

МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАДЫН ЦУВРАЛ

№25

**Л.ШАГДАРЫН НЭРЭМЖИТ
МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН
XXXVI ОЛИМПИАД**

УЛААНБААТАР ХОТ, 2000 ОН

ӨМНӨХ VГ

Улсын болон Олон улсын математикийн олимпиадад бэлтгэгчид, математикийн төрөлжсөн сургалттай ангийн сурагч, оюутан, багш нар, математик сонирхогч өргөн олонд зориулсан цувралын ээлжит дугаар уншигч Таны гар дээр очиж байна. Тус гарын авлагыг бэлтгэхэд ММО Зохион Байгуулах Хорооны гишүүд, МУИС-ийн математикийн ангийн оюутнууд идэвхтэй оролцлоо.

Уг номын талаархи аливаа санал хүсэлтээ МУИС-ийн Алгебрийн тэнхимд ирүүлнэ үү.

Монголын Математикийн XXXVI олимпиад
Редактор Цэрэндоржийн Дашдорж
Хэвлэлийн эхийг бэлтгэсэн Цэрэндоржийн Навчаа
2000 оны 12-р сард 2000 хувь хэвлэв.

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН XXXVI ОЛИМПИАДЫН ДҮНГИЙН ТУХАЙ ИЛТГЭЛ

Ц.Дашдорж

Хүндэт математикчид аа!

Сэлэнгэ аймгийн засаг дарга ноён Л.Алтангэрэл ээ!

Эрдэм ухаанд гүн шүтлэгтэй Сэлэнгэчүүд ээ!

Сэлэнгэ аймгийн уугуул, Монгол улсын ардын багш, ММБА-ийн академич, профессор Л.Шагдарын нэрэмжит Монголын Математикийн XXXVI Олимпиад 2000 оны 05 сарын 01-05-ны өдрүүдэд Сэлэнгэ аймгийн Сүхбаатар хотод амжилттай явагдаж дүнгээ гаргаж байна.

Энэ удаагийн олимпиадад 21 аймаг, Улаанбаатар хотын 2 багийн бага дундын 85 багш, 206 сурагчид оролцож, нийт 291 хүн оюун ухаанаа сорин уралдлаа. Энэхүү олимпиадыг зохион байгуулахад санаачилга хүч чармалт гаргаж бүх нөхцөл бололцоогоор хангаж өгсөн Сэлэнгэ аймгийн Засаг дарга Л.Алтангэрэл, Нийгмийн бодлогын хэлтсийн дарга М.Оюунтуяа, Олимпиадыг зохион байгуулах Сэлэнгэ аймгийн салбар комиссын гишүүд, Олимпиадыг зохион байгуулахад нөөц бололцоогоо дайчлан ажилласан Д.Энхжаргал захиралтай 10 жилийн 1-р сургууль, Чойжил захиралтай Сүхбаатарын 2-р сургууль, Дондог захиралтай 10 жилийн 3-р сургууль, Цэдэв захиралтай 10 жилийн 4-р сургууль, Батсүх, Баасанчулуун захиралтай 5,6-р 8 жилийн сургууль, Сарантунгалаг, Цэрмаа, Амарсанаа, Баяржаргал, Хишигсүрэн эрхлэгчтэй Сүхбаатар сумын 1, 36, 3, 4, 7-р цэцэрлэг, Д.Загдгочоо захиралтай Боловсрол Соёлын төвийн хамт олон болон Сэлэнгэ аймгийн бүх хөдөлмөрчдөд Монголын нийт математикчдын нэрийн өмнөөс талархал илэрхийлье. Мөн олимпиадад өөрсдийн хувь хандивыг оруулсан Холбооны газар, НААҮГ, ЭХНҮ зэрэг аж ахуйн нэгж түүний удирдлагуудад талархал илэрхийлье.

Олимпиадад 8-р ангийн 98 сурагч оролцсоноос

– 20 оноогоор Улаанбаатар хотын 1-р дунд сургуулийн сурагч П.Оргил тэргүүн байр эзэлж алтан медаль,
– 9 оноогоор Олонлог багийн сурагч А.Тэмүүлэн, 8 оноогоор Орхон аймгийн Э.Түвшинтөгс нар мөнгөн медаль,
– 6 оноогоор УБ 1-р сургуулийн Бэлгүтэй, 6 оноогоор Увс аймгийн З.Энхмөнх, 5.5 оноогоор 1-р сургуулийн П.Эрдэнэбилэг нар хүрэл медаль;

9-р ангийн 53 сурагч оролцсоноос

– 16 оноогоор УБ 1-р сургуулийн Т.Баасанжав тэргүүн байр эзэлж алтан медаль,

– 14 оноогоор УБ 1-р сургуулийн Э.Уянга, Б.Эрдэнэтуяа нар мөнгөн медаль,

– 11 оноогоор Олонлог багийн Ө.Наранбилэг, 10.5 оноогоор УБ 32-р сургуулийн Ням-Эрдэнэ, 10 оноогоор Увс аймгийн Ш.Буянжаргал нар хүрэл медаль;

10-р ангийн 55 сурагч оролцсоноос

– 18 оноогоор УБ 11-р сургуулийн Б.Амарсанаа тэргүүлж алтан медаль,

– 14 оноогоор Хэнтий аймгийн Т.Даваажав, 13 оноогоор Увс аймгийн Ж.Хосбаяр нар мөнгөн медаль,

– 12 оноогоор Баян-Өлгий аймгийн М.Жанарбек, 10.5 оноогоор УБ 11-р сургуулийн Э.Цэрэннадмид, 10 оноогоор УБ 1-р сургуулийн Х.Зоригт нар хүрэл медаль;

Бага ангийн 35 багш оролцсоноос

– 29 оноогоор УБ Сант хувийн сургуулийн Б.Батчимэг тэргүүлж алтан медаль,

– 22 оноогоор Дундговь аймгийн М.Отгонжаргал удаалж мөнгөн медаль,

– 21 оноогоор Увс аймгийн Ж.Энхцэцэг хүрэл медаль;

Дунд ангийн математикийн 50 багш оролцсоноос

– 18 оноогоор Дархан хотын багш Н.Даавий-Од тэргүүлж алтан медаль,

– 13.5 оноогоор Ойнбулаг дунд сургуулийн багш Д.Самданпэрэнлэй удаалж мөнгөн медаль,

– 11.5 оноогоор УБ 1-р сургуулийн багш Д.Бат-Орших, Сэлэнгэ аймгийн багш Ч.Болд нар хүрэл медаль

хүртэж, Монголын Математикийн XXXVI Олимпиадын медальтнуудаар тодорлоо. Улсын математикийн XXXVI олимпиадад амжилттай оролцсон дээрх нэр бүхий багш, сурагчид, сурагчдаа амжилттай сайн бэлтгэсэн багш нар болон багаа амжилттай сайн зохион байгуулж оролцуулсан багийн ахлагч нарт олимпиадыг зохион байгуулах хорооны нэрийн өмнөөс чин сэтгэлийн талархал илэрхийлье.

Авъяаслаг математикч агсан П.Энхболдын нэрэмжит уран бодолтын тусгай шагналыг математикийн гоо сайхныг харуулж онцгой уран бодолт хийсэн УБ хотын 11-р сургуулийн 8-р ангийн сурагч А.Тэмүүлэн, Дархан хотын багш Н.Даавий-Одод олголоо. Мөн энэхүү XXXVI олимпиадын үнэмлэхүй аваргын шагналыг нийт олимпиадад оролцогч 291 хүнээс 29 оноогоор тэргүүлсэн УБ хотын Сант бага сургуулийн багш

Б.Батчимэгт олгож байна.

Ийнхүү 23 баг хүч оюунаа сорьсноос

- Б.Цолмонхүү ахлагчтай Увс баг 11.6 онооны дундаж үзүүлэлтээр тэргүүн байр,

- Ч.Болд ахлагчтай Сэлэнгэ баг 8.2 онооны дундаж үзүүлэлтээр II байр,

- Ч.Даваадорж ахлагчтай УБ баг 8.05 онооны дундаж үзүүлэлтээр III байр тус тус эзэллээ.

Монголын Математикийн XXXVI олимпиад ийнхүү амжилттай явагдаж өндөрлөлөө. Манай энэ удаагийн олимпиадыг явуулахад бүх талын бололцоо нөхцлөөр хангаж өгсөн Сэлэнгэчүүдэд Монголын нийт математикчдын нэрийн өмнөөс гүн талархал илэрхийлэхийг хүсч байна.

Монголын математикчид бидэнд Хувьсгалын өлгий нутгийг үзүүлэх завшааныг олгож өгсөн Сэлэнгэ аймгийн Засаг дарга Л.Алтангэрэл, ИХТ-ийн дарга Б.Лувсандагва, та бүхэнд Монголын нийт математикчдын нэрийн өмнөөс математикч ёсны халуун баяр хүргэж та бүхэнд болон танай аймгийн бүтээлч ард түмэнд сайн сайхны дээдийг хүсэн ерөөе.

Энэ жилийн 7-р сард Солонгос улсын Таежон хотноо болох ОУМО-ын бэлтгэлд

- УБ 1-р сургуулийн 9-р ангийн сурагч Т.Баасанжав,

- УБ 11-р сургуулийн сурагч Б.Амарсанаа,

- Хэнтийн Даваажав,

- Увсын Ж.Хосбаяр,

- Баян-Өлгийн М.Жанарбек,

- УБ 11-р сургуулийн Э.Цэрэннадмид,

- УБ 1-р сургуулийн Х.Зоригт

нарыг үлдээх нь зүйтэй гэж Монголын Математикийн Олимпиадыг Зохион Байгуулах Хорооноос шийдвэрлэлээ. Олон улсын математикийн 41-р олимпиадын бэлтгэлд багтаж шалгарсан та бүхэндээ амжилт хүсч, Монголынхоо нэрийг дэлхийн тавцанд дуурсгах хүндтэй бөгөөд хариуцлагатай үйл хэргийн төлөө идэвх чармайлт гарган сайн бэлтгэж амжилттай оролцохыг Монголынхоо нийт математикчдын өмнөөс даалгаж байна.

Эрдэм оюун дэлгэрч Монголд математикчдын оюун ухаан улам хөгжиж бадрах болтугай.

Анхаарал тавьсан та бүхэнд баярлалаа.

Монголын Математикийн XXXVI Олимпиадын багийн нэгдсэн дүн

Сэлэнгэ аймаг

№	Аймгийн нэр	VIII	IX	X	Бага	Дунд	Нийт оноо	Хүний тоо	Дундаж оноо
1	Увс	6	10	13	21	8	58	5	11.6
2	Сэлэнгэ	3	3	6.5	17	11.5	41	5	8.2
3	Улаанбаатар	52.5	68.5	78	73.5	49.5	322	40	8.05
4	Дундговь	1	7	-	22	7.5	37.5	5	7.5
5	Хөвсгөл	4	6.5	7	19.5	-	37	5	7.4
6	Олонлог	11	11	9	-	-	31	6	5.2
7	Баян-өлгий	0	4	12	5.5	3	24.5	5	4.9
8	Дархан	0	0.5	0	0.5	18	19	5	3.8
9	Хэнтий	0.5	3	14	0	0.5	18	5	3.6
10	Завхан	2	3	1	11	0.5	17.5	5	3.5
11	Орхон	8	0.5	1	6	1.5	17	5	3.4
12	Өвөрхангай	0.5	3	7	6	-	16.5	5	3.3
13	Ховд	2.5	-	-	13	-	15.5	5	3.1
14	Булган	0.5	0.5	0	4	9	14	5	2.8
15	Сүхбаатар	0	0	0	9	3.5	12.5	5	2.5
16	Өмнөговь	0.5	2	-	8	1	11.5	5	2.3
17	Төв	0.5	1	1	4	3	9.5	5	1.9
18	Дорноговь	0	3	0	2.5	0	5.5	5	1.1
19	Дорнод	0	0.5	0.5	3	0.5	4.5	5	0.9
20	Архангай	0	2	0.5	0	1	3.5	5	0.7
21	Баянхонгор	0.5	0	1	0.5	0.5	2.5	5	0.5
22	Говьсүмбэр	0	0	0	0	1	1	5	0.2
23	Говь-Алтай	0	0.5	0	0	0.5	1	5	0.2

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН XXXVI ОЛИМПИАДЫН
VII АНГИЙН III ДАВААНЫ БОДЛОГО

Л.Даваажаргал, Б.Хоролдагва

VII-A1. $n \in \mathbb{N}$ ба $5n$ тоо нь $2x^2 + 3y^2$ ($x, y \in \mathbb{N}$) хэлбэртэй бол $3n$ тоо дээрх хэлбэртэй болохыг батал.

VII-A2. Нэг ангийн сурагчдыг хос хосоор нь ширээнд хувиарлан суулгахад эгнээ тус бүрийн охидын тоо хөвгүүдийн тоотой тэнцүү бөгөөд эрэгтэй сурагч, эмэгтэй сурагчтай суусан ширээний тоо үлдэх ширээний тоотой тэнцүү байсан бол ангийн сурагчдын тоо 8-д хуваагдахыг батал.

VII-A3. Оройнууд нь параллелограммын талууд дээр орших гурвалжны талбай өгсөн параллелограммын талбайн хагасаас ихгүй болохыг батал.

VII-B1. $a_1, a_2, \dots, a_n$ эерэг тоонуудын хувьд

$$\frac{a_1}{a_2(a_1+a_2)} + \frac{a_2}{a_3(a_2+a_3)} + \dots + \frac{a_n}{a_1(a_n+a_1)} \geq \frac{1}{a_1+a_2} + \frac{1}{a_2+a_3} + \frac{1}{a_1+a_n}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

VII-B2. Хоёр сурагч 32 шагайнаас авсан шагайн тоо нь 1 эсвэл анхны тоо байхаар ээлжлэн авч тогложээ. Сүүлчийн хэсэг шагайг авсан нь хожих бол хэн нь хожих вэ?

VII-B3. O цэгт төвтэй 12 радиустай тойргийн төвийг дайрсан шулуун дээр $OA = 15$, $AB = 5$ байх A, B цэгүүд тэмдэглэв. Энэ шулууны нэг талд оршихоор A ба B цэгүүдээс татсан шүргэгчүүд нь C цэгт огтлолцдог бол ABC гурвалжны талбайг ол.

VII-A1. Бүхэл тооны квадратыг 5-д хуваахад $0, \pm 1$ үлдэгдэл гарах ба $5n = 2x^2 + 3y^2$ тул $x = 5x_1 + r$, $y = 5y_1 + r$, $0 \leq r \leq 4$ байна.
 $n = \frac{1}{5}(2x^2 + 3y^2) = 10x_1^2 + 15y_1^2 + 4x_1r + 6y_1r + r^2$ Эндээс
 $3n = 30x_1^2 + 45y_1^2 + 12x_1r + 18y_1r + 3r^2 = 3(2x_1 + 3y_1 + r)^2 + 2(3x_1 - 3y_1)^2$
болж бодлого бодогдов.

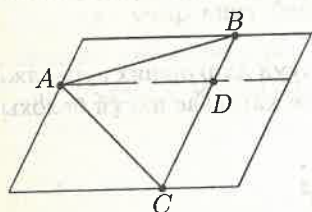
VII-A2. Ангийн сурагчдын тоог n гэвэл $\frac{n}{2}$ ширхэг ширээ байна. Эгнээ тус бүрийн охидын тоо хөвгүүдийн тоотой тэнцүү учир ангийн

сурагчдын хөвгүүдийн тоо охидын тоотой тэнцүү ба эгнээ тус бүрийн охидын тоо хөвгүүдийн тоо харгалзан тэнцүү байна.

Эрэгтэй сурагч эмэгтэй сурагчтай суусан ширээний тоо $\frac{n}{4}$, үлдэх $\frac{n}{4}$ ширхэг ширээнд $\frac{n}{4}$ тооны хөвгүүд хос хосоороо суух тул хоёр хөвгүүн суусан ширээний тоо $\frac{n}{8}$ болж бодлого бодогдов.

VII-A3. Бодлогыг дараах 2 тохиолдолд авч үзье.

а) ABC гурвалжны A ба B оройнууд параллелограммын нэг тал дээр оршдог байг. Тэгвэл гурвалжны AB талын урт параллелограммын талаас энэ талд буулгасан өндөр параллелограммын өндрөөс ихгүй. Иймд ABC гурвалжны талбай параллелограммын талбайн хагасаас ихгүй.



б) ABC гурвалжны оройнууд параллелограммын ялгаатай талууд дээр оршдог байг. Тэгвэл A оройг дайрсан параллелограммын талтай параллель шулуун татвал 2 параллелограмм үүсгэх бөгөөд а) тохиолдолд шилжиж бодлого бодогдоно.

VII-B1. Эрэг x, y тоонуудын хувьд $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ тэнцэтгэл биш биелэхийг хялбархан баталж болно. $a_1, a_2, \dots, a_n$ эерэг тоонууд учир

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \geq \frac{4}{a_1+a_2}$$

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \geq \frac{4}{a_2+a_3}$$

.....

$$\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_1} \geq \frac{4}{a_n+a_1}$$

Дээрх тэнцэтгэл бишүүдийг харгалзан нэмбэл

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_1} \geq \frac{2}{a_1+a_2} + \frac{2}{a_2+a_3} + \dots + \frac{2}{a_n+a_1}$$

буюу

$$\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1+a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2+a_3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n+a_1}\right) \geq \frac{1}{a_1+a_2} + \frac{1}{a_2+a_3} + \dots + \frac{1}{a_n+a_1}$$

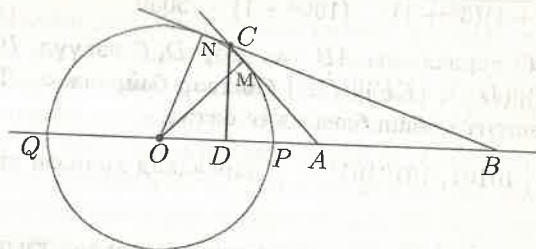
болж бидний батлах тэнцэтгэл биш гарна.

VII-B2. Бодлогыг шагайн тоо $4n$ үед авч үзье. I сурагч $4k+1$, $4k+3$ хэлбэрийн анхны тоотой тэнцү тооны эсвэл 1 ба 2 шагай авах боломжтой. I сурагч $4k+1$ (анхны тоо) ширхэг шагай авбал $4(n-k-1)+3$ шагай үлдэх ба $4(n-k-1)+3$ нь анхны тоо бол II тоглогч хожино. Хэрэв $4(n-k-1)+3$ нь зохиомол тоо бол II тоглогч 3 ширхэг шагай авна. I сурагч $4k+3$ (анхны тоо) ширхэг шагай авбал $4(n-k-1)+1$ шагай үлдэх ба $4(n-k-1)+1$ нь анхны тоо бол II тоглогч хожино. Хэрэв зохиомол бол II тоглогч 1 шагай авна I сурагч 1 ба 2 шагай авбал II сурагч харгалзан 3 ба 2 шагай авна. II сурагч дээрх тактикийг баримталж тогловол ямагт хожино.

VII-B3. AM , BN шүргэгчүүдийн огтлолцлын цэг C -ээс AB шулуунд перпендикуляр буулгая. Бидний олох ABC гурвалжны талбай $S = \frac{AB \cdot CD}{2}$ огтлогч шүргэгчийн чанараар

$$AM^2 = AP \cdot AQ = 3 \cdot 27 = 81 \text{ см}^2 \quad AM = 9 \text{ см}$$

$$BN^2 = BP \cdot BQ = 8 \cdot 32 = 256 \text{ см}^2 \quad BN = 16 \text{ см}$$



Нөгөө талаас $\angle B$ ерөнхий $\angle ONB = \angle CDB = \frac{\pi}{2}$ учир $\triangle BDC \sim \triangle BNO \Rightarrow \frac{BC}{OB} = \frac{CD}{ON}$. Мөн $\angle A$ ерөнхий $\angle AMO = \angle ADC = \frac{\pi}{2}$ учир $\triangle ADC \sim \triangle AMO \Rightarrow \frac{AC}{OA} = \frac{CD}{OM}$ болно. $CM = CN$ учир нь C цэгээс энэ тойрогт татсан шүргэгчүүд $CM = CN = x$ гэвэл $AC = AM + x$, $BC = BN - x$ болно. Дээрх харьцаанаас $AC = \frac{OA \cdot CD}{OM}$ ба $BC = \frac{OB \cdot CD}{ON}$, $AC + BC = AM + x + BN - x = AM + BN$ нөгөө талаас

$$AC + BC = \frac{OA \cdot CD}{OM} + \frac{OB \cdot CD}{ON} = (OA + OB) \frac{CD}{OM} = AM + BN$$

эдгээрийн утгыг орлуулбал

$$(15 + 20) \cdot \frac{CD}{12} = 9 + 16 \Rightarrow CD = \frac{25 \cdot 12}{35} = \frac{60}{7}$$

$$S = \frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{5 \cdot 60}{2 \cdot 7} = \frac{5 \cdot 30}{7} = \frac{150}{7}$$

ММО-36, VIII АНГИЙН III ДАВАА

Ш.Батхишиг, Б.Сандагдорж

$$\text{VIII-A1. } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z+x} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ тэгшитгэл бод.}$$

VIII-A2. Тойрог дээр орших A, B, C цэгүүд нь $\overline{AB} = \overline{BC}$ нөхцлийг хангадаг ба BC нумын дурын D цэгийн хувьд $BM \perp AD$, $M \in [AD]$ бол $AM = MD + DC$ болохыг батал.

VIII-A3. 1г, 2г, . . . , 10г жинтэй 10 зоос байв. Зоос тус бүр дээр түүний жинг бичсэн цаасыг наасан ба будлиад 1г-ийн зөрүүтэй 2 зоосны цаасыг сольж наасан байв. Туухайгүй жигнүүр (тавган) ашиглан хоёр жигнэлтээр уг 2 зоосыг илрүүлж чадахыг батал.

$$\text{VIII-B1. } \frac{(2^3 - 1)(3^3 - 1) \dots (100^3 - 1)}{(2^3 + 1)(3^3 + 1) \dots (100^3 + 1)} = \frac{3367}{5050} \text{ тэнцэтгэлийг батал.}$$

VIII-B2. ABC гурвалжны AB тал дээр D, F цэгүүд, BC тал дээр E цэг $(AC) \parallel (DE)$, $(EF) \parallel (CD)$ байхаар байрлажээ. Тэгвэл $|AB| \geq 4|DF|$ тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

VIII-B3. 101, 10101, 1010101, . . . дараалалд хичизэн анхны тоо байх вэ?

VIII-A1. Өгсөн тэгшитгэлийн систем нь дараах тэгшитгэлийн системтэй эквивалент юм.

$$\begin{cases} \frac{x(y+z)}{x+y+z} = 2 & (1) \\ \frac{y(z+x)}{x+y+z} = 3 & (2) \\ \frac{z(x+y)}{x+y+z} = 4 & (3) \end{cases}$$

Бүгдийг нь нэмбэл

$$\frac{xy + yz + zx}{x + y + z} = \frac{9}{2} \quad (4)$$

болно. (4)-өөс (1), (2), (3) ыг хасвал (5), (6), (7) тэнцлүүд гарна.

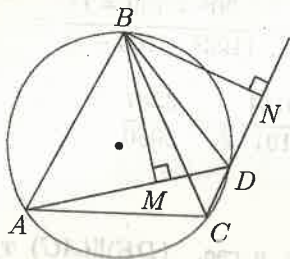
$$\frac{yz}{x + y + z} = \frac{5}{2} \quad (5), \quad \frac{zx}{x + y + z} = \frac{3}{2} \quad (6), \quad \frac{xy}{x + y + z} = \frac{1}{2} \quad (7)$$

(5)-ыг (6)-д хуваавал $\frac{y}{x} = \frac{5}{3}$ буюу $y = \frac{5}{3}x$ (6)-г (7)-д хуваавал $\frac{z}{y} = 3$ буюу $z = 3y = 5x$ болно. Иймд

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{5}{3}x + 5x} = \frac{1}{x} + \frac{3}{20x} = \frac{1}{2}$$

болох ба $x = \frac{23}{10}$, $y = \frac{23}{6}$, $z = \frac{23}{2}$ болно.

VIII-A2.



$BN \perp CD$ байхаар N цэгийг CD шулуун дээр сонгож авъя (зураг үз). $\angle BAD = \angle BCD$ гэдгээс $\triangle ABM \sim \triangle CBN$ болно. $AB = BC$ гэдгээс $\triangle ABM = \triangle CBN$ болно. Иймд $BM = BN$, $AM = CN$ байна. Мөн $\triangle BMD = \triangle BND$ болно. Иймээс $MD = DN$ болно. Эндээс $AM = CN = CD + DN = CD + MD$ болж батлагдана.

VIII-A3. Цаасан дээр бичсэн жингүүдийг нь харан өсөх эрэмбээр нь нэг шугамын дагуу байрлуулъя, ө.х. $m_1, m_2, \dots, m_{10}$ гэе.

1) $m_1 + m_{10}$, $m_4 + m_7$ хоёрыг жишье. $m_1 + m_{10} > m_4 + m_7$ байг. Тэгвэл эсвэл 1г, 2г-г сольсон, эсвэл 3г, 4г сольсон, эсвэл 6г, 7г сольсон гэсэн үг. Иймээс $m_1 + m_4$, $m_2 + m_3$ -ийг жинлэнэ. Хэрэв $m_1 + m_4 > m_2 + m_3$ байвал 1г, 2г жинтэй зооснуудын цаасыг сольсон гэсэн үг. $m_1 + m_4 = m_2 + m_3$ байвал 7г, 6г жинтэй зооснуудын цаасыг сольсон. $m_1 + m_4 < m_2 + m_3$ байвал 3г, 4г жинтэй зооснуудын цаасыг сольсон байна.

2) $m_1 + m_{10} < m_4 + m_7$ байг. Тэгвэл эсвэл 9г, 10г солигдсон, эсвэл 4г, 5г солигдсон, эсвэл 7г, 8г солигдсон байна гэсэн үг. Иймээс $m_7 + m_{10}$, $m_8 + m_9$ -ийг жинлэнэ. Хэрэв $m_7 + m_{10} > m_8 + m_9$ байвал 7г, 8г жинтэй зооснуудын цаасыг сольсон. $m_7 + m_{10} = m_8 + m_9$ байвал 4г, 5г жинтэй зооснуудын цаас солигдсон. $m_7 + m_{10} < m_8 + m_9$ байвал 9г, 10г жинтэй зооснуудын цаас солигдсон.

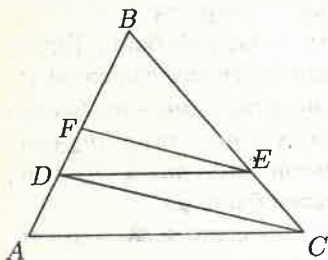
3) $m_1 + m_{10} = m_4 + m_7$ байг. Тэгвэл эсвэл 2г, 3г солигдсон, эсвэл 5г, 6г солигдсон, эсвэл 8г, 9г солигдсон байна. Иймээс $m_1 + m_7$, $m_2 + m_6$ -г жинлэнэ. Хэрэв $m_1 + m_7 > m_2 + m_6$ байвал 6г, 5г жинтэй зооснуудын цаас солигдсон. $m_1 + m_7 = m_2 + m_6$ байвал 8г, 9г жинтэй зооснуудын цаас солигдсон. $m_1 + m_7 < m_2 + m_6$ байвал 2г, 3г жинтэй зооснуудын цаас солигдсон болоход хүрч 2 жинлэлтээр солигдсон зооснуудыг илрүүлж болохыг харууллаа.

VIII-B1. $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = x^2 - x + 1$ гэж тэмдэглэе. $g(x+1) = (x+1)^2 - (x+1) + 1 = x^2 + 2x + 1 - x - 1 + 1 = x^2 + x + 1$ тул $f(x) = g(x+1)$ байх нь ээ. Бидний илэрхийлэлд оролцсон кубуудын нийлбэр ялгаврыг үржигдэхүүнд задалж дээрх адилтгалыг ашиглая.

$$\begin{aligned} & \frac{(2^3 - 1)(3^3 - 1) \cdot (100^3 - 1)}{(2^3 + 1)(3^3 + 1) \cdot (100^3 + 1)} = \\ & = \frac{1 \cdot 2 \cdots 99(2^2 + 2 + 1)(3^2 + 3 + 1) \cdots (100^2 + 100 + 1)}{3 \cdot 4 \cdots 101(2^2 - 2 + 1)(3^2 - 3 + 1) \cdots (100^2 - 100 + 1)} = \\ & = \frac{2(100^2 + 100 + 1)}{100 \cdot 101(2^2 - 2 + 1)} = \frac{10101}{50 \cdot 101 \cdot 3} = \frac{3367}{5050} \end{aligned}$$

болж батлагдана.

VIII-B2. $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AD| = p$ гэе. $(DE) \parallel (AC)$ тул $\triangle ABC \sim \triangle DBE$.



