

ӨМНӨХ ҮГ

Улсын болон Олон улсын математикийн олимпиадад бэлтгэгчид, математикийн төрөлжсөн сургалттай ангийн сурагч, оюутан, багш нар, математик сонирхогч өргөн олонд зориулсан цувралын ээлжит дугаар уншигч Таны гар дээр очиж байна. Тус гарын авлагыг бэлтгэхэд ММО Зохион Байгуулах Хорооны гишүүд, МУИС-ийн математикийн ангийн оюутнууд идэвхтэй оролцлоо.

Уг номын талаархи аливаа санал хүсэлтээ МУИС-ийн Алгебрийн тэнхимд ирүүлнэ үү.

Монголын Математикийн XXXVIII олимпиад
Редактор Батсүхийн Баяржаргал
Хэвлэлийн эхийг бэлтгэсэн Цэрэндоржийн Навчаа
2003 оны 03-р сард 1000 хувь хэвлэв.

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН XXXVIII ОЛИМПИАДЫН ДҮНГИЙН ТУХАЙ ИЛТГЭЛ

Ц.Дашдорж

Хүндэт математикчид аа!

Нийслэлийн 10 жилийн лаборатори 1-р дунд сургуулийн
захиргаа, хамт олон, захирал ноён Ц.Гүррагчаа аа!

Монголын Математикийн Олимпиадын үе үеийн
алдарт аврагууд аа!

Монголын математикийн 38-р олимпиад нийслэл хотноо Сүх-баатар дүүргийн 10 жилийн лаборатори нэгдүгээр сургуулийн нэрэмжит болон 2002.05.09-ний өдрөөс 05.15-ны өдрүүдэд амжилттай явагдаж дүнгээ гаргаж байна. Энэ удаагийн олимпиадад 21 аймаг, Улаанбаатар хотын болон 10 жилийн лаборатори нэгдүгээр сургуулийн нийт 24 багийн бага, дундын 91 багш, 197 сурагчид оролцож нийт 288 хүн оюун ухаан, авъяас чадвараа сорин уралдлаа. Энэхүү олимпиадыг зохион байгуулахад санаачилга хүч чармайлт гаргаж, бүхий л нөхцөл бололцоогоор хангаж өгсөн 10 жилийн лаборатори нэгдүгээр сургуулийн захирал Ц.Гүррагчаа болон тус сургуулийн хамт олон түүний дотроос энэ ажилд биечлэн идэвх санаачилгатай тусалж ажилласан хичээлийн эрхлэгч Г.Бум-Эрдэнэ, Х.Батцэцэг, Б.Алтанцэцэг, Д.Бат-Орших, Д.Самданпэрэнлэй, Н.Баянбат, Н.Энхбаатар нарт Монголын нийт математикчдын нэрийн өмнөөс талархал илэрхийлье.

Мөн ММО-38-р явуулахад бүх талын дэмжлэг үзүүлсэн МУИС (захирал проф. Ц.Ганцог), МКС (захирал проф. Т.Жанлав) нарт олимпиадад оролцогч нийт математикчдын нэрийн өмнөөс баяр хүргэж, цаашдын ажилд тань их амжилт хүсье.

Олимпиадад 8-р ангийн 81 сурагч оролцсоноос УБ хотын 1-р сургуулийн 8-р ангийн сурагч Ц.Гэрэлт (Багш Ц.Баяраа) 41,5 оноогоор 1-р байр эзэлж Улсын математикийн 38-р олимпиадын 8-р ангийн аварга сурагч боллоо. УБ хотын 1-р сургуулийн 8-р ангийн сурагч А.Ганбат (Багш Ц.Баяраа) 35 оноогоор, УБ хотын 11-р сургуулийн 8-р ангийн сурагч Э.Болдбаяр (Багш А.Наранхүү)

33 оноогоор 2-р байрыг, УБ хотын "Эхлэл" сургуулийн 8-р ангийн сурагч Д.Барбаяр (Багш Ш.Доржсэмбэ) 31,5 оноогоор, УБ хотын 11-р сургуулийн 8-р ангийн сурагч Ч.Доржнамжил (Багш А.Наранхүү) 29,5 оноогоор, УБ хотын 1-р сургуулийн 8-р ангийн сурагч Х.Сайнжаргал (Багш Ц.Баяраа) 28 оноогоор 3-р байрыг тус тус эзэллээ.

9-р ангийн 70 сурагч оролцсоноос УБ хотын 1-р сургуулийн 8-р ангийн сурагч С.Сайнбаяр (Багш Ц.Баяраа) 29,5 оноогоор 1-р байр эзэлж, Улсын математикийн 38-р олимпиадын 9-р ангийн аварга сурагч боллоо. МУИС-ийн "Байгаль эх" лицей ахлах сургуулийн 9-о ангийн сурагч Г.Энхтайван (Багш Б.Баяржаргал) 19 оноогоор, мөн сургуулийн 9-р ангийн сурагч Ж.Азжаргал (Багш Г.Баярмагнай) 16,5 оноогоор 2-р байрыг, УБ "Эхлэл" сургуулийн 9-р ангийн сурагч А.Баярхүү (Багш Ш.Доржсэмбэ) 15 оноогоор, Өвөрхангай аймгийн 9-р ангийн сурагч Д.Баттөмөр (Багш Мөнхбат) 14,5 оноогоор, УБ хотын 1-р сургуулийн 9-р ангийн сурагч Ц.Ууганболд (Багш Д.Пүрэвсүрэн) 14 оноогоор 3-р байрыг тус тус эзэллээ.

10-р ангийн 46 сурагч оролцсоноос УБ хотын МУИС-ийн дэргэдэх Монгол-Турк сургуулийн 10-р ангийн сурагч Б.Оргил (Багш Ц.Дашдорж) 18,5 оноогоор 1-р байр эзэлж Улсыг математикийн 38-р олимпиадын 10-р ангийн аварга сурагч боллоо. Мөн сургуулийн 10-р ангийн сурагч Д.Мөнхбат (Багш Ц.Дашдорж) 14 оноогоор, УБ хотын "Эхлэл" сургуулийн 10-р ангийн сурагч М.Билгүүнтөгс (Багш М.Адилбиш) 14 оноогоор, УБ хотын "Эхлэл" сургуулийн 10-р ангийн сурагч Б.Алтангэрэл (Багш Амархүү) 14 оноогоор 2-р байрыг, УБ хотын 1-р сургуулийн 10-р ангийн сурагч Б.Анхбаяр (Багш Н.Энхбаатар) 12 оноогоор, Дархан-Уул аймгийн 10-р ангийн сурагч Л.Эрдэнэбаатар (Багш Н.Дайвий-Од) 12 оноогоор 3-р байрыг тус тус эзэллээ.

Улсын математикийн 38-р олимпиадад амжилттай оролцсон дээрх нэр бүхий сурагчид, олимпиадад сурагчдаа амжилттай бэлтгэж оролцуулсан багш нар болон сургуулиудад олимпиадыг зохион байгуулах хороо болон нийт математикчдын нэрийн өм-

нөөс чин сэтгэлийн талархал илэрхийлье.

Багш нарын олимпиадыг бага, дунд гэсэн 2 ангиллаар явуулсны дотроос дунд ангийн математикийн 58 багш оролцсоноос Дархан-Уул аймгийн багш Н.Дайвий-Од 15,5 оноогоор 1-р байр эзэлж 38-р олимпиадын аварга математикийн багшаар шалгарч 4 дэх удаагаа түрүүлж олимпиадын түүхэнд цоо шинээр тэмдэглэгдэн үлдлээ. Орхон аймгийн Ж.Батбаяр 15 оноогоор 2-р, Увс аймгийн багш Р.Одгэрэл 13,5 оноогоор 3-р байрыг тус тус эзэллээ.

Бага ангийн багш нарын олимпиадад нийт 33 багш оролцсоноос Дундговь аймгийн Цагаандэлгэр сумын сургуулийн бага ангийн багш М.Отгонжаргал 32,5 оноогоор 1-р байр эзэлж, 38-р олимпиадын аварга бага ангийн багшаар шалгарч 2 дахь удаагаа түрүүллээ. УБ хотын "Оюуны нахиа" сургуулийн бага ангийн багш Г.Өнөрцэцэг 21,5 оноогоор 2-р, Баян-Өлгий аймгийн бага ангийн багш Ш.Хайрол 16 оноогоор 3-р байрыг тус тус эзэллээ.

Авъяаслаг математикч П.Энхболд агсны нэрэмжит уран бодолтын тусгай шагналыг УБ, 1-р сургуулийн 8-р ангийн сурагч С.Сайнбаяр, Сүхбаатар аймгийн дунд ангийн багш У.Чинзориг нарт олгохоор шийдвэрлэлээ.

Олимпиадад оролцсон 24 багаас Сандагдорж ахлагчтай "Олонлог" баг 15,4 оноогоор тэргүүн байр, Д.Бат-Орших ахлагчтай УБ, 1-р сургуулийн баг 14,2 оноогоор 2-р байр, Ч.Даваадорж ахлагчтай УБ хот баг 12,4 оноогоор 3-р байрыг эзэллээ. Хөдөө аймгуудаас Ц.Ганхуяг ахлагчтай Дундговь аймгийн баг 11,1 оноогоор тэргүүлж удаах байрт С.Мөнхжаргал ахлагчтай Хөвсгөл аймгийн, Р.Одгэрэл ахлагчтай Увс аймгийн багууд тус бүр 9,2 оноогоор аймгуудаа тэргүүлж математикийн 38-р олимпиаддаа бэлтгэл зохион байгуулалт сайтай орсныг олимпиадын хороо өндөр үнэлж байгааг уламжлах нь зүйтэй гэж үзэж байна.

Багуудын тэмцээнд 9 баг оролцсоноос Ж.Батбаяр ахлагчтай "МТЦО" баг 1-р байр, В.Адъяасүрэн ахлагчтай "Комисс" баг 2-р байр, Т.Баасанжав ахлагчтай 1-р сургууль төгсөгчдийн баг 3-р байр эзэллээ.

38-р олимпиадын үнэмлэхүй аваргаар Дундговь аймгийн Ца-

гаандэлгэр сумын сургуулийн бага ангийн багш М.Отгонжаргал шалгарлаа.

Энэ жилийн 7-р сард Англи улсад болох ОУМО-43-ын бэлтгэлд Б.Оргил (УБ, МУИС), Д.Мөнхбат (УБ, МУИС), М.Билгүүн-төгс (УБ, Эхлэл), Б.Алтангэрэл (УБ, Эхлэл), Д.Эрдэнэбулган (УБ, 1), Б.Анхбаяр (УБ, 1), Л.Эрдэнэбаатар (Дархан-Уул), С.Сайнбаяр (УБ, 1) нарыг үлдээхээр боллоо. Хичээл 05.27-оос эхэлнэ.

ОУМО-43-ын бэлтгэлд багтаж шалгарсан та бүхэндээ амжилт хүсэж, Монголынхоо нэрийг дэлхийн тавцанд дуурсгах хүндтэй бөгөөд хариуцлагатай үйл хэргийн төлөө идэвх чармайлт гарган сайн бэлтгэж амжилттай оролцохыг монголынхоо нийт математикчдын өмнөөс даалгаж байна.

ММО-38-д I сургууль 8 медаль, "Эхлэл" сургууль 4 медаль, XI сургууль 2 медаль, МУИС-ийн дэргэдэх Монгол-Туркийн сургууль 2 медаль авч хошуучиллаа. 1992 оны Улсын аварга багш А.Энхжаргал захиралтай "Эхлэл" сургууль өндөр амжилт үзүүлж хувийн сургуулиудаас 2 дахь удаагаа хошуучлагчдын байранд гарч ирснийг ММОХороо баяртайгаар онцлон тэмдэглэж байна.

Эрдэм оюун дэлгэрч Монголд математикчдын оюун ухаан улам хөгжин дэвжих болтугай.

Анхаарал тавьсан та бүхэнд баярлалаа.

**Монголын Математикийн XXXVIII Олимпиадын
багийн нэгдсэн дүн**

№	Аймгийн нэр	VIII	IX	X	Бага	Дунд	Нийт оноо	Хүний тоо	Дундаж оноо
1	Олонлог	44.5	22	-	10.5	-	77	5	15.4
2	УБ, 1-р сур	26	29.5	4	-	11.5	71	5	14.2
3	Улаанбаатар	265.5	64	106.5	50	49	535	43	12.4
4	Дундговь	12.5	3.5	0	32.5	7	55.5	5	11.1
5	Увс	14	1.5	7	10	13.5	46	5	9.2
6	Хөвсгөл	10	7	-	14	15	46	5	9.2
7	Баян-өлгий	8	0	7	19	0.5	34.5	5	6.9
8	Дархан	25	9	12	0	-	46	7	6.6
9	Өвөрхангай	9	14.5	0	3.5	0.5	27.5	5	5.5
10	Орхон	0	4.5	0	5.5	15	25	5	5.0
11	Булган	9	4.5	0	0	7.5	21	5	4.2
12	Төв	14	0	0	6	1	21	5	4.2
13	Сэлэнгэ	10	0	0	0.5	7	17.5	5	3.5
14	Дорнод	8.5	0.5	0	6	1	16	5	3.2
15	Сүхбаатар	7	1.5	0	0	7	15.5	5	3.1
16	Хэнтий	8	0.5	0	2	3	13.5	5	2.7
17	Завхан	3	1.5	3	4.5	1	13	5	2.6
18	Архангай	10.5	1.5	0	1	0	13	5	2.6
19	Дорноговь	9	1.5	0	0.5	1.5	12.5	5	2.5
20	Баянхонгор	1	0.5	0	1	7	9.5	5	1.9
21	Говьсүмбэр	7	0	0	0	0	7	5	1.4
22	Өмнөговь	3.5	0.5	0	0	1	5	5	1.0
23	Говь-Алтай	0.5	0.5	0	3	0.5	4.5	5	0.9
24	Ховд	0	0	0	4	0	4	5	0.8

МОНГОЛ УЛСЫН МАТЕМАТИК БОЛОВСРОЛЫН ХӨГЖИЛД НИЙСЛЭЛИЙН НЭГДҮГЭЭР СУРГУУ- ЛИЙН ОРУУЛСАН ТҮҮХЭН ХУВЬ НЭМЭР



I сургуулийн захирал Ц.Гүррагчаа

Манай сургууль байгуулагдсан цагаасаа эхлэн бүх төрлийн шинжлэх ухааны үндсийг чанартай эзэмшүүлэхэд ихээхэн анхаарч байсны дотроос шинжлэх ухааны хаан болсон математикт сургахад түлхүү хүчин чармайлт тавьж ирсэн уламжлалтай. Улсын анхны дунд, бүрэн дунд, анхны улсын тэргүүний сургуулийн хувьд тус сургуульд бахархах зүйл олон байдгийн дотроос ЕБС-ийн математик сургалтын хөгжил, цаашлаад Монгол улсын математик боловсролд оруулсан хувь нэмэр нь бусдаас тод томруун билээ.

Өнгөрсөн цаг хугацааны математик сургалтын түүхээс товчхон боловч авч үзье. Тус сургуулийн анхны багш Хазагаев (1923-1927), Баярт Бампилон (1927-1929) нар тухайн үеийн сурагчдад тооны ухааны мэдлэг, чадвар эзэмшүүлж эхэлсэн багш нар юм. 1930-аад оны эхнээс Сувдаа, Ц.Шаравнямбуу, Х.Далхжав, С.Дашиймаа нарын багш нар тооны хичээл заадаг байжээ. Багш Хазагаев, Бампилон нар европын сонгодог сургалтын арга барилтай байсан бол багш Сувдаа, Шаравнямбуу, Дашиймаа нар дээрх багш нарын арга барилыг уламжлалт арга барилтай хослуулан заадаг байсан гэдэг.

1938 онд манай улсын анхны бүрэн дунд сургууль байгуулахад тэр үеийн ЗХУ-ын дунд сургуулийн хичээлүүд түүний дотроос математикийн хичээлийн сургалтын хөтөлбөр, сурах бичиг боловсруулах, орос хэлнээс орчуулан хэрэглэх зэрэг ажлыг эхэлжээ. Энэ үе бол батлагдсан хөтөлбөр, агуулгын дагуу орчин үеийн математикийн шинжлэх ухааны үндсийг анхны мэргэжилтэй багш нар зааж хөгжлийн эх, тулгын чулууг нь тавьсан нэгэн өвөрмөц үе болжээ гэж харагддаг. 1941-1946 оны үед Даваа, О.Хасбаяр,

гавьяат багш Ц.Цэдэнжав хожим манай улсын нэрт сурган хүмүүжүүлэгчид, эрдэмтэд болсон ахмад багш нар болох Д.Цэрэндагва, Л.Шагдарсүрэн, Уртнасан, С.Цэгмид, Э.Карма нарын олон багш гол үүрэг гүйцэтгэжээ. 1940-өөд оны эхээр ЗХУ-аас тооны багш Уфленд, Г.М.Остапенко зэрэг багш нар уригдан ирж ажиллаж байжээ. Энэ үед монгол, орос багш нар өөрсдийн заах арга, сургах арга барилыг харилцан солилцож ажиллаж байсан нь онцлог юм.

Манай багш нарын боловсруулсан математик сургалтын хөтөлбөр, сурах бичиг 1963 он хүртэл өөрчлөгдөлгүй хэрэглэгджээ. Тэр үеүдэд тус сургуулийн математикийн багшаар гавьяат багш Л.Балжир, Б.Бор, С.Цагаан, ардын багш О.Отгонсүрэн, ахмад багш Солийн Шарав, Д.Эрдэнэчимэг, Д.Гүржав зэрэг чадварлаг багш, сурган хүмүүжүүлэгчид ажиллаж байсан нь сургуулийн математик сургалтын түвшин, чанарт сайнаар нөлөөлж байсан нь гарцаагүй. Эдгээр багш нарын ажлын туршлага, амжилт үр дүн нь монголын математикийн олимпиад зохион явуулах үндэс суурь болж, улмаар монголын багш, сурагчид олон улсын олимпиадад оролцох бэлтгэл хангахад ихээхэн үүрэг гүйцэтгэсэн байна. Ийнхүү тус сургуулийн математик сургалтын үүсэл, хөгжлийг олон жилийн цаанаас ярьж болох боловч онцгой ач холбогдолтой нэгэн цаг хугацааны мөчлөг, түүний үргэлжлэлийг арай илүү тодруулахыг хичээе. Энэ бол математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалт эхэлсэн, хөгжсөн үе юм.

1963-1964 оны хичээлийн жилд Улаанбаатар хотын 2-р дунд сургууль дээр математикийн хичээлийг тусгай хөтөлбөрөөр туршин зааж эхэлсэн сургалтыг, манай багш нарын заах арга, мэдлэг чадвар, туршлагад тулгуурлан 1965 оны намар тус сургуульд шилжүүлэн хичээллүүлжээ. Математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай анги нээж хичээллүүлсэн талаар боловсрол судлалын шинжлэх ухааны доктор, профессор Х.Дүгэрийн дурсан бичсэн нь:

"Яамны сайдын тушаал гарч математикт авьяастай хүүхдийг сургах сургалтын системийг туршиж боловсруулахыг зөвшөөрс-

ний дагуу миний бие 1964 онд Улаанбаатар хотын 2-р сургуульд дээр сурлага сайтай хүүхдүүдээс IX анги байгуулан математикийн хичээлүүдийг тусгай хөтөлбөрөөр заан туршиж X анги төгссөн юм. 2-р сургуульд энэ хичээл заах багш нар дутагдалтай учир туршилтын ажлыг 1965 оны намар I дунд сургуульд шилжүүлэн үргэлжлүүлсэн билээ. Энэ ондоо Улаанбаатар хотын сургуулиудын VII анги төгсөгчдөөс шалгаруулан авч VIII ангиас хичээллүүлсэн бөгөөд цаашид VIII-X ангитай хичээллэсэн юм. Туршилтын ажлыг миний бие гардан хариуцаж, энэ ажилд тэр үеийн УБДС-ийн математикийн тэнхим бүхлээрээ оролцож байлаа. Математикийн үндсэн хичээлүүдийг I сургуулийн математикийн багш нар, ялангуяа С.Цагаан, С.Шарав нар голлон заадаг байв. С.Цагаан багш энэ гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангиудын сургалтыг хариуцдаг байсан бөгөөд сэтгэл, зүтгэлээ чинхүү зориулдаг байсныг бүгд мэднэ. Бид математик сургалтын хөтөлбөр боловсруулж, батлуулж өгөхийн зэрэгцээ судлах зүйлийг боловсруулж өгдөг байсан юм. Олон хуудас гар бичмэл материал бэлтгэсэн билээ. Үндсэн хичээлүүдийн хажуугаар математикийн олон нэмэлт хичээл оруулж түүнийг нь манай тэнхимийн багш нар заадаг байлаа. Математикийн мэргэжлийн хичээл, практик, сонгон суралцах дугуйланд манай сургуулийн Д.Ламжав, Ж.Баатар, Н.Намсрай, Ц.Цэнд-аюуш, Ц.Амарсанаа нар, МУИС-аас багш С.Чимэдцэрэн, Л.Өвгөн нар ирж багшилж байсныг тэмдэглэх нь зүйтэй. Миний бие эдгээр ангиудын сургалтын агуулга, арга зүйг боловсруулах, математикт авьяастай хүүхдийг сонгож сургах асуудлаар 1964-1972 он хүртэл судалгаа явуулж, туршилт хийж үр дүнгээр нь "Математикт авьяастай хүүхдийг сургах сургалтын системийг судалсан нь" сэдвээр 1972 онд дэд эрдэмтний зэрэг хамгаалсан юм. Энэ ангиудын сурагчдын математик сургалтын үр дүн нь тэдний бэлтгэлд нөлөөлж математикийн олимпиадад өндөр амжилт үзүүлж I сургууль л олимпиадад түрүүлдэг уламжлал тогтчихсон байсан нь үнэн юм. Энэ уламжлал өнөөдөр хүртэл үргэлжилсээр байгаад баяртай байдаг юм. Манай тэнхим 1964-1974 он хүртэл энэ ажилд гар бие оролцож

байгаад I сургууль биеэ дааж ажиллах бүрэн боломжтой болсон гэж үзэж ажлыг зогсоосон билээ. Хожим энэ туршлагаар дунд сургуулиудад бусад хичээлүүдээр гүнзгийрүүлсэн сургалт явагдаж эхэлсэн юм." гэж дурсан бичиж өгсөн юм.

Эрдэмтэн Х.Дүгэрийн энэхүү дурсамж нь монгол улсад математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай анги байгуулагдсан тухай бодит баримт болно.

Ингэж 1965-1966 оны хичээлийн жилээс математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай анги нээн хичээллүүлснээс хойш өнөөдрийг хүртэл үргэлжлүүлэн сургахдаа багагүй амжилт олж, туршлага хуримтлуулсан нь бусад сургууль, багш нарт үлгэр дууриал болсоор байна (хүснэгт 2-оос үз). 1967-2002 оны хооронд энэ ангийг 1160 гаруй хүүхэд төгссөний дотроос академич Т.Галбаатар, математикийн ухааны доктор Ц.Болдсүх, дэд доктор Б.Баясгалан, Б.Батцэнгэл, эдийн засгийн ухааны доктор Л.Энхтайван, эдийн засгийн ухааны доктор, ерөнхий сайд асан М.Энхсайхан, анагаах ухааны доктор Б.Болдсайхан нарын зэрэг 30 гаруй эрдэмтэд төрөөд байна.

Энэ хугацаанд улсын математикийн олимпиад 38 удаа болоход 18-д нь тус сургуулийн 10-р ангийн сурагчид аварга болсон нь нэг сургуулийн хувьд түүхэн амжилт гэж үзэхээс аргагүй. Зөвхөн 1990 оноос хойшхи сүүлийн 10 гаруй жилийн хугацаанд олон улсын математикийн олимпиадад тус сургуулийн 12 сурагч оролцож, алтан медаль 1, мөнгөн медаль 3, хүрэл медаль 7-г аваад байгаа билээ.

Олон Улсын Математикийн 38-р олимпиадаас тус сургуулийн сурагч Ө.Баттулга алтан медаль авчирч байсан бол 2002 оны Монголын математикийн 38-р олимпиад тус сургуулийн 80 жилийн ойн нэрэмжит болон зохиогдож байгаа нь билэгшээлтэй тохиолдол юм.

1960-аад он бол монголын математик сургалтын хөгжлийн өвөрмөц эхлэл болсон гэж үзэх бүрэн үндэстэй. Учир нь Олон улсын математикийн олимпиадад оролцох нөхцөл, бололцоо бүрдсэн байна. 1959 онд Улаанбаатар хотын олимпиад зохион байгуу-

лахаар, тэр үеийн багш нарыг бэлтгэх институтийн Б.Алтангэрэл, 2-р сургуулийн багш Д.Норов нар санаачилж, одоогийн УИС-ийн багш, гавьяат багш Ү.Санжмятав, гэгээрлийн сайд агсан Д.Ишцэрэн, багш, дэд профессор Д.Гүржав нар (бүгдээрээ 1-р сургуулийн ахмад сурагчид) дэмжин тусалж, 1959 онд Улаанбаатар хотын математикийн олимпиадыг анх удаа зохиожээ. 1960-1964 онуудад зөвхөн Улаанбаатар хотыг хамарч улмаар аймгуудыг оролцуулах болж өргөжсөн нь улс, улмаар олон улсын олимпиадад оролцох математикт авьяастай, илүү бэлтгэлтэй сурагчдыг илрүүлэх, сонгох анхны түүхэн нөхцлийг бүрдүүлжээ.

Анхны математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай анги хичээллэснээс хойш эдүгээ тасралтгүй 38 жил үргэлжилж, ийм сургалттай олон сургууль үүсэн бий болох үлгэр жишээ болсон юм. Гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийн анхны багш С.Цагаан 1980 он хүртэл, С.Шарав 1990 он хүртэл ажилласан бөгөөд эдгээр багш өөрийн амьдрал, мэдлэг, эрч хүч, зүрх сэтгэлээ сурагчид, шавь нартаа зориулсан тус сургуулийн түүхэн дэх гавьяатай багш нар билээ. Эдгээр багштай олон жил хамтран ажиллаж, арга туршлагыг нь өвлөн амжилтад хүрсэн ахмад багш Ц.Амарсанаа, Я.Доржсүрэн, Ц.Гарамсүрэн, Ш.Мягмар, Д.Буянхүү, Ч.Туул нарын олон багш нар байв. 1970-аад оны сүүлч 1980-аад оноос хойш нэгдүгээр сургуулийн математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийн багшаар Ж.Дангаа, Д.Нарангэрэл, Б.Амарбаясгалан, Д.Пүрэвдорж, Б.Наранхүү нарын олон сайн багш ажилласан. Тус сургуулийн математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай анги төгссөн сурагчдаас өндөр боловсрол, мэдлэг, чадвартай олон зуун мэргэжилтнүүд, олон эрдэмтэн, улс төр, нийгмийн зүтгэлтнүүд төрж, улс орондоо ихээхэн үүрэг гүйцэтгэсээр байгаа нь лавтай. Үүнээс зөвхөн Монголын Математикийн Улсын олимпиадын аварга сурагчидыг дурьдвал:

1. 1967 оны аварга Ө.Энэбиш, техникийн ухааны дэд доктор ТИС-ийн Тээврийн их сургуулийн орлогч захирал байсан.
2. 1973 оны аварга Л.Энхтайван, эдийн засгийн ухааны доктор, одоогийн СЭЗЯ-ны дэд сайд.

