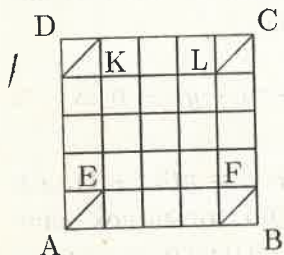
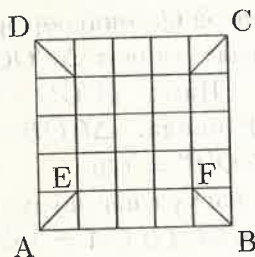
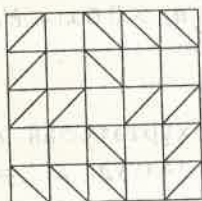
$$\alpha\varphi(t) + (1 - \alpha)\varphi(y) > \varphi(\alpha t + (1 - \alpha)y) \quad (\alpha \in]0, 1[) \quad (1)$$

тэнцэтгэл бишид $\alpha t + (1 - \alpha)y = z \in]t, y[$ гэж авбал $\alpha = \frac{y-z}{y-t}$ болох учир (1)-ээс $\frac{y-z}{y-t}\varphi(t) + \frac{z-t}{y-t}\varphi(y) > \varphi(z) = \frac{y-z}{y-t}\varphi(z) + \frac{z-t}{y-t}\varphi(z)$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(y) - \varphi(z)}{y - z} > \frac{\varphi(z) - \varphi(t)}{z - t} \quad (\forall t, y, z, t < z < y) \quad (2)$$

болно. Энд эхлээд $y = n + 1 + x$, $z = n + 1$, $t = n$ гэж авбал $\frac{\varphi(n+1+x) - \varphi(n+1)}{x} > \frac{\varphi(n+1) - \varphi(n)}{1} = \ln \frac{f(n+1)}{f(n)} = \ln \frac{n f(n)}{f(n)} = \ln n$ болно. Ижил аргаар нөгөө талын тэнцэтгэл биш батлагдах юм.

X-B2.



16 диагональ татаж болохыг зурагт үзүүлэв. Одоо 16-аас илүү диагональ татаж болохгүй гэдгийг үзүүлье. Эсрэгээс нь 17 диагональ татаж болно гэе. Энэ үед 2 орой сул үлдэх ёстой.

а) Энэ 2 орой A, B, C, D оройны аль нь ч биш байг.

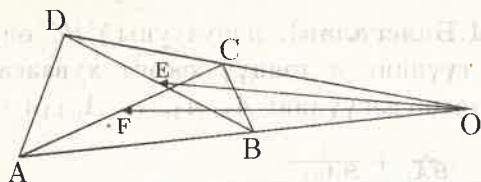
Энэ үед AB тал дээр 4 орой, EF талд 2 орой сул учир AB талд ядаж 2 орой ашиглагдахгүй. Мөн шалтгаанаар AD, DC, BC талд ядаж 2 орой үлдэнэ. Энэ нь боломжгүй.

б) Сул үлдэх оройнууд нь D, C бол AB талд ядаж 2 орой үлдэх ба энэ нь боломжгүй.

в) B, D орой сул үлдсэн байг. $KLFE$ -д ашиглагдаагүй 10 орой, $ABCD$ -д 12 орой байна. Иймд $ABCD$ -д ядаж 2 орой сул үлдэх болно.

Үүгээр боломжит бүх тохиолдол шавхагдаж $ABCD$ хүрэн дээр ядаж 4 орой сул үлдэх боллоо. Үүгээр бодлого бүрэн бодогдов.

X-B3.



$$\begin{aligned}\overline{OF} &= \bar{q}, \overline{OE} = \bar{k}, \\ \overline{OA} &= \bar{c}, \overline{OB} = \bar{b}, \\ \overline{OC} &= \bar{a}, \overline{OD} = \bar{d}, \\ \overline{CA} &= 2\bar{e}, \overline{BD} = 2\bar{f}, \\ \angle DOA &= \alpha \\ \text{гэж тэмдэглэе.}\end{aligned}$$

$$S_{ABCD} = 2\sqrt{e^2 f^2 - (\bar{e}, \bar{f})^2}, \quad S_{DFE} = \frac{\sqrt{k^2 q^2 - (\bar{k}, \bar{q})^2}}{2}$$

$$\bar{q} = \frac{\bar{a} + \bar{c}}{2}, \quad \bar{k} = \frac{\bar{d} + \bar{b}}{2}$$

байна. Эндээс

$$\begin{aligned}q^2 k^2 - (\bar{q}, \bar{k})^2 &= \frac{1}{16} (d^2 a^2 + b^2 c^2 + c^2 d^2 + 2acd^2 \cos \alpha + a^2 b^2 + 2b^2 ac \cos \alpha + \\ &+ 2a^2 db \cos \alpha + 2c^2 db \cos \alpha + 4acbd \cos^2 \alpha - a^2 b^2 \cos^2 \alpha - c^2 d^2 \cos^2 \alpha - \\ &- a^2 d^2 - b^2 c^2 - 2a^2 bd \cos \alpha - 2abcd \cos^2 \alpha - 2ab^2 c \cos \alpha - 2acd^2 \cos \alpha - \\ &- 2c^2 db \cos \alpha - 2abcd) = \frac{1}{16} (c^2 d^2 + a^2 b^2 + 2abcd \cos \alpha - a^2 b^2 \cos^2 \alpha - \\ &- c^2 d^2 \cos^2 \alpha - 2abcd) \text{ Нөгөө талаас}\end{aligned}$$

$$\Delta ACO : e^2 = \frac{c^2 + a^2 - 2ac \cos \alpha}{2}, \quad \bar{e} = \frac{\bar{c} - \bar{a}}{2}$$

$$\Delta DBO : f^2 = \frac{b^2 + d^2 - 2bd \cos \alpha}{2}, \quad \bar{f} = \frac{\bar{d} - \bar{b}}{2}$$

болох ба

$$\begin{aligned}e^2 f^2 - (\bar{e}, \bar{f})^2 &= \\ &= \frac{1}{16} (c^2 d^2 + a^2 b^2 + 2abcd \cos \alpha - a^2 b^2 \cos^2 \alpha - d^2 c^2 \cos^2 \alpha - 2abcd)\end{aligned}$$

болно. Иймээс $e^2 f^2 - (\bar{e}, \bar{f})^2 = k^2 q^2 - (\bar{k}, \bar{q})^2$ болж байна. Иймээс

$$\frac{S_{DFE}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4}.$$

ММО-35, Х АНГИЙН IV ДАВАА

Г.Баярмагнай

Х-А1 (Ц.Дашдорж). $n \in \mathbb{N}$ бүрийн хувьд $k \cdot 2^s + 1$, $s = \overline{1, n}$ тоонууд бүгд зохиомол тоо байхаар k тоо олдохыг батал.

Х-А2 (А.Хашбаатар, Ц.Баясгалан). a шулууны YBC өнцгийн талууд болон түүнийг n тэнцүү хэсэгт хуваасан цацрагуудтай огтлолцсон цэгүүдийг $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ гэвэл

$$\frac{\frac{1}{BA_1} + \frac{1}{BA_{n+1}}}{\frac{1}{BA_1} + \frac{1}{BA_2} + \dots + \frac{1}{BA_{n+1}}}$$

харьцаа a шулуунаас хамаарахгүй тогтмол байдгийг баталж, тогтмол утгыг $\angle YBC = \varphi$ өнцөг болон n -ээр илэрхийл.

Х-А3 (Б.Баясгалан). Хоёр хүн дараах байдлаар тогложээ. Эхний хүн a_1 натурал тоо бичнэ. Дараагийн хүн a_2 тоог өмнө бичсэн тооноос ялгаатайгаар сонгоно. Гэх мэтчилэн тоон дараалал үүсгэн бичихдээ $a_n < 1999n$ хуулийг сахина. Хэрэв өөртөө агуулсан тоог бичсэн тоглогч хожигдох бол энэ тоглоом төгсгөлгүй үргэлжлэх боломжтой юу?

Х-В1 (Г.Баярмагнай). p нь анхны тоо бол дурын натурал тоо n -ийн хувьд $n \mid \varphi(p^n - 1)$ гэж батал (Энд φ нь Эйлерийн функц).

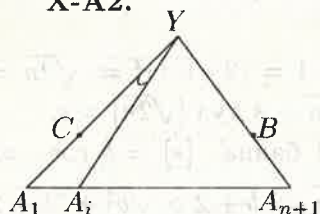
Х-В2 (Г.Баярмагнай). $|X| = n$, $X \supseteq A_i$, $|A_i| = 3$ ($i = \overline{1, m}$), $|A_i \cap A_j| \leq 1$ ($i \neq j$) бол аль ч A_i дэд олонлогийг агуулахгүй бөгөөд $|A| \geq \lceil \sqrt{2n} \rceil$ байх $A \subseteq X$ дэд олонлог олдоно гэж батал.

Х-В3 (Б.Баяржаргал). $\triangle ABC$ -ийн AC тал дээр M цэг авъя. BM -ээр диаметр хийсэн тойрог AB , BC шулууныг P , Q цэгт огтолдог. P , Q цэг дээр татсан шүргэгчүүдийн огтлолцлын цэгийн геометр байрыг ол.

X-A1. I Бодолт. $k = (2+1)(2^2+1)\dots(2^n+1)+1$ байхаар авъя. $\Rightarrow k \cdot 2^s + 1 = \prod_{i=1}^n (2^i+1) \cdot 2^s + 1 = (2^s+1) \left(\prod_{i=1}^n (2^i+1) + 1 \right)$ тул бодлого бодогдов.

II Бодолт. p_i i -р анхны тоо $\Rightarrow i > 2$ үед $(p_i, 2) = 1 \Rightarrow$ Хятадын теоремоор $\begin{cases} 2^s \cdot k + 1 \equiv -1 \pmod{p_s^2} \\ s \equiv 1, n \end{cases}$ систем шийдтэй тул $\exists k$.

X-A2.



$$\begin{aligned} \angle CYA_i &= \varphi \cdot \frac{i-1}{n}, \quad i = \overline{2, n}. \\ YA_1 &= a, \quad YA_{n+1} = b \text{ гэе.} \\ 2 \cdot S_{A_1YA_{n+1}} &= \left(a \sin \frac{i-1}{n} \varphi + b \sin \frac{n+1-i}{n} \varphi \right) YA_i = ab \sin \varphi \Rightarrow \\ YA_i &= \frac{ab \sin \varphi}{a \sin \frac{i-1}{n} \varphi + b \sin \frac{n+1-i}{n} \varphi} \Rightarrow \\ \frac{\frac{1}{BA_1} + \frac{1}{BA_{n+1}}}{\frac{1}{BA_1} + \dots + \frac{1}{BA_{n+1}}} &= \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{a \sin \frac{i-1}{n} \varphi + b \sin \frac{n+1-i}{n} \varphi}{ab \sin \varphi} + \dots + \frac{1}{b}} = \\ &= \frac{\frac{1}{a} \left(1 + \frac{\sin \frac{\varphi}{n}}{\sin \varphi} + \dots + \frac{\sin \frac{n-1}{n} \varphi}{\sin \varphi} \right) + \frac{1}{b} \left(1 + \frac{\sin \frac{\varphi}{n}}{\sin \varphi} + \dots + \frac{\sin \frac{n-1}{n} \varphi}{\sin \varphi} \right)}{1} = \\ &= \frac{\sin \varphi}{\left(\frac{\sin \frac{\varphi}{n}}{\sin \varphi} + \dots + \frac{\sin \frac{n-1}{n} \varphi}{\sin \varphi} \right) + 1} = \frac{\sin \varphi}{\sin \frac{\varphi}{n} + \dots + \sin \frac{n-1}{n} \varphi + \sin \varphi} \end{aligned}$$

X-A3. 10^3 -ын тооллын систем авъя (Энэ системд 111 нь 1 цифр байна). Тоглоом төгсгөлгүй үргэлжилнэ гэе. Тэгвэл 2 хүний тавьсан тоонууд $a_1, \dots, a_n, \dots$ төгсгөлгүй дараалал үүсгэнэ.

$n = 999^s$ гэсэн дугаар авъя. $1 \rightarrow 10^{3s}$ хүртэлх тоон дотор 111-ийг агуулаагүй тоонуудын тоо 999^s ширхэг байна. Иймээс $\exists k, a_k \geq 10^s, \frac{a_k}{k} \geq \frac{a_k}{n} \geq \frac{10^{3s}}{999^s} = \left(\frac{1000}{999} \right)^s, \left(\frac{1000}{999} \right)^s \geq 1999$ байх $\exists s \Rightarrow a_n \geq 1999 \cdot n$ байх n олдоно. $\Rightarrow$ Зөрчил үүсч төгсгөлгүй үргэлжлэх боломжгүй.