Эндээс $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE}$ буюу $BE = \frac{BC \cdot BD}{AB} = \frac{a(c-p)}{c}$ болно. $(EF) \parallel (CD)$ тул $\triangle DBC \sim \triangle FBE$. Эндээс $\frac{BD}{BF} = \frac{BC}{BE} \Rightarrow$

$$BF = \frac{BD \cdot BE}{BC} = \frac{c-p}{a} \cdot \frac{a(c-p)}{c} = \frac{(c-p)^2}{c}$$

болно.

$$DF = BD - BF =$$

$$= (c-p) - \frac{(c-p)^2}{c} = \frac{p(c-p)}{c} \leq \frac{1}{c} \left(\frac{p+c-p}{2} \right)^2 = \frac{c}{4} = \frac{1}{4} AB$$

буюу $AB \geq 4DF$ болж батлагдлаа.

VIII-B3. $n \geq 2$ бол

$$A = \underbrace{10101 \dots 01}_{2n+1}$$

$$= 10^{2n} + 10^{2n-2} + \dots + 10^2 + 1 = \frac{10^{2n+2} - 1}{10^2 - 1} = \frac{(10^{n+1} - 1)(10^{n+1} + 1)}{99}$$

байна. Хэрэв $n = 2m + 1$ (өөрөөр хэлбэл сондгой тоо) бол

$$\frac{10^{n+1} - 1}{99} = \frac{10^{2m+2} - 1}{99} = \underbrace{1010 \dots 101}_{2m+1}$$

Эндээс $A = \underbrace{10101 \dots 101}_{2m+1} \times (10^{n+1} + 1)$ болно. n тэгш тоо бол $10^{n+1} - 1:9$, $10^{n+1} + 1:11$ учир A зохиомол тоо байна. Тэгэхлээр 101 анхны тоо болно.

ММО-36, VIII АНГИЙН IV ДАВАА

Д.Нямсүрэн

VIII-A1 (Б.Батцэнгэл). Парламент 36 гишүүнтэй бөгөөд анхны өдөр бүгд найзууд байв. Өдөр бүр 2 хос найз дайснууд болж, 1 хос дайснууд найз болж эвлэрдэг байв. Хэрэв парламентыг A, B хоёр танхимд, A танхимын гишүүн бүр B танхимын гишүүн бүртэй дайсан байхаар хувааж болдог үед парламент тарах ёстой байв. Энэ парламент хамгийн олондоо хэдэн өдрийн настай вэ?

VIII-A2 (Г.Баярмагнай). Дурын дараалсан 6 тооны цифрийн нийлбэр нь 3-т хуваагддаг байхаар 1-ээс n тоог тойрог дээр байрлуулж болдог байх бүх n тоонуудыг ол.

VIII-A3 (Б.Хоролдагва). Зөв $\triangle ABC$ -ны оройнууд дээр нэгэн ижил чиглэлээр нэрлэгдсэн $AB_1C_1, S_2BC_2, A_3B_3C$ гурвалжнуудыг байгуулав. Тэгвэл A_2A_3, B_1B_3, C_1C_2 хэрчмүүдийн дундаж цэгүүд зөв гурвалжны орой болохыг батал.

VIII-B1 (Б.Баясгалан).
$$\begin{cases} ad + bc = 1 \\ ac + 2bd = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{системийг бүхэл тоон} \\ \text{олонлог дээр бод.} \end{matrix}$$

VIII-B2 (П.Алтанцог). $2 \leq n$ натурал тоо бүрийн хувьд

а) Эхний цифрийг нь хамгийн ард аваачиж тавихад уг тоо n дахин багасдаг цифрүүд нь үелэхгүй төгсгөлөг байдаг n тоо олохыг батал.

б) Ийм $N(n)$ нь олондоо хэдэн оронтой вэ?

VIII-B3 (Л.Хатанбаатар). $\triangle ABC$ -д багтсан тойрог AB , BC , CA талуудыг харгалзан C_1 , A_1 , B_1 цэгүүдэд шүргэнэ. C орой дээр төвтэй CA_1 радиустай тойрог дээр M цэг авчээ. Хэрэв N нь $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CM}$ -тэй эсрэг чиглэлтэй ба $BN = BA_1$ байх цэг бол MB_1 , NC_1 шулуунуудын огтлолцлын цэгийн геометр байрыг ол.

VIII-A1. Гишүүдээ графын орой мэт сэтгэн, анх бүх 36 орой нь хос хосоороо хоорондоо ирмэгээр холбогдсон (найз гишүүдэд харгалзах оройнуудыг ирмэгээр холбоно) гэж үзье. Ө.х., анх 36 оройтой $C_{36}^2 = 630$ ирмэгтэй бүтэн граф байсан гэж үзье. Өдөрт 2 ирмэг тасарч, нэг ирмэг сэргэдэг билээ. Тэгэхлээр өдөр бүр графын ирмэгийн тоо 1-ээр цөөрнө. Бодлогын нөхцөл нь парламент, граф холбоост биш болсон тэр үед тарна гэдгийг хэлж байна.

N -р өдөр граф холбоост хэвээрээ байсан болог. Тэр холбоост графын максималь модыг сонирхвол тэр нь графын бүх оройг дайрсан байх учраас (УМО-д бэлтгэгчдэд тусламж №24 номын "Графын онол" өгүүллийн 5-р бүлгийг үзнэ үү) 35 ирмэгтэй байх ёстой. Иймд графын ирмэгийн тоо нь 35-аас багагүй болно. Үүгээр хэрэв N -р өдөр граф холбоост байгаад $N + 1$ -р өдөр граф холбоост биш болсон гэвэл N байх ёстой болов. Эндээс парламент тарах хүртэлх өдрийн тоо $N \leq 595$ гэж гарна. Одоо $N = 595$ байж болно гэдгийг харуулах үлдлээ. Анх байсан бүтэн графын ямар нэгэн максималь модыг сонгон авч, тэр мод агуулагдаггүй ирмэгүүдийг өдөр бүр 1,1-ээр тасдвал, нийт 595 өдөр парламентийг тараахгүй байж болно.

VIII-A2. $S(a)$ -а тооны цифрүүдийн нийлбэр бол $S(a) \equiv a \pmod{3}$ байна. Иймээс тойрог дээрх тоонуудыг 0, 1, 2 оос тогтоно гэж үзэж болно. Тойрог дээрх тоонуудыг $a_1, \dots, a_n$ гээ. Тэгвэл

$$a_i \equiv a_{i+6} \pmod{3} \quad (*)$$

байх ба a_i тоог $n \cdot x + i$ дугаартай гэж үзэж чадна.

$3|n$ үед тоонуудыг тойрог дээр дараалан байрлуулна.

(*) $\Rightarrow a_i \equiv a_{i+6} \equiv \dots \equiv a_{i+6k} \pmod{3}$. $n = 3k + 1$, $6k + 5$ үед $(6, n) = 1$ тул $6x + 1 \equiv 1 \pmod{n}$ тэгшитгэл шийдтэй, $i \in \mathbb{N} \Rightarrow a_1 \equiv a_2 \equiv \dots \equiv a_n \pmod{3}$ болно.

$n = 6k + 2$ үед $6x + 1 \equiv i \pmod{n}$ (i -сондгой) тэгшитгэл шийдтэй $\Rightarrow a_1 \equiv a_3 \equiv a_5 \dots \equiv a_{n-1} \pmod{3}$ болно. Гэтэл энэ нь a_1 тоо $\left[\frac{n}{3}\right] + 1$ -ээс

хэтрэхгүй гэдэгт зөрчинө.

VIII-A3.

Бодлогын

нөхцөл ёсоор $A_2A_4 = A_4A_3$,
 $B_3B_4 = B_4B_1$, $C_1C_4 = C_4C_2$

учир $\overrightarrow{A_4A_3}$ ба $\overrightarrow{A_4A_2}$, $\overrightarrow{B_4B_1}$

ба $\overrightarrow{B_4B_3}$, $\overrightarrow{C_4C_2}$ ба $\overrightarrow{C_4C_1}$ век-

торууд хос хосоороо эсрэг

векторууд болно. Зургаас

$\triangle A_4B_4C_4$ гурвалжны талуудыг

векторуудын нийлбэрт

задалбал $\overrightarrow{C_4A_4} = \overrightarrow{C_4C_2} + \overrightarrow{C_2A_2}$

$+\overrightarrow{A_2B_4}$ эсвэл $\overrightarrow{C_4A_4} =$

$\overrightarrow{C_4C_1} + \overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA_3} +$

$\overrightarrow{A_3A_4}$ тэнцэтгэлийн 2 талыг

харгалзан нэмбэл

$$2\overrightarrow{C_4A_4} = \overrightarrow{C_2A_2} + \overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA_3} \quad (1)$$

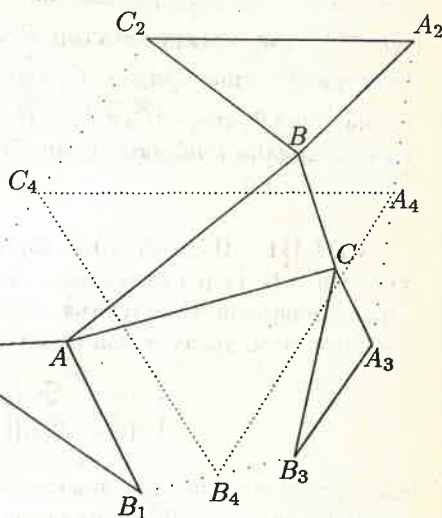
болно. Үүний адилаар $\overrightarrow{C_4B_4} = \overrightarrow{C_4C_1} + \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{B_1B_4}$ ба $\overrightarrow{C_4B_4} = \overrightarrow{C_4C_2} +$
 $\overrightarrow{C_2B} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_3} + \overrightarrow{B_3B_4}$ тэнцэтгэлийн 2 талыг харгалзан нэмбэл

$$2\overrightarrow{C_4B_4} = \overrightarrow{C_1B} + \overrightarrow{C_2B} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_3} \quad (2)$$

$\overrightarrow{B_4A_4} = \overrightarrow{B_4B_3} + \overrightarrow{B_3A_3} + \overrightarrow{A_3A_4}$ ба $\overrightarrow{B_4A_4} = \overrightarrow{B_4B_1} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_2} + \overrightarrow{A_2A_4}$
 тэнцэтгэлийн 2 талыг харгалзан нэмбэл

$$2\overrightarrow{B_4A_4} = \overrightarrow{B_3A_4} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_2} \quad (3)$$

(1) ба (2) тэнцэтгэлийн баруун талуудын нэмэгдэхүүнүүдийг хос хо-
 соор нь харьцуулбал $\overrightarrow{C_2A_2}$, $\overrightarrow{C_1A}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA_3}$ векторуудыг цагийн зүүний
 дагуу 60° өнцгөөр эргүүлбэл, харгалзан $\overrightarrow{C_2B}$, $\overrightarrow{C_1B}$, $\overrightarrow{BC}$ -тэй тэнцүү век-
 тор, $\overrightarrow{CB}$ -үүд гарах учир $\overrightarrow{C_2A} + \overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA_3} = \overrightarrow{C_1B} + \overrightarrow{C_2B} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_3}$
 болно. Иймд $\overrightarrow{C_4A_4}$ -г мөн цагийн зүүний дагуу 60° өнцгөөр эргүүлбэл
 $\overrightarrow{C_4B}$ -г очно гэсэн үг. Ийм учраас C_4A_4 -н урт C_4B_4 -ийн урттай тэнцүү



байна. Үүний адилаар (1) ба (3)-н баруун талыг харьцуулж үзвэл $\overrightarrow{C_2A_2}$, $\overrightarrow{C_1A}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA_3}$ векторуудыг цагийн зүүний эсрэг 60° эргүүлбэл харгалзан $\overrightarrow{BA_2}$ -тай тэнцүү, вектор $\overrightarrow{B_1A}$ -тай тэнцүү, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_3A_3}$ -тай тэнцүү векторууд гарна. Эндээс $\overrightarrow{C_4A_4}$ -ийн урт $\overrightarrow{B_4A_4}$ -ийн урттай тэнцүү гэж гарна. Энэ бүхнээс $|\overrightarrow{C_4A_4}| = |\overrightarrow{B_4A_4}|$ болох гурвалжин адил талт болох нь батлагдана (Энэ бодолтыг УБ, 1-р сургуулийн 8г ангийн П.Оргил хийсэн болно).

VIII-B1. П.Энхболдын нэрэмжит уран бодолтын тусгай шагнал хүртсэн УБ 11-р сургуулийн сурагч А.Тэмүүлэнгийн бодолтыг бага зэрэг засварлан толилуулъя. Эхний тэгшитгэлийг $\sqrt{2}$ -оор үржин 2-р тэгшитгэлээс хасах болон нэмэх замаар өгсөн системийг

$$\begin{cases} (a + \sqrt{2}b)(c + \sqrt{2}d) = 1 + \sqrt{2} \\ (a - \sqrt{2}b)(c - \sqrt{2}d) = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \quad (*)$$

хэлбэрт бичье. Энэ 2 тэгшитгэлийг үржүүлбэл, $(a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2) = -1$ болох ба энд $a^2 - 2b^2$ нь бүхэл тоо гэдгийг тооцвол, эсвэл $a^2 - 2b^2 = 1$ байна, эсвэл $a^2 - 2b^2 = -1$ байна гэж гарна.

1) $a^2 - 2b^2 = 1$ бол

$$c + \sqrt{2}d = \frac{1 + \sqrt{2}}{a + \sqrt{2}b} = (a - \sqrt{2}b)(1 + \sqrt{2}) = (a - 2b) + (a - b)\sqrt{2}$$

болох бөгөөд $\sqrt{2}$ нь иррационал тоо учраас эндээс $c = a - 2b$ ба $d = a - b$ болох нь харагдана. Энэ олсон c, d нь (*) системийн 2-р тэгшитгэлийг хангана гэдгийг хялбархан шалгаж болно. Үүгээр a, b нь $a^2 - 2b^2 = 1$ байх бүхэл тоонууд бол $c = a - 2b$ ба $d = a - b$ гэсэн c, d -ийн хувьд a, b, c, d нь өгөгдсөн системийн бүхэл тоон шийд болох нь батлагдав.

2) $a^2 - 2b^2 = -1$ бол

$$c + \sqrt{2}d = \frac{1 + \sqrt{2}}{a + \sqrt{2}b} = (-a + \sqrt{2}b)(1 + \sqrt{2}) = (-a + 2b) + (-a + b)\sqrt{2}$$

болох бөгөөд өмнөхтэй нэгэн адил $\sqrt{2}$ нь иррационал болохыг ашиглавал $c = -a + 2b$ ба $d = -a + b$ гэж гарна. Өмнөх тохиолдолтой нэгэн адил энэ тохиолдолд a, b нь $a^2 - 2b^2 = -1$ байх бүхэл тоонууд бол $c = -a + 2b$ ба $d = -a + b$ гэсэн c, d -ийн хувьд a, b, c, d нь өгөгдсөн системийн бүхэл тоон шийд болох нь батлагдана.

$a^2 - 2b^2 = 1$ ба $a^2 - 2b^2 = -1$ тэгшитгэл нь Пеллийн тэгшитгэлүүд бөгөөд түүний бүхэл тоон шийдүүдийг яаж олдог талаар олимпиадад бэлтгэх янз бүрийн ном, сурах бичгүүдэд элбэг тааралддаг билээ. Тухайлбал $a^2 - 2b^2 = 1$ тэгшитгэлийн бүх бүхэл тоон шийдүүдийг

$$a + \sqrt{2}b = \pm(3 + 2\sqrt{2})^n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

гэсэн томъёогоор, харин $a^2 - 2b^2 = -1$ тэгшитгэлийн бүх бүхэл тоон шийдүүдийг

$$a + \sqrt{2}b = \pm(1 + \sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})^n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

томъёогоор тус тус боддог.

VIII-B2. а) Эхний цифрийг a , түүнээс бусад цифрээс бүрдэх тоог x гэе. Тэгвэл $\frac{10^3a + x}{10x + a} = n$ байх болно. Эндээс $x = \frac{10^3a - na}{10n - 1}$ нь натурал тоо байх s олдохыг батлахад хангалттай. $(10, 10n - 1) = 1$ учир хүртвэрийг 10 -аар үржээд a -ийг нэмээд хасъя.

$$x = \frac{10^{s+1}a - 10na + a - a}{10n - 1} = \frac{a(10^{s+1} - 1)}{10n - 1} - a$$

$1, 10, 10^2, \dots, 10^{10n-2}$ гэсэн тоонд $10n - 1$ -д хуваахад ижил үлдэгдэл өгөх 2 тоо олдоно. Тэднийг $10^t, 10^k$ гэе. $10^t - 10^k : 10n - 1 \Rightarrow 10^k(10^{t-k} - 1) : 10k - 1 \Rightarrow (10^{t-k} - 1) : 10n - 1$ болж тийм s тоо олдох нь батлагдав. Ө.х. дурын n -ийн хувьд нөхцөл хангаж тоо олдоно.

б) $s + 1 \leq 10n - 2 \Rightarrow N$ тоо нь $10n - 2$ оос хэтрэхгүй оронтой байна. Шууд шалгах замаар

$$210526315789473684 = 2 \cdot 105263157894736842$$

болохыг олж болно. Иймд N тоо нь $10n - 2$ -оос ихгүй оронтой ($10n - 2$ оронтой дээрх жишээ олдож буй).

VIII-B3. $(NC_1) \cap (B_1M) = P$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$ гэе. а) $\begin{cases} BN \parallel CM \\ BN = BA_1 \\ CA_1 = CM \end{cases} \Rightarrow N, A, M$ цэгүүд нэг шулуун дээр оршино. C төвтэй CA_1 радиустай тойрог дээр B_1, M байна.

IX-A3. ABC гурвалжны дотор орших Q цэгээс 3 тал руу буулгасан перпендикуляруудаар гурвалжин байгуулж болдог бүх Q цэгийн геометр байрыг ол.

IX-B1. n натурал тоо, $\varphi(n)$ -ээр n -ээс бага, түүнтэй харилцан анхны натурал тоонуудын тоог (Эйлериин функц), $T(n)$ -ээр n -ийн натурал хуваагчдын нийлбэрийг тэмдэглэе. k сондгой, $\varphi(k) \mid k \cdot T(k) - 2$ бол k анхны тоо байна гэж батал.

IX-B2. $a_n = [n\sqrt{2}]$ тоон дараалалд 2-ын зэрэг байх тоо төгсгөлгүй олон гэж батал, энд $[x]$ нь x тооны бүхэл хэсэг.

IX-B3. ABC гурвалжны BH_2 өндрийн дунджаас A, C оройнууд хүртэлх зай m, n байжээ. A, C оройнууд дахь өнцөг α, γ ба $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \gamma = 4$ бол ABC гурвалжны талбайг ол.

IX-A1 (Н.Ууганбаатар).

$$S = \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_n + a_1},$$

$$S' = \frac{a_2}{a_1 + a_2} + \frac{a_3}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_1}{a_n + a_1}$$

гэж тэмдэглэе.

$s + s' = n$ байх нь илт $\max(g) = a$, $\min(H) = b$ гээ. $a_1, a_2, \dots, a_n$ тоонуудыг $S > S'$ байхаар сонговол

$$\begin{aligned} S' &\leq a \\ S &\leq b \end{aligned} \Rightarrow S' + S = n \leq a + b \quad (1)$$

гэж гарна. Одоо $a_1, a_2, \dots, a_n$ тоонуудыг $S' > S$ байхаар сонговол

$$\begin{aligned} S' &\geq b \\ S &\geq a \end{aligned} \Rightarrow S' + S = n \geq a + b \quad (2)$$

гэж гарна. (1) ба (2)-оос $a + b = n$ байх нь харагдана.

$a = 1$ гэж харуулъя.

$$\frac{a_i}{a_i + a_{i+1}} > \frac{a_i}{\sum_{i=1}^n a_i} \Rightarrow \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \dots + \frac{a_n}{a_n + a_1} > \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_1 + \dots + a_n} = 1$$

$a_i = t^{i-1}$ (t нь хангалттай их) гэж авбал $g = 1$ болно $\Rightarrow H \geq n - 1$ байх нь харагдана.

IX-A2. Бодлогыг ерөнхий тохиолдолд томъёолж дурын $m^2 + 1$ ширхэг ялгаатай олонлогуудын хувьд тэднээс эсвэл бие биедээ агуулагддаг $m + 1$ олонлог олдоно эсвэл аль ч 2 нь бие биедээ агуулагддаггүй $m + 1$ олонлог олдоно гэсэн өгүүлбэрийг баталъя.

$A_1, A_2, \dots, A_{m^2+1}$ нь ялгаатай олонлогууд байг. A_i -ийн хувьд $A_i = A_{i_1} \subset A_{i_2} \subset \dots \subset A_{i_s}, i_j \in \{1, m^2 + 1\}$ байх хамгийн их урттай гинжийн уртыг r_i гэе. $i = \overline{1, m^2 + 1}$

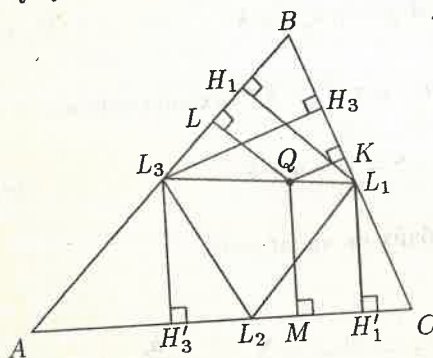
Хэрэв ямар нэг $r_k \geq m + 1$ бол $m + 1$ урттай гинж буюу бие биедээ агуулагддаг $m + 1$ ширхэг олонлог $A_1, A_2, \dots, A_{m^2+1}$ олонлогуудаас олдоно.

Эсрэгээс нь бодлогын нөхцлийг хангах $m + 1$ ширхэг олонлог олдохгүй гэвэл $r_i \leq m, i = \overline{1, m^2 + 1}$ болно. Гэтэл Дирхлейн зарчимаар эдгээр тоонуудын (r_i -үүдийн) ядаж $m + 1$ нь хоорондоо тэнцүү. Энэ тоонуудад харгалзах $m + 1$ олонлогийн аль ч 2 нь бие биедээ агуулагдахгүй.

Манай бодлого энэ бодлогын $m = 31$ байх тохиолдол юм.

IX-A3. Бодлогын нөхцлийг хангах Q цэгийн олонлог нь $\triangle ABC$ -ны биссектрисүүдийн сууриар үүсэх гурвалжны дотоод муж юм. A, B, C өнцгүүдийн биссектрисүүдийн сууриудыг L_1, L_2, L_3 гэе.

Эхлээд Q нь $\triangle L_1 L_2 L_3$ -ны талууд дээр байхад Q -ээс талууд хүртэлх зайнуудын аль нэг хоёрынх нь нийлбэр нөгөө зайтайгаа тэнцүү байхыг буюу $QM = QK + QL$ гэж баталъя.



$$\triangle L_3 H_3 L_1 \sim \triangle QKL_1 \Rightarrow \frac{QK}{L_3 H_3} =$$

$$\frac{QL_1}{L_3 L_1} \Rightarrow QK = \frac{L_3 H_3 \cdot QL_1}{L_3 L_1} \quad (1)$$

$$\text{Мөн } \triangle H_1 L_1 L_3 \sim \triangle LQL_3 \Rightarrow$$

$$\frac{LQ}{L_1 H_1} = \frac{L_3 Q}{L_3 L_1} \Rightarrow$$

$$LQ = \frac{L_1 H_1 \cdot L_3 Q}{L_3 L_1} \quad (2)$$

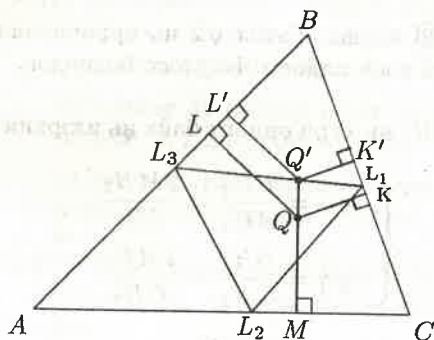
$L_3H'_3 \parallel QM \parallel L_1H'_1$ Фалесын теоремыг ашиглавал

$$QM = \frac{L_3H'_3 \cdot QL_1 + L_1H'_1 \cdot L_3Q}{L_3L_1}$$

$$\begin{aligned} L_3H'_3 &= L_3H_3 \\ L_1H'_1 &= L_1H_1 \end{aligned} \quad \text{гэдгийг тооцвол}$$

$$QM = \frac{L_3H_3 \cdot QL_1}{L_3L_1} + \frac{L_1H_1 \cdot L_3Q}{L_3L_1} = QK + QL$$

((1) (2)) болж батлагдав.



Одоо $\Delta L_1L_2L_3$ -ны дотоод мужийн дурын Q цэг бодлогын нөхцлийг хангахыг баталъя.

$MQ \cap L_1L_2 = Q'$ гэе. $QM < Q'M = Q'K' + Q'L' < QL + QK$ болж QK, QL, QM -ээр гурвалжин байгуулж болох нь батлагдав. Q нь $\Delta L_1L_2L_3$ -ны гадна байхад $QM > QL + QK$ байх нь дээрхийн нэгэн адил батлагдана.

IX-B1. $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}$ гэе. p_i сондгой анхны тоонууд $\alpha_i = 1, i = \overline{1, s}$ гэж баталъя.

Эсрэгээс нь ямар нэг $\alpha_j \geq 2$ гэвэл

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}) \dots (p_s^{\alpha_s} - p_s^{\alpha_s-1}) \quad (1)$$

гэдгээс

$$p_j \mid \varphi(n) \quad (2)$$

болно.

$$n \cdot T(n) - 2 \cdot \varphi(n) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} p_j \mid 2$$

болж p_j сондгой гэдэгт зөрчнө. $\alpha_i = 1, i = \overline{1, s} \Rightarrow n = p_1 p_2 \dots p_s$ болно. (1)-ээс $\varphi(n) = (1 + p_1) \dots (1 + p_s)$ p_i нь сондгой гэдгийг санавал $2^s \mid \varphi(n)$ болно. Мөн $T(n) = (p_1 - 1) \dots (p_s - 1) \Rightarrow 2^s \mid T(n)$ болж $2^s \mid 2$ буюу $s = 0.1$

гэж гарна.

IX-B2. Дурын бодит тоог хоёртын тооллын системд нэгэн утгатай бичиж болно. Жишээ нь: $\frac{21}{16} = 1.0101$. $\sqrt{2}$ нь хоёртын тооллын системд $\sqrt{2} = a_0.a_1a_2\dots a_k\dots$, $a_i \in \{0, 1\}$ гэж бичигддэг байг.

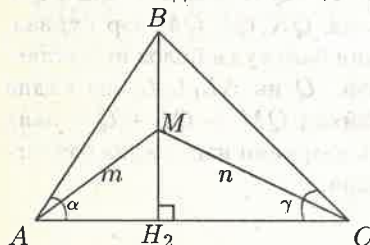
$a_k = 1$ байх k -ийн хувьд $m = [2^{k-1} \cdot \sqrt{2}] = a_0a_1\dots a_{k-1}$ болно.

Бүхлийн хэсгийн чанараас $2^{k-1} \cdot \sqrt{2} - 1 < m < 2^{k-1} \sqrt{2} - \frac{1}{2}$ гэж гарна. Уг тэнцэтгэл бишийг $\sqrt{2}$ -оор үржүүлж $\sqrt{2}$ -ийг нэмбэл

$$2^k < (m+1)\sqrt{2} < 2^k + \frac{\sqrt{2}}{2} < 2^k + 1$$

гэж гарна. Эндээс $2^k = [(m+1)\sqrt{2}]$ болно. Гэтэл $\sqrt{2}$ нь иррационал тоо учраас $a_k = 1$ байх k төгсгөлгүй олон олдоно. Бодлого бодогдов.

IX-B3. Бодлогын нөхцлөөс $\triangle ABC$ нь хурц өнцөгт байх нь илэрхий.



$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \frac{BH_2}{AH_2} = \frac{2MH_2}{AH_2} \\ \operatorname{tg} \gamma = \frac{BH_2}{CH_2} = \frac{2MH_2}{CH_2} \end{cases} \Rightarrow$$

$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \gamma = \frac{4MH_2^2}{AH_2 \cdot CH_2} = 4 \Rightarrow$
 $AH_2 \cdot CH_2 = MH_2^2$ буюу $\triangle AMC$ нь тэгш өнцөгт гэж гарна. M нь BH_2 -ийн дундаж цэг гэдгээс $S_{AMH_2} = S_{AMB}$
 $S_{H_2MC} = S_{BMC} \Rightarrow S_{ABC} = 2(S_{AMH_2} + S_{CMH_2}) = 2S_{AMC} = 2 \cdot \frac{mn}{2} = mn$

ММО-36, IX АНГИЙН IV ДАВАА

Ж.Батболд

IX-A1 (Д.Даянцолмон). $n > 2$ натурал тоо байг. $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = na_1a_2\dots a_n$ нөхцлийг хангах $a_1, a_2, \dots, a_n$ натурал тоонууд хос хосоороо харилцан анхны байхыг батал.

IX-A2 (Б.Баясгалан). $m \times n$ хүснэгтийг 1×3 тэгш өнцөгт дүрсүүдээр битүү хучив. Хэрэв хүснэгтийн нүд бүр ижил тооны дүрсээр хучигдсан бол бүх боломжит m, n хосыг ол. Дүрсүүд давхардаж болно.

IX-A3 (У.Наранхүү). ABC гурвалжны A ба C оройн гадаад өнцгийн биссектрисүүд BC ба AB талуудын үргэлжлэлтэй харгалзан A_1 ба C_1 цэгт огтлолцдог бөгөөд O нь ABC гурвалжны багтаасан тойргийн төв, H нь орто төв болог. Хэрэв $OH \perp A_1C_1$ бол $AB = CB$ гэж батал.

