

## ММО-37, VII АНГИЙН III ДАВАА

Б.Батцэнгэл, У.Наранхүү

**VII-A1.** Ямар ч натурал  $m, n > 1$  тоонуудын хувьд

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m+1}} > 1$$

байна гэдгийг харуул.

**VII-A2.**  $7^2 + 7^3 + 7^4 + \dots + 7^{2001}$  тооны аравтын бичлэгт сүүлчийн 6 цифр нь 0 байна гэдгийг батал.

**VII-A3.**  $AB < CD$  гэсэн суурьтай  $ABCD$  трапецэд тойрог багтах бөгөөд багтсан тойрог нь  $AB, CD$  сууриудыг харгалзан  $M, N$  цэгт шүргэдэг болог.  $AN, MC$  шулууны огтлолцлын цэг ба  $AD, BC$  шулууны огтлолцлын цэгийг холбосон шулуун трапедын суурьтай паралель болохыг батал.

**VII-B1.** Тус бүр нь 100-аас хэтрэхгүй 50 ширхэг ялгаатай натурал тоо өгөгджээ. Тэгвэл тэдгээрээс нийлбэр нь бүтэн квадрат байдаг хэдэн тоог (нэг тоо ч байж болно), сонгон авч болно гэдгийг батал.

**VII-B2.** Нэг өнцөг нь нөгөө өнцгөөсөө 3 дахин их байдаг гурвалжууд дотор талуудын урт нь дэс дараалсан натурал тоонууд байдаг гурвалжин байхгүй, харин натурал тоонууд байдаг гурвалжин байдаг гэж батал.

**VII-B3.**  $8 \times 8$  хэмжээтэй шатрын хөлөг дээр шатрын 16 цагаан, 16 хар дүрсийг байрлуулахдаа, хөлгийн нүд бүрийн хувьд түүнтэй зэргэлдээ нүдэнд байрлах цагаан ба хар дүрсийн тоо нь тэнцүү байхаар гүйцэтгэж болох уу? (Нэг нүдэнд 2 дүрс байрлуулж болохгүй бөгөөд ерөнхий талтай нүднүүдийг зэргэлдээ нүд гэж үзнэ.)

**VII-A1.** Кошийн тэнцэл биш ёсоор

$$\sqrt[n]{n+1} = \sqrt[n]{(n+1) \underbrace{1 \cdot \dots \cdot 1}_{m-1}} < \frac{(n+1) + (m-1)}{m} = \frac{n+m}{m}$$

$$\sqrt[n]{m+1} = \sqrt[n]{(m+1) \underbrace{1 \cdot \dots \cdot 1}_{n-1}} < \frac{(m+1) + (n-1)}{n} = \frac{m+n}{n}$$

байна. Эндээс  $\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m+1}} > \frac{m}{n+m} + \frac{n}{n+m} = 1$  болно.

**VII-A2.** Энэ бодлогын өгүүлбэр алдаатай байсан тул олимпиадад оролцогч бүх сурагчдаас хүлцэл өчье. Үнэхээр  $7^2 + 7^3 + 7^4 + \dots + 7^{2001}$  тооны сүүлчийн 5 цифр нь 0 бөгөөд харин сүүлээсээ 6 дахь цифр нь 8 байсан юм. Одоо уг тооны сүүлийн 5 цифр нь 0 болохыг харуулая. Батлагданы санаа нь  $7^2 + 7^3 + 7^4 + \dots + 7^{2001}$  нийлбэрт нийт  $2000 = 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$  нэмэгдэхүүн байгааг ажиглаж, түүнийг үржигдэхүүн болгон задлах явдал байсан юм. Тухайлбал

$$\begin{aligned} 7^2 + 7^3 + 7^4 + \dots + 7^{2001} &= 7^2(1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{1999}) = \\ &= 7^2(1 + 7 + 7^2 + 7^3)(1 + 7^4 + 7^8 + \dots + 7^{1996}) = \\ &= 7^2(1 + 7 + 7^2 + 7^3)(1 + 7^4 + 7^8 + 7^{12})(1 + 7^{16} + 7^{32} + \dots + 7^{1984}) = \\ &= 7^2(1 + 7 + 7^2 + 7^3)(1 + 7^4 + 7^8 + 7^{12})(1 + 7^{16} + 7^{32} + 7^{48} + 7^{64}) \times \\ &\quad \times (1 + 7^{80} + 7^{160} + \dots + 7^{1920}) = \\ &= 7^2(1 + 7 + 7^2 + 7^3)(1 + 7^4 + 7^8 + 7^{12})(1 + 7^{16} + 7^{32} + 7^{48} + 7^{64}) \times \\ &\quad \times (1 + 7^{80} + 7^{160} + 7^{240} + 7^{320})(1 + 7^{400} + 7^{800} + 7^{1200} + 7^{1600}) \end{aligned}$$

гэж задарна. Энд  $1 + 7 + 7^2 + 7^3 = 400$  ба

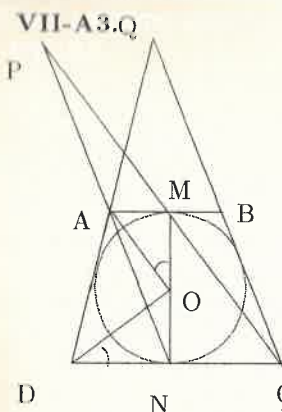
$$4 \mid 1 + 7^4 + 7^8 + 7^{12}$$

$$5 \mid 1 + 7^{16} + 7^{32} + 7^{48} + 7^{64}$$

$$5 \mid 1 + 7^{80} + 7^{160} + 7^{240} + 7^{320}$$

$$5 \mid 1 + 7^{400} + 7^{800} + 7^{1200} + 7^{1600}$$

гэсэн хялбар батлагдах хуваагдлуудыг ашиглавал уг тоо нь  $400 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 200000$ -д хуваагдана гэж гарна. Иймд түүний сүүлийн 5 цифр нь 0 байна.



Багтсан тойргийн төвийг  $O$ ,

$AN \cap MC = P$ ,  $AD \cap BC = Q$  гэж тэм-

дэглэе.  $\frac{PA}{AN} = \frac{QA}{AD}$  гэж баталчихвал

Фалесийн теоремоор  $PQ \parallel CD$  гэж гарна.

$AM \parallel NC$  тул  $\triangle PAM \sim \triangle PNC$ .

Эндээс

$$\frac{PA}{PN} = \frac{AM}{NC} = \frac{PM}{PC} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{болно. } \angle MOA &= 90^\circ - \angle MAO = 90^\circ - \\ \angle BAD &= \frac{180^\circ - \angle BAD}{2} = \frac{\angle ADC}{2} = \\ \angle ODN, \angle AMO &= 90^\circ = \angle DNO \end{aligned}$$

Иймд

$$\triangle AMO \sim \triangle OND: \frac{AM}{ON} = \frac{OM}{DN} = \frac{AO}{DO} \quad (2)$$

Үүнтэй адилаар

$$\triangle BMO \sim \triangle ONC : \frac{BM}{ON} = \frac{BO}{OC} = \frac{OM}{NC} \quad (3)$$

$$OM \cdot ON \stackrel{(2)}{=} AM \cdot DN \stackrel{(3)}{=} BM \cdot NC \Rightarrow \frac{AM}{NC} = \frac{BM}{ND} = \frac{AM + BM}{CN + ND} = \frac{AB}{CD}$$

Үүнд (1)-ийг ашиглавал

$$(4) \quad \frac{AB}{CD} = \frac{AM}{NC} = \frac{PA}{PN}; AB \parallel CD$$

тул

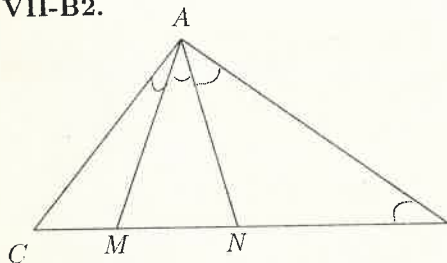
$$\triangle QAB \sim \triangle QDC : \frac{QA}{QD} = \frac{AB}{CD} = \frac{QB}{QC} \quad (5)$$

$$(4), (5)\text{-аас } \frac{AP}{NP} = \frac{QA}{QD} \Rightarrow \frac{PA}{AN} = \frac{AP}{AP + NP} = \frac{AQ}{AQ + QD} = \frac{AQ}{AD} \text{ болж}$$

батлагдав.

**VII-B1.** Хэрэв өгөгдсөн 50 тооны аль нэг нь бүтэн квадрат бол тэр тоо нь олох ёстой тоо болно. Тэгэхлээр өгөгдсөн тоонууд дотор бүтэн квадрат байхгүй гэж үзэж болно. 1, 2, ..., 50 дугаартай хайрцагнууд бэлдэж,  $1 \leq k \leq 50$  үед  $k$  ба  $100 - k$  тоог  $k$  дугаартай хайрцагт хийе. Өгөгдсөн 50 ялгаатай тоог ингэж хайрцаглахад 36 ба 64 нь хоёул бүтэн квадрат тул 36 дугаартай хайрцаг хоосон байх ёстой. Тэгэхлээр бүх тоо нь үлдсэн 49 хайрцагт орох ёстой бөгөөд Дирихлейн зарчим ёсоор ямар нэгэн хайрцагт 2 тоо орсон байна. Тэр 2 тооны нийлбэр нь 100 буюу бүтэн квадрат байна.

## VII-B2.



$\angle A = 3 \cdot \angle B$  байг.

A оройн өнцгийг

$\angle CAM = \angle MAN = \angle NAB$

гэсэн 3 хэсэгт хуваая.

Тэгвэл эдгээр нь

$\angle ABC$ -тэй тэнцэнэ.

$AB = c, BC = a, CA = b$

$\angle ABC = \beta$

гэж тэмдэглэе.  $\angle CAN = 2\beta = \angle CNA$  тул  $\triangle ANC$

адил хажуут гэдгээс  $AC = NC, NB = CB - CN = a - b$  Биссектрисийн чанараар :

$$\frac{CA}{CM} = \frac{AN}{MN} = \frac{a}{b} \Rightarrow CM = \frac{b^2}{a}$$

$$\triangle CMA \sim \triangle CAB: \frac{CM}{CA} = \frac{MA}{BA} = \frac{CA}{CB}$$

Эндээс  $MA = \frac{bc}{a}$ ;

$$\triangle MAN \sim \triangle MBA: \frac{MA}{MB} = \frac{MN}{MA} = \frac{AN}{AB} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{bc}{a}\right)^2 = MA^2 = MB \cdot MN = \left(b - \frac{b^2}{a}\right)\left(a - \frac{b^2}{a}\right) \Rightarrow$$

$$bc^2 = (b-a)^2(a+b) \quad (*)$$

гэсэн адилтгал гарна.  $\angle B < \angle A$  тул  $b < a$ ,  $1 \leq a - b \leq 2$  (Учир нь 3 дараалсан тооны 2 нь)

*Итогиолдол*  $a - b = 1$  үед  $\triangle NAB$ -д гурвалжны тэнцэл биш бичвэл  $AN + NB > AB$ ;  $AN = NB = a - b = 1 \Rightarrow c > 2$  Иймд  $c = 1$ -ийг  $(*)$ -д орлуулбал  $b = b + a$  болж шийдгүй.

*Итогиолдол*  $a - b = 2$  Эндээс  $a = b + 2$  ба  $c = b + 1$  болно.  $(*)$ -д орлуулбал  $b \cdot (b + 1)^2 = 8(b + 1)$  болно.  $b(b + 1) = 8$  болж  $b \notin \mathbb{Z}$ . Иймд шийдгүй. Харин бодлогын II хэсэгт  $a = 48, b = 27, c = 35$  талтай гурвалжин бодлогын шаардлагыг  $(*)$ -адилтгалыг хангана.  $(*)$  адилтгал нь  $\angle A = 3\angle B$  байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл юм).

### VII-B3.

|   |   |   |   |   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|---|---|---|---|--|
|   | х | ц |   |   |   |   |   |  |
| ц | х | ц | х |   |   |   |   |  |
| ц | х | ц | х | ц |   |   |   |  |
|   | х | ц | х | ц | х |   |   |  |
|   |   | ц | х | ц | х | ц |   |  |
|   |   |   | х | ц | х | ц | х |  |
|   |   |   |   | ц | х | ц | х |  |
|   |   |   |   |   | х | ц |   |  |

зураг 3

Болно. Ингэж байрлуулах нэг аргыг (зураг 3)-д цагаан дүрсийг ц, хар дүрсийг х үсгээр тус тус тэмдэглэн үзүүлэв.

*Тэмдэглэл.* Энэ байрлуулалтыг яаж олсон талаар дэлгэрүүлж "УМО-37-ийн дунд ангийн багшийн IV даваа" өгүүллийн B1 бодлогын бодолтыг үз.

## УМО-37, VIII АНГИЙН III ДАВАА

Б.Батцэнгэл, Б.Баяржаргал

VIII-A1.  $ABCDEF$  гүдгэр зургаан өнцөгтийн эсрэг талууд паралель

бол  $ACE$  гурвалжны талбай нь  $BDE$  гурвалжны талбайтай тэнцүү байна гэдгийг батал.

**VIII-A2.** а)  $1 \overbrace{00\dots0}^{2001} 1 \overbrace{00\dots0}^{2001} 1$  хуваагдах бөгөөд харин  $1 \overbrace{00\dots0}^{2000} 1 \overbrace{00\dots0}^{2000} 1$  тоо

нь 37-д хуваагдахгүй гэж батал.

б). Ямар натурал тоо  $n$ -ийн хувьд  $1 \overbrace{00\dots0}^{n \text{ ширхэг}} 1 \overbrace{00\dots0}^{n \text{ ширхэг}} 1$  тоо нь 37-д ху-

ваагдахгүй гэж батал.

**VIII-A3.** Дурын эерэг  $a, b, c$  тоонуудын хувьд  $\sqrt{ab(a+b)} + \sqrt{bc(b+c)} + \sqrt{ca(c+a)} \leq \sqrt{2abc + 2(a+b)(b+c)(c+a)}$  тэнцэл биш биелнэ гэдгийг харуул.

**VIII-B1.** Ямар натурал  $n$ -ийн хувьд, өгсөн квадратыг  $n$  ширхэг үл огтлолцох квадратад хувааж болох вэ? (хуваалтын квадратын талууд нь өгсөн квадратын талуудтай паралель гэж үзэж болно)

**VIII-B2.**  $ABC$  гурвалжны  $BC, CA, AB$  талууд дээр харгалзан  $P, Q, R$  цэгүүд өгөгджээ.  $AP, CR$  хэрчмүүдийн огтлолцлын цэг нь  $O$  бөгөөд  $AP, QR$  хэрчмүүдийн огтлолцлын цэг нь  $M$  ба  $CR, QP$  хэрчмүүдийн огтлолцлын цэг  $N$  болог. Тэгвэл  $AN$  шулууны  $BC$  талтай огтлолцох цэг ба  $CM$  шулууны  $AB$  талтай огтлолцох цэгийг холбосон шулуун дээр  $O$  цэг оршин байна.

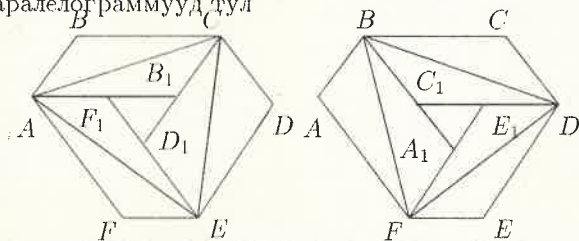
**VIII-B3.**  $a, b, c$  тоонууд нь 
$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ a^2+b^2+c^2=5 \\ a^3+b^3+c^3=7 \end{cases}$$
 тэгшитгэлийн систе-

мийг хангадаг байв.

а)  $a^4 + b^4 + c^4 = 9$  байхыг батал.

б)  $a^5 + b^5 + c^5$  нийлбэрийг ол.

**VIII-A1.** Зургаан өнцөгт дотор зураг 1-д үзүүлснээр 2 аргаар гурав гурван паралелограммыг нэмж байгуулая.  $ABCB_1, CDED_1, EF AF_1$  паралелограммууд тул



$S_{ABCB_1} = 2S_{ACB_1}, S_{CDED_1} = 2S_{CED_1}, S_{EF AF_1} = 2S_{EAF_1}$  юм.

Эдгээр тэнцлүүдийг хооронд нь нэмбэл

$S_{ABCDEF} + S_{B_1 D_1 F_1} = 2S_{ACE}$  гэж гарна.

Үүнтэй нэгэн адил  $S_{ABCDEF} + S_{A_1C_1E_1} = 2S_{BDF}$  болно.

Одоо  $B_1D_1 = E_1A_1$ ,  $D_1F_1 = A_1C_1$ ,  $F_1B_1 = C_1E_1$

буюу  $B_1D_1F_1$ ,  $A_1C_1E_1$  гурвалжнууд нь тэнцүү

болохыг анхаарвал батлах зүйл мөрдөн гарна.

**VIII-A2.** Шууд б) хэсгийг бодъё.

$$\underbrace{1 \ 00 \dots 0}_n \underbrace{1 \ 00 \dots 0}_n \underbrace{1}_1 = 10^{2(n+1)} + 10^{n+1} + 1$$

пишрэг пишрэг

бөгөөд энэ тоо нь  $n = 3k$  ба  $n = 3k + 1$  хэлбэртэй үед 37-д хуваагдана харин  $n = 3k - 1$  үед 37-д хуваагдахгүй гэдгийг батлая.

Баталгаанд ашиглах гол санаа нь  $10^3 \equiv 1 \pmod{37}$  гэсэн жишлэг юм.

$$10^{2(3k+1)} + 10^{3k+1} + 1 \equiv 10^2 + 10 + 1 \equiv 0 \pmod{37}$$

$$10^{2(3k+2)} + 10^{3k+2} + 1 \equiv 10 + 10^2 + 1 \equiv 0 \pmod{37}$$

бөгөөд харин  $10^{2 \cdot 3k} + 10^{3k} + 1 \equiv 3 \not\equiv 0 \pmod{37}$  юм.

$$\text{VIII-A3. } \sqrt{ab(a+b)} + \sqrt{bc(b+c)} + \sqrt{ac(a+c)} =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{ab(a+b)} + \sqrt{bc(b+c)} + \sqrt{ac(a+c)})^2} =$$

$$= \sqrt{a^2b + ab^2 + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c + 2\sqrt{ab^2c(a+b)(b+c)} +$$

$$+ 2\sqrt{a^2bc(a+b)(a+c)} + 2\sqrt{abc^2(a+c)(b+c)} =$$

$$= \sqrt{(a+b)(a+c)(b+c) - 2abc + 2(b\sqrt{a(b+c)} \cdot \sqrt{c(a+b)} +$$

$$+ a\sqrt{b(a+c)} \cdot \sqrt{c(a+b)} + c\sqrt{a(a+b)} \cdot \sqrt{b(a+c)})$$

$$\text{сүүлчийн илэрхийлэлд } \sqrt{a(b+c)} \cdot \sqrt{c(a+b)} \leq \frac{a(b+c) + c(a+b)}{2}$$

$$\sqrt{b(a+c)} \cdot \sqrt{c(a+b)} \leq \frac{b(a+c) + c(a+b)}{2}$$

$$\sqrt{a(b+c)} \cdot \sqrt{b(a+c)} \leq \frac{a(b+c) + b(a+c)}{2}$$

болохыг тооцвол:

$$\sqrt{ab(a+b)} + \sqrt{bc(b+c)} + \sqrt{ac(a+c)} \leq$$

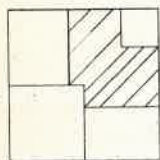
$$\leq \sqrt{(a+b)(a+c)(b+c) - 2abc + ab(b+c) + bc(a+b) + ab(a+c) +$$

$$+ ac(a+b) + ac(b+c) + bc(a+c)} =$$

$$= \sqrt{2(a+b)(a+c)(b+c) + 2abc}$$

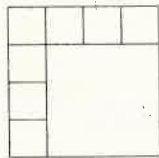
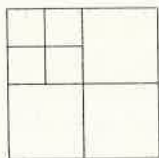
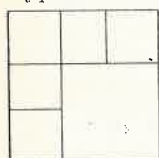
болж тэнцэл биш батлагдав.

**VIII-B1.**  $n = 2, 3, 5$  үед болохгүй,  $n = 1, 4$  ба  $n \geq 6$  үед болно гэдгийг батлая.  $n = 2, 3$  үед болохгүй гэдэг нь илэрхий.  $n = 5$  үед квадратын 4-н оройг 1, 1 квадрат хучих ёстой.



зураг 2

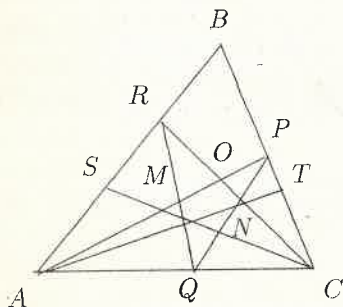
Эдгээр квадратуудын гадна үлдэх дүрс гүдгэр биш дүрс үүсгэх тул квадрат байж болохгүй.  $n = 1, 4$  үед хуваалт илэрхий. Одоо  $n \geq 6$  үед болно гэдгийг харуулая.  $n = 6, 7, 8$  үед яаж хуваах ёстойг зураг 3-д үзүүлэв.



зураг 3

Хуваалтын нэг квадратыг 4-н тэнцүү хэсэгт хуваахад квадратын тоо 3-аар ихэснэ. Иймд 6 (7, 8) квадратаас 9 квадрат, 12 квадрат, 15 квадрат, ... (харгалзан 10, 13, 16, ... ба 11, 14, 17, ...) ширхэг квадратууд байгуулагдана.

### VIII-B2.



$$AN \cap BC = T$$

$CM \cap AB = S$  гэж тэмдэглэе.

$S, O, T$ -г нэг шулуун дээр оршихыг батлах ёстой.  $\triangle MQC$ -ийн хувьд  $A, S, R$  цэгүүд нэг шулуун дээр орших ёстой.

Менелайн теоремын нөхцийг бичвэл

$$\frac{CA}{AQ} \cdot \frac{QR}{RM} \cdot \frac{MS}{SC} = 1$$

болно.

$\triangle CPQ$ -ийн хувьд  $A, N, T$  цэгүүд нэг шулуун дээр орших нөхцөл

$$\frac{QA}{AC} \cdot \frac{CT}{TP} \cdot \frac{PN}{NQ} = 1$$

болно.  $\triangle MPQ$ -ийн хувьд  $R, O, N$  цэгүүд нэг шулуун дээр орших нөхцөл

$$\frac{QN}{NP} \cdot \frac{PO}{OM} \cdot \frac{MR}{RQ} = 1$$

болно. Эдгээрийг үржүүлбэл

$$\frac{CA}{AQ} \cdot \frac{QR}{RM} \cdot \frac{MS}{SC} \cdot \frac{QA}{AC} \cdot \frac{CT}{TP} \cdot \frac{PN}{NQ} \cdot \frac{QN}{NP} \cdot \frac{PO}{OM} \cdot \frac{MR}{RQ} = \frac{MS}{SC} \cdot \frac{CT}{TP} \cdot \frac{PO}{OM} = 1$$

болно. Энэ нь  $\triangle MPC$ -ийн хувьд  $S, O, T$  цэгүүд нэг шулуун дээр оршихыг харуулж байна.

### VIII-B3. Өгсөн нөхцлүүдээс

$$ab + ac + bc = \frac{1}{2}[(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)] = 2$$

$$abc = \frac{1}{6}(a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) + 2(a^3 + b^3 + c^3) = -\frac{2}{3}$$

гэж олдох бөгөөд  $S_k = a^k + b^k + c^k$  гэж тэмдэглэвэл

$$S_4 = (a + b + c)S_3 - (ab + ac + bc)S_2 + abcS_1$$

$S_5 = (a + b + c)S_4 - (ab + ac + bc)S_3 + abcS_2$  байна гэсэн адилтгалуудаас  $a^4 + b^4 + c^4 = 9$  ба  $a^5 + b^5 + c^5 = 9\frac{2}{3}$  гэж гарна. (Эдгээр адилтгалыг Ньютоны адилтгал гэж нэрлэдэг).

## ММО-37, VIII АНГИЙН IV ДАВАА

**Б.Сандагдорж**

**VIII-A1(Б.Баясгалан).** 2001 талтай зөв 6 өнцөгтийн талууд нь уг 6 өнцөгтийн талуудтай паралель байх нэгж талтай ромбуудад хуваав. Яг 37 ширхэг нэгж талтай ромбын талбайг таллан хуваадаг, уг 6 өнцөгтийн аль нэг талтай паралель байх шулууны боломжит тоог ол.

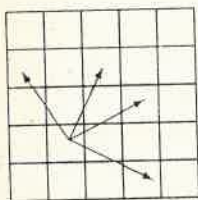
**VIII-A2(Б.Сандагдорж).**  $0 < a, b, c \leq 529$  бөгөөд  $a^{11} + b^{11} + c^{11} : 23$  байх  $(a; b; c)$  натурал гурвалын тоог ол.

**VIII-A3(У.Наранхүү).**  $ABCD$  гүдгэр 4 өнцөгтөд багтсан тойрог  $AB, BC, CD, DA$  талуудыг харгалзан  $P, Q, R, S$  цэгүүдэд шүргэх ба  $BS,$

$PD$  шулуунууд  $M$  цэгт,  $BR, QD$  шулуунууд  $N$  цэгт,  $PR, QS$  шулуунууд  $O$  цэгт огтлолцоно.  $M, O, N$  цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

**VIII-B1(В.Адъяасүрэн).**  $a, b, c$  нь  $a + b + c = 1$  байх сөрөг биш бодит тоонууд бол  $108 \cdot (ab + bc + ca) \leq 29 + 189abc$  тэнцэтгэл биш биелнэ гэж батал.

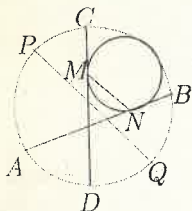
**VIII-B2(Б.Батцэнгэл).**  $n \times n$  хөлгийн зүүн доод буланд шатрын морь байрлана.



Хоёр тоглогч ээлжлэн морийг зурагт үзүүлсэн нүүдлүүдийн нэгийг хийнэ. Нүүдэл хийж чадахгүй болсон тэр тоглогч хожигдоно.

а)  $n = 2001$  үед зөв тоглолтонд аль тоглогч хожих вэ?

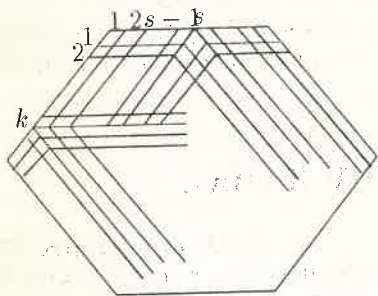
б)  $n = 2000$  үед аль тоглогч хожих вэ?



**VIII-B3(Г.Баярмагнай).**

$CPA$  нумын дундаж нь  $P, DQB$  нумын дундаж нь  $Q$ . Мөн  $M, N$  нь шүргэлтийн цэгүүд бол  $MN \parallel PQ$  гэдгийг батал.

**VIII-A1.**



2001 талтай зөв 6 өнцөгтийг нэгж талтай ромбуудад хуваахад уг 6 өнцөгтийн талуудтай паралель шулуунууд татагдана. Энэ шулуунуудыг зурагт үзүүлснээр дугаарлахад  $k$ -р шулуун дээр  $k$  ширхэг ромбын хүндийн төв байрлана. Иймд 37-р шулуун нь 37 ромбын талбайг хагаслан хуваана. Иймд 6 өнцөгтийн тал бүртэй паралель бодлогын нөхцлийг хангах 6 шулуун байна.

**VIII-A2:**  $(a, 23) = 1$  бол Фермагийн бага теоремоор  $a^{22} \equiv 1 \pmod{23}$  байна. Эндээс  $a^{22} - 1 = (a^{11} + 1)(a^{11} - 1) \equiv 0 \pmod{23}$  буюу  $a^{11} \equiv \pm 1 \pmod{23}$  болно. Тэгэхлээр  $a^{11} + b^{11} + c^{11} : 23$  гэдгээс

1)  $a^{11} \equiv b^{11} \equiv c^{11} \equiv 0 \pmod{23}$  буюу  $a \equiv b \equiv c \equiv 0 \pmod{23}$  гэсэн үг.

$529 = 23^2$  тул 23-д хуваагдах тоо 23 ширхэг байх буюу бодлогын нөхцлийг хангах  $(a; b; c)$  гурвалын тоо  $23^3$  байна.

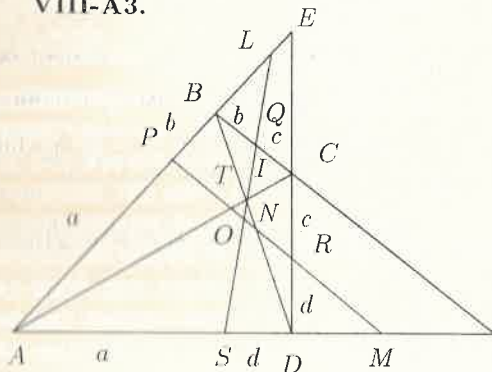
2)  $a^{11}, b^{11}, c^{11}$ -ийн нэг нь  $(+1)$ -ээр, нэг нь  $(-1)$ -ээр, нөгөө нь 23 модулиар 0-ээр жишигдэнэ гэсэн үг. Иймд бодлогын нөхцлийг хангах  $(a; b; c)$  гурвалын тоог сонирхоё.

Хэрэв  $1, 2, \dots, 21, 22$  тоонууд дотроос  $a$  нь  $a^{11} \equiv 1 \pmod{23}$  бол  $(23 - a)^{11} \equiv -a^{11} \equiv -1 \pmod{23}$  болох тул  $a^{11} \equiv 1 \pmod{23}$  буюу  $a^{11} \equiv -1 \pmod{23}$  байх тоонуудын тоо тэнцүү буюу тус тус 11 ширхэг байна.

$(a, 23) = 1$  бол  $a^{11} \equiv 1 \pmod{23}$  байх тоо нь  $529 - 23 = 506$  буюу 253 ширхэг байна. 2) нөхцлийг хангах нийт гурвалын тоо нь  $3! \cdot 253^2 \cdot 23$  болно.

Эндээс бодлогын нөхцлийг хангах бүх гурвалын тоо  $23^3 + 23^3 \cdot 66$  ширхэг байна.

### VIII-A3.



$AB \cap CD = E, AD \cap BC = F$   
 $PR \cap AC = O, PR \cap BD = N$   
 $SQ \cap AC = T, SQ \cap BD = I$   
 $PR \cap AD = M, SQ \cap AB = L$   
 гээ.

$\triangle AED$ -д  $(PM)$

Меналайн теорем бичвэл

$$\frac{AP}{PE} \cdot \frac{ER}{RD} \cdot \frac{DM}{AM} = 1$$

( $PE = ER$  шүргэгчүүд)

$$F \Rightarrow \frac{DM}{AM} = \frac{d}{a};$$

$\triangle ABD$ -д меналайн теорем

$$\Rightarrow \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BN}{ND} \cdot \frac{DM}{AM} = 1 \Rightarrow \frac{BN}{ND} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{a} = 1 \Rightarrow \frac{BN}{ND} = \frac{b}{d};$$

$\triangle ACD$ -д Меналайн теорем бичвэл:

$$\frac{AO}{OC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DM}{AM} = 1 \Rightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{a}{c}$$

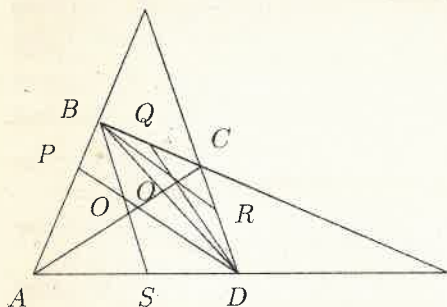
Үүний адилаар  $SQ$  огтлогчийн хувьд Меналайн теорем бичвэл

$$\frac{AT}{TC} = \frac{a}{c}; \quad \frac{BI}{ID} = \frac{b}{d}$$

гэж гарна.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{AO}{OC} = \frac{a}{c} \\ \frac{AT}{TC} = \frac{a}{c} \end{array} \right\} \Rightarrow O \equiv T \left\{ \begin{array}{l} \frac{BN}{ND} = \frac{b}{d} \\ \frac{BI}{ID} = \frac{b}{d} \end{array} \right\} \Rightarrow N \equiv I$$

болно. Гэтэл  $O, N \in PR$ ,  $T, I \in SQ$  тул  $PR \cap SQ = \{O, N\}$  болов. Иймд  $O \equiv N$  болно.



Мөн  $O \in AC, N \in BD \Rightarrow$

$O \equiv N = AC \cap BD$  болов.

$\frac{BO}{OD} = \frac{b}{d}$ ;  $O \equiv N \equiv T \equiv I$ -г

$O$ -оор тэмдэглэе. (Цаашид)

$AO, BS, PD$  нэг цэгт огтлолцох  $\Leftrightarrow$

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BO}{OD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{d} \cdot \frac{d}{a} = 1$$

тул  $AC, BS, PD$  шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно.

Үүний адил  $BR, QD, AC$  шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно. Иймд уг 3-н цэг  $AC$  шулуун дээр оршино.

**VIII-B1.**  $a, b, c$  тоонууд тэгш эрхтэй учир  $c$  тоог хамгийн бага гэж үзье  $a + b + c = 1$  тул  $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$  буюу  $27abc \leq 1$  байна. Мөн  $a + b = 1 - c, 1 - c = a + b \geq 2\sqrt{ab}$  буюу  $(a+b)^2 = (1-c)^2 \geq 4ab$  гэсэн тэнцэтгэл биш биелнэ.

$29 + 189abc = 28 + 1 + 216abc - 27abc = 28 + 216abc + (1 - 27abc) \geq 28 + 216abc$  тэнцэтгэл биш биелэх учир

$$108(ab + bc + ca) \leq 216abc + 28$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батлахад хангалттай.

$$\begin{aligned} 108(ab + bc + ca) - 216abc - 28 &= 108\left(ab + bc + ca - 2abc - \frac{7}{27}\right) = \\ &= 108\left(c(a+b) + ab(1-2c) - \frac{7}{27}\right) \leq 108\left[c(1-c) + \frac{(1-c)^2}{4}(1-2c) - \frac{7}{27}\right] = \\ &= -54c^3 + 27c^2 - 1 = -(3c-1)^2(6c+1) \leq 0 \text{ болж батлагдав.} \end{aligned}$$

**VIII-B2.** Бодлогыг төгсгөлөөс нь бодоё. Юуны өмнө тоглолт төгсөх хүснэгтийн нүднүүдэд, өөрөөр хэлбэл түүнээс цааш нүүдэл хийх боломжгүй тэр хүснэгтийн

|  |  |  |  |  |  |  |   |   |
|--|--|--|--|--|--|--|---|---|
|  |  |  |  |  |  |  | + | + |
|  |  |  |  |  |  |  | + | + |
|  |  |  |  |  |  |  |   |   |
|  |  |  |  |  |  |  |   |   |
|  |  |  |  |  |  |  |   |   |
|  |  |  |  |  |  |  |   |   |
|  |  |  |  |  |  |  |   |   |
|  |  |  |  |  |  |  |   |   |
|  |  |  |  |  |  |  |   |   |
|  |  |  |  |  |  |  |   |   |

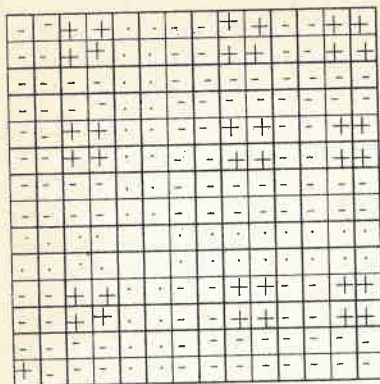
зураг 1

нүднүүдэд + тэмдэг бичье (зураг 1). Мэдээж энэ нүднүүд хамгийн сүүлд нүүдэл хийж хурч ирсэн тэр тоглогч хожино. Ямар нэгэн нүдний дараа (энэ нь зөвшөөрөгдсөн морины нүүдлээр дараа гэсэн үг) орших нүднүүд дээр +, - тэмдэг биччихсэн байсан гэж үзье. Тэгвэл тэр нүдэнд, хэрэв түүний дараа орших бүх нүд - тэмдэгтэй бол + тэмдгийг, үгүй бол - тэмдгийг бичье.

Тэгэхлээр ямар нэг нүдэнд + тэмдэг бичигдсэн байвал түүний дараа орших нүднүүдэд - тэмдэг байх ёстой. Мөн ямар нэг нүдэн дээр - тэмдэг бичигдсэн байвал түүний дараа орших нүднүүдийн аль нэгэнд + тэмдэг заавал байх ёстой. Энэ өгүүлбэр нь тоглогчдын хожлын тактикийг зааж өгнө.

