

МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАДЫН ЦУВРАЛ
№28

Ү.САНЖМЯТАВЫН НЭРЭМЖИТ
МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН
XXXIX ОЛИМПИАД

УЛААНБААТАР ХОТ, 2004 ОН

ӨМНӨХ ҮГ

Улсын болон Олон улсын математикийн олимпиадад бэлтгэгчид, математикийн төрөлжсөн сургалттай ангийн сурагч, оюутан, багш нар, математик сонирхогч өргөн олонд зориулсан цувралын ээлжит дугаар уншигч Таны гар дээр очиж байна. Тус гарын авлагыг бэлтгэхэд ММО Зохион Байгуулах Хорооны гишгүүд, МУИС-ийн математикийн ангийн оюутнууд идэвхтэй оролцлоо.

Уг номын талаархи аливаа санал хүсэлтээ МУИС-ийн Алгебрийн тэнхимд ирүүлнэ үү.

$$y(x) = \int f(x)dx$$

МОНГОЛ УЛСЫН ГАВЪЯАТ БАГШ С.ЦАГААНЫ
НЭРЭМЖИТ САН ИВЭЭН ТЭТГЭЖ ХЭВЛЭВ.

Монголын Математикийн XXXIX олимпиад

Редактор: Цэрэндоржийн Дашдорж

Хэвлэлийн эхийг бэлтгэсэн: Цэрэндоржийн Навчаа

2004 оны 04-р сард 2000 хувь хэвлэв.

Мэндчилгээ

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХХИХ ОЛИМПИАДАД ОРОЛЦОГЧДОД

Монголын математикийн олимпиадын хорооны дарга аа,
Эрхэм хүндэт багш нар аа,
Өсвөр залуу математикчид аа,

Монголын өсвөр үеийнхний оюуны чадавхийг сорьсон математикийн олимпиадын шат шатны уралдаанд хошуучлан шалгарч энд хүрэлцэн ирсэн Та бүхэнд болон шинжлэх ухааны "хаан" гэж өргөмжлөгдсөн их ухааныг шавь нартаа заан сургах эрхэм үйлсэд хүчин зүтгэдэг хүндэт багш нар, олимпиадыг зохион байгуулахад санаачилга гарган оролцсон хүн бүхэнд Монгол Улсын Их Хурлын нэрийн өмнөөс болон хувиасаа чин сэтгэлийн мэндчилгээ дэвшүүлье.

Математик бол аугаа их шинжлэх ухаан, математикаар мэрэгжих нь үнэхээр бахархмаар зүйл ээ. Энэ их ухааныг үе үеийн суут ухаантнууд бүтээж, цаг үе бүрийн эрдэмтэн, мэргэд баяжуулан хөгжүүлж ирснийг Та бид сайн мэднэ.

Өнөөдрийн математикийн багш нар, энэ олимпиадад оролцож буй залуу математикчид Та нар бол өнөө цагийн математикийн шинжлэх ухааны өнгө төрхийг тодорхойлогчид, ирээдүйнх нь хөгжлийг дархан бүтээгчид юм.

Мэдээлэлийн технологийн шинэ эрин үед хүний мэдлэг ухааны олон салбар, үйл ажиллагааны үндсэн төрлүүд улам бүр математикчигдаж, ажил амьдралд нь түүний гүйцэтгэх үүрэг өсөн нэмэгдсээр байна. Ийм үед манай математикчид дэлхийн түвшинд өрсөлдөж, жил дараалан медаль авч ирэх болсон нь улс орныхоо ирээдүйн хөгжилд үнэтэй хувь нэмэр оруулах итгэл найдварыг төрүүлсэн бахархуштай сайхан амжилт гэдгийг онцлон тэмдэглэмээр байна.

Математикийн их шинжлэх ухаанд шамдан суралцаж, түүнийг хөгжүүлэхийн төлөө билиг авьяасаа зориулахаар

зоригтой сонголт хийсэн хэн бүхэн тавьсан зорилгоосоо няцалгүй хичээн зүтгэж, амжилт нээлтээр дөрвөдөн эрдмийн оргил руу цуцалтгүй тэмүүлэх чин хүсэлтэй байхын чухлыг зөвлөн хэлье. Манай үе, үеийг төлөөлсөн багш нар ч залуу шавь, өсвөр математикчидва энэ амаргүй боловч гайхамшигтай замаар итгэлтэй жолоодож чадна гэдэгт миний бие эргэлзэхгүй байна.

Монгол Улсад математикийн олимпиадын хөдөлгөөнийг хөгжүүлэхэд үнэтэй хувь нэмэр оруулсан ахмад математикч, Монгол Улсын гавьяат багш Ү.Санжмятавын нэрэмжит болгон зохион байгуулж буй 39 дэх удаагийн олимпиад манай улсад энэ шинэжлэх ухаан ямар түвшинд хүрч хөгжсөнийг илтгэн харуулах чухал үйл явдал болох нь дамжиггүй.

Та бүхний маань ухаан хурц, авьяас дэлгэр байхын элний дэмбэрэлтэй ерөөлийг өргөн дэвшүүлье.

Монголын математикчдын цог хийморь нь бадарч, амжилт, нээлт нь арвижих болтугай.



С.ТӨМӨР-ОЧИР

Улаанбаатар хот

2003 оны 5 дугаар сарын 16-ны өдөр

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН ХХХІХ ОЛИМПИАДЫН ДҮНГИЙН ТУХАЙ ИЛТГЭЛ

Ц.Дашдорж

Эрхэм хүндэт математикч багш сурагчид аа!

Баянзүрх дүүргийн ЗДТГ болон засаг дарга ноён Т.Гантөмөр өө!

Нийслэлийн 10 жилийн 84-р сургуулийн хамт олон, захирал
хатагтай П.Цэрэндулам аа!

Монголын Математикийн ХХХІХ Олимпиад Монгол Улсын гавъяат багш Ү.Санжмятавын нэрэмжит болон 2003 оны 5 сарын 15-19-ний хооронд Нийслэл хотноо Баянзүрх дүүргийн тэргүүний 84 дүгээр дунд сургууль дээр амжилттай явагдаж дүнгээ гаргаж байна. Энэ удаагийн олимпиадад 21 аймаг, Улаанбаатар хотын 2 багийн нийт 58 бага, дундын багш, 154 сурагчид оролцож нийт 212 хүн оюун ухаан, авъяас чадвараа сорин уралдлаа. Энэ удаагийн олимпиадыг зохион байгуулахад бүхий л талын боломж туслалцаа үзүүлсэн Баянзүрх дүүргийн засаг дарга Т.Гантөмөр, газрын дарга Батболд, мэргэжилтэн Мягмар, ММОХорооны гишүүд, тухайлбал П.Дорж, Даваадорж, 84-р сургуулийн хамт олон, түүний дундаас захирал П.Цэрэндулам, сургалтын менежер н.Чимэдзаяа, математикийн багш О.Сэр-Од нарт Монголын нийт Математикчдын нэрийн өмнөөс талархал илэрхийлье. Мөн манай энэ удаагийн Олимпиадыг зохион явуулахад МУИС 250000 төг, МКС 250000 төг, Б.Баясгалан захиралтай "Олонлог" сургууль 500000 төг, багш Г.Ганбат 50000 төгрөгийн хандив өргөж биднийг эдийн засгийн талаар дэмжсэн явдалд ММОХороо талархлаа илэрхийлье.

Энэ удаагийн олимпиад Монгол Улсын Гавъяат багш, Монголын Математикийн олимпиадыг үүсгэн байгуулагч, санаачлагчдын анхдагч манай ахмад буурал, Ү.Санжмятав багшийн маань нэрэмжит болон явагдсан нь олимпиадад оролцогч нийт математикчдын төдийгүй энд хараахан хуран цуглаж чадаагүй мянга мянган шавь нарынх нь бахархал байлаа. Бид зөвхөн ийм л багштай, ийм л анхдагчтай байснаараа Монголын математикийн

олимпиад үе үеийн аваргуудаараа Монголынхоо нэрийг дэлхийд хэдэнтээ дуурсгаж ялангуяа сүүлийн жилүүдэд амжилт маань тасралтгүй дээшилж математикчдын эзлэх жин өсөж байгаад буурал багшийгаа дурсахгүй байхын аргагүй билээ. Санжмятав багшдаа энд оюун ухаанаа уралдуулж байгаа нийт математикчдынхаа нэрийн өмнөөс дахин баяр хүргэж, эрүүл энхийг хүсэн ерөөж математикч шавь нарынхаа бахархал болон улам урт удаан насалж, эрүүл энх байж бидэндээ алтан сургаалиа хайрлаж явхын өлзийтэй ерөөлийг дэвшүүлье.

Олимпиадад 8-р ангийн 74 сурагч оролцсоноос Олонлог сургуулийн сурагч Т.Байгальмаа 32 оноогоор 1-р байр эзэлж 8-р ангийн аварга боллоо. 1-р сургуулийн Т.Отгонбаатар 30 оноогоор, 11-р сургуулийн Б.Энхсайханн 21.5 онхоогоор тус тус 2-р байрыг, Олонлог сургуулийн сурагч Б.Чандмань 18.5 оноогоор, Дархан-Уул аймгийн Мөнхбаатар 17.5 оноогоор 3-р байрыг тус тус эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

Олимпиадад 9-р ангийн 33 сурагч оролцсоноос 1-р сургуулийн сурагч А.Ганбат 28 оноогоор 1-р байр эзэлж 9-р ангийн аварга сурагч боллоо. 1-р сургуулийн С.Оюумаа, Номуун сургуулийн Н.Энхбаясгалан, Монгол-Турк сургуулийн Ц.Цэлмэг нар тус бүр 27.5 оноогоор 2-р байрыг, Монгол-Турк сургуулийн Т.Тулга 23 оноогоор, 1-р сургуулийн Э.Цэнгүүн 22.5 оноогоор, Монгол-Турк сургуулийн Ч.Доржнамжил 22.5 оноогоор тус тус 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

Олимпиадад 10-р ангийн нийт 47 сурагч оролцсоноос 1-р сургуулийн сурагч С.Сайнбаяр 37 оноогоор 1-р байр эзэлж Улсын математикийн 39-р олимпиадын 10-р ангийн аварга сурагч боллоо. 1-р сургуулийн Ц.Гэрэлт 30 оноогоор, Байгаль-Эх сургуулийн Г.Энхтайван 2. оноогоор 2р байрыг, 1-р сургуулийн Сайнжаргал 27 оноогоор, МУИС-ын Ж.Азжаргал 2! оноогоор, Өвөрхангай аймгийн Д.Баттөмөр 20 оноогоор тус тус 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

Улсын Математикийн 39 дүгээр олимпиадад амжилттай оролцсон дээрхи нэр бүхий сурагчид, олимпиадад сурагчдаа ам-

жилттай бэлтгэж оролцуулсан багш нар болон сургуулиудын олимпиадыг зохион байгуулах хороо болон нийт математикчдын нэрийн өмнөөс чин сэтгэлийн талархал илэрхийлье.

Багш нарын олимпиадыг бага, дунд гэсэн хоёр ангилалаар явуулсны дотроос дунд ангийн математикийн 38 багш оролцсоноос, Увс аймгийн Улаангом хотын 10 жилийн 1-р сургуулийн багш Р.Одгэрэл 11 оноогоор түрүүлж, Олонлог сургуулийн багш Б.Баяржаргал, 1-р сургуулийн багш Д.Бат-Орших нар удаах байруудад орлоо.

Бага ангийн багш нарын олимпиадад нийт 20 багш оролцсоноос Олонлог сургуулийн багш П.Чимэг 34 оноогоор түрүүлж, мөн сургуулийн багш Б.Намжилмаа, Оюуны нахиа сургуулийн багш Г.Өнөрцэцэг нар удаах байруудыг эзлэв.

Энэ жилийн 7-р сард Япон улсын Токио хотод болох ОУМО-44-ийн бэлтгэлд 1-р сургуулийн сурагч С.Сайнбаяр, Ц.Гэрэлт, Х.Сайнжаргал, А.Ганбат, МУИС-ийн Ж.Азжаргал, Өвөрхангайн Д.Баттөмөр нарыг үлдээхээр Олимпиадын хороо шийдвэрлэлээ. ОУМО-44-д Монголын багийн орлогч удирдагчаар Монгол улсын аврага багш, "Эхлэл" сургуулийн захирал А.Энхжаргалыг томилохоор ММОХороо шийдвэрлэлээ.

ОУМО-44-ийн бэлтгэлд багтаж шалгарсан та бүхэндээ амжилт хүсч, Монголынхоо нэрийг дэлхийн тавцанд дуурсгах хүндтэй бөгөөд хариуцлагатай үйл хэргийн төлөө идэвхи чармайлт гарган сайн бэлтгэж амжилттай оролцохыг Монголын нийт Математикчдын нэрийн өмнөөс даалгаж байна.

ММО-39-д 1-р сургууль 9 медаль, Олонлог сургууль 5 медаль, Монтурк сургууль 3 медаль, Увс аймаг, Оюуны нахиа сургууль, Байгаль-Эх сургууль, Дархан-Уул аймаг, Өвөрхангай аймаг, 11-р сургууль, Номуун сургууль, МУИС тус тус 1 медаль авч олимпиадад оролцогчдоо хошуучилан сайхан амжилт гаргалаа.

Эрдэм оюун дэлгэрч Монголд математикчдын оюун ухаан улам хөгжин дэвших болтугай. Анхаарал тавьсан та бүхэнд баярлалаа.

Улаанбаатар хот, 2003.05.19

**Монголын Математикийн XXXIX Олимпиадын
багийн нэгдсэн дүн**

№	Аймгийн нэр	VIII	IX	X	Бага	Дунд	Нийт оноо	Хүний тоо	Дундаж оноо
1	Улаанбаатар	120.5	177.5	185.5	83.5	16.5	583.5	44	13.3
2	Олонлог	41	8.5	4	-	-	53.5	5	10.7
3	Өвөрхангай	16	17	6.5	4	0	43.5	5	8.7
4	Хөвсгөл	14	4.5	7	7	4	36.5	5	7.3
5	Архангай	7.5	10	-	-	0	17.5	3	5.8
6	Дархан	17.5	1.5	0	3	0	22	5	4.4
7	Орхон	8.5	1	0	8	4	21.5	5	4.3
8	Увс	0	4	0.5	2	11	17.5	5	3.5
9	Дорнод	0.5	10	7	0	0	17.5	5	3.5
10	Сэлэнгэ	0	8.5	4.5	4	0	17	5	3.4
11	Дорноговь	0.5	8	7	1.5	0	17	5	3.4
12	Хэнтий	11	-	0	1.5	0	12.5	4	3.1
13	Баянхонгор	1.5	-	10	0.5	0	12	4	3.0
14	Дундговь	1	3	8	2	0	14	5	2.8
15	Ховд	8	-	0	-	0	8	3	2.7
16	Өмнөговь	3.5	4	0	5	0	12.5	5	2.5
17	Завхан	0.5	-	7	-	0	7.5	3	2.5
18	Булган	2	-	4	-	0	6	3	2.0
19	Говь-Алтай	0	3.5	0	2	0	5.5	5	1.1
20	Төв	0	-	0	4	0	4	4	1.0
21	Баян-өлгий	1	1.5	0	0.5	1	4	5	0.8
22	Сүхбаатар	0	-	0	-	1.5	1.5	3	0.5
23	Говьсүмбэр	1	-	0	-	0	1	3	0.3

САНЖМЯТАВ (БУРХАН ЧАДАЛТАН) БАГШАА ДУРСАХУЙД

Сэтгэлд мөнхөрсөн гэгээнтэн багшдаа залбиран мөргөө. Багш маань математикийн багшийн дээд мэргэжлийн суурь гурван А (Алгебр, Анализ, Аналитик геометр)-ийн семинараар бидэнд

- Аливаа тулгамдсан асуудлын тавилыг задлан ухааруулж,
- Асуудлыг тайлах нууц түлхүүрт дараалан дөхөх арга ухаанд сэнхэрүүлж,
- Сийлсэн арга ухааны шижим бүрийг ширхэгчлэн хэрэгжүүлэх барил төлөвшүүлж,
- Шийдвэрлсэн асуудлаа эргэн шинжилж шинэ санаа олох үйл урын гайхамшигийг таниулсан гэгээнтэн билээ.

Багш маань мунхаг төрсөн миний мулгуу болхи ой ухаанд багшлах эрдмийн анхны дадлыг бат бөх суулгасан атан билээ.

Хорвоод олон нар буй ч хотол дэлхийд амьдрал хайрласан нь ганц манай наран. Хоромхон зуур ганцхан туулах насанд зөв амьдрах арга ухаан, ариун ёсыг зөн билэгт оюунаараа зүгшрүүлэн төлөвшүүлж соёрхсон хосгүй эрдмийн суу билэгт гэгээн наран билээ, багш минь.

Манай багш нийгэм орчны өөрчлөлтийн ирээдүйг урьдчилан тааж мэддэг, шавь нарыхаа дотоод мөн чанарыг нэвт харж таньдаг, эх хэл түүх соёлын үлэмж хорхойтон, өөрийгөө бусдын хөгжил дэвшил сайн сайхны төлөө бүрэн золиосолдог бурханлиг чанартай байлаа.

Манай багш олон хүүхэд төрүүлэн өсгөж Монгол түмэндээ өргөн барьсан цэвэр цусны боржгин овогт нэр хүндтэй аав байлаа.

Математикийн суут мэргэдийн тархийг 100 гаруй жилээр чилээж математикийн түүхэнд 4 будгийн бодлого гэж алдаршсан төвөгтэй асуудлыг шийдэх гэж багш маань амьдралынхаа сүүлийн 30-аад жил оролдож байсны нь дурсан санахад үнэхээр бахархал төрдөг. Багш минь ганц л дутагдалтай, тэр нь тамхи татах. Багшийн маань тамхины шунал эцсийн эцэст амь насы нь бүрэлгэсэн. Үүгээрээ ч багш маань шавь нартаа тамхины хорыг гүн гүнзгий мэдрүүлсэн.

Манай багш ариун шудрага ёсыг ямагт чандлан сахиж ард Монголоо гэсэн нэгэн үзүүрт сэтгэл барин зүтгэсээр Алгебрийн шавь сургууль үндэслэн байгуулж эх орондоо бэлэглэсэн анхны билгүүн номч эрдэмтэн, Монголын түг түмэн үрсийг ариун номын гэгээрлийн замд хөтлөн хөгжүүлсэн мөнхийн гавъяат багш билээ.

Багшаа дурсан бишрэгч өчүүхэн мунхаг шавь
ониут овогт У.Доёд, 2004.04.20.

МОНГОЛ УЛСЫН ГАВЬЯАТ БАГШ ПРОФЕССОР Ү.САНЖМЯТАВЫН ТУХАЙ ЗАРИМ ДУРДАТГАЛ

Миний бие 1962 оны намар 4-р курст байхад эмнэлэгт 1 сар гаруй хэвтээд гараад ирсэн юм. Тэр үед 4-р ангийн оюутнуудад сонголтоор "Алгебрийн нэмэлт бүлэг" нэртэй хичээл заагдаж эхэлсэн байна. Үүнийг Москвагийн Улсын Их сургуулийн аспирантурыг дөнгөж төгсгөж ирсэн Ү.Санжмятав багш зааж байсан юм. Би тэр хичээлд сууж анх багштай танилцсан юм. Гол барьсан ном нь А.Г.Курошын "Лекции по общей алгебре" гэдэг ном байлаа. Тэгээд хавар нь их сургууль төгсөөд шууд Ү.Санжмятав багшийн гарын шавь болж дагалдан ажилласан юм даа.

Багш гэргийтэйгээ хоёулаа их сайхан хүмүүс билээ. Сургууль төгсөөд үлдэхэд надад Улаанбаатарт ямар байр орон байсан биш, тэд зуны амралтаар Булган аймаг руу явахдаа хүртэл надад итгэж, байрныхаа түлхүүрээ өгч, манайд байж бай гэж ч тусалж байлаа.

Тэгээд 1963 оны намар 10 сарын 15-аас эхлэн хоёулаа бүлгийн онолоор семинар хийх, би уншиж очиж илтгэж байхаар болж О.Ю.Шмидтийн бичсэн "Теория групп" нэртэй хүрэн номоор семинардаж байлаа. 1963 оноос, тэр үеийн тэргүүлэх нөлөөтэй багш нарын нөлөөгөөр, математикийн салбар 5 жилийн сургалттай болж, нарийн мэргэжлийн тусгай курсүүд 3-р ангийн 2-р хугас жилээс заагдаж эхэлж байлаа. Энэ бол МУИС дээр алгебр,

магадлалын онол, математик статистик, функцэн анализ, дифференциал тэгшитгэлийн чиглэл хөгжих эхлэл болсон юм.

Багш маань Алгебр-геометрийн тэнхимийг 20 гаруй жил толгойлж, алгебр геометр хоёрыг хөгжүүлэх талаар асар их санаа тавьж байсан билээ. 1966-1967 оны хичээлийн жилд мэргэжилтэн В.Голиков (Казаны их сургуулийн доцент, геометр), Г.А.Маланина (Перьмийн их сургуулийн доцент)-г урьж ирж ажиллуулав. Би Г.А.Маланинаг 1 жил дагалдан ажилласан. В.Голиковаг Ч.Раднаа, А.Хашбаатар нар дагалдаж билээ. Дараа нь багш намайг 1967-1968 оны хичээлийн жилд МосУИС-д мэргэжил дээшлүүлэхээр явуулж, улмаар 1969 онд аспирантурт явуулж, дэмжиж байлаа.