3. 1974 оны аварга Д.Амгалан. Доктор. Ph Япон улсад ажилладаг.
4. 1976 оны аварга А.Ганбаатар, математикч, улс төрч, УИХ-ын гишүүн асан.
5. 1977 оны аварга Г.Цогоо, "Эрхист Инвест" ХХК-ны захирал.
6. 1978 оны аварга Г.Цогтоо, "Оргилтех" компаний захирал.
7. 1979 оны аварга Б.Түмэндэмбэрэл, математикч "Arpo-ts" компаны захирал.
8. 1980 оны аварга Б.Баасандорж, математикч.
9. 1981 оны аварга Б.Болдсайхан, анагаах ухааны доктор, мэс заслын эмч.
10. 1983 оны аварга Г.Хүрэлбаатар, Унгар улсад математикийн ухааны дэд докторын зэрэг хамгаалсан, АНУ-д ажилладаг.
11. 1985 оны аварга Б.Батцэнгэл, Япон улсад математикийн ухааны дэд доктор зэрэг хамгаалсан, МУИС-ийн багш.
12. 1986 оны аварга Л.Батболд, Мэдээлэл сурталчилгааны төвийн гүйцэтгэх захирал.
13. 1987 оны аварга С.Батболд, математикч, МУИС-ийн багш.
14. 1988 оны аварга З.Соёл-эрдэнэ, математикч агсан.
15. 1992 оны аварга Ц.Уламбаяр, Япон улсад суралцаж буй.
16. 1996 оны аварга Ц.Амарбат, мэдээлэл-технологийн мэргэжилтэн.
17. 1998 оны аварга Ө.Баттулга, МУИС-ийн ЭЗДС төгссөн, эдийн засагч.
18. 2001 рны аварга Т.Баасанжав, МУИС-ийн математикийн салбарын оюутан.

Анхны ОУМО-уудад оролцсон сурагчдаас тус сургуулийн сурагч ТИС-ийн багш агсан Ө.Энэбиш, ерөнхий сайд асан М.Энхсайхан, одоо Шинжлэх Ухааны Академийн эрдэмтэн нарийн бичгийн дарга доктор, академич Т.Галбаатар, СХД-ийн ИХТ-ийн тэргүүлэгчдийн дарга П.Ганбаатар, МУИС-ийн эрдэм шинжилгээний ажил эрхэлсэн проректор, математикийн ухааны доктор

Ц.Болдсүх нар амжилттай оролцож байсан бол 1980-аад оны сурагч болох математикийн ухааны дэд доктор Б.Баясгалан 1982 онд хүрэл медаль, Д.Ганболд 1984 онд мөнгөн медаль авч бу-сад олон сурагч амжилттай оролцож байв. Үүнээс гадна мон-голын анхны физикч эрдэмтэн, академич Н.Содном, магадла-лын онолын нэрт эрдэмтэн, ардын багш Лувсанцэрэнгийн Шаг-дар, гэгээрлийн яамны 1-р орлогч сайд агсан Дэнзэнгийн Гом-босүрэн, мөн орлогч сайд агсан, тус сургуулийн багш байсан Л.Шагдарсүрэн, гавьяат багш, профессор Ү.Санжмятав нарын олон нэрт эрдэмтэн, багш нар нэгдүгээр сургуулийн төгсөгчид бөгөөд тэд монголын математик сургалтын хөгжилд жинтэй хувь нэмэр оруулгаасан юм. Тухайлбал, Л.Шагдар багш магадлалын онолын, Ү.Санжмятав багш алгебрийн чиглэлээр анхны шавь сургуулиудыг байгуулан хөгжүүлсэн нь олон арван эрдэмтэний алдар цуугаа өргөсөн их сургууль болжээ.

ОУМО-тай холбоотой нэг зүйлийг тэмдэглэхэд Ү.Санжмятав багш гэхэд л манай улсын багийг 13 жил ахалж явсан байна. Ах-мад үеийн алдарт багш Ц.Шаравнямбуу, Х.Далхжав, С.Даший-маа, Ч.Палаан, Д.Цэрэндагва, С.Цагаан, Б.Бор, О.Отгонсүрэн, Л.Балжир, Д.Гүржав, Солийн Шарав нараас эхлээд дунд үеийн, өнөө үеийн олон багш нар монголын математик сургалтын хөг-жилд өөр өөрийн бодитой хувь нэмрээ оруулсан нь тэмдэглэгдэн үлджээ. Дунд болон өнөө үеийнхнээс манай орны ЕБС-ийн мате-матикийн хичээлийн сургалтын агуулга, хөтөлбөр, сурах бичиг зэргийг боловсронгуй болгох, сайжруулахад гэгээрлийн яамны орлогч сайд агсан, тус сургуулийн математикийн багш байсан эрдэмтэн Л.Шагдарсүрэн, УБИС-ийн багш Ш.Мягмар, багш И.Саньцар, Д.Буянхүү, Д.Пүрэвдорж нар идэвхтэй оролцож байг.

1990 оноос математик сургалтын хөгжлийн нэгэн үе эхэлсэн гэж болно. Юуны өмнө нийслэл хотын ба Сүхбаатар дүүргийн олимпиадыг ахмад багш С.Цагаан, С.Шарав нарын нэрэмжит болгон явуулж эхэлсэн. Эдгээр олимпиадыг анхлан санаачилсан, дэмжсэн олон багш, төгсөгчдийн дотроос багш Д.Нарангэрэл, за-хирал асан Н.Ганболд, хичээлийн эрхлэгч Ц.Гүррагчаа, Ц.Базар-

гочоо, ахмад төгсөгч Б.Баясгалан (1982 оны), Б.Түмэндэмбэрэл (1979), Н.Дагвадорж (1961), эрдэмтэн Л.Дашням (1961), академич Д.Цэрэн (1958), ахмад төгсөгч Б.Цэрэндондог (1961), Б.Чулуундорж (1978), ММО-ыг зохион байгуулах хорооны тэргүүн, доктор профессор Ц.Дашдорж, Улаанбаатар хотын боловсролын газрын математикийн мэргэжилтэн Т.Даваадорж болон С.Шарав багшийн хүүхдүүд Ш.Энх-амгалан, С.Цагаан багшийн хүүхдүүд Ц.Болд, Ц.Болдсүх нарыг онцлон дурдах нь зүйтэй. Мөн С.Цагаан багшийн олимпиадыг эхнээс нь ивээн тэтгэж буй МЦХК-ны захирал асан тус сургуулийн тооны ангийн төгсөгч, тоочин сурагчдын нэг байсан С.Ганбаатар, одоогийн захирал О.Шаалуу нар ихээхэн дэмжлэг үзүүлж хамтран ажиллаж байгаад талархаж байна.

Уламжлалт олимпиадууд нь олон сурагч, багш хамрагддаг, зохион байгуулахад хөрөнгө хүч, цаг хугацаа, бэлтгэл их шаарддаг, комиссын дарга, гишүүд, багш нар, сургуулийн удирдлагууд, олон сурагч, багш, эцэг эх хамрагддаг "нүсэр ажил" болдгийг тэмдэглэхэд илүүдэхгүй. Сүхбаатар дүүргийн ба Улаанбаатар хотын олимпиадыг олон жил тус сургууль, олимпиадын хорооны заавар журам, дэмжлэг дор зохион байгуулан явуулсаар ирлээ.

Тус сургууль өнгөрсөн хугацаанд олон улсын олимпиадад олон удаа амжилттай оролцож ирсэн бөгөөд зөвхөн сүүлийн арав гаруй жилд (1990 оноос хойш) 18 сурагч оролцож 9 медаль авчээ. Үүнийг хүснэгт №1-ээр үзүүлэв.

Онцлон тэмдэглэхэд, 2002 оны ОУМО-д оролцох багийг дан ганц нэгдүгээр сургуулийн сурагчид бүрдүүлж оролцсон явдал юм. Нэг улсын багийг 6 сурагч бүрдүүлдэг бөгөөд энэ жилийн багт тус сургуулийн 8-р ангийн сурагч С. Сайнбаяр, Ц. Гэрэлт, Б. Мэндбаяр, 10-р ангийн сурагч Д.Эрдэнэбулган, П.Оргил, 1-р курсийн оюутан Т.Баасанжав (2001 онд төгссөн) нар шалгаран, математикийн багш нарын улсын олимпиадын 5 удаагийн аварга, Дархан уул аймгийн багш З.Дайвий-Од удирдагч багшаар ажилласан байна. Их Британийн Шотландын Глазко. хотод болсон

энэ олимпиадаас сурагч С.Сайнбаяр, Ц.Гэрэлт, Т.Баасанжав нар хүрэл медаль авсан юм. Ц.Баяраа багшийн шавь 8-р ангийн сурагч С.Сүхбаатар, Ц.Гэрэлт, Б. Мэндбаяр нар нь энэ жилийн улсын олимпиадад ахлах ангийнхнаасаа илүү амжилт үзүүлж, улмаар ОУО-д амжилттай оролцсон. 2000 оны эхнээс манай улс, олон улсын хот хоорондын математикийн уулзалт тэмцээнд эчнээгээр оролцож эхэлсэн бөгөөд харин 2002 оны зун ОХУ-ын Белоречко хотод болсон олон хот хоорондын математикчдмйн чуулган, тэмцээнд багш Ц.Баяраа, 8-р ангийн сурагч А.Ганбат, 10-р ангийн сурагч П.Оргил нар анх удаа оролцож шагналт байранд орлоо.

"Багшийн эрдэм шавьд" гэдгээр сурагчдын амжилт бол багшийн хөдөлмөрийн үр шим билээ. Дээр дурдсан олон ахмад багш нараас гадна зарим багш нарынхаа тухай товч илтгэе.

Багш Цэрэндашийн Амарсанаа, шавь нараас нь: З.Оюун, Ч.Туул, М.Мэндбилэг, И.Саньпар, С.Ганбаатар, С.Туяа, Т.Чулуун, Н.Оюун, Д.Эрдэнэчимэг нарын,

багш Д.Буянхүү, шавь нараас нь: Ш.Эрдэнэ, Ц.Сарантуяа, Цогтоо, Дэмбэрэл, Болдсайхан, Итгэл, Намжилдорж. Амарбаатар нарын,

багш Ж.Дангаа, шавь нараас нь: Б.Баасандорж, Ц.Гантөмөр, Ж.Жамсран нарын,

багш Д.Нарангэрэл, шавь нараас нь: Г.Хүрэлбаатар, Н.Эрдэнэ, Билэгт, Б.Батцэнгэл, З.Соёл-эрдэнэ, Б.Доржсүрэн, Н.Наранзул, Эрдэнэ, Д.Бадарсан, Ц.Чимиддорж, А.Амарсанаа, Х.Зоригт, Ц.Билгүүн зэрэг,

багш Б.Амарбаясгалан, шавь нараас нь: Ц.Уламбаяр, Тэнгэр, Батмөнх, Ж.Лхагвасүрэн нарын,

багш Д.Пүрэвдорж, шавь нараас нь: Э.Жагдагдорж, С.Батболд, Ц.Долгор, Бат, Б.Саруул, Доржсүрэнгийн Пүрэвдорж нарын,

багш Ц.Баяраа, шавь нараас нь: М.Баярпүрэв, Билэгсайхан, С.Сайнбаяр, Ц.Гэрэлт, Х.Сайнжаргал, Б.Мэндбаяр, А.Ганбат, А.Лхамсүрэн, Н.Гантулга, Ж.Болор, Ц.Монголгал нарын,

багш Н.Эрдэнэ, шавь нараас нь: Ө.Баттулга, Б.Дэмчигсүрэн,
Ө.Чинзориг, Б.Монголжин нарын,

багш Н.Энхбаатар, шавь нараас нь: Ц.Пүрэвдорж, Ц.Амарбат,
А.Тэмүүжин, М.Ууганбаяр, П.Ганзориг, П.Эрдэнэбилэг,
П.Оргил, З.Энхмөнх, Д.Бэлгүтэй, Х.Батбаяр, Б.Анхбаяр,
Д.Эрдэнэбулган, Б.Жавхлан, Д.Баясгалант, Ц.Эрдэмбилэг
нарын,

багш Н.Баянбат, шавь нараас нь: Д.Мөнгөн, Ч.Энхчулуун,
И.Энхболд, Ц.Сувд, Б.Дашдэлэг, Б.Чандмань, Э.Төгөлдөр,
Б.Батбаяр нарын,

багш З.Бат-эрдэнэ, шавь нараас нь: Т.Баасанжав, Н.Энхбат,
Э.Уянга, Ө.Наранбилэг, Б.Эрдэнэтуяа, С.Өнөболд,
Д.Жаргалсайхан, Н.Бямбажав нарын,

багш Д.Бат-Орших, шавь нараас нь: Чинбат, Цэцболд, Ариун,
Золбаяр, Мэргэнбаяр

нарын зэрэг олон олон сайн шавь төрүүлсэн багш нараа нэмж
хэлэхэд таатай байна. .

Гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийн багш нараас гадна бага,
дунд ангийн олон сайн багш нар ажиллаж байсан, одоо ч ажил-
лаж байна. Багш С.Эрдэнэцэцэг, Бага ангийн багш нарын олим-
иадын 3 удаагийн аварга багш Жаргалсүрэн нар бага ангийн
багш нараас анх удаа Монголын математикийн багш нарын ака-
демийн гишүүн болсон. Дунд ангийн багш С.Чимиддорж,
Д.Самданпэрэнлэй, Б.Алтанцэцэг, Х.Батцэцэг, Д.Эрдэнэ нарын
олон олон сайн багш нарын хамтын хүч, сэтгэл, зүтгэлийн үр
шим их юм.

Ийнхүү өнөө үеийн математик хөгжлийн онцлог нь зөвхөн тус
сургууль холбоотой төдийгүй, улс орны хэмжээний өсөлтийн үе
гэж болохоор байна. Монголын математикчид, тэдний бэлт-
гэхэд нэг гол цөм нь болсон тус сургуулийн багш, сурагчдын
чансаа математикаар тэргүүлэх орнуудын математикчдын түв-
шинд хүрч, улмаар тэргүүн байрын төлөө өрсөлдөх чадвартай
болсон явдал хэмээн үзэж болно. Энэ бол монголын математикчид,

түүний дотроос тус сургуулиас улс эх орондоо оруулсан хөрөнгө оруулалт билээ.

1990 оноос хойш ОУМО-д оролцсон байдал

Хүснэгт №1

Он	Хаана	Шалгаран оролцсон сурагчид	Амжилт
1991	Швед	Б.Доржсүрэн, Ө. Зоригт, Д.Эрдэнэ	
1992	Орос	Ц.Уламбаяр, Б.Батзориг	
1993	Турк	Д.Ганболд	
1994	Гонконг	М.Баярпурэв	
1997	Аргентин	Ө.Баттулга	Алтан медаль
1998	Тайван	Ө.Баттулга, Б.Дэмчигсүрэн	Мөнгөн медаль Мөнгөн медаль
2000	БНСУ	А.Амарсанаа Т.Баасанжав	Хүрэл медаль Хүрэл медаль
2001	АНУ	Т.Баасанжав Н.Энхбат • П.Оргил	Мөнгөн медаль Хүрэл медаль
2002	Их Британи	С.Сайнбаяр Ц.Гэрэлт Б.Мэндбаяр Б.Анхбаяр Д.Эрдэнэбулган	Хүрэл медаль Хүрэл медаль

**Тус сургуулийн сурагчдаас Улсын ба Олон улсын
Математикийн олимпиадад оролцсон байдал**

Хүснэгт №2

Сурагчийн нэр	Анги	Он	Хаана явагдсан	Байр Медаль	Бэлтгэсэн багш
Олон улсын олимпиадад					
Б.Баясгалан	10	1982	Будапешт	хүрэл	С.Шарав
Л.Ганболд	10	1984	Чехословак	мөнгө	Батбаяр
Б.Саруул	10	1997	Түрк: "Евро-Ази"	хүрэл	Д.Пүрэвдорж
Ө.Баттулга	9	1997	Аргентин	алт	Н.Эрдэнэ
Б.Дэмчигсүрэн	10	1998	Тайвань	мөнгө	Н.Эрдэнэ
Б.Дэмчигсүрэн	10	1998	Түрк: "Евро-Ази"	алт	Н.Эрдэнэ
Ө.Баттулга	10	1998	Тайвань	мөнгө	З.Бат-Эрдэнэ
Т.Баасанжав	9	2000	БНСУ	хүрэл	З.Бат-Эрдэнэ
А.Амарсанаа	10	2000	БНСУ	хүрэл	Д.Бат-Орших
Т.Баасанжав	10	2001	АНУ-Вашингтон	мөнгө	З.Бат-Эрдэнэ
Н.Энхбат	10	2001	АНУ-Вашингтон	хүрэл	З.Бат-Эрдэнэ
С.Сайнбаяр	8	2002	Англи-Гласгоу	хүрэл	Ц.Баяраа
Ц.Гэрэлт	8	2002	Англи-Гласгоу	хүрэл	Ц.Баяраа
Улсын Математикийн олимпиадад					
Ө.Энэбиш	10	1967	УБ-т	1-р байр	Ц.Гарамсүрэн
П.Дармаа	10			2-5 байр	
Д.Батсуурь	10				
Ж.Цэвэгмид	10				
Д.Гүрбазар	10				
Д.Начин	10				
Ц.Болд	10	1970	УБ-т	2-р байр	С.Цагаан
Ч.Давааням	10			3-6 байр	
Лхагва	10				
Ж.Батсүх	10				
Цэвэлмаа	10				
Т.Чулуут	10	1971	УБ-т	3-р байр	Ц.Амарсанаа
С.Туяа	10			5-р байр	
Ц.Болдсүх нарын 8 сурагч	10	1972	УБ-т	2-6 байр	С.Цагаан
М.Энхсайхан	10	1973	УБ-т	3-р байр	С.Мягмар
Д.Пүрэвдорж	10			4-р байр	
Ш.Эрдэнэ	10	1975	УБ-т	2-р байр	Д.Буянхүү
Ц.Сарантуяа	10			5-р байр	

Сурагчийн нэр	Анги	Он	Хаана явагдсан	Байр Медаль	Бэлтгэсэн багш
А.Ганбаатар	10	1976	УБ-т	1-р байр	Д.Туул
Ц.Отгонсүх	10				
С.Хөдөлмөр	10			3-5 байр	
Пүрэв-Очир	10				
Г.Цогоо	10	1977	УБ-т	1-р байр	С.Цагаан
Г.Цогтоо	10	1978	УБ-т	1-р байр	Д.Буянхүү
Дэмбэрэл	10			3-4 байр	
Батбаатар	10				
Б.Түмэндэмбэрэл	10	1979	УБ-т	1-р байр	С.Шарав
Өлзийсайхан	10			3-р байр	
А.Цэлмэг	10			5-р байр	
Б.Баасандорж	10	1980	УБ-т	1-р байр	Ж.Лангаа
Б.Болдсайхан	10	1981	УБ-т	1-р байр	Д.Буянхүү
Б.Баясгалан	10	1982	УБ-т	2-р байр	С.Шарав
Л.Болд	10			3-р байр	
Г.Хүрэлбаатар	10	1983	УБ-т	1-р байр	Д.Нарангэрэл
Б.Билигт	10			2-р байр	
Б.Номуунбаяр	10			3-р байр	
Б.Эрдэнэ-Очир	10			4-р байр	
Н.Эрдэнэ	10			5-р байр	
Жандос	10	1984	УБ-т	1-р байр	Д.Пүрэвдорж
Б.Батцэнгэл	10	1985	УБ-т	1-р байр	Д.Нарангэрэл, С.Шарав, Д.Пүрэвдорж
Э.Жагдагдорж	8			1-р байр	
Л.Батболд	10	1986	УБ-т	1-р байр	Наранхүү, Д.Пүрэвдорж
Э.Жагдагдорж	9			1-р байр	
З.Соёл-Эрдэнэ	10			1-р байр	
С.Батболд	10	1987	УБ-т	1-р байр	Д.Пүрэвдорж
С.Сайнбаяр	10			2-р байр	
Э.Жагдагдорж	10			3-р байр	
Е.Даваасүрэн	10			-р байр	
Ц.Долгор	10			3-р байр	
Ц.Ганбат	10			3-р байр	
Батхишиг	10			3-р байр	
З.Соёл-Эрдэнэ	9			1-р байр	
З.Соёл-Эрдэнэ	10	1988	УБ-т	1-р байр	Д.Нарангэрэл
Ө.Зоригт	8			3-р байр	

Сурагчийн нэр	Анги	Он	Хаана явагдсан	Байр Медаль	Бэлтгэсэн багш
Загдрагчаа	10	1989	УБ-т	3-р байр	Д.Пүрэвдорж
Ө.Зоригт	9			2-4 байр	
Б.Доржсүрэн	9				
Б.Баасанбат	9				
Б.Доржсүрэн	10	1990	УБ-т	3-р байр	Д.Пүрэвдорж
Ө.Зоригт	10			4-р байр	
Н.Наранзул	8			1-р байр	Д.Нарангэрэл
А.Уламбаяр	9	1991	УБ-т	1-р байр	Б.Амарбаясгалан
Батзориг	9			3-р байр	
Н.Бат	8			1-р байр	Д.Пүрэвдорж
Д.Хасбаатар	8			2-р байр	
А.Уламбаяр	10	1992	Дархан	1-р байр	Б.Амарбаясгалан
Ч.Содгэрэл	10			5-р байр	
Батзориг	10			2-р байр	
Ж.Лхагвасүрэн	10			3-р байр	
С.Ганболд	9			3-р байр	
М.Өлзийдэлгэр	8			3-р байр	
С.Ганболд	10	1993	Дундговь	хүрэл	Д.Пүрэвдорж
М.Баярпүрэв	10	1994	Эрдэнэт	мөнгө	Ц.Баяраа
Ц.Чимиддорж	9			хүрэл	Д.Нарангэрэл
Д.Бадарсан	9			алт	Д.Нарангэрэл
Ц.Пүрэвдорж	8			алт	Н.Энхбаатар
Ц.Амарбат	8			мөнгө	
М.Ууганбаяр	9			хүрэл	
П.Ганзориг	9	1995	Архангай	хүрэл	
Ц.Пүрэвдорж	9			хүрэл	
Ц.Амарбат	10			алт	
П.Ганзориг	10			хүрэл	
М.Ууганбаяр	10			мөнгө	
Б.Саруул	9	1996	Баянхонгор	хүрэл	Н.Эрдэнэ
Ө.Баттулга	8			мөнгө	
Б.Монголжин	8			хүрэл	
Б.Хулан	8			хүрэл	
С.Баяржаргал	10	1997	Хужирт	хүрэл	Д.Пүрэвдорж

Сурагчийн нэр	Анги	Он	Хаана явагдсан	Байр Медаль	Бэлтгэсэн багш
Ө.Баттулга	10	1998	Хөвсгөл	алт	Н.Эрдэнээ
Б.Дэмчигсүрэн	10			хүрэл	Н.Баянбат
Энхчулуун	9			мөнгө	
А.Амарсанаа	8			алт	Д.Нарангэрэл
Э.Зоригт	8			хүрэл	З.Бат-Эрдэнэ
Т.Баасанжав	8			хүрэл	
Н.Энхбат	8	1999	Увс	алт	Д.Нарангэрэл
Т.Баасанжав	8			мөнгө	
Э.Уянга	8			мөнгө	
Х.Эрдэнэбилэг	8			хүрэл	
А.Амарсанаа	9			мөнгө	
П.Оргил	8	2000	Сэлэнгэ	алт	Н.Энхбаатар
Д.Бэлгүтэй	8			хүрэл	З.Бат-Эрдэнэ
З.Энхмөнх	8			хүрэл	
Х.Эрдэнэбилэг	8			хүрэл	
Т.Баасанжав	9			алт	
Э.Уянга	9			мөнгө	
Б.Эрдэнэтуяа	9			мөнгө	Д.Нарангэрэл
Ө.Наранбилэг	9			үрэл	
Х.Зоригт	10			хүрэл	
С.Сайнбаяр	8	2001	УБ, Найрамдал	алт	Ц.Баяраа
Б.Мэндбаяр	8			мөнгө	Н.Энхбаатар
Х.Сайнжаргал	8			хүрэл	
П.Оргил	9			алт	
Д.Эрдэнэбулган	9			хүрэл	З.Бат-Эрдэнэ
Б.Анхбаяр	9			хүрэл	
Т.Баасанжав	10			алт	
Н.Энхбат	10			хүрэл	
Ц.Гэрэлт	8	2002	УБ, I сур.	алт	Ц.Баяраа
А.Ганбат	8			мөнгө	Д.Пүрэвдорж Н.Энхбаатар
Х.Сайнжаргал	8			хүрэл	
Б.Мэндбаяр	8			хүрэл	
С.Сайнбаяр	9			алт	
Б.Ууганболд	9			хүрэл	
Д.Эрдэнэбулган	10			хүрэл	
Б.Анхбаяр	10			хүрэл	

МАТЕМАТИК-ФИЗИКИЙН ГҮНЗГИЙРҮҮЛСЭН
СУРГАЛТТАЙ АРВАН ЖИЛИЙН "ЭХЛЭЛ"
ДУНД СУРГУУЛЬ



"Эхлэл" сургуулийн затирал А.Энхжаргал

Үүсэл

Сурагч, тэдний сэтгэн бодох үйл ажиллагааг хөгжүүлэх замаар бие даан ажиллах, амьдрахад нь шаардагдах мэдлэг, чадвар, дадал эзэмшүүлж, цаашид их дээд сургуульд өөрийн сонирхсон мэргэжлээрээ суралцах нөхцөл бололцоог нь бүрдүүлж өгөх зорилгоор Математик-Физикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай 10 жилийн "Эхлэл" дунд сургуулийг 1999-2000 оны хичээлийн жилээс Хан-Уул дүүрэгт 5 багш, 100 сурагчтай анх байгуулж, математик, физикийн хичээлийг гүнзгийрүүлсэн тусгай программаар, бусад хичээлийг стандартын өндөр түвшинд явуулж эхэлсэн.