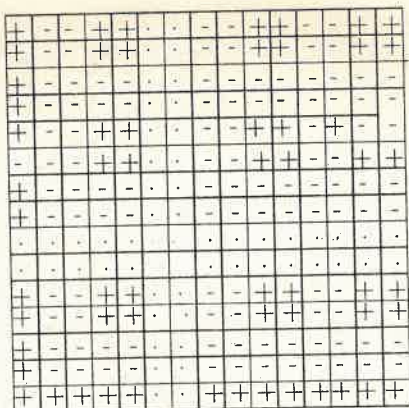
1-р тохиолдол. Тоглолт эхлэх нүдэнд + тэмдэг бичигдсэн бол 2-р тоглогч хожино. Тактик: 1-р тоглогч яаж ч нүүсэн - тэмдэг бичигдсэн нүд рүү нүүдэл хийнэ. 2-р тоглогч тэр нүдний дараа орших + тэмдэг бичигдсэн тэр орой руу нүүнэ. Дараа нь 1-р тоглогч дахиад л яаж ч нүүсэн - тэмдэг бичигдсэн нүд рүү нүүдэл хийнэ. Түүний дараа 2-р тоглогч өмнөхтэй нэгэн адил тэр нүдний дараа орших + тэмдэг бичигдсэн тэр орой руу нүүнэ. Ийм тактикаар тоглоход тоглолт дуусахад 2-р тоглогч цаашаа нүүх боломжгүй + тэмдэг бичигдсэн нүдэнд ирэх нь ойлгомжтой юм.

2-р тохиолдол. Тоглолт эхлэх нүдэнд - тэмдэг бичигдсэн байвал 1-р тоглогч хожино. Түүний тактик нь өмнөх тохиолдлын 2-р тоглогчийн тактиктэй яг ижил юм.



$n = 4k$

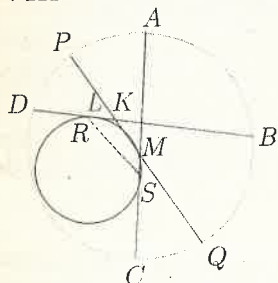
зураг 2



$n = 4k + 1$

$n = 4k, 4k + 1$  үед хүснэгтийн нүднүүд зураг 2-д дүрсэлснээр бөглөгдөх бөгөөд аль ч тохиолдолд тоглолт эхлэх нүдэнд тэмдэг байгаа тул  $p$ -тоглогч хожино.

### VIII-B3.



$$\begin{aligned} \angle PMA &= \frac{\widehat{AP} + \widehat{CQ}}{2} = \\ \frac{\widehat{PD} + \widehat{BQ}}{2} &= \angle BLQ = \angle KLM \Rightarrow \\ \triangle KLM &\text{ нь адил хажуут.} \\ \text{Мөн } KR &= KS \text{ (шүргэгчүүд учир)} \Rightarrow \\ KRS &\text{ нь адил хажуут. } \angle KRS = 90^\circ - \\ \frac{\angle RKS}{2} &= 90^\circ - \frac{\angle LKM}{2} = \angle KLM \Rightarrow \\ \angle KRS &= \angle KLM \text{ тул } RS \parallel LM \end{aligned}$$

## ММО-37, IX ангийн III даваа

Б.Батцэнгэл, Д.Даянцолмон

**IX-A1.** Цасангуа охины үлгэрт гардаг 7 одой өдөр бүр ажилдаа жагсаалаар явдаг билээ. Тэд заавал "өндөр-нам-өндөр-нам..." гэж сөөлжлөн жагсдаг байсан бөгөөд өдөр бүр тэд өөр өөр дарааллаар жагсдаг байжээ. Хэрэв 7 одойн өндөр нь бүгд ялгаатай байсан бол тэд хамгийн олондоо хэдэн өдөр ажилдаа явж чадах вэ?

**IX-A2.**  $ABC$  гурвалжны талууд нь  $a, b, c$  болог. Гурвалжинд багтсан тойргийн төвийн хувьд  $A, B, C$  оройнуудтай тэгш хэмт цэгүүдийг  $A_1, B_1, C_1$  гэж тэмдэглэе. Тэгвэл  $ABC$  ба  $A_1B_1C_1$  гурвалжны огтлолцолд үүсэх зургаан өнцөгтийн периметр  $\frac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c}$ -ээс хэтрэхгүй байна

гэдгийг батал.

**IX-A3.** Дугуй ширээг тойрон  $n$  тооны хүн сууж хуралджээ. Түр завсарласны дараа тэд дахин ширээнд сууцгаасан бөгөөд тэгэхдээ байраа хамаагүй сольсон байв.

а) Хэрэв  $n$  тэгш тоо бол завсарлагааны өмнө ба дараа хооронд нь сууж буй хүмүүсийн тоо нь ижил байдаг 2 хүн заавал олдохыг батал.

б) Хэрэв  $n$  сондгой тоо бол дээрхи чанартай 2 хүн заавал олдох албагүй гэдгийг батал.

**IX-B1.** Дурын зэрэг  $x, y, z$  тоонуудын хувьд

$$(xy + yz + zx) \left( \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \right) \geq \frac{9}{4}$$

тэнцэл биш биелнэ гэдгийг харуул.

**IX-B2.** Тойргийн  $AB, CD$  хөвчүүд нь хоорондоо перпендикуляр бөгөөд аль нь ч диаметр биш байв.  $CD$  хөвч  $AB$  хөвчийг 1:5 гэсэн харьцаагаар, тойргийн  $AB$  их нумыг 1:2 харьцаагаар тус тус хуваадаг бол  $AB$  хөвч нь  $CD$  хөвчийг ямар харьцаагаар хуваах вэ?

**IX-B3.** Ямар ч натурал  $n$ -ийн хувьд  $k \cdot 17^n + 1$  тоо нь зохиомол тоо байдаг ямар нэгэн тэгш  $k$  тоог ол.

**IX-A1.** Одойнууд "өндөр-нам-өндөр-..." эсвэл "нам-өндөр-нам-..." гэж жагсах жагсаалыг нийтэд нь *сөөлжилсөн* жагсаал гэж нэрлэе.  $n$  ширхэг одой харгалзан "өндөр-нам-өндөр-..." ба "нам-өндөр-нам-..." гэж жагсах боломжийн тоог  $A(n), B(n)$  гэж тус тус тэмдэглэе. Одойнуудыг өндрөөс нь нам руу  $1, \dots, n$  гэж дугаарлаад  $i_1, \dots, i_n$  гэж жагссан жагсаалд  $n+1-i_1, \dots, n+1-i_n$  гэж жагсах жагсаалыг харгалзуулбал  $A(n) = B(n)$  болох нь батлагдана. Эндээс  $A(n) + B(n)$  буюу сөөлжилж жагссан жагсаалыг тоог олоход хангалттай гэдэг нь ойлгомжтой. Одоо  $A(n)$ -ийн хувьд нэгэн рекуррент харьцааг гаргая. Сөөлжилсөн жагсаалд хамгийн өндөр буюу 1 дугаартай одой  $k (1 \leq k \leq n)$ -р байранд жагсах боломжийн тоог олѐе. Энэ одойноос урд жагсах  $k-1$  одойг  $C_{n-1}^{k-1}$  боломжоор сонгон авч болох бөгөөд тэдгээр нь  $A(k-1)$  янзаар жагсана (энд бид  $A(k-1) = B(k-1)$  болохыг ашиглав). Учир нь 1-р одой нь хамгийн өндөр тул түүнээс урд жагсах одойнуудын жагсаалын нэг нь нэг утгатай тодорхойлогдоно. Тухайлбал  $k$  тэгш бол түүнээс урд зогсох одойнууд "нам-өндөр-нам-..." гэж,  $k$  сондгой бол "өндөр-нам-өндөр-..." гэж жагсах ёстой. Мөн энэ шалтгаанаар түүнээс хойш жагсах  $n-k$  одой  $A(n-k)$  янзаар жагсана. Иймд 1 дугаартай одой  $k$ -р байранд жагссан сөөлжилсөн жагсаалын тоо нь  $C_{n-1}^{k-1} A(k-1) A(n-k)$  гэж тэнцүү (энд бид  $A(0) = 1$  гэж тооцно). Эндээс

$$2A(n) = C_{n-1}^0 A(0)A(n-1) + C_{n-1}^1 A(1)A(n-2) + \dots + C_{n-1}^{n-2} A(n-2)A(1) + C_{n-1}^{n-1} A(n-1)A(0)$$

болно. Энэ харьцаанаас  $C_{n-1}^{k-1} = C_{n-1}^{n-k}$  болохыг анхаарвал

$$A(2) = C_1^0 A(0)A(1) = 1$$

$$A(3) = C_2^0 A(0)A(2) + \frac{1}{2} C_2^1 A(1)A(1) = 2$$

$$A(4) = C_3^0 A(0)A(3) + C_3^1 A(1)A(2) = 5$$

$$A(5) = C_4^0 A(0)A(4) + C_4^1 A(1)A(3) + \frac{1}{2} C_4^2 A(2)A(2) = 16$$

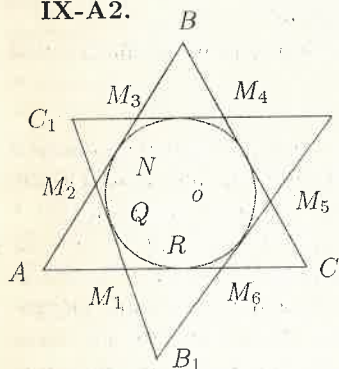
$$A(6) = C_5^0 A(0)A(5) + C_5^1 A(1)A(4) + C_5^2 A(2)A(3) = 61$$

$$A(7) = C_6^0 A(0)A(6) + C_6^1 A(1)A(5) + C_6^2 A(2)A(4) + \frac{1}{2} C_6^3 A(3)A(3) = 272$$

гэж тус тус олдоно. Үүгээр  $A(7) = 272$  гэж олдов.

Тэмдэглэл. Пасангуа охины үлгэрээр хийсэн Уолт Диснейн хүүхэлдэйн кинонд 7 одойн дуулдаг дуу нь "High-low high-low..." буюу "Өндөр нам өндөр-нам..." хэмээн эхэлдэг нь энэ бодлогын санааг өгсөн болно.

### IX-A2.



$$p = \frac{a+b+c}{2} \text{ гэж тэмдэглэе.}$$

$A_1$  O-багтсан тойргийн төв болог. O цэгийн хувьд хийсэн тэгш хэмийн хувиргалт нь O цэгт төвтэй  $180^\circ$ -ийн эргүүлэлттэй адил тул  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$  ба эдгээр гурвалжны багтсан тойргууд ерөнхий байна. Иймд  $\triangle AM_1M_2 = \triangle A_1M_4M_5$ ,  $\triangle BM_3M_4 = \triangle B_1M_1M_6$ ,  $\triangle CM_5M_6 = \triangle C_1M_2M_3$  байх ба

эдгээр гурвалжнууд бүгд ABC гурвалжинтай төсөөтэй. Тухайлбал

$$\triangle AM_1M_2 \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{P_{AM_1M_2}}{P_{ABC}} = \frac{M_1M_2}{BC}$$

болно. (Энд  $P_{ABC}$  нь ABC гурвалжны периметр)

$$P_{AM_1M_2} = AM_2 + (M_2Q + QM_1) + M_1A = AN + AR = 2 \cdot (p-a)M_1M_2 = BC \cdot \frac{P_{AM_1M_2}}{P_{ABC}} = a \cdot \frac{2(p-a)}{2p} = \frac{a(p-a)}{p}$$

$$\text{Үүнтэй ижилээр } M_3M_4 = \frac{b(p-b)}{p}; M_5M_6 = \frac{c(p-c)}{p} \text{ болно.}$$

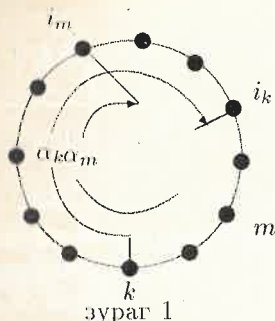
Иймд  $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$  нь зургаан өнцөгтийн периметр.

$$P_{M_1M_2M_3M_4M_5M_6} = 2(M_1M_2 + M_3M_4 + M_5M_6) = 2 \frac{a(p-a) + b(p-b) + c(p-c)}{p} = 2 \frac{(a+b+c)p - a^2 - b^2 - c^2}{p} = 2 \frac{(a+b+c)(a+b+c) - 2a^2 - 2b^2 - 2c^2}{a+b+c}$$

$$= 2 \frac{(ab+bc+ac) - \frac{1}{2}(a-b)^2 - \frac{1}{2}(b-c)^2 + \frac{1}{2}(c-a)^2}{a+b+c} \leq \frac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c}$$

Баталгааны явцаас харахад  $\triangle ABC$  зөв үед л тэнцэлдээ хүрнэ.

### IX-A3.



а) Дугуй ширээний сандлуудыг цагийн зүүний дагуу  $1, 2, \dots, n$  гэж дугаарлагдсан зөв  $n$  өнцөгтийн оройнууд гэж үзэж

болох ба хүмүүсээ завсарлагааны өмнөх байрлалаар нь

$k(1 \leq k \leq n)$ -р хүн  $k$  дугаартай ширээнд суусан гэж

дугаарлая. Завсарлагааны дараа  $k$  дугаартай хүн  $i_k$ -р ширээнд суусан гэж үзье.

$k$

бүрийн хувьд  $k$ -р оройгоос цагийн зүүний дагуу тоолж  $i_k$ -р орой хүрэх эсрэг чиглэлт өнцгийг  $\alpha_k$  гэж тэмдэглэе. Хэрэв  $i_k \geq k$  бол  $\alpha_k = \frac{2\pi}{n}(i_k - k)$  бөгөөд  $i_k < k$  бол  $\alpha_k = 2\pi + \frac{2\pi}{n}(i_k - k)$  байна гэдгийг хялбархан тооцоолж болно. Одоо эсрэгээс нь бодлогын нөхцөлд шаардсан 2 хүн олдохгүй гэж үзье. Тэгвэл энэ нөхцлөөр  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  өнцгүүд бүгд ялгаатай болно. Үнэхээр  $\alpha_k = \alpha_m$  бол  $k$  ба  $m$  дугаартай хүмүүс нь хооронд нь суусан хүмүүсийн тоотой тэнцүү байх 2 хүн болно. (зураг 1).  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  өнцгүүд ялгаатай байхын тулд тэдгээр дотор  $\frac{2\pi}{n}s$  ( $0 \leq s \leq n-1$ ) өнцөг яг 1 ширхэг байх ёстой гэдэг нь ойлгомжтой юм. Нөгөө талаас, нэгэнт  $i_1, i_2, \dots, i_n$  нь  $1, 2, \dots, n$  тоонуудын сэлгэмэл тул  $i_1 + i_2 + \dots + i_n = 1 + 2 + \dots + n$  байх ёстой бөгөөд эндээс

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

нийлбэр нь  $2\pi$ -ийн давталт байх ёстой гэж гарна. Гэтэл  $n$  тэгш тоо учир

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \frac{2\pi}{n}(1 + 2 + \dots + n - 1) = \pi(n - 1)$$

нийлбэр нь  $2\pi$ -д бүхлээр хуваагдахгүй.

б) Бодлогын энэ хэсэг нь  $n > 3$  байх сондгой  $n$  тооны хувьд биелэх бөгөөд харин  $n = 3$  үед биелэхгүй байсан юм.  $n > 3$  нөхцлийг орхи-гдуулж бичсэндээ олимпиадад оролцогч сурагчдаас хүлцэл өчье.  $n = 2k + 1$  ( $k > 1$ ) үед хүмүүс

$$i_1 = 2, i_2 = 4, \dots, i_k = 2k, i_{k+1} = 1, i_{k+2} = 3, \dots, i_{2k+1} = 2k + 1$$

гэж суувал бодлогын нөхцөлд шаардсан 2 хүн олдохгүй юм.

**IX-B1.** Эхлээд аливаа сөрөг биш  $x, y, z$  тоонууд ба аливаа натура  $n$ -ийн хувьд

$$x^n(x-y)(x-z) + y^n(y-z)(z-x) + z^n(z-x)(z-y) \geq 0 \quad (1)$$

болохыг батлая. (1)-ийг Шурын тэнцэтгэл биш гэдэг.

$x, y, z$  хувьсагчид тэгш эрхтэй оролцох учраас  $x \geq y \geq z \geq 0$  гэж үзэхэд явцуурахгүй.

$x - y = a \geq 0$ ,  $y - z = b \geq 0$  гэж тэмдэглэе.

$$\begin{aligned} x^n(x-y)(x-z) + y^n(y-z)(y-x) + z^n(z-x)(z-y) &= \\ &= (y+a)^n a(a+b) + y^n b(-a) + z^n(x-z)(y-z) \geq (y+a)^n a(a+b) - aby^n = \\ &= a(a+b)y^n \left( \left(1 + \frac{a}{y}\right)^n - \frac{b}{a+b} \right) = a(a+b)y^n \left( \left(1 + \frac{a}{y}\right)^n - \frac{b}{a+b} \right) \left(1 + \frac{a}{y}\right)^n \geq 0 \end{aligned}$$

ба  $\frac{b}{a+b} \leq 1$  тул  $\left(1 + \frac{a}{y}\right)^n - \frac{b}{a+b} \geq 0$  цаашилбал

$a(a+b)y^n \left( \left(1 + \frac{a}{y}\right)^n - \frac{b}{a+b} \right) \geq 0$  болж (1) тэнцэтгэл биш батлагдав.

Одоо үндсэн бодлогынхоо бодолтонд шилжье.

$x + y + z = a > 0$ ,  $xy + yz + zx = b > 0$ ,  $xyz = c > 0$  гэвэл батлах тэнцэтгэл биш  $9a^4b + 4b^3 + 34abc \geq 17a^2b^2 + 9c^2$  тэнцэл биш батлах асуудалд шилжинэ.

Кошийн тэнцэтгэл биш хэрэглэвэл  $a^2 \geq 3b$ ,  $b^3 \geq 27c^2$  энэ хоёр тэнцэтгэл бишээс  $abc \geq 9c^2$  (2) тэнцэтгэл биш мөрдөн гарна.

(1) тэнцэтгэл бишийг  $n = 1$  үед хэрэглэвэл;

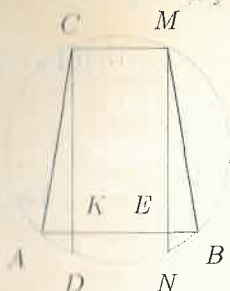
$$a^3 + 9c \geq 4ab \Leftrightarrow a^4b + 9abc \geq 4a^2b^2 \quad (3)$$

(1) тэнцэтгэл бишийг  $n = 2$  үед хэрэглэвэл

$$a^4 + 4b^2 + 6ac \geq 5a^2b \Leftrightarrow a^4b + 4b^3 + 6abc \geq 5a^2b^2 \quad (4)$$

(2), (3) ба (4) тэнцэтгэл бишээс  $4a^4 + 4b^2 + 34abc \geq 17a^2b^2 + 9c^2$  гэж гарч бодлого бодогдов.

## IX-B2.



$\frac{AK}{KB} = \frac{1}{5}; 2; \overline{AB} = \overline{CB}$  байг.  $\overline{BC}$  нумын  $CA$ -г агуулаагүй дундаж цэг  $M$  болог.  $MN \perp AB$   
 $AB \cap MN = E$  гэе.  $AK = x$  гэвэл  
 $KE = 4x, EB = x$  болно.  $AC = \frac{\overline{CB}}{2} = \overline{CM} = \overline{MB}$  тул  $AC = CM = MB$  болно.  
 $CM = KE$  тул  $AC = CM = MB = 4x$  байна.

$$\triangle AKC: AK^2 + KC^2 = AC^2 \Rightarrow x^2 + KC^2 = 16x^2 \cdot KC = \sqrt{15}x \cdot AK \cdot KB = CK \cdot KO \text{ (огтолцсон хөвч)} \Rightarrow x \cdot 5x = \sqrt{15}x \cdot KO \quad KO = \frac{5}{\sqrt{15}}x = \sqrt{\frac{5}{3}}x$$

Иймд  $\frac{CK}{KO} = \frac{\sqrt{15}x}{\sqrt{\frac{5}{3}}x} = 3$

IX-B3.

$$\begin{cases} k \cdot 17^n + 1 \equiv 0 \pmod{3}, & n = 2s \\ k \cdot 17^n + 1 \equiv 0 \pmod{5}, & n = 4s + 1 \\ k \cdot 17^n + 1 \equiv 0 \pmod{29}, & n = 4s + 3 \\ k \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

жишээгүүдийн системийг хангахаар  $k$ -г олъё. Тэгвэл  $k$  нь бодлогын нөхцөлийг хангах нь ойлгомжтой.

$$\begin{cases} k \cdot 17^n + 1 \equiv k \cdot 289^s + 1 \equiv k \cdot (1)^s + 1 \equiv k + 1 \equiv 0 \pmod{3} \\ k \cdot 17^n + 1 \equiv k \cdot 289^{2s} \cdot 17 + 1 \equiv k \cdot (-1)^{2s} \cdot 17 + 1 \equiv 2k + 1 \equiv 0 \pmod{5} \\ k \cdot 17^n + 1 \equiv k \cdot 289^{2s} \cdot 17^3 + 1 \equiv k \cdot (-1)^{2s} \cdot 17^3 + 1 \equiv 12k + 1 \equiv 0 \pmod{29} \\ k \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

тул дээрхи систем нь

$$\begin{cases} k \equiv -1 \pmod{3} \\ 2k \equiv -1 \pmod{5} \\ 12k \equiv -1 \pmod{29} \\ k \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

гэсэн системд шилжинэ. Энэ систем нь үлдэгдлийн тухай хятадын теоремоор шийдтэй. Тухайлбал шийд нь  $k = 302 + 870m \quad m \in \mathbb{Z}$  юм.

# ММО-37, IX АНГИЙН IV ДАВАА

Ц.Батхүү

IX-A1 (А.Батхүү).

$$\sqrt[8]{2207 - \frac{1}{2207 - \frac{1}{2207 - \dots}}} = \frac{a + b\sqrt{c}}{d}$$

байх  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  тоонуудыг ол.

**IX-A2 (Б.Хоролдавга).** Хос хосоороо гадаад байдлаар шүргэлцсэн  $S_1, S_2, S_3$  тойргууд өгөгдөв.  $S_1, S_2$  тойргуудын гадаад шүргэгч  $S_3$  тойргийг  $M, N$  цэгүүдээр, дотоод ерөнхий шүргэгч нь  $S_1, S_2$  тойргуудыг шүргэсэн  $MN$  нумыг  $K$  цэгт огтолно.  $K$  цэг оршдоггүй  $MN$  нумын аливаа  $A, B$  цэгүүдийн хувьд  $AK \cap MN = C, BK \cap MN = D$  бол  $A, B, C, D$  цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг харуул.

**IX-A3 (Ц.Дашдорж).** Аливаа натурал  $a_1, a_2, \dots, a_n$  тоонуудын хувьд  $a_1A, a_2A, \dots, a_nA$  тоонууд бүгд бүхэл тооны зэрэг байх  $A$  натурал тоо олдохыг батал.

**IX-B1 (Х.Зоригт).**  $A$  тойрог дээр орших  $n$  ширхэг цэгүүдийн олонлог бол аливаа элементийг өөрт нь эсвэл зэргэлдээ орших элементүүдийн аль нэгд нь буулгадаг  $f: A \rightarrow A$  бүх ялгаатай буулгалтуудын тоог ол.

**IX-B2 (А.Хашбаатар).**  $\angle B = \angle C = 40^\circ$  байх  $ABC$  гурвалжны  $B$  өнцгийн биссектрис  $AC$  талыг  $D$  цэгт,  $\angle CDB$  өнцгийн биссектрис  $BC$  талыг  $E$  цэгүүдэд огтолно.  $CA, DB, DE$  хэрчимд буулгасан перпендикуляруудын аль нэг нь нөгөө хоёрынхоо нийлбэртэй тэнцдэг  $ABC$  гурвалжны дотор орших  $M$  цэгүүдийн геометр байрыг ол.

**IX-B3 (Б.Баяржаргал).**  $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 = 1$  байх зэрэг бодит тоонуудын хувьд

$$\frac{x_1x_2}{5x_3 - 16x_3^5} + \frac{x_2x_3}{5x_4 - 16x_4^5} + \frac{x_3x_4}{5x_1 - 16x_1^5} + \frac{x_4x_1}{5x_2 - 16x_2^5} \geq \frac{1}{2}$$

болохыг батал.

**IX-A1**  $F(n) = n - \frac{1}{n - \frac{1}{n - \dots}}$  болог. Тэгвэл  $F(n) = n - \frac{1}{F(n)}$  ба

$n > 2$  үед  $F(n) = \frac{n \pm \sqrt{n^2 - 4}}{2}$  болно.

$$\frac{n - \sqrt{n^2 - 4}}{2} = \frac{2}{n + \sqrt{n^2 - 4}} < 1 < F(n) \text{ тул } F(n) = \frac{n + \sqrt{n^2 - 4}}{2}$$

Эндээс

$$(F(n))^2 = \frac{n^2 + 2n\sqrt{n^2 - 4} + n^2 - 4}{4} = \frac{n^2 - 2 + n\sqrt{n^2 - 4}}{2} =$$

$$= \frac{n^2 - 2 + \sqrt{(n^2 - 2)^2 - 4}}{2} = F(n^2 - 4)$$

болж

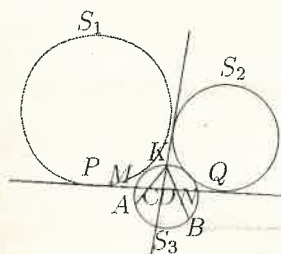
сүү.

$$\sqrt{F(2207)} = F(\sqrt{2209}) = F(47)$$

$$\sqrt[4]{F(2207)} = \sqrt{F(47)} = F(\sqrt{49}) = F(7)$$

$$\sqrt[8]{F(2207)} = \sqrt{F(7)} = F(\sqrt{9}) = F(3) = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

IX-A2.



$S_1$  ба  $S_2$  тойргийн шүргэлтийн цэгийг  $O$ , гадаад ерөнхий шүргэгч  $S_1$  ба  $S_2$  тойргийг шүргэх цэгийг харгалзан  $P, Q$  гэе.  $MS_1KS_2$ -ийн хувьд Кэзийн теорем бичвэл  $OK \cdot MQ + MP \cdot OK = PQ \cdot KM \Rightarrow$

$OK = KM$ .  $S_1KS_2N$ -ийн хувьд Кэзийн теорем бичвэл  $OK \cdot NQ + NP \cdot OK = PQ \cdot KN \Rightarrow OK = KN$ .

Иймд  $KN = KM$  буюу  $KN = KM$  болно.

$$\angle NCA = \frac{1}{2}(\angle MK + \angle NA)$$

$$\angle KBA = \frac{1}{2}(\angle AM + \angle MK)$$

$\Rightarrow \angle NCA + \angle KBA = \pi$  болж бодлого бодогдов.

IX-A3  $a_1, \dots, a_n$ -үүдийн задралд орох бүх анхны тоонуудын олонлог нь  $p_1, \dots, p_t$  байг. Тэгвэл

$$a_1 = p_1^{\alpha_{11}} p_2^{\alpha_{12}} \dots p_t^{\alpha_{1t}}, \dots, a_n = p_1^{\alpha_{n1}} p_2^{\alpha_{n2}} \dots p_t^{\alpha_{nt}}$$

$\alpha_{ij} \geq 0$  болно.  $1 \leq j \leq t$  байх ямар нэг  $j$ -ийн хувьд

$$x \equiv -\alpha_{1j} \pmod{q_1}, x \equiv -\alpha_{2j} \pmod{q_2}, \dots, x \equiv -\alpha_{nj} \pmod{q_n} \quad (1)$$

системийг авч үзье. Энд  $q_1, \dots, q_n$  нь ялгаатай анхны тоонууд. Хятадын теоремоор (1) шийдтэй (үүнийг  $x_j$  гэе).

$$A = p_1^{x_1} \dots p_t^{x_t} \text{ тоог авбал}$$

$$Aa_i = p_1^{x_1 + \alpha_{i1}} \dots p_t^{x_t + \alpha_{it}} = (c_i)^{q_i} \quad i = \overline{1, n} \text{ болно.}$$

IX-B1  $n = 1$  үед  $1, n = 2$  үед  $2$  байх нь илэрхий.  $n \geq 3$  цэгүүдээ  $1, 2, \dots, n$  гэж дугаарлаад бодъё.  $f(n)$  нь бидний олох  $\varphi(n)$  нь шулуун дээр орших  $n$  цэгүүдийн хувьд дээрх чанартай буулгалтуудын тоо байг.

Тэгвэл  $1 \rightarrow 1$  байх тохиолдолд түүнийг хасахад үлдэх  $n - 1$  цэгд нь  $\varphi(n - 1)$  янзаар нөхцөл хангах буулгалт зохиож болно.  $1 \rightarrow 2, 1 \rightarrow n$  байх

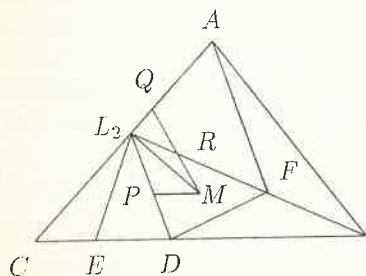
тохиолдолд буулгалтын тоо нь ижил байх нь ойлгомжтой. Иймд  $1 \rightarrow 2$  үед авч үзвэл  $2 \rightarrow 3$  бол  $k \rightarrow k+1, k = \overline{3, n-1}, n \rightarrow 1$  байхаас өөр аргагүй буюу 1 ширхэг ийм буулгалт байна.  $2 \rightarrow 1$  бол 1 ба 2-ийг хасахад үлдэх цэгүүдэд нь  $\varphi(n-2)$  янзын буулгалт харгалзана. Иймд  $f(n) = \varphi(n-1) + 2(1 + \varphi(n-2))$  болох тул  $\varphi(n)$ -ийг олоход хангалттай. Шулуун дээр орших  $1, 2, \dots, n$  цэгүүдийн хувьд  $1 \rightarrow 1$  бол үлдэх цэгүүдэд  $\varphi(n-1), 1 \rightarrow 2$  бол  $2 \rightarrow 1$  болох тул  $\varphi(n-2)$  янзын буулгалт зохиож болно. Эндээс  $\varphi(n) = \varphi(n-1) + \varphi(n-2)$  гэж гарах ба  $\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 2$  тул  $\varphi(n)$  нь  $1, 1, 2, 3, 5, \dots$  Фибоначчийн дарааллын  $n+1$ -р гишүүнтэй тэнцүү буюу  $\varphi(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$

$$\begin{aligned} \text{болно. Ийнхүү } f(n) &= \varphi(n-1) + 2 + 2\varphi(n-2) = \\ &= 2 + \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right] = \\ &= 2 + \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 2 \right) - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2 \right) \right] = \\ &= 2 + \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \sqrt{5} \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \sqrt{5} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right] = \\ &= 2 + \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \text{ болно. Өөрөөр хэлбэл} \end{aligned}$$

$$f(n) = 2 + \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n, n \geq 3$$

$$f(1) = 1, f(2) = 2$$

## IX-B2



Хэрэв дурьдсан чанартай  $M$  цэг байвал  $AFDEL_2$  таван өнцөгт дотор оршино. Үүнд:

$$AF \perp AC, DF \perp L_2D$$

$$EL_2 \perp L_2B \text{ байна.}$$

Учир нь дээрх таван өнцөгтийн гадна орших  $M$  цэгээс нөхцөлд дурьдсан гурван перпендикулярын ядаж нэг нь  $AC, L_2B, L_2D$  хэрчмийн Бүргэлжлэл дээр бууна.

Иймээс  $AFDEL_2$  таван өнцөгт мужийн аль ч  $M$  цэгээс өгсөн гурван хэрчимд буулгасан перпендикуляр өгсөн нөхцөл хангахыг баталбал болно  $M$  цэгээс  $DL_2, AC, L_2B$  хэрчимд буулгасан перпендикулярын суурийг харгалзуулан  $P, Q, R$  гэвэл  $MPL_2, MQL_2, MRL_2$  гурвалжнууд ерөнхий  $ML_2$  гипотенузтай тул  $MPL_2QR$  таван өнцөгт тойрогт багтана. Тиймээс  $\angle CL_2D = \angle DL_2R = \angle RL_2Q = 60^\circ$  гэдгийг санавал  $PQR$  гурвалжин зөв болно. Тийнхүү Птолмейн теоремоор (дээрхи зургаар бол)

$$MQ = MP + MR$$

Харин  $\angle BDF = \angle FAB = 10^\circ$ ,  $\angle ABF = \angle DBF = 20^\circ$ ,  $BF$  ерөнхий тул  $\triangle ABF = \triangle DBF$  иймээс  $F$  цэг  $BL_2$  дээр оршино.

$$\text{IX-B3. } f(x) = 5x - 16x^5 \quad f'(x) = 5 - 80x^4 = 0 \quad x^4 = \frac{1}{16} \quad x = \pm \frac{1}{2}$$

$f''(x) = -320x^3 \stackrel{x > 0}{\leq} 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$  нь максимумын цэг

$$5x - 16x^5 \leq 5 \cdot \frac{1}{2} - 16 \cdot \frac{1}{32} = 2 \Rightarrow \frac{1}{5x - 16x^5} \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{x_1 x_2}{5x_2 - 16x_1^5} + \frac{x_2 x_3}{5x_3 - 16x_2^5} + \frac{x_3 x_4}{5x_1 - 16x_1^5} + \frac{x_4 x_1}{5x_2 - 16x_2^5} \geq \frac{1}{2}(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_1) = \frac{1}{2}$$

## ММО-37, X АНГИЙН III ДАВАА

Б.Батцэнгэл, Г.Баярмагнай

**X-A1.** Огторгуйд аль ч дөрвөн нь нэг хэвтгэйд дээр үл орших 2001 ширхэг цэг өгөгджээ. Тэдгээрийн аль ч дөрвөн нь 0.037-ээс хэтрэхгүй эзэлхүүнтэй тетраэдр үүсгэж байв. Тэгвэл тэдгээр цэгүүдийг бүгдийг агуулах нэгж эзэлхүүнтэй тетраэдр олдоно гэж батал.

**X-A2.**  $\gamma$  тойрог дээр цагийн зүүний дагуу  $A, B, C, D$  гэж тэмдэглэгдсэн дөрвөн цэг өгөгджээ.  $\gamma$  тойргийн  $A$  цэгт татсан шүргэгч  $BC$  шулуун  $P$  цэгт,  $B$  цэгт татсан шүргэгч  $AD$  шулуун  $Q$  цэгт тус тус огтлолдож бол  $AB, CD$  шулуунуудын огтлолцлын цэг нь  $PQ$  шулуун дээр оршин байна гэдгийг батал.

**X-A3.** а)  $m, n$  гэсэн харилцан анхны биш натурал тоонууд өгөгдөв. Тэгвэл ямар ч  $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$  бүхэл тоонуудыг сонгон авахад бүх боломжит  $a_i b_j$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ) үржвэрүүд дотроос  $mn$ -д хуваахад ажла үлдэгдэл өгдөг 2 тоо заавал олдоно гэдгийг батал.

б) Хэрэв  $m, n$  нь харилцан анхны тоонууд бол дээрхи чапар биелэх 2 тоо заавал олдох албагүй гэдгийг харуул.

**X-B1.**  $n, k$  нь натурал тоо ба  $A$  нь  $n$  ширхэг элементтэй ямар нэгэн олонлог болог.  $A$  олонлогийн дэд олонлогуудаас тогтох

$B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_k = \emptyset$  нөхцлийг хавгах бүх ялгаатай  $(B_1, B_2, \dots, B_k)$  гэсэн  $k$ -тын тоог ол.

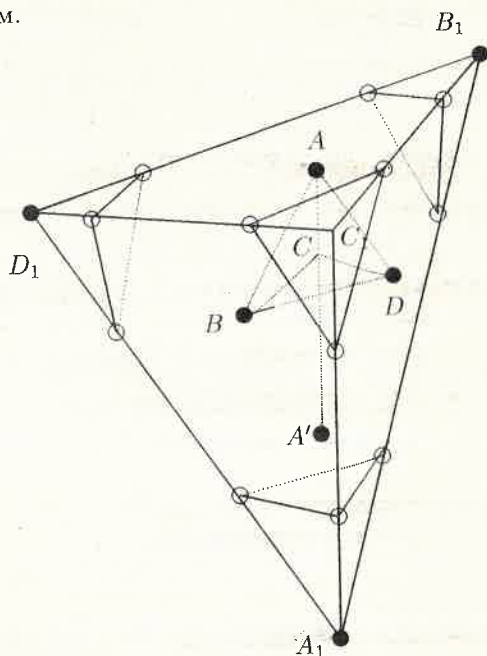
**X-B2.**  $n$  нь натурал тоо болог. Натурал  $a$  тоо  $10^n - 1$  тоонд хуваагддаг бол  $a$  тооны аравтын бичлэгт дор хаяж  $n$  ширхэг цифр нь тэгээс ялгаатай байна гэдгийг батал.