Ү.Санжмятав багшийн тухай яриад байвал хэдэн арван хуудсанд ч багтахгүй ихийг бичиж болно. Гэвч надтай холбоотой бус багшийн онцлогийг харуулсан зүйлсийг дурсах нь илүү "биеэнд наалдацтай" байх болов уу гэж бодож байна.

Ү.Санжмятав багш юманд нэг их яарч сандардаггүй, уужуу тайван, холч ухаантай хүн байсан. Ялангуяа, өдөр хоног, сар, нэг хичээлийн жилийн настай мэдээ баримт, тайлан тооцоо хийхэд ач холбогдол өгч сүйд болдоггүй, гэхдээ аргалаад хийгээд өгчихдөг, шавь нараа, туслах ажилтнаа сайн дайчлан хийлгэчихдэг байсан. Тийм ажилд зарагдах нь надад бас бичих, хийх, найруулан бичиж сурахад зөндөө тус болсон юм.

Профессор Ү.Санжмятав багш Монгол оронд математик боловсрол хөгжүүлэхэд үнэхээр хүчин зүтгэсэн хүний нэг. Анх ЕБДС-ийн үндэсний зохиогчидтой сурах бичиг бичигдэж эхэлж байсан үед Алгебрийн бодлогын хураамж зохиож, тэнд биднийг (Ч.Раднаа, А.Хашбаатар, намайг) оролцуулж бас ном бичих анхны дадлага, туршлага олгож байлаа. Боловсролын Яамны сурах бичгийн редакц, математик боловсролын агуулга тогтоох комисс зэргийг даргалж, гишүүнээр олон жил ажилласан юм. Их сургууль дээр алгебрийн чиглэлийн нарийн мэргэжлийг үүсгэн хөгжүүлж үндсийг тавьсан. Миний дараа Н.Ёндон, М.Дэнсмаа, Ц.Дашдорж нарыг багшаар авч үлдсэн. Энэ бол алгебрийн чиг-

лэлийн хөгжилд их түлхэц болсон юм.

1964 оноос Монголын Математикийн Олимпиадын Хорооны даргаар 20 орчим жил ажиллаж, Монголын сурагчдын багийг Олон Улсын Олимпиадад удирдан оролцож, Монголд олимпиадын хөдөлгөөнийг өрнүүлсэн "эцэг" нь гэж хэлж болох гавьяа байгуулсан багш юм. Олимпиадын анхны гарын авлага номууд хэвлүүлж, олны хүртээл болгосон нь багш, сурагчдын өсөх замыг заасан ажил болсон гэж би хувьдаа бодож явдаг юм.

Ү.Санжмятав багш түүх, соёлын асар өндөр мэдлэгтэй их боловсролтой хүн байсан. ЮНЕСКО-оос гардаг "Курьер" сэтгүүлийг захиалж уншиж, дэлхийн, хүн төрөлхтөний соёл иргэншлийн түүх соёлтой байнга танилцаж байдаг хүн юм.

Багш хүн загнаад байдаггүй хүн байсан. Өөр нэг онцлог нь удаан настай биш, их сургуулийн аливаа нэг хөгжилд тус нэмэр болохгүй ажлыг нэг их дэмжихгүй, харин холын нөлөөтэй ажилд их анхаарал тавьдаг хүн байсан юм. Тэр чанар нь миний ажил амьдралд бараг аксиом болон хэвшсэн гэж одоо байна.

Өнөөдөр багш маань бидний дундаас хальж одсон ч тэр сайхан зан чанар, намайг насан турш халамжлан дэмжиж байсныг санахад өөрийн эрхгүй нүднээс нулимс гүйлгэндэг юм даа.

Монгол оронд математикийн шинжлэх ухаан, математик сэтгэлгээ, математик боловсролыг хөгжүүлэхэд Ү.Санжмятав багшийн хийж бүтээсэн нь түүхэнд хадганд сийлж бичсэн шиг иөнхрөн үлдэх болно гэж гүнээ итгэж байна. Багшийн үйл хэргийг үргэлжлүүлж, түүний гүйцээж амжаагүй мөрөөдөж байсан зүйлсийг нь шавь нар нь хийж бүтээх болно. Үүнд эргэлзэх зүйлгүй гэж бодож байна.

Багшийн үйл хэрэг мөнхрөх болтугай.

Шавь, академич А.Мекей

МИНИЙ МЭДЭХ САНЖМЯТАВ БАГШ

Би 1955 онд Увс аймагт 10 жилийн сургууль төгсөөд МУИС-ийн Физик-Математикийн салбарт элсэн орж оюутан болоход Дээд алгебрийн хичээлийг гялалзсан хар үстэй залуухан багш

заасан нь Ү.Санжмятав багш маань байлаа. Хичээлээ сайн мэдэж нилээд яаралгүй удаахан тайлбарлаж заах бөгөөд оюутан бид ч амнаас гарсныг үг алсгалгүй шахам бичиж тэмдэглэж авна. Багш маань хичээлийн явцад байн байн тамхи татна. Заримдаа түрүүчийн тамхиа дуусаагүй шахам байхад дараачийнхыг асаах нь тохиолдоно.

Оюутны 4 жил ч харвасан сум шиг хурдан өнгөрч нэг мэдэхэд төгсөх болчихсон байлаа. Сургуулиа амжилттай төгслөө. Багш нарынхаа тавьсан хүсэлтийн дагуу сургуульдаа багшаар томилогдон үлдлээ. Ингээд 1959 оноос МУИС-д Математикийн багшаар ажиллахдаа 44 жилд нь Ү.Санжмятав багштайгаа хамт ажилласан учир багшийнхаа ажил хөдөлмөр, амьдрал, зан чанарын талаар нилээд сайн мэдэх болсон юм.

Ү.Санжмятав багш маань шинэ тутам багшилж байгаа туршлага багатай залуу багш нарыг өөрийн үлгэр дууриалал, туршлагаа харамгүй хэлж сурган зөвлөж өгдөг, биднийг халамжлан хүмүүжүүлэгч байлаа. Ү.Санжмятав багш маань багшлахын зэрэгцээгээр олон талт хөдөлмөрийг хослуулж гүйцэтгэж ирснээс заримыг дурдъя.

1. Москвагийн Их Сургуулийн аспирантурыг алгебрийн чиглэлээр суралцаж төгссөн анхны мэргэжилтэн болсны хувьд шинэ залуу шавь нараа дагуулан сургаж чиглүүлэн өгсний үр дүнд шавь нараас нь А.Мекей (Sc.D), Р.Гончигдорж (Sc.D), С.Төмөрбат (Sc.D), Ц.Дашдорж (Ph.D) нарын эрдэмтэд төрж гарсан бөгөөд Монгол Улсын Их Сургуульд (улмаар Монгол улсад) Алгебрийн шавь сургууль үндэслэн байгуулагч гэж мэргэжилтэн нэгт нөхөд нь зүй ёсоор үнэлдэг бөгөөд үүнийг нь ч үнэлж Монголын Математикийн Багш нарын Академиас ММБнАкадемичийн №2 тоот диплом хүртээсэн юм.

2. Ү.Санжмятав багш маань дунд болон дээд сургуулийн олон тооны сурах бичиг, бодлогын хураамж зохиолцож нэг үе зохиосон сурах бичиг, бодлогын хураамж нь сурагч, оюутны болон математикийн багш нарын ширээний ном болон хэрэглэгдэж байсан.

3. Математикийн олимпиадыг зохион байгуулах хорооны ги-

шүүнээр олон жил ажилласан ба Олон Улсын Математикийн Олимпиадад сурагчдыг ахалж олон жил оролцсон.

4. Тэнхимийн эрхлэгчийн үүрэгт ажлыг олон жил хийж гүйцэтгэсэн хүн гарцаагүй мөн.

5. Зан чанарын хувьд уур уцааргүй, тайван, хүлээцтэй, ухаалаг учир ямарч хүнтэй эв дүйг нь олоод гар нийлэн ажиллаж чадах онцлогтой хүн байсан. Би хамт ажилласан 40 гаруй жилийн хугацаандаа багшийгаа уурлаж байхыг нь ер үзээгүй юм байна.

6. Монголынхоо түүхийг эрт дээр үеэс нь их сайн мэднэ. Яриад байвал яриад л байх нөөцтэй.

7. Гэр бүл, үр хүүхэд, ач зээ нартаа хайр халамжтай, хамт ажиллаж байсан бид нартаа амьдралынхаа их туршлагаараа үлгэр дууриалалтай ахмад буурлын нэг байлаа.

МУИС-ийн профессор Л.Өвгөн

БАГШАА ДУРСАХУЙ

Ном дор мөргөмүй

Багш дор сөгдөмүй

гэдэг нь эрдэм номоо, эрхэм багшаа бишрэн хүндэлдгийн сайхан илэрхийлэл бизээ. Миний бие бишрэн шүтдэг олон сайхан багштайгаараа бахархан явдаг нэгэн бөгөөд тэдгээр багш нар маань олон шавь нарынхаа буянтан нь мөнөөс мөндөө.

Олон сайхан багш нарынхаа дотроос Монгол Улсын Гавъяат багш, Монгол Улсын Их Сургуулийн хүндэт профессор агсан Үржинцэрэнгийн Санжмятавын тухай цөөн хэдэн зүйл хэлэхийг хүслээ.

Багш шавийн барилдлага гэдэг нь жинхэнээрээ учир утга бүхий гүнзгий бөгөөд өргөн агуулгатай ажээ. Би 1964 онд МУИС-ийн Математикийн салбарт элсэн суралцаж Санжмятав багшийн Алгебрийн лекцийг сонсож, шүүлэг шалгалт өгч явсан жирийн оюутны нэгэн бөлгөө. Багш шавийн ийм л харилцаа цаашид гүнзгийрсээр нэг л мэдэхэд жинхэнээсээ бишрэн хүндэлдэг шавь нарын нь нэгэн байсан гэж итгэл төгс өгүүлэх байна.

Сургуулиа төгсч МУИС-ийн багш болсныхоо дараахан багш маань олон улсын математикийн олимпиадад Монгол улсын багийг тэргүүлэн явахынх нь өмнөхөн гэрт нь очиж, олимпиадад дэвшүүлж болох зарим бодлогын талаар ярилцах үедээ Лхамсүрэн эгчийн (багшийн гэргий) идээ, ундаанаас хүртэж байсан тэр үе саяхан мэт санагдана. Түүнээс хойш олон жилийн турш алба, амины янз бүрийн ажилд багштай хамт байхдаа түүний ухаалаг хандлага, алсын хараа, хүнлэг чанар, голч байдлыг нь улам улам мэдэрч байсан билээ.

Тухайн үеийн нилээн хэдэн жилд элсэлтийн уралдаант шалгалт гэж хэн хүний сонирхол татсан, хэл ам ихтэй ажил байж билээ. Тэр үед элсэлтийн уралдаант шалгалтын журмын тухай холбогдох байгууллага, сургуулийн удирдах нөхөд цуглан хуралдаж, уг ажилд үнэлэлт дүгнэлт өгч байх явцад нэгэн асуудлын талаар маргалдаж, ярилцсаны эцэст дийлэнх олонхи нь одоогийн журмаа баримтлах нь зүйтэй гэж байхад Санжмятав багш маань түүнийг сөрөн "Та нарын хамгаалж буй энэхүү буруу хандлага чинь мөдхөн цуцлагдана даа" гэж итгэл төгс хэлж байсан нь үнэхээр л ёсоороо болсон доо.

Янз бүрийн ажил мэргэжлийн хүмүүс багшийнхаар зочлон саатаж, халуун дотно яриа өрнүүлж байсантай нэг бус удаа тааралдаж, тэдний заримтай нь тухайлбал, физикч Түвдэндорж, сурган хүмүүжүүлэгч Няндаг, орчуулагч Бирваа, Бямбаноров нартай ойр дотно танилцсандаа баяртай байдаг юм. Гадаад орноос Математикийн олон эрдэмтэн багшийнхаар зочилж, математикийн шинжлэх ухааны зарим чиглэлээр ярилцдаг байсан. Тэдний дотор Москвагийн Улсын Их Сургуулийн Галочкин, Драгалин, Тулина, Укрианы Зыков, Новосибирскийн Бокуть, Эрхүүгийн Кокорин нарыг онцлон дурдах байна.

Багш маань нилээд хожуу үедээ математикийн нэгэн салбар болох графын асуудлаар гүнзгийрэн хичээллэж, олон улсын эрдэм шинжилгээний хуралд хэд хэдэн удаа оролцож, илтгэл тавьж, мэдээлэл хийж байсан билээ.

Бага нас, оюутан үеийнхээ тухай санан сайхан зүйл олныг

хуучилдаг байсан. Багшийг 8 настай байхад нь лам болгох уу эсвэл орчин үеийн сургууль, номын мөр хөөлгөх үү гэдэг талаар аав ээж нь зөрөлдсөний улмаас аав нь хүүгээ нийслэл хотноо хүргэн ах Шагдаржавынд хүргэн ирсэн гэдэг. Шагдаржав нь манай нэрт түүхч Нацагдоржийн аав бөгөөд түүний гэргий Дондогдулам нь Үржинцэрэнгийн төрсөн дүү байсан ажээ. Санжмятав багш нийслэлийн 1-р сургуульд орж улмаар МУИС төгсөх хүртлээ хүргэн ахындаа сууж байжээ. Энэ хугацаанд Ш.Нацагдоржийн үзэж, судалж байсан Монгол улсын түүхтэй холбогдох олон тооны эх сурвалж, номыг сонирхон уншдаг байснаа хуучилдаг байлаа. Түүхийн талаар сонирхож, багагүй ном уншиж, өөрийн гэсэн үзэл бодолтой болсон залуу хүү Санжмятав 10-р анги төгсөөд математикийн ухааны чиглэлээр суралцах болсон нь сонирхолтой бөлгөө.

Багшийнхаа голдуухан хэлдэг байсан нэгэн санааг энд өгүүлье.

Хүний оюуны нөөц шавхагдашгүй бөгөөд агуу их ажээ. Суут эрдэмтэн мэргэд, яруу найрагч, зохион бүтээгч, алдарт жүжигчин, тамирчин гэх мэт хэн бүхний амжилтын үндэс нь оюуныхаа нөөц хүчийг хэр зэрэг сайн ашиглаж сурсанд байдаг ажээ. Математикаар гүнзгийрэн хичээллэх нь ухаанаа задлан, улмаар шинжлэх ухааны ямарч салбарт амжилт гаргах баттай суурь болдог нь үнэн юм даа гэдэгсэн. Багш маань математикийн чиглэлээр гүнзгийрэн суралцаж, нэгэн насаа түүнд зориулан ажилласнаар ухаан нь задарч дээ гэж аргагүй л нэг бодогддог юм даа.

Багш маань Булган нутгийн охин, сайхан бүсгүй Лхамсүрэнтэй оюутан ахуй үед нь ханилан сууж, олон сайхан үр хүүхэд төрүүлэн өсгөсөн нь өнөөдөр сайн хүмүүжилтай, өндөр боловсролтой мэргэжлийн зураач, физикч, биологич, цагаан идээний инженер-технологич, эдийн засагч, математикч нар болжээ. Энэ хүүхдүүдийн дотроос Герман улсад докторын зэрэг хамгаалж, тэндээ мэргэжлээрээ ажиллаж байгаа биологич охин Жимсгэнэ, Австрали улсад аавынхаа ажиллаж байсан графын чиглэлээр судалгаа хийж магистрын зэрэг хамгаалаад тэндээ мэргэжлээрээ ажиллаж буй математикч охин Шихэр нарыг онцлон дурдъя.

Багшийн маань бүхий л байдал

Агт морь номхон нь хурдны тэмдэг

Аавын хүү дөлгөөн нь эрдэмтэйн шинж

гэсэн үгийг эрхгүй санагдуулдаг юм. Тэрээр хүний гаргаж болох алдаа, эндэгдэл бүхнээс ангид зайдуу яваагүй нь мэдээж, харин алдсан нь бага, оносон нь их, амжуулсан нь үлэмж гэж боддог.

Нүгэл буяны хорвоод

Нүнжиг заан амьдарч

Нүдтэй үнэний өмнө

Нүүр улайхгүй юмсан

гэж Д.Пүрэвдорж найрагчийн бичсэнчлэн яг л тэгж явсан хүн бол Сэрээтэр Зайсан овогт Үржинцэрэнгийн Санжмятав багш маань мөнөөс мөн байсан даа.

Монгол Улсын Гавъяат багш,
Хотгойдын Хурниад овогт профессор Н.Жаламба

ШАВИЙН ЭРДЭМ БАГШААСАА ЗУЛЫН ГЭРЭЛ ТОСНООСОО

1970 онд Архангай аймгийн Тариатын арван жилийн сургуулиасаа математикийн улсын 6-р олимпиадад шалгарч ирэх үедээ анх Ү.Санжмятав багштайгаа уулзсан даа. Миний нүдэнд анх эрдмийн их багштан, номын их хүн гэж тусаж байсан юм. Ингээд математикийн олимпиад болж дуусаад 6-р олимпиадын улсын аврага боллоо. Тэгэхд Санжмятав багш надтай уулзаж баяр хүргээд олимпиадад бэлтгэсэн багшийн маань тухай асууж билээ. Миний багш бол Нямренчин багш байсан юм. Тэр үед би Нямренчин багш маань намайг олимпиадад хэрхэн бэлтгэсэн тухай ярихад: "Аан тийм, Нямренчин үү, сурагчаа сайн бэлтгэж чаддаг аргагүй сайн багш даа" хэмээн хэлж байсан юм. Багш хүн, багшийн минь тухай ингэж сэтгэл хангалуун ярихад нь би багшийгаа багшаар нь баярлуулжээ гэж дотроо баяртай байлаа.

Дараа нь Унгар улсад болсон олон улсын математикийн олимпиадад оролцоход Санжмятав багш маань биднийг удирдаж явсан

юм. Олимпиадад оролцох бүхий л үед багшийн маань зааж, сургаж байсан үг, яриа бүхэн нь Унгар улсад болсон олон улсын олимпиадаас хүрэл медаль авчихаад зогсож байх үед, долоон өдөр галт тэргэнд явахад хүртэл надад их зүйлийг бодогдуулж билээ. Үнэхээр багш хүн шавьдаа юу заадаг, багш хүн шавийнхаа төлөө юу хийдэг, багш хүн шавьдаа ямар их итгэл, ирээдүйн их сэтгэл төрүүлдгийг тэр үед би мэдэрч байсан. Ингээд Монгол улсын их сургуулийн математикийн ангид оюутан болоод эхнийхээ лекцийг багшаасаа анх сонсож, мөн 1975 онд сургуулиа төгсөх үед сүүлийн лекцээ Санжмятав багшийнхаа лекцээр дүүргэж байсан энэ бүхэн надад зөвхөн математикч болохын хувьд биш хүн болохын минь хувьд эрдмийн эхлэл, эрдмийн тэмүүлэлд минь их багш, их эрдэмтэн энэ хүн заяах учрал байжээ гэж бодогдсон юм. Ү. Санжмятав багш бол агуу их сурган хүмүүжүүлэгч мөн эрдэмтэн хүн байсан гэдгийг хэлмээр байна.

Багш маань "Шавь нар минь улам илүүд хүрээсэй, илүүд хүрэх ёстой" гэсэн тэр л зарчмаар ханддаг хүн байлаа. Монголчуудын сургаалаар "Шавь нь багшаасаа давж байж хөгжил ирдэг" гэсэн тэр сэтгэлгээг тун ч сайн ойлгодог хүн байсан гэж хэлмээр байна. Эрдмийн хувьд багш маань дэлхийн олон суутнууд хэдэн зуун жилээр оролддог байсан "4 будгийн асуудал" хэмээх графын онолоор хичээллэж байсан нь тэр хүний өөртөө итгэх, үр дүнд хүрэхийн төлөөх том тэмүүлэл, зорилгоо илэрхийлэх чадвар байсан гэж бодож байна. 4 будгийн асуудлыг судалж байх үедээ надтай энэ талаараа санал бодлоо солилцож асуудлыг багш шавь хоёр хэлэлцэж байгаа биш, нэг асуудал дээр хамтарч ажиллаж байгаа хүн шиг ханддаг байсан нь үнэхээр надад том сэтгэгдэл төрүүлж билээ. Том багш, том эрдэмтэн хүн шавьдаа ингэж хандаж байсан нь чухамхүү шавийнх нь хувьд ажиллах, судлах, зорилго тэмүүлэлтэй байх эрч хүчийг өгч байсан. Мөн багш маань их хүнлэг, хүний төлөө гэсэн хүн байсныг би тодотгож хэлмээр байна. Манай Алгебр-Геометрийн тэнхимийн эрхлэгч байхдаа багш маань бидний ахуй амьдралын асуудлыг шийдвэрлэхийн төлөө агуу их сэтгэл гаргадаг байсныг өнөө

дөр дурсан санахад таатай байна. Багш маань тэнхимийнхээ багш нарыг үр хүүхдээсээ ч илүүд бодож тэднийхээ жижигхэн ч асуудлыг шийдвэрлэхийн төлөө зүрх сэтгэлээ зориулдаг байсныг би мэдрэх юм. Би багшийнхаа ачаар эрдмийн зэрэг хамгаалаад, дараа нь амьдралаа эхлүүлэх өөрийн гал голомт, орон сууцтай болсныгоо санаж байна. 80-аад оны эхэн үед залуу хүн орон сууцтай болно гэдэг амьдралын хүсэл тэмүүлээ биелүүлсэн шиг санагддаг байлаа. Тийм л үед багш маань шавийнхаа төлөө их хичээж, зүтгэж байсныг би хожим нь мэдсэн юм.