X-B1. $\varphi(p^n - 1) = n \cdot q + r$ гэе. $(0 \leq r < n), (p, p^n - 1) = 1$

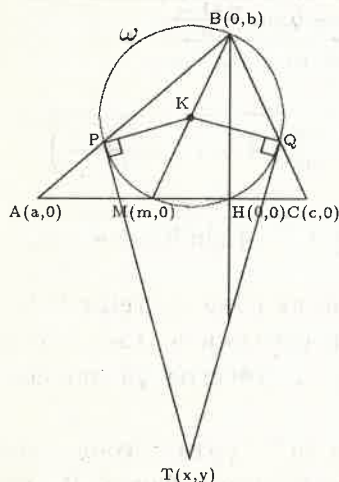
тул Эйлерийн теоремоор $p^{\varphi(p^n-1)} \equiv 1(p^n-1)$ байна. $p^{nq+r}-1 = p^{nq+r}-p^r+p^r-1 = p^r(p^{nq}-1)+p^r-1$ байх ба $p^{nq+r}-1:(p^n-1)$, $p^{nq}-1:(p^n-1)$ тул $p^r-1:p^n-1$ тул $r=0$ болох буюу $n|\varphi(p^n-1)$.

Х-В2. A бодлогын нөхцлийг хангах хамгийн их элементтэй олонлог байг. $|A| = k$ гэе ($k \geq 1$), $B = X \setminus A$ гэе. $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ гэе. A олонлогийн 2 элемент ямар нэг A_s олонлогт ордог бол тэр хос B олонлогийн 1 л элементэд харгалзана ($|A_i \cap A_j| < 1$, $|A_i| = 3$ учраас). Иймээс $C_k^2 \geq n - k$ байна. $\Rightarrow k \geq \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}$ байна.

а) $\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} = s \in \mathbb{Z}$ байг. $\Rightarrow 8n+1 = (2s+1)^2 \Rightarrow \sqrt{2n} = \sqrt{s^2+s} > s \Rightarrow (s+1) > \sqrt{s^2+s} = \sqrt{2n} > s$ тул $[\sqrt{2n}] = s$.

б) $s \notin \mathbb{Z}$ байг. $k \geq \left[\frac{\sqrt{8k+1}-1}{2} \right] + 1$ байна. $[s] = b$ гэе. $\Rightarrow b+1 > \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} \Rightarrow \sqrt{b^2+3b+2} > \sqrt{2n} \Rightarrow b+2 > \sqrt{b^2+3b+2}$ тул $b+2 > \sqrt{2n} \Rightarrow b+1 \geq [\sqrt{2n}]$ болох тул $k \geq [\sqrt{2n}]$ болно.

Х-В3.



$$\omega : \left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2, (BC) : y = -\frac{b}{c}x + b. \text{ Эн-}$$

$$\text{дээс } Q\left(\frac{c(mc+b^2)}{b^2+c^2}, \frac{bc(c-m)}{b^2+c^2}\right)$$

KQ шулууны тэгшитгэлийг бичье.

$$\frac{x - \frac{m}{2}}{y - \frac{b}{2}} = \frac{\frac{c(mc+b^2)}{b^2+c^2} - \frac{m}{2}}{\frac{bc(c-m)}{b^2+c^2} - \frac{b}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b(c^2 - b^2 - 2mc)x - (mc^2 - mb^2 + 2b^2c)y + bcm^2 + b^3c = 0$$

KQ -д перпендикуляр Q -г дайрсан шулууны тэгшитгэл

$$\frac{mc^2 - mb^2 + 2b^2c}{b(c^2 - b^2 - 2mc)} \left(x - \frac{c(mc+b^2)}{b^2+c^2}\right) + \left(y - \frac{bc(c-m)}{b^2+c^2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$QT : y = -\frac{mc^2 - mb^2 + 2b^2c}{b(c^2 - b^2 - 2mc)}x + \frac{c^2(m^2+b^2)}{b(c^2 - b^2 - 2mc)} \text{ Мөн ижилхэн аргаар}$$

$$PT : y = -\frac{ma^2 - mb^2 + 2b^2a}{b(a^2 - b^2 - 2ma)}x + \frac{a^2(m^2 + b^2)}{b(a^2 - b^2 - 2ma)}$$

$$QT \cap PT = T$$

$$\begin{aligned} & -\frac{mc^2 - mb^2 + 2b^2c}{b(c^2 - b^2 - 2mc)}x + \frac{c^2(m^2 + b^2)}{b(c^2 - b^2 - 2mc)} = \\ & = -\frac{ma^2 - mb^2 + 2b^2a}{b(a^2 - b^2 - 2ma)}x + \frac{a^2(m^2 + b^2)}{b(a^2 - b^2 - 2ma)} \end{aligned}$$

$2(a - c)(b^2 + ac)(m^2 + b^2)x = (a - c)(m^2 + b^2)(2acm + b^2a + b^2c)$
 $x = \frac{2acm + b^2(a + c)}{a(b^2 + ac)}, y = \frac{b(ma + mc - 2ac)}{2(b^2 + ac)}$ Энд m нь дураараа хувьсахад (x, y) цэгүүд нь шулуун зурна (Энэ нь шулууны параметрт тэгшитгэл байна). Өөрөөр хэлбэл манай геометр байр шулууны хэсэг гэсэн үг. M цэг нь AC хэрчим дээр хувьсах учир геометр байр маань BC , AC -ийн дундажийг дайрсан шулуун, AB , AC -ийн дундажийг дайрсан шулуунаар хашигдах олсон шулууны хэсэг байна.

ММО-35, БАГЫН БАГШИЙН III ДАВАА

Ү.Маам

ББ-А1. $x^2 + y^2 = 9x + 1$ тэгшитгэлийн бүхэл тоон шийдийг ол.

ББ-А2. ABC гурвалжинд AA_1, CC_1 биссектрисүүд татав. Хэрэв AA_1, CC_1 -д B оройгоос татсан перпендикулярууд тэнцүү бол ABC гурвалжин адил хажуут байна гэж батал.

ББ-А3. 400м урттай гүйлтийн зам дээр 2 тамирчин нэгэн зэрэг гараанаас гарч уралдав. 1-рийн хурд нь 2-рынхаас 200м/мин-аар их. Уралдаж эхлэснээс хойш хагас минутын дараа 1-р нь 20 секунд зогссон тул 2-р нь 1-рийг гүйцэж түрүүлэв. 1-р нь түрүүлэхийн тулд ямар хурдтай гүйх вэ?

ББ-В1. a, b, c нь эерэг бодит тоонууд бол

$$\frac{(a+b+c)^2 \cdot a \cdot b \cdot c}{(a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2} \leq \frac{27}{64}$$

болохыг батал.

ББ-В2. $ABCD$ ромбын дотор O цэг авав. $\angle DAB = 110^\circ$, $\angle AOD = 80^\circ$, $\angle BOC = 100^\circ$ бол $\angle AOB = ?$

ББ-В3. a, b, c нь ялгаатай бодит тоонууд нь

$$\begin{cases} a^3 = 3b^2 + 3c^2 - 25 \\ b^3 = 3c^2 + 3a^2 - 25 \\ c^3 = 3a^2 + 3b^2 - 25 \end{cases}$$

тэнцэтгэлийн системийг хангадаг бол тэдгээрийн үржвэрийг ол.

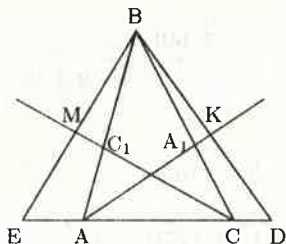
ББ-А1. Өгөгдсөн тэгшитгэлийг $x^2 - 9x + y^2 - 1 = 0$ гэж бичээд x -ийн хувьд квадрат тэгшитгэл гэж үзээд бодоход

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{85 - 4y^2}}{2} \quad (1)$$

болох ба бодлогын нөхцөл ёсоор $85 - 4y^2$ нь квадрат язгуураас гарч болох бүх боломжит y -ийн бүхэл тоон утга нь $y = -3$, $y = -1$, $y = 1$, $y = 3$ болно. Эдгээр утгуудыг (1)-д өгч x -г олоход өгсөн тэгшитгэлийн бүхэл тоон шийд $(1, 3)$, $(1, -3)$, $(8, 3)$, $(8, -3)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(9, 1)$, $(9, -1)$ хосууд болно.

ББ-А2. Энэ бодлогыг хоёр янзаар авч үзье.

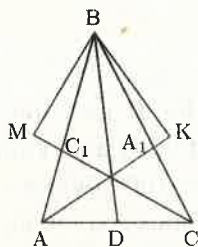
I арга.



BM ба BK перпендикуляруудыг AC шулууны үргэлжлэлтэй огтолцохоор үргэлжлүүлье. Тэгвэл $\triangle BCE$ ба $\triangle BAD$ -ууд адил хажуут байна (CM ба AK биссектрисүүд нь өндөр болно). Эндээс $BC = CE$, $BA = AD$ ба $BE = 2BM = 2BK = BD$ болох тул

сүүлчийн тэнцэтгэлээс $\angle E = \angle D$. Иймд $\triangle BCE = \triangle BAD$ болж $AB = BC$ гэж батлагдав.

II арга.



$\triangle ABC$ -ны биссектрисүүд O цэгт огтлолцсон байхад $\triangle OBM$ ба $\triangle OKA$ эдгээр нь ерөнхий гипотенузтай, хоёр тэгш өнцөгт гурвалжин тэнцүү учир $\angle BOC_1 = \angle BOA_1$ болно. Эндээс $\angle C_1OA = \angle A_1OC$ ба $\angle ABO = \angle CBO$ болохыг тооцвол $\angle BAO = \angle BCO$, өөрөөр хэлбэл $\angle BAC = \angle BCA$ болно.

ББ-А3. II-ын хурд v м/мин, I-ийн хурд $(v + 200)$ м/мин гэе. Тэгвэл

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{400}{v+200} + \frac{1}{3} < \frac{40}{v} \\ \frac{1}{2}(v+200) < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)v \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v^2 + 200v - 240000 < 0 \\ v > 300 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow 300 < v \leq 400$ байна. 300 м/мин-аас их хурдтай гүйхэд түрүүлнэ.

ББ-В1. Бодлогын нөхцөл ёсоор a, b, c гэсэн гурван тооны хувьд арифметик, геометр дундаж ашиглая. $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$, $ab + bc + ac \geq 3\sqrt{(abc)^2}$ энэ 2 тэнцэтгэл бишээс

$$(a + b + c)(ab + bc + ac) \geq 9abc \quad (1)$$

гэж гарна. Тэгвэл $(a + b)(b + c)(a + c) = (a + b + c)(ab + bc + ac) - abc$. Эндээс $abc = (a + b + c)(ab + bc + ac) - (a + b)(b + c)(a + c)$ болж (1)-д орлуулбал

$$9(a + b)(b + c)(a + c) \geq 8(a + b + c)(ab + bc + ac) \quad (2)$$

болно. $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$ гэж үзвэл x, y, z -ын хувьд $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$ үүнээс $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + xz)$ гэж гарах ба буцааж орлуулбал

$$(ab + bc + ac)^2 \geq 3(a + b + c)abc \quad (3)$$

байна. Тэгвэл (2) ба (3)-аас $81(a + b)^2(b + c)^2(a + c)^2 \geq 64(a + b + c)^2(ab + bc + ac)^2$ ба $(ab + bc + ac)^2 \geq 3(a + b + c) \cdot abc$. Энэ 2 тэнцэтгэл бишээс

$$\frac{(a + b + c)^3 \cdot abc}{(a + b)^2(b + c)^2(a + c)^2} \leq \frac{27}{64}$$

болж батлагдана. Энд $a = b = c$ үед тэнцэл болно.

ББ-В2. $\angle ACD = 80^\circ$ ба O цэг нь AD -ийн B цэг орших талд оршин байх цэгийн геометрийн байр нь A ба D цэгүүдийг дайран гарах тойргийн нум болно. $\angle BOC' = 100^\circ$ байхад O цэг BC' талын A цэг орших талд байх цэгүүдийн олонлог нь B ба C' цэгүүдийг дайрах тойргийн нум болно. Иймд O цэг нь эдгээр хоёр нумын огтлол дээр орших ёстой. Ийнхүү цэгүүд нь хоёроос илүүгүй байж болно. Бодлогын нөхцлийг хангах хоёр цэгийг заая. I цэг O_1 нь AC' диагональ дээр орших бол $\angle BO_1C' = 100^\circ$ $\angle AO_1B = 80^\circ$ байх нь илэрхий байна. AC' -ийн хувьд симметр (тэгш хэмт) ёсоор $\angle AO_1D = \angle AO_1B = 80^\circ$

байгаагаас бодлогын нөхцлийг хангаж байна. Түүнчлэн II цэг O_2 нь BD диагональ дээр оршиход $\angle BO_2C = 100^\circ$. Ийм тохиолдолд $\angle AO_2D = 80^\circ$, $\angle AO_2B = 100^\circ$ болно. Эдгээр хоёр цэг нь ялгаатай цэгүүд байна гэдэг нь илэрхий байна (Эдгээр цэгүүд хоёр өөр диагоналиуд дээр орших бөгөөд диагоналиудын огтлолцлын цэг P -ээс ялгаатай ба хоёулаа ромбын дотор оршино (ө.х. жишиж буй) O_2 цэг BD диагоналийн үргэлжлэл дээр биш BD диагональ дээр оршино). Үнэхээр ийм байж гэдгийг тайлбарлая. Ромбын диагоналиуд P цэгээр огтлолцсон бол $\triangle BPC$ -г авч үзье. $\angle BO_1P = 80^\circ$ нь $\angle BCP$ -ээс 55° их тул O_2 цэг ромбын дотор оршино. Мөн адил $\angle CBP = 35^\circ < 80^\circ < \angle CO_2P$ -ээс O_2 цэг нь BD диагоналийн үргэлжлэл дээр биш диагональ BD дээр оршино. Иймд 80° эсвэл 100° байх болно.