**X-B3.**  $BC, AD$  талууд нь параллель биш  $ABCD$  дөрвөн өнцөгт өгөгджээ.  $B, C$  оройг дайрсан  $AD$  талыг  $E$  цэгт шүргэх тойрог,  $A, D$  оройг дайрсан  $BC$  талыг  $F$  цэгт шүргэх тойрогтой  $M, N$  цэгүүдэд огтлолцдог болог. Хэрэв  $MN$  шулуун  $EF$  хэрчмийг таллан хуваадаг бол  $C, D, E, F$  дөрвөн цэг нь нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

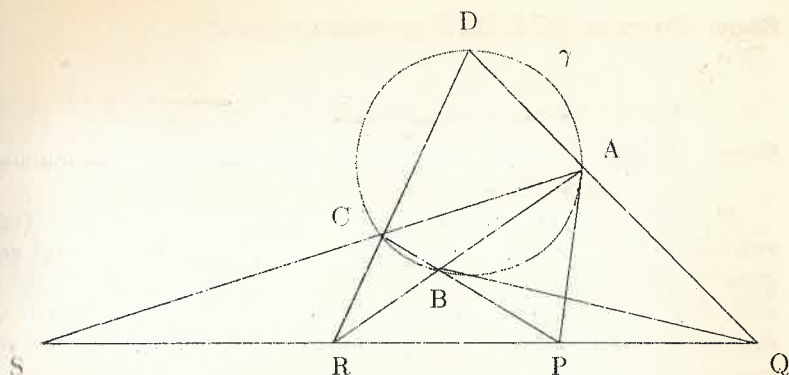
### Х-А1.

Өгсөн цэгүүдээс хамгийн их эзэлхүүнтэй тетраэдр үүсгэдэг 4 цэг нь  $A, B, C, D$  болог.  $BCD$  талсын хувьд  $A$  цэгтэй симметр цэгийг  $A'$  гэж тэмдэглээд, харгалзан  $A, A'$  цэгийг дайрсан  $BCD$  хавтгайтай паралель  $\gamma_A, \gamma'_A$  хавтгайнуудыг татая (зураг 1). Одоо  $A, B, C, D$  цэгүүдээс өөр ямар нэгэн  $E$  цэгийг сонгон авбал нэгэнт  $ABCD$  тетраэдр нь хамгийн их эзэлхүүнтэй тул  $E$  цэг нь  $\gamma_A, \gamma'_A$  хавтгайн хооронд байна гэдэг нь ойлгомжтой. Энэ дүгнэлтийг бусад талсуудын хувьд хийвэл бүх цэгүүд нь  $\gamma_A, \gamma'_A, \gamma_B, \gamma'_B, \gamma_C, \gamma'_C, \gamma_D, \gamma'_D$  хавтгайнуудаар зааглагдсан олон талст дотор оршин байна гэж гарна. Энэ олон талст нь  $ABCD$  тетраэдрээс 3 дахин их талтай  $A_1B_1C_1D_1$  тетраэдрт багтахыг харж болно (зураг).  $V_{ABCD} \leq 0,037$  тул  $V_{A_1B_1C_1D_1} = 27 \cdot V_{ABCD} \leq 0,999 < 1$  юм. Үүгээр бодлого бодогдов.

*Тэмдэглэл.* Энэ бодлогын хавтгайн тохиолдолд мөн томъёолж болох бөгөөд энэ тохиолдол нь "Всесоюзные математические олимпиады" номны 202-р бодлого юм.



### Х-А2. I бодолт.



$AB \cap CD = R$  ба  $RP \cap AC = S$  гэж тус тус тэмдэглэе. Бид  $ADC$  гурвалжны талууд дээр байгаа  $Q \in AD, R \in DC$

$S \in CA$  цэгүүд нэг шулуун дээр орших буюу

Менелайн теоремын  $\frac{AQ}{QD} \cdot \frac{DR}{RC} \cdot \frac{CS}{SA} = 1$  гэсэн нөхцлийг хангана гэж харуулах болно.

$ABC$  гурвалжны талууд дээр орших  $R \in AB, P \in BC, S \in CA$  цэгүүд нэг шулуун дээр орших тул Менелайн теорем ёсоор  $\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CS}{SA} = 1$  тэнцэл биелэх ёстой.

Үүнийг тооцвол батлах ёстой тэнцэл нь

$$\frac{AQ}{QD} \cdot \frac{DR}{RC} \cdot \frac{BR}{RA} \cdot \frac{CP}{PB} = 1$$

гэсэн тэнцэлд шилжинэ.  $\gamma$  тойргийн  $AB, CD$  огтлогчуудын хувьд шүргэгч огтлогчийн теорем бичвэл  $\frac{DR}{RA} = \frac{BR}{RC}$  болно. Эндээс дээрхи тэнцэлийн

$$\frac{AQ}{QD} \cdot \left(\frac{BR}{RC}\right)^2 \cdot \frac{CP}{PB} = 1 \quad (*)$$

гэж бичиж болно.  $ACP, BAP$  гурвалжнууд төсөөтэй тул  $\frac{AC}{BA} = \frac{CP}{AP} = \frac{PA}{PB}$  байна. Эндээс

$$\frac{CP}{PB} = \frac{AC}{BA} \cdot \frac{AP}{PA} = \left(\frac{AC}{BA}\right)^2 \quad (1)$$

гэж гарна. Үүнтэй адилаар  $BAQ, DBQ$  гурвалжны төсөөг ашигласвал

$$\frac{AQ}{QD} = \frac{BA}{DB} \cdot \frac{BQ}{QB} = \left(\frac{BA}{DB}\right)^2 \quad (2)$$

болно. Эцэст нь  $ACR, DBR$  гурвалжнууд төсөөтэй тул

$$\frac{AC}{DB} = \frac{CR}{BR} \quad (3)$$

болно. Одоо (1)-(3) адилтгалуудыг орлуулахад (\*) тэнцэл мөрдөн гарна.

*II бодолт.* Энэ бодлогыг комплекс тоо ашиглан бодъё. (комплекс тоо ашиглан геометрийн бодлого боддог тухай "Математик" сониноос үзнэ үү).

$ABCD$  4 өнцөгтийг багтаасан тойргийн радиусыг нэгж  $A, B, C, D$  оройнуудыг харгалзан  $1, \beta, \gamma, \delta$  комплекс тоонууд гэж үзээд  $AB \cap CD = R$  гэж тэмдэглэе.

$$\text{Тэгвэл } \bar{P} = \frac{2-(\beta+\gamma)}{1-\beta\gamma}, \quad \bar{Q} = \frac{2\beta-(1+\delta)}{\beta^2-\delta}, \quad \bar{R} = \frac{(1+\beta)-(\gamma+\delta)}{\beta-\gamma\delta}$$

болох ба  $\beta\bar{\beta} = \gamma\bar{\gamma} = \delta\bar{\delta} = 1$  тул

$$P = \frac{\beta+\gamma-2\beta\gamma}{1-\beta\gamma}, \quad Q = \frac{\beta^2\delta+\beta^2-2\delta\beta}{\beta^2-\delta}, \quad R = \frac{\beta\delta+\gamma\beta-(\gamma\beta\delta+\gamma\delta)}{\beta-\gamma\delta} \text{ болно. } P, Q, R \text{ нэг шулуун дээр оршино гэдгийг батлахын тулд}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} P & \bar{P} & 1 \\ Q & \bar{Q} & 1 \\ R & \bar{R} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

гэж харуулах ёстой.

$$P + \bar{P} - 2 = 0, \quad Q + \bar{Q} - 2 = \frac{(\beta-1)^2(\delta-1)}{\beta^2-\delta}, \quad R + \bar{R} - 2 = \frac{(1-\gamma)(1-\delta)(1-\beta)}{\beta-\gamma\delta}$$

гэдгийг тооцвол

$$\Delta = \begin{vmatrix} \bar{P} + P - 2 & \bar{P} & 1 \\ \bar{Q} + Q - 2 & \bar{Q} & 1 \\ \bar{R} + R - 2 & \bar{R} & 1 \end{vmatrix} = (1-\beta)(1-\delta) \begin{vmatrix} 0 & \bar{P} & 1 \\ \frac{\beta-1}{\beta^2-\delta} & \bar{Q} & 1 \\ \frac{1-\gamma}{\beta-\gamma\delta} & \bar{R} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(1-\beta)(1-\delta)}{(\beta^2-\delta)(\beta-\gamma\delta)} \begin{vmatrix} 0 & 2-\beta-\gamma & 1-\beta\gamma \\ \beta-1 & 2\beta-1-\delta & \beta^2-\delta \\ 1-\gamma & 1+\beta-\gamma-\delta & \beta-\gamma\delta \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(1-\beta)(1-\delta)}{(\beta^2-\delta)(\beta-\gamma\delta)} \begin{vmatrix} 0 & 2-\beta-\gamma & 1-\beta\gamma \\ \beta-1 & \beta-\delta & \beta^2-\delta \\ 1-\gamma & \beta-\delta & \beta-\gamma\delta \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1-\beta)(1-\delta)}{(\beta^2-\delta)(\beta-\gamma\delta)\beta} \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 2-\beta-\gamma & 1-\beta\gamma \\ \beta-1 & \beta-\delta & \beta-\delta \\ 1-\gamma & \beta-\delta & \gamma(\beta-\delta) \end{array} \right\| = \\
&= \frac{(1-\beta)(1-\delta)}{(\beta^2-\delta)(\beta-\gamma\delta)\beta} \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 2-\beta-\gamma & (1-\gamma)(\beta-1) \\ \beta-1 & \beta-\delta & 0 \\ 1-\gamma & \beta-\delta & (\beta-\delta)(\gamma-1) \end{array} \right\| = \\
&= \frac{(1-\beta)(1-\delta)(\gamma-1)}{(\beta^2-\delta)(\beta-\gamma\delta)\beta} \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 2-\beta-\gamma & 1-\beta \\ \beta-1 & \beta-\delta & 0 \\ 1-\gamma & \beta-\delta & \beta-\delta \end{array} \right\| = \\
&= \frac{(1-\beta)(1-\delta)(\gamma-1)}{(\beta^2-\delta)(\beta-\gamma\delta)\beta} \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1-\gamma & 1-\beta \\ \beta-1 & \beta-\delta & 0 \\ 1-\gamma & 0 & \beta-\delta \end{array} \right\| = 0
\end{aligned}$$

болж батлагдав.

*Тэмдэглэл.* Энэ бодлогыг "Тойрог дээрхи  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  гэж тэмдэглэгдсэн зургаан цэгийн хувьд ( $A_1A_2$ ) ба ( $A_4A_5$ ), ( $A_2A_3$ ) ба ( $A_5A_6$ ), ( $A_3A_4$ ) ба ( $A_6A_1$ ) шулуунуудын огтлолцлын цэгүүд нэг шулуун дээр оршино" гэсэн *Паскалийн теорем* гэгддэг дүгнэлтээс цэгүүдийг "ойртуулах" замаар гарган авсан юм.  $A_1, A_2$  цэгийг ойртуулж нэг  $A$  цэг болгоход ( $A_1A_2$ ) шулуун нь  $A$  цэгт татсан тойргийн шүргэгч болдог юм. Тухайлбал дээрхи бодлого нь  $A_1, A_2$  цэгүүдийг ойртуулж  $B$  цэг болгоход гарч ирсэн болно. Эцэст нь тэмдэглэхэд, энэ бодлогод дахин  $A_5, A_6$  цэгүүдийг ойртуулж нэг цэг болговол "ABC гурвалжны багтаасан тойргийн  $A, B$  ба  $C$  оройд татсан шүргэгчүүд харгалзан ( $BC$ ), ( $CA$ ) ба ( $AB$ ) шулууныг  $P, Q$  ба  $R$  цэгт огтлодог бол  $P, Q, R$  цэгүүд нэг шулуун дээр оршино" гэсэн бодлого үүснэ.

**Х-А3.** Эсрэгээс нь ижил үлдэгдэл өгдөг 2 тоо олдохгүй гэж үзье. Тэгвэл  $a_i b_j \pmod{mn}$ -үүд  $i = \overline{1, m}$   $j = \overline{1, n}$  бүгд ялгаатай болох бөгөөд тухайлбал  $a_1 b_1 \equiv 0 \pmod{mn}$  гэж үзэж болно.  $\overline{a_1} = (a_1, mn)$ ,  $\overline{b_1} = (b_1, mn)$  болог. Тэгвэл  $mn | a_1 b_1$  учраас  $mn | \overline{a_1} \cdot \overline{b_1}$  байна.  $a_i b_j$  ( $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ ) тоонуудыг  $mn$  хуваахад гарах үлдэгдэлүүд буюу  $\{0, 1, \dots, mn-1\}$  тоонууд дотор  $\overline{a_i}$ -д хуваагдах тоо  $\frac{m \cdot n}{a_1}$  байх ба  $a_1 b_j$  ( $j =$

$\overline{1, n}$ -тоонууд  $\overline{a_1}$ -д хуваагдах тул  $\frac{mn}{a_1} \geq n$  байна. Үүнтэй ижилээр  $\frac{mn}{b_1} \geq m$  байна. Эндээс  $mn \geq \overline{a_1} \overline{b_1}$  болох ба  $mn | \overline{a_1} \cdot \overline{b_1}$  тул  $\overline{a_1} = m, \overline{b_1} = n$  болно. Үүгээр  $m | a_1, n | b_1$  болох нь батлагдав.

Хэрэв  $a_i \equiv a_j \pmod{m} (i \neq j, 1 \leq i \leq j \leq m)$  бол  $b_1 a_i \equiv b_1 a_j \pmod{mn}$  болж бидний үзсэнд зөрчинө. Иймд  $a_1, \dots, a_m$  тоонуудыг  $m$ -д хуваахад гарах үлдэгдэлүүд бүгд ялгаатай. Үүнтэй ижил дүгнэлтийг  $b_1, \dots, b_n$  тоонуудын хувьд хийж болно.

Одоо  $(m, n) = d$  гэж үзье.  $a_i b_j \pmod{mn} (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$  тоонууд дотор  $d$ -д хуваагдахгүй тоо  $mn - \frac{mn}{d}$  ширхэг байх ба харин  $a_1, \dots, a_m$ -үүд дотор  $m - \frac{m}{d}$  ширхэг,  $b_1, \dots, b_n$ -үүд дотор  $n - \frac{n}{d}$  ширхэг  $d$ -д хуваагдахгүй тоо байна. Эндээс  $mn - \frac{mn}{d} = (m - \frac{m}{d})(n - \frac{n}{d})$  болох буюу  $d = 1$  болж зөрчил гарна. Эндээс а) хэсэг батлагдав.

б)  $a_i = (i-1)n + 1 \quad i = \overline{1, m}$   
 $b_j = (j-1)m + 1 \quad j = \overline{1, n}$  гэж сонгон авбал  $a_i b_j$ -үүд бүгд  $\pmod{mn}$  ялгаатай байна.

**X-B1.** А олонлогийн элементүүдийг  $a_1, a_2, \dots, a_n$  гэж тэмдэглэе.  $n$  ширхэг мөр,  $k$  ширхэг баганатай хүснэгтийг дараахь байдлаар байгуулая.

Хүснэгтийн  $i$ -р багана,  $j$ -р мөрийн огтлолцлын нүдэнд, хэрэв  $B_i$  олонлогт  $a_j$ -р элемент байвал 1, байхгүй бол 0-ийг бичье ( $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n$ ). Тэгвэл энэ зарчмаар бөглөгдөх хүснэгт болон  $(B_1, \dots, B_k)$  гэсэн  $k$ -тийн хооронд харилцан нэг утгатай харгалзаа тогтоогдох ба  $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_k = \emptyset$  гэсэн нөхцөл нь харгалзах хүснэгтэд дан 1-ээс тогтсон мөр байхгүй гэдгийг илэрхийлнэ.  $i$ -р мөр нь дан 1-ээр бөглөгдөхгүй байх боломжийн тоо нь  $2^k - 1$  тул бидний олох ёстой хүснэгтийн тоо буюу  $k$ -тын тоо нь  $(2^k - 1)^n$  байна.

**X-B2.**  $a$ -тоог тэгээр төгсөхгүй гэж үзэж болно.  $10^n - 1 | a$  тул

$$\begin{array}{r} a = (10^n - 1) \cdot \overline{a_k \dots a_1} \quad (a_1 = 0) \\ \overline{a_k \dots a_1 0 \dots 0} \\ - \quad \overline{a_k \dots a_1} \\ \hline c_{k+n} \dots c_1 \end{array}$$

гэж бичиж болно.

Бид  $c_1, c_2, \dots, c_n$  цифрүүд тэгээс ялгаатай гэвэл  $c_i = 0 \quad (1 \leq i \leq n)$  үед түүнд харгалзах 0 биш цифр олдоно гэж үзүүлсэ.

$n \geq k$  байг.

$$\begin{array}{r} -a_k \dots a_1 0 \dots 0 \\ a_k \dots a_1 \quad a_1 \neq 0 \Rightarrow c_1 \neq 0 \\ \hline c_{k+n} \dots c_n \dots c_1 \end{array}$$

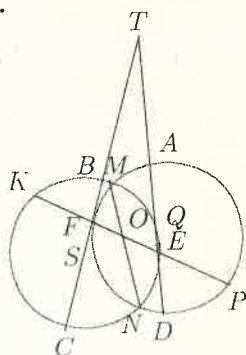
хэрэв  $c_i = 0$  бол  $a_i = 9$  болох буюу  $c_{n+i} = 9$  болно. ( $2 \leq i \leq n$ ) Иймээс дор хаяж  $n$  ширхэг 0 биш цифр олдоно.

$$a_{n+m} \dots a_m \dots a_1 0 \dots 0$$

$n \leq k$  байг.  $\frac{a_{n+m} \dots a_n \dots a_1}{c_{m+2n} \dots c_n \dots c_1} \quad c_1 \neq 0$

Хэрэв  $c_i = 0$  ( $i \leq n$ ) бол  $a_i = 9$  болно.  $c_{n+i} = 0$  байг. Хэрэв  $a_{n+i} = 8$  байсан бол  $c_{n+i-1} \neq 0$  болно. (Учир нь  $a_{n+i} = 8$  тул  $a_i = 9$  болох  $i + n$ -р орон нь 1 орон зээлсэн гэсэн үг) Иймээс  $a_{n+i} = 9$  гэж үзэж болно. ( $a_{n+i} < 8$  байх боломжгүй). Дээрхтэй адил үргэлжилсээр  $a_{m+i} = 9$  болоход хүрнэ. Иймд  $c_{n+m+i} = 9 \neq 0$  болох буюу бид  $c_i$ -д харгалзах 0 биш цифрийг олж чадна.

### Х-ВЗ.



$CB \cap AD = T$ ,  $CB$  ба  $AD$  хэрчмүүдийн дундаж цэгүүдийг харгалзан  $S$  ба  $Q$  гэж тэмдэглэе.

$FO = OE$  ба  $MN$ -ийг огтголсон хөвчүүдийн чанараас  $KF = EP$  болно. Иймээс

$$(1) \quad KF \cdot EF = BF \cdot FC = AE \cdot ED$$

байна.

$TF$  ба  $TE$  шүргэгчүүдийн хувьд шүргэгч огтлогчийн теоремыг бичвэл:

$$TF^2 = (TE - AE)(TE + ED)$$

$TE^2 = (TF - BF)(TF + FC)$  болно энэ хоёр адилтгалыг хооронд нь хасч (1)-ийг тооцвол  $TF(2TF + CF - FB) = TE(2TE + DE - AE)$  буюу  $TF(TB + TC) = TE(TA + TD)$  болно.

$TF$  ба  $TE$  шүргэгчүүдийн чанараас

$$\sqrt{TA \cdot TD}(TB + TC) = \sqrt{TB \cdot TC}(TA + TD)$$

болох ба энэ адилтгал нь

$$(\sqrt{TA \cdot TB} - \sqrt{TC \cdot TD}) \cdot (\sqrt{TD \cdot TB} - \sqrt{TC \cdot TA}) = 0$$

адилтгалтай ижил.

$TA \cdot TB \neq TC \cdot TD$  тул  $TD \cdot TB = TC \cdot TA$  болно.

Иймээс  $\triangle CTD \sim \triangle ATB$  буюу  $AB \parallel CD$  болно.

$TF(TB+TC) = TF \cdot 2 \cdot TS = TE(TA+TD) = 2 \cdot TE \cdot TQ$  болох тул  $\triangle STQ \sim \triangle ETF$  буюу  $\angle FET = \angle TSQ$  байна.

$SQ$  нь  $ABCD$  трапецын дундаж шугам учраас  $\angle TCD = \angle TSQ = \angle FET$  болох буюу  $\angle TCD + \angle DEF = 180^\circ$  болно. Иймээс  $FEDC$  тойрогт багтана.

## ММО-37, X ангийн IV даваа

Г.Баярмагнай.

**X-A1 (Д.Даянцолмон).**  $x_1, x_2, \dots, x_{2001}$  эерэг дараалалын хувьд

а)  $3x_{n+1}^2 = 7x_n \cdot x_{n+1} - 3x_{n+1} - 2x_n^2 + x_n$

в)  $x_{37} = x_{2001}$  бол  $x_1$ -ын авч болох хамгийн их утгыг ол.

**X-A2 (Г.Баярмагнай).**  $ABC$  хурц өнцөгт гурвалжны хувьд

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a} \geq \frac{m_a}{a} + \frac{m_b}{b} + \frac{m_c}{c} \cdot 16R^2 \cdot r$$

болохыг батал.

**X-A3 (Г.Баярмагнай).**  $a > b$ ,  $a$ -тэгш ба  $a, b$  харилцан анхны натурал тоонууд бол  $m|a^{n-1} - b^{n-1}$  ба  $n|a^{m+1} - b^{m+1}$  байх харилцан анхны  $m$  ба  $n$  натурал тоонууд төгсгөлгүй олдохыг батал.

**X-B1 (Ц.Батхүү).** Тоон шулуун дээр  $n$  ширхэг цэг өгөгдөв. Аль ч дараалсан хэсэг цэгүүдийн хэсэг доторхи хөх, улаан цэгийн тооны зөрүү нь 2-оос хэтрэхгүй байхаар цэгүүдийг хөх, улаан өнгөөр будах боломжийн тоог ол.

**X-B2 (Г.Хоролдавга).** Эсрэг талууд нь паралель зургаан өнцөгтийн талуудын дундаж цэгүүд нь  $A, B, C, D, E, F$  бол  $AB \cap ED, BC \cap EF, AC \cap FD$  цэгүүд нэг шулуун дээр оршихыг батал.

**X-B3 (Г.Баярмагнай).**  $10 \times 10$  хэмжээтэй хүснэгтийн нүднүүдэд, нүд бүр тэгш тооны тэмдэглэгдсэн нүдтэй хорш байхаар хамгийн ихдээ хэдэн нүд тэмдэглэж болох вэ? (Ерөнхий талтай нүднүүдийг хорш гэж үзнэ).

**X-A1.**

$$3x_{n+1}^2 - 7x_n \cdot x_{n+1} + 3x_{n+1} + 2x_n^2 - x_n = (x_{n+1} - (2x_n - 1))(3x_{n+1} - x_n) = 0$$

тул  $x_{n+1} = 2x_n - 1 \vee x_{n+1} = \frac{x_n}{3}$  болно.

$$f(x) = 2x - 1, g(x) = \frac{x}{3}, f_k(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{k}, g_m(x) = \underbrace{g(g(\dots g(x)))}_{m}$$

ГЭЖ ТЭМДЭГЛЭЭ.

$x_1$  хамгийн их байхын тулд  $x_{37}$  хамгийн их байх ёстой.

$x_1 = 3^{37}$ ,  $x_{37}$  байна.  $x_{37} = x_{2001} = a$  гэе.

$x_{2001} = f_{k_s}(g_{m_s}(\dots(f_{k_1}(g_{m_1}(x_{37})))) \dots) \left( \sum_{i=1}^s k_i + \sum_{i=1}^s m_i = 1964 \right)$  тул

$$a = f_{k_s}(g_{m_s}(\dots(f_{k_1}(g_{m_1}(a)))) \dots) = \\ = \frac{2^{k_s} \left( \frac{2^{k_{s-1}} \left( \dots \left( \frac{2^{k_1} \cdot \frac{a}{3^{m_1}} - (2^{k_1} - 1) \right) \dots \right) \right)}{3^{m_{s-1}}} \right)}{3^{m_s}} - (2^{k_s} - 1)$$

болно. Эндээс  $a = \frac{2^b}{3^m} a + b$  Энд  $k = \sum_{i=1}^s k_i$ ,  $m = \sum_{i=1}^s m_i$

$b = f_{k_s}(g_{m_s}(\dots(f_{k_1}(g_{m_1}(0)))) \dots)$  юм,  $a = \frac{-b}{\frac{2^k}{3^m} - 1}$  болно.

$f_n(g_p(a)) \leq g_p(f_n(a))$  тул  $-b = -f_{k_s}(g_{m_s}(\dots(f_{k_1}(g_{m_1})))) \geq -f_{k_s}(g_{m_s}(0)) = 2^k - 1 \Rightarrow$

$$a \leq \frac{2^k - 1}{\frac{2^k}{3^m} - 1} = 3^m \cdot \frac{2^k - 1}{2^k - 3^m} = 3^{1964-k} \cdot \frac{2^k - 1}{2^k - 3^{1964-k}} = 3^{1964} \cdot \frac{2^k - 1}{6^k - 3^{1964}}$$

$(0 \leq k \leq 1964)$ .

$F(x) = 3^{1964} \cdot \frac{2^x - 1}{6^x - 3^{1964}}$  функц  $x \geq 0$  үед буурдаг.  $x_0 = 1964 \cdot \log_6 3$  цэг дээр тасардаг. Эндээс

$$a \leq F(k) \leq 3^{1964} \cdot \frac{2^{[x_0]+1} - 1}{6^{[x_0]+1} - 3^{1964}} = 3^{1964} \cdot \frac{2^{1205} - 1}{6^{1205} - 3^{1964}} \text{ болно.}$$

Иймд  $3^{1964} \cdot \frac{2^{1205} - 1}{6^{1205} - 3^{1964}} = f_{1205}(g_{759}(3^{1964} \cdot \frac{2^{1205} - 1}{6^{1205} - 3^{1964}}))$  тул

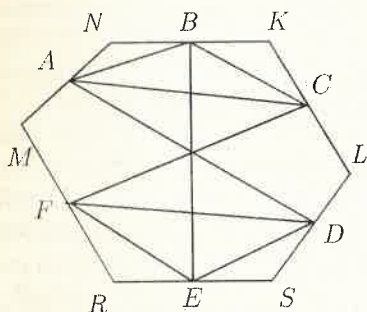
$$x_{1 \max} = 3^{2001} \cdot \frac{2^{1205} - 1}{6^{1205} - 3^{1964}} \text{ болно.}$$

**X-A2.**  $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{m}{c} \cdot 4R \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$  болохыг батлая. Энэ тэнцэл бишийг  $b$  ба  $c$ ,  $c$  ба  $a$  талуудын хувьд батлаад үржүүлбэл батлах тэнцэл биш гарна.  $\frac{4R}{c} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\cos \frac{\gamma}{2}}$  байх тул  $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{m}{\cos \frac{\gamma}{2}}$ -ыг батлахтай адил эндээс  $m_c^2 = \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$  байх тул  $2 \cdot (a^2+b^2)^2 (\cos \gamma + 1) \geq (a+b)^2 (2(a^2+b^2)-c^2) \Leftrightarrow (a^2+b^2)^2 - 2ab(a^2+b^2) + 2 \cos \gamma (a^4+b^4-a^3b-b^3a) \geq 0 \Leftrightarrow (a^2+b^2)(a-b)^2 + 2 \cos \gamma \cdot (a^3(a-b)-b^3(a-b)) \geq 0 \Leftrightarrow (a^2+b^2)(a-b)^2 + 2 \cos \gamma \cdot (a-b)^2 (a^2+b^2+ab) \geq 0$  болж батлагдав.  $a = b = c$  үед тэнцрэдэг хүрнэ.

**Х-А3.**  $m = a^{2^\alpha} - b^{2^\alpha}$  ба  $n = a^{2^\alpha} + b^{2^\alpha}$  гэж сонгож авъя. Тэгвэл  $(m, n) = 1$  Эйлерийн теоремоос  $m+1 \equiv 0 \pmod{2^{\alpha+1}}$  ба  $n-1 \equiv 0 \pmod{2^{\alpha+1}}$  байна. Иймд  $m|a^{2^{\alpha+1}} - b^{2^{\alpha+1}}|a^{n-1} - b^{n-1}$  ба  $n|a^{2^{\alpha+1}} + b^{2^{\alpha+1}}|a^{m+1} - b^{m+1}$  байна. Одоо  $\forall \alpha \in \mathbb{N}$  гэж сонговол дурдсан яанартай төгсгөлгүй тоонууд олдох нь батлагдав.

**Х-В1.** Бодлогын нөхцлийг хангасан байхаар  $n$  ширхэг цэгийг будах будалтыг зохистой будалт гэж нэрлээд түүний тоог  $t_n$  гэе.  $d_n$  ба  $p_n$  нь зохистой будалтын сүүлчийн цэгийн өнгийг солиход харгалзан зохистой будалт хэвээрээ үлддэг ба энэ чанар нь алддагддаг будалтын тоонууд болог. Тэгвэл  $t_n = d_n + p_n$  болох ба сөөлжлөн ялгаатай өнгөөр будсан  $YXYX \dots, XYXY \dots$  будалтын ард 1 цэг нэмж түүнийг ямар хоёр өнгөөр будсан зохистой будалт хэвээр үлддэг,  $n$  цэгийн зохистой бус  $p_n$  ширхэг будалт болгоноос  $2p_n$  ширхэг  $n+1$  зохистой будалт гарган авдаг болон үлдсэн  $d_n - 2$  ширхэг зохистой будалт болгон  $n+1$  цэгийн зохистой бус будалтыг үүсгэхийг харж болно. Өөрөөр хэлбэл  $d_{n+1} = 2p_n + 4$ ,  $d_1 = 2$  ба  $p_{n+1} = d_n - 2$ ,  $p_1 = 0$  болно. Эндээс  $d_{n+2} = 2(d_n - 2) + 4 = 2d_n$ ,  $p_{n+2} = (2p_n + 4) - 2 = 2p_n + 2$  буюу  $t_{n+2} = d_{n+2} + p_{n+2} = 2(d_n + p_n) + 2 = 2t_n + 2$  ба  $t_1 + 2 = 4$ ,  $t_2 + 2 = 6$  болохыг тооцвол  $n$  сондгой үед  $t_n = 2^{\frac{n+3}{2}} - 2$ ,  $n$  тэгш үед  $t_n = 3 \cdot 2^{\frac{n}{2}}$  болно.

**Х-В2.** Эхлээд  $(AD), (BE), (CF)$  шулуунууд нэг цэгт огтлолцохыг батлая. Өгсөн 6-н өнцөгтийн оройнуудыг  $M, N, K, L, S, R$  гэж тэмдэглэе.



Проектив геометрт паралель шулуунуудыг алсын цэг огтлолцдог гэж үздэг ба бүх алсын цэгүүд алсын шулуун гэж нэрлэгдэх нэг шулуун дээр орших тул  $(NK) \cap (RS) = x_\infty$ ,  $(KL) \cap (MR) = y_\infty$ ,  $(MN) \cap (SL) = z_\infty$  гэж тэмдэглэвэл  $x_\infty, y_\infty, z_\infty \in l_\infty$  (алсын шулуун) байна. Иймд Паскалийн теоремоор өгсөн 6-н өнцөгтийн оройнууд ямар нэгэн овал муруй дээр орших тул

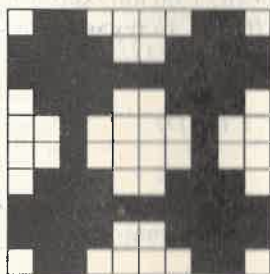
$x_\infty, y_\infty, z_\infty$  цэгүүдийн поляр шулуун нь харгалзан  $(BE), (CF), (AD)$  болно. (Проектив хавтгайн өгсөн  $M$  цэгийг дайрсан  $l$  шулуун  $\gamma$  овал муруйтай огтлолцох цэгийг  $K, L$  гэж тэмдэглэвэл  $(KL, XM) = -1$  байх цэгүүдийн геометр байр нь шулуун байх бөгөөд уул шулууныг

$M$  цэгийн поляр,  $M$  цэгийг  $l$ -ийн полюс гэнэ. Хэрэв  $KL$  хэрчмийн дундаж цэг  $X$  ба  $KL$  шулуунуудын алсын цэг  $x_\infty$  бол  $(KL, XX_0) = -1$  байдаг билээ.

Иймд поляр полюсын чанараар  $l_\infty$  шулууны полюс нь  $(BE)$ ,  $(CF)$ ,  $(AD)$  шулуунууд дээр орших тул  $l_\infty$  шулууны полюс нь  $O$  цэг болж  $(AD)$ ,  $(BE)$ ,  $(CF)$  шулуунууд нэг цэгт огтлолцох болов.  $ABC, DEF$  гурвалжны харгалзах оройнуудыг холбосон шулуунууд нэг цэгт огтлож байгаа учраас Дезаргийн теоремоор харгалзах талуудын огтлолын цэгүүд 1 шулуун дээр орших болж бодлого бодогдов.

*Тайлбар.* Энэ бодлогыг проектив геометрийн ойлголт болон теоремуудыг шууд хэрэглэн боддоо. Хэрэв та бүхэн дээрх ойлголтуудтай сайтар танилцахыг хүсвэл Л.С. Атаналян, В.Т. Базылов "Геометрия" Часть-II М. 1980 номны 1-р бүлэгээс үзэж болно.

### Х-В3.



ДБ-В1 бодлогоос 1-р мөрөөр хүснэгт маань нэг утгатай тодорхойлогдоно. Харин 1-р мөр нь 1-р мөрийн нүднүүд дэх будалтаар нэг утгатай тодорхойлогдоно. 1-р мөрийн нүднүүдийг  $1, 2, \dots, 10$  гэж тэмдэглэе.

$\alpha(i_1, \dots, i_k)$ -аар

$\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, 10\} \quad 1 \leq k \leq 10$

$i_1, \dots, i_k$ -р нүд хараар будагдсан байх тэр хүснэгтийн хар нүдний тоог тэмдэглэе.

Одоо бодлогод өгсөн чанартай хүснэгт өгөгдсөн байг. Тэгэхэд хүснэгтийн ямар нэг нүд тэгш ширхэг  $\alpha(i)$  будалтанд тоологдож байвал цагаан эсрэг тохиолдолд хараар будагдсан байна.  $i \not\equiv j \pmod{2}$  үед  $\alpha(i)$  ба  $\alpha(j)$  будалтууд нь ерөнхий нүдгүй. Эсрэг тохиолдолд ерөнхий нүдтэй. Иймд  $\alpha(2), \alpha(4), \alpha(6), \alpha(8), \alpha(10)$  будалтууд оролцсон будалтуудаас хамгийн их хар нүдтэй байх будалтыг олоход хангалттай.

$\alpha(2) = \alpha(9) = 18 \quad \alpha(4) = \alpha(7) = 28 \quad \alpha(6) = \alpha(5) = 30$

$\alpha(8) = \alpha(3) = 24 \quad \alpha(10) = \alpha(1) = 10$  байна.

$\alpha(2, 4) = 18 \quad \alpha(2, 6) = 28 \quad \alpha(2, 8) = 30 \quad \alpha(2, 10) = 24$  гэх мэтээр тооцвол хамгийн ихдээ 30 болно. Иймд хамгийн ихдээ 60 хар нүд байна.

## ММО-37, БАГИЙН БАГШИЙН III ДАВАА

Б.Батцэнгэл, М.Батбилэг

ББ-А1.

|   |    |   |
|---|----|---|
| 1 |    | 3 |
|   | 10 |   |
| 9 |    |   |

Тэгш өнцөгтийг 9 тэгш өнцөгтөд хуваасан бөгөөд тэдгээрийн дөрвийнх нь талбай мэдэгдэж байв (зураг). Тэгвэл тэгш өнцөгтийн талбай 90-ээс багагүй гэдгийг батал.

**ББ-А2.** 5 диаметртай тойрог дотор дурын 10 цэгийг сонгон авахад хоорондох зай нь 2-оос бага байх 2 цэг тэдэн дотроос олдохыг батал.