IX-B1 (Б.Баясгалан). Тойрог дээр байрлах хэд хэдэн $0, 1, 2$ цифрүүдийг аль нэгээс нь эхлэн цагийн зүүний дагуу уншиж үүсгэсэн 36 урттай үгүүдийг тойргийн үгнүүд гээ. Тэгвэл

а) Аливаа 36 урттай үг нь тойргийн үг байдаг байхаар нийт 3^{36} ширхэг $0, 1, 2$ цифрийн тойрог дээр байрлуулж болохыг батал.

б) Эргүүлэлтээр давхцах байрлалыг ижил гэж үзвэл дээрх байрлал нийт хичнээн ширхэг байх вэ?

IX-B2 (М.Итгэл). $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ зургаан өнцөгт нь тойрогт багтах бөгөөд $A_1A_2 = A_2A_3$, $A_3A_4 = A_4A_5$, $A_5A_6 = A_6A_1$ байдаг бол

$$\frac{A_2A_3}{A_2A_5} + \frac{A_4A_5}{A_4A_1} + \frac{A_6A_1}{A_6A_3} \geq \frac{3}{2}$$

гэж батал.

IX-B3 (Д.Даянцолмон). $\{a_n\}$ өсдөг арифметик прогресс натурал тооны кубыг агуулдаг, натурал дөрвөн зэрэгтийг агуулдаг бол мөн натурал тооны 12 зэрэгтийг агуулна гэж батал.

IX-A1. $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ гээ. Хэрэв $a_2 = 1$ бол илэрхий. Иймд $a_2 > 1$ гэж үзье.

$$f(x) = x^2 - na_2a_3 \dots a_n x + (a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2)$$

квадрат гурван гишүүнтийн хувьд язгуурууд нь a_1 ба a'_1 , ө.х. $f(a_1) = 0$, $f(a'_1) = 0$. $f(a_1) = 0$ гэдгийг тооцвол

$$\sum_{i=1}^n f(a_i) = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) - na_2a_3 \dots a_n (a_1 + a_2 + \dots + a_n) +$$

$$+n(a_2^2 + a_3^2 + \dots a_n^2) = n((a_2^2 - a_2^2 a_3 \dots a_n) + (a_3^2 - a_2 a_3^2 \dots a_n) + \dots + (a_n^2 - a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_n^2)) < 0$$

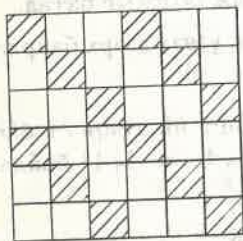
тул $1 \leq a'_1 < a_1$ болно. Учир нь $f(x)$ квадрат 3 гишүүнт ямар нэг $a_i < a_1$ хувьд сөрөг утга авдаг учир нөгөө нэг язгуур $a'_1 < a_1$ байна.

$$\begin{cases} a_1 + a'_1 = na_2 a_3 \dots a_n \\ a_1 \cdot a'_1 = a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 \end{cases} \Rightarrow a'_1 \text{ натурал,}$$

$$a'_1 = na_2 \dots a_n - a_1, \quad (a'_1, a_i) = (na_2 \dots a_n - a_1, a_i) = (a_1, a_i)$$

болно. Энэ сэтгэлгээг давтах замаар $a_2 = 1$ тохиолдолтой адил болно. Иймээс $(a_i, a_j) = 1$ байх юм.

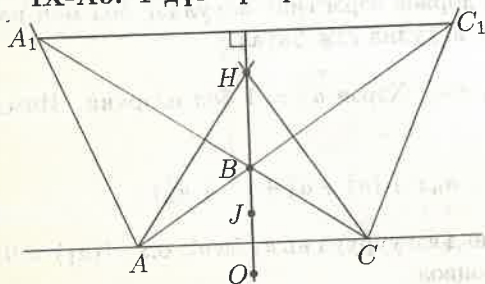
IX-A2.



$m \times n$ хүснэгтийг зурагт үзүүлсэн байдлаар будагдсан хоёр нүдний хооронд будагдаагүй хоёр нүд байхаар будъя.

Одоо нүд бүр p удаа давтагдана гэж үзье. Тэгвэл будагдсан нүдний тоо s гэвэл нэг ширхэг 1×3 тэгш өнцөгтөд нэг будагдсан нүд орох учир нийт хучих дүрсийн тоо $s \cdot p$ байна. Нөгөө талаас хучих дүрсийн тоо $\frac{mn}{3} \cdot p$ учир $ps = \frac{mn}{3}p$ болно. $\frac{mn}{3}$ бүхэл гэдгээс m ба n -ийн ядаж нэг нь 3-т хуваагдана гэж гарна. $3k \times n$, $m \times 3k$ хүснэгтийг бодлогын нөхцөлд зааснаар хучиж болох нь хялбар харагдана.

IX-A3. 1 дүгээр арга.



$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b},$$

$$\frac{BC_1}{AC_1} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$$

(гадаад онцгийн биссектрисийн чанар)

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC},$$

$$\vec{BA_1} = \frac{c}{c-b} \vec{BC},$$

$$\vec{BC_1} = \frac{a}{a-b} \vec{BA}, \quad \vec{A_1C_1} = \frac{a}{a-b} \vec{BA} - \frac{c}{c-b} \vec{BC}, \quad (\vec{OA} + \vec{OB}, \vec{BA}) = 0,$$

$$(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{BC}) = 0, (\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{A_1C_1}) = 0 \text{ байхыг тооцвол } \Rightarrow$$

$$\frac{a}{a-b}(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{c}{c-b}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BC}), \quad \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$$

$$\frac{a}{a-b}(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{BC}) - \frac{a}{a-b}(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AC}) = \frac{c}{c-b}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BA}) - \frac{c}{c-b}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{CA})$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow \frac{a^3 - ab^2}{a-b} = \frac{c^3 - cb^2}{c-b}$$

$$\Rightarrow a^2 + ab = c^2 + cb \Rightarrow (a-c)(a+b+c) = 0 \Rightarrow a = c \text{ болж батлагдав.}$$

2 дугаар арга. J багтсан тойргийн төв бол аливаа гурвалжны хувьд $OJ \perp A_1C_1$ байдаг гэж баталъя.

$$\overrightarrow{OJ} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$$

$$\begin{aligned} (OJ, A_1C_1) &= \frac{1}{a+b+c} \left(a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}, \frac{a}{a-b}\overrightarrow{BA} - \frac{c}{c-b}\overrightarrow{BC} \right) = \\ &= \frac{a^2}{a-b}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BA}) - \frac{ab}{a-b}(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AB}) + \frac{ca}{a-b}(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{BC}) - \frac{ca}{a-b}(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AC}) - \\ &- \frac{ac}{c-b}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BA}) + \frac{ac}{c-b}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{CA}) + \frac{bc}{c-b}(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{CB}) - \frac{c^2}{c-b}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OC}) = \\ &= \frac{a^2c^2}{a-b} - \frac{abc^2}{a-b} + \frac{ca^3}{a-b} - \frac{cab^2}{a-b} - \frac{ac^3}{c-b} + \frac{acb^2}{c-b} + \frac{bca^2}{c-b} - \\ &- \frac{c^2a^2}{c-b} = \frac{ac(ac-bc+a^2-b^2)}{a-b} - \frac{ac(c^2-b^2-ab+ac)}{c-b} = \\ &= \frac{ac(a+b+c)(a-b)}{a-b} - \frac{ac(c-b)(a+b+c)}{c-b} = 0 \end{aligned}$$

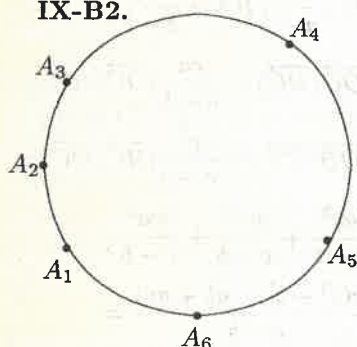
$\Rightarrow OJ \perp A_1C_1, OH \perp A_1C_1 \Rightarrow O, J, H$ коллинеар AJ нь $\angle HAO$ -ийн CJ нь $\angle HCO$ -ийн биссектрис болно. $\frac{AO}{OJ} = \frac{AH}{HJ}, \frac{CO}{OJ} = \frac{CH}{HJ} \Rightarrow AH = CH \Rightarrow$
 $\frac{AH}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{CH}{\sin(90^\circ - \gamma)} \Rightarrow \alpha = \gamma$ болж батлагдав.

IX-B1. а) 0, 1, 2-оос зохиосон 36 урттай үгүүдийг тойрог дээр хамгийн хэмнэлттэйгээр байрлуулах нь бодлогыг шийднэ. Үүний тулд 0, 1, 2-оос зохиосон 35 урттай $x_1x_2 \dots x_{35}$ урттай үгүүд орой нь байх графийг авч үзье.

Хэрэв ийм хоёр үгийн (оройн) хувьд нэгийг нь сүүлчийн 34 үсэг нөгөөгийн эхний 34 үсэгтэй харгалзан тэнцэж байвал уг хоёр үгэнд харгалзах оройнуудыг сумаар холбоё. Ингэж үүсэх граф нь нийтдээ 3^{35} ширхэг оройтой, орой бүр нь гурван нэмэх, гурван хасах ирмэгтэй (орсон, гарсан сумууд тус бүр 3) холбоост чиглэлт граф байх болно. Ийм графийн хувьд ирмэг бүрийг нэг удаа агуулсан битүү зам заавал олдоно (Олимпиадын цуврал №24, хуудас 36). Энэ замын дагуу 36 урттай үг бүр нэг удаа уншигдана. Нийт цифрийн тоо 3^{36} байна.

б) Дээр байгуулсан графын аль нэг оройг сонгож түүнээс эхэлсэн битүү зам хэд байхыг тоолъё. Орой бүхэн 3 удаа битүү замд орох бөгөөд эхний удаад сонголт 3, хоёр дахьд нь 2, сүүлчийнх нь 1 боломжтой байх учир нийт байрлалын тоо $(3 \cdot 2)^{35}$ байна. Эхний сонголтын элемент чөлөөтэй учир нийт тоо $6^{35} / 3^{35}$ байна. Энэ талаар сонирхсон сурагчид М.Холлын "Комбинаторика" номын 9-р бүлгийг уншиж болно.

IX-B2.



$A_1A_3=b$, $A_3A_5=c$, $A_1A_5=a$ гэе. Птоломейн теоремоор $A_1A_2A_3A_5$ дөрвөн өнцөгтийн хувьд $A_1A_2 \cdot c + A_2A_3 \cdot a = A_2A_5 \cdot b$, $A_2A_3 = \frac{A_1A_2}{A_1A_5} \cdot b$ тул $A_2A_3(c + a) = A_2A_5 \cdot b \Rightarrow \frac{A_2A_3}{A_2A_5} = \frac{b}{a+c}$ болов. Үүнтэй адилаар $A_1A_3A_4A_5$ ба $A_1A_3A_5A_6$ дөрвөн өнцөгтөөс харгалзан $\frac{A_4A_5}{A_4A_1} = \frac{c}{a+b}$,

$\frac{A_6A_1}{A_6A_3} = \frac{a}{b+c}$ гэсэн адилтгалууд гарна.

$$\frac{A_2A_3}{A_2A_5} + \frac{A_4A_5}{A_4A_1} + \frac{A_6A_1}{A_6A_3} = \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c}$$

илэрхийлэлд $a+c=x$, $a+b=y$, $a+c=z$ ба $2a=x+y-z$, $2b=y+z-x$, $2c=x+z-y$ орлуулгууд хийвэл

$$\frac{y+z-x}{2x} + \frac{x+z-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z} \right) - 3 \right) \geq \frac{3}{2}$$

болж батлагдав.

IX-ВЗ. a^3, b^4 тоонууд арифметик прогрессод агуулагддаг байг. Хэрэв $a = 0, b = 0, a^3 = b^4$ бол бодлого илэрхий. Тэгвэл $0 < a^3 < b^4$ гэж үзэхэд харшлах зүйлгүй. Учир нь $b^4 < a^3$ бол

$$b_1^4 = \left(b + (a^3 - b^4)k \right)^4 = b^4 + \ell(a^3 - b^4).$$

тоо арифметик прогрессод агуулагдах бөгөөд $a^3 < b_1^4$ болж энэ тохиолдолтой адил болох юм.

Хэрэв $b = an, n \in \mathbb{N}$ бол

$$(an^3)^{12} = a^{12}n^{36} = a^3 + a^3(an^4 - 1)(a^2n^8 + an^4 + 1)(a^6n^{24} + a^3n^{12} + 1) = a^3 + (b^4 - a^3)k$$

болж $(an^3)^{12}$ тоо прогрессод агуулагдана.

Хэрэв $a \nmid b$ бол $d = (a^3, b^4)$ гэж тэмдэглэе.

i) $p^{12} \mid d$ байх анхны тоо олдоно.

ii) $p^{12} \mid d$ байх анхны тоо олдохгүй

гэсэн хоёр тохиолдол авч үзье.

i) $p^{12} \mid d$ гэвэл $a^3 = p^{12}a_1^3, b^4 = p^{12}b_1^4$ учраас $a_1^3 + k(b_1^4 - a_1^3)$ прогресс ямар нэг тооны 12 зэрэгтийг агуулна гэж шалгахад хялбархан.

ii) $p^{12} \nmid d$ гэвэл $f = \frac{b^4 - a^3}{d}, (a, f) = 1$ байна. Учир нь $p \mid (a, f)$ гэвэл $p \mid a, p \mid f \Rightarrow b^4 = a^3 + fd, p \mid b$ гэж гарна. $a = p^\alpha a_1, b = p^\beta b_2, \left(\frac{b^4}{d}, \frac{a^3}{d} \right) = 1$ учраас $p^{4\beta} = p^{3\alpha} = p^{12\gamma}$ буюу $p^{12} \mid d$ болоход хүрнэ. Эндээс $au = 1 + fv$ байх u, v натурал тоонууд олдоно гэсэн дүгнэлтэд хүрэв. $(a, f) = 1$ гэснийг тооцов. $n = bu$ гэвэл $b_1^4 = (an)^4$ тоог авч үзье.

$$\begin{aligned} (an)^4 &= (abu)^4 = b^4(1 + fv)^4 = b^4 + fvb^4(4 + 6fv + 4f^2v^2 + f^3v^3) = \\ &= b^4 + (b^4 - a^3) \cdot \frac{b^4}{d} \cdot k = b^4 + (b^4 - a^3) \cdot \ell \end{aligned}$$

болж $(an)^4$ тоо арифметик прогрессод агуулагдана.

ММО-36, X АНГИЙН III ДАВАА

Б.Батцэнгэл

X-A1. Огторгуйд $ABCD$ зөв тетраэдр хөдөлж байв. Хугацааны нэг агшинд ABC талс нь хэвтээ байрлалтай бөгөөд энэ үед A, B цэгүүдийн хурд нь ижилхэн эгц доош чиглэсэн бөгөөд ν хэмжээтэй байжээ. Харин C цэгийн хурдны хэмжээ нь 2ν (чиглэл нь мэдэгдэхгүй байв) байжээ. Тэгвэл хугацааны энэ агшинд тетраэдрийн бусад цэгүүдийн хурд хамгийн ихдээ хэд байж болох вэ?

X-A2. Хавтгай дээр аль ч гурав нь нэг шулуун дээр үл орших таван цэг өгөгджээ. Хэрэв тэдгээрийг холбосон арван хэрчмийн есийнх нь уртын квадратууд бүхэл тоо байсан бол арав дахь хэрчмийнх нь уртын квадрат мөн бүхэл тоо байх ёстой гэдгийг батал.

X-A3. $f(x)$ функцийн хувьд $\max_{a \leq x \leq b} f(x)$ -ээр $f(x)$ -ийн $[a, b]$ хэрчим дэх хамгийн их утгыг тэмдэглэе. Ямар ч натурал n тоо болон ямар ч $a_1, a_2, \dots, a_n$ тоонуудын хувьд

$$\max_{0 \leq x \leq 2} |(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)| \leq C^n \cdot \max_{0 \leq x \leq 1} |(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)|$$

тэнцэл биш биелэх $C > 0$ тоо олдохыг харуул.

X-B1. Зөв $2n$ өнцөгтийн оройнуудыг холбон n ширхэг хэрчим татав (орой бүр зөвхөн нэг хэрчмийн орой болно). Эдгээр хэрчмүүдийн уртууд нь бүгд ялгаатай байхын тулд n нь заавал $4k$, эсвэл $4k + 1$ хэлбэртэй байх ёстой гэдгийг батал, энд k нь ямар нэгэн натурал тоо юм. $n = 2000$ болон $n = 2001$ үед яаж холбовол зохих вэ?

X-B2. Натурал n тооны хувьд $m(n)$ -ээр n -г хуваадаг хамгийн их сондгой натурал тоог тэмдэглэв.

$$\frac{m(1) + m(2) + \dots + m(n)}{1 + 2 + \dots + n} = \frac{2000}{3000}$$

байх n натурал тоо төгсгөлгүй олон олдоно гэдгийг батал.

X-B3. Хавтгай дээрх $ABCDE$ таван өнцөгтийн хувьд ABC, BCD, CDE, DEA, EAB гурвалжны талбайнууд нь тус бүр нэгээс хэтрэхгүй байв. Тэгвэл $ABCDE$ таван өнцөгтийн талбай хамгийн ихдээ хэд байх вэ? Хариултаа үндэслэ.

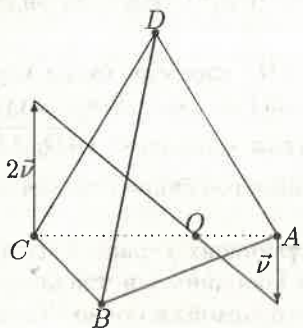
X-A1. Бидэнд дараах хялбархан дүгнэлт шаардлагатай болно: Хугацааны нэг агшинд A, B цэгүүд ижил хурдтай байсан учир тетраэдрийн хөдөлгөөнийг AB шулууны хувьд параллель зөөх буюу давших α хөдөлгөөн ба AB шулууны хувьд эргэлдэх β хөдөлгөөн 2-ын нийлбэр гэж сэтгэж болно. Тэгвэл AB шулуунтай параллель сонгосон ямар нэгэн шулууны цэгүүдийн хувьд тэдгээрийн α, β хөдөлгөөний хурдууд ижил учир хоорондоо ижил хурдтай байх болно. Тэгэхлээр хамгийн их хурдтай цэгийг ACD талс дээр хайхад хангалттай.

C цэгийн хувьд өгөгдсөн агшинд түүний α, β хөдөлгөөний чиглүүлэгч тус бүр нь ABC хавтгайд перпендикуляр босоо чиглэлтэй тул C цэгийн хурдны $\vec{v}_C$ вектор нь эгц дээшээ чиглэлтэй, эсвэл эгц доошоо чиглэлтэй 2ν урттай вектор байх ёстой.

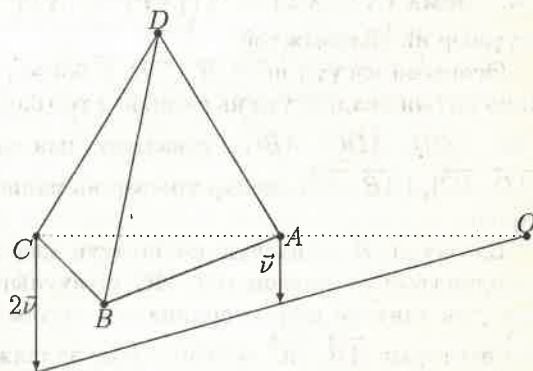
1-р тохиолдол. $\vec{v}_C$ нь дээшээ чиглэлтэй болог. Тетраэдрийн CA ирмэг дээр $2 \cdot OA = CO$ байх O цэгийг сонгон авъя (зураг 1а). Тэгвэл O цэгийн хурд нь $\vec{v}_O = \frac{1}{3}(2\vec{v}_A + \vec{v}_C) = \vec{0}$ байх бөгөөд тетраэдрийн өөр X цэгийн хувьд

$$|\vec{v}_X| = |\vec{v}_C| \cdot \frac{|OX|}{|OC|}$$

болно. Иймд хурд нь хамгийн их байдаг цэг нь O цэгээс хамгийн алслагдсан тэр цэг болно. $|\vec{v}_D| = 2\sqrt{2}\nu > |\vec{v}_C|$ тул тэр цэг нь D цэг юм.



зураг 1а



зураг 1б

2-р тохиолдол. $\vec{v}_C$ нь доошоо чиглэлтэй болог. Тетраэдрийн CA ирмэгийн үргэлжлэл дээр $2 \cdot AO = CO$ байх O цэгийг сонгон авъя (зураг 1б). Тэгвэл өмнөх тохиолдолтой нэгэн адил O цэг нь тэг хурдтай байх ба хамгийн их хурдтай цэг нь O цэгээс хамгийн алслагдсан цэг байна. $|\vec{v}_D| = \sqrt{\frac{8}{3}}\nu < |\vec{v}_C|$ тул энэ тохиолдолд тэр цэг нь C юм.

Х-А2. Энэ бодлогын 2-р өгүүлбэрийн анхны тавилт нь "Хэрэв тэдгээрийг холбосон арван хэрчмийн есийнх нь уртын квадратууд рационал тоо байсан бол арав дахь хэрчмийнх нь уртын квадрат мөн рационал тоо байх ёстой гэдгийг батал" гэсэн өгүүлбэр байсан бөгөөд энд бичигч би рационал тоо гэдгийг бүхэл тоо хэмээн засварлан өөрчилсөн болно. Яг одоогоор ингэж өөрчилсөн тохиолдолд тохирох бодолт надад алга байгаа учраас олимпиадад оролцогч бүх сурагчдаас хүлцэл өчье. Энэ бодлогыг бодвол бодолтоо надад илгээхийг хүсээд, бодлогын хуучин тавилтын бодолтыг энд толилуулья. Бодолтонд дараах хялбархан дүгнэлтийг ашиглая.

Өгүүлбэр. Хэрэв XYZ гурвалжны хувьд $|XY|^2$, $|XZ|^2$, $|YZ|^2$ тоонууд рационал тоо байвал $(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ})$ скаляр үржвэр нь мөн рационал тоо байна.

Баталгаа.

$$|YZ|^2 = (\overrightarrow{XZ} - \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} - \overrightarrow{XY}) = |XZ|^2 - 2(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}) + |XY|^2$$

юм. Иймд $(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}) = \frac{1}{2}(|XY|^2 + |XZ|^2 - |YZ|^2)$ болох ба эндээс өгүүлбэр нь ойлгомжтой.

Өгөгдсөн цэгүүд нь A, B, C, D, E бөгөөд $|DE|$ хэрчмээс бусад хэрчмийн уртын квадратууд нь рационал тоо байсан гэж үзье. Дээрх өгүүлбэрийг ADB, ADC, ABC гурвалжнуудын хувьд хэрэглэвэл $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}), (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}), (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ скаляр үржвэр нь рационал тоо байна гэж мөрдөн гарна.

Нэгэнт A, B, C цэгүүд нэг шулуун дээр үл орших учраас A цэгийг координатын эх болгон AB, AC шулууныг координатын тэнхлэгүүд гэж үзэн хавтгай дээр координатын систем тодорхойлж болно. Тэгвэл $\overrightarrow{AD}$ векторыг $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ векторуудаар задалж болно, ө.х., $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ байх x, y бодит тоонууд олдоно. Скаляр үржвэрийн чанар ёсоор

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) &= x|AB|^2 + y(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\ (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) &= x(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + y|AC|^2\end{aligned}$$

болох бөгөөд эндээс

$$x = \frac{(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) \cdot |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}|^2 \cdot |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})^2}$$

$$y = \frac{(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) \cdot |\overrightarrow{AB}|^2 - (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}|^2 \cdot |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})^2}$$

тоонууд рационал тоонууд гэж гарна. Үүнтэй адилаар хэрэв $\overrightarrow{AE} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC}$ бол u, v тоонууд нь бас рационал тоонууд гэж гарна. Одоо

$$|DE|^2 = (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) =$$

$$= ((u-x)\overrightarrow{AB} + (v-y)\overrightarrow{AC}, (u-x)\overrightarrow{AB} + (v-y)\overrightarrow{AC}) =$$

$$= (u-x)^2|\overrightarrow{AB}|^2 + 2(u-x)(v-y)(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (v-y)^2|\overrightarrow{AC}|^2$$

тоо нь рационал тоо гэдэг нь илэрхий.

X-A3. $C = 2^{12}$ тоо бодлогын шаардлагыг хангана гэдгийг харуулъя. Юуны өмнө $[a, b]$ хэрчим дээр тодорхойлогдсон эерэг тоон утгатай $f(x), g(x)$ функцүүдийн хувьд

$$\begin{aligned} \max_{a \leq x \leq b} (f(x) \cdot g(x)) &\leq \max_{a \leq x \leq b} f(x) \cdot \max_{a \leq x \leq b} g(x) \\ \max_{a \leq x \leq b} (f(x) \cdot g(x)) &\geq \max_{a \leq x \leq b} f(x) \cdot \max_{a \leq x \leq b} g(x) \\ \min_{a \leq x \leq b} (f(x) \cdot g(x)) &\geq \min_{a \leq x \leq b} f(x) \cdot \min_{a \leq x \leq b} g(x) \end{aligned} \quad (1)$$

гэсэн тэнцэл бишгүүд биелнэ гэдгийг тэмдэглэе. Дурын $a_1, a_2, \dots, a_n$ тоонуудыг сонгон авч $I = \{1 \leq i \leq n \mid |a_i| \geq 2\}$ ба $J = \{1 \leq j \leq n \mid |a_j| < 2\}$ гэж тус тус тэмдэглэе. Эхлээд $i \in I$ буюу $|a_i| \geq 2$ бол

$$\max_{0 \leq y \leq 2} |y - a_i| \leq 2 \min_{0 \leq x \leq 1} |x - a_i|$$

байхыг харуулъя. Үнэхээр хэрэв $a_i \leq -2$ бол

$$\frac{\max_{0 \leq y \leq 2} |y - a_i|}{\min_{0 \leq x \leq 1} |x - a_i|} = \frac{2 - a_i}{-a_i} \leq 2$$

бөгөөд $a_i \geq 2$ бол

$$\frac{\max_{0 \leq y \leq 2} |y - a_i|}{\min_{0 \leq x \leq 1} |x - a_i|} = \frac{a_i}{a_i - 1} \leq 2$$

юм. Иймд

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq y \leq 2} \prod_{i \in I} |y - a_i| &\leq \prod_{i \in I} \max_{0 \leq y \leq 2} |y - a_i| \leq \\ &\leq \prod_{i \in I} 2 \min_{0 \leq x \leq 1} |x - a_i| \leq 2^{|I|} \min_{0 \leq x \leq 1} \prod_{i \in I} |x - a_i| \end{aligned}$$

болно. Нөгөө талаас, хэрэв $j \in J$ буюу $|a_j| < 2$ бол $f(y) = |y - a_j|$ функцийн графикаас $\max_{0 \leq y \leq 2} |y - a_j| < 4$ гэдэг нь харагдана. Иймд

$$\max_{0 \leq y \leq 2} \prod_{j \in J} |y - a_j| \leq \prod_{j \in J} \max_{0 \leq y \leq 2} |y - a_j| < 4^{|J|}$$

болно.

Дээрх 2 тэнцэл бишээс (1) ёсоор

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq y \leq 2} \prod_{i=1}^n |y - a_i| &\leq \max_{0 \leq y \leq 2} \prod_{i \in I} |y - a_i| \cdot \max_{0 \leq y \leq 2} \prod_{j \in J} |y - a_j| \leq \\ &\leq 2^{|I|} \cdot \min_{0 \leq x \leq 1} \prod_{i \in I} |x - a_i| \cdot 4^{|J|} \end{aligned}$$

болох юм. Бид дурын натурал m тоо ба бодит $a_1, a_2, \dots, a_n$ тоонуудын хувьд

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \prod_{i=1}^m |x - a_i| \geq \left(\frac{1}{32}\right)^{2m} \quad (2)$$

гэж батлах бөгөөд хэрэв энэ нь үнэн бол

$$2^{|I|} 4^{|J|} \cdot \min_{0 \leq x \leq 1} \prod_{i \in I} |x - a_i| \leq 2^{|I|} 4^{|J|} \cdot \min_{0 \leq x \leq 1} \prod_{i \in I} |x - a_i| \cdot$$

$$32^{2|J|} \cdot \max_{0 \leq x \leq 1} \prod_{j \in J} |x - a_j| \leq 2^{|I|+12|J|} \max_{0 \leq x \leq 1} \prod_{i=1}^n |x - a_i|$$

болох юм. Одоо $|I| + |J| = n$ гэдгийг анхаарвал

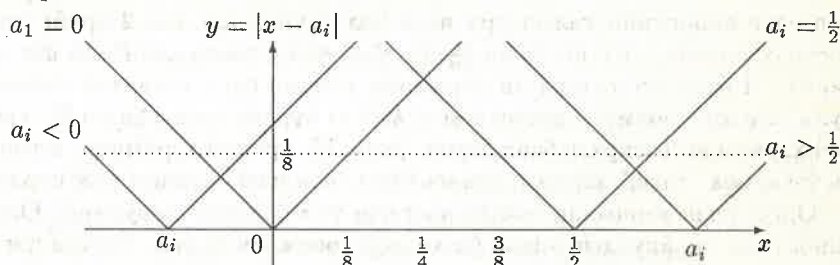
$$2^{|I|+|J|} \max_{0 \leq x \leq 1} \prod_{i=1}^n |x - a_i| \leq 2^{12n} \max_{0 \leq x \leq 1} \prod_{i=1}^n |x - a_i|$$

болж олох ёстой тооны чанарыг $C = 2^{12}$ тоо хангана гэж батлагдах юм.