Багш маань "Чиний төлөө би ингэчихлээ" гэж хэзээ ч хэлдэггүй байлаа. Энэ бол агуу их сэтгэл. Ийм агуу сэтгэлтэй, агуу сэтгэлгээтэй, их зүтгэлтэй, их тэмүүлэлтэй багшаасаа их зүйлийг сурсан гэдгээ өнөөдөр дурсаж хэлмээр байна. Багш маань олон зүйл дээр гавъяатай хүн. Тийм ч учраас Монгол улсынхаа гавъяат багш гэдэг өндөр дээд хэргэм цолыг хүртсэн хүн. Багшийн маань хамгийн том гавъяа гэвэл Монгол улсад математик сэтгэлгээг хөгжүүлэхэд хичээл зүтгэл гаргаж олимпиад зохион байгуулж түүнийхээ төлөө зүтгэж байсан. Түүгээрээ ч өнөөдөр Санжмятав багш маань Монголын үе шейин математикчдын дунд "Математик сэтгэлгээний эцэг" гэж нэрлэгдэх тэрхүү эрхэм дээд өргөмжлөлийг хүртэх ёстой хүмүүн гэж бодож байна. Эрдмийнхээ судлалаар нэрт математикч Эрдешийн шагналыг хүртсэн багш маань эх орон монгол нутагтаа, элгэн олон түмэндээ их багш, математик сэтгэлгээг монгол түмэндээ түгээгч эрдэмтэн, монголынхоо хөгжлийн төлө үе үедээ хувь нэмрээ оруулах тэр олон шавь нарын номын эцэг, багш нэрээрээ алдаршин, мөнхрөн үлдэнэ гэдэгт эргэлзэхгүй байна.

Академич Р.Гончигдорж

ПАТРИАРХИЙН ТУХАЙ ДУРСАХУЙ

Мятав багштай анх уулзсан маань 9-р ангийн сурагч байсан үе. Ойр ойрхон тамхи татдаг, буурал үстэй, ануухан хүн байсан. Дараа нь оюутан ахуйдаа дээд алгебр заалгаж, төгсөөд багшлах болсноор удирдлаганд нь бас ч олон жил ажиллажээ. Тэрээр

Монголд математикийн тэр дундаа алгебрийн шинжлэх ухаанд олон талаар анхдагч, шавь нараа араасаа дагуулж, зам мөрийг нь заасан ач, буянтай хүн билээ. Энэ талаар хамт олон жил ажилласан багш нар, шавь нар нь илүү ихийг мэдэх учраас үл өгүүлэн ганцхан зүйлийг ярья. Ялангуяа маш сонин түүх, дурсамж бичих хүний нэг нь У.Доед багш яах аргагүй мөн. Мятав багш түүхийг гайхалтай сайн мэддэг, сонирхолтой ярьдаг, тэр үеийн нийгмийн дутагдал, доголдол, шинэчлэл, өөрчлөлт зайлшгүй гэдгийг сайтар ойлгож мэдэрсэн байлаа. Завсарлагаагаар яриаг нь сонсож суусаар тав, арван минут хичээлээс хойнох явдал бидэнд байсаан. Социалист систем явцгүй болж байгаа тухай, идээ бээртээ баригдаж гүйцсэн тухай тэр үед ярьж чадаж байсан нь ёстой л иргэний зориг байв. Энэ нь ч анх МУИС-ийн Физик-математикийн факультет дээр "Ардчилсан социалист хөдөлгөөн" үүсэн байгуулагдаж, тэр үеийн тооны багш нар А.Хашбаатар, Д.Ламжав, Р.Гончигдорж, Р.Хатанбаатар, Ц.Маам, С.Төмөрбат, А.Ганбаатар, С.Мэндсайхан, Ц.Цогчулуун, А.Булган гээд олон хүн нийгмийг ардчилахын төлөө сэтгэл шулуудан зүтгэхэд ихээхэн нөлөө үзүүлсэн билээ. Өөрөө ч тэр үед биднийг чин сэтгэлээсээ дэмжиж, нөмөр нөөлөг, түшиг тулгуур болж байсныг өдгөө санах хүн олон бий.

Мятав багшийн тухай өгүүлэхэд Шагдар гуайн тухай хоёр үг хэлэхгүй бол алдас болно. "Эрдэнийн сан Субашид"-ийг хөрвүүлсэн, монгол бичгээр гайхамшигтай сайхан бичдэг, бас ч үгүй язгуур угсаатай том сэхээтэн энэ палигар өвгөн манай тэнхимийн лаборант байсан юм. Бүр 1957 оноос гэж байгаа. Уг нь Хандын Шагдар боловч Мятав багш болохоор Ла Шагдар гэх. Юу гэсэн үг вэ гэвэл олон янзаар тайлбарлана. Нэгэн биеийн хоёр тал шиг болсон хүмүүс байлаа. Үнэндээ Шагдар гуай байхгүй бол тэнхимийн бичиг баримт, ажил төрлийн талаар Мятав багшид мэдэх зүйл хомс. Тэгэхээр аминд тулсан үед Ла-гаас нь илүү хэрэгтэй хүн түүнд үгүй. Тэр үед шалгалтын билетэнд тэнхимийн эрхлэгч гарын үсэг зурах журамтай. Мятав багшийн эзгүйд түүний тун ч амаргүй орооцолдсон гарын үсгийг У.Доед багш, Шагдар гуай

хоёр яг л адилхан зурна. Шагдар гуай бас захирал, деканы гарын үсгийг Н.Содном, А.Мекей гээд зурж л байсан даа. Одоогийнх шиг компьютер байх биш, ганц нэг ном, гарын авлагыг мань эр бичгийн машинаар цохино. Гаргац муутай юмуу буруу бичсэнийг яг тэр хэвээр нь машиндана, дахин бичихээс залхуурна гэж үгүй. Нэг удаа Мекей багш өгүүлбэртэй бодлого зохиогоод бөс даавуу гэхийг бөөс даавуу гэж бичсэнийг хэвээр нь хоёр дахин бичиж байсныг мэдэх юм. Үүний учир нь өөрөөр нь засуулах л гэж тэр. Тэгэхээр Шагдар гуайгаар бичүүлэх хүн гаргацтай, зөв бичихээс өөр аргагүй бөгөөд тэгээд ч энэ нь цаашдаа юм бичих төдийгүй аливаа асуудалд ул суурьтай хандах хэвшил болон төлөвших жишээтэй. Ийм сайхан хоёр хүнтэй хамт ажиллаж байсан нь надад л лав их завшаан болж, хожмын сайхан дурсамж үлдээснийг одоо санахад таатай байна.

Р.Ринчинбазар, МУИС, МКС, Хэрэглээний математикийн
тэнхимийн эрхлэгч, доктор

БАГШАА ДУРСАХУЙ

Багш таныхаа нөмөр нөөлөг, хайр ивээлд 40 гаруй жил багтаж явах их аз завшаан тохиосон өчүүхэн шавь надад Багштан Таны минь асар өргөн мэдлэг, зөнч мэргэн холын хараа, алтан сургаал нь мянга мянган шавь нарын нь адилаар үе үе үгүйлэгдэж байх юм даа. Түм түмэн шавь нарынхаа хайр хүндэтгэл, ерөөл буянаар Багштан маань бурхны оронд лавтайяа залрахдаа, өчүүхэн муу шавь нь чармайн хичээж, редакторлан гаргаж буй энэ номоороо нэгэн зул өргөн барьж байгааг минь болгоон соёрхох буй заа.

Ц.Дашдорж, МУИС, МКС, Алгебр Тооны онолын
тэнхимийн эрхлэгч

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН XXXIX ОЛИМПИАДЫН
VII АНГИЙН III ДАВААНЫ БОДЛОГО

Б.Сандагдорж (БИС), Ш.Батхишиг (БИС)

VII-A1 (Б.Сандагдорж). Найман одой хүн харанхуй байшинд тэнцүү тооны өөр өөр өнгийн шовгор малгайнуудыг хадгалсан байв. Нэгэн өглөө I одой сэрээд ижил өнгийн 11 шовгор малгай авчирч өгөхийг Цасан охиноос хүсчээ. Охин харанхуй байшингаас таамгаар хэдэн шовгор малгайг ялган авчирч түүний хүсэлтийг биелүүлжээ. Гэтэл үлдсэн одойнууд сэрсэн ба II одой ижил өнгийн 10 шовгор малгай, III одой ижил өнгийн 9 шовгор малгай гэх мэтчилэн сүүлчийн VIII одой ижил өнгийн 4 шовгор малгайг авчирч өгөхийг хүсчээ.

Цасан охин бүх одойнуудын хүсэлтийг биелүүлэхийн тулд дахин байшинд шовгор малгайг авчрахаар орох хэрэгтэй болсон. Хамгийн ихдээ хэдэн өнгийн шовгор малгайг байшинд хадгалсан бэ?

VII-A2 (Ш.Батхишиг, Б.Сандагдорж). Шат 39 гишгүүртэй, шатны доороосоо 17 дахь гишгүүр бохирдсон байв. Шатаар алхахдаа эсвэл нэг, эсвэл хоёр, эсвэл гурван гишгүүр алхана. Тэгвэл шатны эхний гишгүүрээс сүүлчийн гишгүүр хүртэл бохирдсон шатан дээр гишгэхгүйгээр нийт хичнээн янзаар алхаж явах вэ?

VII-A3 (Б.Сандагдорж). $AB < BC$ байх $ABCD$ параллелограммын диагоналиудын огтлолцлын цэг O . AB ба BC талуудын гадна талд AEB , CFB зөв гурвалжнууд байгуулав. Тэгвэл $OF > OE$ гэж батал.

VII-B1 (Б.Сандагдорж). a, b, c нь ($c \neq b$) бүхэл тоонууд. $ax^2 + bx + c$ ба $(c-b)x^2 + (c-a)x + (a+b)$ квадрат гурван гишүүнтүүд ерөнхий язгууртай бол $a + b + 2c$ тоо 3-т хуваагдахыг батал.

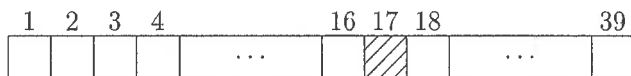
VII-B2 (Ш.Батхишиг). Тоог эсвэл 2 буюу 3-аар үржүүлж, эсвэл 2 буюу 3-ыг нэмэх үйлдлүүд (4 үйлдэл) зөвшөөрөгджээ.

Тэгвэл нэгээс эхлэн зөвшөөрөгдсөн үйлдлүүдийг хийх замаар 22 ба $2^{2003} + 2^{2000} - 1$ тоог үүсгэж чадах уу?

VII-B3 (Б.Сандагдорж). ABC гурвалжны BC тал дээр M цэгийг, B оройгоос AMC гурвалжны хүндийн төв хүрэх зай C оройгоос AMB гурвалжны хүндийн төв хүрэх зайтай тэнцүү байхаар сонгож авъя. Тэгвэл D нь A оройгоос BC талд буулгасан өндрийн суурь бол $|BM| = |DC|$ болохыг батал.

VII-A1. Нийт $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 60$ шовгор малгай хэрэгтэй. I одой ижил өнгийн 11 малгайг авч ирэхийг Цасан охиноос хүссэн учир нэг өнгийн малгайн тоо 11-ээс багагүй ширхэг байна. Байшинд 6 өнгийн малгайнууд байсан бол Цасан охин I одойн хүсэлтийг биелүүлэхийн тулд $6 \cdot 10 + 1 = 61$ малгай авч ирэх байсан. Нэг өнгийн малгайн тоог заагаагүй учир энэ 61 малгай бүгд нэг өнгийнх ч байж болно. Цасан охин үлдсэн одойнуудын хүсэлтийг биелүүлэхийн тулд дахин гарах хэрэгтэй болсон учир 6 өнгийнх байж чадахгүй. Иймд хамгийн ихдээ 5 өнгийн малгай байсан.

VII-A2. Шат 39 гишгүүртэй. 17 дахь гишгүүр бохирдсон. Шатаар нэг, эсвэл хоёр эсвэл 3 гишгүүрээр алхана.



n -р шат дээр хүрэх боломжийг F_n гээ. Тэгэхлээр цифрүүдийн нийлбэр нь n гарах зөвхөн 1, 2, 3-ын цифрийг ашиглан бичигдэх тоонуудын тоог олохтой адил болно. $F_1 = 1$, $F_2 = 2$ (11, 2), $F_3 = 4$ (111, 12, 21, 3), $F_4 = 7$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3}$ томъёо биелнэ ($n \geq 4$). Энэ томъёоны тусламжтайгаар F_{39} -ийг олох ба 17-р шатан дээр гишгэхгүй учир $F_{17} = 0$ гэж авна. Эндээс $F_{39} = 4945354244$ гэдгийг хялбар олж чадна.

VII-A3. Бодлогын нөхцөл ёсоор $ABCD$ -параллелограмм, $\triangle AEB$, $\triangle BFC$ -зөв гурвалжин. O -диагоналиудын огтлолцлын цэг. $EA = CD$, $AD = CF$, $\angle EAD = \angle FCD$ учир $\triangle EAD =$

$\triangle DCF$ байна. Иймд $ED = FD$ болно. BDE, BDF гурвалжнуудын хувьд BD -ерөнхий, $ED = FD$, $BF > BE$ учир $\angle EDB < \angle FDB$ болно.

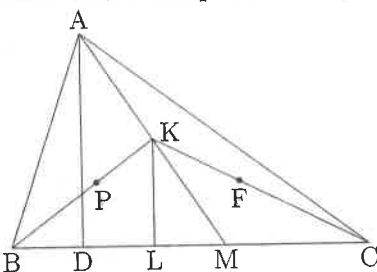
Одоо EOD, FOD гурвалжнуудын хувьд OD -ерөнхий, учир $OF > OE$ болж батлагдана.

VII-B1. Өгсөн хоёр олон гишүүнтийн ялгаврыг авч үзье. $ax^2 + bx + c - ((c-b)x^2 + (c-a)x + (a+b)) = (a+b-c)(x^2 + x - 1)$ гэсэн квадрат гурван гишүүнт нь өгсөн хоёр олон гишүүнттэй ерөнхий язгууртай. Эндээс эсвэл $a+b-c = 0$ эсвэл $x^2 + x - 1$ олон гишүүнтийн нэг язгуур нь өгсөн хоёр олон гишүүнтийн ерөнхий язгуур байна. Эхний тохиолдолд $a+b = c$ буюу $a+b+2c = c+2c = 3c$ нь 3-т хуваагдана. Сүүлчийн тохиолдолд хэрэв x_0 нь $ax^2 + bx + c = 0$ ба $x^2 + x - 1 = 0$ тэгшитгэлүүдийн язгуур бол $ax_0^2 + bx_0 + c + c(x_0^2 + x_0 - 1) = 0$ буюу $((a+c)x_0 + (b+c)) \cdot x_0 = 0$ байна. x_0 нь рациональ тоо биш учир зөвхөн $a+c = 0$, $b+c = 0$ гэсэн боломж байна. Өөрөөр хэлбэл $a = b = -c$ ба $a+b+2c = 0$ буюу $a+b+2c$ нь 3-т хуваагдаж бодлого бодогдов.

VII-B2. Өгсөн үйлдлээр бүх натурал тоонуудыг үүсгэж чадна. Иймд 22 ба $2^{2003} + 2^{2000} - 1$ тоонуудыг үүсгэж чадна.

VII-B3. BC тал дээрх M цэгийн хувьд AM хэрчмийн дунджийг K гэе. ABM гурвалжны хүндийн төвийг P , ACM гурвалжны хүндийн төвийг F гэе. Өгсөн нөхцөл ёсоор $CP = BF$.

$\frac{KP}{KB} = \frac{KF}{KC}$ учир Фалесын теоремоор $PF \parallel BC$ байна. Эндээс $BPFC$ -трапец болох ба $CP = BF$ учир уг трапец адил хажуут. Өөрөөр хэлбэл, $BP = CF$ буюу $BK = CK$ болно. Иймээс BKC гурвалжин адил хажуут болох буюу K оройгоос BC талд буул-



гасан перпендикулярын суурийг L гэвэл $BL = LC$ болно. Нөгөө талаас A оройгоос BC талд буулгасан өндрийн суурь D тул $\triangle ADM$ хувьд KL нь дундаж шугам болно. Өөрөөр хэлбэл $DL =$

$LM, BL = CL$ учир $BD = CM$ болж батлагдана.

ММО-39, VIII ангийн III даваа

Т.Баасанжав

VIII-A1 (Т.Баасанжав). $\triangle ABC$ -ны B оройн биссектрисийн суурь D болно. ABD, CBD гурвалжнуудыг багтаасан тойргуудын D цэг дээрх шүргэгчүүд BC, AB талуудыг M, N цэгээр огтлох бол AC нь $BMDN$ дөрвөн өнцөгтийн багтаасан тойргийн шүргэгч болохыг батал.

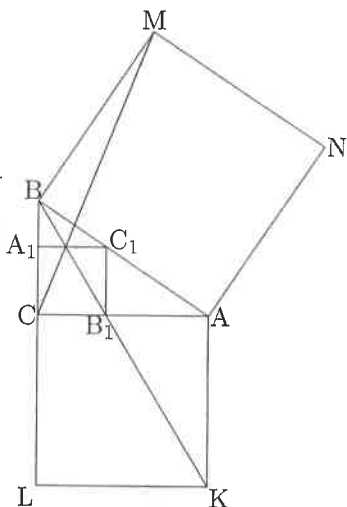
VIII-A2 (Т.Баасанжав). $a, b, c > 0$ тоонуудын хувьд $ab + bc + ac \leq 3abc$ бол $a^3 + b^3 + c^3 \geq a + b + c$ гэж батал.

VIII-A3 (Б.Нямцэрэн).

$$\sum_{i=1}^{n-1} |A_i A_{i+1}| \leq n - 1 \text{ байх}$$

$A_1 A_2 \dots A_n$ тахир шугамыг $(n - 1)$ диаметртай тойрогт багтааж болохыг батал.

VIII-B1 (Т.Баасанжав). Тэгш өнцөгт ABC гурвалжинд ($\angle C = 90^\circ$) нэг орой нь C цэг дээр, нөгөө орой нь AB дээр байх квадрат багтжээ. AB, AC талууд дээр $ANMB, AKLC$ квадратууд байгуулав. Тэгвэл CM, BK, A_1C_1 хэрчмүүд нэг цэгт огтлолцохыг батал.

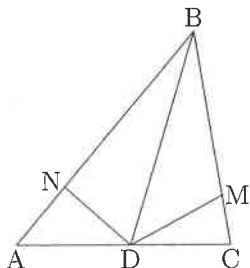


VIII-B2 (Т.Баасанжав). $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, $n_2 | 2^{n_1} - 1$, $n_3 | 2^{n_2} - 1, \dots, n_k | 2^{n_{k-1}} - 1$, $n_1 | 2^{n_k} - 1$ байх бүх $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ -г ол.

VIII-B3 (Т.Баасанжав). Анги n^2 сурагчтай. Багш нь тэднийг өдөр бүр n хүнтэй n багт хуваан тэмцээг зохиодог байв.

Хэрэв өмнө нь нэг багт байсан хоёр сурагч дахин нэг багт байхгүй байхаар зохиох бол энэ байдал хамгийн ихдээ хэдэн өдөр үргэлжлэх вэ?

VIII-A1. MD нь $\triangle ABD$ -г багтаасан тойргийн шүргэгч тул $\angle BDM = \angle BAC$, мөн ND нь $\triangle BDC$ -г багтаасан тойргийн шүргэгч тул $\angle NDB = \angle BCA$. $\angle NDM + \angle MBN = \angle BAC + \angle BCA + \angle ABC = 180^\circ$ тул $BMDN$ тойрогт багтана. Иймд $\angle DMC = \angle BND$ ба $\angle MCD = \angle BDN$ тул $\triangle BDN \sim \triangle DCM \Rightarrow \angle MDC = \angle NBD$ ба BD биссектрис тул $\angle MND = \angle DBM = \angle NBD \Rightarrow \angle MND = \angle MDC \Rightarrow AC$ нь $BMDN$ -г багтаасан тойргийг шүргэнэ.



VIII-A2. $ab + bc + ca \leq 3abc \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$ ба $\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \geq 1$ болно. $\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \geq 1 \Rightarrow a+b+c \geq 3$ ба $a+b+c \geq 3 \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ болно. $(a+b+c)^2 = \left(\sqrt{a^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{b^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} + \sqrt{c^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} \right)^2 \leq (a^3 + b^3 + c^3) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ ба $a+b+c \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ тул $a^3 + b^3 + c^3 \geq a+b+c$ болно.

VIII-A3. Тахир шугамын уртыг таллан хуваах O цэг дээр төвтэй $\frac{n-1}{2}$ радиустай тойрогт тахир шугам багтана. Үнэхээр $O \in A_k A_{k+1} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \forall i \geq k+1: |OA_i| &\leq |OA_{k+1}| + |A_{k+1}A_{k+2}| + \dots + |A_{n-1}A_n| \leq \frac{n-1}{2} \\ \forall i \leq k: |OA_i| &\leq |OA_k| + |A_kA_{k-1}| + \dots + |A_2A_1| \leq \frac{n-1}{2} \end{aligned}$$

байна.