**ББ-А3.**  $\{a_n\}$  дараалал нь  $a_1 = 0$  ба  $n \geq 1$  үед

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2, & \text{хэрэв } n \text{ сондгой} \\ 2a_n, & \text{хэрэв } n \text{ тэгш} \end{cases}$$

гэсэн рекуррент томъёогоор өгөгджээ.

а)  $a_{2001}$ -г ол.

б)  $\{a_n\}$  дарааллын ерөнхий гишүүний томъёог бич.

**ББ-В1.**  $abcd = 1$  байх  $a, b, c, d$  тоонуудын хувьд

$a + b + c + d \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  тэнцэл биш биелнэ гэдгийг харуул.

**ББ-В2.**  $ABCD$  гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн  $AB, CD$  талуудын үргэлжлэлүүд  $E$  цэгт,  $AC, BD$  диагоналиуд  $O$  цэгт тус тус огтлолцдог бол

$$AO \cdot BE \cdot CE \cdot DO = AE \cdot BO \cdot CO \cdot DE$$

байна гэж батал.

**ББ-В3.** Зөв 8 өнцөгтийн 1, 2, ..., 8 тоонуудыг аль ч дараалсан гурван орой дээр бичигдсэн тооны нийлбэр нь 12-оос их байхаар бичиж болох уу?

**ББ-А1.**

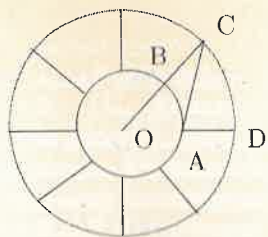
|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
|     | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
| $E$ | 1   |     | 3   |     |
|     |     | $F$ | $L$ | $G$ |
| $K$ |     |     |     | $M$ |
|     |     | 9   |     |     |
| $O$ |     |     |     |     |

Тэгш өнцөгтийн талбайг  $S$  гэж тэмдэглэе. Тэгш өнцөгтийн оройнуудыг тэмдэглэж  $AB = a, AE = b,$

$BC = x, EK = y$  гэж үзье. Тэгвэл  $ab = 1, xy = 10$  ба  $CD = 3a, KO = 9b$  болно. Иймд  $S = (AB + BC + CD)(AE + EK + KO) = (a + x + 3a)(b + y + 9b) = (4a + x)(10b + y) = 40ab + 10bx + 4ay + xy = 50 + 10bx + 4ay$  болно. Энд Кошийн тэнцэтгэл бишийг хэрэглэвэл:

$S = 50 + 10bx + 4ay \geq 50 + 2 \cdot \sqrt{10bx \cdot 4ay} = 50 + 40 = 90$  гэж батлах зүйл гарна.

# ББ-А2.



Бид 5 диаметрэй дугуйг зурагт үзүүлсэн байдлаар хувааа. Энд жижиг тойргийн радиус  $OA = 1$  бөгөөд  $\angle COD = 45^\circ$ -тэй ижил 8 хэсэгт хуваасан юм. Диреклейн зарчмаар хуваалтын 9 хэсгийн аль нэгэнд нь 2 цэг орох ба тэдгээрийн хоорондох зай 2-оос хэтрэхгүй байна гэдгийг батлая. Хэрэв жижиг дугуйд 2 цэг байвал уг 2 цэгийн хоорондох зай 2-оос хэтрэхгүй байхыг батлая.

Одоо  $AB, CD$  нум  $BC, AD$  хэрчмүүдээр хүрээлэгдсэн хэсгийн аль ч 2 цэгийн хоорондох зай 2-оос хэтрэхгүй байна гэдгийг харуулая. Косинусын теоремоор

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \cdot \cos 45^\circ = \frac{25}{4} + 1 - 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{29 - 10 \cdot \sqrt{2}}{4} < 4$$

буюу  $AC < 2$  байна. Мэдээж энэ хэсэгт байгаа 2 цэгийн хоорондох зай  $AC$ -ээс хэтрэхгүй байна.

# ББ-А3. б) хэсгийг шууд бодъё. $x_n = a_{2n-1}$

$y_n = a_{2n}$   $n = 1, 2, \dots$  гэж тус тус тэмдэглэе. Тэгвэл  $x_1 = 0, y_1 = 2$  ба  $x_{n+1} = a_{2n+1} = 2y_n, y_{n+1} = a_{2n+2} = x_{n+1} + 2$  болно. Эндээс  $y_{n+1} + 2 = x_{n+1} + 4 = 2 \cdot (y_n + 2) = \dots = 2^n (y_1 + 2) = 2^{n+2}$  болно.

Иймд  $y_{n+1} = 2^{n+2} - 2, x_{n+1} = 2^{n+2} - 4$  болж

$$a_n = \begin{cases} 2^{k+1} - 2, & n = 2k \\ 2^{k+1} - 4, & n = 2k + 1 \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

болох нь тогтоогдов.

Өөрөөр үүнийг  $a_n = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} - 2 \cdot (n + 1 - 2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$  гэж бичиж болно. Тухайлбал  $a_{2001} = 2^{1001} - 4$  юм.

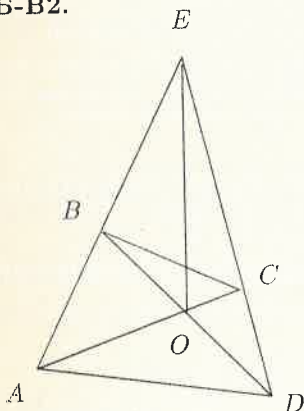
**ББ-В1.** Хувьсагчийг цоолөх аргаар бодъё. Нэгэлт өгсөн нөхцөл ба батлах ёстой тэнцэл бийшид  $a, b, c, d$  нь тэгш эрхтэй учир эрэмбэлэж болно. Тухайлбал  $0 < a \leq b \leq c \leq d$  болог. Тэгвэл  $a \leq 1, d \geq 1$  байх нь ойлгомжтой.

Эхлээд  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - a - b - c - d \geq a^2 d^2 + b^2 + c^2 - ad - b - c$  болохыг харуулая. Энэ тэнцэл бий нь

$a^2 + d^2 - a - d \geq a^2 d^2 - ad \Leftrightarrow (ab + a + d)(a - 1)(d - 1) \leq 0$  гэдэгтэй адил бөгөөд энэ нь  $a \leq 1, d \leq 1$  тул илт юм.  $ad = a'$  гэж тэмдэглэвэл өгсөн нөхцөл нь  $a'bc = 1$  болох ба одоо бид өмнөхтэй нэгэн

адил  $0 < a \leq b \leq d$  гэж үзэж болно. Энд  $a' \leq 1, c \geq 1$  юм. Эндээс  $a'^2 + b^2 + c^2 - a' - b - c \geq a'^2 c^2 + b^2 - a'c - b \Leftrightarrow (ac' + a' + c)(a' - 1)(c - 1) < 0$  болно. Эцэст нь  $a'c = x$  гэвэл өгсөн нөхцөл  $xb = 1$  болох бөгөөд одоо  $x^2 + b^2 - x - b \geq 0$  гэж харуулбал батлах ёстой тэнцэл биш батлагдана.  $xb = 1$  учраас  $x + b \geq 2$  байна. Иймд  $x^2 + b^2 - x - b = (x + b)^2 - (x + b) - 2 = (x + b - 2)(x + b - 1) \geq 0$  юм.

ББ-В2.



Батлах зүйлийг хувирган

$$\frac{AO \cdot BE \cdot CE \cdot DO}{OC \cdot AE \cdot DE \cdot OB} = 1$$

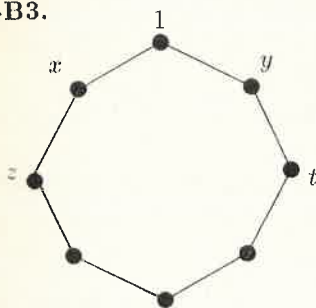
гэж бичье.  $AEO, OEC$  гурвалжнууд ерөнхий өндөртэй тул

$$\frac{AO}{OC} = \frac{S_{AOE}}{S_{OEC}} \text{ байна. Үүнтэй адил}$$

$$\frac{DO}{OB} = \frac{S_{EOD}}{S_{OEC}}, \quad \frac{CE}{DE} = \frac{S_{OEC}}{S_{EOD}},$$

$\frac{BE}{AE} = \frac{S_{BOE}}{S_{AOE}}$  болно. Эдгээр тэнцлийг үржүүлбэл батлах зүйл гарна.

ББ-В3.



Болохгүй гэдгийг эсрэгээс нь баталж харуулая. Аль нэг орой дээр 1 бичигдсэн байна. Энэ 1 бичигдсэн оройтой зэргэлдээ болон нэг алгасан зэргэлдээ оройнууд дээр 2 ба 3 тоонууд бичигдэж болохгүй. (зураг дээр эдгээр оройг  $x, y, z, t$ -ээр тэмдэглэв) Учир нь тэр тохиолдолд зэргэлдээ 3 орой дээрх тооны нийлбэр  $1 + 3 + 8 = 12$ -оос хэтрэхгүй болно.

Иймд 2, 3, 8 тоонууд үлдэх 3 орой (зураг дээр үсгээр тэмдэглэгдээгүй) дээр байрлах боллоо. Эндээс  $x, y, z, t$  тоонууд нь 4, 5, 6, 7 байх ёстой бөгөөд  $x + z \geq 12, y + t \geq 12$  тул  $x + y + z + t = 4 + 5 + 6 + 7 = 22 \geq 24$  болж зөрчил үүсэв.

# ММО-37, Багын багшийн IV даваа

Ш.Мөнхцэцэг.

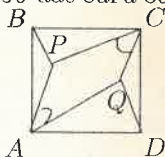
**ББ-А1.** (Ү.Мяам)  $a > b > 0$  бол  $\sqrt{2}a^3 + \frac{3}{ab-b^2} \geq 10$  болохыг батал.

**ББ-А2.** (Ц. Дашдорж). 5 оноотой нэгэн бодлогыг бодоход хөвгүүдийн дундаж оноо 4, охидын дундаж оноо 3,25, нийт сурагчдын дундаж оноо 3,6 байв. Нийт сурагчдын оноо 30-аас их, 50-аас бага байсан бол охид ба хөвгүүдийн тоог ол.

**ББ-А3** (Д.Нямсүрэн).

$ABCD$  квадратын хувьд  $\angle PCQ = \angle QAP = 45^\circ$

бол  $BP^2 + DQ^2 = PQ^2$  болохыг батал.



**ББ-В1** (Ц.Дашдорж).  $1 + p + p^2 + p^3 + p^4$  бүхэл тооны квадрат байх бүх анхны тоо  $p$ -г ол.

**ББ-В2** (Б.Батцэнгэл).  $\{a_n\}$  нь дор хаяж 2 ялгаатай гишүүн агуулдаг, төгсгөлгүй олон гишүүнтэй, натурал тоонуудаас тогтох арифметик прогресс бол түүнээс цифрүүдийн нийлбэр нь өсдөг байхаар төгсгөлгүй олон гишүүнийг салган авч болохыг батал.

**ББ-В3** (В.Адъяасүрэн). а)  $1999 \times 1999$  б)  $2001 \times 2001$  хэмжээтэй хөлөг дээр дөрвөн нүднээс тогтох  $\square\square\square\square$  хэлбэрийн онгоц байрлуулав. Хамгийн цөөндөө хэдэн удаа буудвал онгоцыг гарцаагүй оносон байх вэ?

**ББ-А1.**  $a > b > 0$  учир  $ab - b^2 = b(a - b) > 0$   $\frac{3}{ab-b^2} \geq 10 - \sqrt{2}a^3$  хэрэв  $10 - \sqrt{2}a^3 \leq 0$  бол  $\frac{3}{ab-b^2} > 0 \geq 10 - \sqrt{2}a^3$  болж батлагдана.

Иймд  $10 - \sqrt{2}a^3 > 0$  тохиолдол үлдлээ. Энэ үед  $b^2 - ab + \frac{3}{10 - \sqrt{2}a^3} \geq 0$  болно.

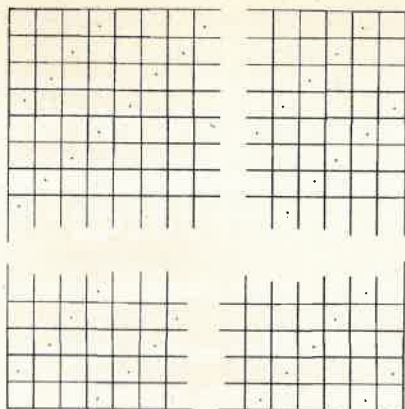
Бүтэн квадрат ялгавал  $(b - \frac{a}{2})^2 + \frac{3}{10 - \sqrt{2}a^3} - \frac{a^2}{4} \geq 0$   $\frac{3}{10 - \sqrt{2}a^3} - \frac{a^2}{4} \geq 0$  бол батлах зүйл батлагдана. Энэ нь  $12 - (10 - \sqrt{2}a^3)a^2 \geq 0$  тэй ижил.

$\sqrt{2}a^5 - 10a^2 + 12 \geq 0$   $\sqrt{2}a^5 - 10a^2 + 12 = 4(2c^5 - 5c^2 + 3) = 4(c-1)^2(2c^3 + 4c^2 + 6c + 3) \geq 0$  болж батлагдав.

**ББ-А2.**  $x, y$  нь хүү ба охидын тоо гэвэл  $4x + 3,25y = 3,6(x + y)$ . Эндээс  $y = \frac{8x}{7}$  ба  $x = 7k$   $k \in \mathbb{N}$ ,  $30 < x + y = \frac{15x}{7} < 50$  буюу  $14 < x < 49$  болж  $x = 21$ ,  $y = 24$  болно.

**ББ-А3.**





б)  $2001 \times 2001$  хэмжээтэй хөлгийг  $2001 \times 2001$  хэмжээтэй дэд хэсгийг  $\square\square\square$  хэлбэрийн  $2001 \cdot 500 = 1000500$  ширхэг дүрсэд хуваана. Харин үлдэх  $2001 \times 1$  хэмжээтэй дэд хэсгийг  $\square\square\square$  хэлбэрийн  $500$  ширхэг дүрсэд хуваагаад  $1 \times 1$  хэмжээтэй  $1$  нүд үлдэнэ. Ийнхүү  $2001 \times 2001$  хэмжээтэй хөлөг  $\square\square\square$  хэлбэрийн  $1000500 + 500 = 1001000$  ширхэг дүрсэд хуваагдах тул онгоцыг онохын тулд  $1001000$ -ээс цөөнгүй буудах хэрэгтэй.

Зурагт үзүүлсэн байдлаар буудвал

$$(4 + 8 + \dots + 2000) + (1998 + 994 + \dots + 6 + 2) = \frac{2004 \cdot 500}{2} + \frac{2000 \cdot 500}{2} =$$

$$= 1002 \cdot 500 + 1000 \cdot 500 = 2002 \cdot 500 = 1001000 \text{ удаа буудна.}$$

Бодлогын а) хэсгийг б) шиг бодно.

## ММО-37, Дундын багшийн III ийн даваа

Б.Батцэнгэл.

**ДБ-А1.** Сөрөг биш бодит  $a, b, c, d$  тоонууд нь

$$2(ab + bc + ad + bc + bd + cd) + abc + abd + acd + bcd = 16$$

гэсэн нөхцлийг хангадаг бол

$$3(a + b + c + d) \geq 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

тэнцэл биш биелнэ гэж батал.

**ДБ-А2.** Тойрогт багтсан  $ABCD$  гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн диагоналиудын огтлолцлын цэг  $O$ -г дайруулж татсан шулуун тойргийн  $AB, CD$  нумыг харгаазан  $P$  ба  $Q$  цэгт, дөрвөн өнцөгтийн  $AB, CD$  талыг харгалзан  $R$  ба  $S$  цэгт тус тус огтлолдог бол

$$\frac{1}{PE} + \frac{1}{SE} = \frac{1}{QE} + \frac{1}{RE}$$

болохыг батал.

**ДБ-А3.**  $m \times n$  хүснэгтийн нүд бүрт бодит тоонууд бичигдсэн бөгөөд

аль ч мөр баганын тоонуудын нийлбэр нь бүхэл байв. Бүхэл биш тоог түүнд ойрхон 2 бүхэл тооны аль нэгээр солихыг уг тоог бүхэлтэх гэж нэрлэе. (бүхэл тоог бүхэлтүүлэх нь утгагүй). Хүснэгтийн бүх тоог нэгэн зэрэг бүхэлтэхдээ, нүд бүрт нь бүхэл тоо бичигдсэн шинэ хүснэгтийн хувьд аль ч мөр баганын тоонуудын нийлбэртэй тэнцүү байхаар гүйцэтгэж болно гэдгийг харуул.

**ДБ-В1.** 1-ээс ялгаатай бүтэн квадратад үл хуваагдах бүх натурал тоонуудын олонлогийг  $S$  гэж тэмдэглэе. Тэгвэл ямар ч натурал  $n$  тооны хувьд

$$\sum_{k \in S} [\sqrt{n/k}] = n$$

байна гэдгийг харуул (энд  $[x]$ -ээр  $x$  тооны бүхэл хэсгийг тэмдэглэв).

**ДБ-В2.**  $a \leq b \leq c$  тоо нь гурвалжины талууд байх үед  $\frac{(a+b+c)^2}{bc}$  тооны авч болох бүх утгыг ол.

**ДБ-В3.**  $n \geq 3$  бүхэл тоо өгөгдөв.

а) Квадратыг  $2^n$ -ээс олон тэгш өнцөгтөд, квадратын талтай паралель ямар ч шулуун нь  $n$ -ээс хэтрэхгүй тооны тэгш өнцөгтийг огтолж байхаар хувааж болно гэдгийг харуул. (Хуваалт нь давхардалгүй байх бөгөөд хуваалтын тэгш өнцөгтийн талууд нь паралель гэж үзэж болно)

б) Дээрх чанар биелэхээр квадратыг  $3^n$ -ээс олон тэгш өнцөгтөд хувааж болохгүй гэдгийг батал.

**ДБ-А1.**  $S_1 = \frac{a+b+c+d}{4}$ ,  $S_2 = \frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}$ ,  
 $S_3 = \frac{abc+abd+acd+bcd}{4}$  гэж тэмдэглэе. Тэгвэл бид  $3S_2 + S_3 = 4 \Rightarrow S_1 \geq S_2$  гэж батлах ёстой.  
 Эхлээд  $x, y, z \geq 0$  үед

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + xz(x+z) + yz(y+z) \quad (1)$$

гэж батлая.  $x, y, z$  тэгш эрхтэй учир  $x \geq y \geq z \geq 0$  гэж үзье.

$$\left. \begin{aligned} z(x-z)(y-z) &\geq 0 \Rightarrow z^3 + xyz \geq xz^2 + yz^2 \\ (x-y)^2(x+y-z) &\geq 0 \Rightarrow x^3 + y^3 + 2xyz \geq xy(x+y) + x^2z + y^2z \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + xz(x+z) + yz(y+z)$$

(1)-д а)  $x = a$ ,  $y = b$ ,  $z = c$ ; б)  $x = a$ ,  $y = b$ ,  $z = d$

в)  $x = a$ ,  $y = c$ ,  $z = d$ ; г)  $x = b$ ,  $y = c$ ,  $z = d$  гэж аваад гарах тэнцэтгэл бишүүдийг нэмбэл:

$$3(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + 3(abc + abd + acd + bcd) \geq$$

$$\geq 2(a^2b + a^2c + a^2d + b^2c + b^2d + b^2a + c^2d + c^2a + c^2b + d^2a + d^2b + d^2c) \quad (2)$$

гэнцэгтгэл биш гарна. Кошигийн гэнцэгтгэл биш ашиглаад

$$3(abc + abd + acd + bcd) \leq a^2b + a^2c + a^2d + b^2c + b^2d + b^2a + c^2d + c^2a + c^2b + d^2a + d^2b + d^2c \quad (3)$$

гэж батална. (2) ба (3)-аас

$$\begin{aligned} & 9(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + 6(abc + abd + acd + bcd) \geq \\ & \geq 5(a^2b + a^2c + a^2d + b^2c + b^2d + b^2a + c^2d + c^2a + c^2b + d^2a + d^2b + d^2c) \\ & \Leftrightarrow 9u + 6v \geq 5w \end{aligned} \quad (4)$$

Гэтэл

$$(a+b+c+d)^3 = u + 6v + 3w, \quad (a+b+c+d)(ab+ac+ad+bc+bd+cd) = w + 3v$$

тул (4)-өөс

$$\begin{aligned} & 9(u + 3w + 6v) + 48v \geq 32(w + 3v) \Leftrightarrow \\ & 9(a+b+c+d)^3 + 48(abc + abd + acd + bcd) \geq \end{aligned}$$

$$\geq 32(a+b+c+d) \cdot (ab+ac+ad+bc+bd+cd) \Leftrightarrow 3S_1^3 + S_3 \geq 4S_1S_2 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} S_1^2 &= \left( \frac{a+b+c+d}{4} \right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd}{16} = \\ &= \frac{\frac{1}{3}(a^2 + b^2) + \frac{1}{3}(a^2 + c^2) + \frac{1}{3}(a^2 + d^2) + \frac{1}{3}(b^2 + c^2) + \frac{1}{3}(c^2 + d^2)}{16} + \\ &\quad + \frac{2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)}{16} \geq \\ &\geq \frac{\frac{3}{2}(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)}{16} = S_2 \end{aligned}$$

Өөрөөр хэлбэл

$$S_1^2 \geq S_2 \quad (6)$$

Иймээс  $3S_2^2 + S_1^2 + S_3S_1^3 \stackrel{(6)}{\geq} 3S_2^2S_1^2 + \frac{S_3}{S_1}S_1^2 = \frac{S_3^2}{S_1}(3S_1^3 + S_3) \stackrel{(5)}{\geq} \frac{S_3^2}{S_1} \cdot 4S_1S_2 = 4S_2^2$

Өөрөөр хэлбэл

$$3S_2^2 + S_1^2 + S_3S_1 \geq 4S_2^3 \quad (7)$$

Нөхцөл ёсоор  $3S_2 + S_3 = 4 \Rightarrow S_3 = 4 - 3S_2$

Иймд

$$(7) \Leftrightarrow 4S_2^2S_1^2 + (4 - 3S_2)S_1^3 \geq 4S_2^3 \Leftrightarrow 4(S_1^3 - S_2^3) - 3S_2S_1^2(S_1 - S_2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(S_1 - S_2)(4S_1^2 + 4S_1S_2 + 4S_2^2 - 3S_2S_1^2) \geq 0 \quad (8)$$

$$\geq 2(a^2b + a^2c + a^2d + b^2c + b^2d + b^2a + c^2d + c^2a + c^2b + d^2a + d^2b + d^2c) \quad (2)$$

тэнцэтгэл биш гарна. Кошийн тэнцэтгэл биш ашиглаад

$$3(abc + abd + acd + bcd) \leq$$

$$\leq a^2b + a^2c + a^2d + b^2c + b^2d + b^2a + c^2d + c^2a + c^2b + d^2a + d^2b + d^2c \quad (3)$$

гэж батална. (2) ба (3)-аас

$$9(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + 6(abc + abd + acd + bcd) \geq$$

$$\geq 5(a^2b + a^2c + a^2d + b^2c + b^2d + b^2a + c^2d + c^2a + c^2b + d^2a + d^2b + d^2c)$$

$$\Leftrightarrow 9u + 6v \geq 5w \quad (4)$$

Гэтэл

$$(a+b+c+d)^3 = u + 6v + 3w, \quad (a+b+c+d)(ab+ac+ad+bc+bd+cd) = w + 3v$$

тул (4)-өөс

$$9(u + 3w + 6v) + 48v \geq 32(w + 3v) \Leftrightarrow$$

$$9(a+b+c+d)^3 + 48(abc + abd + acd + bcd) \geq$$

$$\geq 32(a+b+c+d)(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \Leftrightarrow 3S_1^3 + S_3 \geq 4S_1S_2 \quad (5)$$

$$S_1^2 = \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd}{16}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}(a^2+b^2) + \frac{1}{3}(a^2+c^2) + \frac{1}{3}(a^2+d^2) + \frac{1}{3}(b^2+c^2) + \frac{1}{3}(c^2+d^2)}{16} +$$

$$+ \frac{2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}{16} \geq$$

$$\geq \frac{\frac{3}{2}(ab+ac+ad+bc+bd+cd) + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}{16} = S_2$$

Өөрөөр хэлбэл

$$S_1^2 \geq S_2 \quad (6)$$

Иймээс  $3S_2^2 + S_1^2 + S_3S_1^3 \stackrel{(6)}{\geq} 3S_2^2S_1^2 + \frac{S_3}{S_1}S_2^2 = \frac{S_2^2}{S_1}(3S_1^3 + S_3) \stackrel{(5)}{\geq} \frac{S_2^2}{S_1} \cdot 4S_1S_2 = 4S_2^3$

Өөрөөр хэлбэл

$$3S_2^2 + S_1^2 + S_3S_1 \geq 4S_2^3 \quad (7)$$

Нөхцөл ёсоор  $3S_2 + S_3 = 4 \Rightarrow S_3 = 4 - 3S_2$

Иймд

$$(7) \Leftrightarrow 4S_2^2S_1^2 + (4 - 3S_2)S_1^3 \geq 4S_2^3 \Leftrightarrow 4(S_1^3 - S_2^3) - 3S_2S_1^2(S_1 - S_2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(S_1 - S_2)(4S_1^2 + 4S_1S_2 + 4S_2^2 - 3S_2S_1^2) \geq 0 \quad (8)$$

$$\text{Нөгөө талаас } 3S_2 + S_3 = 4 \Rightarrow 3S_2 < 4 \Rightarrow 4 - 3S_2 > 0 \Rightarrow$$

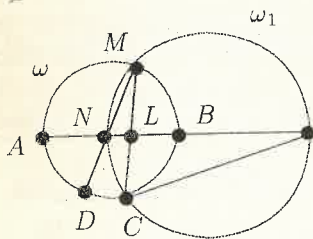
$$S_1^2(4 - 3S_2) \rightarrow 4S_1^2 + 4S_1S_2 + 4S_2^2 - 3S_2S_1^2 > 0 \quad (9)$$

(8) ба (9)-өөс  $S_1 - S_2 \geq 0 \Leftrightarrow S_1 \geq S_2$  гэж гарч бодлого бодогдов.

**ДБ-А2.** Юуны өмнө бодлогын нөхцөлд диагнолиудын огтлолцлын цэгийг  $E$  биш  $O$  цэг гэж ташаарч бичсэн явдалд гүнээ хүлцэл өчье. Дараах өгүүлбэрийг ашиглая.

**Өгүүлбэр**  $\omega$  тойрог дээр цагийн зүүний дагуу  $A, B, C, D$  гэж тэмдэглэгдсэн дөрвөн цэг өгөгдсөн болог.  $\omega$  тойргийн  $AB$  нумын ямар нэгэн  $M$  цэгийн хувьд  $AB \cap MD = N$  ба  $AB \cap MC = L$  гэж тэмдэглэе. Тэгвэл  $\frac{AL \cdot NB}{NL}$  харьцаа нь  $M$  цэгийн сонголтоос хамаарахгүй тогтмол байна.

**Баталгаа.**  $M, N, C$  цэгүүдийг дайрсан  $\omega_1$  тойрог татая (зураг 1). Хэрэв  $\omega_1$  тойргийн  $AB$  шулуунтай огтлолцох өөр нэг цэг нь  $K$  бол



$$\angle AKC = \angle NKC = \angle NMC = \angle DMC = \frac{1}{2}DC$$

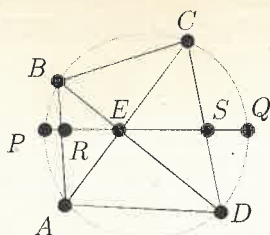
$K$  болох ба нэгэнт  $AB$  шулуун дээр  $\angle AKC = \frac{1}{2}DC$  байх  $K$  цэг цор ганц оршин байх тул  $K$  нь  $M$  цэгээс хамаарахгүй болно.  $\omega$  тойргийн  $AB, MC$  хөвчүүдийн хувьд,  $\omega_1$  тойргийн

зураг 1

$MC, AK$  хөвчүүдийн хувьд огтлогч шүргэгчийн теоремыг бичвэл  $AL \cdot LB = ML \cdot LC = NL \cdot LK$  гэж гарна. Эндээс

$$\frac{AL \cdot NB}{NL} = \frac{AL \cdot (NL + LB)}{NL} + AL + \frac{AL \cdot LB}{NL} = AL + LK = AK$$

болж энэ харьцаа нь  $M$  цэгийн сонголтоос хамаарахгүй гэдэг нь батлагдав.



зураг 2

Одоо бодлогоо бодъё (зураг 2). Тойрог дээр орших дөрвөн цэгээр  $P, Q, D, A$  цэгүүдийг сонгон авч,  $M$  цэгээр  $B$  ба  $C$  цэгүүдийг сонгон авбал авбал дээрхи өгүүлбэрийн дүгнэлт ёсоор

$$\frac{PE \cdot RQ}{RE} = \frac{PS \cdot EQ}{ES} \text{ буюу } \frac{RQ}{RE \cdot QE} = \frac{PS}{PE \cdot SE}$$

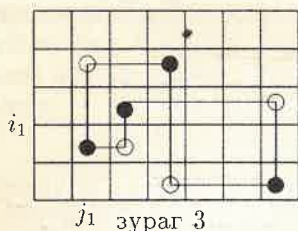
болно. Эцэст нь  $RQ = RE + QE$ ,

$PS = PE + SE$  болохыг ашиглавал батлах ёстой адилтгал шууд гарна.

*Тэмдэглэл.* "Тойрогт багтсан  $ABCD$  гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн диагоналуудын огтлолцлын цэг  $E$ -г дайруулж татсан шулуун тойргийн  $AB, CD$  нумыг харгалзан  $P$  ба  $Q$  цэгт, дөрвөн өнцөгтийн  $AB, CD$  талыг харгалзан  $R$  ба  $S$  цэгт тус тус огтолдог бол  $PE = EQ$  байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь  $RE = SE$  байх явдал мөн" гэсэн бодлогыг *эрвээхэйн тухай лемм* гэж нэрлэдэг бөгөөд энэ бодлогоос уг лемм нь мөрдөн гарна гэдэг нь ойлгомжтой юм.

ДБ-А3. Хүснэгтийн  $i(1 \leq i \leq m)$ -р мөр,  $j(1 \leq j \leq n)$ -р баганын огтлолцолд байгаа тоог  $a_{ij}$  гэж тэмдэглэе. Хүснэгтийн бүх тоо бүхэл тоо байвал тоонуудыг бүхэлтүүлэх шаардлагагүй билээ. Тэгэхлээр одоо хүснэгтэд дор хаяж нэг ширхэг бүхэл тоо биш байдаг, тухайлбал  $a_{i_1 j_1}$  буюу  $i_1$ -р мөр,  $j_1$ -р баганын огтлолцолд байгаа тэр тоо бүхэл биш байсан гэж үзье. Хэрэв хэсэг тоонуудын (мөр юмуу баганад байгаа тоонуудын) нийлбэр бүхэл бөгөөд тэдгээр тоонууд дотор ямар нэгэн бүхэл биш тоо байвал тэр тооноос өөр бүхэл бүхэл биш тоо дор хаяж нэг байх нь илэрхий билээ. Энэ хялбархан дүгнэлтийг ашиглавал,  $j_1$ -р баганы тоонуудын нийлбэр бүхэл тул тэр баганад  $a_{i_1 j_1}$ -ээс өөр бүхэл биш тоо дор хаяж нэг ширхэг олдох ёстой. Тэдгээрээс дурын нэгийг нь тухайлбал  $a_{i_2 j_1}$ -г сонгон авъя.  $i_2$ -р мөрийн бүх тоонуудын нийлбэр бүхэл тоо бөгөөд  $a_{i_2 j_1}$  бүхэл биш тул мөн л дээр бичсэн дүгнэлтээр  $i_2$ -р мөрөнд  $a_{i_2 j_1}$ -ээс гадна дор хаяж нэг бүхэл биш тоо байх бөгөөд тийм тоо олон байвал тэдгээрээс дурын нэгийг нь, тухайлбал  $a_{i_2 j_2}$ -г сонгон авъя. Одоо  $j_2$ -р баганад  $a_{i_2 j_2}$ -ээс өөр бүхэл биш тоо олдох ёстой бөгөөд нэг тийм тоо нь  $a_{i_3 j_2}$  болог. Цааш нь  $i_3$ -р мөрөнд  $a_{i_3 j_2}$ -ээс гадна бүхэл биш  $a_{i_3 j_3}$  тоо олдоно... Ингэж баганад-мөрөнд-баганад-мөрөнд-... гэхмэтчилэн ээлжлэн тоонуудыг сонгосоор эцэст нь

$$a_{i_1 j_1} - a_{i_2 j_1} - a_{i_2 j_2} - a_{i_3 j_2} - \dots - a_{i_k j_{k-1}} - a_{i_k j_k} - a_{i_{k+1} j_k} \quad (i_{k+1} = i_1)$$



жураг 3

гэсэн бүхэл биш тоонуудаас тогтох цикл үүснэ(зураг 3). Энэ циклийн урт нь тэгш байна гэдэг нь ойлгомжтой.

Энэ цикл байгаа бүх  $a_{i_r, j_r}, a_{i_{r+1}, j_r} (1 \leq r \leq k)$  тооны бутархай хэсгүүдийн хамгийн багыг  $\varepsilon (0 < \varepsilon < 1)$ , хамгийн ихийг  $1 - \delta (0 < \delta < 1)$  гэж тэмдэглээд  $\varepsilon \leq \delta$  гэж үзье (нөгөө тохиолдол нь адилхан хийгдэнэ).

Мөн хэрэг болбол циклийнхээ гишүүдийг дахин дугаарлан,  $\{a_{i_1, j_1} = \varepsilon$  гэж үзэхэд явцуурахгүй билээ. Одоо хүснэгтийн дээрхи циклд ороогүй тоонуудыг хэвээр үлдээж, харин циклийн  $a_{i_r, j_r}$  тоог  $a_{i_r, j_r} - \varepsilon$  тоогоор,  $a_{i_{r+1}, j_r}$  тоог  $a_{i_{r+1}, j_r} + \varepsilon$  тоогоор сольж, шинэ хүснэгтийг гарган авъя. Ингэж өөрчилөхөд мөр ба баганын нэг тоо нь  $\varepsilon$ -ээр багасаж, өөр нэг тоо нь  $\varepsilon$ -ээр ихэссэн учир шинэ хүснэгт нь мөн нь л аль ч мөр ба баганы тоонуудын нийлбэр нь бүхэл байх хүснэгт гарна. Түүнээс гадна шинэ хүснэгтийн бүхэл биш тоонуудын тоо нь хуучин хүснэгтийнхээс дор хаяж нэгээр цөөрсөн(тодруулбал  $a_{i_1, j_1}$  тоо бүхэл болсон) байна. Хэрэв шинэ хүснэгтийн бүх тоо бүхэл болж чадаагүй байвал дээрхи циклийг хайж  $\varepsilon, \delta$  түүнуудыг олж, циклийнхээ тоонуудыг шинэ тоонуудаар солино. Энэ үйлдлийг дахин давтан хийсээр, эцэст бүх тоо нь бүхэл тоо байдаг хүснэгтэд хүрэх бөгөөд бид хүснэгтийн тоонуудыг ихэсгэж, багасгахдаа хэзээ ч "бүхэл тоон дээгүүр алхахгүй" (энд  $\varepsilon \leq \delta$ -ийн сонголт ашиглашдана) учир эцэст үүссэн хүснэгтийн тоо болгон нь анх өгөгдсөн хүснэгтийн тоог бүхэлтгэж гарах тоо байна. Үүгээр бодлого бодогдов.

*Тэмдэглэл.* Ямар нэг нүдэнд байгаа бүхэл биш  $x$  тоог  $[x]$  тоогоор бүхэлтгэвэл тэр нүдэнд 0-г,  $[x] + 1$  тоогоор бүхэлтгэвэл тэр нүдэнд 1-г бичих замаар, энэ бодлогыг " $a_i (1 \leq i \leq m), b_j (1 \leq j \leq n)$  бүхэл тоонууд өгөгдсөн үед  $m \times n$  хүснэгтийг 0 ба 1-ээр бөглөхдөө,  $i$ -р мөрийн тоонуудын нийлбэр  $a_i$  ба  $j$ -р баганын тоонуудын нийлбэр  $b_j$  байхаар бөглөж болох вэ?" гэсэн бодлогод шилжүүлж болох боловч харамсалтай нь,  $a_i$  ба  $b_j$  тоонуудын хангах тэр хүрэлцээтэй нөхцлийг бүгдийг бичиж гаргана гэдэг нь нилээд хүнд асуудал юм. Харин хэдийд сөрөг биш бүхэл тоонуудаар бөглөж болох вэ? гэсэн асуултанд хялбархан хайууж болох бөгөөд энэ талаар дэлгэрүүлж "Задачи всесоюзных математических олимпиад" номны 26-р бодлогыг үзнэ үү.