(2) тэнцэл бишийн баталгаа: Эхлээд

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \prod_{i=1}^{2n} |x - a_i| \geq \left(\frac{1}{32}\right)^n \max_{0 \leq x \leq 1} \prod_{i=1}^n |x - a_i| \quad (3)$$

болохыг харуулъя. Бид $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ тоонуудын байрыг сольж $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n} \notin [0, \frac{1}{2}]$ эсвэл $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n} \notin [\frac{1}{2}, 1]$ гэж үзэж чадна. Баталгаа нь ижилхэн тул зөвхөн $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n} \notin [0, \frac{1}{2}]$ байх тохиолдлыг авч үзье. $[0, 1]$ хэрчмийн $P = [\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]$ гэсэн дэд хэрчмийг сонирхье.



Хэрэв $a_i \notin [0, \frac{1}{2}]$ байвал $f(x) = |x - a_i|$ функцийн графикаас

$$\min_{x \in P} |x - a_i| \geq \frac{1}{8}$$

болох нь харагдана (зураг). Иймд

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \prod_{i=1}^{2n} |x - a_i| \geq \max_{x \in P} \left(\prod_{i=1}^n |x - a_i| \cdot \prod_{i=n+1}^{2n} |x - a_i| \right) \geq \max_{x \in P} \prod_{i=1}^n |x - a_i| \left(\frac{1}{8}\right)^n$$

болно. $y = 4x - \frac{1}{2}$ ба $b_i = 4a_i - \frac{1}{2}$, $(1 \leq i \leq n)$ гэж тэмдэглэвэл $x \in P$ үед $y \in [0, 1]$ байх бөгөөд $|y - b_i| = 4|x - a_i|$ тул энэ тэмдэглэгээгээр

$$\max_{x \in P} \prod_{i=1}^n |x - a_i| = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot \max_{0 \leq y \leq 1} \prod_{i=1}^n |y - b_i|$$

болно. Үүгээр (3) тэнцэл биш батлагдав.

$m = 2^k$ үед (3) тэнцэл бишийг дахин дахин хэрэглэвэл

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \prod_{i=1}^{2^k} |x - a_i| \geq \left(\frac{1}{32}\right)^{2^{k-1} + \dots + 2 + 1} \max_{0 \leq x \leq 1} |x - a_i| \geq \left(\frac{1}{32}\right)^{2^k - 1} \cdot \frac{1}{2} > \left(\frac{1}{32}\right)^{2^k}$$

болно. Дурын m тооны хувьд $2^k \leq m < 2^{k+1}$ байхаар k тоог сонгон авъя. Мөн $a_1, a_2, \dots, a_m$ тоонуудыг $a_{m+1} = \dots = a_{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$ гэж тодорхойлон 2^{k+1} ширхэг тоо болгон гүйцээе. Тэгвэл

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \prod_{i=1}^m |x - a_i| \geq \max_{0 \leq x \leq 1} \prod_{i=1}^{2^{k+1}} |x - a_i| > \left(\frac{1}{32}\right)^{2^{k+1}} \geq \left(\frac{1}{32}\right)^{2m}$$

болж (2) тэнцэл биш нь батлагдана.

Х-В1. Бодлогын нөхцөл биелэхээр n хэрчим татагдсан гэж үзье. Зөв олон өнцөгтийн талын урт нь a бол түүний аль нэг 2 оройг холбосон хэрчмийн урт нь $2a \sin \frac{s\pi}{2n}$ ($1 \leq s \leq n$) тоонуудын аль нэг нь байна. Тэгэхлээр татагдсан хэрчмийн урт нь бүгд ялгаатай байхын тулд тэдгээр хэрчмүүд дотор k ($1 \leq k \leq n$) бүрийн хувьд $2a \sin \frac{k\pi}{2n}$ урттай хэрчим яг 1 ширхэг байх ёстой. $2a \sin \frac{s\pi}{2n}$ урттай хэрчмийг, хэрэв s нь тэгш бол "тэгш" хэрчим, сондгой бол "сондгой" хэрчим гэж нэрлэе.

Одоо тэгш хэрчмийн тоо m нь тэгш тоо болохыг харуулъя. Олон өнцөгтийн оройнуудыг улаан ба хөхөөр сөөлжлөн будъя. Тэгвэл тэгш хэрчим нь ижил өнгөтэй оройнуудыг, харин сондгой хэрчим нь эсрэг өнгөтэй оройнуудыг холбоно. Сондгой хэрчмийн тоо $n - m$ бөгөөд дээрх дүгнэлт ёсоор сондгой хэрчим тус бүрт 1 улаан орой байна. Эдгээр улаан оройнуудаас бусад $n - (n - m) = m$ ширхэг улаан орой нь зөвхөн хоорондоо холбогдсон байх ёстой. Иймд m нь тэгш тоо болох нь батлагдав.

Ийнхүү тэгш k ($1 \leq k \leq n$) тоонуудын тоо тэгш боллоо. Эндээс n тоо нь $4k$ эсвэл $4k + 1$ хэлбэртэй тоо байна гэдгийг харуулахад төвөггүй. Бодлогын сүүлийн хэсгийг уншигч танд бодлого болгон үлдээе.

Х-В2. $M(n) = m(1) + m(2) + \dots + m(n)$ гэж тэмдэглээд эхлээд k нь натурал тоо байх үед $M(2^k - 1)$ -г олъё. $1 \leq s < 2^k$ байх сондгой s тооны хувьд хувьд $2^\ell \leq s < 2^{\ell+1}$ байх натурал ℓ тоог олж болно. Тэгвэл $m(a) = s$ байх a ($1 \leq a < 2^k$) тоо яг $k - \ell$ ширхэг олдоно. Үнэхээр

тэдгээр a тоонууд нь $s, 2s, \dots, 2^{k-\ell-1}s$ гэсэн тоонууд юм. Иймд

$$\begin{aligned} M(2^k - 1) &= k \cdot 1 + (k-1) \cdot 3 + (k-2)(5+7) + \dots + \\ &+ 1 \cdot (2^{k-1} + 1 + 2^{k-1} + 3 + \dots + 2^k - 1) = \\ &= 1 + (1+3) + \dots + (1+3 + \dots + 2^{k-1} - 1) + (1+3 + \\ &+ \dots + 2^k - 1) = 1 + 4 + \dots + 4^{k-2} + 4^{k-1} = \frac{4^k - 1}{3} \end{aligned}$$

болно. Эндээс

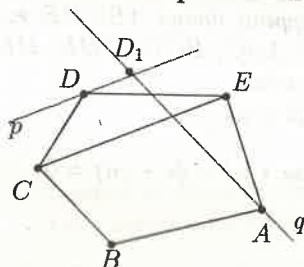
$$M(2^k - 2) = \frac{4^k - 1}{3} - (2^k - 1) = \frac{4^k - 3 \cdot 2^k + 2}{3} = \frac{(2^k - 2)(2^k - 1)}{3}$$

болох нь харагдана.

$$1 + 2 + \dots + (2^k - 2) = \frac{(2^k - 2)(2^k - 1)}{2}$$

тул бодлогын шаардлагыг $n = 2^k - 2$ ($k \geq 2$) тоонууд хангах нь батлагдана.

Х-ВЗ Г.Баярмагнайгийн бодолт.



ABC, BCD, CDE, DEA, EAB гурвалжууд дотроос хамгийн их талбайтайг нь ABC гурвалжин гэж үзье. $ABCDE$ таван өнцөгтөө гомотет хийж томруулан $S_{ABC} = 1$ гэж үзэж болно. D цэгийг дайрсан CE шулуунтай параллель p шулууныг A цэгийг дайрсан BC шулуунтай параллель q шулууныг тус тус татъя.

$p \cap q = D_1$ гэвэл $AD_1 \parallel BC$ тул $S_{BCD_1} = S_{BCA} = 1$ байна. Мөн $DD_1 \parallel CE$ учраас $S_{CD_1E} = S_{CDE}$ болох ба эндээс

$$S_{ABCD_1E} = S_{ABCE} + S_{CD_1E} = S_{ABCE} + S_{CDE} = S_{ABCDE}$$

гэж гарна. Цаашилбал C, D цэгүүд нь q шулууны нэг талд байх учраас $S_{D_1EA} \leq S_{DEA}$ байна. Үүгээр $ABCD_1E$ нь бодлогын нөхцлийг хангасан таван өнцөгт боллоо. Иймд анхнаасаа $ABCDE$ таван өнцөгтийн хувьд $S_{BCD} = 1$ буюу $AD \parallel BC$ гэж үзэж болох юм. Үүнтэй нэгэн адилаар $S_{EAB} = 1$ буюу $AB \parallel CE$ гэж үзэж болох нь харагдана.

$AD \cap CE = O$ гэж тэмдэглэе. $ABCO$ дөрвөн өнцөгт нь параллелограмм тул $S_{AOC} = 1$ байна. $x = S_{COD}$ ба $y = S_{EOA}$ гэж тэмдэглэе.

$ACDE$ дөрвөн өнцөгтийн диагоналиудын огтлолцлын цэгээр хуваагдсан хэсгийн талбайнууд

$$S_{AOC} \cdot S_{DOE} = S_{COD} \cdot S_{EOA}$$

гэсэн харьцааг хангах ёстой тул $S_{DOE} = xy$ болно. Тэгэхлээр бид $S_{CDE} = x(1+y) \leq 1$ ба $S_{DEA} = y(1+x) \leq 1$ гэсэн нөхцөлд $S_{ABCDE} = (1+x)(1+y) + 1$ илэрхийллийн хамгийн их утгыг олох ёстой боллоо. Хэрэв $x \leq y$ бол эндээс $x(1+x) \leq x(1+y) \leq 1$ буюу $x \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ гэж мөрдөнө. Одоо

$$(1+x)(1+y) + 1 = y(1+x) + 2 + x \leq 3 + x \leq \frac{\sqrt{5}+5}{2}$$

болно. Энэ хамгийн их утга нь $ABCDE$ таван өнцөгт зөв таван өнцөгт байх үед боломжтой.

Тэмдэглэл. Энэ бодлогыг Мёбиусын теорем гэгддэг дараах дүгнэлтийг ашиглан бодож болно. Уг теоремын талаар "Квант" сэтгүүлийн 1977 оны 3-р дугаараас үзнэ үү.

Теорем (Мёбиус). Оройнууд нь цагийн зүчний дагуу $ABCDE$ гэж тэмдэглэгдсэн таван өнцөгтийн хувьд ABC , BCD , CDE , DEA , EAB гурвалжны талбайнууд нь харгалзан a, b, c, d, e бол таван өнцөгтийн талбай x нь

$$x^2 - (a+b+c+d+e)x + (ab+bc+cd+de+ea) = 0$$

гэсэн тэгшитгэлийг хангана.

ММО-36, X АНГИЙН IV ДАВАА

Б.Батцэнгэл

X-A1 (Ж.Эрдэнэбилэгт). Натурал k тооны ялгаатай анхны тоон хуваагчдын үржвэрийг $f(k)$ гэж тэмдэглэе ($f(1) = 1$). $a_1 \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ тоонууд өгөгджээ. $n \geq 1$ үед $a_{n+1} = a_n + f(a_n)$ гэж тодорхойлогдох дарааллын ямар нэгэн ялгаатай m ширхэг гишүүд арифметик прогресс үүсгэнэ гэдгийг батал.

X-A2 (Л.Хатанбаатар). Гадаад байдлаар шүргэлцсэн, харгалзан O_1, O_2, O_3 төвүүдтэй $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ тойргууд өгөгдөв. ω_1, ω_2 тойргийн шүргэлтийн цэг P_3, ω_1, ω_3 тойргийн шүргэлтийн цэг P_2 болог. $A \in \omega_1$ цэгийн O_1 -ийн хувьд тэгш хэмтэй цэгийг A_1 гэж тэмдэглэе.

$$(AP_2) \cap \omega_3 = B, \quad (A_1P_3) \cap \omega_2 = C, \quad (AP_3) \cap (A_1P_2) = D$$

гэвэл B, C, D цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэдгийг батал.

X-A3 (Б.Батцэнгэл). n талтай кубийг n^3 ширхэг нэгж кубэд хуваав. m ширхэг жижиг кубийн төвийг тэмдэглэхдээ, тэмдэглэгдсэн кубийн төвүүд, катетууд нь кубийн талуудтай параллель тэгш өнцөгт гурвалжны орой болж чаддаггүй байхаар тэмдэглэв. m -ийн авч болох хамгийн их утгыг ол.

X-B1 (Г.Баярмагнай). $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийн хувьд ямар ч ялгаатай бодит a, b тоонуудыг авахад $|f(a) - f(b)| \leq |a - b|$ байжээ. Хэрэв $f(f(f(0))) = 0$ байдаг бол $f(0) = 0$ гэдгийг батал.

X-B2 (П.Алтанцог). $n \in \mathbb{N}$ тоо өгөгдөв.

$$\begin{cases} 1 \leq x + v - y \leq n \\ 1 \leq x + y - u \leq n \\ 1 \leq u + v - y \leq n \\ 1 \leq v + x - u \leq n \end{cases}$$

тэнцэтгэл бишийн системийг хангах $1 \leq x, y, u, v \leq n$ натурал тоон дөрвөлийн тоог ол.

X-B3 (У.Наранхүү). ABC гурвалжны AA_1, BB_1, CC_1 биссектри-сүүдийг татав. Хэрэв B, A_1, B_1, C_1 цэгүүд нэг тойрог дээр оршдог бол $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} - \frac{c}{a+b}$ байх ёстойг батал. Энд a, b, c нь ABC гурвалжны BC, AC, AB талын уртууд болно.

X-A1. Энэ бодлогыг бодсон сурагч байгаагүй тул зохиогчийн бодолтыг толилуулая. Өгөгдсөн рекуррент томъёоноос a_n гишүүний бүх анхны тоон хуваагчид нь a_{n+1} гишүүнийг хуваах буюу $f(a_n)|f(a_{n+1})$ гэж мөрдөн гарна. $n \geq 1$ үед $b_n = f(a_{n+1})/f(a_n)$ гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $b_1 b_2 \dots b_n |f(a_{n+1})$ ба $f(a_{n+1})$ тоонд тооны квадрат хуваагч байхгүй (ийм тоог квадратаас чөлөөт тоо гэдэг) тул $\{b_n\}$ дарааллын гишүүд нь харилцан анхны тоонууд байна.

Хэрэв ямар нэгэн s -ийн хувьд $b_{s+1} = \dots = b_{s+m-1} = 1$ байвал $\{a_n\}$ дарааллын $a_{s+1}, a_{s+2}, \dots, a_{s+m}$ гишүүд нь $f(a_s)$ ялгавартай арифметик прогресс үүсгэх болно. Одоо эсрэгээс $\{b_n\}$ дараалалд дараалсан $m-1$ ширхэг 1 байхгүй гэж үзье. Тэгвэл $\{b_n\}$ дарааллын ямар ч $m-1$ ширхэг дараалсан гишүүний үржвэр нь ямар нэгэн анхны тоон хуваагчтай байх болно. Натурал k тоог сонгон авч, s ($1 \leq s \leq k$) бүрийн хувьд $b_{(m-1)(s-1)+1} \dots b_{(m-1)s}$ үржвэрийн ямар нэгэн анхны тоон хуваагчийг p_s гэж тэмдэглэе. Өмнө тэмдэглэснээр $p_1, \dots, p_k$ анхны тоонууд ялгаатай байх ёстой. Иймд

$$\prod_{i=1}^{(m-1)k} b_i = \prod_{s=1}^k b_{(m-1)(s-1)+1} \dots b_{(m-1)s} \geq p_1 \dots p_k$$

байна. Нөгөө талаас $a_{n+1} = a_n + f(a_n) \leq 2a_n$ тул

$$\prod_{i=1}^{(m-1)k} b_i = \frac{f(a_{(m-1)k+1})}{f(a_1)} \leq a_{(m-1)k+1} \leq \dots \leq 2^{(m-1)k} \cdot a_1$$

байх ёстой. Эдгээр тэнцэл бишүүдээс $p_1 \dots p_k \leq 2^{(m-1)k} \cdot a_1$ буюу

$$\sqrt[k]{p_1 \dots p_k} \leq 2^{m-1} \cdot \sqrt[k]{a_1} \quad (*)$$

гэж мөрдөн гарна.

Лемм. $\{c_n\}$ дарааллын хувьд $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$ бол $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_1 + \dots + c_k}{k} = A$ байна.

Леммийн баталгааг уншигч танд хялбар дасгал болгон үлдээе. Бүх ялгаатай тоонуудыг өсөх дарааллаар эрэмбэлээд, n -р гишүүнийг q_n гэж тэмдэглэе. Тэгвэл мэдээж $q_1 \dots q_k \leq p_1 \dots p_k$ болох бөгөөд

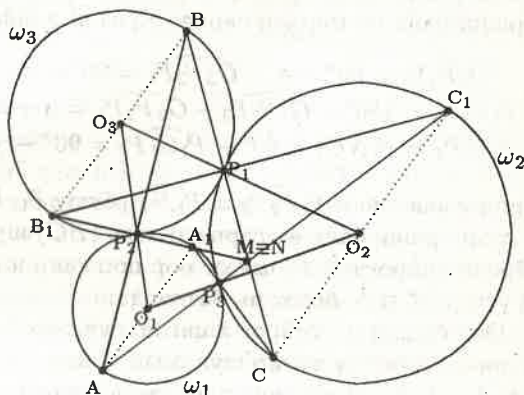
$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln q_n = \infty$ тул лемм ёсоор

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln q_1 + \dots + \ln q_k}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \ln \sqrt[k]{q_1 \dots q_k} = \infty$$

юм. Одоо $(*)$ тэнцэл бишийн хоёр талд $k \rightarrow \infty$ хязгаарт шилжин $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_1} = 1$ болохыг тооцвол зөрчил үүсч бодлого бодогдоно.

Х-А2. 1-р бодолт (Л.Хатанбаатар).

$\omega_2 \cap \omega_3 = P_1$, $(A_1P_2) \cap \omega_3 = B_1$ ба $(AP_3) \cap \omega_2 = C_1$ гэсэн нэмэлт байгуулалтууд хийе (зураг). Тэгвэл $(BC) \cap (B_1C_1) = P_1$ бөгөөд (AA_1) , (BB_1) , (CC_1) шулуунууд параллель байна гэдэг нь илэрхий. Бид (BC) , $(AP_3) = (AC_1)$, $(A_1P_2) = (A_1B_1)$ нэг цэгт огтлолцоно гэдгийг батлах ёстой. $(BC) \cap (A_1B_1) = M$ ба $(BC) \cap (AC_1) = N$ гэж тэмдэглэе. $P_1\widehat{B_1B}$, $P_2\widehat{O_1P_3}$, $P_3\widehat{O_2P_1}$, $P_1\widehat{O_3P_2}$ өнцгүүдийг харгалзан φ , 2α , 2β , 2γ гэж тус тус тэмдэглэе.



ω_3 тойргийн MB , MB_1 огтлогчийн хувьд огтлогч ба шүргэгчийн теорем хэрэглэвэл $MP_1 \cdot MB = MP_2 \cdot MB_1$ болно. Үүнтэй адилаар ω_2 тойргийн NC , NC_1 огтлогчийн хувьд огтлогч ба шүргэгчийн теорем хэрэглэвэл $NP_1 \cdot NC = NP_3 \cdot NC_1$ болно. Эндээс

$$\begin{aligned} MP_1 &= \frac{MB_1}{MB} \cdot MP_2 = \frac{\sin(90^\circ - \varphi)}{\sin(\beta + \varphi)} \cdot MP_2 = \\ &= \frac{\cos \varphi}{\sin(\beta + \varphi)} \cdot BP_2 \cdot \operatorname{tg} \beta = \cos \varphi \cdot 2R_1 \cdot \operatorname{tg} \beta \\ NP_1 &= \frac{NC_1}{NC} \cdot NP_3 = \frac{\sin(90^\circ + \varphi)}{\sin(\gamma - \varphi)} \cdot NP_3 = \\ &= \frac{\cos \varphi}{\sin(\gamma - \varphi)} \cdot CP_3 \cdot \operatorname{tg} \gamma = \cos \varphi \cdot 2R_2 \cdot \operatorname{tg} \gamma \end{aligned}$$

гэж гарна. Одоо $2R_1 \cdot \operatorname{tg} \beta$ ба $2R_2 \cdot \operatorname{tg} \gamma$ нь $O_1O_2O_3$ гурвалжинд багтсан тойргийн радиус болдог гэдгийг анхаарвал $MP_1 = NP_1$ буюу $M \equiv N$ болж батлах зүйл батлагдана.

2-р бодолт. Энэ бодлогыг бодсон ихэнх сурагч дараах аргаар бодсон байлаа. Өмнөх бодолттой ижилхэн нэмэлт байгуулалт ба өнцгийн тэмдэглэгээнүүдийг хийе. Тэгвэл

$$\begin{aligned} \widehat{O_1P_3P_2} &= 90^\circ - \alpha, & \widehat{O_2P_3P_1} &= 90^\circ - \gamma \\ \widehat{P_1P_3P_2} &= 180^\circ - \widehat{O_1P_3P_2} - \widehat{O_2P_3P_1} = \alpha + \gamma \\ \widehat{P_1MP_2} &= \widehat{BMP_2} = 90^\circ - \widehat{P_1MP_2} = 90^\circ - \beta \end{aligned}$$

гэсэн өнцгүүдийн тооцооноос $\widehat{P_1P_3P_2}$ буюу P_1, P_2, P_3, M цэгүүд нь нэг тойрог дээр оршин байх нь мөрдөн гарна. Үүнтэй адилаар

$$\begin{aligned} \widehat{O_1P_2P_3} &= 90^\circ - \alpha, & \widehat{O_3P_2P_1} &= 90^\circ - \beta \\ \widehat{P_1P_2P_3} &= 180^\circ - \widehat{O_1P_2P_3} - \widehat{O_2P_2P_1} = \alpha + \beta \\ \widehat{P_1NP_3} &= \widehat{P_1NC_1} = 90^\circ - \widehat{P_1C_1P_3} = 90^\circ - \gamma \end{aligned}$$

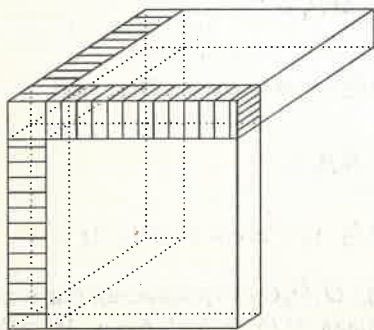
гэсэн өнцгүүдийн тооцооноос $\widehat{P_1P_2P_3} = \widehat{P_1NP_3}$ буюу P_1, P_2, P_3, N цэгүүд нь нэг тойрог дээр оршин байх нь гарна. Гэтэл (BC) шулуун P_1, P_2, P_3 цэгүүдийг дайрсан тойрогтой P_1 цэгээс өөр цор ганц цэгээр огтлолцох ёстой билээ. Үүгээр $M \equiv N$ болох нь батлагдав.

Тэмдэглэл. Энэ бодлогыг тойрог ашиглалгүйгээр " $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ " гэсэн зургаан оройтой битүү тахир шугамын хувьд

(1) A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 шулуунууд параллель бөгөөд

(2) $A_1A_2 \perp A_4A_5, A_2A_3 \perp A_5A_6, A_3A_4 \perp A_6A_1$ бол A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6 шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно гэж батал" гэж томъёолж бас болно.

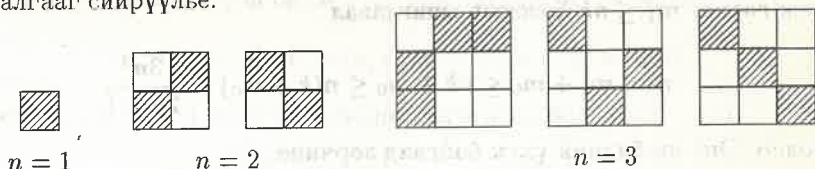
Х-А3. Энэ бодлогыг бодсон ихэнх сурагчид $m = n^2$ ширхэг жижиг кубийг тэмдэглэсэн бөгөөд тэдний бодолт дараах шалтгаанаар бүгд буруу болсон билээ. $m = \frac{3}{2}(n^2 - n) + 1$ ширхэг жижиг кубийг тэмдэглэж болно гэдгийг харуулая.



Зураг 1.

Ингэж тэмдэглэхдээ индукц ашиг-
лая. $n = 1$ үед мэдээж ганц кубийг
тэмдэглэнэ. $n - 1 \rightarrow n$ шилжилтийг
хийхдээ, өмнөх $n - 1$ талтай кубийн
аль нэг буланд зураг 1-д дүрсэлсэн
"малгай"-г (түүний $3(n - 1)$ ширхэг
жижиг кубийг тэмдэглэнэ) өмсгөхөд
хангалттай юм. Тухайлбал $n = 2, 3$
байх үед ямар жижиг кубүүдийг тэм-
дэглэх ёстойг зураг 2-оос харна уу.
Энэ зурагт кубийг огтлолуудын тус-
ламжтайгаар дүрсэлсэн юм.

Одоо m -ийн энэ утга хамгийн их гэдгийг батлах үдлээ. Зохиогч үүнд бүрэн итгэлтэй байгаа боловч хараахан баталж амжаагүй тул уншигч танаас үүнийг баталж илгээхийг хүсье. Эцэст нь, одоогоор батлагдсан хамгийн доод үнэлгээ болох $m \leq \frac{3n^3}{2n+1}$ гэсэн үнэлгээний баталгааг сийрүүлье.



Зураг 2.

n талтай кубийн $n \times 1 \times 1$, $1 \times n \times 1$, $1 \times 1 \times n$ хэмжээтэй огтлолуудыг цаашид "шугам" гэж нэрлэе. Нийт ялгаатай шугамын тоо $3n^2$ билээ. 2-оос цөөнгүй тооны тэмдэглэгдсэн жижиг кубийг агуулдаг шугамыг "сайн" шугам, яг 1 тэмдэглэгдсэн жижиг кубийг агуулдаг шугамыг "муу" шугам гэж нэрлэе. Бүх сайн шугамуудын олонлогийг A_i , муу шугамуудын олонлогийг B гэж тэмдэглээд $|A| = k$ гэж үзье. Тэмдэглэгдсэн жижиг кубүүдээ дугаарлаад, i ($1 \leq i \leq m$)-р тэмдэглэгдсэн жижиг кубийн хувьд, түүнийг дайрсан сайн шугамын олонлогийг A_i , муу шугамын олонлогийг B_i гэж тэмдэглэе. Бодлогод өгсөн нөхцөл нь ямар ч i -ийн хувьд $|A_i| \leq 1$ буюу $|B_i| \geq 2$ байна гэсэн үг юм. $I_1 = \{i \mid |A_i| = 1\}$, $I_0 = \{i \mid |A_i| = 0\}$ ба $m_1 = |I_1|$, $m_0 = |I_0|$ гэж тэмдэглэе. B_i ($1 \leq i \leq m$) олонлогууд харилцан үл огтлолцох олонлогууд учир

$$|B| = \sum_{i=1}^m |B_i| = 2m_1 + 3m_0$$

байх ёстой. Иймд $|A \cup B| \leq 3n^2$ учир

$$k + 2m_1 + 3m_0 \leq 3n^2 \quad (*)$$

болно.

$$A = \bigcup_{i=1}^m A_i = \bigcup_{i \in I_1} A_i$$

бөгөөд сайн шугам бүрт хамгийн цөөндөө 2, хамгийн ихдээ n ширхэг тэмдэглэгдсэн жижиг куб байх тул $2k \leq m_1 \leq nk$ байх ёстой.

Одоо $m > \frac{3n^3}{2n+1}$ гэж үзье. Тэгвэл (*) тэнцэл бишээс

$$k + m_0 < 3n^2 - \frac{6n^3}{2n+1} = \frac{3n^2}{2n+1}$$

гэж гарна. $m_1 \leq nk$ болохыг ашиглавал

$$m = m_1 + m_0 \leq nk + m_0 \leq n(k + m_0) < \frac{3n^3}{2n+1}$$

болно. Энэ нь бидний үзэж байгаад зөрчинө.

X-B1. Бусад бодлогоос харьцангуй хөнгөн байсан уг бодлогыг олимпиадад оролцогч олон сурагч бүрэн бодсон байлаа.

$$f_k(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_k$$

гэж тэмдэглэе. Өгсөн нөхцлөөс

$$|f_2(0) = |f_3(0) - f_2(0)| \leq |f_2(0) - f_1(0)| \leq |f_1(0) - 0| = |f_1(0)| \text{ ба}$$

$$|f_1(0) = |f_4(0)| \leq |f_4(0) - f_3(0)| \leq |f_3(0) - f_2(0)| = |f_2(0)|$$

гэж гарна. Үүгээр $|f_2(0)| = |f_1(0)| = |f_2(0) - f_1(0)|$ болох нь харагдана. Одоо $f_2(0) = f_1(0) = 0$ гэдгийг харуулахад хялбар юм.