Багш нарын товч танилцуулга

1. *А.Энхжаргал (Сургуулийн затирал)*. 1986 онд МУИС-ийн математикийн ангийг математикч, математикийн багш мэргэжлээр төгссөн. Магистр, зөвлөх багш цол зэрэгтэй. 1992-1999 он хүртэл нийслэлийн XI сургуульд математикийн багш, тэнхимийн эрхлэгчээр, 1999 онд "Эхлэл" сургууль байгуулж, захирлаар нь ажиллаж байна. Ардын Боловсролын Тэргүүний Ажилтан, Соён гэгээрүүлэгч одонтой, 1992 оны Монголын Математикийн багш нарын Олимпиадын аварга, 1997 оны Улаанбаатар хотын ажил мэргэжлийн аварга, Монголын Математикийн Багш нарын Академийн жинхэнэ гишүүн, "Арифметик 4-5", "Математик 6", "Математик 7", "Алгебр 8" сурах бичгүүдийг зохиогч. Ажиллаж байх хугацаанд нь шавь нараас нь улсын аварга 3, мөнгөн медальт 6, хүрэл медальт 5 төрөн гарсан. Мөн Олон Улсын

Математикийн Олимпиадаас 2 мөнгө, 3 хүрэл медаль шавь нар нь авч байсан.

2. *М.Адилбиш (Дэд захирал)*. 1965 онд УБДС-ийн математикийн анги төгсөж, математикийн багшаар 38 жил тасралтгүй ажиллаж байгаа. 1970 онд сурган хүмүүжүүлэх ухааны дээд курст суралцаж төгссөн. Ардын Боловсролын Тэргүүний Ажилтан, магистр, зөвлөх багш цол зэрэгтэй. 1999 оноос эхлэн тус сургуулийн сургалт, хүмүүжлийн ажил эрхэлсэн дэд захирлаар ажиллаж байна. Шавь нараас нь хотын олимпиадын 2 хүрэл, улсын олимпиадын 2 мөнгөн медальт сурагчид төрөн гарсан. "Арифметикийн өгүүлбэртэй бодлого бодох арга", "Тригонометр функцүүд" зэрэг ном, сурах бичиг бичсэн.

3. *Б.Лхамноржмаа (Хичээлийн эрхлэгч)*. 1998 онд УБИС-ийн математикийн анги төгссөн. 1999 оны багш нарын ур чадварын уралдааны дүүрэг болон хотын аварга, магистр, тэргүүлэх багш цол зэрэгтэй. Ардын Боловсролын Тэргүүний Ажилтан, Монгол улсын боловсролын салбарт шинээр хэрэгжиж байгаа сургалтын цогцолбор арга болох "Данида" төслийн хүрээнд шавь төвтэй сургалтыг турших төслийг хэрэгжүүлсэн, одоо "Сурлага" сонины 1998-2003 оны бүх дугааруудад математикийн хичээлээр хүүхдэд зөвлөгөө өгч байна.

4. *Ц.Энхтуул (Физикийн багш)*. 1992-2002 оныг хүртэл нийслэлийн XI сургуульд физикийн хичээл зааж дүүрэг, хот, улсын олимпиадуудаас 30 медаль сурагчид нь авч байсан. Тэргүүлэх зэрэгтэй, магистр багш. Одоо "Эхлэл" сургуульд физикийн багшаар ажиллаж байна.

5. *Г.Батхуяг (Математикийн багш)*. 1986 онд МУИС-ийн математикийн ангийг математикч, математикийн багш мэргэжлээр төгссөн. 1995-2001 оныг хүртэл нийслэлийн XI сургуульд математикийн багшаар ажилласан. Шавь нараас нь улсын математикийн олимпиадаас 2 аварга, 2 мөнгө, 3 хүрэл медаль хүртэж байсан. Олон улсын математикийн олимпиадаас 2 хүрэл медальт төрөн гарч байсан. Ардын боловсролын тэргүүний ажилтан, тэргүүлэх зэрэгтэй.

6. *Ш.Доржсэмбээ (математикийн багш)*. 2000 онд УБИС-ийн математикийн анги төгссөн. "Эхлэл" сургуульд математикийн багшаар 3 дахь жилдээ ажиллаж байна. Мэдээлэл зүйн дүүргийн 2 удаагийн аварга, математикийн багш нарын олимпиадын 2 удаагийн дүүргийн аварга, дүүрэг, хот, улсын олимпиадуудаас сурагчид нь удаа дараа медальт байранд шалгарч байсан. Үүнд: хотод 2 хүрэл, улсын математикийн олимпиадаас 2 хүрэл медаль хүртсэн.

7. *Ч.Уранбилэг (Монгол хэл), Д.Нарангэрэл (Англи хэл), Х.Түмэнбаяр (Түүх, Нийгэм судлал), Ц.Батжаргал, Б.Сарантуяа, Д.Энх-Амгалан (Бага анги)* зэрэг өндөр мэдлэг боловсролтой, заах аргатай багш нар ажиллаж байна.

Сургуулийн ололт, амжилт

А. Математикийн олимпиадын сургуулийн амжилт

	Дүүрэг	Хот	Улс
1999-2000	III байр	III байр, хүрэл медаль	1 хүрэл медаль
2000-2001	I байр	III байр, хүрэл медаль	1 мөнгөн медаль
2001-2002	III байр	III байр	2 мөнгө, 2 хүрэл
2002-2003	I байр		

Б. Физикийн олимпиадын сургуулийн амжилт

1999-2000 оны хичээлийн жилд дүүрэгт I байр, 2000-2001 оны хичээлийн жилд дүүрэгт II байр, 2001-2002 оны хичээлийн жилд дүүрэгт III байр, Улсын Физикийн олимпиадаас 8-р ангид сурагч А.Баярхүү мөнгө, 9-р ангид сурагч М.Билгүүнтөгс хүрэл медаль хүлтсэн. 2002-2003 оны хичээлийн жилд дүүрэгт II байр эзэлсэн.

Мэдээлэл зүйн олимпиадад сүүлийн дөрвөн жил дараалан дүүрэгт тэргүүн байр, 2000 онд сурагч Б.Батбаатар Улсын олимпиадаас хүрэл медаль хүртэж, улмаар Хятад улсын Бээжин хотноо болсон олон улсын мэдээлэл зүйн олимпиадад оролцсон.

1999 оны П.Энхболдын нэрэмжит математикийн улсын уралдаанд сурагч Д.Мөнгөнсүх алт, сурагч М.Билгүүнтөгс хүрэл медаль,

- 2000** онд УБ хотын математикийн олимпиадаас Д.Барбаяр, А.Баярхүү нар хүрэл медаль,
- 2001** оны улсын математикийн олимпиадаас сурагч Б.Алтангэрэл мөнгөн медаль, П.Энхболдын нэрэмжит математикийн улсын уралдаанд сурагч Г.Мөнхболд хүрэл медаль,
- 2002** оны улсын математикийн олимпиадаас Х ангийн сурагч М.Билгүүнтөгс, Б.Алтангэрэл мөнгөн медаль, IX ангийн сурагч А.Баярхүү хүрэл медаль, VIII ангийн сурагч Д.Барбаяр хүрэл медаль хүртсэн.

Тус сургуулийн сурагчдаас дөрвөн жилд 100 гаруй медалийг улс, хот, дүүргийн олимпиадуудаас хүртсэн юм.

"Эхлэл" сургуулийн захиргаа

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН XXXVIII ОЛИМПИАДЫН VII
АНГИЙН III ДАВААНЫ БОДЛОГО

Б.Сандагдорж

VII-A1. $a > 0$, $ax^2 - 4bx + 4c = 0$ квадрат тэгшитгэлийн язгуурууд $[2, 3]$ завсарт харъяалагдана. Тэгвэл
а) $a \leq b \leq c < a + b$, б) $\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+a} > \frac{c}{c+b}$
тэнцэтгэл бишүүдийг батал.

VII-A2. n эерэг бүхэл тоо байг. $(2n+1)^3 - 2$ тоог $3n-1$ ширхэг нэгээс их тоонуудын квадратуудын нийлбэрт тавьж болохыг харуул.

VII-A3. ABC гурвалжны BK медиан, BE биссектрис, AD өндрийг татав. Хэрэв BK ба BE шулуунууд AD өндрийг гурван тэнцүү хэсэгт хуваах ба AB нь 4 урттай бол AC талын уртыг ол.

VII-B1. Хэрэв n -сондгой тоо бол $f(n) = 1$, n -тэгш тоо бөгөөд $n = 2^k \cdot m$ (энд m сондгой тоо) бол $f(n) = k$ гэж тодорхойлъё. $f(1) + f(2) + \dots + f(n) \leq 2002$ байх хамгийн их натурал n тоог ол.

VII-B2. 20 хүн шатрын тэмцээнд оролцон тойргоор (аль ч хоёр хүн хоорондоо яг нэг удаа тоглодог) тогложээ. Тоглолтонд хожсон хүн 1 оноо, тэнцвэл тус бүр 0.5 оноо, хожигдсон хүн 0 оноо авна. Тэмцээний дүрэм ёсоор авбал зохих нийт онооны 70%-аас дээш оноо авсан шатарчин спортын мастер болно. Хамгийн олондоо хэдэн спортын мастер төрөх вэ?

VII-B3. R радиустай тойргийн ямар нэг диаметр дээр тойргийг ч төвөөс a зайтай байх M цэг авав. Энэ диаметртэй параллель аливаа хөвчийн төгсгөлийн цэгүүдээс M цэг хүртэлх зайн квадратуудын нийлбэрийг ол.

VII-A1. а) x_1, x_2 нь квадрат тэгшитгэлийн язгуурууд байг. Виетийн томъёогоор $\frac{4b}{a} = x_1 + x_2 \geq 2 + 2 = 4$ гэдгээс $b \geq a$. Мөн Виетийн томъёогоор $\frac{4c}{a} = x_1 \cdot x_2$. $b \leq c < a + b$ тэнцэтгэл биш нь

$$\frac{4b}{a} \leq \frac{4c}{a}, \frac{4c}{a} < \frac{4b+4a}{a} = \frac{4b}{a} + 4 \text{ буюу } (x_1 + x_2) \leq x_1 \cdot x_2 < (x_1 + x_2) + 4$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) < 4 \quad (*)$$

тэнцэтгэл биштэй эквивалент юм. Тэгэхээр $x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) = (x_1 - 1)(x_2 - 1) - 1$ буюу $(*)$ тэнцэтгэл биш нь $1 \leq (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 5$ эквивалент. $x_1, x_2 \in [2, 3]$ учир энэ нь илэрхий.

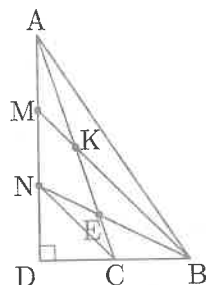
$$\text{б) } \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+a} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{b+c} = \frac{a+b}{b+c} > \frac{c}{b+c} \text{ болж батлагдана.}$$

VII-A2. $(2k+1)^3 - (2k-1)^3 = (4k)^2 + (2k+1)^2 + (2k-1)^2$ гэдэг нь хялбар гарна. Тиймээс $(2n+1)^3 - 1 = (2n+1)^3 - (2n-1)^3 + (2n-1)^3 - (2n-3)^3 + \dots + 3^3 - 1^3$ гэж бичиж болох буюу $3^3 - 1^3 = 4^2 + 3^2 + 1^2$ гэдгээс

$$(2n+1)^3 - 2 = 4^2 + 3^2 + \sum_{k=2}^n ((4k)^2 + (2k+1)^2 + (2k-1)^2)$$

болж бодлого бодогдоно.

VII-A3. Бодлогын нөхцөлөөс, өөрөөр хэлбэл AD өндрийг BK , BE шулуунууд гурван тэнцүү хэсэгт хуваана гэдгээс C өнцөг тохоо байх юм. BK медиан AD өндрийг M цэгээр, BE биссектрис AD өндрийг N цэгт огтолдог байг (зураг үз). Өгөгдсөнөөр $AM = MN = ND$ байна.



$\triangle BDA$ -ын хувьд биссектрисийн чанараар

$$\frac{ND}{DB} = \frac{NA}{AB} \text{ буюу } \frac{NA}{ND} = \frac{AB}{DB} = 2 \text{ гэдгээс } DB = 2 \text{ болно. Иймд } AD = \sqrt{AB^2 - DB^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}.$$

$\triangle ANC$ -ын хувьд MK дундаж шугам болно. Өөрөөр хэлбэл $NC \parallel MC \Rightarrow NC \parallel MB$. Эндээс $\triangle DMB$ -ын хувьд NC дундаж шугам болно. Иймд $DC = 1$ гэсэн үг.

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{12 + 1} = \sqrt{13} \text{ байна.}$$

VII-B1. $[x]$ -ээр x тооны бүхэл хэсгийг тэмдэглэдэг бөгөөд $[x] \leq x$ байдаг. $S(n) = f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) + f(n)$ гэж

тэмдэглэе.

$1, 2, \dots, n-1, n$ тоонууд дотор $\left[\frac{n}{2}\right]$ ширхэг тэгш тоо, 4-т хуваагддаг тоо $\left[\frac{n}{4}\right]$ ширхэг, 8-д хуваагддаг тоо $\left[\frac{n}{8}\right]$ ширхэг, 16-д хуваагддаг тоо $\left[\frac{n}{16}\right]$ ширхэг, 2^k -д хуваагддаг тоо $\left[\frac{n}{2^k}\right]$ ширхэг байна. Иймээс $f(k) = 1$ буюу k нь сондгой тоо байх тоо $\left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right)$ ширхэг; зөвхөн 2-т хуваагддаг, 4-т хуваагддаггүй тоо $\left(\left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{4}\right]\right)$ ширхэг; 4-т хуваагддаг, 8-д хуваагддаггүй тоо $\left(\left[\frac{n}{4}\right] - \left[\frac{n}{8}\right]\right)$ ширхэг байх юм. Тиймээс $S(n) = 1 \cdot \left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right) + 1 \cdot \left(\left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{4}\right]\right) + 2 \cdot \left(\left[\frac{n}{4}\right] - \left[\frac{n}{8}\right]\right) + 3 \cdot \left(\left[\frac{n}{8}\right] - \left[\frac{n}{16}\right]\right) + \dots = n + \left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n}{8}\right] + \left[\frac{n}{16}\right] + \dots$ байна. Тэгэхээр $S(n) \leq n + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \frac{n}{16} + \dots = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) \leq \frac{n}{2} + n = \frac{3n}{2}$ болох буюу $\frac{3n}{2} \leq 2002$ гэдгээс $n \leq 1334$ гэсэн үг. Иймд $S(1334) = 1334 + \left[\frac{1334}{4}\right] + \left[\frac{1334}{8}\right] + \left[\frac{1334}{16}\right] + \left[\frac{1334}{32}\right] + \left[\frac{1334}{64}\right] + \left[\frac{1334}{128}\right] + \left[\frac{1334}{256}\right] + \left[\frac{1334}{512}\right] + \left[\frac{1334}{1024}\right] = 1334 + 333 + 166 + 83 + 41 + 20 + 10 + 5 + 2 + 1 = 1995$.

$$S(1335) = S(1334) + f(1335) = 1995 + 1 = 1996$$

$$S(1336) = S(1335) + f(1336) = 1996 + 3 = 1999$$

$$S(1337) = S(1336) + f(1337) = 1999 + 1 = 2000$$

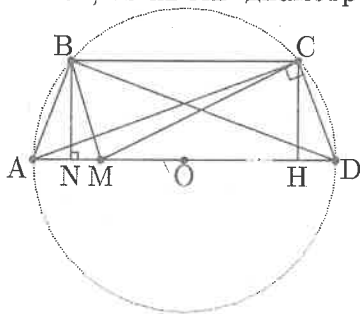
$$S(1338) = S(1337) + f(1338) = 2000 + 1 = 2001$$

$$S(1339) = S(1338) + f(1339) = 2001 + 1 = 2002$$

Эндээс $n = 1339$ гэж гарна.

VII-B3. AD диаметр, O тойргийн төв, M нь AD диаметр дээр орших цэг. $OM = a$, $AD = 2R$ байх юм. $BC = b$, $CH = h$ гэж тэмдэглэе. AD диаметр учир $\triangle ACD$ тэгш өнцөгт.

$$\begin{aligned} \text{Иймээс } CH^2 &= AH \cdot HD = \\ &= (AO + OH) \cdot (OD - OH) = \\ &= \left(AO + \frac{BC}{2}\right) \left(OD - \frac{BC}{2}\right) = \\ &= \left(R + \frac{b}{2}\right) \left(R - \frac{b}{2}\right) = R^2 - \frac{b^2}{4}. \end{aligned}$$



Нөгөө талаас $MB^2 = BN^2 + NM^2 = CH^2 + \left(\frac{BC}{2} - OM\right)^2 = R^2 - \frac{b^2}{4} + \left(\frac{b}{2} - a\right)^2 = R^2 - ab + a^2$. $MC^2 = CH^2 + MH^2 = CH^2 + \left(\frac{BC}{2} + OM\right)^2 = R^2 - \frac{b^2}{4} + \left(\frac{b}{2} + a\right)^2 = R^2 + ab + a^2$ гэж гарах тул $MB^2 + MC^2 = 2(R^2 + a^2)$ болно.

ММО-38, VIII ангийн III даваа

Т.Баасанжав

VIII-A1 (Ц.Батхүү). 2 хүн 1,2,3,4,5,6 цифрүүдийг ээлжлэн тавих замаар $2n$ оронтой тоо үүсгэж тоглоно. Гарсан $2n$ оронтой тоо 9-д хуваагддаг бол II хүн, эсрэг тохиолдолд I хүн хожино. Зөв тоглосон тохиолдолд I хүн хожих n -ийн утгуудыг ол.

VIII-A2 (Г.Баярмагнай). $x_1, x_2, \dots, x_n$ нь ялгаатай натурал тоонууд бол

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \frac{2n+1}{3}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

гэж батал.

VIII-A3 (Б.Батцэнгэл). Элдэв талт ABC гурвалжинд багтсан тойрог BC, CA, AB талуудыг A_1, B_1, C_1 цэгт шүргэнэ. AB, A_1B_1 шулуунууд D цэгт, AC, A_1C_1 шулуунууд E цэгт, BC, B_1C_1 шулуунууд F цэгт тус тус огтолцдог бол D, E, F цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

VIII-B1 (Б.Батцэнгэл). Аль ч мөчрийг нь яг нэг мөчир огтолдог байх 2002 хэрчмээс тогтох битүү тахир шугам олдох уу?

VIII-B2 (Г.Баярмагнай). 25×25 хүснэгтийн нүднүүдийн төвийг 3 өнгөөр будав. Оройнууд нь ижил өнгийн байх хүснэгтийн талуудтай параллель талуудтай тэгш өнцөгт олдохыг батал.

VIII-B3 (Г.Баярмагнай). ABC гурвалжин дотор M цэг өгөв.

M цэгийг гурвалжны оройтой холбосон шулуунууд эсрэг талуудтай A_1, B_1, C_1 цэгүүдэд огтолно. $S_{MAC_1} + S_{MBA_1} + S_{MCB_1} = \frac{S_{ABC}}{2}$ бол A_1, B_1, C_1 цэгүүдийн аль нэг нь харгалзах талынхаа дундаж цэг болохыг батал.

VIII-A1. $n \neq 9k$ байх аливаа n нь нөхцөлийг хангахыг харуулъя.

$n = 9$ үед II хүн I тоглогчийн тавьсан тоог нийлбэр нь 7 болтол гүйцээн тавих тактик баримтлан хожих боломжтой юм.

$n \neq 9$ үед $m = 7(n-1) + a \in \{0, 1, 2\} \pmod 9$ байх $\exists a \in \{1, 2, \dots, 6\}$ болохыг хялбархан шалгаж болно. Тэгэхээр I хүн эхлээд a -г тавиад дараагийн тавилтаас II хүний тавьсан тоог нийлбэрийг 7 болтол гүйцээн тавьсанаар хожих юм. Үнэхээр II хүн сүүлийн n дэх цифрээ тавихад 9-д хуваагдахгүй энэ цифрүүдийн нийлбэр $a + 7(n-1) + b \equiv b + m \pmod 9$. Энд $b \in \{1, 2, \dots, 6\}$, $m \in \{0, 1, 2\}$ гэдгийг санавал $b + m \not\equiv 0(9)$.

VIII-A2. $x_1, x_2, \dots, x_n$ тэгш эрхтэй тул $x_1 > x_2 > \dots > x_n$ гэж үзье. Тэгвэл $1 \leq x_1, 2 \leq x_2, \dots, n \leq x_n$ болох ба $x_k = k + y_k$ гэвэл $y_k \geq 0$ ба мэдээж $x_k - x_{k+1} \geq 1$ болохоор $y_k \geq y_{k+1}$ ба энд $k = \overline{1, n}$.

$$\sum_{k=1}^n (k + y_k)^2 \geq \frac{2n+1}{3} \cdot \sum_{k=1}^n (y_k + k)$$

гэж баталъя.

$$3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n y_k^2 + 6 \sum_{k=1}^n k y_k \geq (2n+1) \sum_{k=1}^n y_k + (2n+1) \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3 \sum_{k=1}^n y_k^2 + 6 \sum_{k=1}^n k y_k \geq (2n+1) \sum_{k=1}^n y_k \text{ ба } y_k \geq y_{k+1} \text{ болохоор Че-}$$

бышевийн тэнцэл бишээр $6 \sum k y_k \geq \frac{6 \sum k \cdot \sum y_k}{n}$ ба $6 \sum k \cdot \sum y_k = 3(n+1) \sum y_k \geq 2(n+1) \sum y_k$. Энд бодолтоос харахад $y_k = 0$, $k = \overline{1, n}$ буюу $x_k = k$ үед тэнцэлдээ хүрэх нь харагдаж байна.

VIII-A3. Менелайн теоремоор $\triangle ABC$, B_1, A_1, D цэгүүдийн

хувьд $\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$, B_1, C_1, F цэгүү-

дийн хувьд $\frac{BF}{CF} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1$, A_1, C_1, E

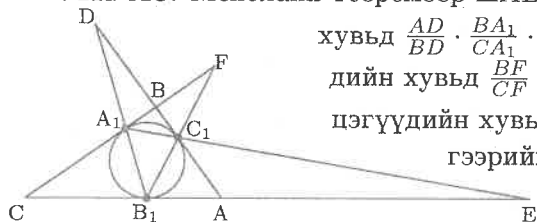
цэгүүдийн хувьд $\frac{CE}{AE} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} = 1$. Эд-

гээрийг үржүүлээд $BA_1 = BC_1$,

$AC_1 = AB_1$, $CB_1 = CA_1$

болохыг тооцвол

$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BF}{CF} \cdot \frac{CE}{AE} = 1$. Тэгэхээр Менелайн урвуу теоремоор D, F, E цэгүүд нэг шулуун дээр оршино.



VIII-B1. Олдоно. Тийм жишээг үзүүлье.

VIII-B2. $25^2 = 625 = 3 \cdot 208 + 1$ тул нэг өнгийн 209 нүд олдоно (тухайлаад, 1-р өнгийн).

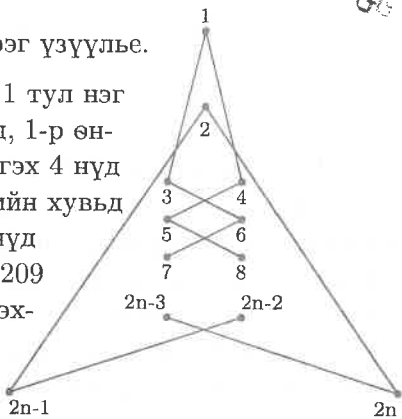
Эдгээрээс тэгш өнцөгт үүсгэх 4 нүд олдохыг баталъя. Дээрх нүднүүдийн хувьд i -р мөрөнд x_i ширхэг 1-р өнгийн нүд байг.

Тэгвэл $x_1 + x_2 + \dots + x_{25} = 209$ ба аль ч дөрвөн тэгш өнцөгт үүсгэхгүй гэвэл i -р мөрөн дэх j, k -р байранд 1-р өнгийн 2 цэг байсан бол бусад мөрийн j, k -р байранд зэрэг

1-р өнгийн нүд байж болохгүй.

Иймд $C_{x_1}^2 + C_{x_2}^2 + \dots + C_{x_{25}}^2 \leq C_{25}^2$, энд $C_{x_1}^2 + C_{x_2}^2 + \dots + C_{x_{25}}^2 = \frac{x_1^2 - x_1}{2} + \dots + \frac{x_{25}^2 - x_{25}}{2} = \frac{x_1^2 + \dots + x_{25}^2}{2} - \frac{209}{2} \geq \frac{(x_1 + \dots + x_{25})^2}{25 \cdot 2} - \frac{209}{2} = 769.12$

$\Rightarrow C_{25}^2 < 769$. Энэ нь боломжгүй юм. Иймд тэгш өнцөгт үүсгэх ижил өнгийн 4 нүд олдоно.



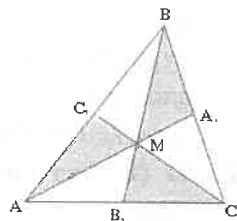
VIII-B3. $\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{\beta}{\gamma}$ гэе. Тэгвэл

Чевийн теоремоос $\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{\gamma}{\alpha}$ гэж гарна.

Тэгэхээр $S_{BCB_1} = S \cdot \frac{\gamma}{\alpha + \gamma}$ ба $S_{MB_1C} =$

$S_{BCB_1} \cdot \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}$ болохыг хялбархан харж

болно. Иймд $S_{MB_1C} = S \cdot \frac{\gamma\beta}{(\alpha + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)}$



ба үүнтэй адилаар

$$S_{MA_1B} = S \cdot \frac{\beta\alpha}{(\gamma+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}, \quad S_{MC_1A} = S \cdot \frac{\alpha\gamma}{(\beta\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

$$S_{MB_1C} + S_{MA_1B} + S_{MC_1A} = \frac{S}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta} + \frac{\gamma\beta}{\gamma+\alpha} + \frac{\beta\alpha}{\beta+\gamma} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(\alpha-\beta)\gamma}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha(\beta-\gamma)}{\beta+\gamma} + \frac{(\gamma-\alpha)\beta}{\gamma+\alpha} = 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha) = 0$$

ММО-38, VIII ангийн IV даваа

Б.Сандагдорж

VIII-A1 (П.Алтанцог). Робот 1 м-ээс бага зайд байгаа зүйлийг харах бөгөөд нэг удаад 1 м алхам хийнэ. Түүнийг 1 алхам хийсний дараа түүнд "бариад ойртож байна" эсвэл "бариад ойртохгүй байна" гэж хэлж өгнө. Тэгвэл робот бариад ойртохгүй байгаа тохиолдолд алдаагаа засах замаар 38.2002 м зайд байгаа бариад 62 алхамын дараа ямагт хүрч чадах уу? (Робот бариагаа харсан үед түүнийг хүрсэн гэж үзнэ)

VIII-A2 (Б.Сандагдорж). $a_n \leq a_{n-1} \leq \dots \leq a_1$ нөхцлийг хангах $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1}$ гэсэн n оронтой тоог "буурашгүй" тоо гээ. Аливаа натурал n -ийн хувьд $A^2 = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1}$ байх A^2 ба A нь "буурашгүй" байх A тоо олдох уу?