**ДБ-В1.**  $1 \in S$  байх эь ойлгомжтой. Цаашибал  $S$  олонлогийн тоо гэдэг нь анхны тооны үржигдэхүүний задаргаанд байгаа зэргүүд нь

бүгд 1-тэй тэнцүү байх тийм тоонууд юм. Ямар ч натурал  $m$  тоог ямар нэгэн натурал  $A$  тооны хувьд

$$m = A^2 \cdot k, \quad k \in S$$

гэсэн хэлбэрт цор ганц утгатай бичиж болно. Үнэхээр  $m$  тооны анхны тооны үржигдэхүүний задаргаа нь

$$m = p_1^{2a_1+1} \cdot \dots \cdot p_s^{2a_s+1} \cdot q_1^{2b_1} \cdot \dots \cdot q_t^{2b_t}$$

бол

$$A = p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_s^{a_s} \cdot q_1^{b_1} \cdot \dots \cdot q_t^{b_t} \quad \text{ба} \quad k = p_1^1 \cdot \dots \cdot p_s^1$$

юм. Одоо энэ дүгнэлтийг ашиглан 1-ээс  $n$  хүртэлх бүх натурал тоог  $(A, k)$  хосын тусламжтайгаар тоолоё. Бэхлэгдсэн  $k \in S$  тооны хувьд  $1 \leq m = A^2 \cdot k \leq n$  буюу  $A \leq \sqrt{n/k}$  байх натурал  $A$  тоо яг  $[\sqrt{n/k}]$  ширхэг байх бөгөөд эндээс

$$\sum_{k \in S} [\sqrt{n/k}] = n$$

болно.

**ДБ-В2.**  $a > 0$  тул

$$\frac{(a+b+c)^2}{bc} > \frac{(b+c)^2}{bc} \geq 4$$

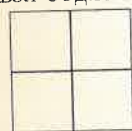
болно. Нөгөө талаас, өгсөн нөхцөл ёсоор  $c-b \geq 0$  ба гурвалжны тэнцэл биш ёсоор  $c-a-b < 0$  тул  $(c-b)(c-b-a) \leq 0$  буюу  $ab+b^2+c^2 \leq ac+2bc$  байна. Эндээс

$$\begin{aligned} \frac{(a+b+c)^2}{bc} &= \frac{a^2+ab+2ac+2bc+(ab+b^2+c^2)}{bc} \leq \frac{a^2+ab+3ac+4bc}{bc} = \\ &= \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{c} + \frac{a}{c} + 3\frac{a}{b} + 4 \leq 9 \end{aligned}$$

болно. Одоо манай илэрхийлэл нь  $(4, 9]$  завсрын бүх утгыг авч чадна гэдгийг харуулая.  $x \in (4, 9]$  бол  $0 < a = \sqrt{x} - 2 \leq 1$  байх бөгөөд  $a, 1, 1$  талтай гурвалжны хувьд илэрхийллийн утга  $a$  гарна. Үүгээр илэрхийлэлийн утгын муж  $(4, 9]$  болох нь батлагдав.

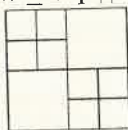
**ДБ-В3.** Юуны өмнө өгсөн квадратыг агшааж сунгах замаар тэгш өнцөгт гэж үзэж болно гэдгийг тэмдэглэе. Цаашид тэгш өнцөгтийн

талуудтай паралель шулуунуудыг хэвтээ ба босоо шулуун, тэгш өнцөгтийн босоо тэнхлэгийн дагуу талыг урт гэж тус тус нэрлэе. Квадратыг (тэгш өнцөгтийг) тэгш өнцөгтүүдэд хуваасан хуваалтыг, ямар ч хэвтээ шулуун  $m$ -ээс хэтрэхгүй тооны, ямар ч босоо шулуун  $n$ -ээс хэтрэхгүй тооны хуваалтын тэгш өнцөгтийг огтолдог бол  $(m, n)$  нөхцлийг хангаж байна гэж нэрлэе.  $(m, n)$  нөхцлийг хангах хамгийн олон тэгш өнцөгтийн агуулсан хуваалтын тэгш өнцөгтийн тоог  $R(m, n)$  гэж тэмдэглэе. Тэгвэл бодлого нь  $n \geq 3$  үед  $2^n < R(n, n) < 3^n$  гэж харуулах явдал юм.



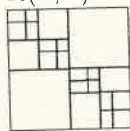
$$n = 2$$

$$r_2 = 4$$



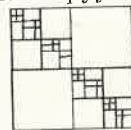
$$n = 3$$

$$r_3 = 10$$



$$n = 4$$

$$r_4 = 22$$



$$n = 5$$

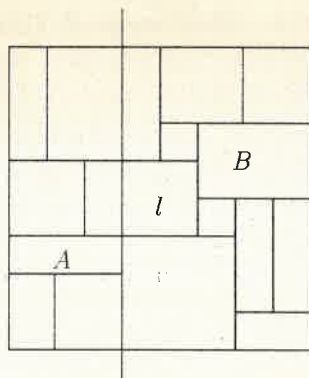
$$r_5 = 46$$

зураг 1

а) Зураг 1-д бага  $n$ -үүдэд дүрсэлсэн хуваалт нь бодлогын нөхцлийг хангана. Энэ хуваалт индукцээр,  $n = k + 1$  үед хуваах хуваалт нь өмнөх  $n = k$  үед байгуулагдсан хуваалтын диаголын дагуу орших квадратуудыг 4 тэнцүү хэсэгт хувааж байгуулагдсан байна. Тэгэхлээр хуваалтын тэгш өнцөгтийн тоо нь  $r_{k+1} = r_k + 3 \cdot 2^{k-1}$  гэсэн рекурент харьцааг хангана. Эндээс  $r_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$  болох ба  $n \geq 3$  үед  $r_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 2 > 2^n$  гэдэг нь ойлгомжтой.

б)  $m, n \geq 1$  үед  $R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m-1, n-1) + 2$  болохыг батлая. Квадратыг  $r$  ширхэг тэгш өнцөгтөд хуваасан хуваалт нь  $(m, n)$  нөхцлийг хангадаг болог.

(1-р тохиолдол). Урт нь өгөгдсөн квадратын талын урттай тэнцүү хуваалтын тэгш өнцөгт олддоггүй болог. Квадратын зүүн гар талын өргөн талтай хиллэдэг тэгш өнцөгтүүдээс хамгийн их урттай  $A$  тэгш өнцөгтийг сонгон авч,  $A$ -ийн баруун гар талын өргөн талыг дайруулан  $l$  шулуун татая (зураг 2). Ингэж татахдаа  $l$  шулуун дотоод хэсгээр нь огтолж гардаг хуваалтын  $s$  ширхэг тэгш өнцөгтийг  $l$ -ээр 2 хуваая (бодлогын нөхцлөөс  $s \leq n-1$  гэж гарах боловч бид зөвхөн  $s \geq 0$  гэдгийг ашиглана). Квадратын баруун гар талын өргөн талтай хиллэдэг тэгш өнцөгтүүдээс хамгийн их урттайг нь  $B$  гэж тэмдэглэе.



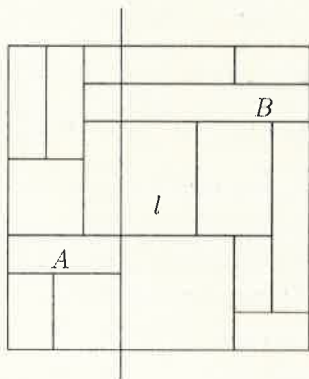
зураг 2

(1-a).  $B$  нь  $l$  шулууныг огтолдоггүй болог (зураг 2). Тэгвэл  $l$  шулууны зүүн талд байгаа  $A$ -гаас бусад тэгш өнцөгтүүд  $(m-1, n-1)$  нөхцлийг хангана, харин  $l$ -ийн баруун талд байгаа хуваалтын тэгш өнцөгтүүд  $(m-1, n)$  нөхцлийг хангана. Үнэхээр, бид  $A$ -гаас зүүн талаас хассан (үнэндээ бид  $l$ -ийн зүүн талын тэгш өнцөгтөөс  $A$ -г арчихад 2 тэгш өнцөгт үлдвэл тэдгээрийг уртаар нь наасан мэт сэтгэнэ) тул босоо шулуун нь зүүн талд  $n-1$ -ээс хэтрэхгүй тооны тэгш өнцөгтийг огтолно.

Мөн бидний үзэж байгаагаар хамгийн их урттай  $B$  нь  $l$  шулууны баруун талд,  $A$  нь зүүн талд байгаа тул ямар ч хэвтээ шулуун нь зүүн талд хамгийн ихдээ  $m-1$  тооны, мөн баруун талд хамгийн ихдээ  $m-1$  тооны тэгш өнцөгтийг огтолно. Иймд энэ тохиолдолд

$$r \leq r+s \leq R(m-1, n) + R(m-1, n-1) + 1$$

гэсэн тэнцэл биелнэ.



зураг 3

(1-b). Одоо  $B$  нь  $l$  шулууныг огтолдог гэж үзье (зураг 3). Тэгвэл  $l$  шулууны зүүн талд байгаа  $A$ -гаас бусад тэгш өнцөгтүүд  $(m-1, n)$  нөхцлийг хангах бөгөөд харин баруун талд байгаа  $B$ -ээс (үнэндээ  $B$ -ийн баруун талд байгаа хэсгээс) бусад тэгш өнцөгтүүд  $(m-1, n-1)$ -нөхцлийг хангана. Иймд энэ тохиолдолд

$$r \leq r+s \leq R(m-1, n) + R(m-1, n-1) + 2$$

болж байна.

(2-р тохиолдол). Урт нь өгөгдсөн квадратын талын урттай тэнцүү  $t$  ширхэг хуваалтын тэгш өнцөгт олддог болог. Тэгвэл тэдгээр тэгш өнцөгтийг квадратаас арчиад, үлдэх тэгш өнцөгтүүдийг хооронд нь уртаар нь наахад үүсэх тэгш өнцөгтийн хуваалт нь  $(m, n-t)$  нөхцлийг хангана. Үнэхээр  $t$  ширхэг хэвтээ тэгш өнцөгтийг арчсан учир ямар ч босоо шулуун нь  $n-t$ -ээс хэтрэхгүй тооны хуваалтын тэгш өнцөгтийг

огтголно. Тэгэхлээр өмнөх тохиолдолоос

$$r \leq R(m, n-t) + t \leq R(m-1, n-t) + R(m-1, n-t-1) + t + 2$$

гэж гарах ба  $R(m, n-t) \leq R(m-1, n-t+1) - 1$  гэсэн илэрхий тэнцэл бишийг тооцвол энэ тохиолдолд бас манай тэнцэл биш биелэх болно.

Эцэст нь,  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  бол ямар ч  $m, n > 1$ -ийн хувьд  $R(m, n) < \alpha^{m+n} - 2$  тэнцэл биш биелнэ гэдгийг баталъя.  $m$ -ээр индукцлээ.

Үнэхээр  $R(1, n) = n < \alpha^{n+1} - 2$  тул индукцийн эхний алхам биелэх бөгөөд  $\alpha^2 = \alpha + 1$  тул

$$R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m-1, n-1) + 2 < \alpha^{m+n-1} + \alpha^{m+n-2} - 2 = \alpha^{m+n-1} - 2$$

болж индукцийн шилжилт батлагдана. Одоо  $\alpha^2 < 3$  болохыг тооцвол

$$R(n, n) < \alpha^{2n} - 2 < \alpha^{2n} < 3^n$$

гэж батлах зүйл батлагдана.

## ММО-37, Дундын багшийн IV даваа

Б.Батцэнгэл.

ДБ-А1 (Б.Батцэнгэл). Натурал тоо  $n$  өгөгдөв.

$$P(x) \cdot P(4-x) = P(x(4-x))$$

байх  $n$  зэргийн  $n$  ширхэг ялгаатай бодит язгууртай  $P(x)$  олон гишүүнт олдоно гэж харуул!

ДБ-А2 (Б.Баяржаргал).  $b_1, \dots, b_n \geq 0$  тоонуудын хувьд

$$a_1 = \frac{b_1}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \text{ ба } r > 1 \text{ үед } a_r = \frac{b_1 + \dots + b_r}{b_1 + \dots + b_{r-1}} \text{ гэж тэмдэглэе.}$$

$$a_1 + \dots + a_n \leq \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \text{ тэнцэл биш биелнэ гэдгийг батал.}$$

ДБ-А3 (Ш.Батхишиг)  $r \geq 0$  бүхэл тоо өгөгдөв.

$$(1) d | m^{2^r} - 1$$

$$(2) m | n^d + 1$$

нөхцлүүд биелдэг натурал  $n, d$  тоо, сондгой  $m > 1$  тоонууд олддог байвал

$$\frac{m^{2^r} - 1}{d} \text{-ийн авч болох бүх утгуудыг ол.}$$

ДБ-В1 (Б.Батцэнгэл, Г.Баярмагнай):  $2n \times 2n$  хэмжээтэй хүснэгтийн зарим нүдийг тэмдэглэхдээ, хүснэгтийн нүд бүр тэгш тооны тэмдэглэгдсэн нүдтэй хөрш байхаар гүйцэтгэх боломжийн тоог ол (Ерөнхий талтай нүдийг хөрш гэж тооцно).

**ДБ-В2(Г.Баярмагнай).**  $\omega$  тойргийн  $AC, BD$  хөвчүүд  $E$  цэгт огтлолцоно.  $DE, EC$  хэрчмүүд ба  $\omega$  тойргийг  $F$  цэгт шүргэх тойргийг татав.  $AFB$  өнцгийн биссектрис нь  $AEB$  гурвалжинд багтсан тойргийн төвийг дайрна гэж батал.

**ДБ-В3(Ж.Батболд).**  $n$  тоглогч тойргоор теннис тогложээ. Тэмцээний дүн гарахад  $i$ -р тоглогч  $r_i$  оноотой болсон бөгөөд  $r_1 \leq r_2 \leq \dots r_n$  байв. Тоглогч өөрөөсөө багагүй оноо авсан тоглогчийг хожсон бол тэдгээрийн хоорондох тоглолтыг "буруу" тоглолт гэж нэрлэе.

$I = \{i | r_i \geq i\}$  гэвэл бүх буруу тоглолтын тоо хамгийн багадаа  $\sum_{i \in I} (r_i - i + 1)$  гэж батал.

**ДБ-А1.**  $I$  бодолт.  $P(x) = (x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_n)$  гэж үзье. Тэгвэл  $P(4 - x) = (4 - x - a_1) \cdot \dots \cdot (4 - x - a_n)$  болох бөгөөд ямар ч  $a$  тооны хувьд  $(x - a)(4 - x - a) = x(4 - x) - (4a - a^2)$  байх тул, хэрэв  $a_1, \dots, a_n$  язгуурууд нь

$$\begin{cases} 4a_1 - a_1^2 = a_2 \\ 4a_2 - a_2^2 = a_3 \\ \dots\dots\dots \\ 4a_{n-1} - a_{n-1}^2 = a_n \\ 4a_n - a_n^2 = a_1 \end{cases} \quad (*)$$

систем тэгшитгэлийг хангах ялгаатай тоонууд бол  $P(x)$  олон гишүүнт нь бодлогын нөхцлийг хангах ёстой.

$a = 4 \sin^2 t$  бол  $4a - a^2 = a(4 - a) = 4 \sin^2 t \cdot 4 \cos^2 t = 4 \sin^2(2t)$  болох учраас  $a_1 = 4 \sin^2 t$  гэж орлуулбал системийн эхний  $n - 1$  шүрхэг тэгшитгэлээс

$$a_2 = 4 \sin^2(2t), a_3 = 4 \sin^2(4t), \dots, a_n = 4 \sin^2(2^{n-1}t)$$

гэж мөрдөх ба  $n$ -р тэгшитгэлээс  $\sin^2(2^n t) = \sin^2 t$  гэж гарна.

Энэ тэгшитгэлийн нэг шийд нь  $t = \frac{\pi}{2^n + 1}$  бөгөөд энэ утгын хувьд

$t, 2t, \dots, 2^{n-1}t \in (0, \frac{\pi}{2})$  тул  $a_1, \dots, a_n$  нь бүгд ялгаатай тоонууд байна.

Тодруулбал,  $a_1 < \dots < a_n$  байна. Үүгээр

$$P(x) = (x - 4 \sin^2 \frac{\pi}{2^n + 1})(x - 4 \sin^2 \frac{2\pi}{2^n + 1}) \cdot \dots \cdot (x - 4 \sin^2 \frac{2^{n-1}\pi}{2^n + 1})$$

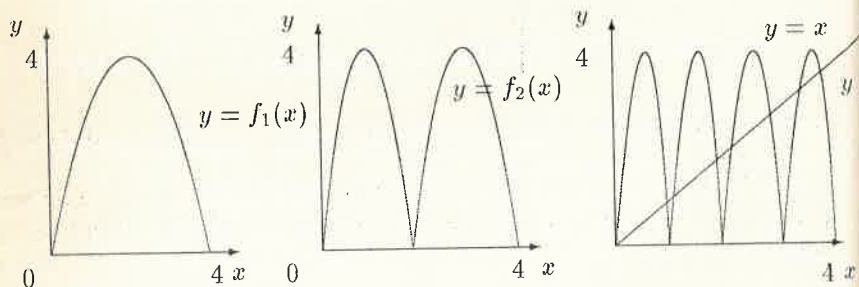
гэсэн  $n$  зэргийн олон гишүүнт нь бодлогын нөхцлийг хангана гэдэг нь батлагдав.

II бодолт. (\*) систем тэгшитгэл нь ялгаатай  $a_1, \dots, a_n$  гэсэн шийдтэй гэдгийг Увс аймгийн багш Р.Одгэрэлийн бодолтоор толилуулая.

$$f(x) = 4x - x^2 \text{ ба}$$

$$f_k(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x))\dots)}_{k \text{ ширхэг}}$$

гэвэл  $a_2 = f_1(a_1), a_3 = f_2(a_1), \dots, a_n = f_{n-1}(a_1)$  бөгөөд  $f_n(a_1) = a_1$  болно.  $f: [0, 4] \rightarrow [0, 4]$  гэдгийг ашиглавал  $y = f_k(x)$  функцийн график нь  $[0, 4]$  хэрчимд зурагт үзүүлсэн байдалтай байна гэдгийг ажиглаж болно. Эндээс  $f_n(x) = x$  тэгшитгэл нь  $[0, 4]$  хэрчимд яг  $2^n$  ширхэг шийдтэй гэдгийг үзүүлэхэд төвөггүй. Тэр шийдүүдээс 0-д хамгийн ойрхон (мөн 4-д хамгийн ойрхон) нь сонгон авсан ч болно)



шийд болох  $a_1$ -г сонгон авбал  $a_2 = f_1(a_1), a_3 = f_2(a_1), \dots, a_n = f_{n-1}(a_1)$  нь бүгд ялгаатай байх нь ойлгомжтой. Учир нь  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  байна.

ДБ-А2.  $0 \neq b_1 = x_1, b_1 + b_2 = x_2, \dots, b_1 + b_2 + \dots + b_n = x_n$  гэвэл  $x_n \geq x_{n-1} \geq \dots \geq x_1 > 0$  болно.

Батлах зүйл маань  $\frac{x_1}{x_n} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \dots + \frac{x_n}{x_{n-1}} \leq \frac{x_n}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n}$

болох ба  $A_n = \frac{x_n}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} - \frac{x_1}{x_n} - \frac{x_2}{x_1} - \dots - \frac{x_n}{x_{n-1}} \geq 0$  болохыг батлах

бодлого болов. Үүнийг  $n$ -ээр индукцлэе.

$$n = 3 \text{ үед } \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} - \frac{x_1}{x_3} - \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_3}{x_2} = \frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)}{x_1 x_2 x_3} \geq 0$$

болж батлагдав ( $x_3 \geq x_2 \geq x_1$  учир).

$n = k$  үед  $A_k = \frac{x_k}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \dots + \frac{x_{k-1}}{x_k} - \frac{x_1}{x_k} - \frac{x_2}{x_1} - \dots - \frac{x_k}{x_{k-1}} \geq 0$  үнэн гэж үзье.

$n = k + 1$  үед

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= \frac{x_{k+1}}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \dots + \frac{x_{k-1}}{x_k} + \frac{x_k}{x_{k+1}} - \frac{x_1}{x_{k+1}} - \frac{x_2}{x_1} - \dots - \frac{x_k}{x_{k-1}} - \frac{x_{k+1}}{x_k} = \\ &= \frac{x_1}{x_2} + \dots + \frac{x_{k-1}}{x_k} + \frac{x_k}{x_1} - \frac{x_k}{x_1} + \frac{x_{k+1}}{x_1} + \frac{x_k}{x_{k+1}} - \frac{x_2}{x_1} - \dots - \frac{x_k}{x_{k-1}} - \frac{x_1}{x_k} + \frac{x_1}{x_k} - \frac{x_1}{x_{k+1}} - \frac{x_{k+1}}{x_k} = \\ &= \left( \frac{x_k}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \dots + \frac{x_{k-1}}{x_k} - \frac{x_1}{x_k} - \frac{x_2}{x_1} - \dots - \frac{x_k}{x_{k-1}} \right) - \frac{x_k}{x_1} + \frac{x_{k+1}}{x_1} + \frac{x_k}{x_{k+1}} + \frac{x_1}{x_k} - \frac{x_1}{x_{k+1}} - \frac{x_{k+1}}{x_k} = \\ &= A_k + \frac{x_{k+1}}{x_1} + \frac{x_1}{x_k} + \frac{x_k}{x_{k+1}} - \frac{x_1}{x_{k+1}} - \frac{x_k}{x_1} - \frac{x_{k+1}}{x_k} = \\ &= A_k + \frac{(x_{k+1} - x_k)(x_k - x_1)(x_{k+1} - x_1)}{x_1 x_k x_{k+1}} \geq 0 \end{aligned}$$

болж батлагдав. (Энд  $A_k \geq 0, x_{k+1} \geq x_k \geq x_1$  учир)

Тэнцэх нөхцөл нь  $n = 3$  үед  $x_1 = x_2$  эсвэл  $x_1 = x_2 = x_3$

$n = k$  үед  $x_1 = x_2 = \dots = x_k$  гэсэн нөхцөлтэй байсан бол

а) нөхцөл нэмэхгүй буюу  $x_{k+1}$  нь дурын тоо байж болно.

б)  $x_1 = x_2 = \dots = x_{k+1}$  гэсэн нөхцөлтэй байж болно.

$n = k$  үед өөр нөхцөлтэй бол  $x_k = x_{k+1}$  гэсэн нөхцөл нэмэгдэнэ.

**ДБ-А3.** Энэ бодлогыг бодсон багш үгүй тул зохиогчийн бодолтыг толилуулая. Цаашид  $a = \frac{m^{2^k} - 1}{d}$  гэж тэмдэглэе.  $2^{k+1}$  гэсэн 2-ын зэрэгтэд хуваагддаг бүх натурал тоонуудын олонлогийг  $A$  гэж тэмдэглэе. Одоо бодлогод асуусан  $a$  илэрхийлэлийн авч болох бүх утгын олонлог нь  $A$  олонлог гэдгийг харуулая.

**Өгүүлбэр.** Ямар ч сондгой  $m$  тооны хувьд  $2^k \mid \frac{m^{2^k} - 1}{m - 1}$  байх бөгөөд хэрэв

$m \equiv 1 \pmod{4}$  бол  $\frac{m^{2^k} - 1}{m - 1}$  тоог хуваах 2-ын хамгийн их зэрэг нь яг  $k$  байна.

**Баталгаа.**  $\frac{m^{2^k} - 1}{m - 1} = (m + 1)(m^2 + 1)(m^4 + 1) \cdot \dots \cdot (m^{2^{k-1}} + 1)$  гэдгээс өгүүлбэрийн эхний хэсэг шууд гарна. Хэрэв  $m \equiv 1 \pmod{4}$  бол  $i (0 \leq i \leq k - 1)$  бүрийн хувьд  $m^{2^i} + 1 \equiv 2 \pmod{4}$  байх тул дээрхи адилтгалаас өгүүлбэрийн 2 дахь хэсэг нь нь бас мөрдөн гарна.

Эхлээд  $A$  олонлогийн тоо бүр нь  $a$  илэрхийлэлийн утга болж чадна гэдгийг үзүүлэе. Дараахь 2 тохиолдолд салган авч үзье.

*I тохиолдол.*  $2^{k+2} | a$  буюу хэрэв  $a = 2^{k+s} a_1$  ( $a_1$  сондгой) бол  $s \geq 2$  болог. Энэ тохиолдолд  $m = 2^s a_1 + 1$  ба  $n = m - 1$  гэж сонговол  $m, n$  нь бодлогын нөхцлийг хангана. Үнэхээр  $s \geq 2$  тул  $m \equiv 1 \pmod{4}$  байх бөгөөд өмнөх өгүүлбэр ёсоор  $d = \frac{m^{2^k}}{a} = \frac{m^{2^k} - 1}{2^{k+s} a_1} = \frac{m^{2^k} - 1}{2^k (m-1)}$  тоо нь сондгой натурал тоо байна. Цаашилбал,  $n^d + 1 = (m-1)^d + 1 \equiv (-1)^d + 1 \equiv 0 \pmod{m}$  болж бодлогын (2) шаардлага биелэв.

*II тохиолдол.*  $a = 2^{k+1} a_1$  ( $a_1$  сондгой) болог. Энэ тохиолдолд  $m = 4a_1^2 + 1$  ба  $n = 2a_1$  гэж сонговол  $m, n$  нь бодлогын нөхцлийг хангана. Үнэхээр бидний сонголт ёсоор  $m \equiv 1 \pmod{4}$  байх бөгөөд өмнөх өгүүлбэрээс  $d = \frac{m^{2^k} - 1}{a} = \frac{m^{2^k} - 1}{2^{k+1} a_1} = \frac{m^{2^k} - 1}{2^{k-1} (m-1)} \cdot a_1$  тоо нь  $2d_1$  ( $d_1$  сондгой) хэлбэрийн тэгш натурал тоо байна гэж гарна. Эндээс  $n^d + 1 = (2a_1)^d + 1 = (4a_1^2)^{d_1} + 1 = (m-1)^{d_1} + 1 \equiv (-1)^{d_1} + 1 \equiv 0 \pmod{m}$  болж бодлогын (2) шаардлага биелнэ.

Одоо  $a = 2^s a_1$  ( $a_1$ -сондгой) тоо нь ямар ч  $s$  ( $0 \leq s \leq k$ )-ийн хувьд бодлогын шаардлагыг хангаж чадахгүй гэдгийг баталж харуулая. Эсрэгээс нь  $a$  тооны хувьд (1), (2) шаардлагыг хангадаг  $m, d, n$  тоонууд олддог гэж үзье.  $m | n^d + 1$  тул  $(m, n) = 1$  байна.  $m$  сондгой тооны анхны тоон үржигдэхүүний задаргаа нь  $m = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_l^{\alpha_l}$  бөгөөд сондгой  $b_1, \dots, b_l$  тоонуудын хувьд

$p_1 = 2^{\beta_1} b_1 + 1, \dots, p_l = 2^{\beta_l} b_l + 1$  болог. (ө.х.,  $\beta_i$  нь  $p_i - 1$  тэгш тоог хуваах хамгийн их зэрэг болог).  $\beta_1 = \min_{1 \leq i \leq l} \beta_i$  гэж үзье.

$m | n^d + 1$  гэдгээс  $n^d \equiv -1 \pmod{p_1}$  болох бөгөөд  $b_1$  нь сондгой тоо тул эндээс  $n^{d \cdot b_1} \equiv -1 \pmod{p_1}$  гэж гарна.

$m = (2^{\beta_1} b_1 + 1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (2^{\beta_l} b_l + 1)^{\alpha_l}$  илэрхийлэлд байгаа үржигдэхүүнүүдийг бүгдийг бином томъёогоор задлавал,  $2^{\beta_1} | m - 1$  болох нь мөрдөнө.  $m$

сондгой тул өгүүлбэрийн эхний хэсгээр  $2^k | \frac{m^{2^k} - 1}{m - 1}$  байх бөгөөд учир

эндээс  $2^s | \frac{m^{2^k} - 1}{m - 1}$  гэж мөрдөнө.  $2^{\beta_1} | m - 1$  гэдгийг анхаарвал эндээс

$2^{\beta_1+s} | m^{2^k} - 1$  болно. Одоо

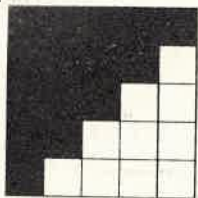
$$n^{d \cdot b_1} = n^{\frac{m^{2^k} - 1}{2^s a_1}} b_1 = n^{\frac{m^{2^k} - 1}{2^{\beta_1+s} a_1}} \cdot 2^{\beta_1} b_1 = (n^{\frac{m^{2^k} - 1}{2^{\beta_1+s} a_1}})^{p_1-1}$$

гэж бичиж болох бөгөөд нэгэнт  $(n, p_1) = 1$  тул фермагийн бага теоремоор

$$\left(n^{\frac{m^2 k - 1}{2^{B_1 + s_{A_1}}}}\right)^{p_1 - 1} \equiv 1 \pmod{p_1}$$

байна. Энэ нь өмнө харуулсан  $n^{d \cdot b_1} \equiv -1 \pmod{p_1}$  гэдэгт зөрчиж бодлого бодогдов.

**ДБ-В1.** Хүснэгтийн эхний мөрийг дурын байдлаар будахад бодлого дурдсан байдлаар хүснэгтээ 1 утгатай гүйцээж будаж болохыг үзүүлье. Хүснэгтийн  $i$ -р мөр  $j$ -р баганын элементүүдийг  $a_{ij}$  гэе. Одоо 1-р мөрийг дурын байдлаар будая.  $a_{11}$  ба  $a_{12}$  нүдний будалтаас хамаарч  $a_{21}$  нүд 1 утгатай будагдана.  $a_{11}, a_{12}, a_{13}$ -аас хамаарч  $a_{22}$  нүд мөн 1 утгатай будагдана.

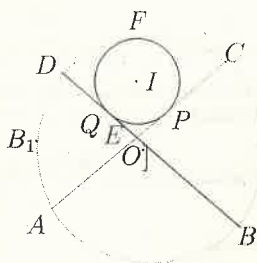


Иймд зурагт үзүүлсэн будагдсан хэсгийг 1 утгатайгаар бөглөж чадна.  $a_{1n}$ -нүдний хөрш болох  $a_{1n-1}$  ба  $a_{2n}$  нүд ижил өнгийн байна. Иймээс  $a_{2n-1}$  нүдний хөрш болох  $a_{2n-2}$  ба  $a_{3n-1}$  нүд ижил өнгийн гэх мэтээр  $(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn})$  диагнолийн хувьд хүснэгт маань тэгш хэмтэйгээр будагдана.

Үүгээр 1-р мөрөөр хүснэгт нэг утгатай тодорхойлогдох нь батлагдав. Иймд нийт боломж  $n \times n$  хүснэгтийн хувьд  $2^n$  болох нь батлагдав.

Хариу: 4

### ДБ-В2.



Шинэ үүссэн тойргийг  $\omega_1$ , төвийг нь  $O$ , радиусыг нь  $r$ ,  $AC$  ба  $BD$  хэрчмүүд  $\omega_1$  тойргийг  $P$  ба  $Q$  цэгт шүргэсэн гэе.  $AA_1$  ба  $BB_1$  нь  $AEB$  гурвалжны биссектрис байг.  $AB$  нумын дундаж цэгийг  $C_1$ ,  $\omega$  тойргийн төвийг  $O$  радиусыг  $R$  гэе.  $AA_1, BB_1, FC_1$  шулуунууд нэг цэгт огтлолцох  $\Leftrightarrow$

$$\frac{FA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1F} = 1$$

Иймд  $\frac{FA_1}{A_1B} \cdot \frac{AB_1}{B_1F} = 1$  болохыг баталбал хангалттай.

$F, C, A_1, B$  цэгүүдийн хувьд Птолмейн теорем ашиглавал  $\frac{FA_1}{A_1B} = \frac{FC+FB}{BC}$  болно. Үүнтэй адилаар  $\frac{FB_1}{B_1A} = \frac{FD+FA}{AD}$  болно. Иймд

$$(1) \quad \frac{FC+FB}{BC} = \frac{FD+FA}{AD}$$

болохыг үзүүлье.  $FCO$  гурвалжны хувьд Стюартын теорем бичвэл

$$CI^2 = CF^2 \cdot \frac{R-r}{R} + R^2 \cdot \frac{r}{R} - r \cdot (R-r) \Rightarrow CF^2(R-r)R = (CI^2 - r^2) = R \cdot CP^2$$

болно. Үүнтэй адилаар  $BF^2 \cdot (R-r) = R \cdot BQ^2 \Rightarrow$   
 $FC + FB = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{R-r}}(BQ + CP) = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{R-r}}(CE + EB)$  болно.

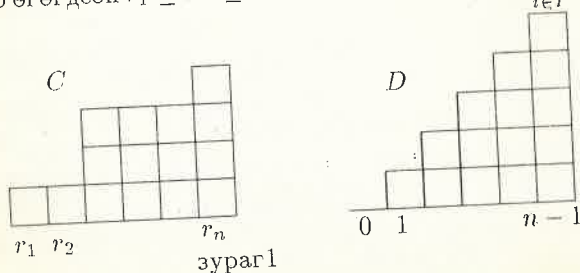
Үүнтэй адилаар  $FD + FA = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{R-r}}(DE + AE)$  болно.  $\triangle ADE \sim \triangle BCE$   
 болохыг анхаарвал (1) батлагдана. Үүгээр бодлого бодогдов.

**ДБ-В3.** Энэ бодлого экстремал бодлого байсан бөгөөд эхлээд ямар ч тохиолдолд буруу тоглолтын тоо нь  $\sum_{i \in I} (r_i - i + 1)$ -ээс багагүй байна гэдгийг харуулж, дараа нь тэр нь хамгийн бага утгадаа хүрч чадна гэдгийг харуулах ёстой байв.  $i(1 \leq i \leq n)$ -р тоглогч өөрөөсөө их дугаартай тоглогчийг хожсон тоглолтын тоог, ө.х.,  $i$ -р тоглогчийн хожсон буруу тоглолтын тоог тэмдэглэе. Тэгвэл хэрэв  $r_i \geq i$  буюу  $i \in I$  бол  $a_i \geq r_i - (i - 1)$  байна. Үнэхээр  $i$ -р тоглогчийн нийт хожилын тоо  $r_i$  бөгөөд түүнээс бага дугаартай тоглогчийн тоо нь  $i - 1$  учир тэрээр дор хаяж  $r_i - (i - 1)$  хожилыг өөрөөсөө их дугаартай тоглогчдоос авах ёстой. Иймд нийт буруу тоглолтын тоо нь

$$\sum_{i=1}^n a_i \geq \sum_{i \in I} a_i \geq \sum_{i \in I} (r_i - i + 1)$$

болж бодлогын эхний хэсэг бодогдов. Харьцангуй хөнгөн энэ хэсгийг олимпиадад оролцсон олон багш зөв бодсон боловч, харамсалтай нь тэр хамгийн бага утгадаа хүрч чадна гэдгийг ганц ч багш бүрэн зөв бодож чадаагүй байлаа.

Одоо өгөгдсөн  $r_1 \leq \dots \leq r_n$  тоонуудын хувьд яг  $\sum_{i \in I} (r_i - i + 1)$  ширхэг



зураг 1

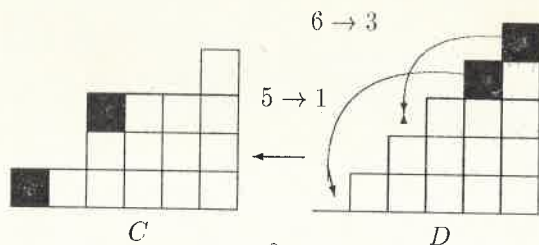
буруу

тоглолттой тэмцээн олодоно гэдгийг харуулая. Дөрвөлжин шугамтай

цаас аваад эхний баганад  $r_1$  ширхэг нүд дараагийн баганад  $r_2$  ширхэг, ...,  $n$ -р баганад  $r_n$  ширхэг нүд байрлуулан  $C$  диаграммыг зураа. Мөн  $D$  диаграммыг эхний баганад 0 ширхэг нүд, дараагийн баганад 1 ширхэг, ...,  $n$ -р баганад  $n-1$  ширхэг нүд байрлуулж зураа. (зураг)

Салхи баруун талаас салхилж "нүд нурах" үйлдлийн тусламжтайгаар,  $B = (\beta_1 \leq \dots \leq \beta_n)$  диаграммаас  $A = (\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n)$  диаграммд шилжиж чадах нөхцөл нь

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \geq \beta_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \geq \beta_1 + \beta_2 \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_i \geq \beta_1 + \dots + \beta_i \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} \geq \beta_1 + \dots + \beta_{n-1} \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \dots + \beta_n \end{array} \right. \quad (*)$$



зураг 2

байх явдал гэдгийг харуулахад хялбархан (УМО-д бэлтгэгчдэд тусламж 16,59-60-р хуудас 14-р бодлогыг үз).  $1 \leq i \leq n$  бол  $1, 2, \dots, i$  дугаартай тоглогчид зөвхөн хоорондох тоглогчид ороо  $i(i-1)/2$  оноог хувааж авах учраас  $r_1 + \dots + r_i \geq i(i-1)/2$  байх ёстой нь ойлгомжтой. Мөн  $r_1 + \dots + r_n = n(n-1)/2$  байх нь илэрхий. Иймд (\*) нөхцөл хангагдаж,  $D$  диаграммаас  $C$  диаграмм нь нүд нурж үүссэн байна (зураг 2).