X-B2. Энэ бодлогыг бодсон сурагч байгаагүй тул зохиогчийн бодолтыг энэ толилуулья. Хавтгай дээр ОХУ тэгш өнцөгт координатын систем сонгон авч

$$\gamma = \{(X, Y) | 1 \leq X \leq n, 1 \leq Y \leq n\}$$

гэсэн оройнууд нь натурал тоон координаттай (цаашид үүнийг товчлон н.т.к. гэж тэмдэглэе) квадратыг сонирхъё. Хэрэв (x, y, u, v) нь өгсөн тэнцэл бишүүдийг хангах дөрвөл бол

$$A = (x, y), B = (u, v), C = (u+v-y, v+x-u), D = (x+v-y, x+y-u)$$

гэсэн н.т.к. цэгүүд нь γ квадрат дотор байх ёстой. $(x, y) = (u, v)$ байвал энэ 4 цэг бүгд нэг цэг болох бөгөөд түүнд харгалзах шийд нь $(x, y) \in \gamma$ н.т.к. цэгээр бүрэн тодорхойлогдох тул n^2 ширхэг байна.

Одоо $(x, y) \neq (u, v)$ бол A, B, C, D цэгүүд квадрат үүсгэнэ гэдгийг баталъя. Үнэхээр $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (u-x, v-y)$ ба $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = (v-y, x-u)$ тул $ABCD$ ромбо байх бөгөөд $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = (u-x)(v-y) + (v-y)(x-u) = 0$ буюу $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ тул $ABCD$ квадрат мөн.

Нөгөө талаас, хэрэв бидэнд цагийн зүүний дагуу оройнууд нь

$$A = (x, y), B = (u, v), C = (z, w), D = (x, t)$$

гэсэн н.т.к.-тай $ABCD \subseteq \gamma$ квадрат өгөгдсөн бол

$$(x, y, u, v), (u, v, z, w), (z, w, s, t), (s, t, u, v)$$

гэсэн ялгаатай дөрвөн ширхэг дөрвөл тэнцэл бишийн системийн шийд болж чадна (энэ дөрвөн шийд ялгаатай гэдгийг хялбархан харуулж болно). Ялгаатай $ABCD \subseteq \gamma$ квадратуудад харгалзах дөрвөлүүд ялгаатай байна. Эндээс оройнууд нь н.т.к.-тай $ABCD \subseteq \gamma$ квадратын тоо нь N бол өгөгдсөн тэнцэл бишийн $(x, y) \neq (u, v)$ байх шийдийн тоо нь $4N$ гэж гарна.

$ABCD$ квадратыг багтаасан талууд нь тэнхлэгүүдтэй параллель, оройнууд нь н.т.к.-тай хамгийн жижиг ρ квадратыг авч үзье. Түүний талын уртыг m гэвэл $1 \leq m \leq n-1$ байх бөгөөд талын урт нь m байх бэхэлсэн тийм ρ квадрат дотор яг m ширхэг оройнууд нь н.т.к.-тай $ABCD$ квадрат багтах нь ойлгомжтой юм. γ дотор бүхлээрээ багтах талын урт нь m байх оройнууд нь н.т.к.-тай, талууд нь координатын тэнхлэгтэй параллель квадратын тоог, түүний зүүн доод булан болох (α, β) оройн координат нь $1 \leq \alpha \leq n-m, 1 \leq \beta \leq n-m$ гэсэн нөхцөлийг хангана гэдгээс $(n-m)^2$ байна гэж хялбархан тооцоолж болно. Үүгээр

$$N = \sum_{m=1}^{n-1} m(n-m)^2 = n^2 \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) -$$

$$-2n \left(\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \right) + \frac{n^2(n-1)^2}{4} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

болох нь батлагдав. Иймд бодлогын хариу $n^2 + 4N = \frac{n^2(n^2+2)}{3}$ боллоо.

Х-В3. Энэ бодлогын хамгийн товч бодолтыг хийсэн сурагч Т.Пүрэвдоржийн (Монгол-Түрк, Х анги) бодолтыг толилуулъя. B, A_1, B_1, C цэгүүдийг дайрсан тойргийг γ гэж тэмдэглэе. γ тойрог гурвалжны

AC талыг B_1 цэгээс өөр ямар нэгэн D цэгт огтолдог гэж үзье (хэрэв γ тойрог AC талыг шүргэдэг бол бид $D \equiv B_1$ гэж үзэх бөгөөд энэ тохиолдолд бодолт мөн хүчинтэй юм). γ тойргийн AB_1 ба AC_1 огтлогч, CB_1 ба CA_1 огтлогчийн хувьд огтлогч ба шүргэгчийн теоремыг хэрэглэвэл $AD \cdot AB_1 = AC_1 \cdot AB$ ба $CD \cdot CB_1 = CA_1 \cdot CB$ гэж гарна. Эдгээр тэнцлээс

$$AC = AD + CD = \frac{AC_1 \cdot AB}{AB_1} + \frac{CA_1 \cdot CB}{CB_1}$$

гэж гарах бөгөөд биссектрисийн чанар ёсоор

$$AC_1 = \frac{bc}{a+b}, \quad AB_1 = \frac{bc}{a+c}, \quad CA_1 = \frac{ab}{b+c}, \quad CB_1 = \frac{ab}{a+c}$$

тул

$$b = AC = \frac{c(a+b)}{a+b} + \frac{a(a+c)}{b+c}$$

гэж батлах ёстой тэнцэл батлагдана.

ММО-36, БАГЫН БАГШИЙН III ДАВАА

Ц.Батхүү

ББ-А1. 2 аялагч нэг ижил битүү тойрог замаар хөдлөх эсрэг чиглэлийн галт тэргэнд нэгэн зэрэг сууж хөдлөв. Хэрэв тэдний суусан буудлаас чиглэл бүрд 15 минут тутам галт тэрэг хөдөлдөг ба зүүн зүг хөдөлсөн галт тэрэг 3, баруун зүг хөдөлсөн галт тэрэг 2 цагийн дараа буудалдаа эргэж ирдэг бол аялагч тус бүр тэдний суусан галт тэрэг уулзахаас эхлэн хэдэн галт тэрэгтэй зөрөх вэ?

ББ-А2. $a_1 = 2, a_{n+1} = a_1 a_2 \dots a_n + 1$ бол $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 1$ болохыг батал.

ББ-А3. $ABCD$ гүдгэр 4 өнцөгт дотор, талуудын дундажтай холбоход үүсэх 4 дөрвөн өнцөгтийн талбайнууд тэнцүү байх O цэгийг ол.

ББ-В1. 10 алим, 15 жүрж, 14 нимбэгийг хүн бүр жимс болгоноос дор хаяж нэгийг авсан байхаар 5 хүн хичнээн янзаар хувааж болох вэ?

ББ-В2. $6x^3 - x^2 - 20x + 12 = 0$ тэгшитгэлийг бод.

ББ-В3. Өгөгдсөн тойрогт багтсан гурвалжнуудын өндрүүдийн огтлолын цэгүүдийн (орто төвийн) геометр байрыг ол.

ББ-А1. Тойрог замын уртын $\frac{1}{360}$ -ийг нэгж гэвэл зүүн болон баруун зүг хөдөлдөг галт тэрэгний хурд бодлогын нөхцөл ёсоор харгалзан $2n/m$, $3n/m$ болно. Иймд зүүн зүг хөдлөх галт тэрэгтэй эхэлж зөрөх галт тэрэг түүнээс $3n/m \cdot 15m = 45$ нэгж зайд орших ба тэд станцаас $(2n/m + 3n/m)t = 45$, $2t = 18$ нэгж зайд зөрнө. Иймд уг галт тэрэг нийт 19 галт тэрэгтэй зөрөх ба анхны хоёр галт тэрэг станцаас 144 нэгж зайд зөрөх тул түүнээс эхлэн 12 галт тэрэгтэй зөрнө. Яг үүнтэй адилаар станцаас баруун зүг хөдлөх галт тэрэгний хувьд энэ тоо 8 болохыг хялбар харж болно.

ББ-А2.

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1} + 1} &< \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} = \\ &= \frac{\overline{a_1} a_2 \dots a_{n-1} + a_1 \overline{a_2} a_3 \dots a_{n-1} + \dots + a_1 a_2 \dots a_{n-2} + 1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} = \\ &= \frac{a_{n-1}(\overline{a_1} a_2 \dots a_{n-2} + a_1 \overline{a_2} \dots a_{n-1} + \dots + a_1 a_2 \dots a_3 + 1)}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} = \\ &= \dots = \frac{a_2 + a_1 + 1}{a_1 a_2} = \frac{a_2(1 + 1)}{a_1 a_2} = 1 \end{aligned}$$

ББ-А3. $ABCD$ гүдгэр 4 өнцөгтийн хувьд $AM = MB$, $BN = NC$, $CP = PD$, $DQ = QA$ болог. Тэгвэл $QP = MN = \frac{1}{2}AC$ тул MBN , OMN гурвалжнуудын өндрийн нийлбэр h -ийн хувьд $S_{DQOP} = S_{MBNO} = \frac{1}{2}hQP$ болно. Эндээс D ба B цэгүүд AC диагональтай параллель, BD хэрчмийн дунджийг дайрсан шулуунаас ижил зайд орших нь ойлгомжтой. Иймд бидний олох O цэг гүдгэр 4 өнцөгтийн диагональтай параллель, нөгөө диагоналийн дунджийг дайрсан шулуунуудын огтлолцлын цэг болно.

ББ-В1. Комбинаторикийн үндсэн зарчим болох үржих дүрмийн тусламжтайгаар i -р төрлийн n_i ширхэг ($i = \overline{1, s}$ зүйлийг k хүнд хүн бүр

төрөл бүрээс дор хаяж нэг зүйл авсан байхаар хуваах боломжийн тоо $C_{n_1-1}^{k-1} C_{n_2-1}^{k-1} \dots C_{n_3-1}^{k-1}$ болохыг баталж болно.

ББ-В2. Тэгшитгэлийн хоёр талыг $x + \frac{1}{2}$ -оор үржүүлж өгвөл $6x^4 + 2x^3 - \frac{41}{2}x^2 + 2x + 6 = 0$ болно. $x = 0$ тэгшитгэлийн шийд болохгүй тул түүний 2 талыг $2x^2$ -т хувааж өгсний дараа $3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - \frac{41}{4} = 0$ болно. Эндээс $x + \frac{1}{x} = y$ гэвэл $3y^2 + y - \frac{65}{4} = 0$ буюу $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = -2$, $x_4 = -\frac{1}{2}$ болно.

ББ-В3. ABC гурвалжны A өнцгийг α гэвэл B ба C оройнуудаас татсан өндрүүдийн хоорондох өнцөг $\pi - \alpha$ байна. Эндээс өндрүүдийн огтлолцлын цэг нь өгөгдсөн тойрогтой тэнцүү, түүнийг B ба C цэгүүдэд огтлолдог тойрог дээр оршино. Иймд бидний олох цэгүүдийн геометр байр нь өгөгдсөн тойрогтой ерөнхий төвтэй, түүнээс 3 дахин их радиустай задгай дугуй болно.

ММО-36, БАГЫН БАГШИЙН IV ДАВАА

Ш.Мөнхцэцэг

ББ-А1 (Д.Даянцолмон). 6×6 квадратын нүднүүдэд 1-36 тоонуудыг бичье.  хэлбэрийн дүрсийн дунд нүдэнд бичигдсэн тоо нөгөө хоёроосоо бага бол түүнийг сайн нүд гэе. Сайн нүдний тоо хамгийн ихдээ, хамгийн багадаа хэд байх вэ?

ББ-А2 (Ү.Маам). $f(x) = 3x + 2$ бол $\underbrace{f(f(f \dots f(x)))}_{2000}$ -ыг ол.

2000

ББ-А3 (Б.Баясгалан). ABC гурвалжин AB , BC талууд дээр суурьтай, оройн өнцгүүд M , N нь харгалзан 72° , 108° байх адил хажуут гурвалжнуудыг байгуулав. AC талын дундаж цэг нь K бол MNK гурвалжны өнцгүүдийг ол.

ББ-В1 (Ц.Дашдорж). Торт 12 тэнцүү зүсэмд хуваагдсан байв. Бүлгийн хүү бүр 6 эсвэл 7 зүсмийг, охин бүр 2 эсвэл 3-ыг иднэ. Хэрэв 4 торт хүрэлцэхээргүй, харин 5 торт илүү гарахаар байсан бол бүлэгт хэдэн хүү, охин байсан бэ?

ББ-В2 (Б.Батцэнгэл).



9 одойн одой бүр 2-оос хэтрэхгүй одойтой муудалцсан байв. Тэдгээрийг 3×3 өрөөнүүдэд аль ч одой муудалцсан одойтойгоо зэргэлдээ оршихгүйгээр байрлуулж болно гэж батал (зэргэлдээ нүд нь ерөнхий талтай).

ББ-В3 (А.Хашбаатар). O төвтэй тойрогт багтсан ABC гурвалжны CA талыг B' цэгт, AB талыг CH_3 өндрийн хувьд A оройтой тэгш хэмтэй орших C' цэгт огтолсон шулуун OA радиуст перпендикуляр бол

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BB' \cdot CC' \cdot \sin \widehat{CAB}$$

байхыг батал.

ББ-А1. Квадратын  2×2 хүснэгтийн хамгийн бага тоо бүхий нүд сайн нүд болно. 6×6 хүснэгт 9 ширхэг үл огтлолцох 2×2 хүснэгтүүдэд хуваагдана. Иймээс 9-өөс цөөнгүй сайн нүд заавал байна. Яг 9 нүд сайн байх хүснэгтийг үзүүлэв (хүснэгт 1.).

3	4	32	31	10	11
2	1	29	30	9	12
24	21	33	34	18	19
23	22	36	35	17	20
14	13	26	25	5	6
15	16	27	28	8	7

Хүснэгт 1.

16	18	21	25	30	36
17	20	24	29	35	11
19	23	28	34	12	7
22	27	33	12	8	4
26	32	14	9	5	2
31	15	10	6	3	1

Хүснэгт 2.

Мөр бүрийн хувьд хамгийн их тоо орших нүд сайн байж чадахгүй. Иймээс сайн нүдний тоо 30-аас ихгүй байна. Яг 30 сайн нүдтэй байх хүснэгтийг үзүүлэв (хүснэгт 2.).

ББ-А2. $\underbrace{f(f(f \dots f(x) \dots))}_n$ болохыг хялбархан таамаглаж болно.

Үүнийг индукцээр баталъя.

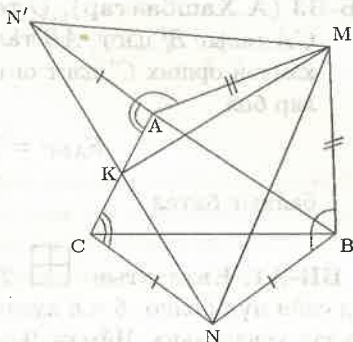
$$n = 1 \text{ үед } f(x) = 3x + 3 - 1 = 3x - 2$$

$$n = k \text{ үед } \underbrace{f(f \dots f(x) \dots)}_k = 3^k x + 3^k - 1$$

$n = k + 1$ үед $\underbrace{f(f \dots f(x) \dots)}_{k+1} = f(3^k x + 3^k - 1) = 3(3^k x + 3^k - 1) + 2 = 3^{k+1} x + 3^{k+1} - 3 + 2 = 3^{k+1} x + 3^{k+1} - 1$ болж батлагдав. Эндээс $\underbrace{f(f \dots f(x) \dots)}_{2000} = 3^{2000} x + 3^{2000} - 1$ байна.

ББ-А3.

N цэгийг K цэгийн хувьд тэгш хэмээр хувиргахад гарах цэгийг N' гэе. Тэгвэл $CN = AN'$ ба $\angle MBN = \angle MAN'$ байна. $MA = MB$ тул $\triangle MBN = \triangle MAN'$ байна. Иймд $\triangle N'MN$ адил хажуут учраас $\angle MKN = 90^\circ$. Мөн $\angle N'MA = \angle NBM \Rightarrow \angle N'MN = \angle AMB = 72^\circ \Rightarrow \angle KMN = 36^\circ, \angle KNM = 54^\circ$ болно.



ББ-В1. x хүүгийн, y охины тоо байг. Бодолтын нөхцлөөс

$$\begin{cases} 48 < 6x + 2y & (1) \\ 7xy < 60 & (2) \end{cases}$$

болно. Эндээс $\begin{cases} 49 \leq 6x + 2y \\ 7x + 3y \leq 59 \end{cases}$ гэж гарна.

$$49 + x + y \leq 7x + 3y = 6x + 2y + (x + y) \leq 59$$

буюу $x + y \leq 10$ гэж гарна. $y \leq 10 - x, 49 \leq 6x + 2y \leq 6x + 2(10 - x) = 4x + 20, 29 \leq 4x, x \geq 8$.

Хэрэв $x \geq 9$ бол $7 \cdot 9 > 60$ тул тэд 5 тортыг идэж чадна. Иймд $x = 8$ гэж гарав. $y \leq 10 - x = 2$. $y = 0$ бол (1)-д зөрчинө. $y = 2$ бол (2)-т зөрчинө. Иймд $y = 1$ байх ганц боломж үлдэв. $(x, y) = (8, 1)$ үед (1) ба (2) биелнэ.

ББ-В2. Энэ бодлогыг бүрэн бодсон Увс аймгийн багш Ж.Энхцэцэгийн бодолтыг бага зэрэг засварлан толилуулъя. Одойнуудыг оройнууд гэж сэтгэн, муудалцсан одойнуудыг хэрчмээр холбон дүрсэлбэл энэ үүсгэх дүрсээс одойнуудын хоорондын сайн муу харилцааг бүрэн

мэдэж болох юм. Бодлогын нөхцөл нь энэ дүрсийн орой бүрээс 2-оос хэтрэхгүй тооны хэрчим татагдсан байна гэсэн өгүүлбэрт шилжинэ. Үүнээс өөр нөхцөл бодлогонд өгөгдөөгүй учир үүсч болох бүх дүрсүүдийг тооцоолж, дүрс тус бүрийн хувьд түүнд тохирох өрөөнүүдэд байрлуулах байрлуулалтыг олох ёстой. Гэвч 9 орой бүрээс 2-оос хэтрэхгүй тооны хэрчим татагдсан дүрсүүдийг бүгдийг олно гэдэг нь нилээд нүсэр бодлого учраас дүрсийн тоог цөөлөх ямар нэгэн арга заавал шаардлагатай болно.

А дүрсэд, тус бүр нь 1-ээс хэтрэхгүй тооны оройтой хэрчмээр холбогдсон байдаг, хоорондоо хэрчмээр холбогдоогүй 2 орой олдвол тэдгээрийг хэрчмээр холбоход (харгалзах одойнуудыг нь муудалцсан гэж үзэхэд) гарах дүрсийг *B* гэж тэмдэглэе.



Зураг 1.

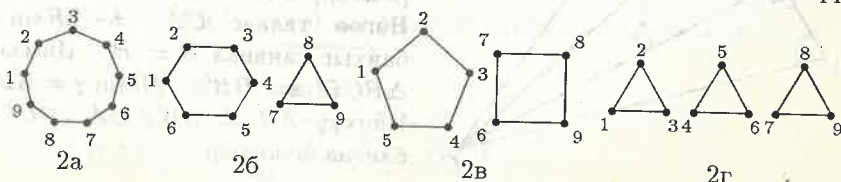
Тэгвэл хэрэв *B* дүрсэд тохирох өрөөнүүдэд байрлуулах байрлуулалт олдвол тэр байрлуулалт нь *A* дүрсэд бас тохирно гэдэг нь ойлгомжтой.

Ингэж шинээр нэмж хэрчим татах үйлдлийг олон дахин хийвэл, эцэст нь дараах 2 төрлийн дүрсэд шилжих бөгөөд өмнөх өгүүлбэрээс зөвхөн эдгээр дүрсүүдэд тохирох өрөөнүүдэд байрлуулах байрлуулалтыг олоход хангалттай болох юм. Үүнд

1) 9 орой бүрээс яг 2 ширхэг хэрчим гарсан дүрс,

2) 2 орой нь хоорондоо хэрчмээр холбогдох ба үлдэх 7 орой нь орой бүрээс яг 2 ширхэг хэрчим татагдан зөвхөн хоорондоо холбогдсон байдаг дүрс.

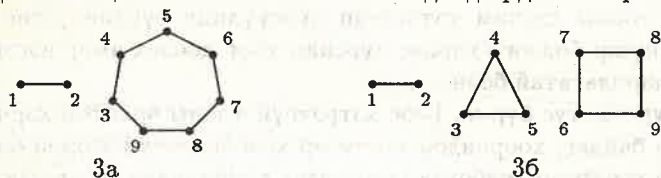
1) Одоо орой бүрээс яг 2 орой гардаг дүрсийг ерөнхий оройгүй хэдэн битүү тахир шугам хэмээн сэтгэж болно гэдгийг тайлбарлая. Үнэндээ ямар нэгэн оройгоос эхлэн татагдсан хэрчмийн дагууд явахад, хэзээ нэгэн цагт эргэж тэр орой дээрээ ирэн битүү тахир шугам (цикл зам) үүсгэнэ. Хэрэв энэ битүү тахир шугамд харьяалагддаггүй оройнууд болон хэрчмүүд байвал дахин дээрх аргаар тэр үлдэх хэсгээс битүү



Зураг 2.

тахир шугам олж болох юм. Ингэж үүсэх битүү тахир шугам бүр дор хаяж 3 оройтой байх ёстой бөгөөд эндээс боломжит бүх дүрсийг тооцоолж болох юм. Эдгээр дүрсүүдийг зураг 2-т үзүүлэв.

2) Өмнөх тохиолдолтой нэгэн адилаар тэр үлдэх 7 оройн үүсгэх дүрсийг бүгдийг тооцоолж болно. Энэ тохиолдолд ердөө 2 төрлийн дүрс үүснэ.



Зураг 3.

Эцэст нь энэ 6 дүрс тус бүрт тохирох ерөөнүүдэд байрлуулах байрлуулалтыг олох үлдлээ. Ингэж байрлуулах нь харьцангуй хялбархан бөгөөд тухайлбал зураг 4а-д дүрсэлсэн байрлуулалт нь 2а, 2б, 2г, 3а дүрсүүдэд, 4б байрлуулалт нь 2в, 3б дүрсүүдэд тус тус тохирно.

1	5	9
4	8	2
7	3	6

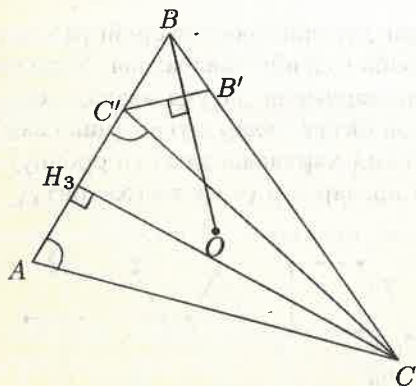
4а)

1	6	2
7	3	8
4	9	5

4б)

Зураг 4.

ББ-ВЗ.



$AB \perp AN_3$ бөгөөд H_3 өндрийн суурь, C' нь AB тал дээр CH_3 өндрийн хувьд A оройтой тэгш хэмтэй орших тул $CA = CC'$. Иймээс $\angle AC'C = \angle CAB$. $\triangle CC'B$ гурвалжныг багтаасан тойргийн R' радиусыг олоход (синусын теоремоор) $CH = CC' = 2R' \sin \beta$. Нөгөө талаас $CA = 2R \sin \beta$ байхыг санавал $R = R'$. Иймээс $\triangle BCB'$ -аас $BB' = 2R \sin \gamma = AB$. Ийнхүү $AB = BB'$, $CA = CC'$ байгаа болохоор

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} AB \cdot CA \sin \alpha = \frac{1}{2} BB' \cdot CC' \sin \alpha$$

ММО-36, Дундын багшийн III даваа

В.Адъяасүрэн, Б.Баясгалан

ДБ-А1. 1999 | $2^n + n^3$ байх натурал n тоо төгсгөлгүй олон олдоно гэж батал.

ДБ-А2. Эерэг бодит a, b, c тоонуудын хувьд

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}$$

болохыг батал.

ДБ-А3. O төвтэй тойрогт $ABCD$ дөрвөн өнцөгт багтжээ. $AB \cap CD = E$, $AC \cap BD = F$ байг. EF диаметр бүхий тойрог, OE -тэй M цэгт огтлолцоно. $BCFM$ дөрвөн өнцөгтийг тойрогт багтааж болно гэж батал.

ДБ-В1. Тэгш өнцөгтийг таван ширхэг мохоо өнцөгт гурвалжинд хувааж болох уу?

ДБ-В2. Функциудийн нэмэх, хасах, үржих болон функцийг тоогоор үржих, тоог нэмэх үйлдлүүдийн тусламжтайгаар $f(x) = \frac{1}{x}$ функцийг илэрхийлж болох авч аль ч хоёроор нь тийнхүү илэрхийлж болдоггүй f_1, f_2, f_3 гэсэн функцүүд олдох уу?

ДБ-В3. Том шатрын хөлгөөс $2n$ ширхэг нүдийг, аль ч тэмдэглэгдсэн нүднээс өөр дурын тэмдэглэгдсэн нүдэнд тэмдэглэгдсэн нүднүүдээр дамжин тэрэг хүрч чаддаг байхаар тэмдэглэв. Тэмдэглэгдсэн нүднүүдээс үүсэх дүрсийг n ширхэг тэгш өнцөгтөд хувааж болохыг батал.

ДБ-А1. 1999 анхны тоо. Фермагийн бага теоремоор $2^{1998} \equiv 1 \pmod{1999}$. Эндээс

$$2^{1998} \equiv 1 \equiv 2000 \pmod{1999} \Rightarrow 2^{1997} \equiv 1000 \pmod{1999}$$

Иймээс Иймээс $\forall k \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд $2^{1998k+1997} \equiv 1000 \pmod{1999}$. Нөгөө талаас $\forall m \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд $(1999m + 1989)^3 \equiv -1000 \pmod{1999}$. Ийнхүү бид $n = 1998k + 1997 = 1999m + 1989$ байхаар k, m тоонууд олж чадвал $2^n + n^3$ тоо 1999-д хуваагдах болно. $1999k + 1997 = 1999m + 1989 \Rightarrow 1998k = 1999m - 8 \Rightarrow k = m + \frac{m-8}{1998}$. $m = 8$ гэвэл $n = 1999 \cdot 8 + 1989 = 17963$. Ингэхлээр натурал q бүрийн хувьд $n = 3994002q + 17963$ гэж авбал $2^n + n^3$ тоо нь 1999-д хуваагдах болж бодлого бодогдов.

ДБ-А2. Батлах тэнцэтгэл биш

$$\frac{ab+ac}{a^2+b^2+c^2+2bc} + \frac{bc+ba}{a^2+b^2+c^2+2ac} + \frac{ac+bc}{a^2+b^2+c^2+2ab} \leq \frac{6}{5} \quad (1)$$

тэнцэтгэл биштэй тэнцүү чанартай. Эхлээд

$$a^6 + b^6 + c^6 \geq a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 \quad (2)$$

$$a^6 + b^6 + c^6 \geq a^4c^2 + b^4a^2 + c^4b^2 \quad (3)$$

$$a^6 + b^6 + c^6 \geq a^4bc + b^4ca + c^4ab \quad (4)$$

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \geq a^3bc^2 + b^3ca^2 + c^3ab^2 \quad (5)$$

$$a^5b + a^5c + b^5c + b^5a + c^5a + c^5b \geq 2a^3b^2c + 2b^3c^2a + 2c^3a^2b \quad (6)$$

$$a^4bc + b^4ca + c^4ab + 3a^2b^2c^2 \geq a^3b^2c + a^3bc^2 + b^3c^2a + b^3ca^2 + c^3a^2b + c^3ab^2 \quad (7)$$

тэнцэл бишүүдийг батлая. Кошийн тэнцэл биш хэрэглэвэл:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= \frac{2a^6 + b^6}{3} + \frac{2b^6 + c^6}{3} + \frac{2c^6 + a^6}{3} \geq \\ &\geq \sqrt[3]{a^6 \cdot a^6 \cdot b^6} + \sqrt[3]{b^6 \cdot b^6 \cdot c^6} + \sqrt[3]{c^6 \cdot c^6 \cdot a^6} = a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 \end{aligned}$$

болж (2) тэнцэл биш батлагдав. (3), (4), (5), (6) тэнцэл бишүүдийг яг үүнчлэн батална. Одоо (7)-г баталъя. $a \geq b \geq c > 0$ гэж үзье. $(b-a)(b-c) \leq 0$ гэдгийг анхаарвал

$$\begin{aligned} a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) &\geq \\ a(a-b)(a-c) + a(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) &= \\ a(a-b)^2 + c(c-a)(c-b) = a(a-b)^2 + c(a-c)(b-c) &\geq 0 \end{aligned}$$

болох ба эндээс $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b$ гэж гарна. Эндээс (7) тэнцэтгэл биш мөрдөн гарна. (4) тэнцэл бишийн

хоёр талыг 2-оор, (7) тэнцэл бишийн хоёр талыг 4-өөр үржүүлээд эдгээр тэнцэл биш болон (2), (3), (5), (6) тэнцэл бишүүдийг нэмээд хувиргалт хийсний эцэст (1) тэнцэл биш гарна.