ББ-В3. $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ функцийг авч үзье.

$$f(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x + abc \quad (1)$$

$a+b+c = \alpha$, $ab+bc+ac = \beta$, $abc = \gamma$ гэе. Тэгвэл (1) нь $f(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x + abc = x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma$.

$$a^3 + 3a^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) - 25 = 3(\alpha^2 - 2\beta) - 25$$

$$b^3 + 3b^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) - 25 = 3(\alpha^2 - 2\beta) - 25$$

$$c^3 + 3c^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) - 25 = 3(\alpha^2 - 2\beta) - 25$$

тул $g(x) = x^3 + 3x^2 - 3(\alpha^2 - 2\beta) + 25$ болох ба $f(x) = g(x)$ байхад $\alpha = -3$, $\beta = 0$.

ММО-35, БАГЫН БАГШИЙН IV ДАВАА

Ү.Маам

ББ-А1 (Ц.Батхүү). $ABCD$ гүдгэр 4 өнцөгтийн хувьд $\angle ABD = 65^\circ$, $\angle CBD = 35^\circ$, $\angle ADC = 130^\circ$ ба $BC = AB$ бол түүний өнцгүүдийг ол.

ББ-А2 (Б.Баяржаргал). Квадратыг ижил талбайтай ялгаатай 10 гурвалжинд хувааж болох уу?

ББ-А3 (Б.Баясгалан). 4 ба 5 хэмжээтэй тэгш өнцөгтийн оройнууд дээр орших 4 айлыг холбох хамгийн бага замыг ол.

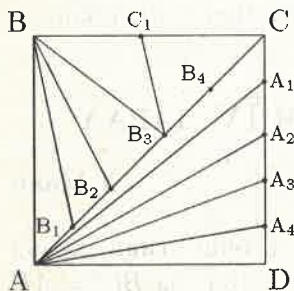
ББ-В1 (В.Адъяасүрэн). Ой зуны туршид $p\%$ өсдөг бөгөөд дараагийн зун хүртэл x хэмжээгээр хорогддог. Анх a хэмжээтэй ой байсан ба n жилийн дараа q дахин өссөн байхын тулд x ямар байх хэрэгтэй вэ?

ББ-В2 (М.Итгэл). $x^3 + x^2 + x + 1$ олон гишүүнтэд хуваагдаг бүх коэффициентүүд нь ялгаатай ба $\{1, 2, \dots, 1999\}$ олонлогт байх 6 зэргийн бүх олон гишүүнтүүдийг ол.

ББ-В3 (Н.Баянбилэг). xOy координаттай хавтгайд эерэг координатуудтай ижил урттай 1999 ширхэг векторуудын нийлбэр векторын уртын квадрат нь хамгийн багадаа ямар утга авах вэ?

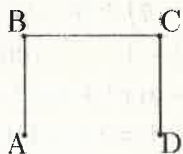
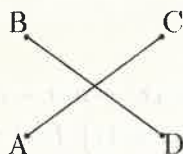
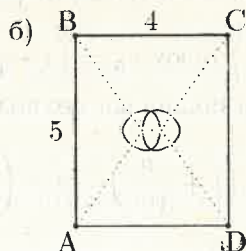
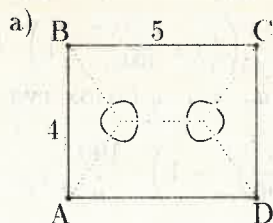
ББ-А1. B цэгт төвтэй $AB = BC$ радиустай тойрог татвал хялбар тооцооны дараа $\angle ADC'$ уг тойрогт багтсан өнцөг болоход хүрнэ. Эндээс огтлолцсон 2 хөвчийн хоорондох босоо өнцөг тулсан шулуунуудынхаа нийлбэрийн хагастай тэнцүү гэсэн хялбар чанарыг ашиглан $\angle DAB = 57^\circ 30'$, $\angle ABC = 100^\circ$, $\angle BCD = 72^\circ 30'$ болохыг хялбар харж болно.

ББ-А2.



$ABCD$ квадратын DC талыг A_1, A_2, A_3, A_4 цэгүүдээр 5 тэнцүү хуваая. Тэгвэл $\triangle ACA_1, \triangle AA_1A_2, \triangle AA_2A_3, \triangle AA_3A_4, \triangle AA_4D$ гурвалжнууд бүгд ижил талбайтай бөгөөд квадратын талбайн $\frac{1}{10}$ -тэй тэнцэнэ. AC -г B_1, B_2, B_3, B_4 цэгүүдээр 5 тэнцүү хэсэгт хуваая. Тэгвэл $\triangle ABB_1, \triangle BB_1B_2, \triangle BB_2B_3$ -ийн талбайнууд мөн $\frac{1}{10}$ болно. Үлдсэн $\triangle BB_3C$ -ийн талбай $1 - \frac{5}{10} - \frac{3}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ учир BC -ийн дундаж C_1 цэгийг авбал $\triangle BB_3C_1, \triangle CC_1B_3$ -ийн талбайнууд мөн $\frac{1}{10}$ болно.

ББ-А3.



эсвэл хэлбэрээр хайж байсан нь алдаанд хүргэнэ. Гурвалжин 3 оройг холбосон хамгийн богино зам бол талуудыг нь ижил 120° -аар харах цэгээр тодорхойлдгийг илүү тустай байв (Энэ тухай "Олонлог", 1999, №1, хуу 27). Тооцоог гүйцэтгэвэл эхний зургийн хувьд урт нь $5 + 4\sqrt{3}$, дараагийн хувьд $4 + 5\sqrt{3}$ байна. Эндээс $5 + 4\sqrt{3}$ нь илүү богино байна.

ББ-В1. $n - 1$ болон n жилийн дараах ойн хэмжээг харгалзан a_{n-1} , a_n гэж тэмдэглэе. $n - 1$ жилийн дараах намар ой ямар хэмжээтэй болох вэ?

$$\left. \begin{array}{l} a_{n-1} = 100\% \\ z = (100 + p)\% \end{array} \right| z = \frac{100 + p}{100} \cdot a_{n-1} = \left(1 + \frac{p}{100}\right) a_{n-1}$$

Иймээс $a_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right) a_{n-1} - x$ болно. Цаашилбал,

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{p}{100}\right) a_{n-1} - x \\ a_{n-1} &= \left(1 + \frac{p}{100}\right) a_{n-2} - x \\ a_{n-2} &= \left(1 + \frac{p}{100}\right) a_{n-3} - x \\ &\dots\dots\dots \\ a_2 &= \left(1 + \frac{p}{100}\right) a_1 - x \\ a_1 &= \left(1 + \frac{p}{100}\right) a - x \end{aligned}$$

Эдгээр тэнцэтгэлүүдийг харгалзан $1, 1 + \frac{p}{100}, \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2, \dots, \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-2}, \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1}$ -ээр үржүүлээд нэмбэл:

$a_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \cdot a - x \cdot \left(1 + \left(1 + \frac{p}{100}\right) + \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 + \dots + \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-2} + \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1}\right)$ буюу $a_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \cdot a - \left(\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1\right) \cdot \frac{100}{p} \cdot x$ болно. Гэтэл бодлогын нөхцөл ёсоор $a_n = a \cdot q$ болох тул

$$a_q = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \cdot a - \left(\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1\right) \cdot \frac{100}{p} \cdot x$$

Эндээс, $x = \frac{a\left(\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - q\right) - q \cdot \frac{p}{100}}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1}$.

ББ-В2. $f(x) = a_0x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6$ олон гишүүнт авъя. $(x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1))$ $f(x) = (a_0x^2 + a_1x + a_2)(x^4 - 1 + 1) + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6 = (a_0x^2 + a_1x + a_2)(x^4 - 1) + a_3x^3 + (a_0 + a_4)x^2 + (a_1 + a_5)x + (a_2 + a_6)$ ба $f(x)$ нь $x^3 + x^2 + x + 1$ -д хуваагдаж байхын тулд $a_3x^3 + (a_0 + a_4)x^2 + (a_1 + a_5)x + (a_2 + a_6)$ нь хуваагдаж байх ёстой. Ө.х. $\frac{a_3}{1} = \frac{a_0+a_4}{1} = \frac{a_1+a_5}{1} = \frac{a_2+a_6}{1}$ байх ёстой. $a_i \in \{1, \dots, 1999\}$ $i = 0, 6$

$$a_3 = a_0 + a_4 = a_1 + a_5 = a_2 + a_6 \quad (*)$$

нөхцөл хангана.

Хэрэв 1 шийд олдвол тэр нь 12 симметр шийд олдоно.

а) (a_0, a_4) , (a_1, a_5) , (a_2, a_6) хосууд нь x^2, x^1, x^0 -ийн өмнөх коэффициент байдлаар 6 янзаар сэлгэнэ.

б) $a_0 \leftrightarrow a_4$, $a_1 \leftrightarrow a_5$, $a_2 \leftrightarrow a_6$ хоорондоо солигдоно (ө.х. 1 хосын хувьд 2 боломжтой). Иймд $6 \cdot 2 = 12$ шийдтэй болно. Одоо $\{1, \dots, 1999\}$ олонлогоос $(*)$ томъёогоор 3 хос, 1 тоог хэрхэн олохыг тооцъё.

$a_3 = 1999$ байхад $(1, 1998)$, $(2, 1997)$, $\dots$, $(997, 1002)$, $(998, 1001)$,

$(999, 1000) \quad \left[\frac{1999-1}{2}\right]$ ширхэг,

$a_3 = 1998$ байхад $(1, 1997)$, $\dots$, $(997, 1001) \quad \left[\frac{1998-1}{2}\right]$ ширхэг,

$\vdots$

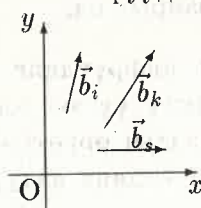
$a_3 = 7$ байхад $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4) \quad \left[\frac{7-1}{2}\right]$ ширхэг байна.

$a_3 \leq 6$ үед боломжгүй.

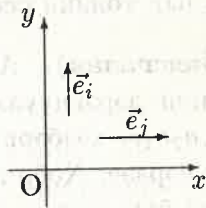
$a_3 = k$ үед $\left[\frac{k-1}{2}\right]$ ширхэг (*) хангах ялгаатай хосууд олдох ба түүнээс 3 ширхэг хосыг сонгох боломжийн тоо нь $C_{\left[\frac{k-1}{2}\right]}^3$ юм. Иймд бодлогын нөхцлийг хангах бүх олон гишүүнтийн тоо нь

$$12 \cdot \sum_{k=7}^{1999} C_{\left[\frac{k-1}{2}\right]}^3 \text{ болно.}$$

ББ-В3. $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{1999}$ гэсэн a урттай векторууд өгөгдсөн гэвэл (зураг 1) эдгээрийг $\vec{b}_i = a \cdot \vec{e}_i$ гэж ($i = \overline{1, 1999}$) 1999 ширхэг нэгж векторуудаар задалж болно.



Зураг 1.



Зураг 2.

$\vec{b}_i$ векторууд эерэг координаттай гэсэн учир $\vec{e}_i$ нэгж векторууд эсвэл (0, 1) эсвэл (1, 0) координатуудтай байна гэдгийг хялбархан харж болно (зураг 2). Тэгвэл $\sum_{i=1}^{1999} \vec{b}_i = a \cdot \sum_{i=1}^{1999} \vec{e}_i$ бо-

лох ба эндээс $\left| \sum_{i=1}^{1999} \vec{b}_i \right|^2 = a^2 \cdot \left| \sum_{i=1}^{1999} \vec{e}_i \right|^2$ болно. Гэтэл $\left| \sum_{i=1}^{1999} \vec{e}_i \right|^2 = k^2 + (1999 - k)^2$ учир $f(x) = x^2 + (1999 - x)^2$ гэсэн натурал тоон аргументтай функцийн утга хамгийн багадаа хэд байхыг ол гэсэн бодлогод шилжив. Мөн тийм байх x_0 цэгийг олно гэсэн үг. $f(x)$ нь дээшээ харсан парабол учир заавал $\min$ утгатай $f'(x) = 2x - 2(1999 - x) = 4x - 2 \cdot 1999 = 0 \Rightarrow x_0 = \left[\frac{1999}{2}\right] = 999$. $f(x) \Big|_{x=999} = (999)^2 + (1999 - 999)^2 = 998001 + 1000000 = 1998001$.

Ингээд $\left| \sum_{i=1}^{1999} \vec{b}_i \right|^2 = a^2 \cdot 1998001$. үүнийг мөн бүтэн квадрат ялгаж бодож болно. $f(x) = 2x^2 - 2x \cdot 1999 + 1999^2 = \left(\sqrt{2}x - \frac{1999}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1999^2}{2} \Rightarrow f(x) \Big|_{\min} = \left[\frac{1999^2}{2}\right]$.