$j(j > i)$ -р баганы нүд нурж  $i$ -р баганад шилжсэнийг  $j \rightarrow i$  гэж тэмдэглэе.  $D$ -ээс  $C$ -д шилжихэд нурсал бүх нуралтууд нь  $j_1 \Rightarrow i_1, j_2 \Rightarrow i_2, \dots, j_m \Rightarrow i_m$  болог.

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
|   | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 |   | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 |   | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |   | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |   | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |   |

зураг 3

нь яг  $m$  ширхэг буруу тоглолттой бөгөөд тоглогчдын оноо нь  $r_1, \dots, r_n$  байдаг тэмцээн болно.

Тэгвэл  $m = \sum_{i \in I} (r_i - i + 1)$  байх нь ойлгомжтой.

Үнэхээр зөвхөн  $i \in I$  үед л  $C$ -ийн  $i$ -р баганад  $D$ -ийн  $i$ -р баганаас олон нүд (тийм нүднүүд л нурж үүссэн байх боломжтой) бөгөөд тийм нүдний тоо нь яг  $r_i - (i - 1)$  юм. Одоо  $k (1 \geq k \geq m)$  бүрийн хувьд  $i_k$ -р тоглогч  $j_k$ -р тоглогчийг хожсон гэж үзээд харин бусад тоглолтуудыг их дугаартай тоглогч нь хожсон гэж үзэн тэмцээнийг зохиовол (зураг 3) тэр тэмцээн

## МОНГОЛЫН ОЮУТНЫ МАТЕМАТИКИЙН Х ОЛИМПИАД

В.Адъяасүрэн.

а) Эцнээ давааны бодлогууд

1. Дурын бүхэл  $n$  тооны хувьд  $n^{3pq} \equiv n \pmod{3pq}$  жишлэг биелэх бүх  $p, q$  анхны тоонуудыг ол.
2.  $k (k \geq 2)$  нь натурал тоо,  $a_1, a_2, \dots, a_k$  нь бодит тоонууд болог.  $\{x_n\}$  дараалал нь  $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_k = a_k$  бөгөөд  $n \geq 1$  үед

$$k \cdot x_{n+k} = x_{n+k-1} + x_{n+k-2} + \dots + x_n$$

рекуррент томъёогоор өгөгджээ.  $\{x_n\}$  дараалал төгсгөлөг хязгаартай болохыг баталж, хязгаарыг нь ол.

3. Хавтгай дээр ялгаатай  $p_1, p_2, \dots, p_n$  цэгүүд өгөгджээ.  $i \leq j$  үед  $a_{ij} = |p_i p_j|$  бөгөөд  $i > j$  үед  $a_{ij} = -a_{ji}$  гэж  $A = (a_{ij})$ ;  $1 \leq i, j \leq n$  косоcимметр матрицыг зохиов. Хэрэв  $p_1, p_2, \dots, p_n$  цэгүүд нэг тойрог дээр оршдог бол  $\text{rank}(A) = 2$  байна гэдгийг батал. Урвуу өгүүлбэр нь хэдийд биелэх вэ?

4. Ижил эрэмбийн квадрат  $A, B$  матрицуудын хувьд  $AB, BA$  матрицын характеристик олон гишүүнт нь тэнцүү байна гэдгийг батал.
5.  $k$  талбарт коэффициентэй нэг хувьсагчийн олон гишүүнтүүдийн  $k[x]$  олонлогийг  $k$ -шугаман огторгуй болгон авч үзье. Тэгвэл  $k[x]$ -ийн бүх шугаман функционалиудын огторгуй нь

$$k[[x]] = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n x^n \mid a_n \in k \right\}$$

гэсэн формал цуваануудын  $k$ -шугаман огторгуйтай изоморф гэж батал.

6.  $L$  нь  $C^0(\mathbf{R})$  буюу бүх тасралтгүй  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  функцүүдийн шугаман огторгуй болог. Тэгвэл

$$L \rightarrow L$$

$$\varphi: f(x) \rightarrow \int_0^x f(t)dt - f(x)$$

буулгалт нь харилцан нэгэн утгатай шугаман буулгалт гэдгийг баталж, түүнд хувийн утга болон хувийн вектор байхгүй болохыг харуул.

7.  $a_{ij} \geq 0$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) тоонууд нь дурын  $s, t$ -ийн

хувьд  $\sum_{j=1}^n a_{sj} = \sum_{i=1}^n a_{it} = 1$  байх тоонууд болог.

Тэгвэл дурын  $x_1 \geq \dots \geq x_n \geq 0$  ба  $y_1 \geq \dots \geq y_n \geq 0$  тоонуудын хувьд

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j \leq \sum_i x_i y_i$$

тэнцэл биш биелэнэ гэдгийг харуул.

8. (i)  $a_{ij} \geq 0$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ),

(ii) дурын  $s, t$ -ийн хувьд  $\sum_{j=1}^n a_{sj} = \sum_{i=1}^n a_{it} = 1$  байна

гэсэн чанаруудыг хангах бүх  $A = (a_{ij})$  матрицууд нь  $M_{n \times n}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^{n^2}$  огторгуйд гүдгэр олон талст үүсгэнэ гэдгийг харуул. Тэр олон талстын оройнууд буюу 0-эсүүдийг ол. Цаашилбал, түүний 1-эс, 2-эс, ...,  $k$ -эсүүдийг олж болох уу?

9. а) Өгөгдсөн  $\Gamma$  эллипс дээрээс  $A, B, C, D, E, F$  зургаан цэгийг сонгон аваад

$$(AB) \cap (CD) = P, (CD) \cap (EF) = Q, (EF) \cap (AB) = R$$

гэж тэмдэглэе. Хэрэв  $CP = DQ$  ба  $EQ = FR$  бол  $AR = BP$  байна гэж батал.

б)  $\Gamma$  нь парабол эсвэл гиперболын нэг мөчир байх үед мөн дээрхи бодлогыг бод.

10. а)  $\Gamma$  эллипс дээрээс  $(AB), (CD), (EF)$  шулуунууд нь  $M$  цэгт огтлолцдог  $A, B, C, D, E, F$  зургаан цэгийг сонгон аваад

$(AB) \cap (CE) = P, (AB) \cap (DF) = Q$  гэж тэмдэглэе. Хэрэв  $MP = MQ$  бол  $MA = MB$  байна гэдгийг батал.

б)  $\Gamma$  нь парабол эсвэл гиперболын нэг мөчир байх үед мөн дээрхи бодлогыг бод.

11.  $f(x) = \int_x^{x+1} \sin t^2 dt$  ( $x > 0$ ) бол  $|f(x)| < \frac{1}{x}$  болохыг үзүүлж,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x)$ -ийг ол.

12.  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  функц 2 удаа дифференциалчлагдах бөгөөд дурын  $x \in (0, +\infty)$ -ийн хувьд  $|f''(x)| \leq M < \infty$  бөгөөд  $x \rightarrow +\infty$  үед  $f(x) \rightarrow 0$  нөхцлийг хангах бол  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)dx = 0$  гэж батал.

13.  $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2) \ln(1+9x^2)}{x^4} dx$  интегралыг тооцоол.

14.  $t(n)$ -ээр  $n$  ( $n > 1$ ) натурал тоо нэгээс их хуваагчдынхаа үржвэрт задрах боломжийн тоог тэмдэглэе. Жишээ нь,  $12 = 6 \cdot 2 = 4 \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot 2$  учраас  $t(12) = 4$  юм.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{t(n)}{n^2}$$

нийлбэрийг ол.

15. Хавтгай дээр уртуудын нийлбэр нь 1 байх төгсгөлөг ширхэг вектор өгөгдөв. Тэдгээрийг 3 бүлэгт (хоосон байж болно), бүлэг тус бүр дэх векторуудын нийлбэр векторын урт нь нийлбэртээ  $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ -ээс багагүй байхаар хувааж болно гэж батал.

16.  $\inf_{x_k > 0} \left\{ \sum_{k=1}^7 \frac{x_k}{x_{k+2} + x_{k+3}} \right\}$  инфемумыг ол. Энд,  $x_{k+7} = x_k$ .

17.  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  ба  $m, n$  нь сөрөг биш бүхэл тоонууд бол

$$\int_0^{\infty} \frac{d^m}{dx^m} f(x) \frac{d^n}{dx^n} f(x) dx$$

интегралыг тооцоол.

18.  $f \in C^0[0, 1]$  ба  $Q = [0, 1]^n$  бол

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q f(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

хязгаарыг ол.

19. Хавтгай дээр  $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$  шулуунууд өгөгдөв.

$r_{ij} = p_i \cap q_j$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) цэгүүд нь бүгд ялгаатай болог.

Хэрэв  $i + j < n + 3$  байх  $r_{ij}$  цэгүүд нь  $n$  зэргийн  $\gamma$  муруй дээр оршдог

бол бүх  $r_{ij}$  цэгүүд нь  $\gamma$  муруй дээр оршино гэдгийг батал.

20.  $l_1, \dots, l_8$  талуудтай найман өнцөгт тойрогт багтжээ.

$j - i \equiv 3 \pmod{8}$  байх  $(i, j)$  хосуудын хувьд  $l_i, l_j$  шулууны огтлолцлын цэгүүд (нийт найман цэг) нь ямар нэгэн эллипс дээр оршино гэдгийг батал. Хэдийд тэр эллипс нь тойрог байх вэ?

### Зарим бодлогуудын бодолт.

1.  $p \leq q$  гэж үзэхэд явцуурахгүй. Нэг талаас  $2^{3pq} \equiv 2 \pmod{3}$  гэдгээс  $p$  ба  $q$  хоёул сондгой гэж гарна. Нөгөө талаас  $\alpha$  нь  $p$ -модулийн примитив язгуур бол  $\alpha^{3pq-1} \equiv 1 \pmod{p}$  гэдгээс  $p-1 \mid 3pq-1$  гэж гарах ба  $3pq-1-3q(p-1)=3q-1$  тул  $p-1 \mid 3q-1$  гэж батлагдана. Үүнтэй адилаар  $q-1 \mid 3p-1$  гэж гарна. Хэрэв  $p=q$  байвал  $p=q=3$  гэж гарна. Гэвч  $4^{27} \equiv 1 \pmod{27}$ . Энэ нь бодлогын нөхцөлд зөрчинө. Иймд  $p < q$ ,  $p$

ба  $q$  сондгой анхны тоо учраас  $q \geq p+2$ . Иймээс  $1 < \frac{3p-1}{q-1} \leq \frac{3p-1}{p+2-1} = \frac{3p-1}{p+1} < 3$ . Гэвч  $\frac{3p-1}{q-1} \in \mathbb{Z}$  учраас  $\frac{3p-1}{q-1} = 2$  буюу  $2q = 3p+1$

Харин  $p-1 \mid 3q-1 = \frac{9p+1}{2}$  ба  $(9p+1) - 9(p-1) = 10$

Иймээс  $p=11, q=17$  гэж гарна. Эдгээр тоо бодлогын нөхцөлийг хангана гэдгийг үнэмшихэд төвөггүй.

2.  $kx_{n+k} = x_n + x_{n+1} + \dots + x_{n+k-1} \Leftrightarrow$   
 $kx_{n+k} + (k-1)x_{n+k-1} + \dots + x_{n+1} = kx_{n+k-1} + (k-1)x_{n+k-2} + \dots + 2x_{n+1} + x_n = \dots =$

$= kx_k + (k-1)x_{k-1} + \dots + 2x_2 + x_1 = ka_k + (k-1)a_{k-1} + \dots + 2a_2 + a_1$

$b_n = \max(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}), c_n = \min(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k})$  гэе.

$\forall n \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд  $b_{n+1} \leq b_n, c_{n+1} \geq c_n$  гэдгийг төвөггүй баталж болно.

Ийнхүү  $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$

$d_n = b_n - c_n, n \geq 1$  гэе.

$$\left. \begin{aligned} x_{n+k} - x_n &\leq b_{n+k} - c_n \leq b_n - c_n = d_n \\ x_{n+k} - x_n &\geq c_{n+k} - c_n \geq c_n - b_n = -d_n \end{aligned} \right\} \Rightarrow |x_{n+k} - x_n| \leq d_n$$

Өгөгдсөн рекурент харьцаанаас  $k(x_{n+k+1} - x_{n+k}) = x_{n+k} - x_n$  гэж гарах тул  $|x_{n+k+1} - x_{n+k}| = \frac{|x_{n+k} - x_n|}{k} \leq \frac{d_n}{k}$  Цааширбал

$|x_{n+2k-1} - x_{n+k}| = |(x_{n+2k-1} - x_{n+2k-2}) + \dots + (x_{n+k+1} - x_{n+k})| \leq \frac{k-1}{k} \cdot d_n$

Иймд

$d_{n+k} = b_{n+k} - c_{n+k} = \max(x_{n+k}, \dots, x_{n+2k-1}) - \min(x_{n+k}, \dots, x_{n+2k-1}) \leq \frac{k-1}{k} d_n$  болох ба эндээс  $d_n d_{n-1} \dots d_{n-k+1} \leq (\frac{k-1}{k})^{n-k} d_1 d_2 \dots d_k$  гэж гарна. Нөгөө талаас  $d_{n+1} = b_{n+1} - c_{n+1} \leq b_n - c_n = d_n$  гэдгээс

$d_n^k \leq d_n d_{n-1} \dots d_{n-k+1}$  гэж гарна. Иймээс  $0 \leq d_n^k \leq (\frac{k-1}{k})^{n-k} \cdot d_1 d_2 \dots d_k$

Эндээс  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$  гэж гарна. Тэгвэл  $b_n - c_n = d_n$  гэдгээс

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \stackrel{def}{=} A$  Нөгөө талаас  $c_n \leq x_n \leq b_n$  учраас  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$   
Ийнхүү  $\{x_n\}$  дараалал хязгаартай болох нь батлагдав. Хязгаарыг нь  
 $kx_{n+k} + (k-1)x_{n+k-1} + \dots + x_{n+1} = a_1 + 2a_2 + \dots + ka_k$  тэнцэтгэлээс  
олбол  $A = \frac{2}{k(k+1)} \cdot (a_1 + 2a_2 + \dots + ka_k)$  гэж гарна.

12.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists A > 0 \forall x > A : |f(x)| < \frac{\varepsilon^2}{4M}$ .  
 $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$  гэж аваад  $f(x)$  функцийг  $x_1 = x + \delta$  цэг дээр Лагранжийн үл-  
дэгдэл гишүүн бүхий Тейлорын томъёонд задалбал:  
 $f(x_1) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}\delta + \frac{f''(t)}{2!}\delta^2$  байхаар  $t$  тоо  $x < t < x + \delta$  бай-  
хаар олдоно. Эндээс  $f'(x) = \frac{f(x_1) - f(x)}{\delta} - \frac{f''(t)}{2!}\delta$  гэж гарна. Иймд

$$|f'(x)| \leq \frac{|f(x_1)| + |f(x)|}{\delta} + \frac{\delta}{2} \cdot |f''(x)| < \frac{\frac{\varepsilon^2}{4M} + \frac{\varepsilon^2}{4M}}{\frac{\varepsilon}{M}} + \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M = \varepsilon$$

Өөрөөр хэлбэл

$\forall \varepsilon > 0 \exists A > 0 \forall x > A : |f'(x)| < \varepsilon$ . Ийнхүү  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

13.  $I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2) \ln(1+\beta^2 x^2)}{x^4} dx$ ,  $\alpha, \beta \geq 0, \alpha \neq \beta$  интегралыг  
авч үзье. Тэгвэл

$$I'_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha x^2}{(1+\alpha^2 x^2)x^4} \cdot \ln(1+\beta^2 x^2) dx = \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha \ln(1+\beta^2 x^2)}{(1+\alpha^2 x^2)x^2} dx$$

$$I''_{\alpha\beta} = \int_0^\infty \frac{4\alpha\beta}{(1+\alpha^2 x^2)(1+\beta^2 x^2)} dx = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta} \cdot \pi$$

Цааш тооцоолбол

$$I(\alpha, \beta) = \frac{2\pi}{3} (\alpha\beta(\alpha + \beta) + \alpha^3 \ln \alpha - \beta^3 \ln \beta - (\alpha^3 + \beta^3) \ln(\alpha + \beta))$$

гэж гарна. Харин параметрээр дифференциалчилж болох үндэслэлийг  
шалгаарай.

$\alpha = 1, \beta = 3$  үед бидний авч үзсэн бодлого гарах ба

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2) \ln(1+9x^2)}{x^4} dx = 8\pi - \frac{56\pi}{3} \ln 4 + 18\pi \ln 3$$

болно.

14.  $\frac{t(n)}{n^2}$  нэмэгдэхүүн бүрийг  $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$  нийлбэрт задлаад хуваарьт байгаа  $n$  бүрийг харгалзах задаргаагаар нь соливол (Жишээ нь,

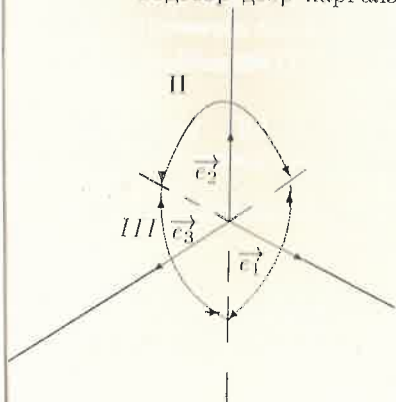
$$\frac{t(12)}{12^2} = \frac{4}{12^2} = \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^2} = \frac{1}{12^2} + \frac{1}{(6 \cdot 2)^2} + \frac{1}{(4 \cdot 3)^2} + \frac{1}{(3 \cdot 2 \cdot 2)^2};$$

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t(n)}{n^2} = \prod_{r=2}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^{2k}} \right) = \prod_{r=2}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - (\frac{1}{r^2})} \right) = \prod_{r=2}^{\infty} \frac{r^2}{r^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{r=2}^n \frac{r}{r-1} \cdot \frac{r}{r+1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2. \text{ Эндээс } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t(n)}{n^2} = 1 \text{ гэж гарна.}$$

15. Өгөгдсөн векторуудыг  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ ; тэдгээрийн уртыг  $b_1, b_2, \dots, b_n$ ; векторуудын абсцисс тэнхлэгийн эерэг чиглэлтэй үүсгэх өнцгийг

$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  гэе. Координатын эхэнд эхлэл бүхий абсцисс тэнхлэгийн эерэг чиглэлтэй харгалзан  $\psi, \psi + \frac{2\pi}{3}, \psi + \frac{4\pi}{3}$  өнцөг үүсгэх 3 цацраг татъя. Тэдгээр дээр харгалзан  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  гэсэн 3 нэгж вектор авъя.



Өгөгдсөн векторуудыг зурагт үзүүлсэн байдлаар 3 бүлэгт хуваая. Бүлэг бүр дэх векторын нийлбэрийн урт нь тэдгээрийн харгалзах цацраг дээрх проекцийн уртын нийлбэрээс багагүй.  $\varphi = \theta_i - \psi$  гэе. Проекцуудын уртын дундаж утга

$$\frac{3 \cdot \sum_{i=1}^n \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} b_i \cos \varphi d\varphi}{2\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

Проекцуудын уртын нийлбэр  $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ -ээс багагүй байхаар  $\psi_0$  олдоно. Үүнд харгалзах 3 бүлэг нь бидний олох хуваалт болно.

17. Сөрөг биш  $m$  ба  $k$  тоонуудын хувьд

$$I(m, m+2k) = I(m+2k, m) = \frac{(-1)^k \cdot \pi}{4m+4k+2} \quad (1)$$

$$I(m, m+2k+1) = I(m+2k+1, m) = \frac{(-1)^{k+1}}{2m+2k+2} \sum_{m < s < m+2k+1} \frac{1}{s} \quad (2)$$

болохыг батлая.

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$  гэвэл  $xf(x) = \sin x$  Эндээс

$$xf^{(m+1)}(x) + (m+1)f^{(m)}(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}(m+1)) \quad (3)$$

гэж гарна. Нймд  $f^{(m)}(0) = \frac{\sin \frac{\pi}{2}(m+1)}{m+1}$  Ийнхүү

$$f^{(m)}(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{1}{m+1}, & \text{Хэрэв } m \text{ тэгш} \\ 0, & \text{Хэрэв } m \text{ сондгой} \end{cases} \quad (4)$$

Хэсэгчлэх арга ба Риманы лемм ашиглавал

$$I(m, n) = -f^{(m)}(0) \cdot f^{(n-1)}(0) - I(m+1, n-1) \quad (5)$$

Ийнхүү

$$\begin{aligned} I(m, m+2k) &= -f^{(m)}(0) \cdot f^{(m+2k-1)}(0) - I(m+1, m+2k-1) = \\ &= -I(m+1, m+2k-1) = \dots = (-1)^{m+2k} \cdot I(2m+2k, 0) = \\ &= (-1)^m \cdot I(2m+2n, 0) \end{aligned} \quad (6)$$

(3)-аас

$$x \cdot f^{(2m+2k+1)}(x) + (2m+2k+1)f^{(2m+2k)}(x) = (-1)^{m+k} \sin(x + \frac{\pi}{2}) = (-1)^{m+k} \cos x$$

гэж гарах ба

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x f(x) \cdot f^{(2m+2k+1)}(x) + (2m+2k+1) \int_0^\infty f^{(2m+2k)}(x) dx &= \\ = (-1)^{m+k} \int_0^\infty \frac{\cos x \sin x}{x} dx &= (-1)^{m+k} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty \frac{\sin 2x}{2} dx = \\ = (-1)^{m+k} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} &= (-1)^{m+k} \cdot \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Нөгөө талаас

$$\begin{aligned} T_{2m+2k+1} &= \int_0^\infty x f(x) \cdot f^{(2m+2k+1)}(x) dx = \int_0^\infty \sin x \cdot f^{(2m+2k+1)}(x) dx = \\ &= \dots = -T_{2m+2k-1} = \dots = (-1)^{m+k} \cdot T_1 = (-1)^{m+k} \cdot \int_0^\infty \sin x \cdot f'(x) dx = \\ &= (-1)^{m+k+1} \cdot \int_0^\infty \cos x f(x) dx = (-1)^{m+k+1} \cdot \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin 2x}{x} dx = (-1)^{m+k+1} \cdot \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Иймд  $I(2m+2k, 0) = \frac{1}{2m+2k+1} ((-1)^{m+k} \cdot \frac{\pi}{4} - (-1)^{m+k+1} \cdot \frac{\pi}{4}) = \frac{(-1)^{m+k} \cdot \pi}{4m+4k+2}$

Ийнхүү (6)-гаас  $I(m, m+2k) = (-1)^m \cdot \frac{(-1)^{m+k} \cdot \pi}{4m+4k+2} = \frac{(-1)^k \cdot \pi}{4m+4k+2}$  гэж гарч (1) батлагдвал.

(5)-аас  $I(m, m+2k+1) = -f^{(m)}(0)f^{(m+2k)}(0) - I(m+1, m+2k)$  цаашилбал

$$I(m, m+2k+1) = \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} f^{(m+j)}(0)f^{(m+2k-j)}(0) + (-1)^k I(m+k, m+k+1)$$

гэж гарна. (5)-ыг батласаны адилаар

$I(m+k, m+k+1) = -f^{(m+k)}(0) \cdot f^{(m+k)}(0) - I(m+k+1, m+k)$  гэж батална. Эндээс  $I(m+k, m+k+1) = -\frac{1}{2} f^{(m+k)}(0)f^{(m+n)}(0)$  гэж гарна.

Ийнхүү

$$I(m, m+2k+1) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j+1} f^{(m+j)}(0)f^{(m+2k-j)}(0) + \frac{(-1)^{k+1}}{2} \cdot (f^{(m+k)}(0))^2 \quad (7)$$

болно. (4) томъёо болон  $\frac{1}{m+j+1} \cdot \frac{1}{m+2k-j+1} = \frac{1}{2m+2k+2} (\frac{1}{m+j+1} + \frac{1}{m+2k-j+1})$  гэдгийг ашиглавал (7)-оос (2) гарна. Бодлого бодогдов.

18. Хариу:  $f(0)$ .  $\{\xi_n : n \geq 1\}$  нь  $[0,1]$  хэрчим дээр жигд тархалттай үл хамаарах санамсаргүй хэмжигдэхүүний дараалал байг. Тэгвэл

$$M \ln \xi_1 = \int_0^1 \ln x dx = -1$$

Их тооны хамтатгасан хууль ёсоор 1 магадлалтайгаар

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \xi_k \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} -1 \text{ байна. Эндээс 1 магадлалтайгаар } \prod_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0$$

гэж гарна. Иймээс Лебегийн теорем ёсоор  $M f(\prod_{k=1}^n \xi_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(0)$  болж бодлого бодогдов.

## ОЮУТНЫ БАГИЙН ТЭМЦЭЭН

### б) Багуудын уралдаан.

Монголын Оюутны Математикийн 10-р олимпиадын багийн тэмцээн 2001 оны 4 сарын 22-нд МУИС-ийн дугуй зааланд болж өнгөрлөө. Энэхүү тэмцээнд ОМ-1, ОМ-2, ОМ-3, ОМ-4, ПХ-1, ХС-2 багууд оролцов. Тэмцээний дүнг сийрүүлвэл:

|               | I | II | III | IV | V | V' | Нийт<br>ОНОО | Байр | Шагнал |
|---------------|---|----|-----|----|---|----|--------------|------|--------|
| МУИС, Мат-I   |   |    |     |    |   |    |              |      | НОМ    |
| МУИС, Мат-II  | 6 |    |     |    |   | 5  | 11           | II   | 11.000 |
| МУИС, Мат-III |   | 6  |     |    |   |    | 6            | III  | 6.000  |
| МУИС, Мат-IV  | 6 | 6  | 6   |    |   |    | 18           | I    | 18.000 |
| МУИС, Прог-I  |   |    |     |    |   |    |              |      | НОМ    |
| МУИС, ХС-II   |   |    |     |    |   |    |              |      | НОМ    |

Багийн тэмцээнд 5 бодлого дэвшүүлсэн бөгөөд оноо тэнцсэн багуудыг байр эзлүүлэхийн тулд блиц (5') бодлогыг дэвшүүлэв. Оюутан та бүхэнд багийн тэмцээнд дэвшүүлсэн бодлогыг толилуулъя.

1. (В.Адьясүрэн)  $\{a_n\}$  дараалал  $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1+a_n}{\arctg a_n}, n \geq 1$  рекурент томъёогоор өгөгджээ.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n^2$  цуваа нийлнэ гэж батал.

2. (Б.Батцэнгэл)  $\{a_n\}, a_n > 0$  дарааллын хувьд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  нь нийлнэ. Тэгвэл

$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_1 a_2 \dots a_n} < e (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$  болохыг батал.

3. (Ц.Дашдорж)  $1 \in A$  төгсгөлөг цагираг бол дараахь өгүүлбэрүүд эквивалент гэж батал.

1)  $A$  талбар биш 2)  $\forall n \in \mathbf{N}$ -ийн хувьд  $x^n + y^n = z^n$  тэгшитгэл  $A^* = A \setminus \{0\}$ -д шийдтэй.

4. (Ц.Дашдорж)  $|E| = n, A_i \subseteq E, i = \overline{1, m}, A_i \neq E$  ба  $\forall x, y \in E$ -г авахад  $x, y \in A_i$  байх ганц  $A_i$  олддог ( $\exists! A_i$ ) бол  $m < n$  байж болох уу? Хэдийд  $m = n$  байх вэ?

5. (Б.Батцэнгэл)  $D \subset \mathbf{R}^2$  нь  $O$  цэгийн хувьд симметр  $\Gamma$  муруйгаар хүрээлэгдсэн гүдгэр муж байг. Хэрэв  $D$  мужид агуулагддаг эллипсүүдээс хамгийн их талбайтай эллипс нь  $O$  цэгт төвтэй нэгж радиустай тойрог бол энэ тойргийн дурын  $\frac{\pi}{2}$ -оос их урттай нум нь  $\Gamma$  муруйтай огтлолцоно гэж батал.

5'. (Ц.Дашдорж) (Блиц бодлого).  $\forall n \in \mathbf{Z}$ -ийн хувьд  $P(n) \in \mathbf{Z}$  бол  $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$  байх нь алба уу?

**Бодолтууд.**

1.  $\forall n \in \mathbf{N} : a_{n+1} = \frac{a_n}{1+\arctg a_n} < a_n$  учраас  $\{a_n\}$  дараалал монотон буурна. Нөгөө талаас  $\forall n \in \mathbf{N} : a_n > 0$ . Иймд Вейерштрассын теоремоор  $\{a_n\}$  дараалал хязгаартай.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \geq 0$  гээ. Тэгвэл  $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+\arctg a_n}$  гэдгээс  $a = \frac{a}{1+\arctg a} \Leftrightarrow a \cdot \arctg a = 0 \Rightarrow a = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + \arctg a_n}{a_n} - \frac{1}{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctg a_n}{a_n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} = 1$$

$$\text{Иймээс } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} \right) = 1 \text{ ба}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} \right) = \frac{1}{n-1} \left( \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1} \right) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{na_1} - \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{a_1} \text{ учраас } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

гэж гарах ба  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  цуваа нийлэх учраас  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  цуваа нийлнэ.

3.  $m \geq n$  гэж батлая.

$E = \{a_1, \dots, a_n\}$   $a_i$  бүрт  $\vec{a}_i = \{\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{im}\}$  гэсэн  $m$  хэмжээст векторыг харгалзуулая. Энд

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} 0, & a_i \notin A_j \\ 1, & a_i \in A_j \end{cases}$$

$$(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = \begin{cases} 1, & i \neq j \\ \geq 2, & i = j \end{cases} \quad \text{Хэрэв } \exists! i, a_1 \in A_i \text{ бол } A_i = E \text{ болно.}$$

$m < n$  гэвэл  $\vec{a}_i$ -үүдийн тоо нь огторгуйн хэмжээс  $m$ -ээс их тул  $\vec{a}_i$ -үүд шугаман хамааралтай буюу, өөрөөр хэлбэл  $x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = 0$  тэгшитгэл тэг биш шийд  $(x_1, \dots, x_n)$ -тэй. Энэ тэгшитгэлийн хоёр талыг  $\vec{a}_i$ -үүдээр скаляр үржүүлэх замаар

$$\begin{cases} b_1 x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \\ x_1 + b_2 x_2 + \dots + x_n = 0 \\ \dots \dots \dots \\ x_1 + x_2 + \dots + b_n x_n = 0 \end{cases} \quad (\vec{a}_i, \vec{a}_i) = b_i \geq 2$$

гэж олно. Үүний тодорхойлогч 0 биш тул энэ систем зөвхөн тэг шийдтэй гэж зөрчилд хүрэн. Иймд  $m \geq n$  байна.

$m = n$  байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь дараах тохиолдолын аль нэг нь биелэх явдал юм.

1)  $A_1 = \{a_2, \dots, a_n\}$ ,  $i \geq 2$  бол  $A_i = \{a_1, a_i\}$

2)  $n = l(l-1) + 1$ ,  $|A_i| = l$  ба  $a \in E$  бүр яг  $l$  дэд олонлог  $A_i$ -д орно.

4. 1)  $\Rightarrow$  2):  $A$  талбар биш ба  $a \in A \setminus \{0, 1\}$  нь урвуугүй элемент гээ.  $B = \{a^k | k \in \mathbb{N}\}$ ,  $|B| < \infty$ ,  $1 \notin B$ .

а)  $0 \in B$  бол  $\exists s \in \mathbb{N}$ ,  $a^s \neq 0$ ,  $a^{s+1} = 0$ ,  $x_0 = a^s$ ,  $y_0 = 1 - a^s \neq 0$  гэвэл  $x + y = z$  тэгшитгэл  $A^*$ -д шийдтэй:  $x_0 + y_0 = z_0$ ,  $n \geq 2$  бол  $x_0^n = 0$  учир  $(x_0, x_0, x_0) \in (A^*)^3$  нь  $x^n + y^n = z^n$ -ийн шийд болно.

6)  $0 \notin B$  бол  $\exists i > j \geq 1, a^i = a^j, p = i - j \in \mathbf{N}, a^j(a^p - 1) = 0,$   
 $(a^p - 1)a^j = 0, x_0 = a^j, y_0 = a^p - 1$  гэе.  
 $x_0, y_0 \neq 0$  ба  $z_0 = x_0 + y_0 = a^j + a^p - 1 \neq 0$   
 $(a^j + a^p = 1 \rightarrow a(a^{j-1} + a^{p-1}) = 1 \rightarrow \exists a^{-1}), x_0 y_0 = y_0 x_0 = 0$  тул

$$z_0^n = (x_0 + y_0)^n = x_0^n + y_0^n + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k x_0^{n-k} y_0^k = x_0^n + y_0^n$$

2)  $\Rightarrow$  1):  $x^n + y^n = z^n$  тэгшитгэл  $\forall n \in \mathbf{N}$ -ийн хувьд  $A^*$ -д шийдтэй байг. Хэрэв  $|A| = q, A$ -талбар бол  $n = q - 1 \geq 1$  гэе. Тэгвэл  $\exists (x_0, y_0, z_0) \in A^*, x_0^{q-1} + y_0^{q-1} = z_0^{q-1}$  -ээс  $1+1=1$  зөрчил гарав. Иймд  $A$  талбар биш.

6. Албагүй.  $P(x) = \frac{x(x+1)}{2} \notin \mathbf{Z}[x]$  боловч  $P(n) \in \mathbf{Z}$  байна.

## ОУМО-42, АНУ, Вашингтон 2001.07.01-14

Ц.Дандорж.

ОУМО-42 2001 оны 07 сарын 1-14-нд АНУ-ын Вашингтонд боллоо. Дэлхийн 83 орон оролцсон энэ Олимпиадад Хятад 225 оноогоор 1-р байр, Орос, АНУ адилхан 196 оноогоор 2-3-р байр, Монгол 79 оноогоор 26-р байранд орлоо.

Манай улсаас:

1. Т.Баасанжав (1-р сургууль) 23 мөнгө
2. Н.Энхбат (1-р сургууль) 12 хүрэл
3. У.Наранхүү (МУИС) 23 мөнгө
4. Ням-Эрдэнэ (32-р сургууль) 14 хүрэл
5. П.Оргил (1-р сургууль) 3
6. Х.Зоригт (МУИС) 4

Багийн орлогч удирдагчаар Хөвсгөлийн 1-р 10 жилийн захирал Б.Содном явлаа.

ОУМО-43 Английн Глазгод 2002 оны 07 сарын 11-31-нд болно.

**ОУ-1.**  $O$  -хурц өнцөгт гурвалжин  $ABC$ -г багтаасан тойргийн төв,  $P$  -  $A$  оройгоос  $BC$  тал дээр буусан өндрийн суурь.

$\angle BSA \geq \angle ABC + 30^\circ$  бол  $\angle CAB + \angle COP < 90^\circ$  гэж батал.

**ОУ-2.** Ямарваа эерэг  $a, b$  ба  $c$  тоонуудын хувьд

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

гэж батал.

**ОУ-3.** 21 хүү ба 21 охин оролцсон тооны тэмцээнд хүн бүр 6-аас олонгүй бодлого бодсон ямар ч хүү ба ямар ч охиныг авахад энэ хоёроор хоёулангаар нь бодогдсон ядаж нэг бодлого байдаг бол дор хаяж 3 хүү ба 3 охиноор бодогдсон бодлого олдохыг үзүүл.

**ОУ-4.**  $n > 1$  сондгой тоо ба  $k_1, k_2, \dots, k_n$  өгсөн бүхэл тоонууд  $a = (a_1, \dots, a_n)$  нь  $1, 2, \dots, n$  тоонуудын  $n!$  сэлгэмлийн аль нь ч байсан

$S(a) = \sum_{i=1}^n k_i a_i$  гэе. Тэгвэл  $n!|S(b) - S(c)|$  байхаар  $b \neq c$  байх  $b, c$  сэлгэмлүүд олдохыг үзүүл.