VIII-A3 (А.Хашбаатар). $BC \neq CA$ байх ABC гурвалжны A, B, C оройн дотоод өнцгийн биссектрисийн суурь харгалзан L_1, L_2, L_3 , AB талд татсан медианы суурь M_3 , өндрийн суурь H_3 болог. Хэрэв багтсан тойргийн AB талтай шүргэлцсэн цэг D , $H_3 M_3$ хэрчмийг таллан хуваавал $S_{\Delta L_1 L_2 L_3} = S_{\Delta CL_1 L_2}$ гэж батал.

VIII-B1 (Б.Батцэнгэл). $\{a_n\}$ дараалал $a_1 = 1$, $a_2 = 38$ ба $n \geq 1$ үед $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ рекурент харьцаагаар тодорхойлогд-

$\frac{5 \cdot 10^{n-1} + 1}{3}, y_n = \frac{10^n + 2}{3}$ тоонуудыг авч үзье. Натурал n бүрийн хувьд x_n, y_n тоонууд "буурашгүй" гэдэг нь илэрхий. Одоо x_n^2, y_n^2 тоонууд "буурашгүй" ба x_n^2 тоо $2n-1$ оронтой, y_n^2 тоо $2n$ оронтой гэдгийг харуулъя.

$$x_1^2 = 4, x_2^2 = 289 \text{ ба } n \geq 3 \text{ үед}$$

$$x_n^2 = \frac{25 \cdot 10^{2n-2} + 10^n + 1}{9} = \frac{2(10^{2n-1} - 1)}{9} + \frac{5(10^{2n-2} - 1)}{9} + \frac{10^n - 1}{9} + 1 = \underbrace{22 \dots 2}_{2n-1} + \underbrace{55 \dots 5}_{2n-2} + \underbrace{11 \dots 1}_n + 1 = \underbrace{27 \dots 78 \dots 89}_{2n-1} \text{ байна.}$$

$$y_1^2 = 16 \text{ ба } n \geq 2 \text{ үед}$$

$$y_n^2 = \frac{10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 4}{9} = \frac{10^{2n} - 1}{9} + \frac{4(10^n - 1)}{9} + 1 = \underbrace{11 \dots 1}_{2n} + \underbrace{44 \dots 4}_n + 1 = \underbrace{1 \dots 15 \dots 56}_{2n} \text{ болно. Иймд бодлого бодогдлоо.}$$

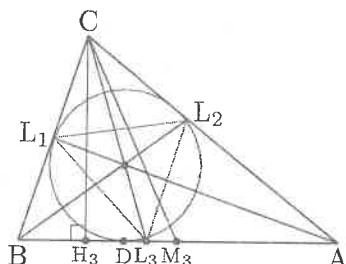
VIII-A3. $AB = c, AC = b, BC = a$ ($a \neq b$), $\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$ гэж тэмдэглэе. $BD = p - b$ тул $H_3D = BD - BH_3 = (p - b) - a \cos \beta, DM_3 = AD - AM_3 = (p - a) - \frac{c}{2}, H_3D = DM_3$ гэж өгсөн учир $p - b = a \cos \beta = p - a - \frac{c}{2}$ буюу $a - b - a \cos \beta + \frac{c}{2} = 0$ (*)

болно. (*) тэнцлийг $2c$ -ээр үржүүлж $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$ ашиглавал $2c(a - b) + (b^2 - a^2 - c^2) + c^2 = 0$ буюу $2c(a - b) + b^2 - a^2 = 0 \Rightarrow (a - b)(2c - (a + b)) = 0, a \neq b$ учир $a + b = 2c$ болно.

Биссектрисийн чанар $\frac{CL_2}{L_2A} = \frac{a}{c} \Rightarrow \frac{CL_2}{b - CL_2} = \frac{a}{c} \Rightarrow CL_2 = \frac{ab}{a+c}$ болно. Үүнтэй адил $CL_1 = \frac{ba}{b+c}, AL_2 = \frac{bc}{a+c}, AL_3 = \frac{bc}{a+b}, BL_1 = \frac{ac}{b+c}, BL_3 = \frac{ac}{a+b}$ болно. $S_{CL_1L_2} = S_C, S_{AL_2L_3} = S_A, S_{FL_1L_3} = S_B, S_{ABC} = S$ гэвэл

$$\frac{S_C}{S} = \frac{\frac{1}{2}CL_1 \cdot CL_2 \cdot \sin \gamma}{\frac{1}{2}CB \cdot CA \cdot \sin \gamma} = \frac{\frac{ab}{b+c} \cdot \frac{ab}{a+c}}{ab} = \frac{ab}{(b+c)(a+c)}$$

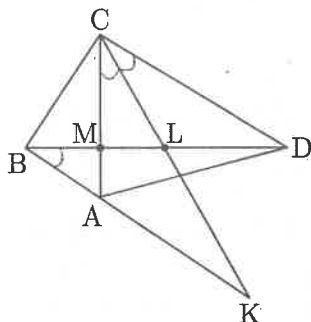
болно. Үүнтэй адилаар $\frac{S_B}{S} = \frac{ac}{(b+a)(b+c)}, \frac{S_A}{S} = \frac{bc}{(a+c)(a+b)}$ болно.



Эндээс $\frac{S}{(a+b)(a+c)(b+c)} = \frac{S_C}{ab(a+b)} = \frac{S_B}{ac(a+c)} = \frac{S_A}{bc(b+c)}$ буюу $S_{L_1L_2L_3} = S - S_A - S_B - S_C = \frac{2abcS}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ болно. Нөгөө талаас $a+b=2c$ учир $S_C = \frac{2abcS}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ болж $S_{L_1L_2L_3} = S_{CL_1L_2}$. Бодлого батлагдав.

VIII-B2. $a_1, a_2, \dots, a_{163}$ нь өгөгдсөн тоонууд, p_1, p_2, p_3, p_4 нь тэдгээрийг анхны тоон хуваагчид нь болог. $a_k, k = \overline{1, 163}$ тооны эгэл задаргаа нь $a_k = p_1^{\alpha_k} \cdot p_2^{\beta_k} \cdot p_3^{\gamma_k} \cdot p_4^{\delta_k}, k = \overline{1, 163}$ болог. α_k тоог 3-т хуваахад гарах үлдэгдлийг $f(\alpha_k)$ гэж тэмдэглэе. a_k тоо бүрт 4 урттай $\{f(\alpha_k), f(\beta_k), f(\gamma_k), f(\delta_k)\}$ үг харгалзуулъя. Ийм үгийн тоо $3^4 = 81$ ширхэг. $163 = 81 \cdot 2 + 1$ тул Дирхлейн зарчмаар ижил үг дор хаяад 3 олдono. Энэхүү 3 үгэнд харгалзах 3 тооны үржвэр бүхэл тооны 3 зэрэгт болно.

VIII-B3. CK биссектрис BD -тэй L цэгт огтлолцсон байг. Биссектрисийн чанараар $\frac{MC}{ML} = \frac{CD}{LD}$ гэдгээс $\frac{MC}{ML} = \frac{MC+CD}{ML+LD} = \frac{MC+CD}{MD}$ болно. Нөгөө талаас өгсөн нөхдлөөр $MA \cdot (MC+CD) = MB \cdot MD$ гэдгээс $\frac{MC+CD}{MD} = \frac{MB}{MA}$ буюу $\frac{MC}{ML} = \frac{MB}{MA}$ болно. Иймээс $\triangle BMA$ ба $\triangle CML$ төсөөтэй гэдгээс $\angle MBA = \angle MCL$. Гэтэл $\angle MCL = \angle LCD$ гэдгээс $\angle KBD = \angle MBA = \angle LCD = \angle KCD$. Эндээс C, D, K, B цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Иймд $\angle BKC = \angle BDC$ болж батлагдав.



ММО-38, IX АНГИЙН III ДАВАА

Б.Баяржаргал

IX-A1 (Б.Баяржаргал). $\angle ACB > \angle ABC$ байх ABC гурвалжны A өнцгийн биссектрис BC талыг D цэгт огтолно. AB тал дээр E цэгийг $\angle EDB = 90^\circ$ байхаар, AC тал дээр F цэ-

гийг $\frac{AD}{DF} = \frac{AC}{AB} + 1$ байхаар туст тус авчээ. $\angle BED = \angle FED$ болохыг батал.

IX-A2 (Б.Баяржаргал). 38×38 хүснэгтийн нүднүүдийг 2 өнгөөр аль ч 3×3 хүснэгтэд байгаа 9 нүд бүгд ижил өнгөтэй байхгүйгээр будах боломжийн тоог N гэе. $N > 4 \cdot 14^{361}$ болохыг батал.

IX-A3 (Б.Баяржаргал). $n \geq 3$ үед $b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \dots < b_n < a_n$ байх арифметик прогресс үүсгэх $a_1, a_2, \dots, a_n$ геометр прогресс үүсгэх $b_1, b_2, \dots, b_n$ гэсэн натурал тоонууд олдохыг батал.

IX-B1 (Б.Баяржаргал). I нь ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв ба D, E нь харгалзан AC, AB талуудын дунджууд. DI ба EI шулуунууд нь харгалзан AB ба AC -г P ба Q цэгээр огтолдог бол $AP \cdot AQ = AB \cdot AC$ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\angle A = 60^\circ$ байх явдал гэж батал.

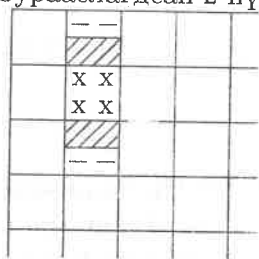
IX-B2 (Б.Баяржаргал). Аль ч 2 бүхэл тооны квадратуудын нийлбэрт задардаг, дараалсан 3 натурал тоо төгсгөлгүй олон олдохыг батал.

IX-B3 (Б.Баяржаргал). $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ нөхцлийг хангах бодит x, y, z тоонуудын хувьд $7xy + 11xz + 13yz$ илэрхийллийн авч болох хамгийн бага утгыг ол.

IX-A1. Бодлогын өгүүлбэр алдаатай болсон. F цэгийг 2 янзаар авч болно. Нэг цэг нь нөхцлийг хангана, нөгөө нь хангахгүй.

IX-A2. 2×2 хүснэгтүүд болгон хуваая. Зурааслагдсан 2 нүдийг 2 өөр өнгөөр будах боломж 2, нөгөөх нь мөн 2 боломжтой, харин $(-)$ тэмдэгтэй нүднүүд нь ямар ч өнгөөр будагдсан байж болно. Иймд $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ боломжтой. Харин үлдсэн $361 - 3 = 358$ 2×2 нүднүүдийг ижил өнгөөр будагдаагүй байхаар будах боломжийн тоо $(16 - 2)^{358}$ болно.

Иймд $2 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 14^{358}$ болно. Ижил өнгөөр будсан 2×2 хүснэгт

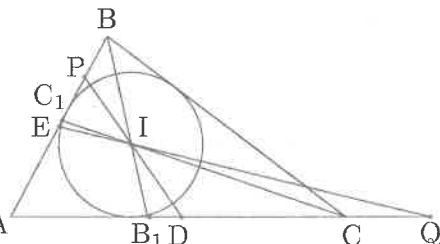


нь $17 \cdot 19$ боломжтой. Иймд $64 \cdot 14^{358} \cdot 17 \cdot 19$ боломжтой болно. Ингэж будсан байх үед хаана ч 3×3 хүснэгтийг сонгон авахад бүгд ижил өнгөтэй байхгүй учир $N \geq 64 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 14^{358} > 4 \cdot 14^{361}$ болж батлагдав.

IX-A3. $a_n = 1 + \frac{n+1}{10^k}$, $b_n = \left(1 + \frac{1}{10^k}\right)^n$ гэж авъя. $b_{n+1} < a_n$ гэдэг нь Бернуллийн тэнцэтгэл бишээр үнэн. $a_n > b_n$ байх k -г олдохыг баталъя. $1 + \frac{n+1}{10^k} > \left(1 + \frac{1}{10^k}\right)^n = 1 + \frac{n}{10^k} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{10^{2k}} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot \frac{1}{10^{3k}} + \dots + \frac{1}{10^{nk}} \Rightarrow \frac{1}{10^k} > \frac{n(n-1)}{2 \cdot 10^{2k}} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6 \cdot 10^{3k}} + \dots + \frac{1}{10^{nk}} \Rightarrow 10^k > \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6 \cdot 10^k} + \dots + \frac{1}{10^{(n-2)k}}$. n -г тогтмолоор авахад уг тэнцэтгэл биш биелэхээр k олдоно.

IX-B1. $BC = a$, $AC = b$,

$AB = c$. $\triangle AC_1C$ ба PD шулууны хувьд Менелайн теоремийг бичвэл $\frac{CD}{DA} \cdot \frac{AP}{PC_1} \cdot \frac{C_1I}{IC} = 1$
 $\Rightarrow \frac{AP}{IC} = \frac{PC_1}{IC_1} = \frac{AP - PC_1}{IC - IC_1} = \frac{AC_1}{(a+b-c)x}$, энд $IC = (a+b)x$,
 $IC_1 = cx$. $\frac{AP}{(a+b)x} = \frac{AC_1}{(a+b-c)x} \Rightarrow$



$$AP = \frac{AC_1}{a+b-c} \cdot (a+b) = \frac{\frac{bc}{a+b} \cdot (a+b)}{a+b-c} = \frac{bc}{a+b-c}$$

$\triangle ABB_1$ ба EQ шулууны хувьд Менелайн теорем бичвэл $\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BI}{IB_1} \cdot \frac{B_1Q}{QA} = 1 \Rightarrow \frac{QA}{BI} = \frac{B_1Q}{B_1I} = \frac{QA - QB_1}{BI - B_1I} = \frac{AB_1}{BI - B_1I} \Rightarrow$

$$QA = \frac{AB_1}{a+c-b} \cdot (a+c) = \frac{\frac{bc}{a+c} \cdot (a+c)}{a+c-b} = \frac{bc}{a+c-b}$$

$$AP \cdot AQ = \frac{bc}{a+b-c} \cdot \frac{bc}{a+c-b} = bc \Rightarrow (a+b-c)(a+c-b) = bc \Rightarrow a^2 - (b-c)^2 = bc \Rightarrow a^2 - b^2 - c^2 + bc = 0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc \Rightarrow \angle A = 60^\circ.$$

Хэрэв $\angle A = 60^\circ$ бол $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ буюу $(a+b-c)(a+c-b) = bc$ буюу $AP \cdot AQ = AB \cdot AC$ болно.

IX-B2. $x^2 = 2y^2 + 1$ гэсэн Пеллийн тэгшитгэл нь төгсгөлгүй олон шийдтэй. $n = 2y^2 = y^2 + y^2$, $n+1 = 2y^2 + 1 = x^2 + 0^2$,

$n+2 = x^2 + 1^2$ болж энэ гурван тоо нь бодлогын нөхцлийг хангана.

IX-B3. $0 \leq 3(3x+y+2z)^2 + (x+5y+4z)^2 = 28x^2 + 28y^2 + 28z^2 + 28xy + 44xz + 52yz = 28 + 4(7xy + 11xz + 13yz) \Rightarrow 7xy + 11xz + 13yz \geq -7$ болно. $x = \frac{3}{\sqrt{83}}, y = \frac{5}{\sqrt{83}}, z = -\frac{7}{\sqrt{83}}$ үед $7xy + 11xz + 13yz = -7$ болно.

ММО-38, IX ангийн IV даваа

Б.Баяржаргал

IX-A1 (Ч.Алтаннар). $n \times n$ хүснэгтийн k нүдийг хараар будав. Тэгвэл мөр эсвэл баганын будагдсан нүдний 50%-аас их нь будагдсан байвал тэр мөр эсвэл баганыг хараар будах үйлдэл зөвшөөрөгдөнө. Тэгвэл бүх хүснэгтийг хар болгож чадах k -ийн хамгийн бага утгыг ол.

IX-A2 (Г.Баярмагнай). Зөв $\triangle ABC$ -ны дотор P цэг өгөв. $AP \cdot AX + BP \cdot BX + CP \cdot CX$ илэрхийлэл хамгийн бага утгаа авах X утгыг ол.

IX-A3 (Г.Баярмагнай). $\frac{1 + 2^{2m} + 2^{2n}}{1 + 2^m + 2^n} \in \mathbb{N}$ байх бүх натурал (m, n) хос тоог ол.

IX-B1 (А.Хашбаатар). ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв J , AB талын гадуур багтсан тойргийн төв J_3 , хүндийн төв M болог. Хэрэв $2CJ = JJ_3$ бол $MJ \parallel AB$ гэж батал.

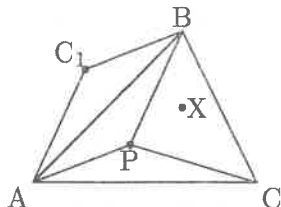
IX-B2 (В.Адъяасүрэн). a_k, b_k ($k = 1, 2, \dots, n$) нь $a_k, b_k \in [2, 3]$ ба $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k$ байх бодит тоонууд бол $\sum_{k=1}^n \frac{a_k^3}{b_k} \leq \frac{97}{78} \sum_{k=1}^n a_k^2$ гэж батал. Тэнцэтгэлдээ хүрэх нөхцлийг тогтоо.

IX-B3 (Б.Баяржаргал). $\frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} - \frac{b_{n-1}}{b_n^2} + 3(b_{n-2} - b_{n-1}) = 0$, $b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = \frac{1}{4}$ бол дарааллын ерөнхий гишүүний томъёог ол.

IX-A1. $n^2 - \left[\frac{n+1}{2}\right]^2$ ширхэг нүд нь будагдсан ба үйлдлээ хийгээд гүйцээж будаж болохгүй жишээг хялбар байгуулж болно. Одоо $S = n^2 - \left[\frac{n+1}{2}\right]^2 + 1$ ширхэг нүдийг яаж ч будсан үргэлж гүйцээж будаж болно гэдгийг харуулъя. Эсрэгээс нь ямар нэг S нүдийг будахад гүйцээж будаж болдоггүй байг. Тэгвэл бид хийж болох бүх үйлдлээ хийчихсэн гэвэл ямар нэг мөр эсвэл баганы $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ -ээс багагүй нь будагдаагүй байна. Түүнийгээ мөр гээд үзээд явцуурах зүйл байхгүй. Тэгвэл энэ мөрийн будагдаагүй нүднүүдийн орших баганууд нь мөн $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ -ээс багагүй нь будагдаагүй багана байна. Иймд нийт будагдаагүй нүдний тоо $\left[\frac{n+1}{2}\right]^2$ -аас багагүй байна. Будагтай нүд будагдаагүй нүд хоёрын нийлбэр $n^2 - \left[\frac{n+1}{2}\right]^2 + 1 + \left[\frac{n+1}{2}\right]^2 = n^2 + 1$ болж зөрчилд оров.

IX-A2. P цэгийн AB, BC, CA талуудын дундаж цэгийн хувьд тэгш хэмтэй орших цэгүүдийг харгалзан C_1, A_1, B_1 гэе.

AC_1BX дөрвөн өнцөгтийн хувьд Птолмейн тэнцэл биш бичвэл $C_1B \cdot AX + C_1A \cdot BX = AP \cdot AX + BP \cdot BX \geq AB \cdot XC_1$ болно. Үүнтэй адилаар бусад тэнцэл бишийг бичээд нэмбэл



$$\begin{aligned} AP \cdot AX + BP \cdot BX + CP \cdot CX &\geq AB \cdot XC_1 + BC \cdot XA_1 + AC \cdot XB_1 = \\ &= \frac{1}{2} AB(XC_1 + XB_1 + XA_1) \end{aligned} \quad (1)$$

болохыг үзүүлж болно. X цэг $A_1B_1C_1$ гурвалжны Торчиллийн цэг байх үед (1) тэнцэл бишийн зүүн тал хамгийн бага утгаа авна. Энэхүү бодолт нь өгөгдсөн нийлбэрийг доороос нь үнэлж байгаа боловч X цэгийг олоогүй бодолт юм.

IX-A3. $m \geq n$ гэе. $(1 + 2^n + 2^m)^2 - (1 + 2^{2n} + 2^{2m}) = 2(2^n + 2^m + 2^{n+m}) = 2^{n+1}(1 + 2^{m-n} + 2^m)$ байх учир $1 + 2^n + 2^m \mid 1 + 2^{m-n} + 2^m$ болно. $2 \cdot (2^m + 2^{m-n} + 1) > 1 + 2^n + 2^m$ учраас $2^m + 2^{m-n} + 1 =$

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 3n + 1 \Rightarrow b_{n+1} = \frac{b_n}{3n+1} \quad \times \quad \begin{cases} b_{n+1} = \frac{b_n}{3n+1} \\ b_n = \frac{b_{n-1}}{3(n-1)+1} \\ \dots\dots\dots \\ b_2 = \frac{b_1}{3 \cdot 1 + 1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$b_{n+1} = \frac{b_1}{(3n+1)(3n-2)\dots(3 \cdot 2 + 1)(3 \cdot 1 + 1)} = \frac{1}{4 \cdot 7 \cdot 10 \dots (3n-2)(3n+1)}.$$

ММО-38, X ангийн III даваа

Г.Баярмагнай

X-A1 (Г.Баярмагнай). 2000 хотыг k ширхэг замаар яаж ч хол-
босон аль ч хотоос нь аль ч хотод очиж болдог бол k -ийн
хамгийн бага утгыг ол.

X-A2 (Г.Баярмагнай). Зөв 2003 өнцөгтийн оройнуудыг цагийн
зүүний дагуу $1, 2, \dots, 2003$ гэж дугаарлав. Ямар нэг дөр-
вөн оройн тоонуудыг хос хосоор нь диагональчилж солих
(AC, BD диагоналиуд бол A -г C -тэй, B -г D -тэй солино)
үйлдлээр бүх тоог цагийн зүүний эсрэг чиглэлд дэс дараалан
байрлуулж болох уу?

X-A3 (У.Наранхүү). Тойрогт багтсан $ABCD$ гүдгэр дөрвөн
өнцөгтийн AB ба CD тал дээр харгалзан P ба Q цэг өгөгдөв.
 PQ хэрчмийн M цэгийн хувьд ABM, CDM гурвалжнуудыг
багтаасан тойргуудын огтлолцолын цэгийн геометр байрыг
ол.

X-B1 (Г.Баярмагнай). $t(n)$ -ээр натурал n тооны аравтын бич-
лэг дэх цифрийн тоог тэмдэглэе. Натурал тоонуудаас тог-
тох $\{b_n\}$ геометр прогрессын хувьд $\{t(b_n)\}$ дараалал нь ариф-
метик прогресс үүсгэдэг байв. Тэгвэл $\{b_n\}$ геометр прогрес-
сын хуваарь 10-ын ямар нэгэн зэрэг гэж батал.

Х-В2 (Г.Баярмагнай). Хоорондоо ялгаатай эерэг $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ тоонуудыг талуудын уртаа болгосон гурвалжны тоо N бол N -ийн авч болох бүх утгыг ол.

Х-В3 (Г.Баярмагнай). α хавтгай нь $ABCD$ тетраэдрийн багтаасан бөмбөрцөгийг A цэгт шүргэнэ. ABC , ACD ба ABD талсуудын α хавтгайтай огтлолцоход үүсэх 3 шулуун хоорондоо тэнцүү өнцөг үүсгэж байх гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$ тэнцэл биелэх явдал мөн гэж батал.

Х-А1. Хотуудаа цэг замуудаа хэрчим гэж үзье. 1999 оройтой бүтэн графыг үлдсэн цэгтэй нь холбохын тулд $C_{1999}^2 + 1$ ширхэг хэрчим шаардлагатай. Иймд бидний олох тоо $C_{1999}^2 + 1$ гэдгийг харуулъя. Хэрэв 2000 цэгийг $C_{1999}^2 + 1$ хэрчмээр холбоход s ширхэг үл огтлолцох ($s \geq 2$) компонентед хуваагдсан байвал хэрчмүүд нэмэх замаар хоёр ширхэг үл огтлолцох компонент гэж үзэж чадна. $a + b = 2000$ байхаар хоёр үл огтлолцох компонент үүссэн гэж бодъё. Энд $a, b \geq 2$ гэж үзэж болох нь ойлгомжтой. Тэгвэл $C_a^2 + C_b^2 < C_{1999}^2 + 1$ байхыг баталъя. $2000^2 = 1999^2 + 1 + 2 \cdot 1999 \leq 1999^2 + 1 + 2ab$. $(a + b)^2 \leq 1999^2 + 1 + 2ab$ буюу $a^2 + b^2 \leq 1999^2 + 1$ болно. Эндээс $\frac{a^2 - a}{2} + \frac{b^2 - a}{2} \leq \frac{1999 \cdot 1998}{2}$ буюу $C_a^2 + C_b^2 < C_{1999}^2 + 1$ болж батлагдав. Энэ нь үл огтлолцох компонентууд байж болохгүйг харуулна.

Х-А2. Анх байрласан тоонуудаар тоонуудын байрыг нь дугаарлая. Тэгвэл манай бодлого $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2003 \\ 1 & 2 & \dots & 2003 \end{pmatrix}$ сэлгэмэл

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \dots & \dots & 2003 \\ k & \dots & 21 & 2003 & \dots & k+1 \end{pmatrix}$$

сэлгэмэлд өгөгдсөн үйлдлээр шилжиж болох уу гэсэнтэй адил.

Өгөгдсөн үйлдэл маань сэлгэмэлийн инверсийн тоог тэгшээр өөрчилж байгаа нь ойлгомжтой. Гэтэл σ_1 -ийн инверсийн тоог

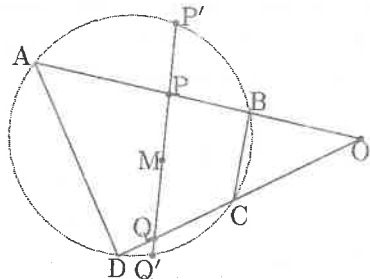
тэг, σ_2 -ийн инверсийн тоо

$$1 + \dots + (k-1) + 1 + \dots + (2003 - (k+1)) = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{2002-k}{2}(2003-k)$$

буюу ямар ч k -ийн хувьд сондгой тоо байна.