ММО-35, Дундын багшийн III даваа

Ц.Батхүү

ДБ-А1 (Ц.Дашдорж). $\deg P(x) = n \geq 5$ ба $P(x) \in Z[x]$ нь n ялгаатай бүхэл язгууртай байг. $P(0) = 0$ бол $P(P(x))$ -ийн бүхэл язгууруудыг ол.

ДБ-А2 (Б.Чулуундорж). Тойргийн сегментэд багтсан тойргуудын төвийн геометр байрыг ол.

ДБ-А3 (Б.Баясгалан). Аравтын цифруудийг баруунаас зүүн тийш зэрэгцүүлэн бичихэд үүсэх төгсгөлгүй $\dots a_n \dots a_2 a_1 a_0$ хэлбэрийн дарааллыг өргөтгөсөн натурал тоо гэж нэрлэе. Хоёр ийм тоог ердийн натурал тоонуудын адил баганаар нэмж, үржүүлж, хасч болно. Бүхэл коэффициенттэй олон гишүүнтийн язгуур болдог өргөтгөсөн натурал тоог алгебрийн тоо гэвэл

а) алгебрийн биш өргөтгөсөн натурал тоо олдохыг батал.

б) $x^n - x = 0$ ($1 < n$) тэгшитгэл өргөтгөсөн натурал тоон олонлогт хичнээн шийдтэй вэ?

ДБ-В1 (В.Адьяасүрэн). $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)(x_k + x_{k+1} + \dots + x_{10}) = 1$, $k = \overline{1, 10}$ системийг хангах эерэг $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ тоонуудыг ол.

ДБ-В2 (Ц.Батхүү). $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ тасралтгүй функцүүд ба f нь монотон өсдөг болог. Тэгвэл

$$\int_0^1 f(g(x))dx \leq \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx$$

болохыг батал.

ДБ-В3 (А.Мекей). $n, k \in \mathbb{N}$, $A = \{\bar{x} = (x_1, \dots, x_k) / 0 \leq x_i \leq n, x_i \in \mathbb{Z}\}$, $M(\bar{x}) = \max\{x_1, \dots, x_k\}$ байг. Тэгвэл

$$\sum_{\bar{x} \in A} M(\bar{x}) = (n+1)^{k+1} - \sum_{\ell=1}^{n+1} \ell^k$$

гэдгийг батал.

ДБ-А1. Бодлогын нөхцөл ёсоор $P(x) = ax(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)$ болно. $P(P(x)) = aP(x)(P(x)-x_2)\dots(P(x)-x_n)$ болох тул $0, x_2, \dots, x_n$ нь $P(P(x))$ -ийн бүхэл язгуурууд болох нь ойлгомжтой. Одоо эдгээр бүхэл язгууруудаар $P(P(x))$ -ийн бүхэл язгуурууд шавхагдахыг харуулъя. Эсрэгээс нь $0, x_2, \dots, x_n$ -ээс ялгаатай $P(P(x))$ олон гишүүнтийн y гэсэн бүхэл язгуур оршин байдаг гэе. Тэгвэл $P(y) = x_i$, $i = \overline{2, n}$ байх i тоо олдоно. $y - x_i \mid P(y) - P(x_i)$ ба $P(x_i) = 0$ тул $y - x_i \mid P(y) = x_i$ болж $x_i = k(y - x_i)$, $k \in \mathbb{Z}$ болно. Нөгөө талаас $x_i = P(y) = ay(y-x_2)\dots(y-x_n)$ тул $y \mid x_i$ буюу $x_i = \ell y$, $\ell \in \mathbb{Z}$, $\ell \neq 0, 1$ байна. Иймд $\ell y = x_i = k(y - x_i) = k(y - \ell y)$ буюу $k = \frac{\ell}{1-\ell}$ тул $\ell = 2$, $y = \frac{x_i}{2}$ болно. Эндээс $x_i = P(y) = P\left(\frac{x_i}{2}\right) = a\frac{x_i}{2}\left(\frac{x_i}{2} - x_2\right)\dots\left(\frac{x_i}{2} - x_n\right)$ буюу $a\left(\frac{x_i}{2} - x_2\right)\dots\left(\frac{x_i}{2} - x_n\right) = 2$ болно. Иймд $n \geq 5$ үед 2 нь дор хаяж 4 ялгаатай тооны үржвэр болоход хүрэх тул $P(P(x))$ нь $0, x_2, \dots, x_n$ -ээс ялгаатай бүхэл язгуургүй.

ДБ-А2. Тойргийн радиусыг R , сегментийн өндрийг h гэе. Тэгвэл фокус нь тойргийн төв дээр оршдог, директрис шулуун нь сегментийн өндөрт татсан шүргэгчээс $R - d$ зайд орших түүнтэй параллель шулуун байх парабол бодлогын нөхцлийг хангахыг түвэггүй харж болно.

ДБ-А3. Оюутны эчнээ давааны бодлого №9-ыг үз.

ДБ-В1. Оюутны 10-р бодлогыг хар.

ДБ-В2. Аливаа $t \in [0, 1]$ цэгийн хувьд $(1-t)f(t) \leq \int_0^1 f(x)dx$ байх нь ойлгомжтой. Иймд $(1-g(x))f(g(x)) \leq \int_0^1 f(x)dx$ ба

$f(t) \leq 1$ тул $f(g(x)) \leq g(x) + \int_0^1 f(x) dx$ болно. Одоо тэнцэтгэл бишийн хоёр талыг интегралчлахад хангалттай.

ДБ-В3. $M(\bar{x}) = s$, $s = \overline{0, n}$ байх $\bar{x}$ векторуудын тоо $(s+1)^k - s^k$ байх нь ойлгомжтой. Иймд

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{x} \in A} M(\bar{x}) &= 0 \cdot 1 + 1(2^k - 1) + 2(3^k - 2^k) + \dots + n((n+1)^k - n^k) = \\ &= n(n+1)^k - 1 - 2^k - 3^k - \dots - n^k + (n+1)^k - (n+1)^k = \\ &= (n+1)^{k+1} + \sum_{\ell=1}^{n+1} \ell^k \end{aligned}$$

болно.

ММО-35, Дундын багшийн IV ДАВАА

Ц.Батхүү

В.Адъяасүрэн

ДБ-А1 (Л.Хадхүү). Хэрэв $\forall h \in \mathbb{R}$ тооны хувьд 19990509-өөс их биш цэг дээр $f(x) \neq f(x+h)$ байдаг бол $f(x)$ функц 9995256-аас ихгүй цэгүүд дээр тэнцүү утга авдах болохыг харуул.

ДБ-А2 (Ж.Батболд). Зөв n өнцөгтийн дурын 2 орой A, B -г $A \rightarrow B$ эсвэл $B \rightarrow A$ чиглэлт хэрчмээр холбов. Тэгвэл $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ 4 урттай циклийн боломжит хамгийн их тоог ол.

ДБ-А3 (Ц.Батхүү). a_n нь $a_{20} = 100$ байдаг үл буурах натурал тоон дараалал ба $b_m = \min\{n | a_n \geq m\}$ бол

$$\max_{a_n} \{a_1 + a_2 + \dots + a_{20} + b_1 + b_2 + \dots + b_{100}\}$$

ол.

ДБ-В1 . Х ангийн В1-тэй ижил.

ДБ-В2 . V эзэлхүүнтэй тетраэдрийн ирмэгүүд нь a, b, c, d, e, f ба талсууд нь S_1, S_2, S_3, S_4 бол

$$2\sqrt{S_1 S_2 S_3 S_4} > 3V \sqrt[6]{abcde f}$$

гэж батал.

ДБ-В3 . Хавтгайг өөрт нь буулгасан f буулгалт нь хоорондох зай нь 1 байх ямар ч хоёр цэг A, B -г мөн тийм зайтай хоёр цэгт буулгадаг бол ямар ч натурал тоо n -ийн хувьд $\rho(A, B) = n$ гэдгээс $\rho(f(A), f(B)) = n$ гарахыг батал ($\rho(A, B)$ нь хоёр цэгийн хоорондох зай).

ДБ-А1. Бодлогын томъёолол буруу болсон. Тухайлбал: $f(x) = \text{const}$ функц эсрэг жишээ болох юм. Иймд нийт багш нараас хүлцэл өчөөд, бодлогын зөв томъёолол, түүний бодолтыг бичье. "Хэрэв $\forall h \in \mathbb{R}$ тооны хувьд 19990509-өөс олонгүй цэг дээр $f(x) \neq f(x+h)$ байдаг бол f функц 9995256-аас олонгүй цэгүүдээс бусад цэгүүд дээр тэнцүү утга авдаг болохыг батал."

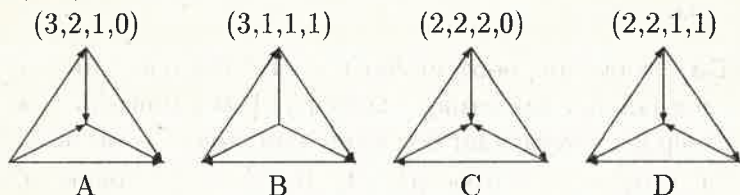
Бодолт. $\forall x \in \mathbb{R}$ -ийн хувьд $a_n(x) = f(x+n)$ дараалал авч үзье. $f(x+1) \neq f(x)$ нөхцөл төгсгөлөг ширхэг цэг дээр биелэх учир $a_n(x) = C_x$ ($\forall n > N_x$) болно.

Одоо $C_x \neq C_y$ байх $x, y \in \mathbb{R}$ тоонууд олддог гэвэл $h = y - x$, $\forall n > \max(N_x, N_y)$ тоонуудын хувьд

$$f(h + (x+n)) = f(y+n) = C_y \neq C_x = f(x+n)$$

болж зөрчилд хүрнэ ($x+n$ хэлбэрийн төгсгөлгүй олон тоо олдож байна). Иймд $C_x = C_y = C$ болно. $E = \{x \mid f(x) \neq C\}$ гэе. Хэрэв E төгсгөлгүй олон элементтэй бол E -гээс $X_1, \dots, X_{19990510}$ цэгүүд авбал $c = f(x_i + h) \neq f(x_i)$, $(h = n \geq \max(N_1, \dots, N_{19990510}))$ ($i = 1, 2, \dots, 19990510$) гэж өгөгдсөнд харшилна. Иймд E төгсгөлөг тооны элементийг $E = \{X_1, \dots, X_s\}$ гэе. $X_i \pm h \notin E$ ($i = 1, 2, \dots, s$) байхаар h -ийг сонговол $C = f(x_i - h) \neq f(x_i)$, $C = f(x_i - h) \neq f(x_i) \Rightarrow 2s \leq 19990509 \Rightarrow s \leq 9995254$.

ДБ-А2. Эхлээд аливаа бүрэн чиглэлт граф дахь 4 оройтой чиглэлт дэд графуудыг авч үзье. (a, b, c, d) нь $a \geq b \geq c \geq d$ нөхцлийг хангах бөгөөд оройнуудаас нь a, b, c, d ширхэг ирмэг гардаг $3 - a, 3 - b, 3 - c, 3 - d$ ширхэг ирмэг ирдэг бол $a + b + c + d = 6$ байх нь ойлгомжтой.



Дээрх дөрвөн төрлийн 4 өнцөгт байх нь ээ. Эдгээрээс зөвхөн $(2,2,1,1)$ буюу D төрлийн 4 өнцөгт л 4 урттай циклийг агуулах ба ямар нэгэн оройгоос 3 орой гардаг 4 өнцөгт нь цикл агуулахгүй. n оройтой бүрэн чиглэлт графын $v_i, i = 1, \dots, n$ оройгоос S_i ширхэг орой гардаг гэвэл $(S_1, S_2, \dots, S_n)$ граф нь ядаж $\sum_{i=1}^n C_{S_i}^3$ ширхэг цикл агуулдаггүй 4 өнцөгт агуулах ба

$$t(n, 4) \leq C_n^4 - \sum_{i=1}^n C_{S_i}^3 \text{ болно. Эндээс үзэхэд } \sum_{i=1}^n C_{S_i}^3 \text{ нийлбэр хам-}$$

гийн бага байх графыг авч үзэх хэрэгтэй. $\sum_{i=1}^n S_i = \frac{n(n-1)}{2}$ учир

$$n \text{ сондгой үед } S_i = \frac{n-1}{2}, i = 1, 2, \dots, n$$

$$n \text{ сондгой үед } S_i = \frac{n}{2}, i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$$

$$S_j = \frac{n}{2} - 1, j = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$$

байхад дээрх нийлбэр хамгийн бага утгандаа хүрнэ. Одоо ийм чанартай $T_0(n)$ графыг байгуулъя.

n сондгой байг. $T_0(n)$: $v_1, v_2, \dots, v_n$ оройнууд нь $v_i \rightarrow v_j, j \equiv 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} \pmod{n}$ граф авч үзье. Энэ графын аливаа 4 өнцөгт нь эсвэл 4 төрлийнх, эсвэл D төрлийнх байна гэдгийг баталчихвал $\sum_{i=1}^n C_{S_i}^3$ нь A төрлийн 4 өнцөгтийн тоо болох ба

$$C_n^4 - \sum_{i=1}^n C_{S_i}^3 \text{ нь } D \text{ төрлийн 4 өнцөгтийн тоо болно.}$$

Өгүүлбэр. Дээрх $T_0(n)$ граф нь B ба C төрлийн 4 өнцөгтийн алийг ч агуулахгүй.