ДБ-А3. $k = EA \cdot EB$ гэе. I_E^k инверсийг авч үзье. Тэгвэл $I_E^k(B) = A$, $I_E^k(C) = D$, EF нь диаметр тул $\angle EMF = 90^\circ$. EAC , EDB гурвалжнуудыг багтаасан тойргийг харгалзан ω_1 , ω_2 гэж тэмдэглэе. $\omega_1 \cap \omega_2 = \{E, P\}$ байг.

$$\angle APD = \angle APE + \angle EPD = \angle ACD + \angle ABD = 2 \cdot \angle ACD = \angle AOD$$

тул $AOPD$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. Иймээс

$$\begin{cases} I_E^k((AC)) = \omega_2 \\ I_E^k((BD)) = \omega_1 \end{cases} \Rightarrow I_E^k(F) = P$$

Бид $\angle EPO = 90^\circ$ гэж баталбал $I_E^k(M) = O$.

$$\angle EPO = \angle EPA + \angle EPD = \angle ECA + \angle ADP = 90^\circ$$

Иймээс $I_E^k(BCFM) = ADPO$. $ADPO$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтах тул $BCFM$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана.

ДБ-В1. Эсрэгээс нь хувааж болдог гэж үзье. Тэгвэл уг тэгш өнцөгт доторхи 5 ширхэг мохоо өнцөгт гурвалжны дотоод өнцгүүдийн нийлбэр 900 байна. Харин тэгш өнцөгтийн 4 оройд нийт 360 градусын өнцөг харгалзах ба энэ цэгүүд дээр мохоо өнцөгтэй байх гурвалжинг тэгш өнцөгт дотор үүсгэх боломжгүй юм. Иймд тэгш өнцөгтийн дотор эсвэл тал дээр нь байх гурвалжны оройн цэгүүдэд 540 градусын өнцөг харгалзана. Ийм оройн цэг эсвэл 3 гурвалжны орой болно, эсвэл нэг гурвалжны орой болно. Эхний тохиолдолд түүнд хамгийн ихдээ 3 мохоо өнцөг харгалзана, сүүлчийн тохиолдолд түүнд хамгийн ихдээ 1 мохоо өнцөг харгалзана. Тэгвэл

1) $540 = 3 \times 180$ тохиолдолд хамгийн ихдээ 3 ширхэг мохоо өнцөг

2) $540 = 360 + 180$ тохиолдолд хамгийн ихдээ $1 \cdot 3 + 1 = 4$ ширхэг мохоо өнцөг үүсч чадна. Гэтэл дор хаяж 5 ширхэг мохоо өнцөг үүсэх шаардлагатай тул зөрчилд хүрлээ.

Энэ бодлогыг ерөнхий тохиолдолд хамгийн цөөндөө хэдэн ширхэг мохоо өнцөгт гурвалжинд хувааж болох вэ? гэж өргөтгөж болох бөгөөд энэ үед дээрх зарчмаар тооцоолон дор хаяж 6 гурвалжинд хуваах

шаардлагатай гэж гарах бөгөөд 6 ширхэг гурвалжинд хувааж болохыг хялбархан шалгаж болно.

ДБ-В2. $\frac{1}{x \ln x}, \frac{\ln x}{e^x}, \frac{e^x}{x}$ функцүүд бодлогын нөхцлийг хангана.

ДБ-В3. Бодлогын нөхцлөөр өгөгдөх дүрсийг F гэе. F дүрс нь нэгж квадратуудаас тогтоно. Энэ квадратуудын төвөөр орой хийсэн, хөрш квадратуудын төвийг холбоход үүсэх графыг авч үзье. Энэ граф нь бодлогын нөхцөл ёсоор холбоост байх бөгөөд орой бүрийн зэрэг нь 4-өөс хэтрэхгүй. Иймд энэ холбоост графын орой бүрийг агуулсан циклгүй дэд графийг (максималь дэд модыг) сонгож болно. Энэ модыг M гэе.

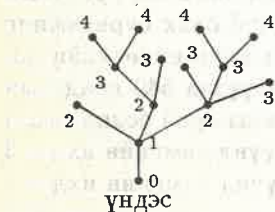
Бодлогоо n тоогоор индукцлэж батлая. Энэ модны зэрэг нь i байх оройн тоог k_i гэвэл

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 2n, & k_1 \geq 2 \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 2(2n - 1) \end{cases}$$

байна. n нь 1, 2, 3 г.м. бага утгууд дээр үнэн байхыг шууд шалгаж болно.

I тохиолдол. Хэрэв M модонд зэрэг нь 2 байх орой олддог бол M графийг тус бүрийн оройн тоо нь тэгш бөгөөд холбоост үл огтлолцох 2 графийн нэгдэлд задалж болно. Иймд $k_2 = 0$ гэж үзэж болно.

II тохиолдол. Зэрэг нь 1 байх ямар нэг оройгоор үндэс хийсэн M модны дүрслэлийг авч үзэн уг үндэснээс алслагдсан зайгаар нь оройнуудын байрлалыг дугаарлая (зураг 1 үз).

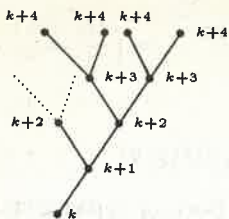


Зураг 1.

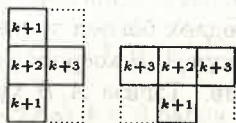
III тохиолдол. $k_2 = k_4 = 0$ учраас $k_1 = n + 1$, $k_3 = n - 1$. Тэгвэл M мод нь бинар хэлбэрийн мод байна, ө.х., орой бүрээс дээшээ дахин 2 орой салбарласан байна. Одоо M мод зураг 2-т үзүүлсэн дэд модыг

M графын зэрэг нь 4 байх орой байдаг гэе. Тэгвэл ийм оройнуудаас хамгийн их дугаартай аль нэгийг сонгоё. Тэгвэл энэ орой болон түүнээс дээш орших бүх оройнууд холбоост дэд графийг үүсгэх бөгөөд нийт оройн тоо тэгш байна. Иймд индукцийн алхмыг ашиглах боломжтой болно. Эндээс $k_4 = 0$ гэж үзэж болно.

агуулдаг гэж үзье.

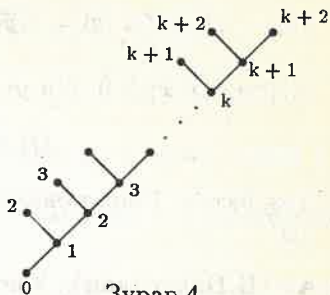


Зураг 2.

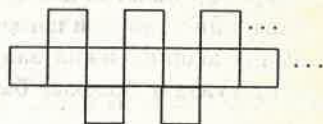


6)

Зураг 3.



Зураг 4.



Зураг 5.

Тэгвэл M модонд харгалзах F дүрс зураг 3-т үзүүлсэн дэд дүрсүүдийн аль нэгийг агуулах болно. Аль ч тохиолдолд F дүрс 2×2 квадратыг агуулах болно. Тэгвэл M модны зураг 2-т үзүүлсэн хэлбэрийн дэд модыг шинээр 1 ирмэг холбож, хуучин 1 ирмэгийг арилган M модонд зэрэг 4, эсвэл 2 байх оройг үүсгэж болно. Тэгвэл өмнөх 2 тохиолдолд шилжих юм.

IV тохиолдол. Одоо зураг 2-т үзүүлсэн дэд граф M модонд байхгүй гэж үзье.

Тэгвэл M мод зураг 4-т үзүүлсэн хэлбэртэй байна. Хэрэв F дүрс нь өмнөх тохиолдлын адил 2×2 дүрсийг агуулдаггүй бол F дүрс нь зураг 5 үзүүлсэн хэлбэртэй байна. Тэгвэл F дүрс нь $1 \times (n+1)$ болон $n-1$ ширхэг 1×1 хэмжээтэй нийт n ширхэг тэгш өнцөгтөд хуваагдах болно. Бодлого бодогдов.

ММО-36, Дундын багшийн IV даваа

Ц. Дашдорж

ДБ-А1 (Б.Батцэнгэл). $\frac{(x+y+z)^2}{xyz} = k, x, y, z, k \in \mathbb{N}$ бол k -ийн авч болох бүх утгыг ол.

ДБ-А2 (Л.Хадхүү). $x_k, y_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $f(x, y) = x_1 \overline{y_1} - \sum_{i=2}^n x_i \overline{y_i}$ гэе.

Хэрэв $f(x, x) \geq 0$, $f(y, y) \geq 0$ бол

$$|f(x, y)|^2 \geq f(x, x)f(y, y)$$

гэж батал. Тэнцэл биелэх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцлийг ол.

ДБ-А3 (Б.Баясгалан). Хавтгайд A хүн бага тойргоор, B хүн их тойргоор ижил өнцөг хурдтайгаар хөдлөх бөгөөд тэдгээрийг уг хавтгайн тодорхой цэгээс ажиглах C хүн A, B хоёроос хугацааны ямарч агшинд ижил зайд оршдог байв. Тэгвэл A, B хүмүүс нэг цэгт уулздаг болохыг батал.

ДБ-В1 (Б.Баясгалан, Л.Хатанбаатар). Тойрогт багтсан харилцан перпендикуляр диагональтай $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн ABD, BCD гурвалжнуудад багтсан тойргийн төвүүдийг харгалзан O_1, O_2 гэе. Тэгвэл $\triangle O_1 O_2 D$ -г багтаасан тойрог гадаад тойргоо шүргэх албатай юу?

ДБ-В2 (Л.Шагдар, П.Энхболд). $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ болог. Хэрэв $k \geq \log_2(m-1)$ бол

$$\prod_{s=1}^n \frac{ms-1}{ms} < \sqrt[2^{k+1}]{\frac{1}{2n+1}}$$

гэж батал.

ДБ-В3 (Ц.Дашдорж). $p_1, \dots, p_s$ анхны тоонууд ба $n \in \mathbb{N}$ тоо өгчээ. $p_1, \dots, p_s$ тоонуудын зөвхөн нэгд хуваагддаг n -ээс хэтрэхгүй натурал тоонуудын тоог ол.

ДБ-А1. 1-р бодолт. $F(x, y, z) = \frac{(x+y+z)^2}{xyz}$ гэж тэмдэглэе. $k \in \mathbb{N}$ тоог бэхлээд $F(x, y, z) = k$ тэгшитгэлийг бодох ёстой. x, y, z нь ижил эрхтэй учраас $x \leq y \leq z$ гэж үзэж болно. Хэрэв $z = 1$ бол $k = F(1, 1, 1) = 9$ байх нь ойлгомжтой. Цаашид $z \geq 2$ гэж үзье.

z нь $F(x, y, z) = k$, $x \leq y \leq z$ байх шийдүүдийн дотроос хамгийн бага утгатай гэж үзье.

$$kxyz = (x+y+z)^2 = (x+y)^2 + 2(x+y)z + z^2$$

байх ёстой. Хэрэв $F(x, y, z) = k$ бол

$$F\left(x, y, \frac{(x+y)^2}{z}\right) = \frac{\frac{(x+y)^2}{z^2}(x+y+z)^2}{xy \frac{(x+y)^2}{z}} = \frac{(x+y+z)^2}{xyz} = k$$

буюу $\left(x, y, \frac{(x+y)^2}{z}\right)$ нь мөн тэгшитгэлийг хангана. Эндээс хэрэв $z > x + y$ буюу $\frac{(x+y)^2}{z} < z$ бол z нь хамгийн бага гэж үзсэнд зөрчинө. Үүгээр $z \leq x + y$ боллоо. Одоо

$$k = \frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} \leq \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} \leq \frac{7}{x} + \frac{2}{z}$$

болно. $z \geq 2$ бол $k \leq 8$ байна гэж мөрдөн гарна.

Дараа нь $k \neq 7$ байна гэдгийг баталъя. Эсрэгээс $k = 7$ гэж үзвэл, $7 \leq \frac{7}{x} + \frac{2}{z}$ гэсэн тэнцэл бишээс $x < 2$ гэж мөрдөн гарна. эндээс $x = 1$ буюу $y \leq z \leq y + 1$ болно. Хэрэв $z = y$ бол тэгшитгэл нь $(1 + 2y)^2 = 7y^2$ болно, хэрэв $z = y + 1$ бол тэгшитгэл нь $(2 + 2y)^2 = 7y(y + 1)$ болно. Аль ч тэгшитгэл нь бүхэл тоон шийдгүй юм.

Эцэст нь

$$\begin{aligned} F(9, 9, 9) &= 1, & F(4, 4, 8) &= 2, & F(3, 3, 3) &= 3, & F(2, 2, 4) &= 4, \\ F(1, 4, 5) &= 5, & F(1, 2, 3) &= 6, & F(1, 1, 2) &= 8, & F(1, 1, 1) &= 9 \end{aligned}$$

байна гэдгийг тэмдэглэе. Үүгээр бодлогын хариу нь $1 \leq k \leq 9$ бөгөөд $k \neq 7$ боллоо.

2-р бодолт. Сэлэнгэ аймгийн 4-р сургуулийн багш Ч.Болдын бодолтыг бага зэрэг засварлан толилуулая. Эхлээд $k > 9$ байж болохгүйг харуулья. Юуны өмнө $k > 9$ үед x, y, z нь бүгд ялгаатай байна гэдгийг баталъя. Эсрэгээс нь x, y, z -ийн аль нэг 2 нь тэнцүү, тухайлбал $x = y$ гэж үзье. Тэгвэл $(2x + z)^2 = kx^2z$ буюу $\left(2 + \frac{z}{x}\right)^2 = kz$ болно. Эндээс $t = \frac{z}{x}$ натурал тоо гэдэг нь харагдана. Одоо $(2 + t)^2 = ktx$ буюу $t + 4 + \frac{4}{t} = kx$ байх ёстой. Эндээс t нь зөвхөн 1, 2, 4 гэсэн утгуудыг авах боломжтой гэж гарна. Эдгээр утгуудын хувьд $t + 4 + \frac{4}{t} \leq 9$ байх ба энэ нь $k > 9$ гэдэгт зөрчинө.

Одоо $k > 9$ ба $x > y > z$ гэж үзье. $f(X) = (X + y + z)^2 - kXyz$ гэсэн квадрат гурван гишүүнтийг сонирхвол бидний үзэж байгаагаар

нэг язгуур нь x юм. f -ийн нөгөө язгуурыг x' гэвэл $\frac{(x' + y + z)^2}{x'yz} = k$ буюу x', y, z нь мөн манай бодлогын шийд байх бөгөөд Виетийн томьёо ёсоор $x + x' = kyz - 2(y + z)$ тул x' нь бүхэл тоо байна.

$$f(y) = (2y + z)^2 - ky^2z < y^2(9 - kz) < 0$$

учраас $x' < y < x$ байх бөгөөд $f(0) = (y + z)^2 > 0$ тул $0 < x'$ байна. Үүгээр бид x, y, z шийдийг x', y, z болгож буулгаж чадлаа. Иймд буулгах аргаар $k > 9$ үед x, y, z нь ялгаатай байж болохгүй нь батлагдав.

Одоо $k = 7$ байж болохгүйг баталъя. $x = y$ бол дээрхтэй адил дүгнэлт хийхэд $t + 4 + \frac{4}{t} = 7x$ болно. Энэ нь t -ийн авч болох нөгөө утгуудад боломжгүй. $x > y > z$ бол өмнөхтэй нэгэн адил $f(X) = (X + y + z)^2 - 7Xyz$ квадрат гурван гишүүнтийг авч үзье. Хэрэв $z \geq 2$ бол $f(y) < y^2(9 - 7z) < 0$ болох бөгөөд эндээс өмнөхтэй нэгэн адил x', y, z гэж шийдийг бууруулж чадна. Ингэж шийдийг буулгасаар хэзээ нэгэн цагт бид шийдийг $x > y > z = 1$ болгож чадна. Иймд $(x + y + 1)^2 = 7xy$ боллоо. Энэ тэгшитгэлийн шийдийн хувьд x, y -ийн нэг нь 7-д хуваагдаж, нөгөө нь 7-д хуваагдахад -1 үлдэгдэл өгөх ёстой. Тэгшитгэл x, y -ийн хувьд симметр учраас бид $x = 7x_0, y = 7y_0 - 1$ гэж үзэж болно. Шинэ хувьсагчдын хувьд тэгшитгэл нь $y_0^2 - 5x_0y_0 + x_0^2 + x_0 = 0$ буюу $y_0 = \frac{1}{2}(5x_0 \pm \sqrt{21x_0^2 - 4x_0})$ болно. Эндээс $21x_0^2 - 4x_0 = z_0^2$ буюу $(21x_0 - 2)^2 = 21z_0^2 + 4$ гэж гарна. Пеллийн тэгшитгэлийн ерөнхий онолоос $u^2 - 21v^2 = 4$ тэгшитгэл нь $u > 0, u \equiv -2 \pmod{21}$ байх шийдгүй гэж гардаг. Үнэхээр сүүлийн тэгшитгэлийн бүх шийдүүд нь

$$u + \sqrt{21}v = \pm 2(55 + \sqrt{21}v)^k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$u + \sqrt{21}v = \pm (23 + \sqrt{21} \cdot 5)(55 + \sqrt{21}v)^k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

гэсэн бүл шийдүүдээр бүрэн шавхагдах бөгөөд эндээс дээр дурьдсан дүгнэлтийг хялбархан харуулж болно. Үүгээр $k = 7$ байж болохгүй нь батлагдав.

$$\text{ДБ-А2. } |x_1|^2 \geq \sum_{i=2}^n |x_i|^2, \quad |y_1|^2 \geq \sum_{i=2}^n |y_i|^2$$

$$|x_1 y_1| - \sqrt{\sum_{i=2}^n |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=2}^n |y_i|^2} \geq 0.$$

үүнийг тооцож гурвалжны болон Коши-Буняковскийн тэнцэтгэл бишийг ашиглавал

$$\begin{aligned}
 |f(x, y)|^2 &= \left| x_1 \bar{y}_1 - \sum_{i=2}^n x_i \bar{y}_i \right|^2 \geq \left(|x_1 y_1| - \left| \sum_{i=2}^n x_i \bar{y}_i \right| \right)^2 \geq \\
 &\geq \left(|x_1 y_1| - \sqrt{\sum_{i=2}^n |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=2}^n |y_i|^2} \right)^2 = \left(|x_1|^2 - \sum_{i=2}^n |x_i|^2 \right) \left(|y_1|^2 - \sum_{i=2}^n |y_i|^2 \right) + \\
 &+ \left(|x_1| \sqrt{\sum_{i=2}^n |y_i|^2} - |y_1| \sqrt{\sum_{i=2}^n |x_i|^2} \right)^2 \geq f(x, x) f(y, y)
 \end{aligned}$$

гэж тэнцэтгэл биш батлагдаж байна.

Одоо тэнцэл биелэх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцлийг тогтооё.

$$(|a - b| = |a| - |b|) \Leftrightarrow (a = \lambda b, \quad \lambda > 1)$$

учир баталсан тэнцэл биш тэнцэлдээ хүрэхийн тулд

$$x_1 \bar{y}_1 = \sum_{i=2}^n x_i \bar{y}_i, \quad (\lambda \geq 1) \quad (1)$$

$$x_i = \mu y_i \quad (i = \overline{2, n}) \quad (2)$$

$$|x_1|^2 \cdot \sum_{i=2}^n |y_i|^2 = |y_1|^2 \cdot \sum_{i=2}^n |x_i|^2 \quad (3)$$

нөхцлүүд зэрэг биелэх ёстой. (2)-ыг (1) ба (3)-т орлуулбал:

$$x_1 \bar{y}_1 = \mu \lambda \sum_{i=2}^n |y_i|^2 \quad (4)$$

$$(|x_1|^2 - |\mu|^2 |y_1|^2) \sum_{i=2}^n |y_i|^2 = 0$$

болно. Эндээс

$$|x_1| = |\mu| \cdot |y_1| \quad (5)$$

гэж гарна. $(\sum_{i=2}^n |y_i|^2 = 0 \text{ буюу } y_i = 0 \ (i = \overline{2, n}) \text{ нөхцөл нь } (5)\text{-аас гарах үр}$
 $\text{дүнтэй давхцах юм). Одоо } (5)\text{-ыг тооцож } (4)\text{-ийн хоёр талаас модуль}$
 авбал

$$|\mu| \cdot |y_1|^2 = |\mu| \lambda \sum_{i=2}^n |y_i|^2 \Rightarrow$$

$$|y_1|^2 = \lambda \sum_{i=2}^n |y_i|^2 \quad (6)$$

болно. $(\mu = 0 \text{ байх нөхцөл нь дараах үр дүнтэй давхцах учир орхив})$
 $(4) \text{ ба } (6)\text{-аас}$

$$x_1 \bar{y}_1 = \mu |y_1|^2 = \mu y_1 \cdot \bar{y}_1 \Rightarrow x_1 \mu y_1 \Rightarrow$$

$$x = \mu y \quad (7)$$

болно. Буцаагаад (7) биелдэг бол тэнцэл биелэх нь илт. Иймд (7) нь тэнцэл биелэх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл болох юм.

ДБ-А3. Нөхцлөөс авч үзвэл C хүн том тойрог дотор орших л боломжтой. Иймд $2R - a = 2r + a$ буюу $a = R - r$. Энд a нь C цэгээс тойрог хүрэх хамгийн бага зай. Эндээс M цэг том тойрог дотор оршино. Өөрөөр хэлбэл, хоёр тойрог огтлоцно. Тэгвэл C хүн O_1 төвтэй R радиустай тойрог, O_2 төвтэй r радиустай тойргийн огтлол дээр л байна. Иймд хоёр хүнийг нэг цэгээс хөдөлгөх гэж үзэх боломжтой болов. Косинусын теоремоор зайнууд тэнцүү байна. Иймд нэг хүн нь уулздаггүй гэвэл аль нэг нь огтлолцлын цэг дээр ирэх үед, нөгөө нь өөр цэгт явах болж зай тэнцэхгүйд хүрнэ. Бодлого бодогдов.

ДБ-В1. Албагүй. Жишээ олбол хангалттай.

Жишээ. $(BD) \cap (AC) = P$ гэе. BCD нь зөв гурвалжин. AC нь $ABCD$ -г багтаасан тойргийн диагональ гэж авбал $O_2 \equiv O$ болно.

Эсрэгээс нь $O_1 O_2 D$ -г багтаасан $ABCD$ -г багтаасан тойргийг шүргэдэг гэе. Эндээс $O_1 O_2 D$ -г багтаасан тойргийн төв OD дээр байх ёстой. $O_2 \equiv O$ учир OD нь диаметр болно. Эндээс

$$\angle O_2 O_1 D = 90^\circ = \angle O_2 P D - \angle P D O_1 = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle B D A$$

$\angle BDA = 0^\circ$ болж зөрчил. эндээс албагүй байх жишээ байгуулсан учир албагүй байна.

ДБ-В2. 1-р бодолт. Зохиогчдын бодолтыг толилуулъя. Юуны өмнө

$$A = \prod_{s=1}^n \frac{2s-1}{2s} < \sqrt{\frac{1}{2n+1}}$$

болохыг тэмдэглэе. Үнэхээр

$$A^2 = \prod_{s=1}^n \frac{(2s-1)^2}{(2s)^2} < \prod_{s=1}^n \frac{(2s-1)^2}{(2s-1)(2s+1)} = \prod_{s=1}^n \frac{2s-1}{2s+1} = \frac{1}{2n+1}$$

байна.

$k \geq 0$ үед

$$A_k = \prod_{s=1}^n \frac{ms-1}{ms+(2^k-1)}$$

гэж тэмдэглэе. Тэгвэл

1) $k \geq 0$ бол $A_k^2 < A_{k+1}$ байна. Учир нь s бүрийн хувьд

$$\frac{(ms-1)^2}{(ms+(2^k-1))^2} < \frac{(ms-1)^2}{(ms+(2^k-1))^2 - (2^k)^2} = \frac{ms-1}{ms+(2^{k+1}-1)}$$

юм.

2) $k \geq \log_2(m-1)$ бол $A_k \leq A$ байна. Учир нь өгөгдсөн нөхцлөөс $m \leq 2^k + 1$ болох ба эндээс s бүрийн хувьд

$$\frac{ms-1}{ms+(2^k-1)} = 1 - \frac{2^k}{ms+(2^k-1)} \leq 1 - \frac{2^k}{(2^k+1)s+(2^k-1)}$$

болно.

Энэ хоёр шинж чанараас батлах ёстой тэнцэл биш нь

$$\left(\prod_{s=1}^n \frac{ms-1}{ms} \right)^{2^k} = A_0^{2^k} < A_1^{2^{k-1}} < A_2^{2^{k-2}} < \dots < A_{k-1}^2 < A_k \leq A < \sqrt{\frac{1}{2n+1}}$$

гэж мөрдөн гарна.

2-р бодолт. П.Энхболдын нэрэмжит уран бодолтын тусгай шагнал хүртсэн Дархан хот дахь Хан-Уул салбар сургуулийн багш А.Дайвий-Одын бодолтыг бага зэрэг засварлан толилуулъя.

$2^k \geq m - 1$ гэж үзэж болно.

$$\prod_{s=1}^n \frac{ms-1}{ms} = \prod_{s=1}^n \left(1 - \frac{1}{ms}\right) = f(m)$$

гэж тэмдэглэе. $f(m)$ нь n тогтмол үед монотон өсдөг функц тул

$$f(2^k + 1) < \sqrt[2^{k+1}]{\frac{1}{2n+1}}$$

гэж батлахад хангалттай.

$k = 0$ үед $f(2) < \sqrt{\frac{1}{2n+1}}$ байхыг n -ээр индукцлэн хялбархан батлана.

$k - 1 \rightarrow k$ шилжилтийг авч үзье. $f(2^k + 1) < \sqrt{f(2^{k-1} + 1)}$ гэж баталбал индукцээр $f(2^k + 1) < \sqrt[2^{k+1}]{\frac{1}{2n+1}}$ байх нь гарна.

$$\sqrt{1 - \frac{1}{(2^{t-1} + 1)s}} > \left(1 - \frac{1}{(2^t + 1)s}\right) \quad (*)$$

баталъя. $(2^t + 1)s = a$ гэе. Эндээс $\frac{2}{a} > \frac{2}{a+s} + \frac{1}{a^2}$ болох ба $2as > a + s$ гэсэн үнэн үр дүнд шилжинэ. Одоо $(*)$ -ын талаас s -ээр үржвэр авбал $f(2^k + 1) < \sqrt{f(2^{k-1} + 1)}$ болох нь гарна. 2

3-р бодолт. Энэ бодлогын хамгийн товч бодолтыг УБ 1-р сургуулийн багш Д.Бат-Орших олимпиадын дараа дараах байдлаар гүйцэтгэсэн юм.

$k \geq \log_2(m-1) \Rightarrow 2^k \geq m-1$ болно.

$$\begin{aligned} \prod_{s=1}^n \frac{ms-1}{ms} &< \sqrt[2^{k+1}]{\frac{1}{2n+1}} \Rightarrow \prod_{s=1}^n \frac{ms}{ms-1} > (2n+1)^{2^{\frac{k+1}{1}}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\prod_{s=1}^n \frac{ms}{ms-1}\right)^{2^{k+1}} &> 2n+1 \Rightarrow \left(\prod_{s=1}^n \left(1 + \frac{1}{ms-1}\right)\right)^{2^k \cdot 2} > 2n+1 \end{aligned}$$

$2^k \geq m-1$ -ийг ашиглавал $\left(\prod_{s=1}^n \left(1 + \frac{1}{ms-1}\right)\right)^{2(m-1)} > 2n+1$ -ийг батлахад хангалттай. Тэнцэтгэл бишийн зүүн талд Бернулийн тэнцэт-

гэл бишийг ашиглавал

$$\prod_{s=1}^n \left(1 + \frac{2m-2}{ms-1}\right) = \prod_{s=1}^n \left(\frac{m(s+2)-3}{ms-1}\right)$$

болох ба $\prod_{s=1}^n \frac{m(s+2)-3}{ms-1} \geq 2n+1$ -ийг n -ээр индукцлж баталъя.
 $n+1$ үед авч үзвэл

$$\prod_{s=1}^n \frac{m(s+2)-3}{ms-1} \cdot \frac{m(n+3)-3}{m(n+1)-1} > (2n+1) \cdot \frac{m(n+3)-3}{m(n+1)-1}$$

болно. Эндээс $(2n+1) \cdot \frac{mn+3m-3}{mn+m-1} > 2n+3$ -ийг батлахад хангалттай.

Үүнд хялбар хувиргалт хийсний дараа $1 + \frac{2m-2}{mn+m-1} \geq 1 + \frac{2}{2n+1}$
 $\Rightarrow (2m-2)(2n+1) - 2(mn+m-1) \geq 0$ -ийг баталъя. Энэ нь $2mn - 2n + m - 1 - mn - m + 1 = mn - 2n = n(m-2)$ болж батлах зүйл батлагдана.