Иймд σ_1 -ээс σ_2 -д шилжих боломжгүй.

X-A1. $ABCD$ -г багтаасан ω тойрогтой PQ шулуун P' ба Q' цэгээр огтлолцож байг. $O = AB \cap CD$, AMB ба DMC гурвалжнуудыг багтаасан ω_1 ба ω_2 тойргийн M -ээс ялгаатай огтлолцох цэгийг X гэе. $r = \sqrt{OB - OA}$ радиустай O -д төвтэй инверсээр I_O^r :



$A \leftrightarrow B$
 $C \leftrightarrow D$ байх

тул I_O^r : $\omega_1 \leftrightarrow \omega_1$
 $\omega_2 \leftrightarrow \omega_2$ байна.

Иймд $I_O^r(M) = X$ гэж үзэж болно. Инверсээр шулуун инверсийн төвийг дайрсан тойрогт буудаг тул PQ хэрчмийн дүр ω тойргийн төв ба P', Q' цэгийг дайрсан тойргийн нумд бууна. Иймд уг нум нь X цэгийн геометр байр болно.

X-B1. Эсрэгээс нь үзье. Тэгвэл

$$t(b_1) = n, \quad t(q) = m \Leftrightarrow 10^{n-1} < b_1 < 10^n, \quad 10^{m-1} < q < 10^m$$

Өгөгдсөнөөр $10^{n+sm-1} < b_{s+1} < 10^{n+s \cdot m}$ байх ёстой. $b_{s+1} = b_1 \cdot q^s$ учраас

$$10^{s \cdot m-1} = \frac{10^{n+s \cdot m-1}}{10^n} < \frac{b_{s+1}}{b_1} = q^s < \frac{10^{n+s \cdot m}}{10^{n-1}} = 10^{s \cdot m+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10^{m-\frac{1}{s}} < q < 10^{m+\frac{1}{s}} \Leftrightarrow m - \frac{1}{s} < \lg q < m + \frac{1}{s}$$

болно. q өгөгдсөн тоо, $s \in \mathbb{N}$ учраас хэрэв $\lg q \neq m$ бол $(m - \frac{1}{s}, m + \frac{1}{s}) \not\ni \lg q$ байхаар s тоог сонгон авч чадна. Иймээс $q = 10^m$

байна.

Х-В2. Энэ бодлогыг ерөнхий тохиолдолд $C_{n+1}^2, C_{n+1}^2 + 1, \dots, C_{n+2}^3$ утга байхыг индукцээр батлая. $a < b$ байх (a, b) хос тоонууд хэрэв $2a > b$ байвал хоёр адил хажуут эсрэг тохиолдолд нэг адил хажуут гурвалжны тал болно.

Одоо $n \rightarrow n + 1$ шилжилтийг гүйцэтгэе.

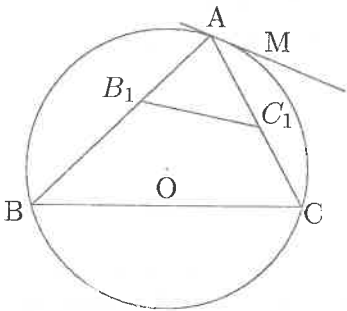
$x_1, \dots, x_{n+1}, a$ гэсэн $n + 2$ тоонуудаас дурын хоёрыг сонгоё. Хэрэв (x_i, x_j) сонгогдвол дор хаяж нэг адил хажуут гурвалжин, (x_i, a) сонгогдвол x_i талтай зөв гурвалжин гэж ойлгоё. Харин $2x_i \leq x_{i+1}$ байхаар сонговол гурван тал нь ялгаатай гурвалжин олдохгүй. Эндээс үзвэл хамгийн бага тоо нь C_{n+2}^2 болно.

Индукцийн өмнөх алхамаар $x_1, \dots, x_n$ тоонуудын үүсгэж болох гурвалжны тоо C_{n+1}^2 -оос C_{n+2}^3 байна. x_{n+1} тоо нэмэгдсэнээр (x_i, x_{n+1}) $i = 1, 2, \dots, n + 1$ гэсэн $n + 1$ ширхэг гурвалжин шууд нэмэгдэнэ. Иймээс $C_{n+2}^2 + n + 1 = C_{n+2}^2$ -оос $C_{n+2}^3 + n + 1$ утгыг индукцын өмнөх алхамыг ашиглан авч чадна. Одоо $x_1, \dots, x_n$ тоонуудыг C_{n+2}^3 ширхэг гурвалжин үүсгэдэг гэж үзээд $C_n^2 + n$ ширхэг $2x_i, x_i + x_j$ тоонуудыг эрэмбэлэе. $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ($x_i = a + a_{i+1}, i = \overline{1, n}, a_i$ -Фибоначчийн тоо $a > a_{n+1}$ байхаар авахад энэ нөхцөл биелнэ). x_{n+1} -ыг эдгээр $C_n^2 + n$ тоонуудаар үүсэх завсруудаас сонгож авахад

$$C_{n+2}^3 + n + 1, \dots, C_{n+2}^3 + C_n^2 + n + n + 1 = C_{n+3}^3$$

ширхэг гурвалжнууд тус бүрдээ үүснэ.

Х-В3. Шүргэгч α хавтгайтай $\parallel$ бөгөөд AB, AC ба AD ирмэгүүдийг B_1, C_1, D_1 цэгүүдэд огтлох хавтгай татъя. Тэгвэл $\angle ABC = \angle CAM = \angle AC_1B_1$ буюу $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ACB$ байна. $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AB_1}{AC} = \frac{AC_1}{AB}$ болно. Үүнтэй адилаар $\frac{C_1D_1}{CD} = \frac{AC_1}{AD} = \frac{AD_1}{AC}$ ба $\frac{B_1D_1}{BD} = \frac{AD_1}{AB} = \frac{AB_1}{AD}$ болно.



$$\frac{C_1 D_1}{AB \cdot CD} = \frac{AD_1}{AB \cdot BC} = \frac{B_1 D_1}{AC \cdot BD} = \frac{AB_1}{AD \cdot AC} = \frac{B_1 C_1}{AD \cdot BC}$$

$\triangle B_1 C_1 D_1$ нь адил хажуут байх $\Leftrightarrow AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

Харин өгөгдсөн нөхцөл нь $\triangle B_1 C_1 D_1$ адил хажуут ижил юм.

ММО-38, X ангийн IV даваа

Г.Баярмагнай

X-A1 (Т.Баасанжав). n ба k ($n \geq k$) нь өгөгдсөн натурал тоонууд. $A_1, A_2, \dots, A_n$ нь A -ын дэд олонлогууд ба эдгээрийн дурын k -ийнх нь нэгдэл A ба $k-1$ -ийнх нь A -аас ялгаатай бол $\min |A|$ -г ол.

X-A2 (А.Амарсанаа). p өгөгдсөн анхны тоо. Анх координатын хавтгайн $(0, 0)$ цэг дээр байсан даам өөрийн байрлаж байгаа цэгээс p зайд орших бүхэл координаттай цэг рүү шилжих үйлдлийг хийх замаар $(2002, 38)$ цэгт очиж чаддаг p -ийн боломжит бүх утгыг ол.

X-A3 (Г.Баярмагнай). $AB \neq BC$ байх ABC гурвалжинд багтсан тойрог AB ба BC талуудыг харгалзан M ба N цэгээр шүргэв. MC ба AN хэрчмүүд багтсан тойргийг S ба Q цэгээр огтлох бол MN , SQ , AC шулуунууд нэг цэгт огтлолцохыг батал.

X-B1 (В.Адъяасүрэн). Үржвэр нь яг 13 ялгаатай анхны тоон хуваагчтай байх ялгаатай 131 натурал тоо өгөгджээ. Тэдгээрээс үржвэр нь бүтэн квадрат байх 4 тоог сонгон авч болно гэж батал.

X-B2 (Г.Баярмагнай). $a_0, a_1, a_2, \dots$ гэсэн эерэг тоонуудыг төгсгөлгүй дараалал өгөгдөв. $1 + a_n > \sqrt[n]{2} a_{n-1}$ байх n дугаар төгсгөлгүй олон олдохыг батал.

X-B3 (Б.Баяржаргал). ABC гурвалжны BC , CA , AB талын дунджууд нь харгалзан A_1, B_1, C_1 . $C_1 A_1$ хэрчим дээр $\frac{C_1 K}{K A_1} =$

$\frac{BC+AC}{AC+AB}$ байх K цэгийг, A_1B_1 хэрчим дээр $\frac{A_1L}{LB_1} = \frac{AC+AB}{BC+AB}$ байх L цэгийг тус тус авав. $BK \cap CL = S$ бол $\triangle C_1A_1S = \triangle B_1A_1S$ болохыг батал.

X-A1. $\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \neq A$ тул $\exists a \in A : a \notin A_i \ i = \overline{1, n}$ ба $\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \cup A_m = A$ (энд $k-1 < m \leq n$) тул $a \in A_m$ яг $(A_1, A_2, \dots, A_{k-1})$ -ээс ялгаатай дурын $(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_{k-1}})$ $(k-1)$ -тийг $A \neq \bigcup_{t=1}^{k-1} A_{i_t}$ тул энэ хосод $b \notin A_{i_t}, t = \overline{1, k-1}$ байх $\exists b \in A$. Түүний хувьд $(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_{k-1}})$ $(k-1)$ -тэд b -г харгалзуулъя. Энэ харгалзаа нь урвуутай юм. Эсрэгээс нь

$$(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_{k-1}}) \neq (A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_{k-1}})$$

ба $(A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_{k-1}})$ -т b харгалздаг байг. Тэгвэл $(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_{k-1}}) \neq (A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_{k-1}}) \Rightarrow \exists A_t : A_t \in \{A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_{k-1}}\}$ ба $A_t \notin \{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_{k-1}}\} \Rightarrow A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_{k-1}} \cup A_t \neq b$ ба бодлогын нөхцөл ёсоор $A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_{k-1}} \cup A_t = A$ ба $b \in A \Rightarrow \dot{x}$. Иймд харгалзаа урвуутай $(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_{k-1}})$ $(k-1)$ хосыг $C_n^{k-1} - 1$ янзаар сонгох тул $C_n^{k-1} \leq |A|$ ба $|A| = C_n^{k-1}$ байх ба нөхцөл хангах $A_1, A_2, \dots, A_n$ дэд олонлогуудыг харуулъя. $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ хайрцгуудын хувьд $(B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_{k-1}})$ хэлбэрийн $k-1$ хос бүрт нь C_n^{k-1} -ийн нэг элементийг нь хийж өгье. $A_i = A \setminus B_i$ нөхцөл хангах дэд олонлогууд болох нь илт юм.

X-A2. $p = 2$ үед очиж чадах нь илэрхий. Иймд бид нөхцөл хангах сондгой анхны p -үүдийг хайя.

Эйлер-Фермагийн теоремоор $p = x^2 + y^2$ байхаар $\exists x, y \in \mathbb{N}$ байх $\Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod{4}$ (1) байна. Одоо (1)-ийг ашиглан $p^2 = a^2 + b^2$ байхаар $\exists a, b \in \mathbb{N}$ байх $\Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod{4}$ (2) гэдгийг баталъя.

$\Rightarrow p^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow p, a, b$ нь Пифагорын тоонууд тул $\exists m, n \in \mathbb{N} \mid p = m^2 + n^2, a = m^2 - n^2, b = 2mn \Rightarrow (1)$ ёсоор $p \equiv 1 \pmod{4}$.

$\Leftarrow p = x^2 + y^2$ байг. $a = |x^2 - y^2|, b = 2xy$ гэж авбал $p^2 = a^2 + b^2$ болно. Ө.х. батлагдав.

Одоо бодлогоо бодъя. $p \equiv 1 \pmod{4}$ үед $(2) \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{N}$, $p^2 = a^2 + b^2$ ба $(a, b) = 1$ гэдэг нь илэрхий $\Rightarrow au + bv = 1$ байх $\exists u, v \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \cdot 2u + b \cdot 2v = 2$ болно. Даам

$(x, y) \rightarrow (x + \frac{u}{|u|} \cdot a, y + b)$ -д очихыг I үйлдэл

$(x, y) \rightarrow (x + \frac{u}{|u|} \cdot a, y - b)$ -д очихыг II үйлдэл

$(x, y) \rightarrow (x + \frac{v}{|v|} \cdot b, y + a)$ -д очихыг III үйлдэл

$(x, y) \rightarrow (x + \frac{v}{|v|} \cdot b, y - a)$ -д очихыг IV үйлдэл

гэвэл I ба II-г $|u|$ удаа, III ба IV-г $|v|$ удаа хийхэд $(x, y) \rightarrow (x + a \cdot 2u + b \cdot 2v, y)$ буюу $(x, y) \rightarrow (x + 2, y)$ -д очиж чадна. Үүнтэй адилаар $(x, y) \rightarrow (x, y + 2)$ -д очиж чадна. $\Rightarrow (0, 0) \rightarrow (2002, 38)$ -д очиж чадна. $p \equiv 3 \pmod{4}$ үед (2) ёсоор зөвхөн $\begin{cases} (x, y) \rightarrow (x, y \mp p) \\ (x, y) \rightarrow (x \mp p, y) \end{cases}$

үйлдлийг хийж чадна. $\Rightarrow (0, 0) \rightarrow (2002, 38)$ гэвэл $(2002, 38) \vdash p$, гэтэл $(2002, 38) = 2 \Rightarrow$ зөрчил. $\Rightarrow p \equiv 3 \pmod{4}$ үед очиж чадахгүй.

Хариу: $p = 2$, $p = 4k + 1$ хэлбэрийн бүх анхны тоо.

Х-А3. Багтсан тойрог AC талыг P цэгт шүргэнэ гээ.

$$\triangle NSC \sim \triangle MNC \Rightarrow \frac{MN}{NS} = \frac{MC}{NC}$$

$$\triangle AQM \sim \triangle AMN \Rightarrow \frac{MN}{MQ} = \frac{AN}{AM}$$

$$\text{болно.} \Rightarrow MN = \frac{NS \cdot MC}{NC} = \frac{MQ \cdot AN}{AM} \text{ буюу}$$

$$\frac{AM \cdot NS \cdot MC}{NC \cdot MQ \cdot AN} = 1 \quad (*)$$

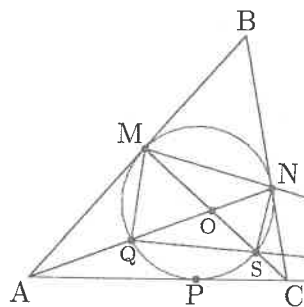
$MC \cap AN = O$ гээ. Тэгвэл $\triangle MOQ \sim \triangle NOS \Rightarrow \frac{MQ}{NS} = \frac{OQ}{OS}$ болъё. Шүргэгч огтлогчийн чанараас $\frac{AN}{AM} = \frac{AP}{AQ}$ ба $\frac{MC}{CN} = \frac{CP}{CS}$ байхыг $(*)$ -д орлуулъя. Тэгвэл

$$\frac{AQ}{AP} \cdot \frac{PC}{CS} \cdot \frac{SO}{OQ} = 1 \quad (1)$$

болно. Хэрэв $QS \parallel AC$ байвал $MN \parallel AC$ болох буюу энэ нь $AB \neq BC$ гэдэгт зөрчинө. Иймд $QS \cap AC = L$ гэж тэмдэглэе. Тэгвэл

Менелайн теоремоор

$$\frac{CS}{SO} \cdot \frac{OQ}{QA} \cdot \frac{AL}{LC} = 1 \quad (2)$$



(1) ба (2)-оос $\frac{AL}{LC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1 = \frac{AL}{LC} \cdot \frac{CN}{AM}$
 болох нь гарна. $BN = BM$ учир
 $\frac{CN}{NB} \cdot \frac{BM}{MA} \cdot \frac{AL}{LC} = 1$ болох ба Менелайн
 теоремоор энэ нь M, N, L гурав 1
 шулуун дээр оршихыг
 үзүүлж байна.

Х-В1. $a_1, a_2, \dots, a_{131}$ нь өгөгдсөн натурал тоонууд, $p_1, p_2, \dots, p_{13}$ нь тэдгээрийн анхны тоон хуваагчид нь болог. $a_m a_k, 1 \leq m < k \leq 131$ тооны эгэл задаргаа нь $a_m a_k = p_1^{\alpha_{mk}} \cdot p_2^{\beta_{mk}} \cdot \dots \cdot p_{13}^{\delta_{mk}}$ болог. $a_m a_k$ тоо бүрт 13 урттай $\{(-1)^{\alpha_{mk}}, (-1)^{\beta_{mk}}, \dots, (-1)^{\delta_{mk}}\}$ үг харгалзуулъя. Ийм үгийн тоо $2^{13} = 8192$.

131 элементтэй A олонлогийн 2 элементтэй дэд олонлогийн тоо $C_{131}^2 = \frac{131 \cdot 130}{2} = 8515$. $8515 = 8192 \cdot 1 + 323$ тул Дирихлейн зарчмаар ижил үг дор хаяад 2 олдоно. Энэхүү 2 үгэнд харгалзах 2 элементтэй дэд олонлогуудыг $A_1 = \{a, b\}, A_1 = \{c, d\}$ гэвэл $abcd$ нь бүхэл тооны квадрат болно.

а) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ байвал a, b, c, d нь бидний олох 4 тоо болно.
 б) A_1, A_2 нь ганц ерөнхий элементтэй байг. $a = c, b \neq d$ гэж үзэхэд явцуурахгүй. $B = A \setminus \{b, d\}$ олонлогийг авч үзье. Энэ олонлогийн 2 элементтэй дэд олонлогийн тоо $C_{129}^2 = \frac{129 \cdot 128}{2} = 8256$. $8256 = 8192 \cdot 1 + 64$ тул Дирихлейн зарчмаар ижил үг дор хаяад 2 олдоно. Энэхүү 2 үгэнд харгалзах 2 элементтэй дэд олонлогуудыг $B_1 = \{e, f\}, B_2 = \{g, h\}$ гэвэл $efgh$ нь бүхэл тооны квадрат болно.

а) $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ байвал e, f, g, h нь бидний олох 4 тоо болно.
 б) B_1, B_2 нь ганц ерөнхий элементтэй байг. $e = g, f \neq h$ гэж үзэхэд явцуурахгүй. Энэ тохиолдолд b, d, f, h дөрвөн тооны үржвэр бүтэн квадрат болох тул бодлого бодогдов.

Х-В2. Эсрэгээс нь n -ийн утгыг төгсгөлөг гэж үзвэл $\exists N$:

$n < N$ хувьд

$$1 + a_n \leq a_{n-1} \cdot 2^{\frac{1}{n}} \quad (*)$$

биелнэ. $b_n = 2^{-(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})}$, $A_n = b_n a_n$ гэж тэмдэглэвэл $(*)$ нь $b_n + A_n \leq A_{n-1}$ байхтай адил болно. Эндээс $\sum_{i=N}^n b_i \leq A_{N-1} - A_n \leq A_{N-1}$ байна. $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + \lg n$. $\frac{1}{x}$ нь буурах функц учраас талбайн харьцаанаас $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{x} dx = \ln n \Rightarrow 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n$ ба $b_n > 2^{-1-\lg n} = \frac{1}{2} n^{-\lg 2} > \frac{1}{2n} \Rightarrow$

$$\sum_{i=N}^n b_i > \frac{1}{2N} + \frac{1}{2(N+1)} + \dots + \frac{1}{2n} = S$$

болох буюу S нь өсөх учраас $\sum_{i=N}^n b_i$ нийлбэр A_{N-1} -ээр зааглагдана гэдэгт зөрчинө. Үүгээр бодлого бодогдов.

Х-В3. $\triangle C_1 A_1 B_1$ -ийн биссектрис $A_1 P$ нь S -ийг дайрна гэж харуулъя. AL_1 биссектрис $A_1 P$ -тэй параллель, $BM \cap A_1 P = Q$.

$$\frac{CM}{AC} \cdot \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BS}{SM} = 1 \Rightarrow$$

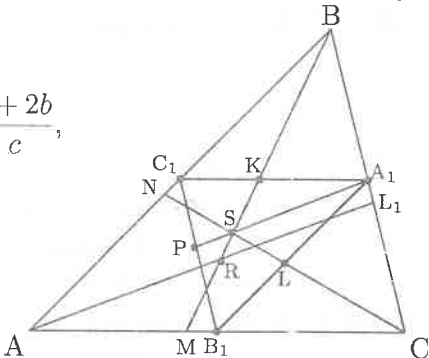
$$\frac{BS}{SM} = \frac{b+c}{a+c} \cdot \frac{a+c+2b}{c+b} = \frac{a+c+2b}{a+c},$$

$$\frac{BQ}{BR} = \frac{BA_1}{BL_1} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{2c},$$

$$\frac{BR}{RM} = \frac{AB}{AM} = \frac{c(a+c+2b)}{b(a+b)} \Rightarrow$$

$$\frac{BM}{BR} = \frac{RM}{BR} + 1 = \frac{b(a+b) + c(a+c+2b)}{c(a+c+2b)} \Rightarrow$$

$$RM = \frac{b(a+b) + c(a+c+2b)}{c(a+c+2b)} \cdot BR = \frac{b(a+b) + c(a+c+2b)}{c(a+c+2b)} \cdot \frac{BQ \cdot 2c}{b+c}$$



$$\Rightarrow \frac{BM}{BQ} = \frac{2(ab + b^2 + ac + c^2 + 2bc)}{(a + c + 2b)(b + c)} = \frac{2(b + c)(a + b + c)}{(a + c + 2b)}.$$

$$\frac{BS}{SM} = \frac{a + c + 2b}{a + c} \Rightarrow \frac{BM}{BS} = \frac{SM}{BS} + 1 = \frac{a + c + 2b + a + c}{a + c + 2b} = \frac{2(a + b + c)}{a + c + 2b}$$

$$\Rightarrow \frac{BM}{BS} = \frac{BM}{BQ} \Rightarrow S \equiv Q \text{ болж } A_1P \text{ нь } S\text{-ийг дайрна.}$$

ММО-38, Багын багшийн III даваа

Б.Батцэнгэл

ББ-А1 (Б.Батцэнгэл). $(a, b) + [a, b] + a + b = ab$ байх бүх натурал a, b тоонуудыг ол (Энд (a, b) , $[a, b]$ -ээр харгалзан a, b тоонуудын ХИЕХ ба ХБЕХ-ийг тэмдэглэв).

ББ-А2 (Б.Батцэнгэл). ABC гурвалжны BC, CA, AB талууд дээр D, E, F цэгүүдийг $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = x > 1$ байхаар авав. Хэрэв AD, BE, CF хэрчмүүдийн огтлолцолд үүсэх гурвалжны талбай ABC гурвалжны талбайн $\frac{1}{49}$ -тэй тэнцүү бол x -ийг ол.

ББ-А3 (Б.Батцэнгэл). a, b нь бодит тоонууд бол

$$\frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{3} \geq \frac{a^3b + b^3a}{2}$$

болохыг батал.

ББ-В1 (Б.Батцэнгэл). n натурал тоо бол 2^n тоонд хуваагддаг 10-тын бичлэг нь зөвхөн 1 ба 2 цифрийг агуулдаг n оронтой тоо олдоно гэж батал.

ББ-В2 (Б.Батцэнгэл). 10 охин, 20 хүүг нэг эгнээнд байрлуулахдаа, ямар ч охины хажууд дор хаяж нэг хүү зогсож байхаар нийт хичнээн ялгаатай аргаар байрлуулж болох вэ?

ББ-В3 (Б.Батцэнгэл). Нэгж талтай $ABCD$ квадрат дотор P, Q цэгүүд өгөгдөв. $13(AP + CQ) + 14PQ + 15(BP + DQ) > 38$ тэнцэл бишийг батал.

ММО-38, Багын багшийн IV даваа

Б.Батцэнгэл

- ББ-А1 (Б.Баяржаргал).** n натурал тоо бол $4n \times 6n$ хэмжээтэй тэгш өнцөгтөд  хэлбэрийн дүрсүүдийг хамгийн олондоо хэдэн ширхэгийг давхарлахгүй байрлуулж болох вэ?
- ББ-А2 (Б.Батцэнгэл).** 2-тын тооллын бичлэгтээ тэгш тооны 1 цифр агуулдаг натурал тоонуудын олонлогийг A гэж тэмдэглэе. $a, b \in A$ үед $a + b$ нийлбэрт задрахгүй бүх натурал тоонуудыг ол.
- ББ-А3 (В.Адъяасүрэн).** $\{a_n\}$ дараанал $a_1 = 1$ ба $n \geq 1$ үед $a_{n+1} = \lfloor \sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \rfloor$ рекуррент томъёогоор өгөгдөв (энд $\lfloor x \rfloor$ -ээр x тооны бүхэл хэсгийг тэмдэглэв). a_{2002} -г ол.
- ББ-В1 (Ц.Дашдорж).** Аль ч хэдийнх нь нийлбэр бүтэн квадрат биш байх 1000000 ширхэг ялгаатай натурал тоо олдох уу?
- ББ-В2 (Д.Нямсүрэн).** $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн AB талын дундаж цэг дээр төвтэй тойрог нөгөө гурван талыг шүргэдэг бол $AB^2 = 4 \cdot AD \cdot BC$ байхыг батал.
- ББ-В3 (Ш.Батхишиг).** Нэгж радиустай дугуйд 160 ширхэг цэг өгөгдөв. Өгсөн цэгүүдийг холбосон, 1-ээс хэтрэхгүй урттай хэрчмийн тоо ямагт 2002-оос цөөнгүй байхыг харуул.

ММО-38, Дундын багшийн III даваа

Г. Дашдорж

- ДБ-А1 (Ц.Дашдорж).** Өгсөн $n \in \mathbb{N}$,
 $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m \in \mathbb{Z}[x]$, $m \geq 2$ -ийн хувьд
 а) $a_2, a_3, \dots, a_m$ -үүд n -ийн анхны тоон хуваагч бүрт хуваагддаг.

б) $(a_1, n) = 1$ бол аливаа $k \in \mathbb{N}$ бүрийн хувьд $n^k \mid f(c)$ байх $c = c(k) \in \mathbb{N}$ олдоно гэдгийг батал.

ДБ-А2 (Ц.Дашдорж). Тойрогт багтсан $ABCDE$ таван өнцөгтийн ABC , BCD , CDE , DEA , EAB гурвалжнуудын ортотөв нь харгалзан H_1 , H_2 , H_3 , H_4 , H_5 ба DE , EA , AB , BC , CD талуудын дундаж нь харгалзан M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , M_5 бол $H_i M_i$ -үүд ($i = \overline{1, 5}$) нэг цэгт огтлолцохыг батал.