Баталгаа. $T_0(n)$ -д B төрлийн 4 өнцөгт байдаг гэе. $v_1 v_i v_j v_1$ нь 3 урттай цикл ба $v_k \rightarrow v_1, v_k \rightarrow v_i, v_k \rightarrow v_j$ гэвэл $i \leq 1 + \frac{n-1}{2}, j \leq i + \frac{n-1}{2}, j > 1 + \frac{n-1}{2}, n \geq k > 1 + \frac{n-1}{2}, k > i + \frac{n-1}{2} \Rightarrow \frac{n+1}{2} < j < k \leq n$ буюу $v_i \rightarrow v_k$ болж зөрчил гарав. Яг үүнтэй адилаар C төрлийн өнцөгт байдаггүйг баталж болно.

n тэгш бол $T_0(n+1)$ графыг сондгой тохиолдолтой адилаар байгуулж түүний дурын n оройтой бүрэн чиглэлт графыг авбал энэ дэд графын аливаа 4 өнцөгт эсвэл A , эсвэл B төрлийн болно.

Одоо $t(n, 4)$ -г олѐё.

n сондгой

$$t(n, 4) = C_n^4 - \sum_{i=1}^n C_{\frac{n-1}{2}}^3 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} - \frac{n^{\frac{n-1}{2}} \frac{n-3}{2} \frac{n-5}{2}}{6} = -\frac{1}{48}n(n^2-1)(n-3)$$

n тэгш

$$t(n, 4) = C_n^4 - \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} C_{\frac{n}{2}}^3 - \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n C_{\frac{n}{2}-1}^3 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} - \frac{n}{2} \cdot \frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-2)}{6} - \frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-2)(\frac{n}{2}-3)}{6} = \frac{1}{48}n(n^2-4)(n-3)$$

Эцэст нь тэмдэглэхэд $t(n, 4) = \frac{1}{2}(n-3)t(n, 3)$ байхыг баталчихвал өөр нэг хялбар бодолт гарах юм.

ДБ-А3. $a_0 = 0$ гэе. Тэгвэл $b_m = k$ байх m -ийн тоо $a_m - a_{m-1}$ байна. Эндээс $\max\{a_1 + a_2 + \dots + a_{20} + b_1 + b_2 + \dots + b_{100}\} = \max\{a_1 + a_2 + \dots + a_{20} + a_1 + (a_2 - a_1)2 + \dots + (a_{20} - a_{19})20\} = \max\{21a_{20}\} = 2100$.

ДБ-В1. Х ангийн ВЗ бодлогыг үз.

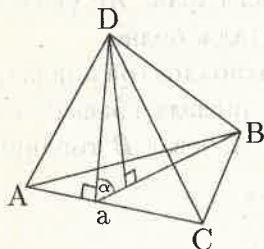
II Бодолт (М.Эрдэнэ).

$(p, p^n - 1) = 1 \Rightarrow p^{\varphi(p^n - 1)} \equiv 1(p^n - 1)$ (Эйлерийн теорем).

$$p^n - 1 \equiv 0(p^n - 1) \Rightarrow p^n \equiv 1(p^n - 1)$$

$\varphi(p^n - 1) = nk + s, 0 \leq s < n$ байг. $p^{\varphi(p^n - 1)} \equiv 1(p^n - 1) \Rightarrow p^{nk+s} \equiv 1(p^n - 1) \Rightarrow (p^n)^k \cdot p^s \equiv 1(p^n - 1) \Rightarrow p^s - 1 \equiv 0(p^n - 1), p^s - 1 < p^n - 1$ учир $p^s - 1 \equiv 0(p^n - 1) \Rightarrow p^s \equiv 1(p^n - 1) \Rightarrow s = 0 \Rightarrow n | \varphi(p^n - 1)$ батлагдав.

ДБ-В2.

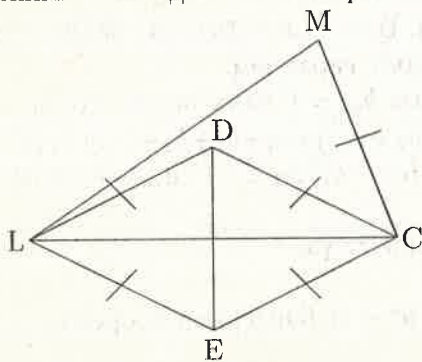


$AC = a, h$ нь ADC гурвалжны AC талд буусан өндөр α нь ADC, ABC хавтгайнуудын хоорондох өнцөг ба $S_{ADC} = S_1, S_{ABC} = S_2$ гэвэл $V = \frac{h \sin \alpha S_2}{3}$ буюу $\frac{aV}{2} = \frac{S_1 S_2 \sin \alpha}{3}$ болно. Үүнтэй адил тэнцлийг бусад ирмэгүүдийн хувьд бичээд бүх 2 талст өнцгүүд нь нэгэн зэрэг $\frac{\pi}{2}$ байж болохгүйг анхаарвал

$$\frac{(S_1 S_2 S_3 S_4)^3}{3^6} > \frac{abcdefV^6}{2^6}$$

буюу $2\sqrt{S_1 S_2 S_3 S_4} > 3\sqrt[6]{abcdefV}$ болж батлагдав.

ДБ-В3. Хангалттай их $n \in \mathbb{N}$ хувьд батлахад хангалттай. 1 талтай зөв гурвалжин 1 талтай зөв гурвалжинд буух тул 1 диагональ нь 1-тэй тэнцүү талууд нь 1 байх ромбо эсвэл 1 талтай зөв гурвалжинд эсвэл өөртэйгөө тэнцүү ромбод бууна. Эхний тохиолдол боломжгүйг баталъя.



$LM = \sqrt{3}, MC = CD = ED = CE = LD = EL = 1$ ба $f(L) = f(M)$ гэвэл $f(D)f(C)f(E)$ 1 талтай зөв гурвалжин $f(L)$ -д төвтэй 1 радиустай тойрогт багтахад хүрнэ. Иймд $LM = \sqrt{3}$ бол $f(L)f(M) = \sqrt{3}$ болно. Үүнтэй адилаар 3 урттай хэрчмийн 2 орой

мөн л 3 зайтай 2 цэгт буух ба ерөнхий тохиолдолд $3^k, k \in \mathbb{N}$ үед ч хүчинтэй байх тул бодлого бодогдов.

Олон Улсын Математикийн XL Олимпиадад оролцсон тухай

Ц.Дашдорж
Г.Баярмагнай

ОУМО-XL 1999.07.10—22-нд Румын улсад болж өнгөрлөө. Дэлхийн 81 орон оролцсон энэ Олимпиадад Орос=Хятад 182 оноо, Вьетнам 177, Румын 173, Болгоар 170, Белорусс 167, Өмнөт Солонгос 164, Иран 159, Тайван 153, АНУ 150, Унгар 147, Украин 147, Япон 135, Югослав 130, Австраль 116, Турк 109, Герман 108, Энэтхэг 107, Польш 104, Англи 100, Словак 88, Латви 86, Итали 82, Швейцар 79, Монгол=Израил 78 оноогоор эхний 25 байранд шалгарлаа. Манайхаас

1. Ж.Эрдэмбилэг	(XI сургууль, 10-р анги)	14
2. Л.Хатанбаатар	(XI сургууль, 10-р анги)	21
3. Б.Баттулга	(XI сургууль, 10-р анги)	22
4. Б.Очирбат	(XI сургууль, 10-р анги)	8
5. Б.Лхавга-Очир	(XI сургууль, 10-р анги)	5
6. Б.Амарсанаа	(XI сургууль, 9-р анги)	8

Б.Баттулга, Л.Хатанбаатар нар мөнгөн медаль, Ж.Эрдэмбилэгт хүрэл медаль авлаа. Монголын Математикийн Олимпиадын түүхэнд анх удаагаа нэг сургуулиас Олон Улсын бүтэн баг бүрэлдсэнд манай математикчдын нэг Ш.Мөнхцэцэг захиралтай XI сургуулийн хамт олонд ММОХороо баяр хүргэж, цаашдын их амжилтыг хүсэн ерөөж байна. Багийн орлогч удирдагчаар ММО-ийн дархан аварга багш Увсын Д.Бат-Орших явлаа.

ОУМО-XLI Өмнөт Солонгост 2000.07.13—25-нд болно.

ОУ-1. Хавтгайн ядаж 3 цэгийг агуулсан дараах нөхцлийг хангадаг төгслөг S олонлогуудыг ол. S -ийн ямар ч ялгаатай A, B цэгүүдийн хувьд AB хэрчмийн дундач перпендикуляр нь S -ийн тэгш хэмийн тэнхлэг болдог.

ОУ-2. $n \geq 2$ байх бүхэл тоо n өгсөн байг.

а) $x_1, \dots, x_n \geq 0$ байх бүх бодит тоонуудын хувьд

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^4$$

тэнцэтгэл биш биелж байх хамгийн бага тогтмол C тоог ол.

б) Энэ C -ийн хувьд хэдийд тэнцэлдээ хүрэх вэ?

ОУ-3. Өгсөн тэгш, натурал тоо n -ийн хувьд $n \times n$ квадрат самбар n^2 ширхэг нэгж квадратад хуваагдсан байг. Ерөнхий талтай хоёр ялгаатай нэгж квадратыг хөрш гэе. Ямар ч нэгж квадрат (тэмдэглэгдсэн ч бай, үгүй ч) ядаж нэг тэмдэглэгдсэн нэгж квадраттай хөрш байхаар N ширхэг нэгж квадратыг тэмдэглэе. N -ийн боломжит хамгийн бага утгыг ол.

ОУ-4. p анхны тоо, $n \leq 2p$ ба $(p-1)^n + 1$ нь n^{p-1} -д хуваагддаг байхаар бүх (n, p) натурал хосыг ол.

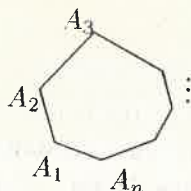
ОУ-5. Γ_1, Γ_2 тойргууд нь Γ тойргийн дотор орших ба Γ -г харгалзан M, N цэгүүдэд шүргэнэ. Γ_1 тойрог Γ_2 -ийн төвийг дайрна. Γ_1 ба Γ_2 -ийн огтлолцлын хоёр цэгийг дайрсан шулуун нь Γ -г A, B цэгээр огтолно. MA ба MB шулуунууд Γ_1 -г $C_1 D$ цэгээр огтолно. CD нь Γ_2 -ийн шүргэгч гэдгийг батал.

ОУ-6. Аливаа $x, y \in \mathbb{R}$ -ийн хувьд

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + x f(y) + f(x) - 1$$

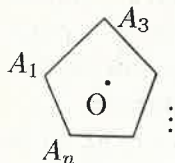
байх бүх $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол.

ОУ-1. $S \in A, B$, A, B цэгийг дайрсан шулуун дээр S олонлогийн k ширхэг цэг байг. Хамгийн захын 2 цэгийг C, D гэе. CD хэрчимд харгалзах тэгш хэмийг авъя. $k = 2$ болно.



S олонлогийн гүдгэр бүрхүүлийг авч үзье. $A_1 A_3$ хэрчимд харгалзах тэгш хэмээр $A_2 \rightarrow A_1$ байх ёстой. Өөрөөр хэлбэл $A_2 A_1 = A_2 A_3$ байна. $A_2 A_3$ хэрчимд харгалзах тэгш хэмээр $A_2 \rightarrow A_3, A_1 \rightarrow A_4$ буух ёстой (Яагаад?).

Эндээс $\sphericalangle A_1 A_2 A_3 = \sphericalangle A_2 A_3 A_4 \Rightarrow A_1 \dots A_n$ нь зөв n өнцөгт болно. n өнцөгт дотор S олонлогийн O цэг байг.



$\exists A_i : |OA_3| < |OA_i|$ OA_3 -д харгалзах тэгш хэмээр $A_i \rightarrow A'_i$ бууг. $|A_i M| = |A'_i M| > |OA_3| = 2|MA_3| \Rightarrow A'_i$ цэг n өнцөгтийн гадна байх болж гүдгэр бүрхүүл гэдэг зөрчинө.

ОУ-2. x_1, x_2 тэгээс ялгаатай, бусад нь тэг үед үнэлгээг хийе. $x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) \leq c(x_1 + x_2)^4 / \cdot \frac{1}{c} \Rightarrow$
 $\Rightarrow x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) (\frac{1}{c} - 8) \leq (x_1 + x_2)^4 - 8x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) = (x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2)^2 - 8x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) = (x_1^2 + x_2^2)^2 + 4x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) + 4x_1^2 x_2^2 - 8x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) = (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2)^2 \geq 0 \neq x_1 = x_2$ үед $x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) (\frac{1}{c} - 8) \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{c} - 8 \leq 0 \Rightarrow c \geq \frac{1}{8}$ байна. Одоо

$$8 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^4$$

баталъя.