ДБ-ВЗ. УБ 24-р сургуулийн багш Д.Алтангэрэлийн бодолт.

$A_i = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq n, p_i \mid x\}$, $i = \overline{1, s}$ гэж тэмдэглэе. Олох тоонуудын олонлогийг S гээд $A \cap B = AB$ гэж бичвэл

$$S = A_1 \overline{A_2} \dots \overline{A_s} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \dots \overline{A_s} + \dots + \overline{A_1} \overline{A_2} \dots \overline{A_{s-1}} A_s$$

ба эдгээр нь үл огтолцох дэд олонлогууд тул

$$|S| = |A_1 \overline{A_2} \dots \overline{A_s}| + \dots + |\overline{A_1} A_2 \dots \overline{A_{s-1}} A_s|$$

болно. Иймд зөвхөн $|A_1 \overline{A_2} \dots \overline{A_s}|$ -г л олоход болно.

$$\begin{aligned} |A_1 \overline{A_2} \dots \overline{A_s}| &= |A_1 \overline{A_2 \cup \dots \cup A_s}| \stackrel{A = AB + A\overline{B}}{=} |A_1| - |A_1(A_2 \cup \dots \cup A_s)| = \\ &= |A_1| - |A_1 A_2 \cup \dots \cup A_1 A_s| = |A_1| - \sum_{i=2}^s |A_1 A_i| + \sum_{i>j \geq 2} |A_1 A_i A_j| - \dots = \\ &= \left[\frac{n}{p_1} \right] - \sum_{i \geq 2} \left[\frac{n}{p_1 p_i} \right] + \sum_{j, i \geq 2} \left[\frac{n}{p_1 p_i p_j} \right] - \dots + (-1)^{s+1} \left[\frac{n}{p_1 \dots p_s} \right] \end{aligned}$$

болох тул

$$|S| = \sum_i \left[\frac{n}{p_i} \right] - 2 \sum_{i>j \geq 1} \left[\frac{n}{p_i p_j} \right] + \dots + (-1)^{s+1} \cdot s \cdot \left[\frac{n}{p_1 \dots p_s} \right]$$

Олон Улсын Математикийн ХЛI Олимпиадад оролцсон тухай

Ц.Дашдорж
Г.Баярмагнай

ОУМО-ХЛI 2000.07.13-25-нд Өмнөт Солонгосын Тайжон хотод болж өнгөрлөө. Дэлхийн 82 орон оролцсон энэ Олимпиадад Хятад 218 оноо, Орос 215, АНУ 184, Өмнөт Солонгос 172, Вьетнам=Болгар 169, Беларусь 165, Тайван 164, Унгар 156, Иран 155 оноогоор эхний 10 байранд шалгарлаа. Манай улсаас

1. Б.Амарсанаа	(ХI сургууль, 10-р анги)	15 оноо	хүрэл
2. Т.Баасанжав	(I сургууль, 9-р анги)	13 оноо	хүрэл
3. Н.Сансархүү	(ХI сургууль, 10-р анги)	16 оноо	хүрэл
4. Ж.Хосбаяр	(МУИС, 10-р анги)	1 оноо	
5. Б.Нямцэрэн	(ХI сургууль, 9-р анги)	2 оноо	
6. А.Амарсанаа	(ХI сургууль, 10-р анги)	20 оноо	хүрэл

медаль авч багийн дүнгээр 42-р байранд орлоо. Багийн орлогч удирдагчаар УБ Боловсролын газрын мэргэжилтэн Ч.Даваадорж явлаа.

ОУМО-ХЛII АНУ-д 2001.07 сард болно.

ОУ-1 (Орос). G_1, G_2 тойргууд M, N цэгүүдэд огтлолцоно. G_1 ба G_2 -ийн ерөнхий шүргэгч ℓ шулуун нь M -д N -ээс ойр оршино. ℓ шулуун G_1 -ийг A цэгт, G_2 -ийг B цэгт шүргэдэг байг. M -ийг дайрсан ℓ -тэй параллель шулуун нь G_1 -ийг C цэгт, G_2 -ийг D цэгт огтолдог ба CA, DB шулуунууд E цэгт, AN, CD шулуунууд P цэгт, BN, CD шулуунууд Q цэгт огтлолцдог бол $EP = EQ$ гэж батал.

ОУ-2 (АНУ). a, b, c нь $abc = 1$ байх эерэг тоонууд бол

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1$$

гэж батал.

ОУ-3 (Белорусь). Натурал тоо $n \geq 2$ өгчээ. Хэвтээ шулуун дээр n дэвхрэг сууж байна, гэхдээ бүгдээрээ нэг цэг дээр биш. Эерэг бодит тоо λ -ийн хувьд харайлтыг дараах маягаар тодорхойлъё: дурын A, B цэгүүдэд орших хоёр дэвхрэгийн зүүн талын A цэг дээр суугаа дэвхрэг нь $BC/AB = \lambda$ байхаар B -ийн баруун талын C цэг дээр очно, энд C нь мөн шулууны цэг. Шулууны дурын M

цэг ба дэвхрэгүүдийн ямарч анхны байрлалын хувьд бүх дэвхрэг M -ээс баруун тийш байрласан байхаар харайлтуудын төгсгөлөг дараалал олддог байх λ -ийн бүх утгыг ол.

ОУ-4 (Унгар). Илбэчинд 1-ээс 100 тоонуудаар дугаарлагдсан 100 карт байна. Тэр хоосон хайрцаг гарахгүй байхаар бүх картаа улаан, цагаан, хөх өнгийн гурван хайрцагт хийнэ. Үзэгчдээс нэг нь гарч хоёр хайрцагийг сонгож, тэдгээрээс нэг, нэг карт аваад түүн дээрх тоонуудын нийлбэрийг хэлнэ. Энэ нийлбэрийг мэдсэнээр илбэчин карт авагдаагүй хайрцагийг олох ёстой. Илбэчин ямагт ялж байхын тулд картуудыг хичнээн ялгаатай аргаар байрлуулж чадах вэ? (Ядаж нэг карт өөр хайрцгуудад орсон байвал уг аргуудыг ялгаатай гэж үзнэ)

ОУ-5 (Орос). $2^n + 1$ -ийг хуваадаг бөгөөд яг 2000 ялгаатай анхны тоон хуваагч бүхий n тоо орших уу? 1.95, 36)

ОУ-6 (Орос). ABC хурц өнцөгт гурвалжин өндрүүд нь AH_1, BH_2, CH_3 . ABC гурвалжинд багтсан тойрог нь BC, CA, AB талуудыг T_1, T_2, T_3 цэгүүдэд шүргэнэ. T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2 шулуунуудын хувьд H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 шулуунуудтай тэгш хэмтэй орших дүрүүд нь ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 шулуунууд байг. ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 -аар үүссэн гурвалжны оройнууд нь ABC гурвалжинд багтсан тойрог дээр оршихыг батал.

ОУ-1. MN ба AB -ийн огтлолцлын цэг нь K бол огтлогч ба шүргэгчийн тухай теоремоор $AK^2 = KN \cdot KM = BK^2$ буюу K нь AB -ийн дундаж цэг болно. $PQ \parallel AB$ тул M нь PQ -ийн дундаж цэг болох тул $EM \perp PQ$ гэж баталбал л болно. $CD \parallel AB$ тул A, B нь CM, DM нумуудын дундаж цэгүүд буюу $\triangle ACM, \triangle BDM$ -үүд адил хажуут. $\angle BAM = \angle AMC = \angle ACM = \angle EAB, \angle ABM = \angle BMD = \angle BDM = \angle EBA$ буюу $\triangle EAB = \triangle MAB \Rightarrow EM \perp AB \parallel PQ \Rightarrow EM \perp PQ$.

ОУ-2.

$$P = \left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \quad (1)$$

гэе. $P = (ab - b + 1)(bc - c + 1)(ca - a + 1) = \alpha\beta\gamma$ болох ба (1)-д $1 = abc$ гэж тавибал $P = (a - abc + ac)(b - abc + ab)(c - abc + bc) = (1 - bc + c)(1 - ac + a)(1 - ab + b) = \alpha'\beta'\gamma'$ болно. $A = a + b + c, B = ab + bc + ca$ гэвэл $\alpha + \beta + \gamma = B - A + 3, \alpha' + \beta' + \gamma' = A - B + 3$ болох ба эсвэл $\alpha + \beta + \gamma \leq 3$ эсвэл $\alpha' + \beta' + \gamma' \leq 3$ болно. Эндээс аль ч

тохиолдолд $p \leq 1$ гэж гарна.

ОУ-3. Харайлт бүрд хамгийн зүүн дэвхрэг нь хамгийн баруун талынх дээгүүр харайсан байх тактикийг сонгох нь ойлгомжтой. κ дахь үйлдлийн (харайлтын) дараах дэвхрэгүүдийг хоорондох зайнуудын максимум d_k ба минимум δ_k гэвэл $d_k \geq (n-1)\delta_k$ байна. $\delta_{k+1} = \lambda d_k$ эсвэл $\delta_{k+1} \geq \delta_k$ байна гэдгээс

$$\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} \geq \min\left\{1, \frac{\lambda d_k}{\delta_k}\right\} \geq \min\{1, (n-1)\lambda\}$$

гэж гарна. Хэрэв $\lambda \geq \frac{1}{n-1}$ бол бүх κ -ийн хувьд $\delta_{k+1} \geq \delta_k$ болж минимум зай δ_k буурахгүй байна, өөрөөр хэлбэл хамгийн зүүн захын дэвхрэгийн байрлал тогтмол эерэг тооноос багагүйгээр баруун тийш шилжиж байна. Энэ нь бүх дэвхрэгийг баруун тийш нь хичнээн ч хол шилжүүлж чадна гэсэн үг.

Хэрэв $\lambda < \frac{1}{n-1}$ бол ингэж чадахгүй, өөрөөр хэлбэл ямар нэг анхны байрлалын хувьд бүх дэвхрэгийг ямар нэг M цэгийн цаана аваачиж чадахгүй гэдгийг харуулья. Үнэндээ, ямарч анхны байрлалын хувьд ийм l байна гэдгийг харуулья. Дэвхрэгүүдийн байрлалыг бодитой гэж үзэх ба харайлтуудын дурын дарааллыг авч үзье. κ -р харайлтын дараах байрлалыг төлөөлж буй бүх тооны нийлбэрийг s_k , харин хамгийн их тоог (хамгийн баруун дэвхрэгийн байрлал) нь w_k гэвэл $s_k \leq n w_k$ байна. (w_k) дараалал зааглагдсан гэж харуулая. $k+1$ -р харайлтаар дэвхрэг $A(a)$ цэгээс $B(b)$ цэг дээгүүр харайж $C(c)$ цэгт буусан гэвэл $s_{k+1} = s_k + c - a$, $c - b = \lambda(b - a)$, $\lambda(c - a) = (1 + \lambda)(c - b)$ буюу

$$s_{k+1} - s_k = c - a = \frac{1 + \lambda}{\lambda}(c - b)$$

болно. $c > w_k$ байна гэвэл дөнгөж сая харайсан дэвхрэг $w_{k+1} = c$ гэсэн шинэ хамгийн баруун байрыг эзэлнэ, харин b нь κ -р харайлтын дараах ямар нэг дэвхрэгийн байрлал тул $b \leq w_k$ ба

$$s_{k+1} - s_k = \frac{1 + \lambda}{\lambda}(c - b) \geq \frac{1 + \lambda}{\lambda}(w_{k+1} - w_k) \quad (1)$$

болно. Энэ үнэлгээ $c \leq w_k$ үед ч хүчинтэй гэдэг нь энэ үед $w_{k+1} - w_k = 0$ ба $s_{k+1} - s_k = c - a > 0$ байна гэдгээс гарна.

$k = 0, 1, 2, \dots$ үед $z_k = \frac{1+\lambda}{\lambda}w_k - s_k$ гэсэн дарааллыг авч үзье. (1)-ээс $z_{k+1} - z_k \leq 0$ буюу z_k дараалал үл өснө гэж гарна, ө.х. бүх κ -ийн хувьд $z_k \leq z_0$.

$\lambda \leq \frac{1}{n-1}$ байгаа тул $1+\lambda > n\lambda$, $z_k = (n+\mu)w_k - s_k$, энд $\mu = \frac{1+\lambda}{\lambda} - n > 0$ гэж бичиж чадна. Үүгээр $z_k = \mu w_k + (nw_k - s_k) \geq \mu w_k$ болно. Эндээс дурын k , $w_k \leq \frac{z_k}{\mu}$ буюу хамгийн баруун дэвхрэгийн байрлал тогтмолоос хэзээ ч үл хэтэрнэ гэж гарав (n , λ ба анхны байрлалаас хамаарч, харин харайлтын тактикаас үл хамаарч).

ОУ-4. i тоо түүнийг агуулж буй хайрцагныхаа өнгөөр будагдсан гэж үзье. Дараах 2 тохиолдлыг авч үзье.

а) $i, i+1, i+2$ тоонууд 3 өөр өнгөтэй байхаар тийм i тоо олддог байг, тэднийг y, u, x гэе.

$$\begin{array}{ccccc} i & + & (i+3) & = & (i+1) & + & (i+2) \\ & & & & y & & u & & x \end{array}$$

тул $i+3$ -ийн өнгө цагаан ($i+1$ -тэй адил), хөх ($i+2$ -тэй адил) байж үл чадна. Иймд $i+3$ улаан өнгөтэй. Үүгээр зэрэгцээ гурван ялгаатай өнгөөр ($i, i+1, i+2$ -ийн өнгө) дараачийн өнгө ($i+3$ -ийн өнгө) бүрэн тодорхойлогдож байна, ө.х, y, u, x -ийн дараа y залгана, дараа нь мөн u, x залгана г.м. Энэ процесс мөн урагшаа ч хийгдэнэ ө.х y, u, x -ийн өмнө x (хөх) бичигдэнэ гэдгийг заана. Энэ нь 1,2,3-ийн л өнгийг заавал болно гэдгийг хэлж байна. Эдний өнгийг $3! = 6$ янзаар зааж чадна. Энэ байрлуулалт бүр илбэчинд ялалт авчирна гэдэг нь $y+u, u+x, x+y$ нийлбэрүүдэд давхцах нийлбэр байхгүй гэдгээс гарна, учир нь $y+u \not\equiv u+x \not\equiv x+y \pmod{3}$ байгаа, энд y нь улаан, хайрцагаас авсан дурын тоог төлөөлж чадна гэх мэт.

б) Ялгаатай өнгөтэй байх дараалсан 3 тоо байхгүй байг. $1 \in y, i$ нь улаан биш өнгөтэй хамгийн бага тоо, тухайлбал $i \in u$, харин $k \in x$ байх хамгийн бага тоо байг. Тэгвэл $i+1 < k$ болно. Учир нь эсрэг тохиолд $i-1, i, i+1$ нь y, u, x болоход хүрнэ. Одоо $k < 100$ гэж үзвэл

$$\begin{array}{ccccc} i & + & k & = & (i-1) & + & (k+1) \\ & & & & u & & y \end{array}$$

гэдгээс $k+1 \in y$ гэж гарна.

$$\begin{array}{ccccc} i & + & (k+1) & = & (i+1) & + & k \\ & & & & u & & y & & x \end{array}$$

-ээс $i+1 \in x$ гэж гарна. Энэ $k \in x$ байх хамгийн бага тоо ба $i+1 < k$ гэдэгт зөрчнө. Үүгээр $k = 100$ байх ганц тохиол л байна.

$$\begin{array}{ccccc} (i-1) & + & 100 & = & i & + & 99 & \Rightarrow & 99 \in u \\ & & & & y & & x & & u \end{array}$$

$1 \in y$, $100 \in x$ байгаа. Одоо бусад бүх өнгө цагаан гэж харуулъя: $t > 1$ ба $t \in y$ бол

$$\begin{array}{ccc} t + 99 & = & (t - 1) + 100 \rightarrow t - 1 \in x \\ y & & u \quad x \end{array}$$

болж 100 нь хамгийн бага хөх өнгө гэдэгт зөрчинө. Үүгээр манай будалт $uy...ux$ болно. Энэ нь үнэндээ сайн будалт гэдэг нь илэрхий: хэрэв нийлбэр хамгийн ихдээ 100 бол тоо авагдаагүй хайрцаг нь хөх (x) байна. Хэрэв нийлбэр 101 бол олох хайрцаг маань цагаан, хэрэв нийлбэр 101-ээс их бол уг хайрцаг улаан байна. Ийм байрлалуудын тоо мөн л 6 байна. Үүгээр бодлогын нөхцөлд заасан байрлал 12 боллоо.

ОУ-5. κ -аар индүклэж дараах ерөнхий өгүүлбэр оршино гэдгийг баталъя. $k \in \mathbb{N}$ бүрийн хувьд $n|2^n + 1$, $3|n$ ба n нь яг κ ялгаатай анхны хуваагчтай байх $n = n(k) \in \mathbb{N}$ тоо оршин байна. $\kappa = 1$ бол $n(1) = 3$ болох нь илэрхий. $k \geq 1$ -ийн хувьд $n(k) = 3^\ell \cdot t$, энд $\ell \geq 1$, $3 \nmid t$ нь бодлогын нөхцлийг хангах тоо байг. Тэгвэл $n = n(k)$ сондгой тоо учир $3|2^{2^n} - 2^n + 1$ болно. $2^{3^n} + 1 = (2^n + 1)(2^{2^n} - 2^n + 1)$ -ээс $3n|2^{3^n} + 1$ гэж гарна. Доорхи леммээр $\exists p \in P$, $p|2^{3^n} + 1$, $p \nmid 2^n + 1$ тул $n(k+1) = 3p \cdot n(k)$ гэж авахад $n(k+1)$ нь $k+1$ -ийн хувьд тавигдах шаардлагыг хангах нь илэрхий байна.

Лемма. $\mathbb{N} \ni a > 2$ бүрийн хувьд $\exists p \in P$, $p|a^3 + 1$, $p \nmid a + 1$.

Баталгаа. $\exists a > 2$ бүрийн хувьд энэ өгүүлбэр худал гэвэл $a^2 - a + 1$ -ийн анхны тоон хуваагч бүр $a+1$ -ийг хуваана. $a^2 - a + 1 = (a+1)(a-2) + 3$ -аас $a^2 - a + 1$ -ийн анхны тоон хуваагч нь зөвхөн 3 гэж гарах тул $a^2 - a + 1 = 3^s$ болно. $3|a + 1 \Leftrightarrow 3|a - 2$ -ээс $3|a^2 - a + 1$, $9 \nmid a^2 - a + 1$ гэж гарах тул $a^2 - a + 1 = 3$ болох ба энэ нь $a > 2$ үед $a^2 - a + 1 > 3$ гэдэгт харшилна.

ОУ-6. $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$, I нь ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв. $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ өнцгүүдийн биссектрисийн хувьд T_1 , T_2 , T_3 цэгүүдийн тэгш хэмт цэгийг M_1 , M_2 , M_3 гэе. Мэдээжээр M_1 , M_2 , M_3 цэгүүд нь I төвтэй тойрог дээр оршино.

а) $BI \cap T_2T_3 = S$, ℓ нь H_2 -ыг дайрсан $T_2T_3 \perp \ell$ шулуун байг. $\ell \cap BI = P$ гэе. $\angle T_3SB = \angle AT_3S - \angle T_3BS = (90^\circ - \alpha) - \beta = \gamma$ байх ба BI -ийн хувьд T_1 , T_2 нь харгалзан T_3 , M_2 -тэй тэгш хэмтэй тул M_2 , S , T_1 цэгүүд 1 шулуунг дээр оршино. $\angle IST_1 = \angle ICT_1 = \gamma$ тул $ISCT_1$ тойрогт багтах ба $\angle ISC = 90^\circ$ болно. Иймээс BSH_2C тойрогт багтах буюу $\angle H_2SP = 2\gamma$ болно. Иймд H_2 ба P нь T_2T_3 -ын хувьд тэгш хэмтэй цэгүүд болно. $\angle IBC = \angle SH_2T_2 = \angle SPT_2 = \angle SPM_2$ байх нь ойлгомжтой тул $M_2P \parallel BC$ байна.

69

МОНГОЛЫН ОЮУТНЫ МАТЕМАТИКИЙН IX ОЛИМПИАД

Б.Батцэнгэл, Ц.Дашдорж

а) эчнээ давааны бодлогууд

1. $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ тасралтгүй функц нь

i) $f(1) = 1$ байна,

ii) f функц нь гүдгэр буюу ямар ч $x, y \geq 0$ тоонуудын хувьд $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ байна,

iii) ямар ч $x, y \geq 0$ тоонуудын хувьд $f(x)f(y) \geq f(xy)$ байна гэсэн чанаруудыг хангадаг бол түүнийг ол.

2. $f : \mathbb{N} \rightarrow (0, +\infty)$ функц нь дараахь чанаруудыг хангаж байв:

i) ямар ч $m, n \in \mathbb{N}$ натурал тоонуудын хувьд $f(mn) = f(m)f(n)$ байна,

ii) ямар ч $m, n \in \mathbb{N}$ натурал тоонуудын хувьд $f(m+n) \leq c \max(f(m), f(n))$ байх c бодит тоо олдоно,

iii) $f(m) > 1$ байх ямар нэгэн $m \in \mathbb{N}$ тоо олдоно.

Тэгвэл ямар нэгэн бодит $\lambda > 0$ тооны хувьд, бүх $m \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд $f(m) = m^\lambda$ байх ёстой гэдгийг харуул.

3. $a_n = \sqrt[2]{2 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[4]{\dots + \sqrt[n]{n}}}}$ болог. Ямар ч $n \geq 2$ -ийн хувьд $a_{n+1} - a_n < \frac{1}{n!}$ байна гэдгийг батал. Мөн $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ хязгаарыг ол.

4. Стандарт $e_1, \dots, e_n$ базисуудтай $\mathbb{R}^n$ огторгуйн k ($1 < k < n$) хэмжээт шугаман дэд огторгуй V өгөгдсөн бөгөөд V -ийн базис векторууд нь

$$v_1 = \sum_{i=1}^n a_{1i} e_i, \dots, v_k = \sum_{i=1}^n a_{ki} e_i$$

болог. Дурын $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ индексүүдийн хувьд

$$P_{i_1, \dots, i_k} = \det(a_{pi_q}); \quad 1 \leq p \leq k, 1 \leq q \leq k$$

гэж тодорхойлъя. Тэгвэл ямар ч $1 \leq i_1, \dots, i_{k-1} \leq n$ индексүүд ба $1 \leq j_1, \dots, j_{k+1} \leq n$ индексүүдийн хувьд

$$\sum_{r=1}^{k+1} (-1)^r P_{i_1, \dots, i_{k-1}, j_r} P_{j_1, \dots, j_r, \dots, j_{k+1}} = 0$$

байхыг батал, энд $\hat{j}_r$ нь j_r индексийг орхино гэснийг илэрхийлнэ.

5. Комплекс тоон коэффициенттэй $P(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ гэсэн ν зэргийн нэгэн төрлийн олон гишүүнтийн хувьд

$$\Delta P = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} = 0$$

байв. Хэрэв $\nu \geq 2$ бол P олон гишүүнт нь

$$(\zeta_1 x_1 + \dots + \zeta_n x_n)^\nu; \quad \zeta_1^2 + \dots + \zeta_n^2 = 0, \quad \zeta_i \in \mathbb{C} \quad (1 \leq i \leq n)$$

хэлбэрийн олон гишүүнтүүдийн шугаман эвлүүлэг байх ёстой гэдгийг батал.

6. p нь сондгой анхны тоо бол

$$p^7 - p^3 = 120 \cdot \sum_{m=1}^{p-1} \sigma_3(m) \sigma_3(p-m)$$

болохыг батал, энд $\sigma_3(m) = \sum_{d|m} d^3$ юм.

7. $x^3 + y^3 + z^3 = 2xyz$ тэгшитгэл нь $xyz \neq 0$ байх бүхэл тоон шийдгүй гэдгийг батал.

8. G нь $x_1, \dots, x_m$ үсгүүдээр бичигдэх чөлөөт бүлэг болог. $G_1 = G$ бөгөөд $n > 1$ үед G_n нь

$$[G, G_{n-1}] = \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x \in G, y \in G_{n-1}\}$$

гэсэн бүх коммутаторуудаар төрөгдсөн дэд бүлэг гэж тодорхойлъя.

G_n / G_{n+1} фактор бүлэг нь $\frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) m^{\frac{n}{d}}$ рангийн чөлөөт абелийн

бүлэг болно гэдгийг батал, энд μ нь Мёбиусын функц юм.

9. Хавтгайн дотоод хэсэгтээ координатын эхийг агуулсан гүдгэр олон өнцөгтийн оройнуудын координатууд нь $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ болог. Тэгвэл ямар нэгэн эерэг бодит x, y тоонуудын хувьд

$$\begin{aligned}x^{a_1}y^{b_1}a_1 + \dots + x^{a_n}y^{b_n}a_n &= 0 \\x^{a_1}y^{b_1}b_1 + \dots + x^{a_n}y^{b_n}b_n &= 0\end{aligned}$$

байх ёстой гэдгийг батал.

10. Тоон шулуун дээрх цэг бүр нь хар юмуу цагаанаар будагдсан төгсгөлгүй олон цэгүүдийн дараалалын хувьд, хэрэв ямар ч натурал m -ийн хувьд уг дарааллын дараалсан m ширхэг цэгт байгаа хар цэгүүдийн тоонууд нь хоорондоо хамгийн ихдээ 1-ээр ялгагддаг байвал, уг дараалалд хар цэгүүд "жигд тархалттай" гэж тодорхойлъя.

а) Тоон шулуун дээр үл огтлолцох $a_1 + d_1\mathbb{Z}$, $a_2 + d_2\mathbb{Z}$ арифметик прогрессууд өгөгдсөн бөгөөд нэгийх нь бүх цэгийг хараар, нөгөөгийнх нь бүх цэгийг цагаанаар буджээ. Тэгвэл энэ хоёр прогрессийн нийт цэгүүдийн дараалалд хар цэгүүд жигд тархалттай гэж батал.

б) a, d нь өгөгдсөн бодит тоонууд болог. Бүх бүхэл тоонуудыг хар ба цагаанаар будахдаа, $[a + dn]$ ($n \in \mathbb{Z}$) хэлбэрийн бүхэл тоонуудыг хараар, үлдсэн бүх бүхэл тоонуудыг цагаанаар будав. Тэгвэл бүх бүхэл тоонуудын дараалалд хар цэгүүд жигд тархалттай гэдгийг батал.

- 11 (өмнөх бодлогын үргэлжлэл). Хар цэгүүд нь жигд тархалттай ямар ч дарааллын хувьд, ямар ч натурал m -ийн хувьд дараалсан m ширхэг цэгт байгаа хар цэгүүдийн тоо нь αm тооноос 1-ээс хэтрэхгүйгээр ялгагддаг байх ямар нэгэн эерэг бодит α тоо олдоно гэдгийг харуул.

12. $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ тоо нь бүгд нэгэн эерэг тэг-биш байх бүхэл тоон коэффициенттэй $ax^2 + bx + c$ квадрат гурван гишүүнтийн язгуур болж чадахгүй гэдгийг батал.

13. $X = \{1, 2, \dots, n\}$ бөгөөд $A_1, \dots, A_k \subset X$ дэд олонлогууд нь, аль ч дөрвийнх нь нэгдэл $(n-2)$ -ээс хэтрэхгүй тооны элементтэй байдаг олонлогууд болог. Тэгвэл $k \leq 2^{n-2}$ байх ёстой гэдгийг батал.

I байр	Ж.Эрдэнэбилэгт	КТМС, Программ хангамж-1
II байр	Г.Баярмагнай	МУИС, Онолын математик-4
III байр	М.Батбилэг	МУИС, Онолын математик-2

Зарим бодлогын бодолтууд

2. $g(m) = \ln f(m)$ гэж тэмдэглэе. Өгсөн нөхцөл ёсоор g функц дараах чанаруудыг хангана.

i) Ямар ч натурал $m, n \in \mathbb{N}$ тоонуудын хувьд $g(mn) = g(m) + g(n)$ байна. Эндээс $g(m^k) = k \cdot g(m)$ байна.

ii) Ямар ч натурал $m, n \in \mathbb{N}$ тоонуудын хувьд $g(m+n) \leq \max(g(m), g(n)) + b$ байх b тоо олдоно. Эндээс индукцлэн

$$g\left(\sum_{i=1}^r m_i\right) \leq \max_{1 \leq i \leq r} (g(m_i)) + r \cdot b$$

болохыг харж болно.

iii) $g(m) > 0$ байх ямар нэгэн $m \in \mathbb{N}$ тоо олдоно.