**ОУ-5.**  $ABC$  гурвалжинд  $\angle BAC$ -ийн биссектрис нь  $BC$  талыг  $P$  цэгт, харин  $\angle ABC$ -ийн биссектрис нь  $CA$  талыг  $Q$  цэгт огтолдог байг.  $\angle BAC = 60^\circ$  ба  $AB + BP = AQ + QB$  бол  $ABC$  гурвалжны өнцгүүд ямар байх вэ?

**ОУ-6.**  $a, b, c, d$  бүхэл тоонууд ба  $a > b > c > d > 0$  байг.

$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$  бол  $ab + cd$  анхны тоо биш гэж батал.

**ОУ-1. 1-р Бодолт.**  $\angle A, \angle B, \angle C$ -г  $\alpha, \beta, \gamma, \delta = \angle COP$  гэе.  $K, Q$  нь  $BC$  хэрчмийн биссектор ( $\perp$ )-ийн хувьд  $A$  ба  $P$ -тэй тэгш хэмтэй орших цэгүүд байг.  $\triangle ABC$ -г багтаасан тойргийн радиусыг  $R$  гэвэл  $OA = OB = OC = OK = R, QP = KA$  болно.

Мөн  $\angle AOK = \angle AOB - \angle KOB = \angle AOB - \angle AOC = 2\gamma - 2\beta \geq 60^\circ$  ба  $OA = OK = R$ -ээс  $KA \geq R, QR \geq R$  болох тул гурвалжны тэнцэл биш ашиглан

$OP + R = OQ + OC \geq QC = QP + PC \geq R + PC$  болно.

Эндээс  $OP > PC$  гарах тул  $\triangle COP$ -ээс  $\angle PCO > \delta$  гэж гарна.

$$\angle \alpha = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} (180^\circ - 2\angle PCO) = 90^\circ - \angle PCO$$

гэдгээс  $\alpha + \delta < 90^\circ$  гэж гарна.

**2-р бодолт.** 1-р бодолтонд харуулсаны адилаар  $OP > PC$  гэж харуулая.

$$AB = 2R \sin \gamma, \quad AC = 2R \sin \beta,$$

$$BP - PC = AB \cos \beta - AC \cos \gamma = 2R \sin(\gamma - \beta) \text{ болох тул}$$

$30^\circ \leq \gamma - \beta < \gamma < 90^\circ$ -ийг ашиглавал  $BP - PC \geq R$  болно.

$$\text{Иймд } R + OP = BO + OP > BP \geq R + PC, OP < PC$$

**ОУ-2.** Эхлээд  $(1) \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geq \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}}$  гэж батлая.

$(1) \Leftrightarrow (a^{\frac{4}{3}} + \dots)^2 \geq a^{\frac{2}{3}}(a^2 + 8bc)$   
 $(a^{\frac{4}{3}} + \dots)^2 - (a^{\frac{4}{3}})^2 = (b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}})(a^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}) \geq 2b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}} \cdot 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}} = 8a^{\frac{2}{3}}bc$   
 буюу  $(a^{\frac{4}{3}} + \dots)^2 \geq a^{\frac{2}{3}}(a^2 + 8bc)$   
 болж (1) батлагдлаа.

### ОУ-3.

**1-р бодолт**  $G, B, P$ -ээр охид, хөвгүүд, бодлогуудын олонлогийг тус тус тэмдэглэе.  $g \in G$ -ийн ба  $b \in B$ -ийн бодсон бодлогуудын олонлогийг харгалзан  $P(g)$  ба  $P(b)$  зэр тэмдэглэе. Мөн  $p \in P$  бүрийн хувьд  $G(p)$  ба  $B(p)$  -ээр  $p$ -г бодсон охид ба хөвгүүдийн олонлогийг тус тус тэмдэглэвэл  $\forall g \in G$  ба  $b \in B$ -ийн хувьд

а)  $|P(g)| \leq 6, |P(b)| \leq 6 \quad \forall p \in P$

б)  $P(g) \cap P(b) \neq \emptyset$  гэж гарна.

$\exists p \in P, |G(p)| \geq 3, |B(p)| \geq 3$  гэж батлая.

Эсрэгээс нь үзэж  $T = \{(p, g, b) | p \in P(g) \cap P(b)\}$  олонлогийг 2 янзаар тоолж зөрчилд хүргэх замаар бодлогыг бодъё.

(б)-ээс  $|T| = \sum_{g \in G} \sum_{b \in B} |P(g) \cap P(b)| \geq |G||B| = 21^2(1)$  гэж гарна.

Эсрэгээс нь үзсэн тул (\*)  $|G(p)| \geq 3, |B(p)| \geq 3$  байх  $p \in P$  байхгүй

$$\sum_{p \in P} |G(p)| = \sum_{g \in G} |P(g)| \geq 6|G|, \sum_{p \in P} |B(p)| \leq 6|B| \quad (2)$$

байна.

$$\chi(g, f) = \begin{cases} 1, p \in P(g) \\ 0, p \notin P(g) \end{cases}$$

гээд  $\sum_{p \in P} \sum_{g \in G} \chi(g, p)$ -д нийлбэрчлэлийн байрыг солиход гарна.

$$P_+ = \{p \in P | |G(p)| \geq 3\}, P_- = \{p \in P | |G(p)| \leq 2\}$$

**Өгүүлбэр.**  $\sum_{p \in P_-} |G(p)| \geq |G|$  буюу  $\sum_{p \in P_+} |G(p)| \leq 5|G|$

Мөн  $\sum_{p \in P_+} |B(p)| \geq |B|$  буюу  $\sum_{p \in P} |B(p)| \leq 5|B|$ .

**Баталгаа.**  $g \in G$  байг.  $P(g) = \{p_1, \dots, p_s\}$ ,  $1 \leq s \leq 6$ ,  $B(p_1) \cup \dots \cup B(p_s) = B$  байх учир  $\frac{|B|}{s} = \frac{21}{s} \geq \frac{21}{6} \geq \left\lceil \frac{21}{6} \right\rceil = 4$  буюу  $\exists |B(p_j)| \geq 4$

ө.х (\*\*) $\forall g \in G \exists p_j = p(g) \in P(|B(p(g))| \geq 4)$  боллоо. (\*)-оос  $|B(P)| \geq 4$  гэдгээс  $p \in P_-$  гэж гарна. Өөрөөр хэлбэл охин бүр  $P_-$ -ийн ядаж нэг бодлогыг бодно.

Үүгээр

$$\sum_{p \in P_-} |G(p)| \geq |G| \quad (3)$$

(2) ба (3)-аас  $\sum_{p \in P_+} |G(p)| = \sum_{p \in P} |G(p)| - \sum_{p \in P_-} |G(p)| \leq 5|G|$  (\*\*) -ийн аналогийг бичвэл  $\forall b \in B$

$\exists p_j = p(b) \in P(|G(p_j)| \geq 4)$  буюу  $\forall b \in B \exists p_j = p(b) \in P_+$  болно. Өөрөөр хэлбэл  $\sum_{p \in P_+} |B(p)| \geq |B|$  болох тул

$$\sum_{p \in P_-} |B(p)| = \sum_{p \in P} |B(p)| - \sum_{p \in P_+} |B(p)| \leq 5|B|$$

$$|T| = \sum_{p \in P} |G(p)||B(p)| = \sum_{p \in P_+} |G(p)||B(p)| + \sum_{p \in P_-} |G(p)||B(p)| \leq$$

$$\leq 2 \sum_{p \in P_+} |G(p)| + 2 \sum_{p \in P_-} |B(p)| \leq 10|G| + 10|B| = 20 \cdot 21$$

болж (1)-д зөрчлөө. Бодлого бодогдов.

**2-р бодолт.**  $p \in P$  бүрийн хувьд  $|G(p)| \leq 2$  эсвэл  $|B(p)| \leq 2$  гэе.  $|G(p)| \leq 2$  бол  $p$ -г улаанаар  $|G(p)| > 2$  бол  $p$ -г хараар будая. Тэгвэл  $p$  улаан бол  $|G(p)| \leq 2$ , харин  $p$  хар бол  $|B(p)| \leq 2$  байна.

Охидыг төсөөлсөн 21 мөртэй, хөвгүүдийг төсөөлсөн 21 баганатай шатрын хөлгийг авч үзье.  $g \in G$ ,  $b \in B$  бүрийн хувьд харгалзах  $(g, b)$  нүдийг дараах маягаар будая:  $(b)$  ёсоор  $p \in P(g) \cap P(b)$ -г сонгож энэ  $p$ -ийн өнгөөр  $(g, b)$  нүдийг будая. Дирихлейн зарчмаар 2 өнгийн хоосоор нь дор хаяж  $\left\lceil \frac{441}{2} \right\rceil = 220 + 1$  квадрат будагдах тул эсвэл дор хаяж  $\left\lceil \frac{221}{21} \right\rceil = 11$  хар квадраттай мөр олдоно, эсвэл дор хаяж 11 улаан квадраттай багана олдоно. Иймд  $g \in G$ -д харгалзах мөр ядаж 11 хар нүдтэй гэе. Тэгвэл энэ 11 нүд бүрийг будахад сонгогдсон хар бодлого бүрийг хамгийн ихдээ 2 хүү бодсон. Ингэхээр  $g$  лав  $\left\lceil \frac{11}{2} \right\rceil = 6$  ялгаатай бодлого бодсон. (a) ёсоор  $g$  эднээс өөр бодлого бодоогүй. Харин  $g$ -ийн бодсон

бодлогыг хамгийн ихдээ 12 хүү бодох тул  $(b)$  нөхцөлд зөрчинө. Яг ийм зөрчил хэрэв аль нэг багана дор хаяж 11 улаан нүд агуулсан үед олж чадна. Иймд  $\exists p \in P, |G(p)| \geq 3, |B(p)| \geq 3$

**ОУ-4.**  $\sum_{a \in S_n} S(a)$ -ийг  $\sum S(a)$  гэж тэмдэглээд үүнийг 2 замаар тоолж

**1-р зам.**  $\sum S(a)$ -д  $c_1$  нь  $a_1 = k \in \{1, \dots, n\}$  бүрээр  $(n-1)!$  удаа үржигдэнэ, өөрөөр хэлбэл  $c_1$ -ийн коэффициент

$(n-1)!(1+2+\dots+n) = \frac{(n+1)!}{2}$  байна.  $c_i$  бүрийн хувьд мөн ийм байх тул

$$\sum S(a) = \frac{(n+1)!}{2} \sum_{i=1}^n c_i \quad (1)$$

байна.

**2-р зам.** Хэрэв  $n!|S(a)-S(b)$  байх  $a \neq b$  олддоггүй гэвэл  $S(a) \pmod{n!}$  -үүд бүгд ялгаатай гэвэл нийт  $n!$  сэлгэмэл байгаа тул энэ хаслагууд нь  $0, 1, 2, \dots, n!-1$  тоонууд л байна. Үүгээр

$$\sum S(a) \equiv \frac{(n!-1)n!}{2} \pmod{n!} \quad (2)$$

(1) ба (2) -оос

$$\frac{(n+1)!}{2} \sum c_i \equiv \frac{(n!-1)n!}{2} \pmod{n!} \quad (3)$$

гэж гарна. Гэтэл энэ нь  $n > 1$  сондгой үед боломжгүй учир нь (3) -ийн зүүн тал  $\equiv 0 \pmod{n!}$  бол  $n!-1$  сондгой тоо тул баруун тал  $\not\equiv 0 \pmod{n!}$

**ОУ-5.**  $\triangle ABC$ -ийн өнцгүүдийг  $\alpha = 60^\circ, \beta, \gamma$  гэс.  $BP' = BP$  байхаар  $AB$  дээр  $P'$  цэгийг  $AB$  хэрчмийг өргөтгөө, мөн  $AP'' = AP'$  байхаар  $AQ$  дээр  $P''$  цэгийг авъя (зураг 1). Тэгвэл  $\triangle BPP'$  нь  $\frac{\beta}{2}$  суурийн өнцөг бүхий адил хажуут гурвалжин болох ба  $AQ + QP'' = AB + BP' = AB + BP = AQ + QB$  гэдгээс  $QP'' = QB$  болно.  $\triangle AP'P''$  зөв ба  $AP$  нь биссектрис гэдгээс  $PP' = PP''$  болно.

**Өгүүлдбэр.**  $B, P, P''$  цэгүүд нэг шулуун дээр оршино, өөрөөр хэлбэл,  $P'' \equiv C$

**Баталгаа.** Эсрэгээс  $BPP''$  бөхөөгүй гурвалжин гэе.  $\angle PBQ = \angle PP'B = \angle PP'Q = \frac{\beta}{2}$ . Иймд эсвэл зураг 2 шиг эсвэл  $P$  нь  $BP''$ -ийн нөгөө талд байрлах байдалтай байна. Аль ч тохиолдолд  $BPP''$  үл бөхөх адил хажуут гурвалжин гэдгээс  $BP = PP'' = PP'$  гэж гарах тул  $\triangle BPP'$  зөв болж  $\frac{\beta}{2} = 60^\circ$  болох тул  $\alpha + \beta = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$  болж зөрчилд хүргэнэ.  $\triangle BCQ$ -адил хажуутай тул  $120^\circ - \beta = \gamma = \frac{\beta}{2}$  буюу  $\beta = 80^\circ, \gamma = 40^\circ$  болно.

**ОУ-6.**  $ab + cd \in P$  гэж үзье.

$$ab + cd = (a + d)c + (b - c)a = m \cdot (a + d, b - c), \exists m \in N.$$

Бидний үзэж байгаагаар  $m = 1$  эсвэл  $(a + d, b - c) = 1$

1)  $m = 1$  гэе.  $(a + d, b - c) = ab + cd > ab + cd - (a - b + c + d) = (a + d)(c - 1) + (b - c)(a + 1) \geq (a + d, b - c)$  гэсэн зөрчилд хүргэв.

2)  $(a + d, b - c) = 1$  гэе.  $ac + bd = (a + d)b - (b - c)a -$

$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$ -ийн зүүн талд оруулбал

$(a + d)(a - c - d) = (b - c)(b + c + d)$  буюу  $\exists k \in N$

$$\begin{cases} a - c - d = k(b - c) \\ b + c + d = k(a + d) \end{cases} \text{ болох ба эднийг нэмбэл } a + b = k(a + b - c + d)$$

буюу  $k(c - d) = (k - 1)(a + b)$  Энд  $k = 1$  гэвэл  $c = d$  болж  $c > d$  гэсэнд

зөрчино.  $k \geq 2$  гэвэл  $a > b > c > d$  нөхцлөөс  $2 \geq \frac{k}{k-1} = \frac{a+b}{c-d} > 2$  зөрлийг мөн олно.

## ОМУО-42, I Сорил

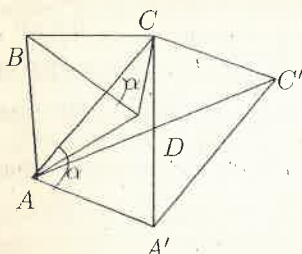
Б.Баяржаргал.

1.  $S$  талбайтай, диаголиудынх нь хоорондох өнцөг  $\alpha$  байх гүдгэр 4-н өнцөгтүүд дотроос хамгийн бага периметртэйг нь ол.

2.  $(P(xy))^2 \leq P(x^2) \cdot P(y^2)$ ,  $\deg P \leq 5$  байх бүх  $P(x)$  олон гишүүнтүүдийг ол.

3.  $n \times n$  хүснэгтэнд 1-ээс  $n^2$  хүртэлх тоог бичихэд хөрш 2 нүдэн дэх тоонуудын нийлбэрүүдийн хамгийн ихийн авч болох хамгийн бага утгыг ол. Энд ерөнхий ирмэгтэй нүднүүдийг хөрш гэж үзнэ.

1.

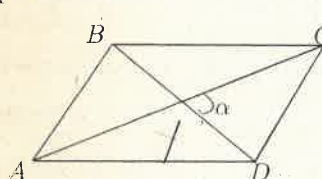


$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \alpha \Rightarrow AC \cdot BD = \frac{2S}{\sin \alpha}$   
 буюу  $AC \cdot BD$  нь тогтмол.  $AC$ -г бэхэлж ийм 4-н өнцөгтүүд дотроос хамгийн бага периметртэйг нь хайя.  $BD$  тэгвэл бас тогтмол байна. Зурагт үзүүлсэн байдлаар  $ACA'C'$  паралелограммыг байгуулая.

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'}$  байхаар. Тэгвэл  $ABDA'$  нь паралелограмм болох буюу  $AB = DA'$  болно. Мөн  $BCC'D$  нь паралелограмм учир  $BC = DC'$ .

$$\text{Иймд } AB + BC + CD + DA = AD + DC + DC' + DA' = (DC + DA') + (AD + DC') \geq A'C + AC'$$

$A'C = \sqrt{AC^2 + AA'^2 - 2AC \cdot AA' \cos \alpha} = \text{const}$  мөн  $AC'$  нь тогтмол байна. Иймд 4-н өнцөгтийн периметр хамгийн багадаа  $AC' + A'C$  гэсэн утга авна. Энэ утганд  $D \equiv P$  үед хүрнэ. Энэ үед  $DC \parallel DA' \parallel AB$  буюу  $AB \parallel CD$  мөн  $AD \parallel DC' \parallel BC$  буюу  $AD \parallel BC \Rightarrow ABCD$  нь паралелограмм болно.



$$\begin{aligned} S &= \frac{AC \cdot BD \cdot \sin \alpha}{2} \quad \frac{2S}{\sin \alpha} = AC \cdot BD \\ AB + BC + CD + DA &= 2(AB + BC) = \\ &= 2\left(\sqrt{\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2} - \frac{AC \cdot BD}{4} \cos \alpha\right) + \\ &\quad \sqrt{\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2} + \frac{2AC \cdot BD}{4} \cos \alpha \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq 2\left(\sqrt{\frac{AC \cdot BD}{2} - \frac{AC \cdot BD}{2} \cos \alpha} + \sqrt{\frac{AC \cdot BD}{2} + \frac{AC \cdot BD}{2} \cos \alpha}\right) = \\ &= \left(\sqrt{\frac{S}{\sin \alpha} - \frac{S}{\sin \alpha} \cos \alpha} + \sqrt{\frac{S}{\sin \alpha} + \frac{S}{\sin \alpha} \cos \alpha}\right) = \\ &= 2\sqrt{\frac{S}{\sin \alpha}}(\sqrt{1 - \cos \alpha} + \sqrt{1 + \cos \alpha}) \end{aligned}$$

Энэ тэнцэл биш тэнцэлдээ хүрэхийн тулд  $AC = BD$  буюу  $ABCD$  нь диагоналиудынх нь хоорондох өнцөг  $\alpha$  байх тэгш өнцөгт үед хамгийн бага периметртэй болно.

2.  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_i$ -үүд бүгд ижил тэмдэгтэй байг.

$$(a_n (xy)^n + \dots + a_1 xy + a_0) \leq (|a_n| x^{2n} + \dots + |a_1| x^2 + |a_0|)(|a_n| y^{2n} + \dots + |a_1| y^2 + |a_0|)$$

Энэ нь Коши-Буняковскийн тэнцэл биш юм.

$q(x) = \frac{P(x)}{a_n}$  гэвэл  $(q(xy))^2 \leq q(x^2)q(y^2)$  нөхцөл биелнэ. Иймд  $a_n = 1$  гэж үзэж болно.  $P(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$   
 $(P(xy))^2 \leq P(x^2)P(y^2)$   $y = 0$  гэе.

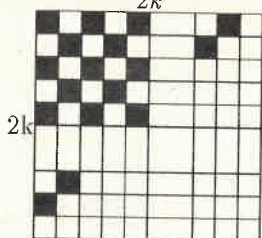
$(P(0))^2 \leq P(x^2)P(0)$ ,  $P(0) = a_0 a_0^2 \leq P(x^2)a_0$ ,  
 $a_0(x^{2n-2} + a_{n-1}x^{2n-4} + \dots + a_1) \geq 0$  буюу  $a_0 a_1 \geq 0$  болно.  $a_0 = P(0) < 0$   
 бол  $P(x^2) > 0$  байх  $x$  олдох учир  $P(0) \cdot P(x^2) < 0 \leq (P(0))^2$  болж зөрчил  
 үүснэ.

Иймд  $a_0 \geq 0$  Эндээс  $a_1 \geq 0$  (Энд  $a_n$ ,  $a_0$ -ийг 0 биш гэж үзэж болно.  
 Хэрэв аль нэг нь 0 бол олон гишүүнтийн зэрэг нь 1-ээр бага болчихно).

$P(\frac{1}{x}) = \frac{Q(x)}{x^n}$  гэвэл  $Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + 1$  олон гишүүн-  
 тийн хувьд мөн  $(Q(xy))^2 \leq Q(x^2)Q(y^2)$  нөхцөл биелэхийг хялбар шал-  
 гаж болно. Иймд өмнө баталсан ёсоор  $a_{n-1} \geq 0$  гэж гарна.

$\deg P(x) \leq 5$  үед  $a_2 \geq 0$  болохыг баталж болно. (Өөрсдөө хий) Иймд  
 $\deg P(x) \leq 5$  үед коэффициентүүд нь бүгд ижил тэмдэгтэй гэж гарна.

3. Бидний олох тоо  $n^2 + [\frac{n}{2}] + 1$  гэж батлая. Хүснэгтийн нүднүүд  
 дэх  $n^2 - a + 1, n^2 - a + 2, \dots, n^2$  гэсэн тоонууд нүдийг хараар будъя  
 (энд  $a < \frac{n^2}{2}$ ). Тэгвэл эдгээр нь хөрш биш байх хэрэгтэй. Харин хар  
 нүдтэй хөрш нүднүүдийг цагаанаар будъя. Цагаан нүдний тоог  $b$  гэвэл  
 цагаан нүднүүд дотор  $b$  гэсэн тооноос их буюу тэнцүү тоотой нүд бай-  
 гаа. Өөрөөр хэлбэл хамгийн их нь  $b$ -ээс их буюу тэнцүү. Иймд 2 хөрш  
 нүднүүд дээрх тоонуудын нийлбэр  $n^2 - a + 1 + b$ -ээс их байна.  $b - a \geq [\frac{n}{2}]$   
 байх  $a$  тоо олдвол бодлого бодогдоно.  $a = [\frac{n}{2}]^2$  болохыг батлая.



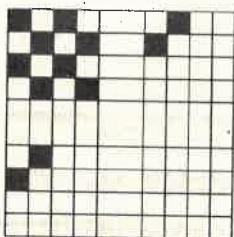
$n = 2k$  үед зурагт үзүүлсэн байдлаар  
 гол диаголиас дээших нүднүүдийг хараар  
 будъя. Тэгвэл  $k^2$  ширхэг нүд будагдах ба  
 цагаан нүдний тоо нь  $k^2 + k$  байна. (Өөр  
 байдлаар будахад үүнээс олон цагаан нүд  
 будагдана гэж батал). Иймд  $n^2 - a + 1 + b =$   
 $4k^2 - k^2 + 1 + k^2 + k = 4k^2 + k + 1 = n^2 + [\frac{n}{2}] + 1$

$n = 2k + 1$  үед мөн адил зурагт үзүүлсэн  
 байдлаар будъя. Тэгвэл мөн  $k^2$  ширхэг хар  
 нүд байх ба  $k^2 + k$  ширхэг цагаан нүд байна.

$$n^2 - a + 1 + b = (2k + 1)^2 - k^2 + 1 + k^2 + k =$$

$$(2k + 1)^2 + k + 1 = n^2 + [\frac{n}{2}] + 1$$

болж батлагдав.



| 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | ... | $n$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----|-----|
| $n^2$     | 1         | $n^2 - 1$ | 3         | $n^2 - 5$ |     |     |
| 2         | $n^2 - 2$ | 4         | $n^2 - 6$ |           |     |     |
| $n^2 - 3$ | 5         | $n^2 - 7$ |           |           |     |     |
| 6         | $n^2 - 8$ |           |           |           |     |     |
| $n^2 - 9$ |           |           |           |           |     |     |
|           |           |           |           |           |     |     |
|           |           |           |           |           |     |     |

Зурагт үзүүлсэн байдлаар гол диагональтай паралель сондгой дугаартай диаголиуд дээр  $n^2$ -аас эхлээд  $\left[\frac{n^2+1}{2}\right]$  хүртэлх тоог дэс дараалуулан бичээд харин тэгш дугаартайд нь 1-ээс  $\left[\frac{n^2}{2}\right]$  ширхэг тоог мөн дэс дараалуулан бичвэл хөрш 2 нүднүүд дээрх тоонуудын нийлбэрийн хамгийн их нь  $n^2 + \left[\frac{n}{2}\right] + 1$  байна.

## ОМУО-42, II сорил.

Г.Баярмагнай.

1.  $-1 \leq x_i \leq 1$  ба  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$  байх  $x_1, x_2, \dots, x_n$  бодит тоонууд өгчээ.  $1 \leq p \leq q \leq n$  байх  $N \in p, q$  бүрийн хувьд  $|x_{\sigma(p)} + \dots + x_{\sigma(q)}| \leq 2 - \frac{1}{n}$  байх  $\sigma$  элгэмэл олдохыг батал.
2.  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m$ -тэгш  $A = \{1, 2, \dots, n + m\}$  олонлог өгөгдөв.  
 $f: A \rightarrow A$  а)  $f(i) = i + 1$   $i = 1, 2, \dots, m - 1, m + 1, \dots, m + n - 1$   
 б)  $f(m) = 1$  ба  $f(m + n) = m + 1$  байх  $f$ -функц өгөв.  
 Хэрэв  $g: A \rightarrow A$   $\forall a \in A$  хувьд  $g(g(a)) = f(a)$  байх  $g$  функц оршин байдаг бол түүнийг ол.
3.  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$   $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  нь түүний хоосон биш дэд

олонлогууд бол  $\exists I, J$ -индексийн олонлог:  $\cup_{i \in I} A_i = \cup_{i \in J} A_j$  ба  $I \cap J = \emptyset, I \cup J \neq \emptyset$

1.  $n$ -ээр индукцлэе.  $n \rightarrow n+1$  шилжилтийг хийе.

а).  $\exists i \leq n+1 : |x_i| \leq \frac{n}{n+1}$  гэж үзье. Тэгвэл бид  $0 \leq x_{n+1} \leq \frac{n}{n+1}$  ба  $x_n \leq 0$  гэж үзэж чадна. Хэрэв  $y_i = x_i, i = \overline{1, n-1}$   $y_n = x_n + x_{n+1}$  гэж тэмдэглэвэл индукцын өмнөх алхам ёсоор  $\exists \sigma: A \rightarrow A, A = \{1, 2, \dots, n\}$  байна.  $\alpha = \min_{k \leq n} \sum_{i=1}^k y_{\sigma(i)}, \beta = \max_{k \leq n} \sum_{i=1}^k y_{\sigma(i)}$  гэвэл  $|y_{\sigma(p)} + \dots + y_{\sigma(q)}| \leq 2 - \frac{1}{n} \Rightarrow \alpha - \beta \leq 2 - \frac{1}{n}$  байна.  $\sigma(s) = n$  байг.

$x = \sum_{i=1}^{s-1} y_{\sigma(i)}$  гэж тэмдэглэе.

Одоо  $x_{\sigma(s-1)}$ -ын дараа  $x_n, x_{n+1}$ -ын яг аль байхыг тогтооё.

1).  $\beta - (x + x_n) \leq 2 - \frac{1}{n+1}$  эсвэл 2)  $(x + x_{n+1}) - \alpha \leq 2 - \frac{1}{n+1}$ -ийн аль нэг нь биелэхийг батлая. Эсрэгээс нь үзвэл

$\beta - \alpha > 4 - \frac{2}{n+2} - (x_{n+1} - x_n) > 2 - \frac{1}{n+1}$  болж зөрчил гарна.

$(x_{n+1} - x_n \leq \frac{n}{n+1} - (-1) = 2 - \frac{1}{n+1}$ -байхыг ашиглав.)

Хэрэв 1) биелж байвал  $x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(s-1)}, x_n, x_{n+1}, \dots$  байхаар 2) биелж байвал  $x_{\sigma(1)} \dots \sigma(s-1), x_{n+1}, x_n, \dots$  байхаар  $\sigma$ -г сонгож авна.

б)  $|x_i| > \frac{n}{n+1} \quad i = \overline{1, n+1}$  байг.  $x_i > 0, i = \overline{1, k}, x_i < 0, i = \overline{k+1, n+1}$  гэж үзэж чадна. Эндээс  $y_i = -x_{k+i} \quad i = \overline{1, n+1-k}$  гэж тэмдэглэе. Эндээс

$k-1 \leq x_1 + \dots + x_k \leq k, n-k < y_1 + \dots + y_{n-k+1} \leq n-k+1$

$\sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^{n-k+1} y_i$  байна.

Эндээс  $n+1 = 2k$  болно.  $x_i \leq y_i, i = \overline{1, m}, x_i \geq y_i, i = \overline{m+1, k}$  байг.

$m = k$  бол  $x_i = y_i$  болох тул илэрхий. Эндээс  $m \leq k-1$  байна гэдгээс

(\*)  $(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k)$  гэе.  $|x_i - y_i| < \frac{1}{n+1}$  байх нь ойлгомжтой гэдгээс

(\*)-оос зохиох нийлбэр нь модулиараа  $2 - \frac{1}{n+1}$ -ээс хэтрэхгүй.

2.  $B = \{1, 2, \dots, m\}$  гэвэл  $f(B) = B$  ба  $f(A/B) = A/B$  байна.

$f$ -нь биектив тул  $g$  нь биектив. Хэрэв  $i \in B$  ба  $g(i) \in B$  байг. Эндээс

а)-г ашиглавал  $i, g(i), g(i)^2, \dots \in B$  болно.  $\forall k \in B$  авъя. Эндээс  $k = f^2(i)$

байх  $\exists s \in N \Rightarrow f^s(i) = g^{2s}(i)$  болох тул  $\{i, g(i), \dots\} = B$  болно.

$g^k(i) \neq g^s(i), 0 \leq k, s < m$  гэж баталъя.

Хэрэв  $g^k(i) = g^s(i) \Rightarrow g^{2k}(i) = g^{k+s}(i) = g^s(g^k(i)) = g^{2s}(i) \Leftrightarrow$

$f^k(i) = f^s(i) \Leftrightarrow k = s$  болно. Эндээс  $B = \{i, g(i), \dots, g^{m-1}(i)\}$  болно.  $B = \{a_1, \dots, a_m\}$  гэе. Эндээс  $g(a_i) = a_{i+1}$   $i = \overline{1, m-1}$ ,  $g(a_m) = a_1$  буюу  $m = 2s$  гэвэл  $f(a_{2i-1}) = a_{2i+1}$   $f(a_{2s-1}) = a_1$   $i = \overline{1, s-1}$  болно. Энэ нь а)-д зөрчинө. Эндээс  $g(B) \cap B = \emptyset$  болно. Үүнтэй адилаар  $g(A/B) \cap (A/B) = \emptyset$  болно.  $g(B) \subseteq A/B, g(A/B) \subseteq B$  ба  $g$  биектив тул  $|B| = |A/B|$  байхаас өөрцгүй. Эндээс  $m = n$  болно. Манай  $g$  функц нь  $g(1)$ -ээр тодорхойлогдоно. Өөрөөр хэлбэл  $g(1) \in A/B$  байхаар өгөх бүрд  $g$  функц нэг утгатай тодорхойлогдоно.

3.  $C_{ki} = \begin{cases} 1, & a_k \in A_i \\ 0, & a_k \notin A_i \end{cases}$  гэж тэмдэглэе.  $1 \leq k \leq n, 1 \leq i \leq n+1$

$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n+1} C_{ki} x_i = 0 \\ k = 1, \dots, n \end{cases}$   $n+1$  ширхэг хувьсагчтай  $n$  ширхэг нэгэн төрлийн

шугаман тэгшитгэлийн системийн 0 биш шийдийг  $(x_1, \dots, x_{n+1})$  гэе.  $I = \{i : x_i > 0\}, J = \{j : x_j < 0\}$   $A_i$ -олонлогууд хоосон биш  $c_{ki} \geq 0$  тул  $I \cup J \neq \emptyset$  ба манай сонголтоос  $I \cap J = \emptyset$  байна. Эндээс  $\sum_{i \in I} C_{ki} x_i = + \sum_{j \in J} C_{kj} (-x_j)$  болно.  $\sum_{i \in I} C_{ki} x_i$ -ээрэг  $\Leftrightarrow C_{ki} > 0$  байх  $\exists i$  Энэ нь  $a_k \in A_i$  гэсэнтэй адил. Аналогиор  $\sum_{j \in J} C_{kj} (-x_j) > 0 \Leftrightarrow a_k \in A_j \Rightarrow a_k \in \cup_{i \in I} A_i, a_k \in \cup_{j \in J} A_j$  байна гэдгээс  $\cup_{i \in I} A_i = \cup_{j \in J} A_j$  болно.

## ОУМО-42, III Сорил

Б.Батцэнгэл

1. 0, 1-ээс тогтох дарааллыг үг гэж нэрлэе. Ямар нэгэн үгийг  $k$  удаа дараалан бичихэл гарах үгийг  $k$  давхар үг гэе. Үгний хаа нэгтээ  $k$  давхар үгийг нэмж бичиж болно, мөн үгнээс  $k$  давхар үгийг арчиж болно. Жишээ нь,  $k = 3$  үед 100 үгнээс эхлээд 100000, дараа нь 100101010000 гэж шинэ үг үүсгэж болно.  $a_1 a_2 \dots a_n$  үгнээс  $b_1 b_2 \dots b_n$  үгийг гарган авч болох зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцлийг а)  $k = 2$ , б)  $k = 3$  үед ол.

2. Хавтгай дээр аль ч гурав нь нэг шулуун дээр үл орших  $A, B, C, D$  дөрвөн цэг өгөгдөв.  $AB \cap CD = E, BC \cap AD = F$  бол  $AC, BD, EF$  диаметртай тойргууд нь эсвэл бүгд ерөнхий цэгтэй эсвэл хос хосоороо үл огтлолцоно гэж батал.

3. Дөрвөлжин шугамтай цаасан дээр зангилааны цэгүүд дээр оройтой  $m \geq n$  талуудтай тэгш өнцөгт өгөгдөв. Тэгш өнцөгтийг, зангилааны цэгүүд дээр оройтой  $\frac{1}{2}$  талбайтай гурвалжнуудад хуваажээ.

а) Хуваалтын гурвалжнууд дотор тэгш өнцөгт гурвалжин олдоно гэж батал.

б) Хэрэв тэгш өнцөгтийн талууд нь цаасны шугамтай паралель бол хуваалтын гурвалжнууд дотор дор хаяж  $2n$  ширхэг тэгш өнцөгт гурвалжин олдохыг батал. (Цаасны нэг нүдний талын уртыг нэгж гэж үзнэ)

1.а)  $A = a_1a_2 \dots a_n$ ,  $B = b_1b_2 \dots b_n$  ба  $s(A) = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  гэсэн тэмдэглэгээ хийе. Олох ёстой нөхцөл нь  $s(A) \equiv s(B) \pmod{2}$  гэдгийг батлая. Зайлшгүй болох нь,  $A$  үгэнд 2-давхар үгийг нэмж бичихэд (мөн хасахад)  $s(A)$ -ийн тэгш сондгой нь эс өөрчлөгдөнө гэсэн илэрхий дүгнэлтээс мөрдөнө. Одоо энэ нөхцөл хүрэлцээтэй гэдгийг харуулая.

$$01 \rightarrow 011010 \rightarrow 0010 \rightarrow 10$$

тул ямар ч үгний 1-үүдийн өмнө, 0-үүдийн хойно нь байрлуулж болно. Дараа нь 11, 00 гэсэн 2-давхар үгүүдийг арчиад,  $A$  үгийг 0, 1, 00, 10 гэсэн дөрвөн үгийн аль нэгэнд шилжүүлж ямагт чадна. Чухам энэ дөрвийн алинд нь шилжих нь  $n$  ба  $s(A)$ -ийн тэгш сондгойгоос хамаарна. Нэгэнт нь  $n$  ижил бөгөөд  $s(A) \equiv s(B) \pmod{2}$  тул  $B$  үг нь мөн тэр үгэнд шилжинэ. Нэгэнт үгийг хувиргах үйлдэл нь урвуутай учраас энэ нь  $A$  үгнээс  $B$  үгийг гарган авч болно гэсэн үг юм.

б) Өмнөхтэй нэгэн адил  $s(A) \equiv s(B) \pmod{3}$  нөхцөл зайлшгүй болохыг харуулж болно.  $t(A) = a_1 + 2a_2 + \dots + na_n$  гэж тэмдэглэвэл  $t(A) \equiv t(B) \pmod{3}$  нөхцөл бас зайлшгүй гэдгийг харуулая.