VIII-B1. $\angle ACB$ -д зурагт үзүүлсэн шиг $BMNA$ -г багтаах $CPRS$ квадрат мөн $CBED$ квадратуудыг байгуулъя. $A_1C_1 \cap DE = T$.

$$R^{90^\circ}(\overrightarrow{CT}) = R^{90^\circ}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DT}) = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{B_1B} \Rightarrow BB_1 \perp CT$$

1 8 12 19 25	1 10 13 14 24	1 9 15 18 22
2 9 13 20 21	2 6 14 18 25	2 10 11 19 23
3 10 14 16 22	3 7 15 19 21	3 6 12 20 24
4 6 15 17 23	4 8 11 20 22	4 7 13 16 25
5 7 11 18 24	5 9 12 16 23	5 8 14 17 21

ММО-39, VIII ангийн IV даваа

Б.Сандагдорж (БИС)

VIII-A1 (Ш.Батхишиг). Нийлбэр нь 100, харин квадратуудын нийлбэр нь 1000 байх бөгөөд ядаж нэг нь 25-аас их байх 16 ширхэг эерэг тоог сонгож болох уу?

VIII-A2 (Б.Баясгалан). 1,2,3,4,5-аас зохиосон бүх 10 оронтой тоог цагийн зүүний дагуу уншиж болдог байхаар тойрог дээр эдгээр цифрүүдийг бичив. Хамгийн цөөндөө хичнээн цифр бичсэн бэ?

VIII-A3 (А.Хашбаатар). ABC гурвалжны BC , CA тал дээр харгалзан D , E хоёр цэгийг $AE = BD$ байхаар сонгоод AD , BE хоёр хэрчмийн дундажийг дайруулан татсан шулуун BC , AC хоёр шулууныг M , N цэгт огтолжээ. Хэрэв C цэгээс MN хэрчимд буулгасан перпендикуляр шулуун AB талыг F цэгт огтолсон бөгөөд $AC + AF = m$, $BC - BF = n$ байсан бол CF хэрчмийн уртыг ол.

VIII-B1 (Б.Баяржаргал). $2003^{2002^{2001}}$ тооны сүүлчийн гурван цифрийг ол.

VIII-B2 (Н.Дайвий-Од). $m \times n$ хүснэгтийн аливаа хоёр нүдний хувьд аль нэг нүднээс нь эхлэн хөрш нүднүүдэд шилжих замаар хүснэгтийн нүд бүрд яг нэг нэг удаа буугаад нөгөө нүдэнд нь ирдэг зам олддог бол уул хоёр нүдийг "найрсаг" хос гэе. Найрсаг хосын тоо $\left[\frac{m \cdot n}{2}\right]^2$ -аас ихгүй болохыг батал.

VIII-B3 (М.Батбилэг). ω тойрогт AP , AQ шүргэгчүүдийг татжээ. PQ хөвчийн дундаж R болог. R цэгийг дайруулж AQ

ба AP -тэй харгалзан параллель шулуунууд ω тойрогтой B ба C цэгээр огтлолцоно (B, C цэгүүд PQ -ийн 2 талд байна). Тэгвэл A, B, C цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

VIII-A1. Бодлогын нөхцлийг хангах тоонууд сонгож чадахгүйг харуулъя. Энд Архангай аймгийн Эрдэнэмандал сумын О.Мөнхтөрийн бодолтыг бичье. Энэ бодлогыг нилээд олон хүүхэд зөв шийдсэн юм.

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{16}$ тоонууд олддог гэе. Бодлогын нөхцлөөс

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_{16} = 100 \\ a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{16}^2 = 1000 \end{cases}$$

буюу $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{16}^2 - 10(a_1 + a_2 + \dots + a_{16}) = 0$ болно. Эндээс $(a_1^2 - 10a_1 + 25) + (a_2^2 - 10a_2 + 25) + \dots + (a_{16}^2 - 10a_{16} + 25) = 400$ буюу $(a_1 - 5)^2 + (a_2 - 5)^2 + \dots + (a_{16} - 5)^2 = 400$ учир эндээс аль нэг a_i нь 25-аас их бол $(a_i - 5)^2 \geq 400$ болж зөрчил үүснэ.

VIII-A2. Энд 8-р ангийн улсын аварга Т.Байгальмаагийн бодолтыг сийрүүлъя.

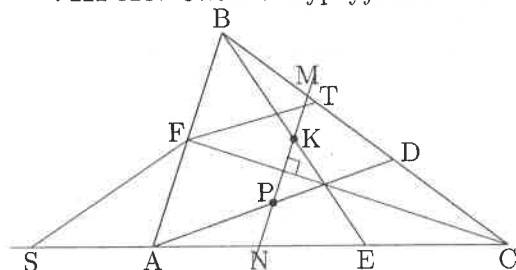
Нэг цифр нэмэгдэхэд нэг шинэ тоо үүсч байхаар байрлуулбал хамгийн бага болно.

1,2,3,4,5 цифрээр нийт 5^{10} ширхэг ялгаатай 10 оронтой тоонууд үүсгэнэ. Иймд тойрог дээр хамгийн багадаа 5^{10} ширхэг цифр тавьж чадвал сайн. Оройнууд нь 9 оронтой 1,2,3,4,5 цифрээс бүтсэн тоонууд байх 5^9 ширхэг оройтой граф (чиглэлт) авч үзье. $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8$ ба $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8y$ байх хоёр оройг нэгдүгээрээс хоёрдугаар орой руу сумаар холбоход $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8y$ гэсэн 10 оронтой тоо үүснэ.

$c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7c_8c_9$ орой руу $1c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7c_8$, $2c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7c_8$, $3c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7c_8$, $4c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7c_8$, $5c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7c_8$ гэсэн 5 оройгоос 5 сум орж, $c_2c_3c_4c_5c_6c_7c_8c_91$, $c_2c_3c_4c_5c_6c_7c_8c_92$, $c_2c_3c_4c_5c_6c_7c_8c_93$, $c_2c_3c_4c_5c_6c_7c_8c_94$, $c_2c_3c_4c_5c_6c_7c_8c_95$ гэсэн 5 орой руу 5 сум гарах учир энэ графт бүх ирмэгээр нэг, нэг удаа яваад нэг оройгоос гараад гарсан оройдоо буцаж ирдэг зам олдоно. Нэг ирмэгээр

явах бүрдээ шинэ тоо уншина. Нэг оройгоос 5 сум гарсан учир 5^{10} ирмэгтэй. Иймд 5^{10} ширхэг цифр бичээд бүх тоог уншиж чадна.

VIII-A3. Олонлог сургуулийн Т.Байгальмаагийн бодолт.



[CA] дээр $AS = AF$ байх S цэг, [BC] дээр $BF = BT$ байх T цэг тус тус авъя. BE хэрчмийн дундажийг K , AD хэрчмийн дундажийг P гэе. $AC + AF = m$ тул $CS = m$,

$BC - BF = n$ учир $TC = n$ болно.

$\triangle BCE$ хувьд Менелайн теорем бичвэл $\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NE} \cdot \frac{EK}{KB} = 1 \Rightarrow \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NE} = 1$ буюу $\frac{CN}{MC} = \frac{NE}{BM}$ (1) болно.

$\triangle DAC$ хувьд Менелайн теорем бичвэл $\frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PD} \cdot \frac{DM}{MC} = 1 \Rightarrow \frac{CN}{NA} \cdot \frac{DM}{MC} = 1$ буюу $\frac{CN}{MC} = \frac{NA}{DM}$ (2) болно. (1) ба (2)-оос $\frac{CN}{MC} = \frac{NE}{BM} = \frac{NA}{DM} = \frac{NE+NA}{BM+DM} = \frac{AE}{BD} = 1$ учир $CN = MC$. Эндээс $\triangle MCN$ хувьд CF нь медиан, өндөр, биссектрис болно.

$\angle BCF = \angle ACF = \gamma$ гэвэл $\angle BCA = 2\gamma$, $\angle BAC = 2\alpha$ гэвэл $\angle FSA = \angle SFA = \alpha$ болно. $\angle ABC = 180^\circ - 2\gamma - 2\alpha \Rightarrow \angle BFT = \angle BTF = \alpha + \gamma \Rightarrow \angle FTC = 180^\circ - \alpha - \gamma$. $\angle SFC = \angle SFA + \angle AFC = \alpha + (180^\circ - 2\alpha - \gamma) = 180^\circ - \alpha - \gamma$ учир $\triangle FTC \sim \triangle SFC$ болох ба $\frac{TC}{FC} = \frac{FC}{CS} \Rightarrow FC^2 = TC \cdot CS$ буюу $FC = \sqrt{mn}$ байна.

VIII-B1. $2003 \equiv 3(1000)$ ба $(3, 1000) = 1$ учир Эйлерийн теоремоор $\varphi(1000) = 1000 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 400$ тул $3^{400} \equiv 1(1000)$ байна. Одоо $2002^{2001} \equiv a(400)$ байх a тоог олох ёстой. $a = 352$ гэж олдоно. Өөрөөр хэлбэл $2002^{2001} \equiv 2^{2001} \equiv 352(400)$ гэж гарна. $2003^{2002^{2001}} \equiv 3^{400k+352} \equiv 3^{352} \equiv 241(1000)$ тул уг тооны сүүлчийн гурван цифр нь 241 байна.

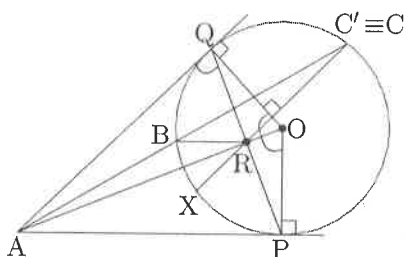
VIII-B2. $m \times n$ хүснэгтээ хар цагаанаар шатрын хөлөг шиг

будъя. Хүснэгтийн нүд бүрт яг нэг, нэг удаа буух тул $mn - 1$ нүүдлийн дараа найрсаг нүдэн дээр очино.

1) $m \cdot n$ -тэгш байг. $mn - 1$ сондгой тул нүд бүхэн эсрэг өнгийн нүднүүдтэй найрсаг байж болно. Хар ба цагаан нүднүүдийн тоо тэнцүү тул бүх нүд хамгийн ихдээ $\frac{mn}{2}$ нүдэнд очиж болно. Иймээс бүх найрсаг хосын тоо $\frac{mn}{2} \cdot mn \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{mn}{2}\right)^2$ байж болно.

2) $m \cdot n$ -сондгой байг. $\left[\frac{mn}{2}\right]^2 = \left(\frac{mn-1}{2}\right)^2 \cdot mn - 1$ нь тэгш тул бүх нүд зөвхөн ижил өнгөтэй нүдтэй найрсаг байж болно. Энэ үед хар ба цагаан нүднүүдийн тоо 1-ээр ялгаатай байна. Багыг нь x гээд хар өнгөтэй гэж үзье. $2x + 1 = mn \Rightarrow x = \frac{mn-1}{2}$. Хар өнгөтэй нүднүүд $x - 1$ нүдтэй найрсаг байж болно. Цагаан өнгөтэй нүднүүд x нүдтэй найрсаг байж болно. Иймд найрсаг хосын тоо $\frac{1}{2}((x-1)x + x(x+1)) = \frac{1}{2}(2x^2) = x^2$ -ээс хэтрэхгүй болж бодлого бодогдоно.

VIII-B3. $AB \cap \omega = C'$ ба $CR \cap \omega = X$ гэж тус тус тэмдэглэе. $C' \equiv C$ гэж баталбал бодлого бодогдоно. Одоо үүнийг баталъя.



$AP = AQ$, $RQ = RP$ ба $BR \parallel AP$, $XR \parallel AQ$ гэдгээс $\widehat{XP} = \widehat{QK}$ болно. Иймд $\widehat{BP} = \widehat{XQ} = \widehat{QC}$ буюу $\angle BOC = \angle QOP$ болно. Нөгөө талаас $\angle BRC = \angle QOP$ байх нь илэрхий тул $\angle BOC = \angle BRC$

болж B, R, O, C цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Огтлогч шүргэгчийн теоремоор $AB \cdot AC' = AP^2 = AR \cdot AO$ болох ба эндээс B, R, O, C' цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Эндээс $C' \equiv C$ болж батлах зүйл батлагдлаа.

ММО-39, IX АНГИЙН III ДАВАА

Б.Баяржаргал

IX-A1 (Б.Баяржаргал). $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ нь куб зэргийн бүхэл коэффициенттой олон гишүүнтийн язгуур болох уу?

IX-A2 (Б.Баяржаргал). $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ бол

$$a_1 + \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}} + \frac{3}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}} + \dots + \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} < 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

болохыг батал.

IX-A3 (Б.Баяржаргал). ABC гурвалжинд багтсан тойрог BC талыг D цэгт, CA талыг E цэгт, AB талыг F цэгт шүргэнэ. G нь D цэгээс EF -т буулгасан өндрийн суурь бол $\frac{FG}{EG} = \frac{BF}{CE}$ болохыг батал.

IX-B1 (Б.Баяржаргал). $\pi(2n) + \pi(n! + n) \geq \pi(n) + \pi(n! + 2n)$ болохыг батал. Энд $\pi(n)$ нь n -ээс хэтрэхгүй анхны тоонуудын тоо.

IX-B2 (Б.Баяржаргал). 5×5 хүснэгтэнд n -ээс хэтрэхгүй 25 шялгаатай натурал тоог дурын хөрш (ерөнхий ирмэгтэй ба оройтой) 2 нүдэн дээрх тоонууд харилцан анхных байхаар тавьж болдог байх n -ийн хамгийн бага утгыг ол.

IX-B3 (Б.Баяржаргал). ABC гурвалжны AB, AC, BC талууд дээр харгалзан K, L, M цэгүүд авчээ. KL, KM, LM талууд дээр A_1, B_1, C_1 цэгүүдийг харгалзуулан $A_1B_1 \parallel AB, A_1C_1 \parallel AC, B_1C_1 \parallel BC$ байхаар авч болдог бол $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{S_{KLM}}{S_{ABC}}$ болохыг батал.

IX-A1. $\sqrt{1+\sqrt{2}} = \alpha$ гэе. $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ гэсэн олон гишүүнтийн язгуур болдог гэе. Энд $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. $\alpha^2 = 1 + \sqrt{2}$, $(\alpha^2 - 1)^2 = 2 \Rightarrow \alpha^4 - 2\alpha^2 - 1 = 0$. $a\alpha^4 + b\alpha^3 + c\alpha^2 + d\alpha = 0$ -д $\alpha^4 = 2\alpha^2 + 1$ -ийг орлуулбал $b\alpha^3 + (2a + c)\alpha^2 + d\alpha + a = 0$ болно. Мөн $a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d = 0$ гэдгээс $(b^2 - 2a^2 - ac)\alpha^2 + (bc - da)\alpha + db - a^2 = 0$ болно. $b^2 - 2a^2 - ac = \beta_1, bc - da = \beta_2$,

$db - a^2 = \beta_3$ гэвэл $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z}$ байна. $\beta_1\alpha^2 + \beta_2\alpha + \beta_3 = 0 \Rightarrow \beta_1(1+\sqrt{2}) + \beta_2\sqrt{1+\sqrt{2}} + \beta_3 = 0 \Rightarrow (\beta_1 + \beta_3 + \beta_1\sqrt{2})^2 = \beta_2^2(1+\sqrt{2})$. Эндээс $(\beta_1 + \beta_3)^2 + 2\beta_1^2 = \beta_2^2$, $2(\beta_1 + \beta_3)\beta_1 = \beta_2^2$ гэж гарах ба $\beta_1 + \beta_3 - \sqrt{2}\beta_2 = 0$ болно. Үүнээс $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ гэж гарна (Энд $\sqrt{2}$ иррациональ гэдгийг ашигласан). Ө.х $b^2 = 2a^2 + ac$, $bc = da$, $db = a^2$ болно. Эндээс $cb^2 = a^3 = c(2a^2 + ac)$, $a^2 = 2ac + c^2$, $2a^2 = (a+c)^2$ буюу энэ тэгшитгэл бүхэл шийдгүй. Иймд $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ нь бүхэл коэффициенттой куб зэргийн олон гишүүнтийн язгуур болохгүй.

IX-A2. $\frac{1}{ia_i} = b_i$ гэвэл

$$\begin{aligned} \frac{k}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k}} &= \frac{k}{b_1 + 2b_2 + \dots + kb_k} = \frac{k}{b_1 + b_2 + b_2 + \dots + \underbrace{b_k + \dots + b_k}_k} \leq \\ &\leq \frac{k}{\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_2} + \dots + \underbrace{\frac{1}{b_k} + \dots + \frac{1}{b_k}}_k\right) = \\ &= \frac{4}{k(k+1)^2} \left(\frac{1}{b_1} + \frac{2}{b_2} + \dots + \frac{k}{b_k}\right) = \frac{4}{k(k+1)^2} (a_1 + 2^2 a_2 + \dots + k^2 a_k) \quad (*) \end{aligned}$$

болно. $\sum_{k=1}^n \frac{k}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_k}} \stackrel{(*)}{\leq} \sum_{k=1}^n \frac{4}{k(k+1)^2} (a_1 + 2^2 a_2 + \dots + k^2 a_k) =$

$$\sum_{s=1}^n 4s^2 \left(\frac{1}{s(s+1)^2} + \dots + \frac{1}{n(n+1)^2} \right) a_s < \sum_{s=1}^n 4s^2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{(s+1)^2} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \right) a_s =$$

$$\sum_{s=1}^n 4s^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) a_s = \sum_{s=1}^n 2 \left(1 - \frac{s^2}{(n+1)^2} \right) a_s <$$

$$\sum_{s=1}^n 2a_s = 2(a_1 + \dots + a_s) \text{ болж батлагдав.}$$

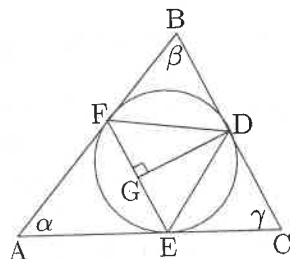
IX-A3. $\angle DFB = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \frac{\beta}{2} \right) = \frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$,

$$\angle FED = 90^\circ - \frac{\beta}{2},$$

$$FG = 2FB \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2} \right) = 2FB \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2},$$

$$GE = 2EC \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \left(90^\circ - \frac{\beta}{2} \right) = 2EC \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

$$\frac{FG}{EG} = \frac{2FB \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{2EC \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{FB}{EC}$$



IX-B1. $\pi(n, m)$ -ээр m -ээс багагүй n -ээс хэтрэхгүй анхны тоонуудын тоог тэмдэглэе. $\pi(2n) = \pi(2n, n+1) + \pi(n)$, $\pi(n! + 2n) = \pi(n! + n) + \pi(n! + 2n, n! + n + 1)$.

$$\pi(2n) + \pi(n! + n) \geq \pi(n) + \pi(n! + 2n)$$

нь $\pi(2n, n+1) \geq \pi(n! + 2n, n! + n + 1)$ -ийг батлахтай ижил болно. $n+1 \leq m \leq 2n$ ба $m = pq$, $1 < p, q \in \mathbb{N}$ бол $n! + m = n! + pq = p\left(\frac{n!}{p} + q\right)$. $2 \leq p \leq n$ учир $\frac{n!}{p}$ нь бүхэл тоо байна. Иймд $n! + m$ нь зохиомол тоо байна. Иймд $\pi(2n, n+1) \geq \pi(n! + 2n, n! + n + 1)$ байна.

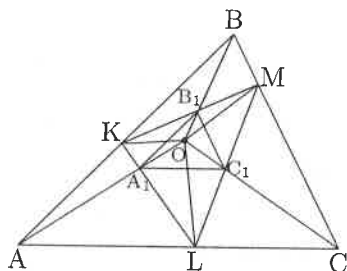
IX-B2. Эхний зурагт үзүүлсэн байдлаар 9-н хэсэгт хуваавал хэсэг бүрд хамгийн ихдээ 1 тэгш тоо байна. Иймд 16 ширхэг сондгой тоо дор хаяж байна. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31 буюу $n \geq 31$. $n = 31$ үед байгуулалтыг удаах зурагт хийв.

26	15	4	11	10
17	19	7	9	23
14	27	2	29	16
5	13	1	31	3
22	21	8	25	28

IX-B3. $\Delta A_1 B_1 C_1 \sim \Delta ABC$ ба $AB \parallel A_1 B_1$ учир $\Delta A_1 B_1 C_1$ -ыг

$\triangle ABC$ -д буулгадаг O цэг дээр эхтэй ω хэмжээгээр ихэсгэгдэх гомотет байна. Ө.х $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1$ нь 1 цэг байна.

$\frac{S_{KOA_1}}{S_{AKO}} = \frac{KO \cdot A_1O}{KO \cdot OA} = \frac{A_1O}{AO} = \frac{1}{\omega}$ байна (учир нь гомотетээр A_1 цэг A -д бууж байгаа тул). Мөн



$$\frac{S_{KOB_1}}{S_{KOB}} = \frac{1}{\omega} = \frac{S_{MOB_1}}{S_{MOB}} = \frac{S_{MOC_1}}{S_{MOC}} = \frac{S_{LOC_1}}{S_{LOC}} = \frac{S_{LOA_1}}{S_{LOA}}$$

буюу эндээс $S_{KML} = S_{KOA_1} + S_{KOB_1} + S_{MOB_1} + S_{MOC_1} + S_{LOC_1} + S_{LOA_1} = \frac{1}{\omega}(S_{KOB} + S_{MOB} + S_{MOC} + S_{LOC} + S_{LOA}) = \frac{1}{\omega}S_{ABC}$.