Ямар ч натурал $m, n \geq 2$ тоонуудын хувьд $\frac{g(m)}{\ln m} = \frac{g(n)}{\ln n}$ болохыг харуулбал батлах зүйл батлагдана. m тоог n суурьтай тооллын системд

$$m = \sum_{i=0}^r p_i \cdot n^i, \quad 0 \leq p_i < n, \quad p_r \neq 0$$

гэж задалъя. $g(0) = 0$ гэж тодорхойлоход бодлогын нөхцөл өөрчлөгдөхгүй юм.

$$a = \max_{0 \leq p < n} g(p)$$

гэж тэмдэглэвэл (i) чанар ёсоор $g(p_i \cdot n^i) \leq i \cdot f(n) + a$ болох бөгөөд

(ii) чанараар $g(m) \leq r \cdot f(n) + a + rb$ болно. $m \geq n^r$ буюу $\ln m \geq r \ln n$ гэдгийг анхаарвал сүүлийн тэнцэл бишээс

$$\frac{g(m)}{\ln m} \leq \frac{b + g(n)}{\ln n} + \frac{a}{\ln m}$$

гэж мөрдөнө. Энэ тэнцэл бишэд m -ийг m^k -ээр солиход, (i) чанар ёсоор тэнцэл бишийн зүүн гар тал үл өөрчлөгдөх бөгөөд $k \rightarrow \infty$ хязгаарт шилжвэл

$$\frac{g(m)}{\ln m} \leq \frac{b + g(n)}{\ln n}$$

Энэ өгүүлбэр ёсоор P_0 ба P_1 олон гишүүнт нь харгалзан

$$(\zeta_1 x_1 + \dots + \zeta_{n-1} x_{n-1})^\nu \text{ ба } (\xi_1 x_1 + \dots + \xi_{n-1} x_{n-1})^{\nu-1}$$

хэлбэртэй олон гишүүнтүүдийн шугаман эвлүүлэг болно. Батлах ёстой зүйлийг

$$P_0 = (\zeta_1 x_1 + \dots + \zeta_{n-1} x_{n-1})^\nu \text{ ба } P_1 = (\xi_1 x_1 + \dots + \xi_{n-1} x_{n-1})^{\nu-1}$$

гэж үзэн батлахад хангалттай гэдэг нь ойлгомжтой. Тэгвэл

$$P_{2k} = (-1)^k \frac{\nu(\nu-1) \cdot \dots \cdot (\nu-2k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot 2k} \cdot (\zeta_1 x_1 + \dots + \zeta_{n-1} x_{n-1})^{\nu-2k} (\xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2)^k$$

болно. Одоо $\xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 = -\xi_n^2$ гэж тэмдэглэвэл

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k \leq \nu} P_{2k} x_n^{2k} &= \sum_{0 \leq k \leq \nu} C_\nu^{2k} (\zeta_1 x_1 + \dots + \zeta_{n-1} x_{n-1})^{\nu-2k} (\zeta_n x_n)^{2k} = \\ &= \frac{1}{2} \left((\zeta_1 x_1 + \dots + \zeta_{n-1} x_{n-1} + \zeta_n x_n)^\nu + (\zeta_1 x_1 + \dots + \zeta_{n-1} x_{n-1} - \zeta_n x_n)^\nu \right) \end{aligned}$$

болно. Үүнтэй яг адилаар

$$P_{2k+1} = (-1)^k \frac{(\nu-1) \cdot (\nu-2) \cdot \dots \cdot (\nu-2k)}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2k \cdot (2k+1)} \cdot (\xi_1 x_1 + \dots + \xi_{n-1} x_{n-1})^{\nu-2k-1} (\xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2)^k$$

байх бөгөөд $\xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 = -\xi_n^2$ гэж тэмдэглэвэл

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq 2k+1 \leq \nu} P_{2k+1} x_n^{2k+1} &= \sum_{0 \leq 2k+1} \leq \frac{1}{\nu} C_\nu^{2k+1} \cdot \\ &\cdot (\xi_1 x_1 + \dots + \xi_{n-1} x_{n-1})^{\nu-2k-1} (\xi_n x_n)^{2k+1} = \\ &= \frac{1}{2\nu} \left((\xi_1 x_1 + \dots + \xi_{n-1} x_{n-1} + \xi_n x_n)^\nu - (\xi_1 x_1 + \dots + \xi_{n-1} x_{n-1} - \xi_n x_n)^\nu \right) \end{aligned}$$

болно. Ийнхүү

$$P = \sum_{0 \leq 2k \leq \nu} P_{2k} x_n^{2k} + \sum_{0 \leq 2k+1 \leq \nu} P_{2k+1} x_n^{2k+1}$$

нь батлах ёстой олон гишүүнтүүдийн шугаман эвлүүлэг боллоо.

7. Буулгах аргаар уг тэгшитгэл өгөгдсөн нөхцлийг хангах бүхэл тоон шийдгүй гэдгийг баталъя. $x, y, z \in \mathbb{Z}$ нь өгөгдсөн тэгшитгэлийн $|xyz| \neq 0$ нь хамгийн бага байх шийд болог. Бид $(x, y, z) = 1$ гэж үзэж болох бөгөөд тухайлбал $3 \mid z$ гэж үзье.

$$\zeta = \sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ бол}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(\zeta x + \zeta^2 y + z)(\zeta^2 x + \zeta y + z) \quad (1)$$

байдаг билээ. $x^3 + y^3 + z^3 = 2xyz$ гэдгээс

$$(3x)^3 + (3y)^3 + (2z)^3 - 3 \cdot (3x)(3y)(2z) = -19z^3$$

болох бөгөөд тэнцлийн зүүн гар талын илэрхийлэлд (1) томъёог хэрэглэвэл

$$(3x + 3y + 2z)(3\zeta x + 3\zeta^2 y + 2z)(3\zeta^2 x + 3\zeta y + 2z) = -19z^3$$

болно. $3x + 3y + 2z = x_1$ ба $3\zeta x + 3\zeta^2 y + 2z = y_1$ гэж тэмдэглэвэл дээрх тэгшитгэл нь

$$6^3 x_1 y_1 \bar{y}_1 = -19(x_1 + y_1 + \bar{y}_1)^3 \quad (2)$$

гэсэн хэлбэрт бичигдэнэ.

$\mathbb{Q}(\zeta)$ гэсэн тоон талбарын бүхэл тоон цагираг нь $\mathbb{Z}[\zeta]$ байдаг. Энэ цагирагт (2) нь энгийн идеал байдаг бөгөөд (3), (19) гэсэн идеалууд нь энгийн идеалуудад (3) = $(\zeta - \zeta^2)^2$ ба (19) = $(5 + 3\zeta)(3 + 3\zeta^2)$ гэж тус тус задардаг билээ. Иймд (2) тэгшитгэлийг

$$(\zeta - \zeta^2)^6 2^3 x_1 y_1 \bar{y}_1 = -(5 + 3\zeta)(5 + 3\zeta^2)(x_1 + y_1 + \bar{y}_1)^2 \quad (3)$$

гэж бичиж болно. Энд $x_1 \in \mathbb{Z}$ ба $y_1 \in \mathbb{Z}[\zeta]$ болохыг тэмдэглэе. Энэ тэгшитгэлээс $(5 + 3\zeta) \mid x_1$, $(5 + 3\zeta) \mid y_1$ ба $(5 + 3\zeta) \mid \bar{y}_1$ гэсэн гурван боломж гарч ирэх ба ζ -г ζ^2 -аар солих замаар сүүлийн 2 тохиолдол нь адилхан гэдгийг харж болно.

1-р тохиолдол. $(5 + 3\zeta) \mid x_1$ болог. $x_1 \in \mathbb{Z}$ болохыг анхаарвал эндээс $19 \mid x_1$ гэдэг нь мөрдөнө. (3) тэгшитгэлээс ямар нэгэн $k = 0, 1, 2$ тооны хувьд

$$\begin{cases} x_1 = 19x_2^3 \\ y_1 = -\zeta^k y_2^3 \\ \bar{y}_1 = -\zeta^{2k} \bar{y}_2^3 \end{cases}$$

байх $x_2 \in \mathbb{Z}$ бүхэл тоо ба $y_2 \in \mathbb{Z}[\zeta]$ бүхэл алгебрын тоонууд олдоно гэж гарна ($\pm \zeta^k$, $k = 0, 1, 2$ нь $\mathbb{Z}[\zeta]$ цагиргийн нэгжүүд гэдгийг анхаарна уу). Энэ шинэ хувьсагчдын хувьд тэгшитгэл нь

$$6x_2y_2\bar{y}_2 = -19x_2^3 + \zeta^k y_2^3 + \zeta^{2k} \bar{y}_2^3 \quad (4)$$

гэсэн хэлбэрт бичигдэнэ.

Одоо $k = 0$ болохыг харуулъя. $3 \nmid z$ тул $3 \nmid x_1y_1\bar{y}_1$ бөгөөд $x_1y_1\bar{y}_1 = 19(x_2y_2\bar{y}_2)^3$ тул $3 \nmid x_2y_2z_2$ болно. Иймд $\mathbb{Z}[\zeta]/(\zeta - \zeta^2 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ учир $x_2 \equiv \pm 1 \pmod{\zeta - \zeta^2}$ ба $y_2 \equiv \pm 1 \pmod{\zeta - \zeta^2}$ байх ёстой. Эндээс

$$x_2^3 \equiv \pm 1 \pmod{9} \text{ ба } y_2^3 \equiv \bar{y}_2^3 \equiv \pm 1 \pmod{9} \quad (5)$$

болохыг хялбархан гаргаж болно. (4) тэгшитгэлд эхлээд 3 модулиар жишлэг хэрэглэвэл $-x_2^3 + (\zeta^k + \zeta^{2k})y_2^3 \equiv 0 \pmod{3}$ болох бөгөөд эндээс (5) жишлэгийг анхаарвал $x_2^3 \equiv -y_2^3 \pmod{9}$ гэж гарна. Эцэст нь (4) тэгшитгэлд a модулиар жишлэг хэрэглэвэл $(1 + \zeta^k + \zeta^{2k})y_2^3 \equiv 6x_2y_2\bar{y}_2 \pmod{9}$ болно. Энд $3 \nmid x_2y_2z_2$ гэдгийг анхаарвал энэ жишлэг нь зөвхөн $k = 0$ тохиолдолд л биелнэ гэдэг нь харагдана.

$k = 0$ үед (4) тэгшитгэл нь

$$6x_2y_2\bar{y}_2 = -19x_2^3 + y_2^3 + \bar{y}_2^3 \text{ буюу } 8x_2^3 + y_2^3 + \bar{y}_2^3 - 6x_2y_2\bar{y}_2 = 27x_2^3$$

гэсэн хэлбэртэй болох бөгөөд сүүлийн тэгшитгэлийг (1) томъёог хэрэглэн

$$(2x_2 + y_2 + \bar{y}_2)(2x_2 + \zeta y_2 + \zeta^2 \bar{y}_2)(2x_2 + \zeta^2 y_2 + \zeta \bar{y}_2) = 27x_2^3$$

гэж бичиж болно.

$$x_3 = 2x_2 + y_2 + \bar{y}_2$$

$$y_3 = 2x_2 + \zeta y_2 + \zeta^2 \bar{y}_2$$

$$z_3 = 2x_2 + \zeta^2 y_2 + \zeta \bar{y}_2$$

нь бүхэл тоонууд бөгөөд тэдгээрийн хувьд тэгшитгэл нь

$$(x_3 + y_3 + z_3)^3 = 8x_3y_3z_3$$

гэсэн хэлбэртэй болно. Энэ тэгшитгэлээс x_3, y_3, z_3 тоонууд нь бүтэн куб буюу $x_3 = x_4^3$, $y_3 = y_4^3$, $z_3 = z_4^3$ байх $x_4, y_4, z_4 \in \mathbb{Z}$ бүхэл тоонууд олдоно гэж гарах бөгөөд тэр тоонууд нь

$$x_4^3 + y_4^3 + z_4^3 = 2x_4y_4z_4$$

буюу анхны тэгшитгэлийн шийд болно. $x_4 y_4 z_4 \neq 0$ ба $|x_4 y_4 z_4| < |xyz|$ байхыг хялбархан шалгаж болох юм.

2-р тохиолдол. $(5 + 3\zeta)|y_1|$ болог. Тэгвэл (3) тэгшитгэлээс ямар нэгэн $k = 0, 1, 2$ -ийн хувьд

$$\begin{cases} x_1 = x_2^3 \\ y_1 = -\zeta^k (5 + 3\zeta) y_2^3 \\ \bar{y}_1 = -\zeta^{2k} (5 + 3\zeta^2) \bar{y}_2^3 \end{cases}$$

байх $x_2 \in \mathbb{Z}$ бүхэл тоо ба $y_2 \in \mathbb{Z}[\zeta]$ бүхэл алгебрын тоонууд олдоно гэдэг нь харагдана. Энэ шинэ хувьсагчдын хувьд тэгшитгэл нь

$$6x_2 y_2 \bar{y}_2 = -x_2^3 + \zeta^k (5 + 3\zeta) y_2^3 + \zeta^{2k} (5 + 3\zeta^2) \bar{y}_2^3 \quad (6)$$

гэсэн хэлбэрт бичигдэнэ. Өмнөх тохиолдолтой нэгэн адил энэ тохиолдолд $3 \nmid x_2 y_2 z_2$ байх бөгөөд эндээс $k = 0$ гэдгийг өмнөхтэй нэгэн адил харуулж болно. $k = 0$ үед (6) тэгшитгэл нь

$$6x_2 y_2 \bar{y}_2 = -x_2^3 + (5 + 3\zeta) y_2^3 + (5 + 3\zeta^2) \bar{y}_2^3$$

болох бөгөөд энэ тэгшитгэлд

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 + y_2 + \bar{y}_2 \\ y_3 &= x_2 + \zeta y_2 + \zeta^2 \bar{y}_2 \\ z_3 &= x_2 - 2 + \zeta^2 y_2 + \zeta \bar{y}_2 \end{aligned}$$

гэж орлуулбал

$$x_3^2 y_3 + y_3^2 z_3 + z_3^2 x_3 = 2x_3 y_3 z_3$$

болно. Энд x_3, y_3, z_3 тоонууд нь бүхэл тоо бөгөөд $x_3 | y_3^2 z_3, y_3 | z_3^2 x_3, z_3 | x_3^2 y_3$ болохыг анхаарвал ямар нэгэн $x_4, y_4, z_4 \in \mathbb{Z}$ тоонуудын хувьд $x_3 = m y_4 z_4^2, y_3 = m z_4 x_4^2, z_3 = m x_4 y_4^2$ байх бөгөөд үүнийг тэгшитгэлдээ орлуулбал

$$x_4^3 + y_4^3 + z_4^3 = 2x_4 y_4 z_4$$

болно. $x_4 y_4 z_4 \neq 0$ ба $|x_4 y_4 z_4| < |xyz|$ байхыг хялбархан шалгаж болно. Иймд буулгах аргаар тэгшитгэл нь $|xyz| \neq 0$ байх шийдгүй боллоо.

8. G_n / G_{n+1} фактор бүлгийн рангийг $f(n)$ гэж тэмдэглэе. Хэрэв бид

$$\sum_{d|n} d \cdot f(d) = m^n$$

байхыг харуулбал Мёбиусын урвуу хувиргалтын томъёо ёсоор

$$n \cdot f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) m^{\frac{n}{d}}$$

болж батлах зүйл батлагдана. Пуанкаре-Бирхгоф-Виттийн теорем ёсоор

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^k)^{f(k)}} = \sum_{n=0}^{\infty} m^n q^n = \frac{1}{1-mq}$$

байх ёстой. Энэ тэнцлийн 2 талаас логарифм авч, дараа нь уламжлал авбал (q -ээр үржүүлсний дараа)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot f(k) q^k}{1-q^k} = \frac{mq}{1-mq} = \sum_{n=1}^{\infty} (mq)^n$$

болно. Одоо зүүн гар талын илэрхийллийг цуваанд задлаад, тэнцлийн 2 талд байгаа q^n -ийн коэффициентүүдийг тэнцүүлбэл

$$\sum_{k|n} k \cdot f(k) = m^n$$

болно. Үүгээр батлах ёстой зүйл батлагдав.

9. $f(x, y) = \sum_{i=1}^n e^{ax_i + by_i}$ гэсэн 2 хувьсагчийн функцийг авч үзье.

Тэгвэл хэрэв

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{(x_0, y_0)} = (0, 0)$$

бол $x = e^{x_0}$, $y = e^{y_0}$ нь манай тэгшитгэлийн системийн шийд болж чадна гэдгийг харж болно. $\nabla f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ гэсэн вектор утгатай тасралтгүй функцийн (вектор талбарын) дараах нэгэн хялбар чанарыг ашиглая.

Өгүүлбэр. $F(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$ вектор талбар, $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ энгийн битүү муруй өгөгдсөн болог. F талбар нь γ муруйгаар хүрээлэгдсэн D мужид тасралтгүй бөгөөд γ муруй дээр тэггүй болог. Тэгвэл хэрэв F талбарын γ муруйгаар бодсон эргэлтийн тоо

$$i(F, \gamma) = \oint_{\gamma} \arctg \frac{q(x, y)}{p(x, y)}$$

нь тэгээс ялгаатай байвал тэр вектор талбар нь $\mathcal{D}$ муж дотор тэгтэй буюу $F(x_0, y_0) = (0, 0)$ байх $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ байх цэг олдоно.

Баталгаа. Эсрэгээс нь $F(x_0, y_0) = (0, 0)$ байх $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ цэг олддоггүй гэж үзье. Тэгвэл бид D мужид орших ямар ч муруйгаар талбарын эргэлтийн тоог дээрх томъёогоор тооцоолох боломжтой болно. D муж нь энгийн холбоост тул бид γ муруйг тасралтгүй жижигрүүлсээр (x_0, y_0) цэг болтол нь агшааж болох бөгөөд нэгэнт F вектор талбар нь тасралтгүй тул энэ агшаалтаар талбарын эргэлтийн тоо нь (бүхэл утгатай тасралтгүй функц тогтмол байдаг) үл өөрчлөгдөнө. Тэгэхлээр цэгийг (x_0, y_0) тойрсон маш жижиг радиустай тойргийн хувьд эргэлтийн тоо нь бас тэгээс ялгаатай байна.

Гэтэл хангалттай бага ε -г сонгон авахад

$$\gamma((x_0, y_0), \varepsilon) = \{(x, y) \mid \|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \varepsilon\}$$

тойргийн ямар ч (x, y) цэгийн хувьд $F(x, y) \approx F(x_0, y_0)$, тухайлбал $(F(x, y), F(x_0, y_0)) < 10^\circ$ байна. Тэгэхлээр $i(F, \gamma((x_0, y_0), \varepsilon)) = 0$ юм. Энэ зөрчил нь өгүүлбэрийг батлана.

Одоо бодлогоо бодъё. Нэгэнт (a_i, b_i) цэгүүд олон өнцөгтийн оройнууд тул ямар ч $\vec{v}$ векторын хувьд $\max(\vec{v}, (a_i, b_i)) \geq r \cdot \|\vec{v}\|$ байх $r > 0$ тоо олдох бөгөөд эндээс

$$\begin{aligned} (\vec{v}, \nabla f(\vec{v})) &= \sum_{i=1}^n e^{(\vec{v}, (a_i, b_i))} (\vec{v}, (a_i, b_i)) \geq \\ &\geq r \cdot \|\vec{v}\| e^{r \cdot \|\vec{v}\|} + (n-1) \inf_x x \cdot e^x = r \cdot \|\vec{v}\| e^{r \cdot \|\vec{v}\|} - \frac{n-1}{e} \end{aligned}$$

болно. Үүгээр $\|\vec{v}\| = R$ нь хангалттай том байх үед $(\vec{v}, \nabla f(\vec{v})) > 0$ буюу $(\vec{v}, \nabla f(\vec{v})) \in]-90^\circ, 90^\circ[$ гэдэг нь харагдав. Эндээс $\gamma(0, R)$ нь O цэгт төвтэй R радиустай тойрог бол $i(\nabla f, \gamma(0, R)) = 1$ гэж гарах ба одоо өгүүлбэрийг ашиглавал бодлого бодогдоно.

б) Багуудын уралдаан

1 (Ц.Дашдорж). G бүлэг, $G^K \Leftrightarrow \{q^k \mid q \in G\}$ гэе. $\underline{Z_n^{*k} = Z_n^*}$ байх бүх k -г ол.

2 (Ц.Дашдорж). $R = \{f \mid f: [0,1] \text{ дээр тасралтгүй функц} \}$, $(R, +, \cdot)$ цагираг. $S \subseteq [0,1]$ байг. $I_S \Rightarrow \{f \in R \mid \forall s \in S, f(s) = 0\} \triangleleft R$ байна. $I \triangleleft R$ бол $\exists S \subseteq [0,1], I = I_S$ гэж баталж болох уу? $c \in [0,1]$ байг. $R/I_{\{c\}}$ ямар талбартай изоморф вэ?

3 (Б.Батцэнгэл). $1 \in R$ —ассоциатив цагираг.

$$GL_n(R) \mapsto GL_{n+1}(R), \quad A \mapsto \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$(A \in GL_n(R), \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \in GL_{n+1}(R)). \quad GL(R) \cong \bigcup_{n \geq 1} GL_n(R),$$

$E(R)$ нь $(t_{ij}(\lambda) = E + e_{ij}\lambda, i \neq j, \lambda \in R)$ -үүдээр төрөгдсөн $GL(R)$ -ийн дэд бүлэг. $[GL(R), GL(R)] = E(R)$ гэдгийг батал.

4 (Б.Батцэнгэл). K төгсгөлөг талбар, $|K| \geq 4$ бол

$$SL_2(K) / \{\pm E\}$$

бүлэг энгийн гэдгийг батал.

	Хүний тоо	I	II	III	IV	Нийт оноо	Байр
Мат - I	6	10	3			13	I
Мат - II	5	7	3			10	II
Мат - III	1						
Мат - IV	5						

exponent

$$e = e(\mathbb{Z}_n^*)$$

Бодолтууд

1. $|\mathbb{Z}_n^*| = \varphi(n)$ ба $x \in \mathbb{Z}_n^*$ бол $x^{\varphi(n)} = 1$ тул d нь $\forall x \in \mathbb{Z}_n^*$ -ийн хувьд $x^d = 1$ байх хамгийн бага натурал тоо буюу $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$ бүлгийн илтгэгч байг. $1 < d \leq \varphi(n)$ байна. $(k, d) = 1$ бол $\mathbb{Z}_n^* = \mathbb{Z}_n^*$ гэж харуулъя. $a \neq b \in \mathbb{Z}_n^*$ бол $a^k \neq b^k$ гэж харуулбал болно. $a^k = b^k$ гэе. $\exists u, v \in \mathbb{Z}$, $ku + dv = 1$ байгаа тул $a = a^{ku+dv} = a^{ku} \cdot a^{dv} = a^{ku}$, $b = b^{ku} \Rightarrow a^k = b^k$ тул $a = a^{ku} = b^{ku} = b$ болж $a \neq b$ гэж өгсөнд зөрчив.

Одоо $(d, k) = s > 1$ бол $\mathbb{Z}_n^* \neq \mathbb{Z}_n^*$ болохыг харуулъя. $\exists a \neq b \in \mathbb{Z}_n^*$, $a^k = b^k$ бол бодлого бодогдоно.

$k = sy$ байг. $1 = a^{dy} = a^{d \cdot \frac{k}{s}} = \left(a^{\frac{d}{s}}\right)^k = \left(b^{\frac{d}{s}}\right)^k$ байх тул $a^{\frac{d}{s}} \neq b^{\frac{d}{s}}$ бол бодлого бодогдох болов. Иймд $\forall a, b \in \mathbb{Z}_n^*$ -ийн хувьд $a^{\frac{d}{s}} = b^{\frac{d}{s}}$ гэвэл $\frac{d}{s} < d$ тул d -ийн сонголтод зөрчив. Үүгээр бодлого бодогдов. Энэ бодолт дурын төгсгөлөг бүлэг G -ийн хувьд тохирно.

Теорем. d нь G төгсгөлөг бүлгийн илтгэгч бол $(d, k) = 1$ байх k бүрийн хувьд $G^k = G$ байна.

2. а) $R \neq I \triangleleft R$ бол $\exists c \in [0, 1]$, $I \subseteq I_c$ гэдгийг баталъя. $R \neq I \triangleleft R$ байг. $I \subseteq I_c$ байх $c \in [0, 1]$ олдохгүй гэвэл $\forall a \in [0, 1]$, $\exists f_a \in I$, $f_a(a) \neq 0$ байна. Тэгвэл $f_a(x)$ тасралтгүй функц тул $\exists \varepsilon_a > 0$, $E_a = (a - \varepsilon_a, a + \varepsilon_a)$ дээр $f_a(x) \neq 0$ гэж үзэж чадна. E_a , $a \in [0, 1]$ гэсэн бүрхэлтээс $[0, 1]$ хэрчмийн төгсгөлөг бүрхэлт $E_a, \dots, E_{a_n}$ -ийг сонгож авч чадна. f_{a_i} бүр E_{a_i} дээр 0 биш. Иймд $F(x) = f_{a_1}^2(x) + \dots + f_{a_n}^2(x) \in I$ ба $\forall x \in [0, 1]$ -ийн хувьд $F(x) \neq 0$ тул $F^{-1}(x) \in R$. Үүгээр $I = R$ болж зөрчилд хүргэнэ. $S = \emptyset$ бол $I = R$ байдгийг сая баталсан. I_c нь максимал идеал байх нь ойлгомжтой.

б) Одоо I_S хэлбэрт тавигдаж чадахгүй идеал оршихыг харуулъя. $(x - c)^2$ -ээр төрөгдсөн идеал $J = ((x - c)^2)$ -г авч үзье.

$$S(J) = \{c \in [0, 1] \mid \forall f \in J, f(c) = 0\}$$

гэвэл $S(J) = \{c\}$ болох тул хэрэв батлах зүйлийг үнэн гэвэл $J = I_c$ байх ёстой. $(x - c) \in I_c \Rightarrow \exists f(x) \in R$, $(x - c)^2 f(x) = x - c \Leftrightarrow (x - c)f(x) = 1 \Rightarrow c$ цэг дээр зөрчил гарна. Иймд $J \neq I_c$, тодруулбал $((x - c)^2 \in I_c)$.

Одоо $R/I_c \cong \mathbb{R}$ байхыг харуулъя. $\overline{f(x)} = f + I_c \in R/I_c \xrightarrow{\varphi} f(c) \in \mathbb{R}$ нь биекц байна. Учир нь $f + I_c \neq g + I_c \Leftrightarrow f - g \notin I_c \Leftrightarrow (f - g)(c) \neq 0$ буюу $f(c) \neq g(c)$.

3. $t_{ij}(\lambda) = t_{ik}(\lambda)t_{kj}(1)t_{ik}^{-1}(\lambda)t_{kj}^{-1}(1)$ тул $E_n(R) \subset [GL(R), GL(R)]$ юм.

Лемм (Уайтхед). $A \in GL_n(R)$ бол $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A^{-1} \end{array}\right) \in E_{2n}(R)$ байна.

Баталгаа. Ямар ч $B \in M_n(R)$ матрицын хувьд

$$\left(\begin{array}{c|c} E_n & B \\ \hline 0 & E_n \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} E_n & 0 \\ \hline B & E_n \end{array}\right) \in E_n(R) \text{ байх нь илэрхий. Иймд}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A^{-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} E_n & 0 \\ \hline A^{-1} - E_n & E_n \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} E_n & E_n \\ \hline 0 & E_n \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} E_n & 0 \\ \hline A - E_n & E_n \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} E_n & -A^{-1} \\ \hline 0 & E_n \end{array} \right) \in E_{2n}(R)$$

болно. Одоо $\forall A, B \in GL_n(R)$ матрицын хувьд

$$\left(\begin{array}{c|c} ABA^{-1}B^{-1} & 0 \\ \hline 0 & E_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} AB & 0 \\ \hline 0 & (AB)^{-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$$

тул бодлого бодогдов.

4. $SL_2(K)$ бүлэг нь $\{t_{ij}(\lambda), \lambda \in K\}$ элементүүдээр төрөгдөх билээ. $H \triangleleft SL_2(K)$ бөгөөд $H \neq \{\pm E\}$ гэж үзье. Ямар нэгэн скаляр биш $a \in H$ матрицыг сонгон авъя.

1) $\exists t_{1,2} \in H (\lambda \neq 0)$ гэж батлая. $a = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & * \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \in H$ болог. $\alpha = \pm 1$ бол ойлгомжтой. Үгүй бол

$$\begin{aligned} [a, t_{1,2}] &= a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} a^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & * \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \alpha^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

юм. Одоо $a_{21} \neq 0$ бол ямар нэгэн $\beta \in K$ элементийн хувьд $b = \begin{pmatrix} a_{11}\beta & * \\ a_{21} & -a_{11}\beta \end{pmatrix} \in SL_2(K)$ байна. Одоо

$$c = -b^{-1}aba = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta^2} & * \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix} \in H$$

болж энэ хэсгийн батлах зүйл батлагдав.

2) $\forall \lambda \in K$ -ийн хувьд $t_{1,2}(\lambda) \in H$ ба $t_{2,1}(\lambda) \in H$ байна гэж баталъя.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}^{-1} t_{1,2}(\lambda) \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} = t_{1,2}(\lambda \rho^2),$$

$$t_{12}(\lambda \rho^2) t_{1,2}(\lambda \sigma^2)^{-1} = t_{12}(\lambda(\rho^2 - \sigma^2))$$

билээ. $\forall a \in K$ -ийн хувьд $\rho^2 - \sigma^2 = a$ тэгшитгэл нь шийдтэй. Эндээс $t_{12}(\lambda a) \in H$ болов. Эцэст нь

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} t_{1,2}(\lambda) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = t_{2,1}(-\lambda)$$

тул $t_{2,1}(-\lambda) \in H$ юм.