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^4 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \right)^2 \geq 8 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \right)$$

(Коши) байна.

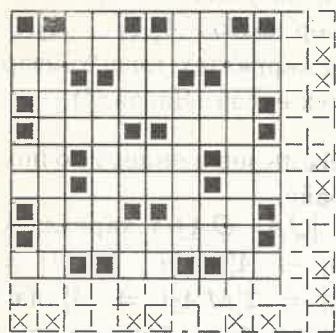
$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \right) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \geq \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2)$$

болж батлагдав.

б) $x_1 = x_2, x_i = 0 \ i \geq 3$ байхад л тэнцэлдээ хүрнэ.

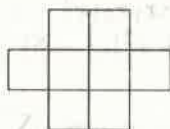
ОУ-3. Хайх хамгийн бага тоо $\frac{n(n+2)}{4}$ болохыг баталъя. Үүний тулд доорхи зурагт үзүүлсэн байдлаар $n \times n$ хүснэгтийн

зарим нүдийг тэмдэглэе.



Уг байдлаар тэмдэглэгдсэн $n \times n$ хүснэгтийг үргэлжлүүлэн $(n+2) \times (n+2)$ хүснэгтийг уг байдлаар гүйцээн бөглөж болно. Энэ тохиолдолд тэмдэглэгдсэн нүдний нийт тоо $\frac{n(n+2)}{4}$ байх болно. Одоо уг тоо хамгийн бага гэдгийг шалгая. Тэгвэл $n \times n$ хүснэгтэд өмнөх байдлаар тэмдэглэгдсэн $\frac{n(n+2)}{4}$ нүдийг ашиглая.

Эдгээр нүд нь ядаж нэг тэмдэглэгдсэн хөрштэй байх агаад ийм хоёр нүд ерөнхий тэмдэглэгдсэн хөрштэй байж чадахгүй юм. Эндээс тэмдэглэгдсэн нүдний тоо үнэхээр $\frac{n(n+2)}{4}$ тооноос багагүй байна. Г.Баярмагнай үүнийг арай өөрөөр хийсэн байна.



хэлбэрийн дүрсүүд дор хаяж хоёр тэмдэглэгдсэн нүд агуулахыг нотлоод, эдгээр дүрсүүдэд $n \times n$ хүснэгтийг хувааж шалгажээ.

ОУ-4. n тооны хамгийн бага анхны тоон хуваагч q байг.

$(p-1)^n + 1$ нь $p \neq 2$ үед сондгой тоо $\rightarrow n$ сондгой

$$(n, p-1) = 1 \Rightarrow (q, p-1) = 1 \rightarrow \begin{cases} (p-1)^{2n} \equiv 1(q) \\ (p-1)^{q-1} \equiv 1(q) \end{cases} \Rightarrow$$

$(2n, q-1) = 2$ байна (Яагаад?).

$(p-1)^2 \equiv 1(q) \rightarrow 0 \equiv (p-1)^n + 1 \equiv p-1+1 \quad (q) \rightarrow q|p \Rightarrow q=p \Rightarrow n=p \cdot s \leq 2p \Rightarrow s \leq 2$. Өөрөөр хэлбэл $s \leq 2 \Rightarrow s=1$ байна. $(p-1)^p + 1 \equiv 0(p^2) \Rightarrow (p-1)^p + 1 \equiv -C_p^2 \cdot p^2 + C_p^2 \cdot p \equiv \frac{p-1}{2} \cdot p^3 + p^2 \equiv p^2(p^3) \Rightarrow p-1=2 \Rightarrow p=3$.

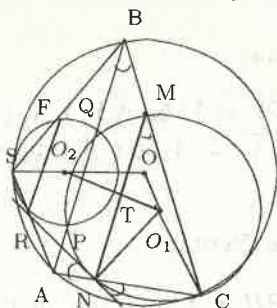
$(p-1)^p + 1 \equiv 0(p) \Rightarrow p-1=1 \Rightarrow p=2=n$.

Шийд $(3,3); (2,2); (1,p)$.

ОУ-5. C' -д төвтэй гомотетоор $M \rightarrow B$
 $N \rightarrow A$ бууна.

$\Rightarrow MN \parallel AB$ S -д төвтэй гомотетоор $F \rightarrow B$
 $R \rightarrow A$ $\} \Rightarrow FR \parallel AB$

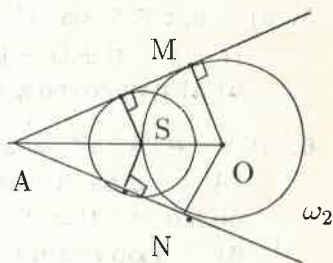
$AR \cdot AS = AP \cdot AQ = AN \cdot AC'$ тул $SCNR$ тойрогт багтана.



$\angle ANR = \angle ASC = \angle ABC = \angle NMC$
 RN шулуун NC -тэй $\angle NMC$ өнцөг
үүсгэх тул RN нь O_2 төвтэй тойр-
гийг N цэгт шүргэнэ. Мөн адилаар
 RN нь O_2 төвтэй тойргийг R цэгт
шүргэнэ. FM нь ч уг 2 тойргийг
шүргэнэ. Лемм ёсоор MN нь O_2
төвтэй тойргийг шүргэнэ.

Лемм. ω_1 тойргийн төв нь ω_2 дээр оршдог бөгөөд ерөнхий
шүргэгчүүд нь ω_2 тойргийг M, N цэгээр шүргэх бол MN нь
 ω_1 -ийг шүргэнэ.

Баталгаа. M, N холбоё. $\angle MOA =$
 2α гэе. $\angle AMS = \alpha = \angle SNM$.
 AO шулууны хувьд тэгш хэм хий-
вэл $M \rightarrow N, S \rightarrow S, O \rightarrow O$ бууна.
 $\angle SMN = \angle SNM = \alpha$ болно. Энд-
ээс S нь ANM гурвалжны биссект-
рийн огтлолцлын цэг болно, Энд-
ээс ω_1 нь MN -ыг шүргэнэ.



ОУ-6. $f(0) = a$ гэвэл $a \neq 0$. $f(x-a) = f(a) + x \cdot a + f(x) - 1 \rightarrow$
 $f(x-a) - f(x) = f(a) + x \cdot a - 1$ (*)

$\{f(a) + x \cdot a - 1 \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ байна. Анхны нөхцөлд $x \rightarrow f(y)$
орлуулга хийвэл

$$a = 2f(f(y)) + f^2(y) - 1 \quad (**)$$

$$f(f(y)) = \frac{1+a}{2} - \frac{1}{2}f^2(y). \quad f(f(x-a) - f(x)) = f(f(x)) + (f(x-a) - f(x)) \cdot f(x) + f(f(x-a) - f(x)) - 1.$$

$$(**) \text{ ашиглавал } f(f(x-a) - f(x)) = a - \frac{1}{2}(f(x-a) - f(x))^2.$$

$$(*) \text{ ашиглавал } f(y) = a - \frac{1}{2}y^2 \Rightarrow f(f(y)) = a - \frac{1}{2} \cdot f^2(y) \stackrel{(**)}{=} \frac{1+a}{2} - \frac{1}{2}f^2(y) \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(y) = 1 - \frac{1}{2}y^2.$$

МОНГОЛЫН ОЮУТНЫ МАТЕМАТИКИЙН VIII ОЛИМПИАД

Г.Баярмагнай

а) эчнээ давааны бодлогууд

1. $A \in F_n$, $A^2 = 0$ бол $\text{tr } A = 0$ гэж батал.
2. $X \in \mathbb{C}_n$ бол $\exists Y \in \mathbb{C}_n$, $XYX = X$, $YXY = Y$ ба XY, YX -үүд эрмитийн матрицууд гэж батал ($\overline{A}^t = A$ бол A -г эрмитийн матриц гэдэг).
3. $|G| = 48$ бол G энгийн бүлэг биш гэж батал.
4. G абелийн бүлэг ба $m \mid |G| = n$ бол $\exists H \leq G$, $|H| = m$ гэж батал (төгсгөлөг абелийн бүлгийн тухай Үндсэн Теорем хэрэглэхгүй шууд баталгаа хий).
5. а) $x, y, z \in \mathbb{C}$ ба $|x| = |y| = |z| = 1$ бол $3 \leq |-x + y + z| + |x - y + z| + |x + y - z| \leq 6$ гэж батал.
б) а)-г өргөтгөж томъёолон батал.
6. а) $\forall x \in A$, $x^2 = x$ бол $(A, +, \cdot)$ -г булийн цагираг гэдэг. $|A| < \infty$ ба A олонлог дээр булийн цагираг тодорхойлж болно $\Leftrightarrow |A| = 2^k$.
б) N дээр булийн цагиргийг тодорхойл.
7. $\mathbb{C} \supseteq K$ дэд талбар ба
а) K яг 2 эндоморфизмтэй (тэр нь f ба g гэе).
б) $f(x) = g(x) \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$
бол квадратаас чөлөөтэй ямар нэг $d \in \mathbb{Z}$ тооны хувьд $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ гэж батал.
8. $p \in P$ байг. $U_n = \{\varepsilon \in \mathbb{C} \mid \varepsilon^n = 1\}$ гэе.
а) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{p^n} \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$ гэж харуул.
б) $|H| = \infty$ ба $H \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$ байг. $\forall M \leq H (M \neq H \Rightarrow |M| < \infty) \Leftrightarrow \exists p, H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{p^n}$

Ц.Дашдорж (1-8-р бодлогууд)

9. Дундын багшийн III АЗ-ыг үз.

10. Дундын багшийн III В1-ийг үз.

1. $|A|$ A матрицийн тодорхойлогч $f(t) = |A - tE|$, $g(t) = |A + tE|$, $|A - tE|$ -ыг эхний баганаар нь задалж индукцлэх замаар $\text{tr} A$ -г $f(t)$ -ын t^{n-1} -ийн өмнөх коэффициент байхыг хялбархан харж болно. $f(t) \cdot g(t) = |A^2 - t^2 E| = t^{2n} \Rightarrow f(t_0) = 0 \Leftrightarrow t_0 = 0 \Rightarrow$ Виетийн теомъёогоор $\text{tr} A = 0$ болно.

3. $G/H = \{gH | g \in G\}$, $G = g_1 H \cup \dots \cup g_n H$ өөрөөр хэлбэл $[G : H] = n$ байг. $a \in G$, $\pi_a : gH \mapsto agH$ буулгалт нь G/H олонлог дээр орлуулга байх ба $\pi_{ab} = \pi_a \circ \pi_b$ болох нь төвөггүй шалгагдана. $\Rightarrow \varphi : a \mapsto \pi_a$ гэсэн G -г S_n -д багтаасан бүлгийн гомоморфизмыг өгнө.

$\Rightarrow \ker \varphi = \{a \in G | \pi_a \text{ нь адилтгал} \} \Rightarrow a \in g_i H g_i^{-1}, i = \overline{1, n}$.

$\Rightarrow \left| \frac{G}{\ker \varphi} \right| = |S_n| = n!$ болох нь гарна.

$|G| = 48$ бол Силовын теоремоор $\exists H \leq G$, $|H| = 16 \Rightarrow$

$$[G : H] = 3 \text{ байх тул } \left| \frac{G}{\ker \varphi} \right| = \frac{48}{|\ker \varphi|} \Big| 3! \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |\ker \varphi| > 1 \\ \ker \varphi \triangleleft G \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow G$ нь энгийн бүлэг биш

4. G абелийн бүлэг $d|n = |G|$ бол $\exists H \leq G$, $|H| = d$: G бүлгийн эрэмбэ n -ээр индукцлэе. $e \neq a \in G$ авъя. $d \nmid |a|$ бол шууд батлагдана. Иймд $\forall e \neq a$ -ийн хувьд $d \nmid |a|$ гэж үзье. $(d, |a|) = k$ бол a^k -г авах замаар $(d, |a|) = 1$ гэж үзэж чадна. $\rightarrow d \nmid |G / \langle a \rangle| \xrightarrow{\text{индукц}} \exists H / \langle a \rangle \leq G / \langle a \rangle, |H / \langle a \rangle| = d \Rightarrow |H| = d\ell, \ell = |a|$. Иймд $d\ell < |G|$ бол индукцээр H -д тийм дэд бүлэг олдоно. $\ell = p \in \mathbb{P}$ гэж үзэж чадна (a -ын зэргийг авах замаар). Ө.х. $|G| = dp$ гэж үзье. $|G^p| = d$ байх нь илэрхий. $x \in G$, $(|x|, p) = 1$ бол $x \in \langle x^p \rangle \subseteq G^p$. $[G : G^p][G^p : e] = dp$ ба $\left| \frac{G}{G^p} \right| = p$ байх нь илэрхий. Иймд G^p бидний олох дэд бүлэг мөн.

$$5. \left. \begin{aligned} |x-y+z|+|x+y-z| &\geq |2x|=2 \\ |y-z+x|+|y+z-x| &\geq |2y|=2 \\ |z-x+y|+|z+x-y| &\geq |2z|=2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{зүүн тал нь}$$

батлагдана. $2(|x|^2+|y|^2)=|x-y|^2+|x+y|^2$ гэсэн параллелограммын тэнцэтгэл бишийг ашиглая.

$$a=|z-x+y|, b=|z+x-y|, c=|y-z+x|.$$

$$a+b+c \leq 3\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} = S \quad \begin{aligned} a^2+b^2 &= 2(|x|^2+|y-z|^2) \\ c^2+|x+y+z|^2 &= 2(|x|^2+|y+z|^2) \end{aligned}$$

параллелограммын чанараас $\Rightarrow \frac{S^2}{3} \leq a^2+b^2+c^2+|x+y+z|^2 = 2+2+2(|y-z|^2+|y+z|^2) = 4+2 \cdot 2 \cdot (|y|^2+|z|^2) = 12 \Rightarrow S \leq 6$ болж батлагдана. $x+y+z=0$ үед тэнцэлдээ хүрнэ.