ДБ-А3 (Ц.Дашдорж). $a \in \{1, 2, \dots, n\}$ бүрийн хувьд $m \mid a^n - 1$ байх бүх (m, n) хосыг ол, энд $m, n \geq 2$.

ДБ-В1 (Ц.Дашдорж). 0101 дэд үг агуулаагүй 0,1-ээр бичигдэх n урттай бүх үгийн тоог A_n гээ. A_n -ийн тэгш сондгойг тодорхойл.

ДБ-В2 (Ц.Дашдорж). $n \in \mathbb{N}$ тэгш тоо $a, b \in \mathbb{R}$ ба $b^n = 3a + 1$ байг. $Q(x) = x^3 + x^2 + x + b \mid P(x) = (x^2 + x + 1)^n - x^n - a \Rightarrow b = 1$ гэж батал.

ДБ-В3 (Ц.Дашдорж). 2002 оройтой холбоост графын орой бүрийн зэрэг 3 (цэг бүр өөр 3 нэгтэй холбогдсон) бол мөн холбоост граф үлдэж байхаар аль ч хоёр нь холбогдоогүй k оройг нь дарав. k -ийн боломжит их утгыг ол.

ДБ-А1. $a, b \in \mathbb{Z}$ байг.

$$a \equiv b(n^k) \Leftrightarrow f(a) \equiv f(b)(n^k) \quad (1)$$

гэж баталъя. $\Rightarrow$ илэрхий.

$\Leftarrow$: $f(a) \equiv f(b)(n^k) \Leftrightarrow (a - b) \left(a_1 + a_2(a + b) + \dots + a_m(a^{m-1} + \dots + b^{m-1}) \right) \equiv 0(n^k)$: $p \mid n$ байх p -г авбал $p \nmid \left(a_1 + a_2(a + b) + \dots + a_m(a^{m-1} + \dots + b^{m-1}) \right)$ байх нь илэрхий тул $a \equiv b(n^k)$ болно. Иймд $x, y \in \{1, 2, \dots, n^k\} = \mathbb{Z}_{n^k}$ ба $x \neq y$ бол $f(x) \not\equiv f(y)(x^k)$ байх тул $\exists c = c(k) \in \mathbb{Z}_{n^k}$, $f(c) \equiv 0(n^k)$.

ДБ-А2. $A, B, \dots, D \in \mathbb{C}$ гээ. "Математик" сонины 2000 оны №11, хуудас 13-ын жишээ 3-т үзүүлснээр $H_1 = A + B + C$, $M_1 =$

$\frac{D+E}{2}$ гэх мэт болно. $P \in [H_1 M_1] \Leftrightarrow \exists t, P = tH_1 + (1-t)M_1$, энд $0 \leq t \leq 1$, $[H_1 M_1]$ хэрчим байх нь илэрхий билээ. Иймд $P = \frac{A+B+C+D+E}{3} \in H_i M_i, i = \overline{1,5}$ болохыг хялбархан шалгаж болно.

ДБ-А3. Фермагийн бага теоремоор $(p, p-1)$, $p \in P$ нь олбсл зохих хос мөн. (m, n) нь бодлогын шийд байг. $P \ni p|m$ байг. Тэгвэл $a^n - 1 \equiv 0(p)$, $a \in \mathbb{Z}_n$.

$n \geq p$ бол $a = p$ үед $p^n - 1 \equiv 0(p) \equiv -1$ гэж зөрчилд хүрэх тул $p \geq n+1$ болно. $f(x) = \prod_{i=1}^n (x-i) - (x^n - 1) \in \mathbb{Z}[x]$ ба $g(x) \equiv f(x)(p)$ байг. $\deg g \leq n-1$ ба $g(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ -ийн язгуур нь $1, 2, \dots, n \in \mathbb{Z}_p$ -үүд болно. Иймд $g(x)$ адилтгал тэг олон гишүүнт, ө.х. түүний бүх коэффициент нь тэг байна, тухайлбал g -ийн ахмад гишүүний коэффициент $\frac{n(n+1)}{2} \equiv 0(p)$.

$p \geq n+1$ тул $p = n+1$ гэж гарна. Үүгээр $n = p-1 \geq 2$ ба $m = p^k$ гэж баталлаа.

Одоо $k = 1$ гэж баталъя. $k \geq 2$ бол $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ үед $a^{p-1} - 1 \equiv 0(p^2)$ болно. Энд $a = p-1$ гэвэл $(p-1)^{p-1} - 1 \equiv 0(p^2)$ болно. Эндээс $p(p-1) \equiv 0(p^2)$ буюу $p-1 \equiv 0(p)$, $-1 \equiv 0(p)$ зөрчил. Иймд $(m, n) = (p, p-1)$, $p \in P$.

ДБ-В1. a_{ijk}^n -ээр 0101-г агуулаагүй, сүүлчийн гурван орон нь ijk , $i, j, k \in \{0, 1\}$ байх n урттай үгийн тоог тэмдэглэвэл

$$a_{ijk}^{n+1} = \begin{cases} a_{0ij}^n + a_{1ij}^n, & \text{хэрэв } ijk \neq 101 \\ a_{110}^n, & \text{хэрэв } ijk = 101 \end{cases}$$

болох ба эднийг бүх ijk -аар нь нэмбэл $A_{n+1} = 2A_n - a_{010}^n$ болно. Иймд $A_{n+1} \equiv -a_{010}^{n-1} \equiv a_{001}^{n-1} + a_{101}^{n-1} \equiv a_{000}^{n-2} + a_{100}^{n-2} + a_{110}^{n-2} \equiv a_{000}^{n-3} + a_{100}^{n-3} \equiv a_{000}^{n-4} + a_{100}^{n-4} + a_{010}^{n-4} + a_{110}^{n-4} \equiv a_{000}^{n-5} + a_{001}^{n-5} + a_{010}^{n-5} + a_{100}^{n-5} + a_{111}^{n-5} + a_{110}^{n-5} + a_{101}^{n-5} + a_{011}^{n-5} A_{n-5} \pmod{2}$. Иймд $A_{k+6m} \equiv A_k(2)$, $\forall k, m$ болох тул $k = 0, 1, \dots, 5$ үед л $A_k \pmod{2}$ -г мэдэхэд болно. $A_{2002} = A_{4+6 \cdot 333} \equiv A_4 = 2^4 - 1 = 15 \equiv 1(2)$.

ДБ-В2. $b = 1$ бол $Q|P$ байх нь илэрхий. $Q|P$ байг. Тэгвэл $b \neq 0$ болно. $b = 0$ гэвэл $\varepsilon^3 = 1$ байх ε -ийн хувьд $p(\varepsilon) = 0 = (\varepsilon^2 + \varepsilon + 1)^n - \varepsilon^n - a = -\varepsilon^n - a$ -аас $|a| = |\varepsilon^n| = |\varepsilon|^n = 1^n = 1$ болж $0 = 3a + 1$ -ээс $|a| = \frac{1}{3}$ гэж гарахтай зөрчилдөнө. Иймд $Q|P \Leftrightarrow Q|a^n P$. $x^n P = (x^3 + x^2 + x)^n - x^{2n} - ax^n = (Q - b)^n - x^{2n} - ax^n$ -ээс $Q|x^{2n} + ax^n - b^n$. x_1, x_2, x_3 нь Q -ийн язгуурууд гэвэл x_1^n, x_2^n, x_3^n нь (1) $t^2 + at - b^n = 0$ -ийн язгуурууд болно. Үүний дискриминант $a^2 + 4b^n > 0$ тул (1) нь t_1, t_2 гэсэн ялгаатай хоёр язгууртай. Иймд эсвэл $x_1^n = x_2^n = t_1$, $x_3^n = t_2$ эсвэл $x_1^n = x_2^n = x_3^n = t_1$ болно. $t_1 + t_2 = -a$, $t_1 t_2 = -b^n$, $x_1 x_2 x_3 = -b$ байх тул 1) $x_1^n x_2^n x_3^n = t_1^2 t_2$, 2) $x_1^n x_2^n x_3^n = t_1^3$ тохиолдлуудыг үзье.

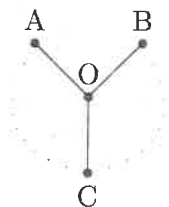
1) $(x_1^n x_2^n x_3^n) = (-b)^n = b^n = t_1 t_2 t_1 = -b^n t_1$ -ээс $t_1 = -1$ тул $t_2 = b^n$. $t_1 + t_2 = -1 + b^n = -a$ -ээс $t_1 = -1$, $t_2 = b^n$, $t_1 + t_2 = -1 + b^n = -a$ -аас $a = 1 - b^n = 1 - (3a + 1) = -3a$, $a = 0$, $b^n = 1$, n тэгш тул $b = \pm 1$. Одоо $Q = x^3 + x^2 + x + 1 | P = x^{2n} - 1$ болохыг харуулъя. $Q|P = x^{2n} - 1$ гэж үзье. P -ийн шийд бүр $|z| = 1$ тойрог дээр оршино, энд $z \in \mathbb{C}$. Тэгвэл Q -ийн шийд бүр мөн $|z| = 1$ тойрог дээр оршино. $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = z\bar{z} = 1$ буюу $\bar{z} = z^{-1}$.

$Q = 0 \Rightarrow x + 1 + \frac{1}{x} = x + 1 + \bar{x} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow |x + 1 + \bar{x}| = \frac{1}{|x|^2} = 1$. $x = e^{i\varphi}$, $|e^{i\varphi} + 1 + e^{-i\varphi}| = 1 \Rightarrow 1 + 2\cos\varphi = \pm 1 \Rightarrow \cos\varphi = 0 \vee -1$, $\varphi = \frac{\pi}{2} \vee \pi$. $x = i \vee -1$ нь Q -ийн шийд болж үл чадна гээд зөрчилд хүрэв. Иймд $b = 1$ тохиолдол үлдэв. Энэ үед $Q|P$ байх нь хялбархан батлагдана.

2) $(-b)^n = b^n = t_1^3$, $t_1 t_2 = -b^n = -t_1^3 \Rightarrow t_2 = -t_1^2$, $t_1 = b^{\frac{n}{3}} = b_1$, $t_1 + t_2 = t_1 - t_1^2 = -a$, $\begin{cases} t_1^2 - t_1 - a = 0 \\ t_1^2 + at_1 - b^n = 0 = t_1^2 + at_1 - 3a - 1 \end{cases} \Rightarrow t_1 = \frac{2a+1}{a+1}$.

$\frac{2a+1}{a+1} = b^{\frac{n}{3}} = b_1 | +1 \Rightarrow \frac{3a+2}{a+1} = b_1 + 1$, $\frac{b_1^3+1}{a+1} = b_1 + 1$, $\begin{cases} a = b_1^2 - b_1 \\ 3a = b_1^3 - 1 \end{cases} \Rightarrow b_1 = 1 \Rightarrow a = 0$, $b^n = 1$, $b = \pm 1$ гээд өмнөх тохиолдол руу шилжинэ.

ДБ-В3. Манай графын $(G(V, E))$ огтлолцсон (ирмэгээрээ) 2 цикл байна гэе. Тэдний салж буй орой O -г авч үзье (зураг).



$d(O) = 3$ билээ. O орой ба түүнээс гарсан OA, OB, OC ирмэгүүдийг G -ээс зайлуулахад гарсан граф нь G_1 бол G_1 нь мөн холбоост граф ба G_1 -д A, B, C оройнуудыг холбосон зам бий ($G_1(V_1, E_1)$, энд $V_1 = V \setminus \{O\}$, $E_1 = E \setminus \{OA, OB, OC\}$ ба G_1 -д $d(A) = d(B) = d(C) = 2$). Хэрэв G_1 -д огтлолцсон хоёр цикл

байвал саяын үйлдлийг давтъя, гэх мэт. Аль ч хоёр зайлуулагдсан орой нь G -д ирмэгээр шууд холбогдоогүй байгаа, учир нь аль ч алхамд бид $d(X) = 3$ байх $X \in V_k$ оройг л $G_k = G(V_k, E_k)$ графаас зайлуулж байгаа ба X -тэй G_k -д хөрш оройн зэрэг нь $G_{k+1} = G(V_{k+1}, E_{k+1})$ -д 2 болсон байгаа.

ӨГҮҮЛБЭР 1. $G(V, E)$ холбоост графт $|V| = n$, $|E| \geq \frac{4}{3}n$ бол G -д огтлолцсон хоёр цикл оршино.

Баталгаа. Эсрэгээс нь үзье. Холбоост граф G -д n оройтой мод $T = G_1(V_1, E_1)$ ялгаж болдог ($V_1 = V$, $|E| = n - 1$). T -ийн гадна үлдсэн ирмэг $(E \setminus E_1)$ бүрийг T -д буцааж нэгтгэх болгонд циклийн тоог ядаж нэгээр нэмэгдүүлэх ба хэрэв ямар нэг ирмэг 2-оос багагүй циклийг нэмэгдүүлж байвал тэдгээр циклүүд огтлолцолтой болж бидний үзэж байгаад зөрчинө. Нөгөө талаас цикл бүр 3-аас цөөнгүй орой агуулах ба аль ч орой 2 циклд орж чадахгүй. Иймд ирмэгийн тоо $(n - 1) + \frac{n}{3}$ -аас үл хэтэрнэ. Гэтэл $n - 1 + \frac{n}{3} < \frac{4n}{3}$ байх тул зөрчил.

$|V| = n$, $|E| = \frac{3}{2}n$ ба оройг зайлуулах үйлдэл бүрийн дараа оройн тоо 1-ээр, ирмэгийн тоо 3-аар цөөрнө. x үйлдэл хийлээ гэвэл оройн тоо n , ирмэгийн тоо $\frac{3}{2}n - 3x$ болох ба өгүүлбэр 1-ийн үндсэн дээр $\frac{3}{2}n - 3x < \frac{4}{3}(n - x)$ байх хамгийн бага x л манай бодлогын шийд болно. Эндээс $\frac{n}{10} < x$ буюу $\frac{2002}{10} < x$, $x = 201$.

ММО-38, Дундын багшийн IV даваа

Ц.Дашдорж

ДБ-А1 (М.Батбилэг). AB диаметртэй хагас тойрог дээр D цэг оршино. C цэг нь BD нумын дундаж цэг ба AD папрагийн P цэгт босгосон перпендикуляр AC -г Q цэгт огтолдог байг. Хэрэв QB шулуун хагас тойрогтой R цэгт огтлолцдог бол P, R, C цэгүүд коллинеар гэж батал.

ДБ-А2 (Ц.Дашдорж). $n \in \mathbb{N}$ бол $f(x) = (x^2 + x)^{2^n} + 1$ нь бүхэл коэффициенттой 2 олон гишүүнтийн үржвэрт задрахгүйг үзүүл.

ДБ-А3 (Б.Батцэнгэл). Ямар натурал тоо n -ийн хувьд

$$\{a_j - a_i \mid 1 \leq i < j \leq n\} = \left\{1, 2, \dots, \frac{n(n-1)}{2}\right\}$$

байх $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ тоонууд олдох вэ?

ДБ-В1 (Г.Баярмагнай). $5 \leq p$ анхны тоо бол $p^2 \nmid a^{p-1} - 1$ ба $p^2 \nmid (a+1)^{p-1} - 1$ байх $a \in \{1, 2, \dots, p-2\}$ олдоно гэж батал.

ДБ-В2 (Б.Батцэнгэл). Тойрогт багтсан таван өнцөгтийн талуудын уртын үржвэрийг диагоналиудын уртын үржвэрт харьцуулсан харьцааны хамгийн их утгыг ол.

ДБ-В3 (Б.Батцэнгэл). 38 талбайтай 2 квадрат өгөгдөв. Квадрат бүрийг нэгж талбайтай 38 ширхэг дүрсэд муруйнуудаар хуваажээ. Квадратуудыг давхарлаж тавиад 38 удаа зүүгээр хатгахдаа, хуваалтын хэсэг нь яг нэг удаа хатгагдсан байхаар гүйцэтгэж болно гэж батал.

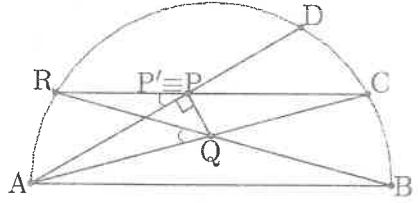
ДБ-А1. Энэ бодлогыг олимпиадад оролцсон олон багш бодсон бөгөөд энд дараах бодолтыг сонирхуулъя.

$RC \cap AD = P'$ гэе. Хэрэв $P'Q \perp AD$ гэж баталбал $P \equiv P'$ болох бөгөөд бодлого бодогдоно. Иймд $P'Q \perp AD$ гэж баталъя.

$$\angle RQA = \frac{\overset{\frown}{AR} + \overset{\frown}{CB}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AR} + \overset{\frown}{DC}}{2} = \angle AP'R$$

болох ба A, R, P', Q цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Эндээс $\angle AKQ = \angle AP'Q = 90^\circ$ болж бодлого бодогдлоо.

Дашрамд тэмдэглэхэд P цэг нь AD шулууны дурын цэг байхад A



ДБ-А2. $\varphi(x) = (x^2 + x)^{2^n} + 1 = f \cdot g$, $f, g \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg f, \deg g \geq 1$ гэж үзье. $\bar{\varphi}(x) = (x^2 + x + 1)^{2^n} = \bar{f} \cdot \bar{g} \in \mathbb{Z}_2[x]$, $\bar{f} = (x^2 + x + 1)^\alpha$, $\bar{g} = (x^2 + x + 1)^{2^n - \alpha} \in \mathbb{Z}_2[x]$ болох тул $f = \bar{f} + 2f_1$, $g = \bar{g} + 2g_1$, $f_1, g_1 \in \mathbb{Z}[x]$ болно. Иймд

$$\varphi(x) = (x^2 + x)^{2^n} + 1 \equiv (x^2 + x + 1)^{2^n} + 2(\bar{f}g_1 + f_1\bar{g}) \pmod{4} \quad (1)$$

$$(x + 1)^4 \equiv (x^2 + 1)^2 \pmod{4} \quad (2)$$

(2)-оос индукцээр

$$(x + 1)^{2^t} \equiv (x^{2^{t-1}} + 1)^2 \pmod{4} \quad (3)$$

гэж баталж болно.

$$(x^2 + x + 1)^{2^n} \stackrel{(3)}{\equiv} \left((x^2 + x)^{2^{n-1}} + 1 \right)^2 = (x^2 + x)^{2^n} + 1 + 2(x^2 + x)^{2^{n-1}} \pmod{4} \quad (4)$$

(1) ба (4)-өөс $\bar{f}g_1 + f_1\bar{g} \equiv (x^2 + x)^{2^{n-1}} \pmod{2}$ буюу

$$\begin{aligned} (x^2 + x + 1)^\alpha \cdot g_1 + (x^2 + x + 1)^{2^n - \alpha} \cdot f_1 &= \\ &= (x^2 + x + 1) \cdot \psi(x) \equiv x^{2^{n-1}}(x + 1)^{2^{n-1}} \pmod{2} \end{aligned} \quad (5)$$

$x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ үл задрах олон гишүүнт тул (5) биелэх боломжгүй буюу зөрчилд хүрлээ.

ДБ-В1. $p = 5$ үед $a = 2$. $p \geq 7$ үед бодъё.
 $A = \left\{ a \in \mathbb{Z}_p^* \mid a^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2} \right\}$ байг. $a \in \mathbb{Z}_p^*$ үед

$$(p - a)^{p-1} - a^{p-1} \equiv -(p - 1)a^{p-2}p \pmod{p^2}$$

байх тул a ба $p - a$ -ын дор хаяж аль нэг нь A олонлогт орно.
 $p - 1 \in A$ байх нь ойлгомжтой. $p - 2 \notin A$ гэж үзэж болох ба

$$1 \equiv (p - 2)^{p-1} \equiv 2^{p-1} - (p - 1)2^{p-2}p \equiv 2^{p-1} + p \cdot 2^{p-2} \pmod{p^2} \quad (1)$$

байх тул $2 \in A$ байна. $\Rightarrow 3 \notin A \Rightarrow p - 3 \in A$ гэж үзэж чадна.

(1) илэрхийллийг квадрат зэрэгт дэвшүүлбэл

$$4^{p-1} + p \cdot 2^{2p-2} \equiv 1 \pmod{p^2} \quad (2)$$

болно. $(p - 4)^{p-1} \equiv 4^{p-1} - (p - 1)4^{p-2} \equiv 4^{p-1} + p \cdot 4^{p-2} \pmod{p^2}$
 байх учир (2)-оос $p - 4 \in A$ байх болж бодлого бодогдоно.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$ хувьд $C_{n+1}^3 = (C_n - 1)(C_{n+2} - 1)$, $(C_n - 1)^3 \in \mathbb{N}$ ба $C_1 = 2$ байх C_n дараалал хэд байх вэ?
2. $m, n \in \mathbb{N}$ ба $A = \frac{(m+3)^n + 1}{3m} \in \mathbb{Z}$ бол A -г сондгой болохыг батал.
3. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ хувьд $(f(x))^2 \geq f(x+y)(f(x)+y)$ байх бүх f функцийг ол.

1. $n \geq 2$ үед $C_n^9 = (C_{n-1} - 1)^2(C_{n+1} - 1)^3 \in \mathbb{Z}$ болно. $(C_n - 1)^3 = a_n \in \mathbb{Z}$ гэе. $\sqrt[3]{a_n} + 1 = C_n$ болох ба $C_n^9 = (\sqrt[3]{a_n} + 1)^9 = a \cdot \sqrt[3]{a_n^2} + b\sqrt[3]{a_n} + c$, энд $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ба эндээс $a\sqrt[3]{a_n^2} + b\sqrt[3]{a_n} + d = 0$, $a, b, d \in \mathbb{Z}$ болно.

$\sqrt[3]{a_n} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4cd}}{2a} \Rightarrow \mathbb{Z} \ni a_n = \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4cd}}{2a} \right)^3 = p + \sqrt{2} \cdot q$, энд $p, q \in \mathbb{Q}$, $r \in \mathbb{Z}$ болж $\Rightarrow r$ нь бүхэл тооны квадрат гэж гарна. $\Rightarrow \sqrt[3]{a_n} = C_n + 1$ нь бүхэл гэж гарах буюу $C_n \in \mathbb{Z}$ болно. $C_2^3 + 1 = C_3$, $(C_2^3 + 1)^3 = C_3^1 = (C_2 - 1)(C_4 - 1)$ буюу $(C_2^3 + 1)^3 \equiv 0(C_2 - 1)$ болно. Эндээс $(C_2^3 - 1 + 2)^3 \equiv 2^3 \equiv (C_2 - 1)$ буюу $C_2 = 2, 3, 5, 9$ -ийн аль нэг болно. C_n нь энэ бүх үед үргэлж бүхэл байна гэдгийг баталъя.

$n > 4$ үед индукцлэе. $n \leq 4$ үед шууд шалгана.

$n = k \geq 4$ үед үнэн гээд $n = k + 1$ үед баталъя.

$$C_{k+1} = 1 + \frac{C_k^3}{C_{k-1} - 1} = 1 + \frac{\left(\frac{C_{k-1}^3}{C_{k-2} - 1} + 1 \right)^3}{C_{k-1} - 1} = 1 + \frac{(C_{k-1}^3 + C_{k-2} - 1)^3}{(C_{k-1} - 1)(C_{k-2} - 1)^3}$$

болно. $(C_{k-1} - 1, C_{k-2} - 1) = d + 1$ гэе. $d: p \in \mathbb{P}$ олдоно.

$C_{k-1}^3 = (C_{k-2} - 1)(C_k - 1) \Rightarrow C_{k-1}:p$ ба бас $C_{k-1} - 1:p$ болж зөрчил үүснэ. Иймд $(C_{k-1}, C_{k-2} - 1) = 1$ болно.

$$(C_{k-1}^3 + C_{k-2} - 1)^3 \equiv (C_{k-1}^3 - 1 + C_{k-2})^3 \equiv C_{k-2}^3(C_{k-1} - 1)$$

$$C_{k-2}^3 = (C_{k-1} - 1)(C_{k-2} - 1) \text{ учир } (C_{k-1}^3 + C_{k-2} - 1)^3 \equiv 0(C_{k-1} - 1). \\ C_{k-1}^3 + C_{k-2} - 1 = (C_{k-2} - 1)(C_k - 1) + C_{k-2} - 1 = (C_{k-2} - 1)C_k \equiv$$

$0(C_{k-2} - 1)$ учир $(C_{k-1}^3 + C_{k-2} - 1)^3 : (C_{k-1} - 1)(C_{k-2} - 1)^3$ болж $C_{k+1} \in \mathbb{N}$ болох нь батлагдав. Өөрөөр хэлбэл ийм дараалал нь 4 ширхэг байна.

2. A тэгш байг. Тэгвэл m тэгш болно. $(m+3)^n + 1 \equiv m^n + 1 \equiv 0(3) \Rightarrow n = 2k + 1$ ба $m = 3t + 2$ болно.

$m = 2^\ell m_1$, $\ell \geq 1$, m_1 сондгой гэе. $m \equiv 2(4)$ бол $(m+3)^n + 1 \equiv (2+3)^n + 1 \equiv 2(4)$ ба $A = \frac{(m+3)^n + 1}{2m}$ нь сондгой болж зөрчинө. Иймд $\ell > 1$ байна. $0 \equiv (m+3)^n + 1 \equiv 3^{2k+1} + 1(m)$, $3^{2k+1} + 1 \equiv 9^k \cdot 3 + 1 \equiv 4(8)$ ба $2^\ell | 3^{2k+1} + 1$ учир $\ell = 2$ буюу $m = 4m_1$, $m_1 \equiv m \equiv 2(3)$ болно. $m_1 | 3^{2k+1} + 1 \Rightarrow m_1 | a^2 + 3$, энд $a = 3^{k+1}$, $(m_1, 2) = (m_1, 3) = 1$ ба $m_1 \equiv 2(3)$ гэдгээс $m_1 = 6s + 5$ болно.

$$1 \leq x, y \leq \lfloor \sqrt{m_1} \rfloor, \text{ энд } \lfloor x \rfloor = \begin{cases} k, & \text{хэрэв } x = k^2, k \in \mathbb{Z} \\ k+1, & \text{хэрэв } x = k^2 + s \end{cases}$$

байхаар бүх $ax + y$ -үүдийг бичвэл Дирихлейн зарчим ёсоор m_1 -д хуваахад гарах үлдэгдэл нь ижил байх $x_1 > x_2$ байх (x_1, y_1) , (x_2, y_2) тоонууд эсвэл $ax + y \equiv 0(m_1)$ байх (x, y) тоонууд олдоно. Эхний тохиолдолд $a(x_1 - x_2) + y_1 - y_2 \equiv 0(m_1)$ болох тул $1 \leq x, |y| \leq \lfloor \sqrt{m_1} \rfloor$ ба $m_1 | ax + y$ байх x, y бүхэл тоонууд олдоно. $m_1 \equiv 2(3)$ учир бүтэн квадрат биш. Иймээс $1 \leq x, |y| < \sqrt{m_1}$ болно. $a^2 + 3 \equiv 0(m_1)$ ба $ax \equiv -y(m_1)$ учир $a^2 x^2 \equiv y^2 \equiv -3x^2(m_1) \Rightarrow 3x^2 + y^2 \equiv 0(m_1)$ буюу $3x^2 + y^2 = km_1$ болно. $3x^2 + y^2 < 3m_1 + m_1 = 4m_1$ учир $k = 1, 2, 3$ -ийн аль нэг байна.