ММО-39, IX ангийн IV даваа

В.Адьяасүрэн

IX-A1 (Б.Батцэнгэл) ABC гурвалжны BC , CA , AB талууд дээр харгалзан A_1, B_1, C_1 цэгийг AA_1, BB_1, CC_1 шулуунууд нэг цэгт огтлолцдог байхаар сонгон авчээ. ABC гурвалжин дотор орших M цэгийн хувьд $(AM) \cap (B_1C_1) = A_2$, $(BM) \cap (C_1A_1) = B_2$, $(CM) \cap (A_1B_1) = C_2$ бол (A_1A_2) , (B_1B_2) , (C_1C_2) шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно гэдгийг батал.

IX-A2 (Б.Сандагдорж) $\{1, 2, 3, \dots, 2003\}$ олонлогоос аль ч хоёрынх нь ялгавар 39-д хуваагддаггүй байхаар хамгийн ихдээ хичнээн тоо сонгон авч болох вэ?

IX-A3 (Г.Баярмагнай) Волейболын тэмцээнд 2003 баг оролцож байв. Хоорондоо тоглоогүй хоёр багтай хоёулантай нь тоглосон яг 2 баг, хоорондоо тоглосон 2 багтай хоёулантай нь тоглосон баг олдохгүй байх тоглолтын ямар нэг үе олдох уу?

IX-B1 (Б.Баяржаргал) $a, b, c > 0$, $a + b + c = abc$ бол

$$37(a + b + c)^2 \leq 27(1 + a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$

батал.

IX-B2 (Ш.Батхишиг) Дурын натурал n тооны хувьд $(k!)^{k^2+k+1} \mid (k^3)!$ болохыг харуул (ө.х, $(k^3)! : (k!)^{k^2+k+1}$).

IX-B3 (М.Батбилэг) ABC гурвалжны B оройн биссекрисс дээр $\angle BDA = \angle BCD$ байхаар D цэгийг авчээ. ABD ба BDC гурвалжнуудад багтсан тойргийн төвүүдийг дайрсан шулуун AD ба CD шулуунуудтай харгалзан M ба N цэгээр огтлолцоно. $S_{ABCD} \geq 2S_{MND}$ гэж батал.

IX-A1. $AM \cap BC = A_3$, $BM \cap CA = B_3$, $CM \cap AB = C_3$ ба $\frac{BA_1}{A_1C} = \lambda_1$, $\frac{CB_1}{B_1A} = \mu_1$, $\frac{AC_1}{C_1B} = \nu_1$, $\frac{BA_3}{A_3C} = \lambda_3$, $\frac{CB_3}{B_3A} = \mu_3$, $\frac{AC_3}{C_3B} = \nu_3$ гэж тус тус тэмдэглэе.

Чевийн теорем ёсоор

$\lambda_1 \mu_1 \nu_1 = \lambda_3 \mu_3 \nu_3 = 1$ байх

ёстой. $AM \cap BB_1 = C_4$

болог. BCB_1 гурвалжин

AM огтлогчийн хувьд

Менелайн теорем бичвэл,

$\frac{BA_3}{A_3C} \cdot \frac{CA}{AB_1} \cdot \frac{B_1C_4}{C_4B} = 1$ буюу

$\frac{BC_4}{C_4B_1} = \frac{BA_3}{A_3C} \cdot \frac{CA}{AB_1} = \lambda_3(1 + \mu_1)$

гэж гарна.

Цаашилбал BB_1C_1 гурвалжны AM огтлогчийн хувьд Менелайн теорем бичвэл, $\frac{BC_4}{C_4B_1} \cdot \frac{B_1A_2}{A_2C_1} \cdot \frac{C_1A}{AB} = 1$ буюу $\frac{B_1A_2}{A_2C_1} = \frac{C_4B_1}{BC_4} \cdot \frac{AB}{C_1A} =$

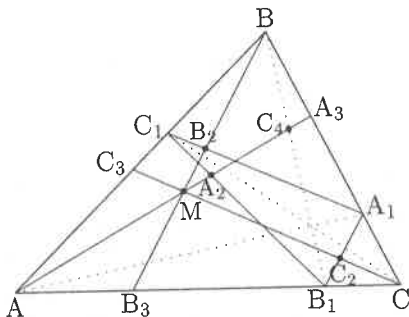
$\frac{1}{\lambda_3} \cdot \frac{1}{1+\mu_1} \left(1 + \frac{1}{\nu_1}\right) = \frac{1}{\lambda_3 \cdot \nu_1} \cdot \frac{1+\nu_1}{1+\mu_1}$ гэж гарна. Үүнтэй нэгэн адилаар

$\frac{C_1B_2}{B_2A_1} = \frac{1}{\mu_3 \cdot \lambda_1} \cdot \frac{1+\lambda_1}{1+\nu_1}$, $\frac{A_1C_2}{C_2B_1} = \frac{1}{\nu_3 \cdot \mu_1} \cdot \frac{1+\mu_1}{1+\lambda_1}$ гэж олдono. $\lambda_1 \mu_1 \nu_1 =$

$\lambda_3 \mu_3 \nu_3 = 1$ болохыг тооцвол эндээс $\frac{B_1A_2}{A_2C_1} \cdot \frac{C_1B_2}{B_2A_1} \cdot \frac{A_1C_2}{C_2B_1} = 1$ гэж гарах ба Чевийн теорем ёсоор энэ нь A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 шулуунууд нэг

цэгт огтлолцоно гэдгийг үзүүлнэ.

IX-A2. $\{1, 2, 3, \dots, 2002, 2003\}$ байг. S олонлогийн 39-д хуваахад ижил үлдэгдэл өгдөг тоонуудаар ангиудад хуваая. $A_i = \{n \mid 0 \leq n \leq 2003 \text{ ба } n \equiv i \pmod{39}\}$, $i = 0, 1, 2, \dots, 38$ болог.



$S = \bigcup_{i=0}^{38} A_i$ буюу $i \neq j$ хувьд $A_i \cap A_j = \emptyset$ гэсэн үг. Эндээс $|A_0| = 51$, $i = 1, 2, \dots, 14$ үед $|A_i| = 52$, $i > 14$ бол $|A_i| = 51$ байх юм. Иймээс A_i олонлогоос бүрэн ялгавар нь 39-тэй тэнцдэггүй 26 тоог сонгон авч чадна. Иймд $39 \cdot 26 = 1014$ тоог бодлогын нөхцлийг хангахаар сонгож чадна. Одоо 1014-ээс олон тоог сонгоход аль нэг хоёрынх нь ялгавар 39-тэй тэнцэнэ гэдгийг харуулъя. $1015 = 39 \cdot 26 + 1$ тул Дирихлейн зарчмаар аль нэг A_i олонлогоос 27 элемент сонгогдох буюу түүнд ялгавар нь 39 байх 2 тоо олдоно. Бодлого бодогдов.

IX-A3. Багуудаа графын орой гэж үзээд тоглосон 2 багийг ирмэгээр холбоё. Хоорондоо тоглосон хоёр багт харгалзах оройн эрэмбэ ижил байх нь өгсөн нөхцөлөөс тодорхой. Хоорондоо тоглоогүй хоёр багтай хоёуланттай нь тоглосон баг олдох учраас өмнөх дүгнэлтээр энэ гурван оройн эрэмбэ адил болно. Иймд энэ граф нэгэн төрлийн болно. Одоо ирмэгийг хөхөөр, холбогдоогүй хоёр цэгийг цагаанаар будъя. Нэг оройгоос k ширхэг хөх ирмэг гарсан гэвэл тэдгээр нөгөө үзүүрүүдийг холбосон бүх C_k^2 ширхэг ирмэг цагаан байна. Давхардсан тоогоор цагаан ирмэгийн тоо $2003 \cdot C_k^2$ болно. Өгсөн нөхцөлөөс үзэхэд цагаан ирмэг бүр яг 2 удаа тоологдоно. Нөгөө талаас цагаан ирмэгийн тоо $\frac{2003 \cdot (2002 - k)}{2}$ болно. $\Rightarrow$

$$\frac{2003 \cdot C_k^2}{2} = \frac{2003 \cdot (2002 - k)}{2} \Leftrightarrow k(k+1) = 2 \cdot 2002$$

тэгшитгэл шийдгүй тул болохгүй.

IX-B1. $a, b, c > 0$ ба $a + b + c = abc$ учир $a = \operatorname{tg} \alpha$, $b = \operatorname{tg} \beta$, $c = \operatorname{tg} \gamma$, $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ба $\alpha, \beta, \gamma < 90^\circ$ гэж орлуулга хийж болно. $37(a + b + c)^2 \leq 27(1 + a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \Rightarrow 37a^2b^2c^2 \leq 27((1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2) - a^2b^2c^2) \Rightarrow 64a^2b^2c^2 \leq 27(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2) \Rightarrow \frac{a^2}{1+a^2} \cdot \frac{b^2}{1+b^2} \cdot \frac{c^2}{1+c^2} \leq \frac{27}{64} \Rightarrow \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \leq \frac{27}{64}$. $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$ болохыг баталбал бодогдоно. $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ба тэгш эрхтэй учир $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ гээ. Тэгвэл $\alpha \leq 60^\circ$, $\gamma \geq 60^\circ$ байна. $\sin \alpha \sin \gamma = \frac{\cos(\alpha - \gamma) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$ учир α, γ -г ойртуулахад

өснө. $\alpha_1 = \min(60^\circ, \alpha + \gamma - 60^\circ)$, $\gamma_1 = \max(60^\circ, \alpha + \gamma - 60^\circ)$ гэвэл ойртоно. Иймд $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \sin 60^\circ \sin \beta \sin(\alpha + \gamma - 60^\circ)$ болох ба $\alpha + \gamma - 60^\circ$ ба β -г 60° , 60° -аар сольж ойртуулахад бас өснө. Иймд $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq (\sin 60^\circ)^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ болж батлагдав.

IX-B2 (Ш.Батхишиг). Бодлогыг бодохын тулд эхлээд дараах леммийг авч үзье.

ЛЕММ. Дурын натурал m, n тооны хувьд $n!(m!)^n \mid (mn)!$ байна.

Баталгаа. mn ширхэг ялгаатай элементүүдийг нийт $(mn)!$ янзаар сэлгэж болно. Нөгөө талаас mn ширхэг ялгаатай элементүүдийг сэлгэх боломжийг дараах байдлаар тооцож болно.

- 1) mn ширхэг элементүүдийг бүлэг бүр m ширхэг элементтэй байхаар n ширхэг бүлэгт нийт A янзаар хуваадаг байг.
- 2) Бүлгүүдийг хооронд нь тийм $n!$ аргаар сэлгэж болно.
- 3) Бүлгийн элементүүдийг $m!$ янзаар сэлгэж болох тул нийт $(m!)^n$ янзаар бүлгүүдийн элементүүдийг сэлгэж болно.

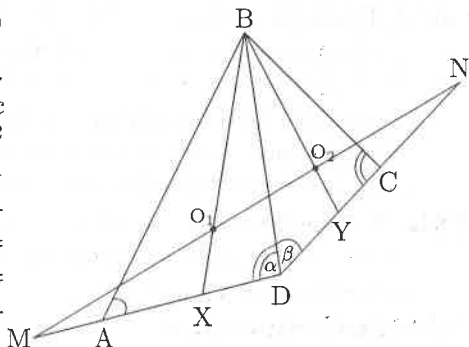
Иймээс mn ширхэг ялгаатай элементүүдийг нийт $A \cdot (n!) \cdot (m!)^n$ янзаар сэлгэж болно. Эндээс $(mn)! = A \cdot (n!) \cdot (m!)^n$ болох тул $(n!)(m!)^n \mid (mn)!$. Лемм батлагдав.

Одоо бодлогоо бодъё. $n = k$, $m = k^2$ гэж сонгоод дээрх леммийг хэрэглэвэл: $(k!) \left((k^2)! \right)^k \mid (k^3)!$. Үүнтэй адилаар $n = k$, $m = k$ гэвэл $(k!)(k!)^k \mid (k^2)!$. Иймд $(k!) \left((k!)(k!)^k \right)^k \mid (k^3)!$ болох ба эндээс $(k!)^{k^2+k+1} \mid (k^3)!$ болно. Бодлого бодогдов.

IX-B3 (М.Батбилэг). $AB \geq BC$ гэж үзье. ABD ба DBC гурвалжнуудын B оройн биссектрисийн сууриуд X ба Y , багтсан тойргийн төвүүд нь O_1 ба O_2 болог. Өгсөн нөхцлөөс

$$\triangle ABD \sim \triangle DBC \quad (1)$$

байх нь хялбар мөрдөнө. $AB = a$, $BD = b$, $CD = c$ гэвэл $a \geq b \geq c$ ба $ac = b^2$ байна. (1)-ээс $\frac{BO_1}{O_1X} = \frac{BO_2}{O_2Y}$ тул $XY \parallel MN$ болно. Биссектрисийн чанараар $\frac{XD}{b} = \frac{AX}{a} = \frac{DY}{b} = \frac{YC}{c} \Rightarrow DX = DY$ тул MDN нь адил хажуут гурвалжин болно.



Нөгөө талаас $\triangle ABD \sim \triangle XBY$ тул $\angle XYD = \angle DBY$ болох нь илэрхий. $DM = DB = DN$ боллоо. Эндээс $S_{MDN} = S_{XBYD}$ болох юм. $DX = x$ гэвэл

$$\begin{aligned} 2S_{ABCD} &= \left(\frac{a}{b} + 1\right)x \cdot b \cdot \sin \alpha + \left(\frac{b}{a} + 1\right)x \cdot b \cdot \sin \beta \geq \\ &\geq 2x \cdot b \cdot \sin \alpha + 2x \cdot b \sin \beta = 4S_{XBYD} \end{aligned} \quad (2)$$

-ыг батлахад шилжинэ. Синусын теоремоор $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}$ тул (2) $\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq \left(\frac{a}{b} + 1\right) \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} - 1 \geq \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \Leftrightarrow ab \geq b^2$ гэсэн илэрхий тэнцэл бишид шилжлээ. Эндээс үзэхэд $a = b$ буюу ABC нь адил хажуут үед тэнцэлдээ хүрнэ. Бодлого бодогдов.

ММО-39, X ангийн III даваа

Г.Баярмагнай

X-A1 (Г.Баярмагнай). $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ба a , $4a + 3b + 2c$ нь адил тэмдэгтэй тоонууд бол $ax^2 + bx + c = 0$ -ийн 2 язгуур хоёулаа зэрэг (1,2) завсарт байж чадахгүйг батал.

X-A2 (Г.Баярмагнай). a ба b нь натурал тоонууд. $a_n = a^n - b^n$ дүрмээр тодорхойлогдох тоон дараалалд геометр прогресс үүсгэх 3-н тоо олдохгүйг батал.

X-A3 (Г.Баярмагнай). $AC \neq BC$ ба $AB < AC$ байх ABC гурвалжныг багтаасан ω тойргийн A цэг дээрх шүргэгч BC -тэй D цэгт огтлолцдог байг. AD , BD ба ω тойргийг шүргэх ω_1 тойрог BD -г M цэгт шүргэдэг бол $AC = MC$ байх гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь AM -ыг $\angle DAB$ өнцгийн биссектрис байна гэж батал.

X-B1 (Г.Баярмагнай). a, b, c, d, e натурал тоонууд бол $a^3 + b^5 + c^7 + d^9 + e^{11}$ хэлбэрт бичигдэхгүй натурал тоо төгсгөлгүй олон олдохыг батал.

X-B2 (Г.Баярмагнай). n натурал тоо, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ рациональ тоонууд ба дурын k натурал тооны хувьд $\{k\alpha_1\} + \{k\alpha_2\} + \dots + \{k\alpha_n\} < \frac{n}{2}$ байдаг бол $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ -үүдийн ядаж нэгийг нь бүхэл тоо гэж батал.

X-B3 (Г.Баярмагнай). ω_1 ба ω_2 тойргууд нь A ба B цэгүүдээр огтлолцсон бөгөөд тэдгээрт татсан ерөнхий шүргэгч ω_1 -ыг C цэгт, ω_2 -ыг D цэгт шүргэнэ (A цэг BCD гурвалжин дотор байхаар). ω_2 -ын A цэг дээрх шүргэгч ω_1 тойргийг K цэгт огтлох ба $P = KC \cap AB$ гээ. KP хэрчим дээр $XP^2 = PC \cdot KP$ байх X цэгийг авъя. Тэгвэл X, A, D цэгүүдийг нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

X-A1. $x_1, x_2 \in (1, 2)$ байдаг гэж үзье. Тэгвэл $x_0 \in (1, 2)$ байна (x_0 нь параболын оройн цэг). $x_0 = -\frac{b}{2a} \Rightarrow 1 < -\frac{b}{2a} < 2 \Rightarrow -1 > \frac{b}{2a} > -2$. Хоёр талыг нь $2a$ -аар үржүүлбэл (энд $a > 0$ гэж үзэж болно, $a < 0$ үед ижил) $-2a > b > -4a \Rightarrow \begin{cases} 2a + b < 0 \\ 4a + b > 0 \end{cases} \Rightarrow 8a^2 + 6ab + b^2 < 0$. Мөн өгөгдсөн тэгшитгэл хоёр шийдтэй байхын тулд $D = b^2 - 4ac > 0$ байх ёстой $\Rightarrow b^2 > 4ac \Rightarrow 0 > 8a^2 + 6ab + b^2 > 8a^2 + 6ab + 4ac = 2a(4a + 3b + 2c) \Leftrightarrow 0 > a(4a + 3b + 2c) \Rightarrow$ зөрчил.

X-A2. $a > b$ гэж үзэж болно. Иймд a_n дараалал өсдөг байх нь тодорхой. "Мэргэжлийн курс", 1.5.11. бодлоготой адилаар $(a_n, a_m) = a_{(n,m)}$ болно.

$(a, b) = d$ ба $\frac{a}{d} | b$ байвал $\frac{a}{d} | d$ ($a = a_1 d, b = b_1 d$ гэвэл $(a_1, b_1) = 1$ ба $a_1 | b_1 d \Rightarrow a_1 | d$). Геометр прогресс үүсгэх 3 гишүүн олддог гээ.

$a_n \cdot a_m = a_k^2, n > k$ байг. $\Rightarrow \frac{a_n}{a_{(n,k)}} \cdot a_m = \frac{a_k}{a_{(n,k)}} \cdot a_k, \left(\frac{a_n}{a_{(n,k)}}, \frac{a_k}{a_{(n,k)}} \right) = 1$
 тул $\frac{a_n}{a_{(n,k)}} \Big| a_k \Rightarrow \frac{a_n}{a_{(n,k)}} \Big| a_{(n,k)}, (n, k) \leq \frac{n}{2}$ байна. $\Rightarrow \frac{a_n}{a_{(n,k)}} \Big| a_{(n,k)}$ гэдгээс
 $a_n \leq a_{(n,k)}^2$ болно. $\Rightarrow a_n \leq a_{(n,k)}^2 \leq a_{\frac{n}{2}}^2 = (a_{\frac{n}{2}}^2 - b_{\frac{n}{2}}^2)^2 \Rightarrow a_n =$
 $a^n - b^n \leq a^n + b^n - 2a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} \Rightarrow 2b^n \geq 2a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} \Rightarrow b^n \geq a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} > b^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} = b^n$
 зөрчил.

X-A3. $a \cdot NA + b \cdot MB = c \cdot MC$ (1)

$AC = MC$ гэж үзвэл (1) $\Rightarrow$

$a \cdot NA = b(c + a - b)$ болно.

$DN = x$ гэе. $\triangle ABD \sim \triangle CAD$

$$\Rightarrow \frac{AB}{CA} = \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{ax + NA \cdot a}{ax + ab} = \frac{c}{b} = \frac{ax + a(b-a)}{ax + a \cdot NA}$$

$\Rightarrow$ (1) ёсоор $ax = y$ гэвэл

$$\frac{y + b(c + a - b)}{y + ab} = \frac{c}{b} \text{ ба}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{y + ab - a^2}{y + b(c + a - b)} \text{ болно.}$$

$$\Rightarrow y(c - b) = ba(b - a) - cb(c + a - b) \text{ ба } y(c - b) = b^2(c + a - b) - abc$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \text{ буюу } ABC \text{ нь тэгш өнцөгт болно.}$$

$$\frac{AD}{DM} = \frac{c}{MB} \Leftrightarrow 1 + \frac{NA}{x} = \frac{c}{b-a} = 1 + \frac{a \cdot NA}{ax} = 1 + \frac{b(c + a - b)}{b^2(c + a - b) - abc} =$$

$$1 + \frac{(c-b)(c+a-b)}{bc+ba-b^2-ac} = \frac{c(c+a-b)-ac}{bc+ba-b^2-ac} = \frac{c^2-cb}{bc+ba-b^2-ac} \Leftrightarrow bc + ba - b^2 - ac =$$

$$(b-a)(c-b) = bc + ab - b^2 - ac \text{ болж } AM \text{ биссектрис болох нь}$$

батлагдав. Яг үүнтэй адилаар урвуу өгүүлбэрийг нь батлана.