6. а) $\Rightarrow: \forall x \in A$ -ийн хувьд $2x = x+x = 0$ байна. $|A| = n$ бол $(A, +, \cdot)$ булийн цагиргийн $(A, +)$ бүлгийн элементийн тоо нь $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$ хэлбэртэй гэдгийг индукц ашиглан баталъя. Хэрэв $n = 1$ бол $n = 2^0$. $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ байг. $|H| = \max\{|G| \mid A \neq G \leq (A, +)\}$ байх $H \leq (A, +)$ байг. $h \in A \setminus H$ байг. Тэгвэл $H_1 = H \cup (H + a) \leq (A, +)$ ба $H \subsetneq H_1$, $H_1 \neq H$ тул $H_1 = A$. Иймд $|A| = |H_1| = 2|H|$ тул индукц ёсоор $|H| = 2^k$ буюу $|A| = 2^{k+1}$ болно.

$\Leftarrow: n = 2^k$ бол $A = \mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2 = \{(x_1, \dots, x_k) \mid x_i \in \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}\}$ декартын үржвэр дээр цагиргийн шулуун үржвэрийг тодорхойлно.

б) $B = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid |X| < \infty\}$, $C = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid |\mathbb{N} \setminus X| < \infty\}$ ба $A = B \cup C$ байг. $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ гэвэл $(A, +, \cdot) = (A, \Delta, \cap)$ нь булийн цагираг гэдгийг хялбархан шалгаж болно ($X, Y, Z \in A$ -ийн хувьд $(X+Y)Z = (X \Delta Y) \cap Z = (X \cap Z) \Delta (Y \cap Z)$ ба $(X \Delta Y) \Delta Z = X \Delta (Y \Delta Z)$ шалгана). $p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots$ нь анхны тоонууд ба $f: A \rightarrow \mathbb{N}$, $f(\emptyset) = 0$, $f(\mathbb{N}) = 1$, $\emptyset \neq X \in B$ бол $f(X) = 2 \prod_{a \in X} p_a$, хэрэв $N \neq Y \in C$ бол

$f(Y) = 2 \prod_{a \in \mathbb{N}} p_a - 1$ байг. f инъектив ба f функцийн утгын

мужийг $\{n_0, n_1, \dots, n_k, \dots\}$ гэвэл $f(X) = n_k$ байхад $g(X) = k$ гэж тодорхойлогдох $g: A \rightarrow \mathbb{N}$ функц нь биектив (харилцан

нэгэн утгатай) функц юм. Тэгвэл олбол зохих булийн пагиргийн үйлдлүүд нь $m \oplus n = g(g^{-1}(m)\Delta g^{-1}(n))$, $m \times n = g(g^{-1}(m) \cap g^{-1}(n))$ гэж тодорхойлогдоно.

7. $\text{End}_{\mathbb{Q}} K \ni f \neq 1_K$ авч үзье. а) ёсоор $f^2 = 1_K \exists \alpha \in K \setminus \mathbb{Q}$, $f(\alpha) \neq \alpha \Rightarrow f(\alpha) = \beta$ гэе. Тэгвэл $\alpha = f(f(\alpha)) = f(\beta)$ байна. $\Rightarrow \left. \begin{aligned} f(\alpha + \beta) &= \alpha + \beta \\ f(\alpha - \beta) &= \alpha - \beta \end{aligned} \right\}$ болно. $\Rightarrow$ б) ёсоор $\alpha + \beta, \alpha\beta \in \mathbb{Q}$ болно.

$\alpha + \beta = -p, \alpha \cdot \beta = q$ гэвэл α, β нь $x^2 + px + q = 0$ тэгшитгэлийн шийд болно. $\Rightarrow [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2$ байна. Гэтэл $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}) \subseteq \text{End}_{\mathbb{Q}} K$, $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq K$, $|\text{End}_{\mathbb{Q}} K| = 2 \Rightarrow K = \mathbb{Q}(\alpha)$ байна. $\alpha = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \Rightarrow \sqrt{p^2 - 4q} \notin \mathbb{Q}$ (α -ын сонголтоор) $\Rightarrow p^2 - 4q \pmod{\mathbb{Q}}$ -ээр бүхэл тоо гэж үзэж болох тул $p^2 - 4q > 0$ үед $\alpha = \sqrt{d}$, d квадратаас чөлөөт.

$p^2 - 4q < 0$ үед $\alpha = i\sqrt{d}$ болно. $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ бол $[K : \mathbb{Q}] \neq 2$ болно. $\Rightarrow \alpha = i \Rightarrow K = \mathbb{Q}[i]$ эсвэл $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, d квадратаас чөлөөт байна.

8. а) $U_p \subset U_{p^2} \subset \dots$ тул дэд бүлэг болно.

б) $\Leftarrow: H \neq M$ тул $\exists x \in H, x \notin M$. $|x|_{p_k} = 1$ гэе. $\Rightarrow \forall y \in M$ хувьд $|y|_{p^s} = 1, s < k$ байна. Хэрэв $s \geq k$ бол $U_{p^s} \subseteq M$ байх учир $x \in M$ болж зөрчил үүснэ. $\Rightarrow |H| < \infty$.

$\Rightarrow: S$ нь H -ын дэд бүлгүүдийн эрэмбийн олонлог. Мэдээжээр $|S| = \infty$ байна. S -д ∞ олон анхны тоо байг. $p_1 \dots p_n \dots \exists x_i \in H, |x_i|_{p_i} = 1$ ($H \leq \mathbb{C}^*$ учир) $\Rightarrow A_k = \langle X_2 \dots X_k \rangle$ бүлгийг авч

үзье. $|A_k| = \prod_{i=2}^k p_i, G = \bigcup_{k=2}^{\infty} A_k \leq H$ болох ба $|G| = \infty$ болно.

G -д p_1 эрэмбийн элемент байхгүй тул $G \neq H \Rightarrow$ зөрчил. $\Rightarrow S$ -д төгсгөлөг анхны тоо байна. $\Rightarrow \exists p, \forall n \in \mathbb{N}$ хувьд $p^n \in S$ ($|S| = \infty$ учраас). $\Rightarrow V_p \subseteq H$ болно. $|V_p| = \infty$ учир $V_p = H$ байхаас өөрцгүй.

9 (Б.Баясгалан). а) Юуны өмнө аливаа бүхэл тоо бүрийг өргөтгөсөн натурал тооны бичлэгээр ганц янзаар бичиж болохыг тэмдэглэе. Тухайлбал, $1 = \dots 0 \dots 001$, $-1 = \dots 9 \dots 999$ гэх мэт. Иймд a_i бүхэл байх $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ тэгшит-

$$\begin{cases} x_0 y_0 \equiv \alpha_0(10) \\ (x_1 y_0 + x_0 y_1)10 + x_0 y_0 \equiv \overline{\alpha_1 \alpha_0}(100) \\ \dots\dots\dots \\ (x_n y_0 + x_{n-1} y_1 + \dots + x_1 y_{n-1} + x_0 y_n)10^n + \dots + x_0 y_0 = \\ \qquad \qquad \qquad = \overline{\alpha_n \dots \alpha_1 \alpha_0}(10^n) \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Хэрэв уг системийг x_0, y_0 утгаас нь эхлэн хөөж бодвол x тооны утгууд тоологдом байна. Өөрөөр хэлбэл, натурал тоогоор дугаарлагдана. Иймд авч үзэж буй $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ тэгшитгэл тоологдомоос олонгүй язгууртай. Нөгөө талаас, $a_k \in \mathbb{Z}$ ($1 \leq k \leq n$), $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ хэлбэрийн тэгшитгэлүүдийг бүгдийг нь натурал тоогоор дугаарлаж болно. Иймд алгебрийн өргөтгөсөн натурал тоо тоологдом байна. Тэгвэл алгебрийн биш өргөтгөсөн натурал тоо төгсгөлгүй олон байх болно.

1. $n = 3$ байг. $x^3 - x = 0$ тэгшитгэлийг бодъё. Уг язгуурыг $x = \overline{\dots x_n \dots x_2 x_1 x_0}$, x_i цифр хэлбэрээр хайя. Хэрэв $x_0 = 0$ бол $x_k = 0$. Иймд $x_0 \neq 0$ гээ. Иймд $x_0(x_0^2 - 1) \equiv 0(10)$. Хэрэв x_0 тэгш бол $x_0^2 - 1 \equiv 0(5)$, x_0 сондгой бол $x_0 = 5$ эсвэл $x_0 = 1$ эсвэл $x_0 \equiv 9$ байна. Ийнхүү $x_0 \in \{4, 6, 5, 1, 9\}$ байна. Энэ мэтчилэн хөөж гаргавал x нь 6 боломжтой.

3. Ер нь $x^n - x = 0$ тэгшитгэл нь $a^n - a \equiv 0(10)$ тэгшитгэл $0 \leq a \leq 9$ байх хичнээн шийдтэйгээр бүрэн тодорхойлогдоно. Үүнийг өмнөх цифруудээр нь дараагийн цифрийг олох болгонд нэг л боломжтойгоор тайлбарлаж болно.

Ийнхүү $n = 4q + r$, $0 \leq r \leq 3$ бол шийдийн

$r = 0$, $q \geq 1$ үед 4

$r = 1$ үед 10

$r = 2$ үед 4

$r = 3$ үед 6 байна.

10.

$$\left. \begin{array}{l} x_1(x_1 + \dots + x_{10}) = 1 \quad I \\ (x_1 + x_2)(x_2 + \dots + x_{10}) = 1 \quad II \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ (x_1 + \dots + x_{10})x_{10} = 1 \quad X \end{array} \right\} \begin{array}{l} I, X\text{-аас } x_1 = x_{10} \\ II, IX\text{-өөс } x_2 = x_9 \text{ г.м.-ээр} \\ x_3 = x_8, x_4 = x_7, x_5 = x_6 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1(x_1 + \dots + x_{10}) = 1 \\ (x_1 + x_2)(x_2 + \dots + x_{10}) = 1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)(x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}) = 1 \end{array} \right\}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a \text{ гэе.} \quad x_1 = \frac{1}{2a}, \quad x_5 = \frac{1}{a} - a,$$

$$x_2 = \frac{2a}{4a^2 - 1} - \frac{1}{2a}, \quad x_3 = \frac{4a^2 - 1}{4a(2a^2 - 1)} - \frac{2a}{4a^2 - 1}, \quad x_4 = \frac{a}{2a^2 - 1} - \frac{1}{a}$$

$$a = \frac{1}{2a} + \frac{1}{a} - a + \frac{2a}{4a^2 - 1} - \frac{1}{2a} + \frac{4a^2 - 1}{4a(2a^2 - 1)} - \frac{2a}{4a^2 - 1} + \frac{a}{2a^2 - 1} - \frac{1}{a}$$

$$\frac{4a^2 - 1 + 4a^2}{4a(2a^2 - 1)} = 2a, \quad 16a^4 - 16a^2 + 1 = 0, \quad a_{1:2}^2 = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}, \quad a =$$

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \quad x_1 = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}, \quad x_3 = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{6}}, \quad x_4 = \frac{(2 - \sqrt{3})\sqrt{2}}{\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})},$$

$$x_5 = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}.$$

б) Багуудын уралдаан

Монголын Оюутны Математикийн 8-р Олимпиадын багийн тэмцээн 1999 оны 4-р сарын 25-нд МУИС-ийн дугуй зааланд боллоо. МУИС-ийн Математик III ангийн Б.Баяржаргал ахлагчтай баг 22 оноогоор I байр, Математик IV ангийн Б.Батбаясгалан ахлагчтай баг 16 оноогоор II байр, Математик I ангийн М.Батбилэг ахлагчтай баг 15 оноогоор III байр эзлэв.

1. $(m, n) = 1$ бол $m\mathbb{Z}_{mn} \cong (\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ байх изоморфизмыг байгуул (6 оноо).