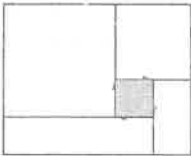
а) $k = 1$ бол $3x^2 + y^2 = m_1 = 6s + 5$ буюу $y^2 \equiv 2(3)$ болж зөрчил,
 б) $k = 2$ бол $3x^2 + y^2 = 2m_1 = 12s + 10 \equiv 2(4)$ болж мөн зөрчил,
 в) $k = 3$ бол $3x^2 + y^2 = 3m_1 \Rightarrow y = 3y_1$, $3x^2 + 9y_1^2 = 3m_1$, $x^2 + 3y_1^2 = m_1$ болж а) ёсоор мөн зөрчил. Иймд A нь сондгой.

3. $f(x+y) \leq \frac{(f(x))^2}{f(x)+y} < f(x)$, $y = f(x)$ гэвэл $f(x+f(x)) \leq \frac{(f(x))^2}{f(x)+f(x)} = \frac{f(x)}{2}$, $x_0 \in \mathbb{R}^+$, $f(x_0) = a$ гэе. $\frac{a}{2} \geq f(x_0 + a)$,

$x_0 + a = x_1$ гэвэл $f(x_1) \leq \frac{a}{2}$. $(x, y) = (x_1, f(x_1))$ гэвэл $f(x_1 + f(x_1)) \leq \frac{f(x_1)}{2} \leq \frac{a}{4}$, $\frac{a}{4} \geq f(x_1 + f(x_1)) \geq f(x_1 + \frac{a}{2})$. $x_1 + \frac{a}{2} = x_2$ гээд $(x, y) = (x_2, f(x_2))$ гэвэл дээрх ёсоор $f(x_2 + \frac{a}{4}) \leq \frac{a}{8}$ болно. Ийм маягаар $f(x_m) \leq \frac{a}{2^{m+1}}$ болохыг индукцээр баталж болно. Энд $x_{n+1} = x_0 + \sum_{i=0}^n \frac{a}{2^i} < x_0 + 3a$, $f(x_0 + 3a) < f(x_0 + \sum_{i=0}^n \frac{a}{2^i}) \leq \frac{a}{2^{n+1}}$ болох ба $n \rightarrow \infty$ тэмүүлбэл $f(x_0 + 2a) \leq 0$ болж зөрчил үүсч ийм функц оршин байхгүй болов.

ОМУО-43, II сорил, 2002.06.06.

Б.Батцэнгэл

- Ижилхэн $a \times b$ хэмжээтэй тэгш өнцөгт хэлбэртэй хатуу цааснууд байв (энд a, b нь натурал тоонууд болно). $m \times n$ хэмжээтэй тэгш өнцөгтөөс 1 талтай квадратыг хаа нэгтээ ухаж авчээ. Үүсэх дүрсийг зурагт дүрсэлснээр хэсгүүдэд хуваав  (квадратын талууд дээр ямар нэгэн чиглэл сонгон авч, уг чиглэлийн дагууд цацрагууд татна, хэсгийн тоо 2,3 эсвэл 4 байна). Хэрэв дүрсийг хатуу цаасаар бүрж болдог бол хэсэг тус бүрийг хатуу цаасаар бүрж болно гэж батал.
- AA_1, BB_1, CC_1 нь ABC хурц өнцөгт гурвалжны өндрүүд болно. C_1B_1 ба C_1A_1 хэрчим дээр D ба E цэгийг $\angle DAB_1 = \angle EAA_1$ байхаар сонгон авчээ. $\angle DEA = \angle C_1EA$ болохыг батал.
- $$\begin{cases} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 \end{cases}$$
 систем тэгшитгэлийн шийдийг хэрэв (y_1, y_2, y_3) нь (x_1, x_2, x_3) -ийн сэлгэмэл бол тривиал шийд гэж нэрлэе. Уг системийн $1 \leq x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \leq n$ байх бүх натурал тоон шийдийн ядаж 99 хувь нь тривиал шийд байдаг $n \geq 2002$ тоо олдоно гэж батал.

4. Ямар ч натурал n -ийн хувьд, бүх коэффициент нь $-n$ -ээс багагүй, n -ээс хэтрэхгүй бүхэл тоо байдаг. $(x-1)^{[\sqrt{n}]}$ -д хуваагддаг n зэргийн олон гишүүнт олдохыг харуул, энд $[a]$ -ээр a тооноос багагүй хамгийн бага бүхэл тоог тэмдэглэв.

ОМУО-43, III сорил

Г.Баярмагнай

1. 1950×1950 хүснэгтийн нүднүүдийг өнгө бүрээс 1950 ширхэг орсон байхаар 1950 ялгаатай өнгөөр будав. 45-аас багагүй ялгаатай өнгө агуулсан багана эсвэл мөр олдохыг батал.
2. Тойрог доторхи M цэгийг дайруулан хоорондоо тэнцүү өнцөг үүсгэхээр татсан 1999 хөвч тойргийг $A_1, A_2, \dots, A_{3998}$ цэгүүдээр огтолсно. Тэгвэл

$$\sum_{i=1}^{3998} \alpha_i M A_i = 0, \quad \alpha_i \in \{-1; 1\}$$

байх $[\alpha_1, \dots, \alpha_{3998}]$ олдоно гэж батал.

3. Олон улсын хуралд ирсэн 300 зочин 5 улсын хэл мэддэг. Хэрэв хүн бүр 3 улсын хэл мэддэг бол бүлэг тус бүр дэх хүмүүс ерөнхий хэлтэй байхаар тус бүрдээ 100 хүнтэй гурван хэсэгт хувааж болохыг батал.

1. i -р өнгө a_i ширхэг багана, b_i ширхэг мөрөнд байдаг гэж үзвэл эдгээр багана ба мөрүүдийн огтлолцолд i -р өнгө байх учраас $a_i \cdot b_i \geq 1950$ байна.

Ямар ч мөр ба баганыг 44-өөс илүүгүй ялгаатай өнгө агуулна гэж үзвэл $\sum_{i=1}^{1950} a_i \leq 44 \cdot 1950$, $\sum_{i=1}^{1950} b_i \leq 44 \cdot 1950$ байна. Эндээс

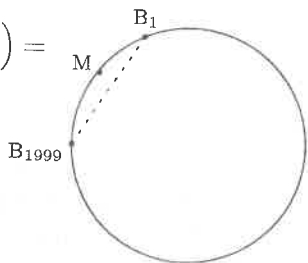
$$88 \cdot 1950 \geq \sum_{i=1}^{1950} (a_i + b_i) \geq 2 \sum_{i=1}^{1950} \sqrt{a_i b_i} \geq 2 \cdot 1950 \cdot \sqrt{1950}$$

болж зөрчил гарснаар бодлого бодогдов.

2. Тойргийн төв O -д эхтэй OM радиустай тойрог MA_{2i} шулуунтай B_i цэгүүдэд огтолно гэвэл $B_1B_2 \dots B_{1999}$ нь зөв олон өнцөгт болно.

Хэрэв $\sum_{i-\text{тэгш}} MB_i = \sum_{i-\text{сонд}} MB_i$ болохыг баталчихвал $\sum_{i-\text{тэгш}} MA_i = \sum_{i-\text{сонд}} MA_i$ байх нь мөрдөн гарна. M цэгийн хоёр талын цэгийг B_1 ба B_{1999} гэж үзэж чадна. $MB_1 = b$, $MB_{1999} = c$, $B_1B_{1999} = a$ гэе. Тэгвэл Птолемейн теоремоос $MB_i \cdot a = b \cdot B_{1999}B_i + c \cdot B_1B_i$, $i = \overline{1, 1999}$ байна.

$$\begin{aligned} a \cdot \sum_{i-\text{тэгш}} MB_i &= \sum_{i-\text{тэгш}} (b \cdot B_{1999}B_i + c \cdot B_1B_i) = \\ &= b \cdot \sum_{i-\text{тэгш}} B_{1999}B_i + c \cdot \sum_{i-\text{тэгш}} B_1B_i = \\ &= b \cdot \sum_{i-\text{сонд}} B_{1999}B_i + c \cdot \sum_{i-\text{сонд}} B_1B_i = \\ &= \sum_{i-\text{сонд}} (b \cdot B_{1999}B_i + c \cdot B_1B_i) = a \sum_{i-\text{тэгш}} MB_i \text{ болж батлагдав.} \end{aligned}$$



3. Хүн бүр 2 хэл мэдэхгүй. 5 хэлээ графын орой гэж үзээд хоёр хэлэнд харгалзах ирмэгийг холбож дээр нь уг хоёр хэлийг мэдэхгүй хүний тоог бичье. Бичигдсэн тоонуудын нийлбэр 300 болно. 100-аас их тоо бичигдсэн ирмэгийг "муу" ирмэг, өөрөөс нь гарсан дөрвөн ирмэгүүд дээрх тоонуудын нийлбэр нь 200-аас их байх оройг "муу" орой гэж нэрлэе. Тэгвэл энэ графт 2-оос олонгүй муу орой байна. Эсрэгээс нь "муу" орой 3 байдаг гэвэл энэ гуравт харгалзах 12 ирмэг дээрх тоонуудын нийлбэр 600-аас их байна. Нэг ирмэг сайндаа л хоёр тоологдох тул энэ граф дээрх тоонуудын нийлбэр 300-аас их болоход хүрнэ. Мөн үүнтэй адил шалтгаанаар "муу" ирмэгүүд "муу" оройгоос л гарна. Иймд бидэнд "муу" биш 3 орой олдоно.

Энэ A, B, C гэсэн гурван орой бодлогын нөхцөлийг хангахыг баталъя. Ямар ч хүн энэ гурван хэлнээс дор хаяж нэгийг нь мэднэ. Хэрэв A хэлийг мэддэг хүний тоо 100-аас бага байвал A -г мэдэхгүй хүний тоо 200-аас их болж A нь "муу" орой болоход хүрнэ. A мэддэг, B ба C -г мэддэггүй хүний тоо 100-аас их байвал BC нь "муу" ирмэг болоход хүрнэ. Иймээс A хэлтэй хүмүүсээс, үлдэх хүмүүс нь B ба C хэлний ядаж аль нэгийг нь мэддэг байхаар A -д 100 хүнийг авч чадна. Үлдэх 200 хүн B эсвэл C хэлийг заавал мэднэ. Өмнө үзүүлсэнтэй адилаар $|B| = |C| = 100$ байх хуваалт олдоно.

ОМУО-43, IV сорил

Ц.Дашдорж

1. X хэлэнд n үсгийг ашигладаг ба хэрэв үсгүүдийн дараалалд хоёр тэнцүү үсгийн хооронд мөн хоёр тэнцүү үсэг оршдоггүй бол түүнийг үг гэдэг. X хэлэн дэх максимал урттай үг (урт үг гээ)-ийг тоо P_n -г ол.
2. 1, 2, ..., 9-ийн ямар нэг сэлгэмэл π -д монотон дэд үг бүрийг хөрвүүлэх үйлдэл зөвшөөрөгджээ, тухайлбал $916532748 \rightarrow 913562748$ гэх мэт. Тэгвэл хамгийн ихдээ 12 үйлдлээр ямарч сэлгэмлийг монотон хэлбэрт ө.х. $12 \dots 89$ эсвэл $98 \dots 21$ хэлбэрт шилжүүлж болохыг батал.
3. Олон талстад гурвалжин үүсгэх 3 ирмэг олдоно гэж батал.

1. Үг 4 адил үсэг агуулахгүй. Иймд урт үгийн урт $3n$ байна ($AAABBB \dots XXX$ бол урт үг мөн).

$n = 1$ бол AAA нь ганц урт үг нь болно. Иймд $P_1 = 1$.

$n \geq 2$ байг.

а) Урт үг бүр 2 адил үсгээр эхэлнэ. Эсрэг тохиолдолд урт үг нь AB . $A \dots A \dots$, $A \neq B$ хэлбэртэй болох ба үлдэх хоёр B -ийн хувьд B нь I ба II A -ийн хооронд мөн II ба III A -ийн хооронд, мөн III A -ийн ард орж үл чадна.

б) $3n$ урттай урт үгээс 3 адил үсгийг нь дарвал үлдэх үг нь $3(n-1)$ урттай $n-1$ үсэгтэй X' хэлний хувьд урт үг нь болно. Одоо A -аар эхэлсэн урт үгийн тоог олъё. Ийм үг бүр хоёр A -аар эхлэх ба III үсэг нь эсвэл A (ийм үгийн тоо P_{n-1}), эсвэл B , $B \neq A$ байна. $AAB \dots$ хэлбэрийн урт үгээс гурван A -г зайлуулсан гэж сэтгэвэл үлдэх дараалал нь үлдэх $n-1$ үсгийн хувьд урт үг байх тул а) ёсоор хоёр B -ээр эхлэх ёстой буюу анхны авсан урт үг нь $AABAB$ байна. Ийм хэлбэрийн урт үгийн тоо P_{n-1} болох тул A -аар эхэлсэн урт үгийн тоо $2P_{n-1}$ буюу нийт урт үгийн тоо $P_n = 2n \cdot P_{n-1}$ болно. Эндээс $P_n = 2^{n-1}n!P_1 = 2^{n-1}n!$.

2. n ялгаатай тооны π сэлгэмлийг монотон болгоход шаардагдах үйлдлийн минимум тоог $g(\pi)$ -ээр, харин π нь бүх сэлгэмлийг гүйж байхад авах $g(\pi)$ -ийн утгуудын максимумыг $f(n)$ гээ.

$$f(n) \leq f(n-1) + 2 \quad (1)$$

гэж баталъя.

$1, 2, \dots, n$ -ийн ямар нэг сэлгэмэл π -ийн эхний үсэг нь k байг. $f(n-1)$ үйлдлээр π нь эсвэл $< k, 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n > = \pi_1$ -д эсвэл $< k, n, \dots, k+1, k-1, \dots, 1 > = \pi_2$ -д шилжинэ.

$$\pi_1 \rightarrow < k, k-1, \dots, 1, k+1, \dots, n > \rightarrow < 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n > \\ \pi_2 \rightarrow < k, k+1, \dots, n, k-1, \dots, 1 > \rightarrow < n, \dots, k+1, k, k-1, \dots, 1 >$$

тул (1) батлагдлаа. Одоо $f(n)$ -г бага утгууд дээр бодъё.

$$f(3) = 1 \quad (2)$$

гэдгийг хялбархан шалгаж болно. $1, 2, 3, 4$ -ийн сэлгэмэл π -г авч үзье. $1, 4$ -ийн аль нэг нь π -ийн эхний юмуу эцсийн цифр бол үлдэх 3 тоог монотон болгоход 1 үйлдэл хэрэгтэй нь (2)-оос гарах тул энэ тохиолдолд $g(\pi) \leq 2$ болох нь ойлгомжтой. Харин үлдэх $4 = 2!2!$ сэлгэмлийн хувьд $< 2, 1, 4, 3 >$ ба $< 3, 4, 1, 2 >$ -г тус бүрийг 2 үйлдлээр, харин $< 2, 4, 1, 3 >$ -г 3 үйлдлээр эсвэл $< 1, 2, 3, 4 >$ -д

эсвэл $\langle 4, 3, 2, 1 \rangle$ -д шилжүүлнэ.

$$\begin{aligned} \langle 2, 4, 1, 3 \rangle &\rightarrow \langle 2, 1, 4, 3 \rangle \rightarrow \langle 1, 2, 4, 3 \rangle \rightarrow \langle 1, 2, 3, 4 \rangle \quad \text{эсвэл} \\ \langle 2, 4, 1, 3 \rangle &\rightarrow \langle 4, 2, 1, 3 \rangle \rightarrow \langle 4, 2, 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 3, 2, 1 \rangle \end{aligned}$$

(3)

$\pi = \langle 3, 1, 4, 2 \rangle$ -ийн хувьд мөн адил. Ө.х.

$$f(4) = 3 \quad (4)$$

боллоо. π нь 1, 2, 3, 4, 5-ын сэлгэмэл байг. Хэрэв 1, 5-ын аль нэг нь π -ийн эхний юмуу эцсийн элемент бол үлдэх 4 элементийг монотончлоход 3 үйлдэл хэрэгтэй ба (3) ёсоор бүх 5 элемент ч монотончлогдсон гэж үзэж чадна. Хэрэв 1, 5-ын аль нь ч 1 эсвэл 5-р байранд байхгүй бол эдгээрийн аль нэг нь 2 эсвэл 4-р байранд байна, үүнийг захад авчирахад 1 үйлдэл хэрэгтэй. Иймд (3) ба (4)-өөр $f(5) \leq 4$ болно. Иймд (1)-ээр $f(9) = f(5+4) \leq f(5) + 2 \cdot 4 = 4 + 2 \cdot 4 = 12$.

3. ЛЕММА. $0 < x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $x_1 \leq x_2$ ба $i = 2, \dots, n-1$ бүрийн хувьд $x_{i-1} + x_i \leq x_{i+1}$ бол $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n-2$ бүрийн хувьд $x_{i_1} + \dots + x_{i_k} \leq x_n$ байна.

Баталгаа. $x_1 + \dots + x_{n-2} \leq x_n$ гэж баталбал болно.

n тэгш бол $(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + \dots + (x_{n-3} + x_{n-2}) \leq x_3 + x_5 + \dots + x_{n-1} \leq (x_4 + x_5) + x_7 + \dots + x_{n-1} \leq (x_6 + x_7) + x_9 + \dots + x_{n-1} \leq x_{n-2} + x_{n-1} \leq x_n$.

n сондгой бол $(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + \dots + (x_{n-4} + x_{n-3}) + x_{n-2} \leq x_{n-1} + x_{n-2} \leq x_n$.

Одоо олон талстын ирмэгүүдийн урт нь $x_1, \dots, x_n$ ба $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ гэе. Мөн гурвалжин үүсгэдэггүй гэвэл $x_1 \leq x_2 < x_3 < \dots < x_n$ (эсрэг тохиолдолд $i > 1$ үед $x_i = x_{i+1}$ бол x_1, x_i, x_{i+1} -үүд гурвалжин үүсгэнэ) ба $x_{i-1} + x_i \leq x_{i+1}$, $i = 2, \dots, n-1$ болно. Иймд $x_1, \dots, x_n$ тоонууд нь Леммийн нөхцлийг хангав.

x_n ерөнхий талтай 2 талсыг авч үзвэл $x_{i_1} + \dots + x_{i_k} > x_n$, $x_{j_1} + \dots + x_{j_p} > x_n$, $i_1 < \dots < i_k$, $j_1 < \dots < j_p$ болно. Леммээс $i_k = j_p = n-1$ гэж гарна. Энэ нь авсан 2 талс x_{n-1} гэж бас нэг ерөнхий талбай болоход хүрч зөрчилд хүргэв.

ОЛОН УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН XLIII ОЛИМПИАДАД ОРОЛЦСОН ТУХАЙ

Ц.Дашдорж

ОУМО-XLIII 2002.07.19-31-нд Их Британий Глазго хотод болж өнгөрлөө. Дэлхийн 83 орон оролцсон энэ Олимпиадад Хятад 212 оноо, Орос 204, АНУ 171, Болгар 167, Вьетнам 166, Өмнөт Солонгос 163, Тайван 161, Румын 157, Энэтхэг 156 оноогоор эхний 10 байранд шалгарлаа.

Манай улсаас

1. Т.Баасанжав	(МУИС)	22 оноо	хүрэл
2. С.Сайнбаяр	(I сургууль, 8-р анги)	21 оноо	хүрэл
3. Ц.Гэрэлт	(I сургууль, 8-р анги)	17 оноо	хүрэл
4. Б.Мэндбаяр	(I сургууль, 8-р анги)	11 оноо	
5. Д.Эрдэнэбулган	(I сургууль, 10-р анги)	7 оноо	
6. Б.Анхбаяр	(I сургууль, 10-р анги)	4 оноо	

медаль авч багийн дүнгээр 82 оноогоор 35-р байранд орлоо.

Багийн орлогч удирдагчаар Монгол улсын дархан аварга, багш Н.Даавий-Од явлаа.

ОУМО-XLIV Японы Токиод 2003.07.07-19-нд болно.

ОУ-1 (Колумб). n өгсөн натурал тоо байг. $x + y < n$ байх сөрөг биш бүхэл тоо x, y -ээр тодорхойлогдох хавтгайн (x, y) цэгүүдийн олонлогийг T гээ. T -ийн цэг бүрийг улаан эсвэл хөх өнгөөр будахад хэрэв (x, y) улаан цэг бол $x' \leq x$ ба $y' \leq y$ байх T -ийн (x', y') цэг мөн улаан байв. x координатууд нь ялгаатай байх ямар нэг n хөх цэгээс тогтох X олонлогууд, мөн y координатууд нь ялгаатай байх ямар нэг n хөх цэгээс тогтох Y олонлогуудыг тус тус тодорхойлов. Тэгвэл X олонлогуудын тоо, Y олонлогуудын тоотой тэнцүү гэж батал.

ОУ-2 (Өмнөт Солонгос). BC нь O төвтэй Γ тойргийн диаметр, A нь Γ дээр орших $0^\circ < \angle AOB < 120^\circ$ байх цэг. D нь C -г агуулаагүй AB нумын дундаж цэг. $\mathcal{O}$ -г дайрсан AD -тэй

параллель шулуун AC шулуунтай J цэгт огтлолцоно. OA -ийн дунд босгосон перпендикуляр нь Γ -г E ба F цэгт огтолдог бол J нь $\triangle CEF$ -д багтсан тойргийн төв гэж батал.

ОУ-3 (Румын). Төгсгөлгүй олон натурал тоо a дээр $\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$ илэрхийлэл бүхэл тоо байдаг. $m, n \geq 3$ байх бүх хос бүхэл тоо m, n -ийг ол.

ОУ-4 (Румын). $1 < n$ натурал тоо агчээ. $d_1, d_2, \dots, d_k$ нь түүний бүх хуваагчид ба $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ байв.

$D = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \dots + d_{k-1} d_k$ байг. Тэгвэл

а) $D < n^2$ гэж батал.

б) D нь n^2 -ийн хуваагч байх бүх n -ийг ол.

ОУ-5 (Энэтхэг). Ямар ч бодит тоо x, y, z, t -ийн хувьд

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

байх бүх $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол.

ОУ-6 (Украин). $O_1, O_2, \dots, O_n$ төвүүдтэй 1 радиустай Γ_1, Γ_2 тойргууд хавтгайд байрлажээ, энд $n \geq 3$. Хавтгайн ямар ч шулуун эдгээр тойргуудын 2-оос илүүгүйтэй нь ерөнхий цэгтэй байдаг. бол $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{O_i O_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}$ гэж батал.

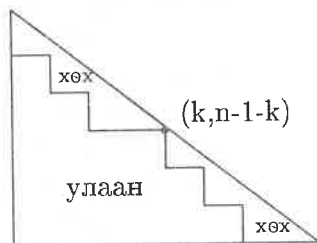
ОУ-1 (Бодолт 1).

$\{x, y | (x, y) \in T \text{ хөх цэг ба } x = i\} = A_i, |A_i| = a_i, i = \overline{0, n-1}$ гэе.

$\{x, y | (x, y) \in T \text{ хөх цэг ба } y = i\} = B_i, |B_i| = b_i, i = \overline{0, n-1}$ гэе.

$\prod C_{a_i}^1 = a_0 \dots a_{n-1}$ ба $\prod C_{b_i}^1 = b_0 \dots b_{n-1}$

нь X олонлогуудын тоо ба Y олонлогуудын тоотой тэнцүү байх нь ойлгомжтой тул $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ нь $b_0, \dots, b_{n-1}$ -ийн сэлгэмэл (*) гээд баталбал бодлого лавтайяа бодогдоно. $n = 1$ үед илэрхий. Иймд индукцийн шилжилтийг л баталъя.



а) $x + y = n - 1$ байх (x, y) цэг бүр хөх бол эдгээрийг дарахад гарсан цэгүүд нь $n - 1$ тохиолдолд харгалзах төлөв (бодлогын нөхцлийг хангах) болох ба түүний хөх баганууд нь $a_0 - 1, a_1 -$

$1, \dots, a_{n-2} - 1$ хэмжээстэй, харин хөх мөрүүд нь $b_0 - 1, b_1 - 1, \dots, b_{n-2} - 1$ хэмжээстэй байна. Индукцэд үзэж буйгаар $a_0 - 1, \dots, a_{n-2} - 1$ нь $b_0 - 1, \dots, b_{n-2} - 1$ -ийн сэлгэмэл ба манай тохиолдолд анхнаасаа $a_{n-1} = b_{n-1} = 1$ байгаа тул (*) батлагдана.

б) Хэрэв $(k, n - 1 - k)$ улаан цэг бол $x \leq k, y \leq n - 1 - k$ байх (x, y) цэгүүдээс тогтох тэгш өнцөгт нь бүхэлдээ улаан цэгүүдээс тогтоно. Тэгвэл $x < k$ байх (x, y) цэгүүдийг авч үзвэл индукц ёсоор $a_0, \dots, a_{k-1}$ нь $b_{n-k}, b_{n-k+1}, \dots, b_{n-1}$ сэлгэмэл ба мөн адилаар $a_{k+1}, \dots, a_{n-1}$ нь $b_0, \dots, b_{n-2-k}$ -ийн сэлгэмэл болно. Анхнаасаа $a_k = b_{n-1-k} = 0$ тул (*) батлагдана.

ОУ-1 (Бодолт 2). Одоо (*)-г улаан цэгийн тоогоор (s) индукцлэж баталъя. $s = 0$ бол илэрхий. $x + y$ нь максимум байх (x, y) улаан цэгийг сонгоё. Тэгвэл $a_x = b_y = n - 1 - x - y$ ба (x, y) цэгийг хөх болгосон гэвэл улаан цэгийн тоо нь цөөрсөн төлөвт шилжих ба a_x, b_y -ээс бусад бүх хөх мөр ба баганууд үл өөрчлөгдөх ба a_x, b_y нь тус бүр 1-ээр л хорогдоно. Иймд индукцэд үзэж байгаагаар $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ -д a_x -ийг $a_x - 1$ -ээр солиход гарсан тоонууд нь $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ -д b_y -г $a_y - 1$ -ээр солиход гарсан тоонуудын сэлгэмэл болно. Гэтэл $a_x = b_y$ тул мөн (*) батлагдав.