X-B1. $s = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11$. $10^{s \cdot k}$ -ээс бага уг хэлбэрт бичигддэггүй тоог үнэлье. Энэ тоонуудын тоог t гэе.

10^{sk} -аас бага тооны 3-н зэрэгтийн тоо $10^{k \cdot \frac{s}{3}}$ -аас ихгүй.

10^{sk} -аас бага тооны 5-н зэрэгтийн тоо $10^{k \cdot \frac{s}{5}}$ -аас ихгүй.

10^{sk} -аас бага тооны 7-н зэрэгтийн тоо $10^{k \cdot \frac{s}{7}}$ -аас ихгүй.

10^{sk} -аас бага тооны 9-н зэрэгтийн тоо $10^{k \cdot \frac{s}{9}}$ -аас ихгүй.

10^{sk} -аас бага тооны 11-н зэрэгтийн тоо $10^{k \cdot \frac{s}{11}}$ -аас ихгүй байна.

$$t \geq 10^{sk} - 10^{\frac{s}{3}k} \cdot 10^{\frac{s}{5}k} \cdot 10^{\frac{s}{7}k} \cdot 10^{\frac{s}{9}k} \cdot 10^{\frac{s}{11}k} = 10^{sk} - 10^{(\frac{s}{3} + \dots + \frac{s}{11})k} =$$

$$10^{ak} \cdot (10^{(s-a)k} - 1) \quad (s > \frac{s}{3} + \dots + \frac{s}{11} = a). \quad k \rightarrow \infty \text{ үед } t \rightarrow \infty \text{ байна.}$$

X-B2. $a_i = b_i + \frac{\alpha_i}{\beta_i}$ гэе. $b_i \in \mathbb{Z}, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1, n}$. Мөн $0 < \frac{\alpha_i}{\beta_i} < 1$ гэж үзье. Хэрэв $a_i \in \mathbb{Z}$ бол $\frac{\alpha_i}{\beta_i} = 0$ байна. Иймд $\frac{\alpha_i}{\beta_i} \neq 0$

гэж үзье. $\Rightarrow \left\{-\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right\} = \left\{1 - \frac{\alpha_i}{\beta_i}\right\}$ байна. $\{a_i\} = \frac{\alpha_i}{\beta_i}$ болно. $k = 1$ гэвэл

$$\sum \{ka_i\} = \sum \{a_i\} = \sum \frac{\alpha_i}{\beta_i} < \frac{n}{2} \quad (1)$$

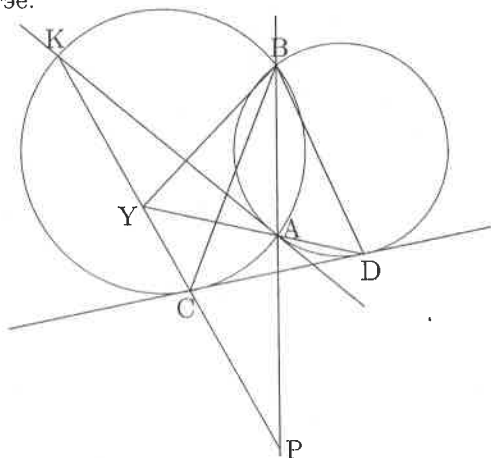
$k = \prod \beta_i - 1$ гэвэл

$$\begin{aligned} \sum \{ka_i\} &= \sum \left\{ \left(\prod \beta_i - 1 \right) \cdot \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right\} = \\ &= \sum \left\{ -\frac{\alpha_i}{\beta_i} \right\} = \sum \left(1 - \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right) = n - \sum \frac{\alpha_i}{\beta_i} < \frac{n}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

(1) ба (2)-ыг нэмбэл $\sum \frac{\alpha_i}{\beta_i} + n - \sum \frac{\alpha_i}{\beta_i} < n$ зөрчил.

Х-В3. $AD \cap KP = Y$ гээ.

$\angle KAY = \angle ADC =$
 $\angle DBA = \alpha, \angle ABC =$
 $\angle AKC = \beta \Rightarrow \angle CBD =$
 $\angle CBA + \angle DBA = \alpha + \beta,$
 $\angle CYD = \angle KAY +$
 $\angle AKC = \alpha + \beta \Rightarrow$
 $YBDC$ тойрогт багтана.
 $\Rightarrow \angle CDY = \angle CBY$
 $\Rightarrow \angle AYC = \angle ABY$
 $\Rightarrow \triangle PBY \sim \triangle PYA$
 $\Rightarrow \frac{PY}{PB} = \frac{PA}{PY} \Rightarrow$
 $PY^2 = PA \cdot PB \Rightarrow$
 $PY^2 = PX^2 \Rightarrow X \equiv Y.$



ММО-39, X ангийн IV даваа

Г.Баярмагнай

Х-А1 (Г.Баярмагнай). Тэмцээнд n ($n \geq 10$) баг оролцож тойргоор тоглов. Тэмцээний дараа нэг ч тэнцээ гараагүй ба тэнцүү оноотой 4 баг байсан бол бие биеэ тойрч хожсон гурвалын хос дор хаяад 2 олдохыг батал.

Х-А2 (Т.Баасанжав). $\forall k \in \mathbb{N}$ хувьд $a_{k+1} > a_k$ байх ба $a_k a_{k+1} + 1$ ба $a_k + 1$ нь бүтэн квадрат байх натурал тоон төгсгөлгүй дараалал олдохыг батал.

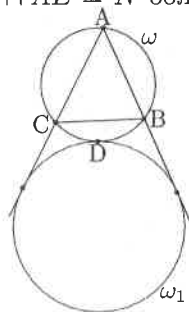
Х-А3 (М.Батбилэг). ABC гурвалжны ортотөв нь H ба багтаасан тойргийн төв нь O болог. CO шулуун дээр орших дурын E цэгийн хувьд $AH \cap BE = M$, $BH \cap AE = N$ бол $\angle ACN = \angle BCM$ гэж батал.

Х-В1 (В.Адьяасүрэн, Г.Баярмагнай).

ω ба ω_1 тойргууд нь D цэгт шүргэлцэнэ.

AC ба AB талууд ω_1 тойргийг шүргэнэ.

$\angle CDB$ өнцгийн биссектрисийг агуулсан шулуун ABC гурвалжины (CB талыг шүргэсэн) гадаад багтсан тойргийн төвийг дайрна гэж батал.



Х-В2 (Г.Баярмагнай, Т.Баасанжав). n, b нь өгөгдсөн натурал тоонууд, $\frac{a^n - b^n}{a - b}$ тоо нь ямар нэг тооны 1-ээс их зэрэг болдоггүй байхаар $(a, b) = 1$ байх a тоо төгсгөлгүй олон олдохыг батал.

Х-В3 (Б.Батцэнгэл). Нэг компани $2n + 1$ ажилтантай бөгөөд тэдгээрийн зарим нь хоорондоо танил байв (A нь B -г таньдаг бол B нь A -г танина). Аль ч n ажилтанг сонгон авахад үлдэх ажилтнууд дотор тэдгээр ажилтнуудыг бүгдийг таньдаг ажилтан заавал олддог бол компанид бүх ажилтанг таньдаг ажилтан бий гэж батал.

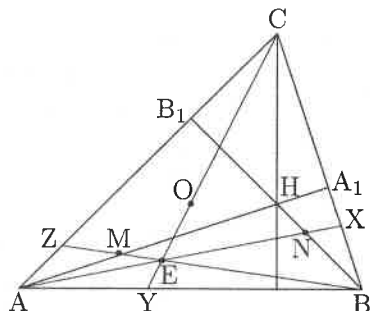
Х-А1. A хүн B -г хожсон бол $A \rightarrow B$ гэж тэмдэглэе. Тэнцүү оноотой 4 хүнээр үүсэх дэд графад чиглэлт гурвалжин үүсгэхгүй ямар нэг гурвал олдоно. Энэ гурвалын үүсгэх дэд графын хувьд A хүнээс 2 сум гарсан B хүнд 2 сум ирсэн гэж үзэж болно. Одоо графаа сэргээж харвал энэ 3-аас бусад хүмүүс рүү B -ээс гарсан сумын тоо A -аас гарснаас 2-оор илүү байна. энэ нь A, B хүмүүс оролцсон чиглэлт гурвалжин 2 олдохыг үзүүлж байна.

Х-А2. $\{a_n\}$ нь $a_k = k^2 - 1$ гэж авна.

X-A3. $CO \cap AB = Y$, $AN \cap CB = X$ ба $BM \cap AC = Z$ гэж тус тус тэмдэглэе.

$$(BB_1, N) = (AA_1, M) \quad (1)$$

гэж батлахад хангалттай юм. Мөн $\triangle ABC$ -ын өнцгүүдийг харгалзан α, β, γ гэж тус тус тэмдэглэе.



$$(AB, Y) = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha} \quad (*)$$

гэдгийг хялбар харж болно.

CBB_1 гурвалжин, AN огтлогчийн хувьд Менелайн теорем бичвэл $(CB, X)(BB_1, N)(B_1C, A) = -1$.

Мөн $\triangle CAA_1$ ба BM огтлогчийн хувьд Менелайн теоремийг бичвэл $(CA, Z)(AA_1, M)(A_1C, B) = -1$ болох ба эндээс $(1) \Leftrightarrow (CB, X)(B_1C, A) = (CA, Z)(A_1C, B) \Leftrightarrow$

$$(CB, X)(AC, Z) = (A_1C, B)(CB_1, A) \quad (2)$$

Нөгөө талаас Чевийн теоремоор $(CB, X)(BA, Y)(AC, Z) = 1 \Rightarrow$

$$(CB, X)(AC, Z) = (AB, Y) \quad (3)$$

(2) ба (3)-аас $(A_1C, B)(CB_1, A) = (AB, Y)$ -ийг батлахад хангалттай. $(A_1C, B) = \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma}$, $(CB_1, A) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma}{\operatorname{ctg} \gamma}$ ба (*)-ыг анхаарвал батлах зүйл илэрхий юм. бодлого бодогдов.

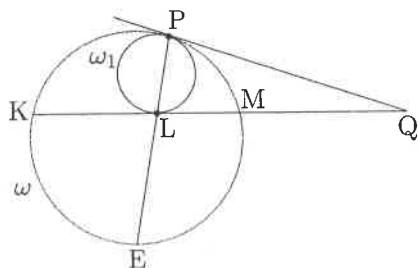
X-B1. Эхлээд бодлого бодоход хэрэглэгдэх нэгэн леммийг томъёолон баталъя.

АРХИМЕДИЙН ЛЕММ. ℓ шулуун ω тойргийг K ба M цэгт огтолдог байг. ω тойргийг P цэгт, KM шулууныг L цэгт шүргэх ω_1 тойргийг авч үзье. PL шулуун ω тойргийн KM шулуунаар хуваагдсан хоёр нумын аль нэгнийх нь дундажийг дайрна.

Баталгаа. Зурагт дүрслэгдсэн шиг байрлалтай үед леммийг баталъя. Өөр байрлалтай тохиолдлуудад бие даан батлаарай.

ω ба ω_1 тойргийн P цэгт татсан шүргэгч шулуун KM шулуунтай огтлолцох цэгийг Q гээ. PL шулууны ω тойрогтой огтлолцох хоёр дахь цэгийг E гээ. $PQ = LQ$ гэдгээс

$$\angle PLQ = \angle QPL \quad (1)$$



гэж гарна. Нөгөө талаас

$$\angle PLQ = \angle PLM = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{KE} + \overset{\frown}{PM}) \quad (2)$$

$$\angle QPL = \angle QPE = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{PM} + \overset{\frown}{ME}) \quad (3)$$

(1), (2), (3)-аас $\overset{\frown}{KE} = \overset{\frown}{ME}$ гэж гарна, ө.х. E нь KEM нумын дундаж цэг. Лемм батлагдав.

Одоо бодлогынхоо бодолтонд шилжье.

AC , AB шулуунуудын ω_1 тойргийг шүргэх цэгүүдийг харгалзан Q, P гэж тэмдэглэе. CDB өнцгийн биссектрисийг агуулсан шулууны QP шулуунтай огтлолцсон цэгийг F гээ. QD шулууны ω тойрогтой огтлолцох хоёр дахь цэгийг E гээ. Архимедийн лемм ёсоор E нь ABC нумын дундаж цэг болно.

F цэгийг ABC гурвалжны CB талыг шүргэсэн гадаад багтсан тойргийн төв болно гэж баталъя. Нэг талаас $\angle CDF = \pi - \frac{1}{2}\angle BDC = \pi - \frac{1}{2}(\pi - \alpha) = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$. Нөгөө талаас $\angle CQF = \angle AQP = \frac{1}{2}(\pi - \angle PAQ) = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ тул $\angle CDF + \angle CQF = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}(\pi - \alpha) = \pi$. Иймд $DFQC$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. Иймээс $\angle QCF = \angle QDF = \angle CDF - \angle CDQ = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} - \angle CDQ = \frac{\pi + \alpha}{2} - \frac{1}{4}\overset{\frown}{ABC} = \frac{\pi + \alpha}{2} - \frac{1}{4}(2\pi - 2\beta) = \frac{\alpha + \beta}{2}$ болно. Ийнхүү CF нь BCQ өнцгийн биссектрис болно. Яг үүнтэй адилаар BF нь CBP өнцгийн биссектрис болно гэж батлагдана. Бодлого бодогдов.

X-B2. Ямар нэг $p \in P$ тооны хувьд

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{a^n - b^n}{a - b} \equiv 0(p) & (1) \\ \frac{a^n - b^n}{a - b} \not\equiv 0(p^2) & (2) \\ (a, b) = 1 & (3) \end{cases}$$

байх $a \in \mathbb{N}$ төгсгөлгүй олон олдвол бодлого бодогдоно.

Арифметик прогресс дахь Дирихлейн теоремоор $p \equiv 1(4n)$ байх хангалттай их анхны тоо p олдоно, тэгвэл $(b, p) = 1$ гэж үзэж чадна.

$p = 4nk + 1$ байг. $\text{mod } p$ -ийн анхдагч язгуурыг $g \in \mathbb{N}$ гээд

$$\begin{cases} a_1 = g^{4k}b + p^2\ell \\ a_2 = (p - g)^{4k}b + p^2\ell \end{cases} \quad \text{гэе. } (\ell, b) = 1 \text{ бол } (a_1a_2, b) = 1 \text{ байна,}$$

ө.х. a_1, a_2 нь $(*)$ -ын (3)-ыг хангав. Иймд $(\ell, b) = 1$ бол a_1, a_2 -ын аль нэг нь $(*)$ -ын (1) ба (2)-ыг хангана гэж харуулъя. $a_1 - b = (g^{4k} - 1)b + p^2\ell \equiv (g^{4k} - 1)b \not\equiv 0(p)$, $a_1^n - b^n = (g^{4k}b + p^2\ell)^n - b^n \equiv (g^{4k}b)^n - b^n \equiv b^n(g^{4nk} - 1) \equiv b^n(g^{p-1} - 1) \equiv 0(p)$. Эндээс $\frac{a_1^n - b^n}{a_1 - b} \equiv 0(p)$, ө.х. $(*)$ -ын (1) биелэв.

$p = 4s + 1$ хэлбэртэй тул МК-1, §1.6 дасгал 11-ээр $p - g$ нь мөн $\text{mod } p$ -ээр анхдагч язгуур учир $\frac{a_2^n - b^n}{a_2 - b} \equiv 0(p)$ гэж гарна.

Одоо $a_1^n - b^n \not\equiv 0(p^2)$ эсвэл $a_2^n - b^n \not\equiv 0(p^2)$ гэж баталъя. Эсрэгээс нь $\begin{cases} a_1^n - b^n \equiv 0(p^2) \\ a_2^n - b^n \equiv 0(p^2) \end{cases} \Rightarrow a_1^n - a_2^n \equiv 0(p^2)$ буюу $(g^{4k}b + p^2\ell)^n - ((p - g)^{4k}b + p^2\ell)^n \equiv (g^{4k}b)^n - ((p - g)^{4k}b)^n \equiv b^n(g^{4nk} - (p - g)^{4nk}) \equiv 0(p^2)$. Энд $(b, p) = 1$ гэдгийг анхаарвал $0 = (p - g)^{p-1} - g^{p-1} = p^{p-1} - C_{p-1}^1 p^{p-2}g + \dots + (-1)^2 p^2 C_{p-1}^{p-3} g^{p-3} - p C_{p-1}^{p-2} g^{p-2} + g^{p-1} - g^{p-1} \equiv -p(p-1)g^{p-2} = pg^{p-2} \not\equiv 0(p^2)$ зөрчил үүслээ, ө.х. $\exists k \in \{1, 2\}$, a_k нь $(*)$ -ын (2)-ыг хангалаа. Үүгээр $(b, \ell) = 1$ байх $\ell \in \mathbb{N}$ бүрийн хувьд $(*)$ -г хангах a_k -г олж чадаж байгаа ба $(b, \ell) = 1$ байх ℓ төгсгөлгүй олон тул бодлого бодогдов.

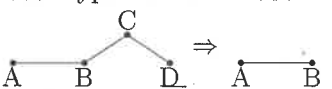
X-B3. Хүмүүсээ графын орой болгон хоорондоо танил биш хүмүүсийг ирмэгээр холбосон $G = G(V, E)$ графыг сонирхъё.

1) Ямар ч n орой авахад тэдэнтэй холбогдоогүй нэг орой олддог

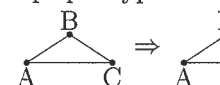
2) Бусад оройнуудтайгаа холбогдоогүй орой олддог, ө.х. тусгаарлагдсан оройтой

Ингэвэл манай бодлого нь G графын хувьд 1) биелбэл 2) биелэхийг батлахад оршино. Одоо $G = G(V, E)$, $|V| = 2n + 1$ -ийн хувьд 1) биелдэг боловч 2) биелдэггүй (тусгаарлагдсан оройгүй) гэж үзье, ө.х. $G \models 1) \not\models 2)$.

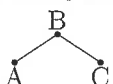
Хэрэв G -д 3 урттай зам олддог бол түүний голын ирмэгийг

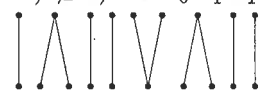
хасахад  гарсан $G' = G(V, E')$ графт мөн л $G' \models 1) \not\models 2)$.

Хэрэв G графт 3 урттай цикл олддог бол түүний нэг ирмэгийг

арилгахад  гарсан $G' = G(V, E')$ графт мөн л $G' \models 1) \not\models 2)$ байна.

G графаас дээрх 2 аргаар ирмэгүүдийг хассаар дахин хасах боломжгүй $G_0 = G(V, E_0)$ граф гарсан гэвэл G_0 -ийн холбоост

компонентууд нь нэг бол , эсвэл  хэлбэртэй байна. $G_0 \models 1) \not\models 2)$ ба G_0 графыг n ба $n + 1$ оройтой 2 мөрөнд

байрлуулж  болох бөгөөд үүний n оройтой мөрийг авахад түүний хувьд 1) үл биелэх, ө.х. $G_0 \models \overline{1)}$ байх нь илэрхий байна. Үүгээр бид G_0 графт $G_0 \models 1) \not\models 2) \not\models \overline{1)}$ гэсэн зөрчилтийг оллоо.

$G \models 1) \not\models \overline{2)}$ гэж үзснээс болжээ. Иймд $G \models 1) \not\models 2)$ байна.

ММО-39, Багын багшийн III даваа

В.Адъяасүрэн

ББ-А1 (В.Адъяасүрэн). 210-д хуваагддаг, 1 болон өөрийг нь оролцуулаад 210 ялгаатай хуваагчтай байх бүх натурал тоог ол.

ББ-А2 (В.Адъяасүрэн). $1 \times 1 \times 1$ хэмжээтэй 6 өнгийн кубууд дээр ямар ч $6 \times 1 \times 1$ эгнээнд бүх өнгийн куб байхуйцаар $6 \times 6 \times 6$ куб эвлүүлж болох уу?

ББ-А3 (В.Адъяасүрэн). x_1, x_2, y_1, y_2 нь бодит тоонууд бөгөөд $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ байг.

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 - 1)^2 \geq (x_1^2 + x_2^2 - 1)(y_1^2 + y_2^2 - 1)$$

тэнцэтгэл биш биелнэ гэж батал.

ББ-В1 (В.Адъяасүрэн). n нь $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{16} = n$ гэсэн 16 хуваагчтай ба $d_6 = 18, d_9 - d_8 = 17$ байв. n -ийн бүх утгыг ол.

ББ-В2 (В.Адъяасүрэн). $n^3 = \underbrace{\dots 11 \dots 11}_{2003}$ байх натурал n тоо олдох уу?

ББ-В3 (В.Адъяасүрэн). 11×11 хэмжээтэй өрөөг 1×1 хэмжээтэй 121 жижиг өрөөнүүдэд хуваагаад, өрөөнүүдийг тусгаарлагч хана бүрт 1,1 хаалга гаргав. Өрөө бүрт нэгээс илүүгүй улаан хаалга байхаар хамгийн олондоо хичнээн хаалгыг улаан өнгөөр будах вэ?

ББ-А1. Хэрэв n нь бидний олох тоо бөгөөд $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ эгэл задаргаатай байвал түүний хуваагчдын тоо $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$ байна. Нөхцөл ёсоор $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1) = 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ ба $n:210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Эндээс $k = 4$ ба $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \{1, 2, 4, 6\}$ гэж гарна. Ийнхүү бидний олох тоонууд: $2 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7^6$, $2 \cdot 3^2 \cdot 5^6 \cdot 7^4$, $2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^6$, $2 \cdot 3^4 \cdot 5^6 \cdot 7^2$, $2 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7^4$, $2 \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot 7^2$, ..., $2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^4$, $2^6 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 7^2$, $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^4$, $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7$, $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2$, $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$ гэсэн 24 ширхэг тоо болно.