2. $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцүүд нь $\forall a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ -ийн хувьд $\sum_1^3 a_i f_i$ нь монотон функц байх чанартай бол f_1, f_2, f_3 -үүд нь шугаман хамааралтай ($\exists c_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, 3}, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_1^3 c_i f_i(x) = 0$) гэдгийг батал (8 оноо).
3. $F_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ чөлөөт бүлэг, $w \in F_n$ байг. $w \in F'_n = \langle [t, s] \mid t, s \in F_n \rangle \Leftrightarrow \forall i, \deg_{x_i} w = 0$ (8 оноо).
4. $|X| = n, |A_i| = 3, i = \overline{1, m}, A_i \subseteq X, i \neq j$ үед $|A_i \cap A_j| \leq 1$ бол $\exists A \subseteq X, |A| \geq \left\lceil \sqrt{2n} \right\rceil$ ба $\forall i, A_i \not\subseteq A$ гэж батал (10 оноо).

Оноо тэнцсэн багуудыг байр эзлүүлэхийн тулд блиц бодлого 1' – 4'-ийг дэвшүүлэв.

- 1'. R цагираг, $I \triangleleft R$ байг. $ab \in I \Rightarrow a \in I \vee b \in I$ гэж гардаг бол I -г анхдагч идеал гэдэг. $\emptyset \neq S = \{I \triangleleft R / I \text{ анхдагч идеал} \}$ гэвэл S нь минимал элементтэй гэж батал (3 оноо).
- 2'. $H, K \triangleleft R$ ба $H \cong K$ бол $R/H \cong R/K$ байх уу? (1 оноо).
- 3'. H, K нь G -ийн төгсгөлөг дэд бүлгүүд бол $HK = \{hk / h \in H, k \in K\}$ олонлогийн чадлыг ол (1 оноо).
- 4'. $(\mathbb{R}^*, \cdot) \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$ бол $\mathbb{C}^* / \mathbb{R}^*$ ямар бүлэгтэй изоморф вэ? (1 оноо).

Бодлогуудыг дэвшүүлсэн Ц.Дашдорж

	I	I'	II	II'	III	III'	IV	IV'	нийт оноо	байр
МУИС.Мат I	6				8	1			15	III
МУИС.Мат II										
МУИС.Мат III	6		8		8				22	I
МУИС.Мат IV	6			1	8			1	16	II
МУИС.Прог I										

1. $tu + nv = 1$, $u, v \in \mathbb{Z}$ байг. $k \in \mathbb{Z}_n \xrightarrow{\varphi} kti \in m\mathbb{Z}_{mn} = A \triangleleft \mathbb{Z}_{mn}$ гэвэл $k, \ell \in \mathbb{Z}_n$ -ийн хувьд $\varphi(k + \ell) = \varphi(k) + \varphi(\ell)$, $\varphi(k\ell) = \varphi(k)\varphi(\ell)$ байх нь хялбархан шалгагдана.

φ биекц: $k \not\equiv \ell(n)$ бол $\varphi(k) \neq \varphi(\ell)(tn)$ гэж харуулъя. $\varphi(k) = kti = \varphi(\ell) = \ell ti(tn)$ гэвэл $(k - \ell)u \equiv 0(n)$, $(u, n) = 1$ тул $k \equiv \ell(n)$ болж зөрчилд хүрнэ. Иймд φ инъекц болов. $m\mathbb{Z}_{mn} = \{m, 2m, \dots, nm = 0\}$ буюу $|m\mathbb{Z}_{mn}| = n$ тул φ сюръекц.

1'. $(S, \subseteq)$ -ийн буурах дараалал бүхэн S -дээ доод хилтэй гэж харуулъя. $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$, $I_n \in S$ бол $I = \bigcap I_n \in S$ ба $\forall n, I_n \supseteq I$.

2. $x \in \mathbb{R}$ бүрийн хувьд $v(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x)) \in \mathbb{R}^3$ -г тодорхойлъя. $v(x)$ векторууд (багана матрицууд) P хавтгай дээр оршино гэе. Хэрэв $c = (c_1, c_2, c_3)$ нь P хавтгайн нормаль вектор бол c нь $v(x)$ бүрт ортогональ буюу $c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0$ болно. Иймд $v(x)$, $x \in \mathbb{R}$ -үүд нэг хавтгай дээр оршдоггүй буюу $\exists x_1 < x_2 < x_3$, $v(x_1)$, $v(x_2)$, $v(x_3)$ -үүд шугаман хамааралгүй байна гэе. Тэгвэл

$$A = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & f_3(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & f_3(x_2) \\ f_1(x_3) & f_2(x_3) & f_3(x_3) \end{pmatrix}$$

үл бөхөх матриц байх тул $\mathbb{R}^3$ -д үл бөхөх шугаман хувиргалт тодорхойлно (тодорхой нэг суурь авсан үед). $\exists u = (a_1, a_2, a_3)^t \in \mathbb{R}^3$, $Au = (0, 1, 0)^t \in \mathbb{R}^3$. $g(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x)$ гэвэл $g(x_1) = 0$, $g(x_2) = 1$, $g(x_3) = 0$ болж $g(x)$ -ийн монотон гэдэгт зөрчинө.

3. $w = x_{i_1}^{\alpha_1} \dots x_{i_k}^{\alpha_k}$, $\alpha_i \neq 0$ ба $\forall j$, $i_j \neq i_{j+1}$ бол $h(w) = k$ -г w үгийн өндөр гэе.

$\Leftarrow$: w -ийн өндрөөр индукцлэж баталъя.

$w = x_k^\alpha u x_k^\beta v = x_k^\alpha u x_k^{-\alpha} u^{-1} u x_k^{\alpha+\beta} v = [x_k^\alpha, u] u x_k^{\alpha+\beta} v = [x_k^\alpha, u] w_1$ гэвэл $h(w_1) < h(w)$ ба $\forall i$, $\deg_{x_i} w_1 = 0$ байх тул индукцээр $w_1 \in F'_n$. Иймд $w \in F'_n$ болов.

$\Rightarrow$: илэрхий.

4. $Y = \{X \subseteq A \mid \forall i, A_i \not\subseteq X\}$ ба $(Y_2, \subseteq)$ -ийн максимум элемент нь A гэе. $k = |A|$ байг. A -ийн максимум чанараархи $x \in X \setminus A = \bar{A}$ бүрийн хувьд $\exists i$, $1 \leq i \leq m$, $A_{i(x)} \subseteq A \cup \{x\}$. Эндээс $|A \cap A_i| = 2$ болно. $A \cap A_{i(x)} \Rightarrow B_x$ гэе. $x_1 \neq x_2$ бол $B_{x_1} \neq B_{x_2}$ буюу $x \in X \setminus A \rightarrow B_x \subseteq A$ нь инъектив буулгалт ба $|B_x| = 2$. Иймд $n - k \leq C_k^2 \rightarrow k^2 + k \geq 2n \Rightarrow k \geq \lceil \sqrt{2n} \rceil$.

Монголын Математикийн Нийгэмлэгийн товч танилцуулга

Монголын Математикийн Нийгэмлэг нь 1994 оны 11 дүгээр сарын 12-нд байгуулагдсан. Нийгэмлэгийн ерөнхийлөгч нь дэд профессор Ц.Дашдорж, нарийн бичгийн дарга нар нь дэд доктор Б.Баясгалан, Р.Энхбат. 1996 онд тус нийгэмлэг нь Америкийн математикийн нийгэмлэгт гишүүнээр элссэн. АНУ, Герман, Орос, Японы математикийн нийгэмлэгүүдтэй хамтын ажиллагаатай ажилладаг. Эгнээндээ дотоодын 50, гадаадын 4 гишүүнтэй. Нийгэмлэг гишүүдийн татвар, хандивын тусламжтайгаар өөрийгөө санхүүжүүлдэг. Монголын Математикийн Нийгэмлэгийн сэтгүүлийг жил бүр англи хэл дээр гаргадаг.

Одоогоор сэтгүүлийн 3 дугаарыг гаргасан бөгөөд сэтгүүлд гадаад, дотоодын математикчидын онолын бүтээлийг хэвлэдэг.

Нийгэмлэгийн цаашдын зорилт нь санхүүгийн хувьд бэхжих, гадаад харилцаагаа өргөтгөх, авьяаслаг математикчидыг дэмжих зэрэгт оршино.

Жич: Манай нийгэмлэг одоо математикийн зарим чухал сэтгүүлийг захиалж авах, олон улсын математикийн бага хурлыг зохион байгуулах, гадаад гишүүддээ тусгай үнэмлэх олгох, өөрийн сэтгүүлийг тогтмол хэвлэдэг болох зэрэг олон ажил гүйцэтгэх шаардлагатай байгаа бөгөөд эхний хэдэн жил гишүүдээсээ сард 50-100\$-ний татвар авч байсан боловч, дээрх үйл ажиллагаануудыг явуулахад хүрэлцэхгүй байгаа билээ. Иймд тус нийгэмлэг нь санхүүгийн хувьд баталгаатай болох үүднээс гишүүд та бүгдийг нийгэмлэгтээ амьдралдаа ганц удаа тодорхой хэмжээний хандив өргөхийг урийлж байна. Энэ тухай мэдээллийг олимпиадын цувралаар дамжуулан тогтмол мэдээлж байх болно.

Нийгэмлэгийн дотоод данс:

Валютын данс:

Голомт банк (I салбар)
2250704 Р.Энхбат

Голомт банк (I салбар)
2270409 Р.Энхбат

Монголын Математикийн Нийгэмлэгт хандив өгсөн хүмүүсийн жагсаалт

	Нэрс	Албан газар	Утас	Хэдэн онд хаани ямар сургууль, мэргэжлээр төгссөн	Хандивын хэмжээ	Хэзээ өгсөн
1.	Б.Бат	"Их алт" ком-паний ерөнхий захирал	99115441	МУИС, Мат, 1987 он	250US\$	1998.04
2.	Б.Багбаасан	"Космо" ком-паний ерөнхий захирал	99115561	МУИС, Мат, 1987 он	100.000₮	1998.09
3.	Ц.Дашдорж	МУИС-ийн багш	372828	МУИС, Мат, 1969 он	50.000₮	1998.04
4.	У.Бадам	ШУА, ФТХ	368209	Эрхүү, УИС, 1969 он	4.000₮	1998.05
5.	С.Будням	ШУА, ФТХ	358949	Эрхүү, УИС, 1966 он	5.000₮	1998.05
6.	С.Тогмид	УБИС-ийн захирал	322705	МУИС, Мат, 1969 он	10.000₮	1998.06
7.	Д.Бямбажав	Математик хүрээлэнгийн захирал	451136	МУИС, Мат, 1970 он	5.000₮	1998.05
8.	Ш.Эрдэнэ	"Ээргэд" бро-керийн пүү-сийн захирал	99112152	МУИС, Мат, 1985 он	200US\$	1998.10
9.	Р.Ринчинбазар	ЗГО	326454	МУИС, Мат, 1980 он	10.000₮	1999.03
10.	Н.Тунгалаг	МУИС-ийн ня-бо бүртгэл		МУИС, Ня-бо,	5.000₮	1998.05
11.	Ц.Болдсүх	МУИС-ийн ш.хаориудсан орлогч захирал	322508	ХБНГУ, 1982 он	4.000₮	1998.05
12.	Н.Намсрай	УБИС-ийн багш	323626	ЛГУ, 1966 он	5.000₮	1998.05
13.	Р.Энхбат	МУИС-ийн багш	351007	ИГУ, 1980 он	5.000₮	1998.05

14.	Т.Жанлав	МУИС-ийн багш	325631	МУИС, Мат, 1970 он	5.000₮	1998.05
15.	Х.Гэндэнжамц	МУИС-ийн багш	325022	МУИС, Мат, 1955 он	3.000₮	1998.05
16.	А.Дорж	ФТХ	452313	Эрхүү, УИС, 1966 он	5.000₮	1998.05
17.	Ч.Бат-Эрдэнэ	НИК, Мэд Тех Газрын захирал	99117954	МУИС, Мат, 1991 он	100.000₮	1999.09
18.	А.Мекей	МУИС Док.-т албаны дарга	321983	МУИС, Мат, 1963 он	10.000₮	2000.04
19.	Ц.Ахамсүрэн	МУИС, МА-МО тэнхимийн эрхлэгч	321102	Мос.ИС, 1966 он	5.000₮	2000.04
20.	Б.Баясгалан	МУИС, Мат. Хур. эрд. н.б.д.	451136	Урал ИС, 1978 он	50.000₮	2000.04
21.	Ш.Мөнхцэцэг	ХI сур-ийн захирал	99187215	МУИС, Мат, 1986 он	10.000₮	2000.03
22.	УБ, ХI сург.	Захирал Ш.Мөнхцэцэг	324649	-	100.000₮	2000.03
23.	А.Хадхүү	МУИС, багш	684042	МУИС, Мат, 1979 он	5.000₮	2000.04
24.	А.Өвгөн	МУИС, Хэр. мат. тэнхимийн эрхлэгч	311244	МУИС, Мат, 1959 он	10.000₮	2000.03
25.	В.Адъяасүрэн	МУИС, багш	321102	МУИС, Мат, 1983 он	10.000₮	2000.04

50.000-аас доошгүй төгрөг хандивласан хүмүүс ба байгууллагад ММО-ын болоод ММН-ийн жил бүрийн цувралуудыг үнэгүйгээр авч байх болно.