ОУ-1 (Бодолт 3). (*)-г хөх цэгүүдийн тоогоор индукцлэж батал.

ОУ-2. A цэг EAF нумын дундаж цэг тул CA нь $\triangle ECF$ -г таллан хуваана. $OA = OC$ гэдгээс $\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle OAC$ болох тул $OD \parallel JA$, $ODAJ$ параллелограмм болно. $OEAF$ ромбо тул $AI = OD = OE = AF$. Эндээс $\angle JFE = \angle JFA - \angle EFA = \angle AJF - \angle ECA = \angle AJF - \angle JCF = \angle JFC$. Үүгээр JF $\triangle EFC$ -г таллан хуваана, ө.х. J $\triangle CEF$ -ийн багтсан төв боллоо.

ОУ-3. $f(x) = x^m + x - 1, g(x) = x^n + x^2 - 1$ гэвэл $\frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{Z}[x]$ байхыг баталъя. $g(x)$ унитар (ахмад коэф. 1) олон гишүүнт тул $\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$, энд $q(x), r(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ба $\deg r(x) < \deg g(x)$ болно.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{r(x)}{g(x)} = 0 \text{ ба } \frac{r(x)}{g(x)} \text{ нь төгсгөлгүй олон бүхэл тоо } a \text{ дээр бүхэл}$$

утгыг авах ёстой. Иймд $\frac{r(a)}{g(a)} = 0$ төгсгөлгүй олон бүхэл утга a олноо гэдгээс $r(x) = 0$. Иймд $\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ боллоо.

$m = n + k$ гэвэл $x^m + x - 1 = x^k(x^n + x^2 - 1) + x^k - x^{k+2} + x - 1$.
 $x^n + x^2 - 1 \mid x^k - x^{k+2} + x - 1 \Rightarrow (1 - x)(x^{k+1} + x^k - 1) \Leftrightarrow$

$$x^n + x^2 - 1 \mid x^{k+1} + x^k - 1 \quad (*)$$

$x^n + x^2 - 1$ нь $\alpha \in (0, 1)$ гэсэн язгууртай тул энэ нь мөн, $x^{k+1} + x^k - 1$ -ийн язгуур болно. Тэгвэл $\alpha^n + \alpha^2 = 1$, $\alpha^{k+1} + \alpha^k = 1$ болно. Гэтэл $k + 1 \geq n$ ба $k \geq 2$ $(*)$ ёсоор $k = 1$ боломжгүй. Иймд $\alpha^n + \alpha^2 = \alpha^{k+1} + \alpha^k \Leftrightarrow k + 1 = n$, $k = 2$ буюу $n = 3$, $k = 2$.

ОУ-4. а) $d \mid n$ бол $d' = \frac{n}{d} \mid n$ ба $1 = d_1 = d'_k < d_2 = d'_{k-1} < \dots < d_k = d'_1 = n$ байх тул

$$D = n^2 \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{d_i d_{i+1}} \leq n^2 \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_{i+1}} \right) < \frac{n^2}{d_1} = n^2$$

б) Мөн $d_2 = p$, $d_{k-1} = \frac{n}{p}$, $d_k = n$ болно, энд p нь n -ийн хамгийн бага анхны тоон хуваагч.

$n = p$ бол $k = 2$ ба $D = p \mid n^2$ болно. n зохиомол тоо бол $k > 2$ ба $D > d_{k-1} d_k = \frac{n^2}{p}$ болно. Хэрэв $D \mid n^2$ бол $\frac{a^2}{A} \mid n^2$ болох ба $1 < \frac{n^2}{D} < p$ гэж гарна. Энэ нь n^2 -ийн хамгийн бага хуваагч нь p гэдэгт зөрчинө. Иймд $D \mid n^2 \Leftrightarrow n$ анхны тоо боллоо.

ОУ-5. $\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}$ -ийн хувьд

$$f(xy - zt) + f(xt + yz) = (f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) \quad (*)$$

тэгшитгэлийн шийд нь $\forall x \in \mathbb{R}$ -ийн хувьд

а) $f(x) = 0$, б) $f(x) = \frac{1}{2}$, в) $f(x) = x^2$ байх энэ 3 функц болж чадах нь ойлгомжтой. Одоо өөр шийд байхгүйг харуулъя. $(*)$ -д $x = y = z = 0$ гэвэл $2f(0) = 2f(0)(f(0) + f(t))$ болно. Эндээс тухайн тохиолдолд $2f(0) = 4f(0)^2$ болох тул $f(0) = 0$ эсвэл $f(0) =$

$\frac{1}{2}$. Хэрэв $f(0) = \frac{1}{2}$ бол $f(0) + f(t) = 1$ болох тул $f(x) = \frac{1}{2}$ болно. Одоо $f(0) = 0$ гэж үзье. (*)-д $z = t = 0$ гэвэл

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad (1)$$

буюу f мультипликатив функц боллоо. Иймд тухайн тохиолдолд $f(1) = f(1)^2$ буюу $f(1) = 0$ эсвэл $f(1) = 1$. Хэрэв $f(1) = 0$ бол $\forall x, f(x) = f(x)f(1) = 0$ болно. Иймд $f(0) = 0, f(1) = 1$ гэж үзье. (*)-д $x = 0, y = t = 1$ гэвэл $f(-z) + f(z) = 2f(z)$ буюу $\forall z \in \mathbb{R}$ -ийн хувьд $f(-z) = f(z)$ буюу f тэгш функц боллоо. Иймд $x > 0$ үед $f(x) = x^2$ гэж харуулах л үлдлээ. $f(x^2) = f(x)^2 \geq 0$ ба f тэгш функц учир $\forall y \in \mathbb{R}$ -ийн хувьд $f(y) \geq 0$ боллоо. (*)-д $t = x, z = y$ гэвэл $f(x^2 + y^2) = (f(x) + f(y))^2$. Иймд $f(x^2 + y^2) \geq f(x)^2 = f(x^2)$. Эндээс $u \geq v \geq 0$ бол $f(u) \geq f(v)$ буюу f функц нь эерэг бодит тоонууд дээр өсөх функц гэж гарлаа. (*)-д $y = z = t = 1$ гэвэл

$$f(x-1) + f(x+1) = 2(f(x) + 1) \quad (2)$$

n -ээр индукцлэх замаар $0 \leq n \leq \mathbb{Z}$ бүрийн хувьд $f(n) = n^2$ гэдгийг (2)-оос хялбархан гаргаж болно. f тэгш тул $n \in \mathbb{Z}$ бүрийн хувьд

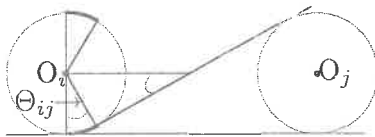
$$f(n) = n^2 \quad (3)$$

болно. (1) ба (3)-аас $a \in \mathbb{Q}$ бүрийн хувьд $f(a) = a^2$ гэж гарна. $\exists x > 0, f(x) \neq x^2$ гэж үзье. $f(x) < x^2$ бол $x > a > \sqrt{f(x)}$ байх $a \in \mathbb{Q}$ -г авч үзье. Тэгвэл $f(a) = a^2 > f(x)$ болно. f өсөх функц тул $f(a) \leq f(x)$ гэж зөрчилд хүрнэ. $f(x) > x^2$ бол мөн адил зөрчилд хүрнэ. Иймд $f(x) = x^2$.

ОУ-6. C_i тойргийг авч үзье.

а) C_i тойргийн P цэгүүд дээрх шүргэгчүүд нь C_j тойргийг огтлодог гэвэл Θ_{ij} урттай хоёр нум үүсгэх ба $\sin \Theta = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{2}{\sigma_i \sigma_j}$.

Энэ шүргэгчид нь хамгийн ихдээ нэг тойрог C_j -г л огтлох ба энэ



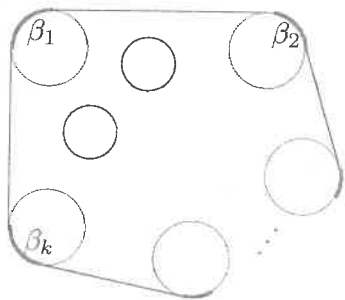
нумууд үл огтлолцох тул $\sum_{i \neq j} 2\Theta_{ij} \leq \alpha_i$, энд α_i нь C_i тойргийн

а) чанар бүхий P цэгүүдээс тогтох нумуудын уртуудын нийлбэр. Зурагт үзүүлсэн β_i нумууд нь α -уудаас ялгаатай (β -үүд нь зөвхөн гадна талын тойргууд дээр л

оршино). Иймд $\sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^k \beta_i \leq n(2\pi)$

ба $\sum_{i=1}^k \beta_i = 2\pi$ тул $\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 2(n-1)\pi$ буюу

$$2(n-1)\pi \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} 2\Theta_{ij} = \sum_{i \neq j} 4\Theta_{ij} \geq \sum_{i \neq j} 4 \sin \Theta_{ij} = \sum_{i \neq j} \frac{8}{O_i O_j}.$$



Дүүргийн математикийн олимпиад, 2002.01.16.

Ч.Даваадорж

I анги

1. 2 см ба 3 см урттай хэрчмүүдээр 20 см урттай хэрчмийг хичнээн аргаар үүсгэж болох вэ?
2. 100 гэсэн тоог дэс дараалсан хэд хэдэн тоонуудын нийлбэр байдлаар хичнээн янзаар задалж бичиж болох вэ?
3. Бүтэн тоосгоны жин нь хагас тоосгоны жин дээр 3 кг туухал нэмсэнтэй тэнцэх бол 7 бүтэн, нэг хагас тоосгоны жинг ол.
4. Хоёр хайрцагт нийтдээ 77 ширхэг алим байв. I хайрцаг дахь алимыг охидууд тэнцүү хувааж авсан. II-ын алимыг 7 хөвгүүн тэнцүү хувааж авсан ба хөвгүүд бүр охидоос 1 алим илүү авсан бол хэдэн охин байсан бэ? Мөн хайрцаг бүрт хэдэн алим байсан бэ?

II анги

1. 4 см ба 3 см урттай хэрчмүүдээр 50 см урттай хэрчмийг хичнээн аргаар үүсгэж болох вэ?
2. 200 гэсэн тоог дэс дараалсан хэд хэдэн тоонуудын нийлбэр байдлаар хичнээн янзаар задалж бичиж болох вэ?
3. 2 шулууны цэгүүд дээр оройтой 
гурвалжнууд хэд байх вэ?

4. 1,2,3,4,5,6,7,8,9 тоонууд өгөгдсөн ба эдгээрээс дурын хоёр тоог сонгон авч нэг нэгээр нэмэгдүүлэх үйлдлийг зөвшөөрдөг. Тэгвэл хэд хэдэн үйлдлийн дараа эдгээр тоонуудыг бүгдийг нь тэнцүүлж болох уу?

III анги

1. 4 см ба 6 см урттай хэрчмүүдээр 80 см урттай хэрчмийг хичнээн аргаар үүсгэж болох вэ?
2. 300 гэсэн тоог дэс дараалсан хэд хэдэн тоонуудын нийлбэр байдлаар хичнээн янзаар задалж бичиж болох вэ?
3. Гурван тэгш өнцөгт хавтгайг хамгийн олондоо хэдэн хэсэг болгон хуваах вэ?
4. 1,2,3,...,49 гэсэн тоонуудыг сонгон авъя. Тэгвэл эдгээр тооноос үлдсэн 14 тооныхоо нийлбэртэй тэнцүү байхаар 35 тоог сонгон авч болох уу?

IV анги

1. 400 гэсэн тоог дэс дараалсан хэд хэдэн тоонуудын нийлбэр байдлаар хичнээн янзаар задалж бичиж болох вэ?
2. Дөврөн тэгш өнцөгт хавтгайг хамгийн олондоо хэдэн хэсэг болгон хуваах вэ?
3. Самбарт 1,2,3,...,2002 гэсэн тоонууд бичсэн байв. Эхний удаад эхнээс нь 10 дахь тоо бүрийг, дараагийн удаад үлдсэн тооны

9 дэх тоо бүрийг, гурав дахь удаад үлдсэн тооны 8 дахь тоо бүрийг гэх мэт дарсаар 8 дахь удаадаа 3 дахь тоо бүрийг дарсан бол үлдсэн тооны нийлбэрийг ол.

4. 1,4,2,6,3,5 цифрүүдээс эхний цифрийг авч дараагийн цифрийг хамгийн ард тавина. Үлдсэн цифрүүдээс хамгийн эхний цифрийг авч дараагийн цифрийг хамгийн ард тавина гэх мэтээр цифрүүдийг авсаар ганц үлдсэн цифрийг авахад 1,2,3,4,5,6 дарааллаар авсан байхыг харж болно. Тэгвэл дээрх үйлдлийн эцэст 1,2,3,...,29,30 гэсэн дарааллаар авсан байхаар 1-ээс 30 хүртэлх тоог хэрхэн байрлуулах вэ?

V анги

1. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{2000 \cdot 2001 \cdot 2002}$ нийлбэрийг ол.
2. 500 гэсэн тоог дэс дараалсан хэд хэдэн бүхэл тоонуудын нийлбэр байдлаар хичнээн янзаар задалж бичиж болох вэ?
3. 51×87 тэгш өнцөгтийг 1×1 квадратууд болгон хуваажээ. Өгөгдсөн тэгш өнцөгтийн диагоналиуд хэдэн 1×1 квадратыг дайран гарах вэ?
4. 5×5 хэмжээтэй хүснэгтэд 1,2,3,...,24,25 тоонуудыг аливаа дэс дараалсан 2 тоо нь хөрш нүдэнд (ерөнхий талтай) бичигдсэн байхаар байрлуулжээ. нэг багананд хамгийн ихдээ хичнээн ширхэг анхны тоо бичигдэх вэ?

VI анги

1. $1 + \alpha((\alpha + 1)^9 + (\alpha + 1)^8 + \dots + (\alpha + 1)^2 + \alpha + 2)$ үржвэр болго.
2. 1000 гэсэн тоог дэс дараалсан хэд хэдэн бүхэл тоонуудын нийлбэр байдлаар хичнээн янзаар задалж бичиж болох вэ?
3. Нэг квадратыг 2002 квадрат болгон хуваасны 2001 нь 3×3 квадрат байв. Өгөгдсөн квадратын талын байж болох бүх уртыг ол.

4. 5 өнцөгтийн орой бүр дээр сөрөг биш тоо бичсэн бөгөөд тэдгээрийн нийлбэр 3072 байв. Нэг үйлдлээр тоо тус бүрийг нөгөө оройнууд дээр бичигдсэн тоонуудын арифметик дундажаар солих үйлдлийг хийв. Үйлдлийг 5 удаа гүйцэтгэхэд оройнууд дээр бичигдсэн тоо бүхэн 615-аас бага болно гэж батал.

VII анги

1. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + 2000 \cdot 2001 \cdot 2002$ нийлбэрийг ол.
2. $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ нь $a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = 2002$ байх эерэг тоонууд бол

$$\frac{a_1}{2002 - a_1} + \frac{a_2}{2002 - a_2} + \dots + \frac{a_{100}}{2002 - a_{100}} \geq \frac{100}{99}$$

гэж батал.

3. Бүхэл тоо n ба анхны тоо p -ийн хувьд $1 + np$ нь бүтэн квадрат бол $1 + n$ нь p ширхэг бүтэн квадратуудын нийлбэр болохыг батал.
4. M, K цэгүүд нь $ABCD$ квадратын BC, CD талууд дээр оршино. MD ба BK -ийн огтлолцлын цэг P байг. хэрэв $MC = KD$ бол $MK \perp AP$ гэж батал.

VIII анги

1. $a_1, a_2, \dots, a_n$ тоонууд арифметикийн прогресс үүсгэнэ гэвэл

$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \dots + a_{2001}^2 - a_{2002}^2 = \frac{1001}{2001}(a_1^2 - a_{2002}^2)$$

гэж батал.

2. $p^2 + 3pq + q^2$ нь а) бүтэн квадрат байх, б) таван зэрэгт байх бүх p, q -ийн анхны тоонуудын хосыг ол.
3. $y(x^2 + 36) + x(y^2 - 36) + y^2(y - 12) = 0$ тэгшитгэлийн бүхэл тоон шийдийг ол.

4. ABC гурвалжны талууд дээр түүний гадна ABD, BCE, CAF зөв гурвалжнууд байгуулав. $BE \cap AF = K, DB \cap CF = L, DA \cap EC = M$ бол $DK \parallel LE \parallel FM$ гэж батал.

IX анги

1. $9^t - 4a3^t + 4 - a^2 = 0$ тэгшитгэл $(0, 1)$ завсарт ганц шийдтэй байх a параметрийн бүх утгыг ол.
2. $\{a_n\}$ нь аливаа натурал m, n тоонуудын хувьд $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ нөхцлийг хангах дараалал байг. Аливаа натурал n -ийн хувьд

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots + \frac{a_n}{n} \geq a_n$$

гэж батал.

3. $(m - n)^2 \cdot (n^2 - m) = 4m^2n$ тэгшитгэлийг хангах бүхэл тоон (m, n) хосуудыг ол.
4. Хурц өнцөгт ABC гурвалжинд CL биссектрис татав. L цэгээс AC, BC талд харгалзан LM, LN перпендикуляруудыг буулгав. $AN \cap BM = P$ бол $CP \perp AB$ гэж батал.

X анги

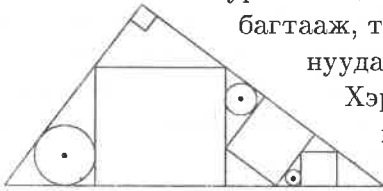
1. Хэрэв $3 \sin \beta = \sin(2\alpha + \beta)$ бол $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 2 \operatorname{tg} \alpha$ батал.
2. $f(x)$ нь дурын бодит x -ийн хувьд а) $f(999 + x) = f(999 - x)$, б) $f(1998 + x) = -f(1998 - x)$ нөхцлийг хангадаг бол а) дурын бодит x -ийн хувьд $f(-x) = -f(x)$ болохыг, б) дурын бодит x -ийн хувьд $f(x + T) = f(x)$ байх T тоо оршин байна гэж батал.
3. ABC гурвалжинд CH ($H \in AB$) өндөр татав. ACH, BCH гурвалжнуудад CM, CN биссектрис татав. CMN гурвалжныг багтаасан тойргийн төв, ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төвтэй давхцана. $S_{ABC} = \frac{AN \cdot BM}{2}$ гэж батал.
4. $a, b, c, d > 0$ тоонуудын хувьд

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a^3 + 63bcd}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b^3 + 63acd}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c^3 + 63abd}} + \frac{d}{\sqrt[3]{d^3 + 63abc}} \geq 1$$

тэнцэтгэл бишийг батал.

Бага ангийн багш

1. $\frac{q}{p} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1333} - \frac{1}{1334} + \frac{1}{1335}$ бутархайн хувьд q нь 2003-т хуваагдахыг батал.
2. 1-ээс 1000 хүртэлх тоонуудаас 7-д хуваагддаг ба 13-т хуваагдахгүй натурал тоонуудын нийлбэрийг ол.
3. Хэрэв 3-аас их p анхны тоо ба p^n бичиглэлд 5-аас цөөнгүй ижил цифр олдохыг батал.
4. Тэгш өнцөгт гурвалжинд гурван квадратыг зурагт зааснаар



багтааж, тэдгээрийн хооронд үүсэх гурвалжнынуудад мөн гурван тойргийг багтаажээ.

Хэрэв том жижиг 2 тойргийн радиус харгалзан 99 ба 19 бол дунд тойргийн радиусыг ол.

Дунд ангийн багш

1. $\left[(\sqrt{29} + \sqrt{21})^{2000} \right]$ тооны сүүлчийн 2 цифрийг ол.
2. $x^4 + y^4 = 1921^{101}$ тэгшитгэлийг хангах ядаж нэг натурал хосыг ол.
3. $a, b, c, d > 0$ тоонуудын хувьд

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a^3 + 63bcd}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b^3 + 63acd}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c^3 + 63abd}} + \frac{d}{\sqrt[3]{d^3 + 63abc}} \geq 1$$

тэнцэтгэл бишийг батал.

4. γ_1, γ_2 тойргууд M, N цэгт огтлолцоно. Тойрогт N цэгт ойр PQ ерөнхий шүргэгч татав. $S_{MNP} = S_{MNQ}$ болохыг батал.

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН НИЙГЭМЛЭГИЙН ТОВЧ ТАНИЛЦУУЛГА

Монголын Математикийн Нийгэмлэг нь 1994 оны 11 дүгээр сарын 12-нд байгуулагдсан. Нийгэмлэгийн ерөнхийлөгч нь дэд профессор Ц.Дашдорж, нарийн бичгийн дарга нар нь дэд доктор Б.Баясгалан, Р.Энхбат. 1996 онд тус нийгэмлэг нь Америкийн математикийн нийгэмлэгт гишүүнээр элссэн. АНУ, Герман, Орос, Японы математикийн нийгэмлэгүүдтэй хамтын ажиллагаатай ажилладаг. Эгнээндээ дотоодын 50, гадаадын 4 гишүүнтэй. Нийгэмлэг гишүүдийн татвар, хандивын тусламжтайгаар өөрийгөө санхүүжүүлдэг. Монголын Математикийн Нийгэмлэгийн сэтгүүлийг жил бүр англи хэл дээр гаргадаг.

Одоогоор сэтгүүлийн 3 дугаарыг гаргасан бөгөөд сэтгүүлд гадаад, дотоодын математикчидын онолын бүтээлийг хэвлэдэг.

Нийгэмлэгийн паашдын зорилт нь санхүүгийн хувьд бэхжих, гадаад харилцаагаа өргөтгөх, авьяаслаг математикчидыг дэмжих зэрэгт оршино.

Жич: Манай нийгэмлэг одоо математикийн зарим чухал сэтгүүлийг захиалж авах, олон улсын математикийн бага хурлыг зохион байгуулах, гадаад гишүүддээ тусгай үнэмлэх олгох, өөрийн сэтгүүлийг тогтмол хэвлэдэг болох зэрэг олон ажил гүйцэтгэх шаардлагатай байгаа бөгөөд эхний хэдэн жил гишүүдээсээ сард 50-100\$-ний татвар авч байсан боловч, дээрх үйл ажиллагаануудыг явуулахад хүрэлцэхгүй байгаа билээ. Иймд тус нийгэмлэг нь санхүүгийн хувьд баталгаатай болох үүднээс гишүүд та бүгдийг нийгэмлэгтээ амьдралдаа ганц удаа тодорхой хэмжээний хандив өргөхийг урийлж байна. Энэ тухай мэдээллийг олимпиадын цувралаар дамжуулан тогтмол мэдээлж байх болно.

Нийгэмлэгийн дотоод данс:

Голомт банк (I салбар)
2250704 Р.Энхбат

Валютын данс:

Голомт банк (I салбар)
2270409 Р.Энхбат

Монголын Математикийн Нийгэмлэгт хандив өгсөн хүмүүсийн жагсаалт

Нэрс	Албан газар	Утас	Хөдөл онд хаана ямар сургууль, мэргэжлээр төгссөн	Хандивын хэмжээ	Хэзээ өгсөн
1. Б.Бат	"Их алт" ком-паний ерөнхий захирал	99115441	МУИС, Мат, 1987 он	250U\$	1998.04
2. Б.Батбаасан	"Космо" ком-паний ерөнхий захирал	99115561	МУИС, Мат, 1987 он	100.000₮	1998.09
3. Ц.Дашдорж	МУИС-ийн багш	372828	МУИС, Мат, 1969 он	50.000₮	1998.04
4. Ү.Бадам	ШУА, ФТХ	368209	Эрхүү, УИС, 1969 он	4.000₮	1998.05
5. С.Будням	ШУА, ФТХ	358949	Эрхүү, УИС, 1966 он	5.000₮	1998.05
6. С.Тогмид	УБИС-ийн захирал	322705	МУИС, Мат, 1969 он	10.000₮	1998.06
7. Д.Бямбажав	Математик хүрээлэнгийн захирал	451136	МУИС, Мат, 1970 он	5.000₮	1998.05
8. Ш.Эрдэнэ	"Ээргэд" бро-керийн пүү-сийн захирал	99112152	МУИС, Мат, 1985 он	200U\$	1998.10
9. Р.Ринчинбаазар	ЭГО	326434	МУИС, Мат, 1980 он	10.000₮	1999.03
10. Н.Тунгалаг	МУИС-ийн ня-бо бүртгэл	-	МУИС, Ня-бо,	5.000₮	1998.05
11. Ц.Болдсүх	МУИС-ийн ш.хариулсан орлогч захирал	322508	ХБНГУ, 1982 он	4.000₮	1998.05

12.	Н.Намсрай	УБИС-ийн багш	323626	ЛГУ, 1966 он	5.000₮	1998.05
13.	Р.Энхбат	МУИС-ийн багш	351007	ИГУ, 1980 он	5.000₮	1998.05
14.	Т.Жанлав	МУИС-ийн багш	325631	МУИС, Мат, 1970 он	5.000₮	1998.05
15.	Х.Гэндэнжамц	МУИС-ийн багш	325022	МУИС, Мат, 1955 он	3.000₮	1998.05
16.	Л.Дорж	ФГХ	452313	Эрхүү, УИС, 1966 он	5.000₮	1998.05
17.	Ч.Бат-Эрдэнэ	НИК, Мэд Тех Газрын захирал	99117954	МУИС, Мат, 1991 он	100.000₮	1999.09
18.	А.Мекей	МУИС Док.-т албаны дарга	321983	МУИС, Мат, 1963 он	10.000₮	2000.04
19.	Ц.Ахамсүрэн	МА-МО тэнхимийн эрхлэгч	321102	Мос.ИС, 1966 он	5.000₮	2000.04
20.	Б.Баясгалан	МУИС, Мат. Хүр. эрд. н.б.д.	451136	Урал ИС, 1978 он	50.000₮	2000.04
21.	Ш.Мөнхцэцэг	ХI сур-ийн захирал	99187215	МУИС, Мат, 1986 он	10.000₮	2000.03
22.	УБ, ХI сург.	Захирал Ш.Мөнхцэцэг	324649	-	100.000₮	2000.03
23.	А.Хадхүү	МУИС, багш	684042	МУИС, Мат, 1979 он	5.000₮	2000.04
24.	Л.Өнгөн	МУИС, Хэр. мат. тэнхимийн эрхлэгч	311244	МУИС, Мат, 1959 он	10.000₮	2000.03