ББ-А2. Болно. 6 өнгийг 1, 2, 3, 4, 5, 6 тоонуудаар төлөөлүүлээд, кубийг 6 босоо давхарга болгон хуваагаад нүүрэн талаас нь I, II, III, IV, V, VI гэж дугаарлая. Дараах байдлаар кубийг эвлүүлнэ.

I	1 2 3 4 5 6	II	2 3 4 5 6 1	III	3 4 5 6 1 2
	2 3 4 5 6 1		3 4 5 6 1 2		4 5 6 1 2 3
	3 4 5 6 1 2		4 5 6 1 2 3		5 6 1 2 3 4
	4 5 6 1 2 3		5 6 1 2 3 4		6 1 2 3 4 5
	5 6 1 2 3 4		6 1 2 3 4 5		1 2 3 4 5 6
	6 1 2 3 4 5		1 2 3 4 5 6		2 3 4 5 6 1
IV	4 5 6 1 2 3	V	5 6 1 2 3 4	VI	6 1 2 3 4 5
	5 6 1 2 3 4		6 1 2 3 4 5		1 2 3 4 5 6
	6 1 2 3 4 5		1 2 3 4 5 6		2 3 4 5 6 1
	1 2 3 4 5 6		2 3 4 5 6 1		3 4 5 6 1 2
	2 3 4 5 6 1		3 4 5 6 1 2		4 5 6 1 2 3
	3 4 5 6 1 2		4 5 6 1 2 3		5 6 1 2 3 4

ББ-А3. Хэрэв $y_1^2 + y_2^2 \geq 1$ байвал $(x_1^2 + x_2^2 - 1)(y_1^2 + y_2^2 - 1) \leq 0$ ба $(x_1 y_1 + x_2 y_2 - 1)^2 \geq 0$ тул батлах зүйл шууд биелнэ. $y_1^2 + y_2^2 < 1$ байг. $a = 1 - x_1^2 - x_2^2$, $b = 1 - y_1^2 - y_2^2$ гэе. Тэгвэл $a \geq 0$, $b > 0$. $(x_1 y_1 + x_2 y_2 - 1)^2 \geq (x_1^2 + x_2^2 - 1)(y_1^2 + y_2^2 - 1) \Leftrightarrow (2 - 2x_1 y_1 - 2x_2 y_2)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + a + b)^2 \geq 4ab$.

$a \geq 0$, $b > 0$ тул $((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + a + b)^2 \geq (a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab \geq 2ab + 2ab = 4ab$ болж бодлого бодогдов.

ББ-В1. $18 = 2 \cdot 3^2$ тоо 6 хуваагчтай: 1, 2, 3, 6, 9, 18. n тоо 16 хуваагчтай тул бидний олох тоо $n = 2 \cdot 3^3 \cdot p$ (p -анхны тоо) буюу $n = 2 \cdot 3^7$ хэлбэрийн байх боломжтой. Хэрэв $n = 2 \cdot 3^7$ бол $d_8 = 54$, $d_9 = 81$ ба $d_9 - d_8 = 27 \neq 17$ тул энэ тоо бодлогын нөхцөлийг хангахгүй.

$n = 2 \cdot 3^3 \cdot p$, энд p нь $p > 18$ байх анхны тоо. Хэрэв $18 < p < 27$ бол $d_7 = p$, $d_8 = 27$, $d_9 = 2p = 27 + 17 = 44$ болох ба эндээс $p = 22$ гэж гарч p анхны тоо гэдэгт зөрчинө.

$p > 27$ байг. Хэрэв $p < 54$ бол $d_7 = 27$, $d_8 = p$, $d_9 = 54 = d_8 + 17$. Эндээс $p = 37$ гэж гарна. Хэрэв $p > 54$ байвал $d_7 = 27$, $d_8 = 54$, $d_9 = d_8 + 17 = 71 = p$. Ийнхүү $n = 2 \cdot 3^3 \cdot 37 = 1998$, $n = 2 \cdot 3^3 \cdot 71 = 3834$.

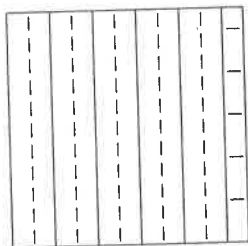
ББ-В2. Олдоно. Аливаа натурал m -ийн хувьд $n^3 = \overbrace{\dots 11 \dots 11}^m$

байх n тоо олдоно гэдгийг m -ээр индукцлэн байгуулъя. $m = 1$ үед илт. $m = k$ үед $A = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1}$ тооны куб нь k ширхэг 1-ээр төгссөн байг. $a_1 = 1$ гэдэг нь илт. $B = \overline{b a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1} = 10^k \cdot b + A$ тоо авч үзье. A^3 тооны баруун талаасаа $(k+1)$ -р цифрийг p гээ.

$$B^3 = b^3 \cdot 10^{3k} + 3 \cdot b^2 \cdot 10^{2k} \cdot A + 3b \cdot 10^k \cdot A^2 + A^3$$

тул B^3 тооны баруун талаасаа $(k+1)$ -р цифр нь $3b + p$ тооны сүүлчийн цифртэй тэнцүү. b тоог $3b+p$ тоо 1-ээр төгссөн байхаар сонгон авъя. $p = 1$ бол $b = 0$, $p = 2$ бол $b = 3$, $p = 3$ бол $b = 6$, $p = 4$ бол $b = 9$, $p = 5$ бол $b = 2$, $p = 6$ бол $b = 5$, $p = 7$ бол $b = 8$, $p = 8$ бол $b = 1$, $p = 9$ бол $b = 4$.

ББ-В3. Өрөөнүүдийг шатрын хөлөг шиг хар, цагаан өнгөөр, булангийн нүднүүд хар өнгөөр будагдсан байхаар будъя. Тэгвэл 60 цагаан, 61 хар өрөө үүснэ. Хэсэг хаалгыг бодлогын нөхцөл биелэхээр улаан өнгөөр будсан гэвэл улаан хаалга бүр өөр өнгийн хөрш 2 өрөөнд хамаарагдана. Улаан хаалганы тоо цагаан өрөөний тооноос хэтрэхгүй, ө.х улаан хаалганы тоо 60-аас хэтрэхгүй.



Бодлогын нөхцөл хангахаар 60 улаан хаалгыг зурагт дүрсэлсэн богино зураасаар төлөөлүүлэв.

ММО-39, Багын багшийн IV даваа

Б.Баяржаргал

ББ-А1 (Б.Баяржаргал). $2n^4 + 3n^3 + 2n^2$ -ийг $n-1$ ширхэг бүхэл тооны кубуудын нийлбэрт тавьж болохыг харуул.

ББ-А2 (Б.Батцэнгэл). Хурц өнцөгт гурвалжин өгөгджээ. Гурвалжны 3 орой ба 3 тал хүртэлхи зайн нийлбэр хамгийн бага байх цэгийг гурвалжин дотор ол.

ББ-А3 (В.Адъяасүрэн). $a_1, a_2, \dots, a_{36}$ гэсэн 36 бодит тоог тойргийн дагуу байрлуулав. Дараалан байрласан аль ч 5 тооны нийлбэр 4-өөс багагүй, дараалан байрласан аль ч 7 тооны нийлбэр 6-гаас хэтрэхгүй бол $a_1 - a_2$ ялгаврын хамгийн их утгыг ол.

ББ-В1 (Б.Баяржаргал). $a, b, c > 0$ тоонуудын хувьд $a < bc$ ба $1 + a^3 = b^3 + c^3$ бол $1 + a < b + c$ болохыг батал.

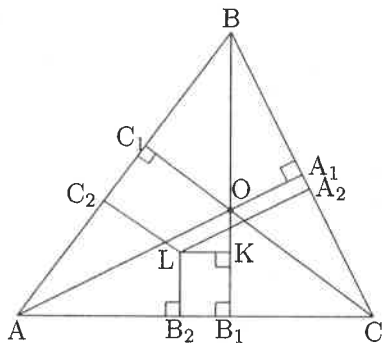
ББ-Б2 (В.Адъяасүрэн). 12×12 хүснэгтийг хамгийн олондоо хичнээн нүдийг, аль ч будагдсан 4 нүдний төвүүд нэг шулуун дээр үл оршихоор будаж болох вэ?

ББ-Б3 (Б.Сандагдорж). 1 ба 2-ын цифрээр бичигдэх 111, 212, 222-ыг агуулаагүй 39 оронтой тоо хичнээн байх вэ?

ББ-А1. $S = 2n^4 + 3n^3 + 2n^2 = 2(n^2 + 2n + 1)n^2 - n^3 = 8 \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} - n^3 = 8(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) - n^3 = 2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3 - n^3$, $n = 2k$ үед $S = 2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (4k)^3 - (2k)^3 = 2^3 + 4^3 + \dots + (2k-2)^3 + (2k+2)^3 + \dots + (4k)^3$.

$n = 2k + 1$ үед буюу $n = 3$ үед $a^3 + b^3 = 261$ бүхэл шийдтэй юу гэсэн бодлого болно. Энэ үед а) $a, b > 0$ үед $a, b \leq 7$ ба энэ үед шалгаад шийдгүй гэдгийг нь харуулна. б) $a > 0, b < 0$ бол $b = -c$, $a^3 - c^3 = 261$ энэ үед $a < 11$ байна. Учир нь $11^3 - 10^3 = 331 > 261$. Энэ үед бас шалгаад шийдгүй нь гарна.

ББ-А2. Уг цэг нь ортотөв болохыг баталъя. Өөр газар L цэг авъя. L цэгээс BB_1 -д перпендикуляр буулгаад суурийг нь K гээ. Тэгвэл $BL^2 = BK^2 + LK^2$ учир $BL \geq BK$. $LB_2 = KB_1$ учраас $BL + LB_2 \geq BK + KB_1 = BB_1$. Мөн адилаар $CL + LC_2 \geq CC_1$, $AL + LA_2 \geq AA_1$ буюу $AL + BL + CL + LA_2 + LB_2 + LC_2 \geq AA_1 + BB_1 + CC_1$ болж O нь бидний олох ёстой цэг болов.



ББ-А3. $a_1 + a_2 + \dots + a_{36} = S$ гэе.

а) $S = a_1 + (a_2 + \dots + a_6) + \dots + (a_{12} + \dots + a_{36}) \geq a_1 + 7 \cdot 4 = a_1 + 28$

б) $S = a_2 + (a_3 + \dots + a_9) + \dots + (a_{31} + \dots + a_{36} + a_1) \leq a_2 + 5 \cdot 6 = a_2 + 30$

$\Rightarrow -S \geq -a_2 - 30$

в) $\left. \begin{array}{l} S \geq a_1 + 28 \\ -S \geq -a_2 - 30 \end{array} \right\} \Rightarrow a_1 - a_2 - 2 \leq 0 \Rightarrow a_1 - a_2 \leq 2$

г) Дараах жишээ $a_1 - a_2 = 2$ байх жишээ мөн.

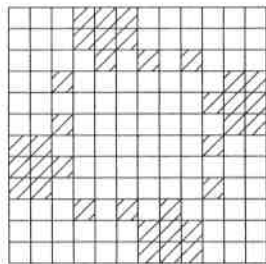
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	...	a_{30}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}
							...							
2	0	0	2	0	0	2	...	0	2	0	0	2	0	0

ББ-В1. Эсрэгээс нь $1+a \geq b+c$ гэе. $1+a^3 = (1+a)(1-a+a^2) = (b+c)(b^2-bc+c^2) \leq (1+a)(b^2-bc+c^2)$ болно. $1+a > 0$ учир $1-a+a^2 \leq b^2-bc+c^2$ болно.

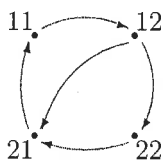
$$1-a+a^2 = (1+a)^2 - 3a \leq (b+c)^2 - 3bc \quad (*)$$

$bc > a$ гэдгээс $3bc > 3a$ ба мөн $(1+a)^2 \geq (b+c)^2$ учир $(1+a)^2 + 3bc > (b+c)^2 + 3a$ буюу $(1+a)^2 - 3a > (b+c)^2 - 3bc$ буюу $(*)$ тэнцэл биштэй харьцуулбал зөрчил үүсч байна. Иймд $1+a < b+c$ байна.

ББ-В2. Аль ч баганад 3-аас хэтрэхгүй будагдсан нүд байх ёстой. Иймд нийт $12 \cdot 3 = 36$ -аас хэтрэхгүй будагдсан нүд байна. 36 нүдээ зурагт үзүүлсэн байдлаар будна.



ББ-В3. Дараах 4 оройтой чиглэлт графын хувьд аль нэг оройгоос эхлэн чиглэлт ирмэгүүдээр дамжин аль нэг оройд төгсөхөд бодлогын нөхцлийг хангасан тоонууд үүсэх юм. Энд ij оройгоос гарсан ирмэгээр дамжин jk оройд очиход ijk гэсэн гурван оронтой $\overset{\cdot}{ij} \xrightarrow{\quad} \overset{\cdot}{jk}$ тоо үүсэх юм, тухайлбал $ij \rightarrow jk \rightarrow ks \rightarrow st$ -д $ijkst$ тоо харгалзах юм.



Нөгөө талаас ii орой гогцоо агуулах бол iii гэсэн гурван оронтой тоо бичигдэх тул бодлогын өгөгдсөн нөхцөлд харшилна. Иймд



хэлбэрийн гогцоог агуулахгүй.

A_n -ээр бодлогын нөхцлийг хангасан n оройтой тоонуудын тоог тэмдэглэе.

$A_n(11)$ -ээр n оронтой 11-ээр төгссөн тоонуудын тоог тэмдэглэе. $A_n(12)$, $A_n(21)$, $A_n(22)$ нь адилаар тодорхойлогдох юм. Нөгөө талаас $A_n = A_n(11) + A_n(12) + A_n(21) + A_n(22)$ байна. Дээрх графаас харвал 11-ээр төгссөн n оронтой тоо 21-ээр төгссөн $n-1$ оронтой тооны тоотой тэнцүү. Өөрөөр хэлбэл $A_n(11) = A_{n-1}(21)$ гэсэн үг. Яг үүнтэй адилаар $A_n(12) = A_{n-1}(11)$, $A_n(22) = A_{n-1}(12)$, $A_n(21) = A_{n-1}(12) + A_{n-1}(22)$ болно. Эндээс

$$A_n(11) = A_{n-1}(21) = A_{n-2}(12) + A_{n-2}(22) = A_{n-3}(11) + A_{n-3}(12)$$

$$A_n(12) = A_{n-1}(11) = A_{n-2}(21) = A_{n-3}(12) + A_{n-3}(22)$$

$$A_n(21) = A_{n-1}(12) + A_{n-1}(22) = A_{n-2}(11) + A_{n-2}(12) = \\ = A_{n-3}(21) + A_{n-3}(11)$$

$$A_n(22) = A_{n-1}(12) = A_{n-2}(11) = A_{n-3}(21)$$

буюу $A_n = 2A_{n-3}(11) + 2A_{n-3}(12) + 2A_{n-3}(21) + A_{n-3}(22) = A_{n-3} + A_{n-3}(11) + A_{n-3}(12) + A_{n-3}(21) = A_{n-3} + A_{n-4}(21) + A_{n-4}(11) + A_{n-4}(12) + A_{n-4}(22) = A_{n-3} + A_{n-4}$ болж $A_n = A_{n-3} + A_{n-4}$ рекуррент харьцаа $n-4 \geq 3$ буюу $n \geq 7$ үед биелнэ. Мөн $A_1 = 2$, $A_2 = 4$, $A_3 = 5$, $A_4 = 6$, $A_5 = 7$, $A_6 = 9$ гэдгээс $A_{39} = 3617$ гэж гарна. n бага үед A_n -ийн бүгдийг тоочиж бичих нь хялбар юм.

ММО-39, Дундын багшийн III даваа

Ц.Дашдорж

ДБ-А1 (Ц.Дашдорж). $n \geq 4$, $a_1, \dots, a_n > 0$, $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$ бол

$$\frac{a_1}{a_2^2 + 1} + \frac{a_2}{a_3^2 + 1} + \dots + \frac{a_n}{a_1^2 + 1} \geq \frac{4}{5}(a_1\sqrt{a_1} + \dots + a_n\sqrt{a_n})^2$$

гэж батал.

ДБ-А2 (Ц.Дашдорж). M, N нь $\triangle ABC$ -ны BC, AC талын дундажууд ба $\triangle ABC$ -ны ортотөв нь $\triangle AMB$ -ны хүндийн төвтэй давхцах бол $\triangle ABC$ -ны өнцгүүдийг ол.

ДБ-А3 (Ц.Дашдорж). $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ тоонуудын хувьд $a_0 + a_1 \cos x + \dots + a_n \cos nx = 0$ тэгшитгэл $[0, 2\pi]$ завсарт $2n + 1$ ялгаатай язгууртай бол $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$ гэж батал.

ДБ-В1 (Ц.Дашдорж). O дээр төвтэй тойрогт багтсан $ABCDE$ таван өнцөгтөд $\angle B = 120^\circ, \angle C = 120^\circ, \angle D = 130^\circ, \angle E = 100^\circ$ байв. BD, CE диагоналиуд AO диаметрт харъяалагдах цэг дээр огтлолцохыг батал.

ДБ-В2 (Ц.Дашдорж). $n \in \mathbb{N}, S = \{a \in \mathbb{N} \mid 1 < a < n, n \mid a^{a-1} - 1\}$ байг. Хэрэв $S = \{n - 1\}$ бол n -ийг ол.

ДБ-В3 (Ц.Дашдорж). $a_0, a_1, \dots, a_n$ комплекс тоонуудын хувьд $z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1$ байхад $|a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0| \leq 1$ байдаг. Тэгвэл $0 \leq k \leq n$ байх k бүрийн хувьд $|a_k| \leq 1$ ба $|a_0 + a_1 + \dots + a_n - (n + 1)a_k| \leq n$ гэж батал.

ДБ-А1. Коши-Буняковскийн тэнцэтгэл бишээр $x_i > 0$ үед

$$\left((\sqrt{x_1})^2 + \dots + (\sqrt{x_n})^2 \right) \left(\left(\frac{a_1}{\sqrt{x_1}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{a_n}{\sqrt{x_n}} \right)^2 \right) \geq (a_1 + \dots + a_n)^2$$

болох тул $\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{x_i} \geq \frac{(\sum a_i)^2}{\sum x_i}$ болно. Үүнийг анхаарвал

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a_1^2 + 1} + \frac{a_2}{a_2^2 + 1} + \dots + \frac{a_n}{a_n^2 + 1} &= \frac{a_1^3}{a_1^2 a_2^2 + a_1^2} + \frac{a_2^3}{a_2^2 a_3^2 + a_2^2} + \dots \\ &\dots + \frac{a_n^3}{a_n^2 a_1^2 + a_n^2} \geq \frac{(\sum a_i \sqrt{a_i})^2}{a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_3^2 + \dots + a_n^2 a_1^2 + 1} \end{aligned}$$

Иймд $n \geq 4$ ба $\sum a_i^2 = 1$ үед $a_1^2 a_2^2 + \dots + a_n^2 a_1^2 \leq \frac{1}{4}$ гэж баталбал

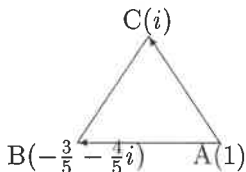
болно. Үүний тулд $n \geq 4, x_i > 0$ ба $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ үед

$A = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_n x_1 \leq \frac{1}{4}$ гэж баталъя.

n тэгш бол $A \leq (x_1 + x_3 + \dots)(x_2 + x_4 + \dots) \leq \frac{1}{4}$ болно, учир нь нийлбэр нь 1 байх 2 тооны үржвэрийн максимум утга $\frac{1}{4}$ байна.

$5 \leq n$ сондгой байг. $x_1 \geq x_2$ гэж үзэж болох тул $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 \leq x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)x_4$ учир $x_1, \dots, x_n$ гэсэн n тоонуудын оронд $x_1, x_2 + x_3, x_4, \dots, x_n$ гэсэн $n - 1$ тоог авч n тэгш үед шилжүүлнэ. $A = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + A_1 \leq x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)x_4 + A_1 \leq \frac{1}{4}$

ДБ-А2. (ABC) -г нэгж тойрог болгож авъя. Тэгвэл $\triangle ABC$ -ийн ортотөв $H = A + B + C$ болно. $\triangle AMN$ -ийн хүндийн төв нь $G = \frac{1}{3}\left(A + \frac{B+C}{2} + \frac{C+A}{2}\right) = \frac{3A+B+2C}{6}$. $G = H$ -аас $3A + 5B + 4C = 0$. $A = 1$ гэж үзэж болно. $|B| = |C| = 1$ байгаа. Тэгвэл $3 + 5B + 4C = 0$, $3 + 5\bar{B} + 4\bar{C} = 0 = 3 + \frac{5}{B} + \frac{4}{C}$ системийг бодож $C = i$, $B = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ эсвэл $C = -i$, $B = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ гэж олно. Энэ 2 гурвалжин OX тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй буюу төсөөтэй байна. $\angle B = \frac{\pi}{4}$, $\angle A = \arctg 3$, $\angle C = \arctg 2$ болно.



$$\begin{aligned}\angle A &= \angle (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \\ &= \angle \left(-\frac{8}{5} - \frac{4}{5}i, -1 + i \right) = \arg \bar{a}b = \\ &= \arg \left(-\frac{8}{5} - \frac{4}{5}i \right) (-1 - i) = \\ &= \arg \left(\frac{4}{5} + \frac{12}{5}i \right) = \arctg \frac{12}{4} = \arctg 3.\end{aligned}$$

ДБ-А3. $z = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ -г авч үзье. $\cos kx = \frac{1}{2}\left(z^k + \frac{1}{z^k}\right)$ тул өгсөн тэгшитгэл $2n$ зэргийн олон гишүүнт болох ба $2n + 1$ ялгаатай язгууртай тул бүх коэффициент нь тэг байна.