Юуны өмнө  $U = u_1u_2 \dots u_n$ ,  $V = v_1v_2 \dots v_m$  бол

$$t(UV) = \sum_{i=1}^n i \cdot u_i + \sum_{j=1}^m (n+j) \cdot v_j = t(U) + n \cdot s(V) + t(V)$$

байна гэдгийг тэмдэглэе. Эндээс хэрэв  $W = w_1w_2 \dots w_k$  бол

$$t(WWWV) = t(WWW) + 3k \cdot s(V) + t(V) \equiv t(V) \pmod{3}$$

байна гэж гарна. Дахин дээрхи чанарыг хэрэглэвэл

$$\begin{aligned} t(UWWVV) &= t(U) + n \cdot (3s(W)) + s(V) + t(WWWV) \equiv \\ &\equiv t(U) + n \cdot s(V) + t(V) \pmod{3} \end{aligned}$$

болж  $t(UWWVV) \equiv t(UV) \pmod{3}$  гэдэг нь батлагдана.

Одоо  $s(A) \equiv s(B) \pmod{3}$ ,  $t(A) \equiv t(B) \pmod{3}$  нөхцлүүд хүрэлцээтэй

болохыг харуулая.  $A$  үгийн үсгүүдийг эхнээс нь тоолж, харгалзан  $1, 4, 7, \dots, 2, 5, 8, \dots$  ба  $3, 6, 9, \dots$  дугаарт байгаа үсгүүдийн нийлбэрийг  $s_1(A), s_2(A)$  ба  $s_3(A)$  гэж тэмдэглэе. Тэгвэл

$$s(A) = s_1(A) + s_2(A) + s_3(A), \quad t(A) \equiv s_1(A) + 2s_2(A) \pmod{3}$$

болно. Бидний бичлэг гэж үзэж байгаа  $S(A) \equiv S(B) \pmod{3}$ ,  $t(A) \equiv t(B) \pmod{3}$  нөхцлүүдээс

$$S_1(A) - S_2(B) \equiv S_2(A) - S_2(B) \equiv S_3(A) - S_3(B) \pmod{3}$$

байна гэж гарна.

**Лемм.** Дурын  $a, b$  үсгүүдийн хувьд  $0ab1$  үгнээс  $1ab0$  үгийг гарган авч болно.

**Баталгаа.**  $a = b = 0$  эсвэл  $a = b = 1$  бол илэрхий эсрэг тохиолдолд

$$0011 \rightarrow 0011101010 \rightarrow 0001010 \rightarrow 1010$$

$$0101 \rightarrow 0101000 \rightarrow 0101011100 \rightarrow 1100$$

гэж шилжүүлж болно.

Леммээс үгийн  $1, 4, 7, \dots$  дугаарт (харгалзан  $2, 5, 8, \dots$  ба  $3, 6, 9, \dots$  дугааруудад) байгаа  $1$ -үүдийг өмнө,  $0$ -үүдийг хойно нь байрлуулж болно гэж гарна. Мөн леммээс

$$1ab1cd1 \rightarrow 1000ab1cd1 \rightarrow 1001ab0cd1 \rightarrow 1001ab1cd0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1001000ab1cd0 \rightarrow 1001001ab0cd0 \rightarrow 1001001000ab0cd0 \rightarrow 0ab0cd0$$

гэж гарах тул энэ дугаарт байгаа дараалсан гурван  $1$ -г гурван  $0$ -ээр бас сольж болно. Одоо ямар ч үг нь гэсэн есөн үгийн аль нэгэнд нь шилжинэ гэдгийг харуулж өмнөх хэсэгтэй адилхан бодлого бодогдоно.

**2.** Бодолт нь "Математикийн мэргэжлийн курс-1" номны 7-р бүлгийн 3-р хэсгийн жишээ 7-ийн бодолтын санааг ашиглах болно. Хавтгай дээр  $A$  цэгт эхтэй координатын систем сонгон авъя.

Тэгвэл  $\vec{E} = \beta \vec{B}$ ,  $\vec{F} = \delta \vec{D}$  байх  $\beta, \delta \neq 0$  тоонууд олдоно.  $C$  цэг  $BF, DE$  шулуунууд дээр орших учир

$$\vec{C} = x \vec{B} + (1-x) \vec{F} = x \vec{B} + (1-x) \delta \vec{D}$$

$$\vec{C} = y \vec{E} + (1-y) \vec{D} = \beta y \vec{B} + (1-y) \vec{D}$$

тэнцлүүд биелэх  $x, y$  тоо олдох ёстой. Нэгэнт  $\vec{C}$  вектор нь  $\vec{D}, \vec{B}$  векторуудаар нэг утгатай задрах ёстой учраас, эндээс

$$\begin{cases} x = \beta y \\ \delta(1-x) = 1-y \end{cases} \quad \text{буюу} \quad \begin{cases} x = \frac{\beta(1-\delta)}{1-\delta\beta} \\ y = \frac{(1-\delta)}{1-\delta\beta} \end{cases}$$

гэж гарна ( $1-\delta\beta \neq 0$  байна). Үүгээр  $\vec{C} = \frac{\beta(1-\delta)}{1-\delta\beta} \vec{B} + \frac{\delta(1-\beta)}{1-\delta\beta} \vec{D}$  болов. Одоо

$$\vec{C} = \frac{1}{1-\delta\beta}(\vec{E} + \vec{F}) - \frac{\delta\beta}{1-\delta\beta}(\vec{B} + \vec{D}) \quad (*)$$

гэдгийг хялбархан шалгаж болно (энэ тэнцэл нь Гауссын теоремыг баталдаг билээ).  $AC$  диаметртай тойргийн  $X$  цэгийн хувьд  $\angle AXC = 90^\circ$  байх тул түүний тэгшитгэл нь

$$(\vec{AC}, \vec{CX}) = (\vec{X}, \vec{X}) - (\vec{X}, \vec{C}) = 0$$

болно. Үүний нэгэн адил  $BD, EF$  диаметртай тойргийн тэгшитгэлүүд нь харгалзан

$$(\vec{BX}, \vec{DX}) = (\vec{X}, \vec{X}) - (\vec{X}, \vec{B} + \vec{D}) + (\vec{B}, \vec{D}) = 0$$

$$(\vec{EX}, \vec{FX}) = (\vec{X}, \vec{X}) - (\vec{X}, \vec{E} + \vec{F}) + (\vec{E}, \vec{F}) = 0$$

байна. Одоо (\*) тэнцэл ба  $(\vec{E}, \vec{F}) = \delta\beta(\vec{B}, \vec{D})$  болохыг ашиглавал

$$(1-\delta\beta)(\vec{AX}, \vec{CX}) + \delta\beta(\vec{BX}, \vec{DX}) - (\vec{EX}, \vec{FX}) = 0$$

байна гэж гарна. Өмнө тэмдэглэсэн ёсоор  $1-\delta\beta, \delta\beta$  тоонууд тэгээс ялгаатай юм. Сүүлтийн тэнцэл нь хэрэв аль нэг 2 тойрог ерөнхий цэгтэй бол тэр цэг нь 3 дахь тойрогт заавал агуулагдана гэдгийг харуулж байна (тухайлбал  $(\vec{AX}, \vec{CX}) = 0$  ба  $(\vec{BX}, \vec{DX}) = 0$  бол  $(\vec{EX}, \vec{FX}) = 0$  байна). Энэ нь батлах ёстой зүйл билээ.

3. а) Эсрэгээс хуваалтын гурвалжнууд дотор ганц ч тэгш өнцөгт гурвалжин байхгүй гэж үзье. Цаашид зангилааны цэгүүдийг тэгш өнцөгтийн хил дээр орших ба тэгш өнцөгт дотор орших гэж ангилж авч үзье. Зангилааны цэгүүд дээр оройтой талбай нь  $\frac{1}{2}$  байх гурвалжны хамгийн их өнцөг нь эсвэл  $90^\circ$ , эсвэл  $135^\circ$ -ээс багагүй байна гэдгийг

хялбархан баталж болно. Тэгэхлээр хил дээр орших зангилааны цэгээс хамгийн олондоо 1 хуваалтын гурвалжны хамгийн их өнцөг татагдана, харин дотоод зангилааны цэгээс хамгийн олондоо 2 гурвалжны хамгийн их өнцөг татагдах болно. Мэдээж тэгш өнцөгтийн оройгоос гурвалжны хамгийн их мохоо өнцөг татагдаж болохгүй. Иймд тэгш өнцөгтийн хил дээр орших (оройнуудыг оруулаад) зангилааны цэгийн тоо  $r$ , дотор орших зангилааны цэгийн тоог  $i$  гэж тэмдэглэвэл, гурвалжны хамгийн их өнцгүүдийн тоо буюу нийт гурвалжны тоо нь  $r - 4 + 2 \cdot i$ -ээс хэтрэхгүй болно. Гэтэл Пикийн теорем ёсоор нийт хуваалтын гурвалжны тоо нь  $r - 2 + 2 \cdot i$  тул зөрчил үүсч батлах зүйл батлагдав (энэ теоремын талаар УМО-д бэлтгэгчдэд тусламж 16 номны 52-р хуудсыг үзнэ үү).

б) Энэ хэсгийн бодолтыг хийхийг уншигч танд үлдээе.

Тэмдэглэл. 2, 3-р бодлогын хувьд сорилд оролцогч бүх сурагч тун хангалтгүй амжилт үзүүлсэн бөгөөд харин нилээд сурагч 1-р бодлогын зөвхөн а) хэсгийг бодсон байлаа.

## ОМУО-42, IV сорил

Ц.Дашдорж.

1.  $a, b, c > 0$ ,  $5abc > a^3 + b^3 + c^3$  бол  $a, b, c$  талуудтай гурвалжин оршихыг үзүүл.
2. Тойрог дээр  $n$  цэг ба тэдгээрийг холбогч  $nk + 1$  хөвч өгчээ, энд  $2k + 1 < n$ . Эдгээрээс аль ч 2 нь үл огтлолцох  $k + 1$  хөвч сонгож болохыг батал.
3.  $3 \leq p \in P$  ба  $a_1, a_2, \dots, a_{p-2} \in N$ -үүдийн хувьд  $k \in \{1, \dots, p-2\}$  үед  $a_k \not\equiv 0 \pmod{p}$ ,  $a_k^k - 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$  бол  $\exists a_1 \dots a_{p-2} \equiv 2 \pmod{p}$  гэж батал.

1.  $\exists a, b, c$  нь дээрх нөхцлүүдийг хангадаг боловч гурвалжны тал болж чадахгүй гэж үзье. Ерөнхийллийг алдагдуулахгүйгээр  $c \geq a + b$  гэж үзэж чадна.  $c = a + b + x$ ,  $x \geq 0$  гээ.  
 $5ab(a + b + x) > a^3 + b^3 + (a + b)^3 + 3(a + b)^2x + 3(a + b)x^2 + x^3$  буюу  
 $2a^2 + 2ab^2 > 2a^3 + 2b^3 + abx + 3(a^2 + b^2)x + 3(a + b)x^2 + x^3 - d$   
сүүлийн дөрвөн нэмэгдэхүүн сөрөг биш тул  
 $2a^2b + 2ac^2 > 2a^3 + 2b^3 \Leftrightarrow (a + b)(a - b)^2 < 0$  зорчил.

2. Өгсөн цэгүүд зөв  $n$  өнцөгт  $M$ -ийн оройнууд гэж үзэж чадна. Өгсөн хөвчүүдийн олонлог  $X = \cup_{i=1}^n A_i$ ,  $p_i$ -ийн бүх хөвчүүд паралель болохыг батлая.

а)  $n$  сондгой бол хөвч бүр  $M$ -ийн аль нэг талтай паралель байна. Иймд

$$PA_i = \{x \in X \mid x \parallel i - \text{ptал}\}$$

б)  $n = 2k$  тэгш бол  $x \in X$  хөвч бүр эсвэл аль нэг талтай паралель, эсвэл  $A_1A_3, A_2A_4, \dots, A_kA_{k+2}$  хөвчүүдийн аль нэгтэй паралель байна (эдний тоо  $k + k = 2k$ ). Иймд  $P_i, i = \overline{1, n}$ -үүдийг мөн сонгож авч чадлаа.

$$P_i \cap P_j = \emptyset \text{ тул } |X| = nk + 1 = \sum_{i=1}^n |P_i|$$

$$\rightarrow \exists s \quad |P_s| = k + 1$$

3.

$$a_1, a_2, \dots, a_{p-2} \quad (1)$$

дараалалыг авч үзье.

(2)

{ Индукцээр  $i = \overline{2, p-1}$  бүрийн хувьд  $\exists b_1, \dots, b_i \in \mathbf{Z}$ , энд  $b_i$  бүр (1) - ийн хэдэн элементийн үржсвэр болох ба  $m \neq n$  бол  $b_m \neq b_n(p)$

$i = 2$  үед  $b_1 = 1, b_2 = a_1$  гэж авна. (2) чанар бүхий  $b_1, \dots, b_i$  сонгогдсон гэе.  $b_1a_1, \dots, b_ia_i$ -г авч үзье.  $b_ma_i \equiv b_na_i \pmod{p}$  байх нь ойлгомжтой. Хэрэв  $\{b_1a_i \dots b_ia_i \equiv b_1 \dots b_i \pmod{p}\}$  болох тул  $a_i^i \equiv 1 \pmod{p}$  гэсэн зөрчил гарна. Иймд  $\exists b_ja_i \notin \{b_1, \dots, b_i\}(p)$

Тэгвэл  $b_{i+1} = b_ja_i$  гэж авахад (2) чанар бүхий  $b_1, \dots, b_{i+1}$  олдоно.  $i = p-1$  үед  $\{1 = b_1, \dots, b_{p-1}\} \equiv \mathbf{Z}_{p-1}^* = \{1, 2, \dots, p-1\}$  тул  $\exists b_j \equiv 2 \pmod{p}$  боллоо.

## Хотын математикийн олимпиадын 1-6-р ангийн III даваа

Б. Батцэнгэл  
Ч. Даваадорж.

С.Цагааны нэрэмжит УБ хотын математикийн олимпиадын 1-6-р ангийн олимпиад 2000 оны 3-р сарын 27-нд болж өнгөрлөө. Бодлогуудыг бодох хугацаа нь 1,2-р ангид 1,5 цаг, 3-р ангид 2 цаг, 4-6-р ангид 2,5 цаг байсан бөгөөд I-4, II-3, III-4, V-3, VI-2 бодлогууд С.Цагааны нэрэмжит бодлого байсан юм.

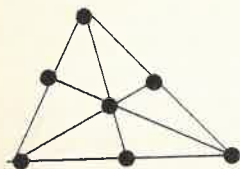
### 1-р анги

I-1. Шулуун дээр хоорондох зай нь 1см байдаг  $A, B$  цэг өгөгдсөн бөгөөд цэг бүр дээр нэг нэг дэвхрэг сууж байв.  $A$  цэг дээр байсан дэвхрэг нь 1 харайхдаа 7см,  $B$  цэг дээр байсан 1 харайхдаа 9см харайдаг байв. Дэвхрэгүүд нь зөвхөн шулууны дагууд харайдаг бол тэд 1 цэг

дээр зэрэг бууж болох уу?

**I-2.** 0,1,2,3 цифрээс бүтэх цифрүүд нь ялгаатай бүх 3 тооны нийлбэрийг ол.

**I-3.**



Зурагт 6 хэрчим дээр 7 даамыг хэрчим тус бүр дээр 3 даам байхаар байрлуулжээ. 5 хэрчим дээр 10 даамыг хэрчим бүр дээр 4 даам байхаар байрлуул. Мөн хэрчим дээр 11 даамыг хэрчим бүр дээр 4 даам байхаар байрлуул.

**I-4.** 3 одойд нийт 15 алим байжээ. Эхлээд 1-р одой өөрийн бүх алимаа нөгөө 2 одойдоо тэнцүү хувааж өгөв. Дараа нь 2-р одой өөрийн бүх алимаа нөгөө 2 одойдоо тэнцүү хувааж өгөв. Эцэст нь 3-р одой өөрийн бүх алимаа нөгөө 2 одойдоо тэнцүү хувааж өгсний дараа, одой бүр нь анх байсантайгаа адил тооны алимтай болсон байлаа. Одой тус бүрт хэдэн ширхэг алим байсан бэ?

## 2-р анги

**II-1.** Гурвалжны 2 талын урт нь тэнцүү бөгөөд нэг тал нь өөр нэг талаас 3 дахин урт байв. Хэрэв тэр гурвалжны талуудын уртын нийлбэр нь 35 см байсан бол талуудын уртыг ол.

**II-2.**  $xxuu = xx \cdot xx + uu \cdot uu$  үсэгт тааврыг бод.

**II-3.** 4 одойд нийт 30 алим байжээ. Эхлээд 1-р одой өөрийн бүх алимаа бусад 3 одойдоо тэнцүү хувааж өгөв. Дараа нь 2-р одой өөрийн бүх алимаа бусад 3 одойдоо тэнцүү хувааж өгөв. Дараа нь 3-р одой өөрийн бүх алимаа бусад 3 одойдоо тэнцүү хувааж өгөв. Эцэст нь 4-р одой бүх алимаа бусад 3 одойдоо тэнцүү хувааж өгсний дараа одой бүр нь анх байсантайгаа адил тооны алимтай болсон байлаа. Одой тус бүрт хэдэн ширхэг алим байсан бэ?

**II-4.** 1, 2, ..., 2001 тоонууд дотор 3-д ч, 7-д ч хуваагдахгүй тоо хэдэн ширхэг байх вэ?

## 3-р анги

**III-1.** Шулуун дээр  $A, B, C$  цэг өгөгдсөн ба цэг бүр дээр нэг нэг дэвхрэг сууж байв.  $A, B$  цэгийн хоорондох зай 1 см,  $B, C$  цэгийн хоорондох зай 1 см байв.



А цэг дээр байсан дэвхрэг нэг харайхдаа 7 см, В цэг дээр байсан дэвхрэг нэг харайхдаа 5 см, С цэг дээр байсан дэвхрэг 1. харайхдаа 3 см харайдаг байв.

Дэвхрэгүүд нь зөвхөн шулууны дагууд харайдаг бол тэр гурав 1 цэг дээр зэрэг бууж болох уу? Болдог бол, зэрэг бууж болдог тэр цэгүүд дотроос В цэгт хамгийн ойрхон цэгийг ол.

**III-2.** II-4 бодлоготой ижил.

**III-3.** Гурван тоо нь, түүний аль ч цифрийг дарахад үүссэн 2 оронтой тоонд үлдэгдэлгүй хуваагддаг байв. Тийм бүх 3 оронтой тоог ол.

**III-4.** Номын тавиур дээр 7 боть ном 1,6,5,4,3,2,7 гэсэн дугаараар дараалан байрласан байв. Дараалсан 2 номыг сонгон авч, үлдэх номуудын хаа нэгтээ байрлуулах үйлдлийн тусламжтай номнуудыг 1,2,3,4,5,6,7 гэсэн байрлалтай болгож болох уу?

## 4-р анги

**IV-1.** Номин, Элба дэлгүүрт анх ижил үнэтэй зурагт зардаг байв. Шинэ жилээр, зурагтны үнийг Номин дэлгүүр 15%, Элба дэлгүүр 10% тус тус хямдруулжээ. Цагаан сараар, дахин зурагтны үнийг Номин дэлгүүр 15%, Элба дэлгүүр 20% тус тус хямдруулсан бол энэ 2 хямдралын дараа зурагт аль дэлгүүрт хямдхан болсон бэ?

**IV-2.** Ах дүү 2 гэрээсээ нэгэн зэрэг сургууль руугаа гарчээ. Ахын алхмын урт 72 см бөгөөд дүүгийн 1 алхмын урт нь 65 см байв. Гэрээс гарсанаас хойш анх 37 секундын дараа тэдний алхам яг зэрэгцсэн ба гэрээс гарснаас хойш 5-аас 6 минутын хооронд ах дүү 2 сургууль дээр нэгэн зэрэг ирсэн байна. Гэрээс сургууль хүртэлх зайг ол.

**IV-3.** 7 одой дугуй ширээ тойрон суусан бөгөөд одой бүрийн өмнө аягатай сүү байв. Эхлээд 1-р одой өөрийн аягатай сүүгээ бусад одойнуудад тэнцүү хувааж өгнө. Дараа нь түүний зүүн талд суусан 2-р одой өөрийн аягатай сүүгээ бусад одойнуудад тэнцүү хувааж өгнө. Дараа нь түүний зүүн талд суусан 3-р одой өөрийн аягатай сүүгээ бусад одойнуудад тэнцүү хувааж өгнө. Гэхмэтчилэн үргэлжилсээр эцэст нь, 7-р одой өөрийн аягатай сүүгээ бусад одойнуудад тэнцүү хувааж өгсний дараа, одой бүрийн аяганд анх байсантай нь ижил хэмжээний сүүтэй болсон байв. Хэрэв анх 7 одойн аяганд нийт 2,1 литр сүү байсан бол одой тус бүрийн аяганд байсан сүүний хэмжээг ол.

**IV-4.**

|   |   |   |
|---|---|---|
| 8 | 3 | 4 |
| 1 | 5 | 9 |
| 6 | 7 | 2 |

$3 \times 3$  хүснэгтийг  $1, 2, \dots, 9$  тоонуудаар бөглөжээ (зураг). Хүснэгтийн аль нэг мөр эсвэл баганад байгаа 3 тоог нэгэн зэрэг 1-ээр нэмэгдүүлж болно. Энэ үйлдлийг дахин давтан хийсээр хүснэгтийн бүх тоонуудыг ижил болгож чадах уу?

## 5-р анги

**V-1.** Ах дүү 2 тариачин бүхэл  $x$  метр талын урттай шоо дөрвөлжин газрыг хувааж авах болжээ. Тэр 2 эхлээд ах нь, дараа нь дүү нь гэхмэтчилэн ээлжлэн  $10, 10m^2$  хэмжээтэй газрыг тасалж авч байв. Эцэст, ах нь  $10m^2$  газрыг таслан авахад, дүүд нь  $10$  хүрэхгүй  $m^4$  хэмжээтэй газар үлджээ. Газраа тэнцүү хувааж авахын тулд ах нь дүүдээ хэдэн  $m^2$  газар өгөх ёстой вэ?

**V-2.** III-4 бодлогыг дараах нэмэлттэйгээр бодох ёстой байв. Үйлдэл нь дараалсан 2 биш харин 3 ном сонгон авч, үлдэх номнуудын хаа нэгтээ байрлуулдаг үед мөн дээрхи бодлогыг бод.

**V-3.** Нэг ангийн сурагчид 3 удаа явган аялал хийжээ. Ангийн сурагч бүр дор хаяж 1 аялалд заавал оролцсон бөгөөд тэдний зарим нь 3 аялалд, зарим нь 2 аялалд, зарим нь 1 аялалд оролцжээ. 1-р аялалд оролцсон сурагчдын  $\frac{6}{7}$  нь хөвгүүд, 2-р аялалд оролцсон сурагчдын  $\frac{3}{4}$  нь хөвгүүд,

3-р аялалд оролцсон сурагчдын  $\frac{2}{3}$  нь хөвгүүд байсан бол ангийн нийт хөвгүүдийн тоо нь охидын тооноос цөөнгүй болохыг батал.

**V-4.** Дөрвөлжин шугамтай цаасан дээр шугамтай паралель талуудтай битүү тахир шугам өгөгджээ. Хэрэв тахир шугамын ямар ч тал нь нэгж урттай бөгөөд дараалсан 2 тал нь хоорондоо перпендикуляр байдаг бол тахир шугамын талын тоо нь 4-д хуваагдана гэж батал.

## 6-р анги

**VI-1.** IV-4 бодлоготой ижил.

**VI-2.** Тус бүрийн жин нь 100г-аас багагүй бөгөөд 300г-аас хэтрэхгүй байдаг 8 алим байжээ. Тэр 8 алимыг 4, 4-өөр нь хувааж уутанд савлах болжээ. Тэгэхдээ аль ч ууттай алимын нийт жингийн бүтэн хагасаас хэтрэхгүй байхаар хувааж болно гэж батал.

**VI-3.**  $8 \times 8$  хэмжээтэй хүснэгтийн нүднүүдэд тоонууд бичигдсэн байв. Хүснэгтийн аль нэг булангийн нүдэнд 0 бичигдсэн бөгөөд хүснэгтийн ямар ч тоо нь түүнтэй хөрн нүднүүдэд бичигдсэн тоонуудын арифметик дунджаас хэтрэхгүй байв. Хүснэгтэд бичигдсэн бүх тоог ол.

(Ерөнхий талтай нүднүүдийг зэргэлдээ нүд гэж үзнэ)

**VI-4.**

|   |    |
|---|----|
| 3 |    |
|   | 27 |

Тэгш өнцөгтийг 4 тэгш өнцөгтөд хуваасан бөгөөд хуваалтын тэгш өнцөгтийн хоёрынх нь талбай мэдэгдэж байв (зураг). Тэгш өнцөгтийн талбай 48-аас багагүй болохыг батал.

Тэмдэглэл II-2, III-3 бодлогыг "Математика в школе" сэтгүүлээс, IV-3 бодлогыг 1977 оны бүх холбоотын олимпиадын бодлогоос, IV-2, V-1 бодлогыг 1985 оны Оросс улсын Астрахань мужийн олимпиадын бодлогоос тус тус сонгон авч дэвшүүлсэн бөгөөд IV-4 бодлогыг 1-р сургуулийн багш Д.Бат-Орших дэвшүүлсэн болно.

## Зарим бодлогуудын бодолт

**III-1.** Дэвхрэгүүд  $D$  цэгт уулздаг гэж үзье. Нэгэнт дэвхрэгүүд 7,5,3 см харайдаг тул  $DA, DB, DC$  зайнууд харгалзан 7,5,3-д хуваагдах ёстой.  $DB = 5x$  гэж үзье. Хэрэв  $D$  цэг нь  $C$  цэгийн баруун талд байрладаг бол  $DA = 5x + 1, DC = 5x - 1$  болно.  $5x + 1$  нь 7-д,  $5x - 1$  нь 3-д хуваагддаг байх  $x$  тооны хамгийн бага нь 11 юм. Харин  $D$  цэг  $A$  цэгийн зүүн талд байвал  $DA = 5x - 1, DC = 5x + 1$  болно.  $5x - 1$  нь 7-д  $5x + 1$  нь 7-д хуваагддаг байх  $x$  тооны хамгийн бага нь 10 юм. Иймд 3 дэвхрэг нэгэн зэрэг буудаг цэгүүдээс  $B$ -д хамгийн ойрхон цэг нь  $A$  цэгийн зүүн талд байрладаг  $DB = 5 \cdot 10 = 50\text{см}$  цэг байх юм.

**IV-2.** 72 ба 65 тонуудын хамгийн бага ерөнхийлөн хуваагдагч нь  $72 \cdot 65 = 4680$  тул ах дүү 2-ийн алхам гэрээс 4680 см газар анх зэрэгцэнэ. 5 мин буюу 300сек ба 6 мин буюу 360 сек-ын хооронд 37 сек-ийн давталт нь цор ганц  $333 = 37 \cdot 9$  сек бөгөөд ах дүү 2 энэ хугацаанд  $4680 \cdot 9 = 42120$  см газар явха ёстой. Иймд ах дүү 2-ын гэрээс сургууль хүртэлх зай 421м20см юм.

**IV-3.** 1-р одой 0,6 л сүүтэй, 2-р одой 0,5л сүүтэй, 3-р одой 0,4л сүүтэй, 4-р одой 0,3л сүүтэй, 5-р одой 0,2л сүүтэй, 6-р одой 0,1л сүүтэй аягатай байсан бөгөөд 7-р одойн аяганд огт сүү байгаагүй гэдгийг хялбархан тааж олох бөгөөд одоо энэ хариу нь бодлогын цор ганц хариу болохыг баталъя. Эхлээд одой бүр өөрийнхөө ээлжинд сүү хуваахдаа яг ижил хэмжээтэй сүү хуваасан гэдгийг батлая. Үнэхээр ямар нэгэн  $A$  одой өөрийнхөө ээлжинд хамгийн их  $x$  хэмжээтэй сүүг хуваасан бол

бусад 6 одой  $x$ -ээс хэтрэхгүй сүүг хуваах учраас тэр одой 7 хуваалтын дараа хамгийн ихдээ  $6 \cdot \frac{x}{6}$  л сүүтэй болно. Энэ 7 хуваалтын дараа  $A$  одой яг  $x$  сүүтэй байхын тулд бусад одойнууд түүнд  $\frac{x}{6}$  л сүү өгч байх ёстой. Иймд одойнууд өөрийнхөө ээлжинд ижил  $x$  хэмжээтэй сүүг хуваасан байна. Одоо одойнуудын аяганд анх  $0, \frac{x}{6}, \frac{2x}{6}, \frac{3x}{6}, \frac{4x}{6}, \frac{5x}{6}, \frac{6x}{6} = x$  л сүү байсан гэдгийг хялбархан харж болох ба нийт 2,1 л сүү байсан тул эндээс  $x = 06$  л гэж гарна.

*Тэмдэглэл.* Энэ бодлоготой төстэй I-4 бодлого нь 1-р одой 10 алим, 2-р одой 5 алимтай ба 3-р одой огт алимгүй байсан, II-3 бодлого нь 1-р одой 15 алим, 2-р одой 10 алимтай, 3-р одой 5 алимтай ба 4-р одой огт алимгүй байсан гэсэн хариутай байсан бөгөөд 1,2-р ангийн сурагчдын хувьд дээрхи бодолттой адилхан энэ хариу нь цор ганц гэдгийг батлахыг шаардаагүй болно.

**V-3.** 1,2,3-р аялалд оролцсон хөвгүүдийн тоог харгалзан  $x, y, z$  гэвэл 1,2,3-р аялалд оролцсон охидын тоо нь харгалзан  $\frac{x}{6}, \frac{y}{3}, \frac{z}{2}$  болно.  $x, y, z$ -ийн хамгийн ихийг  $A$  гэж тэмдэглэе. Ангийн охидын тоо хамгийн ихдээ  $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2}$  байх нь ойлгомжтой (энэ хамгийн их утга нь 1,2,3-р аялалд явсан охидууд бүгд ялгаатай байсан тохиолдолд гарна) бөгөөд ангийн хөвгүүдийн тоо нь хамгийн багадаа  $A$  гэдэг нь бас ойлгомжтой. Одоо  $x, y, z \leq A$  болохыг тооцвол  $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} \leq \frac{A}{6} + \frac{A}{3} + \frac{A}{2} = A$  болж охидын тоо нь хөвгүүдийн тооноос ихгүй гэж батлагдана.

**V-4.** Тахир шугамаар тойрох ямар нэгэн чиглэлийг авч үзье. Тэгвэл тахир шугамын мөчир бүр нь  $\uparrow, \downarrow, \leftarrow, \rightarrow$  гэсэн 4 чиглэлийн аль нэгтэй болно. Нэгэт тахир шугам битүү тул  $\uparrow$  чиглэлтэй мөчрийн тоо  $m$  нь  $\downarrow$  чиглэлтэй мөчрийн тоотой ижил байна (үнэндээ хэдэн удаа дэвшээ явна төдөн удаа доошоо явна). Мөн үүнтэй нэгэн адил тахир шугамд ижил  $n$  тооны  $\rightarrow$  ба  $\leftarrow$  чиглэлтэй мөчрүүд байна. Одоо  $m = n$  гэж баталбал тахир шугамын нийт мөчрийн тоо  $2m + 2n = 4m$  болж 4-д хуваагдах нь батлагдана. Бодлогод өгсөн нөхцөл ёсоор  $\uparrow$  юмуу  $\downarrow$  чиглэлтэй мөчрийн дараа ямагт  $\leftarrow$  юмуу  $\rightarrow$  мөчир байх бөгөөд мэдээж мөчрийг дараагийн мөчирт нь харгалзуулж байгаа энэ харгалзаа харилцан нэгэн утгатай тул  $2m = 2n$  байна. Эндээс  $m = n$  гэж гарна.

**VI-2.** Алимуудын жинг  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_8$  гэж эрэмбэлэе. Одоо  $x_1, x_3, x_5, x_7$  жинтэй алимуудыг 1-р уутанд,  $x_2, x_4, x_6, x_8$  алимуудыг 2-р уутанд савлавал энэ савлалт нь бодлогод шаардсан нөхцлийг хангах болно гэдгийг харуулая. Үнэхээр  $x_1 + x_3 + x_5 + x_7 \leq x_2 + x_4 + x_6 + x_8 < 1,5(x_2 + x_4 + x_6 + x_8)$  бөгөөд

$x_8 \leq 300 \leq 3x_1$  ба  $3x_1 \leq x_3 + x_5 + x_7$  буюу  $1,5x_1 \leq 0,5(x_3 + x_5 + x_7)$  тул  
 $x_2 + x_4 + x_6 + x_8 \leq x_3 + x_5 + x_7 + x_8 \leq x_3 + x_5 + x_7 + 3x_1 = 1,5x_1 + 1,5x_1 +$   
 $x_3 + x_5 + x_7 \leq 1,5x_1 + 0,5(x_3 + x_5 + x_7) + x_3 + x_5 + x_7 = 1,5(x_1 + x_3 + x_5 + x_7)$   
 байна.

**VI-3.** Хүснэгтийн бүх нүдэнд ижил тоо бичигдсэн байна гэдгийг баталж харуулая. Хүснэгтэнд бичигдсэн тоонуудын хамгийн их болох  $A$  тоог сонирхоё. Тэгвэл  $A$  тоо бичигдсэн нүдтэй хөрш нүднүүдэд  $A$ -аас хэтрэхгүй тоо бичигдсэн байх бөгөөд тэгэхлээр тэдгээрийн арифметик дундаж нь мөн  $A$ -аас хэтрэхгүй байна. Гэтэл өгсөн нөхцөл ёсоор  $A$  нь энэ арифметик дунджаас хэтрэхгүй байх ёстой. Иймд  $A$ -ийн хөрш нүднүүдэд бас  $A$  тоо бичигдсэн байна. Цаашилбал эдгээр хөрш нүднүүдтэй хөрш нүднүүдэд бас  $A$  тоо бичигдсэн байна гэдгийг мөн дээрхи аргаар харуулж болно. Ингэж  $A$  тоо бичигдсэн нүдтэй хөрш нүднүүдэд заавал  $A$  тоо бичигдсэн байна гэдгийг харуулсаар байхад, эцэст нь хүснэгтийн бүх нүднүүдэд  $A$  тоо бичигдсэн байна гэдэг нь харагдах болно. Тэгэхлээр анх хүснэгтийн нэг нүдэнд  $0$  бичигдсэн байгаа тул хүснэгтийн бүх нүдэнд  $0$  бичигдсэн байх ёстой.

## Гарчиг

|                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------|-----|
| Ерөнхийлөгч Нацагийн Багабандийн мэндчилгээ .....              | 3.  |
| М.Энхболдын хэлсэн үг .....                                    | 5.  |
| Олимпиадын дүнгийн тухай /Ц.Дашдорж/ .....                     | 6.  |
| VII ангийн III даваа /Б.Батцэнгэл, У.Наранхүү/ .....           | 9.  |
| VIII ангийн III даваа /Б.Батцэнгэл, Б.Баяржаргал/ .....        | 12. |
| VIII ангийн IV даваа /Б.Сандандорж/ .....                      | 16. |
| IX ангийн III даваа /Б.Батцэнгэл, Д.Даянцолмон/ .....          | 21. |
| IX ангийн IV даваа /Ц.Батхүү/ .....                            | 27. |
| X ангийн III даваа /Б.Батцэнгэл, Г.Баярмагнай/ .....           | 30. |
| X ангийн IV даваа /Г.Баярмагнай/ .....                         | 37. |
| Багын багшийн III даваа /Б.Батцэнгэл, М.Батбилэг/ .....        | 40. |
| Багын багшийн IV даваа /Ш.Мөнхцэцэг/ .....                     | 44. |
| Дундын багшийн III даваа /Б.Батцэнгэл/ .....                   | 46. |
| Дундын багшийн IV даваа /Б.Батцэнгэл/ .....                    | 55. |
| Оюутны X олимпиад /В.Адъяасүрэн/ .....                         | 63. |
| Олон Улсын Математикийн XLII Олимпиад /Ц.Дашдорж/ ....         | 73. |
| ОУМО XLII сорил 1 /Б.Баяржаргал/ .....                         | 78. |
| Сорил 2 /Г.Баярмагнай/ .....                                   | 81. |
| Сорил 3 /Б.Батцэнгэл/ .....                                    | 83. |
| Сорил 4 /Ц.Дашдорж/ .....                                      | 87. |
| Бага ангийн математикийн олимпиад / <del>Ц.Дашдорж</del> ..... | 88. |

Б. Батцэнгэл.