ДБ-В1. Багтаасан тойрогт таван өнцөгтийн талууд нь дараах нумыг тулна: $\arcs AB = 80^\circ$, $\arcs BC = 40^\circ$, $\arcs CD = 80^\circ$, $\arcs DE = 20^\circ$, $\arcs EA = 140^\circ$ гэдгийг хялбархан шалгаж болно. Энэ бүх тоонууд нь 20° -ийн давталтууд байгаа тул $\omega = e^{i\frac{2\pi}{18}}$ гэж авбал $A = 1$, $B = \omega^4$, $C = \omega^6$, $D = \omega^{10}$, $E = \omega^{11}$ болох ба $\omega^{18} = 1$, $\omega^9 = -1$, $\bar{\omega}^k = \omega^{18-k}$ ба $\omega^6 - \omega^3 + 1 = 0$ болно.

BD , CE шулуунуудын огтлолцлын цэг нь бодитой тоо гэд-

гийг баталбал болно.

$$BD : z - B = \frac{D - B}{D - \overline{B}}(\overline{z} - \overline{B}) \text{ буюу } z\omega^4 + \overline{z} + \omega^2 = 0 \quad (1)$$

$$CE : z - C = \frac{E - C}{E - \overline{C}}(\overline{z} - \overline{C}) \text{ буюу } z\omega + \overline{z} - \omega^3(\omega^4 - 1) = 0 \quad (2)$$

2 тэгшитгэлийг бодвол $z = \frac{-\omega^6 + \omega^2 - \omega}{\omega^6} = -1 + \frac{\omega - 1}{\omega^5} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{\omega - 1}{\omega^5} = \frac{\overline{\omega} - 1}{\overline{\omega}^5} \Leftrightarrow \overline{\omega}^4 - \overline{\omega}^5 = \omega^4 - \omega^5 \Leftrightarrow \omega^{14} - \omega^{13} = \omega^4 - \omega^5 \Leftrightarrow \omega^{13} = -\omega^4 \Leftrightarrow \omega^9 = -1$.

ДБ-В2. n квадратаас чөлөөт гэж баталъя. $n = q^b r$, $q \in P$, $b \geq 2$, $(r, q) = 1$ гээ. Хэрэв $r \geq 2$ бол $1 < a = \varphi(q^b)r + 1 = (q^b - q^{b-1})r + 1 < q^b r = n$ байх a тооны хувьд $a \equiv 1(r)$ тул

$$a^{a-1} \equiv 1(r) \quad (1)$$

болно. $b \geq 2$ учир $q \mid \varphi(q^b)$ буюу $(q, a) = 1$ болох тул Эйлерийн теоремоор $a^{\varphi(q^b)} \equiv 1(q^b)$ гэдгээс

$$a^{a-1} \equiv a^{\varphi(q^b)r} \equiv 1(q^b) \quad (2)$$

Иймд (1) ба (2)-оос

$$a^{a-1} \equiv 1(q^b r) \quad (3)$$

боллоо. $a = n - 1 = q^b r - 1 = (q^b - q^{b-1})r + 1$ -ээс $q^{b-1}r = 2 \Rightarrow q = 2$, $b = 2$, $r = 1$. Энэ нь $r \geq 2$ гэсэнд зөрчилдөнө. Иймд n квадратаас чөлөөтэй боллоо.

$(n - 1)^{n-2} \equiv (-1)^{n-2} \equiv 1(n)$ гэдгээс n тэгш тоо гэж гарна.

1) Иймд $n = 2pq$, $p \in P$, $1 < q$ гэж үзье. $a = \varphi(p)q + 1$ -ийг авч үзье. $a = (p - 1)q + 1$ тул $a \equiv 1(q)$, $a^{a-1} = (pq - q + 1)^{(p-1)q} \equiv (1 - q)^{(p-1)q}(p)$ байх тул $p \mid q - 1$ байх тохиолдлыг л авч үзэх хэрэгтэй. Одоо $a = (p - 1)(q - 1) + 1$ -ийг авч үзвэл $a^{(p-1)(q-1)} \equiv (p - 2)^{(p-1)(q-1)}(q)$ болох ба $(p - 2, q) = 1$ гэж үзэж чадна, учир нь p нь $p \mid n$ байх хамгийн бага сондгой анхны гэж үзэж чадна. Ингэвэл $q \in P$ үед $a^{a-1} \equiv a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1(q)$ болно. $a^{a-1} \equiv 1(2)$ байх нь

илэрхий тул $n = 2pq$, $p, q \in \mathbb{P}$ тохиолдолд бодлого бодогдлоо, ө.х. ийм хэлбэрийн тоонууд бодлогын нөхцлийг хангахгүй байна.

2) Иймд $n = 2pqr$, $p < q < r$, $p, q \in \mathbb{P}$ байх тохиолдол л үлдлээ. $a = (p-1)qr + 1$ тоог авч үзвэл $a \equiv 1(q)$, $a \equiv 1(r)$, $a^{a-1} \equiv (qr-1)^{a-1}(p)$ болох тул

$$p \mid qr - 1 \quad (1)$$

байх ёстой, мөн $a_1 = p(q-1)r + 1$ гэж авахад $a_1 \equiv 1(p)$, $a_1 \equiv 1(r)$, $a_1^{a_1-1} \equiv (pr-1)^{p(q-1)r}(q)$ болох тул

$$q \mid pr - 1 \quad (2)$$

байх ёстой. Энэ үед $a = (p-1)(q-1)r + 1$ -г авч үзье. $a \equiv -(q-1)r+1(p)$ ба (1)-ээс $p \nmid (q-1)r-1$ гэж гарна, мөн $a \equiv -(p-1)r+1(q)$ ба (2)-оос $q \nmid (p-1)r-1$ гэж гарах тул $(a, pq) = 1$ боллоо. Тэгвэл $a^{a-1} \equiv 1(p)$, $a^{a-1} \equiv 1(q)$ болно. $a \equiv 1(r)$, $a \equiv 1(2)$ тул $a^{a-1} \equiv 1(n)$, $1 < a < n-1$ байх ойлгомжтой тул $n = 2pqr$, $p, q \in \mathbb{P}$ хэлбэрийн тоонууд мөн бодлогын нөхцлийг хангахгүй байна.

3) Одоо $n = 2p$, $p \in \mathbb{P}$ байх тохиолдол л үлдлээ. $3, 5, \dots, p-2, p, p+2 = 2p-(p-2), \dots, 2p-5, 2p-3$ гэсэн p ширхэг тоог авч үзье $(\pm 3, \pm 5, \dots, \pm(p-2), p)$.

$$a^{a-1} \equiv 1(2p) \Leftrightarrow \begin{cases} a^{a-1} \equiv 1(p) \\ a^{a-1} \equiv 1(2)\text{-ямагт} \end{cases}$$

биелнэ (a -сондгой ба $a < p$ үед л үзэхэд болно). Иймд $a^{a-1} \equiv 1(p)$ байх сондгой $a \in \mathbb{Z}$ -г авч үзэх хэрэгтэй. $b \in G(p)$ ба $b^k \equiv a(p)$ байг. $b^{k(a-1)} \equiv a^{a-1} \equiv 1(p) \rightarrow p-1 \mid k(a-1)$, $1 < k < p-1$, $1 < a < p-1$, a -сондгой байх, тухайлбал $p-1 = k(a-1)$ бол $a = b^k$ сондгой байх үед $a \in S$ болно.

Иймд $n = 2p$, $p \in \mathbb{P}$ байх л тохиолдол үлдлээ. $(2p-1)^{2(p-1)} \equiv 1(2p)$ байх нь илэрхий.

ДБ-ВЗ. $p(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ ба $\sqrt[n+1]{1} = \{\varepsilon_\ell | \ell = \overline{0, n}\}$ байг.

$$\sum_{\ell=0}^n \varepsilon_\ell^k = \begin{cases} 0 & , \quad n+1 \nmid k \\ n+1 & , \quad n+1 | k \end{cases} \quad (1)$$

байдаг тул $k \in \overline{0, n}$ бүрийн хувьд

$$\sum_{j=0}^n \varepsilon_j^k p(\varepsilon_j) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n \varepsilon_j^k a_i \varepsilon_j^i = \sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=0}^n \varepsilon_j^{k+i} \stackrel{(1)}{=} \sum_{i=n+1-k}^n \begin{cases} (n+1)a_{n+1-k} & , \quad 1 \leq k \leq n \\ (n+1)a_0 & , \quad k = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Иймд $1 \leq k \leq n$ үед

$$(n+1)|a_{n+1-k}| = \left| \sum_{j=0}^n \varepsilon_j^k p(\varepsilon_j) \right| \leq \sum_{j=0}^n |\varepsilon_j^k p(\varepsilon_j)| = \sum_{j=0}^n |p(\varepsilon_j)| \leq 1 + \dots + 1 = n+1$$

тул $k \in \overline{1, n}$ үед $|a_k| \leq 1$ боллоо.

$$(n+1)|a_0| \leq \sum_{j=0}^n |\varepsilon_j^0 p(\varepsilon_j)| \leq 1 + \dots + 1 = n+1 \text{ ээс } |a_0| \leq 1.$$

$$\sum_{j=1}^n \varepsilon_j^k p(\varepsilon_j) = \sum_{j=0}^n \varepsilon_j^k p(\varepsilon_j) - p(1) \stackrel{(2)}{=} (n+1)a_{n+1-k} - \sum_{j=0}^n a_j \text{ ба}$$

$$\left| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j^k p(\varepsilon_j) \right| \leq \sum_{j=1}^n |\varepsilon_j^k p(\varepsilon_j)| \leq n$$

тул $k \in \overline{1, n}$ үед

$$\left| (n+1)a_{n+1-k} - \sum_{j=0}^n a_j \right| \leq n \text{ буюу } \left| \sum_{j=0}^n a_j - (n+1)a_k \right| \leq n$$

$$\text{Үүний адилаар } \sum_{j=1}^n \varepsilon_j^0 p(\varepsilon_j) = \sum_{j=0}^n \varepsilon_j^0 p(\varepsilon_j) - p(1) \stackrel{(2)}{=} (n+1)a_0 - \sum_{j=0}^n a_j$$

$$\text{ээс } \left| (n+1)a_0 - \sum_{j=0}^n a_j \right| = \left| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j^0 p(\varepsilon_j) \right| \leq \sum_{j=1}^n |\varepsilon_j^0 p(\varepsilon_j)| \leq n.$$

ММО-39, Дундын багшийн IV даваа

Ц.Дашдорж

ДБ-А1 (Ц.Дашдорж). $2 \leq n \in \mathbb{N}$, $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + 1 \in \mathbb{N}[x]$, $k \in \overline{1, n-1}$ бүрийн хувьд $a_k = a_{n-k}$ бол $a \mid P(b)$, $b \mid P(a)$ байх төгсгөлгүй олон натурал хос (a, b) олдохыг батал.

ДБ-А2 (М.Батбилэг, Г.Баярмагнай). $\triangle ABC$ дотор ω тойрог өгөгджээ. ω тойрогт τ_A ба τ_C гэсэн A ба C цэгээс татсан шүргэгч шулуунууд B_1 цэгт огтлолцоно (ω ба B цэг τ_A ба τ_C -ийн 2 талд оршино). Үүний адилаар A_1 ба C_1 цэгийг тодорхойлж. Тэгвэл AA_1 , BB_1 , CC_1 шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.

ДБ-А3 (Г.Баярмагнай). $(m, 3) = 1$ ба $1 + 39^n + 39^{2n} \mid 1 + 39^m + 39^{2m}$ бол $1 + 2003^n + 2003^{2n} \mid 1 + 2003^m + 2003^{2m}$ болохыг батал.

ДБ-В1 (В.Адъяасүрэн, Г.Баярмагнай). ω ба ω_1 тойргууд D цэгт шүргэлцэнэ. AB ба AC шулуунууд ω тойргийг шүргэнэ. $\angle CDB$ -ийн биссектрис $\triangle ABC$ -ны CB талыг шүргэсэн гадаад багтсан тойргийн төвийг дайрахыг батал.

ДБ-В2 (Г.Баярмагнай). n ба $m \geq 2$ нь $n > 2m$ байх өгөгдсөн натурал тоонууд. n элементтэй X олонлогийн m эсвэл $m - 1$ элементтэй $A_1, \dots, A_k$ дэд олонлогуудын аль ч хоёр нь ерөнхий элементтэй бол k -ийн авч болох хамгийн их утгыг ол.

ДБ-В3 (Ц.Дашдорж). $n, r \geq 2$ бүхэл тоонууд ба $Z_n^r = \{a^r \mid a \in Z_n\}$ байг. $Z_n^r = Z_n \Leftrightarrow \begin{cases} n = p_1 \cdot \dots \cdot p_r \\ (r, \varphi(n)) = 1 \end{cases}$

ДБ-А1. $(1, P(1))$ хос бодлогын нөхцлийг хангана. $1 \mid P(P(1))$, $P(1) \mid P(1)$ Зөвхөн төгсгөлөг тооны хос (a, b) л бодлогын нөхцлийг хангадаг гээ. Тэгвэл (a, b) нь $a \leq b$ ба b нь хамгийн их утгатай

байх тийм хос байг. Одоо $\left(b, \frac{P(b)}{a}\right)$ хос бодлогын нөхцлийг хангана гэж харуулъя: $a \mid P(b)$ тул $\frac{P(b)}{a} \in \mathbb{Z}$. Мөн $\frac{P(b)}{a} \mid P(b)$ байна. $b \mid P\left(\frac{P(b)}{a}\right)$ гэж харуулах хэрэгтэй. $b \mid P(a) = a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \dots + a_1a + 1$ -ээс $(a, b) = 1$ гэж гарна. Иймд $\exists b \in \mathbb{Z}, az \equiv 1(b)$. $P(b) \equiv 1(b)$ -ээс

$$P\left(\frac{P(b)}{a}\right) \equiv P(zP(b)) \equiv P(z)(b) \quad (1)$$

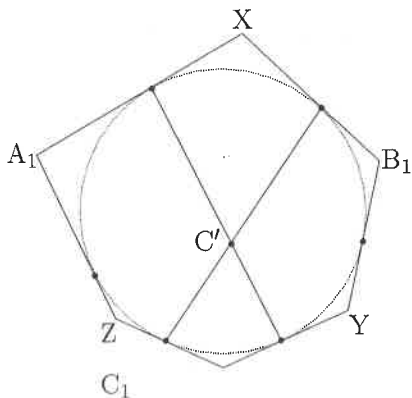
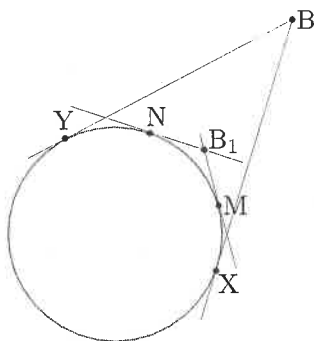
$P(x)$ -ийн чанараас $a^n P\left(\frac{1}{a}\right) = P(a)$. Иймд $b \mid P(a)$ -ээс $a^n P\left(\frac{1}{a}\right) \equiv 0(b)$ болно, энд $(a, b) = 1$ гэдгийг анхаарвал $P(z) \equiv 0(b)$ буюу (1)-ээс $\left(b, \frac{P(b)}{a}\right)$ хос бодлогын нөхцлийг хангалаа. Гэтэл $P(b) \geq b^n + 1 > b^2 > ab$ учир $\frac{P(b)}{a} > b$ болж (a, b) -ийн сонголтод харшлав.

ДБ-А2. ω тойрог ба A цэг өгөгдсөн байг. ℓ_A -аар A цэгийн поляр шулууныг тэмдэглэе.

ЛЕММ. ω тойрогт A ба B цэгээс түүнийг харгалзан M, N ба P, Q цэгүүдэд шүргэх шүргэгчүүд татжээ. $MP \cap NQ = C$ бол A, B, C цэгүүд нэг шулуун дээр оршино.

Баталгаа. $MN \cap PQ = O$ гээ. $\ell_A = MN$ ба $\ell_B = PQ$ гэдгээс $O \in \ell_A, \ell_B$ болно. Иймд $\ell_O = AB$ болох ба нөгөө талаас $C \in \ell_O$ тул $C \in AB$ болж лемм батлагдлаа.

Одоо бодлогоо бодъё. B оройгоос тойрогт татсан шүргэгчүүдийн шүргэлтийн цэгийг X ба Y , A ба C оройнуудаас шүргэгчүүдийн шүргэлтийн цэгүүдийг харгалзан M ба N гээ (Бодлогын нөхцлийг хангах). $YM \cap XN = B'$ гэвэл лемм ёсоор B, B_1, B' цэгүүд нэг шулуун дээр оршино. үүний адилаар A' ба C' цэгүүдийг тодорхойлъё.



Одоо A_1A' , B_1B' , C_1C' шулуунууд коллинеар гэж баталъя. A ба B оройгоос ω -т татсан (C -д ойрхон) шүргэгчүүдийн огтлолцлын цэгийг X гэж тэмдэглэе. Үүний адил Y ба Z цэгүүдийг тодорхойлбол лемм ёсоор $C' \in C_1X$ тул Браншоны теорем ёсоор C_1X , A_1Y , B_1Z шулуунууд коллинеар болж бодлого бодогдлоо.

ДБ-А3. $(m, 3) = 1$, $1 + 39^n + 39^{2n} \mid 1 + 39^m + 39^{2m}$ -ээс $1 + x^n + x^{2n} \mid 1 + x^m + x^{2m}$ гэж баталбал бодлого шууд бодогдоно.

Даян аврага П.Баяржаргалын хийсэн бодолтыг сонирхуулъя.

$(m, 3) = 1$ ба $g_n = 1 + 39^n + 39^{2n} \mid g_m = 1 + 39^m + 39^{2m}$ бол $n \mid m$ гэж харуулъя.

$$\begin{cases} 39^{3n} \equiv 1(g_n) \\ 39^{3m} \equiv 1(g_n) \end{cases} \Rightarrow 39^{(3n, 3m)} \equiv 1(g_n) \quad (*)$$

$(3n, 3m) = 3d$, $(d, 3) = 1$ гэхэд хэрэв $d < n$ бол $(*)$ -оос

$$(39^d - 1)(39^{2d} + 39^d + 1) \equiv 0(g_n) \quad (1)$$

Мөн $39^d - 1 \mid 39^n - 1$ ба $(39^n - 1, g_n) = 1$ байх нь илэрхий тул

$$(39^d - 1, g_n) = 1 \quad (2)$$

Иймд (1) ба (2)-оос $g_d = 39^{2d} + 39^d + 1 \equiv 0(g_n)$ гэсэн илэрхий зөрчил гарна, учир нь $0 < g_d < g_n$ тул $g_d \not\equiv 0(g_n)$. Иймд $d = n$, ө.х. $n \mid m$ боллоо.

ӨГҮҮЛБЭР 1. $(t, 3) = 1$ ба $f_1(x) = x^2 + x + 1$, $f_t(x) = x^{2t} + x^t + 1$ бол $f_1 | f_t$ байна.

Баталгаа. $x^3 \equiv 1(f_1)$ учир

$$\begin{aligned} f_t(x) &= x^{2t} + x^t + 1 = \\ &= \begin{cases} x^{6k} \cdot x^2 + x^{3k} \cdot x + 1 \equiv x^2 + x + 1 \equiv 0(f_1), & \text{хэрэв } t = 3k + 1 \\ x^{6k} \cdot x^4 + x^{3k} \cdot x^2 + 1 \equiv x + x^2 + 1 \equiv 0(f_1), & \text{хэрэв } t = 3k + 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$n | m$ ба $(m, 3) = 1$ тул $m = nt$ гэвэл $(t, 3) = 1$ байна.

Иймд Өгүүлбэр 1-ээр $x^2 + x + 1 \mid x^{2t} + x^t + 1$ болох тул энд $x = 2003^n$ гэж авбал бодлого бодогдоно.

ДБ-В1. ABC гурвалжны CB талыг шүргэсэн гадаад багтсан тойргийн төвийг I_a ; CB нумын дундажийг F ; BA , CA шулуунуудын ω_1 тойрогтой огтлолцох хоёр дахь цэгүүдийг харгалзан E_1, E ; E_1EB нумын дундажийг P ; CE_1E нумын дундажийг Q ; I_aF шулууны ω_1 тойрогтой огтлолцох хоёр дахь цэгийг D_1 ; $(QD_1) \cap (CA) = X$, $(PD_1) \cap (BA) = Y$ гээ. Архимедийн лемм (Х-В1, IV даваа)-ийг ашиглавал $D = D_1$ гэж батлах хэрэгтэй. Үүний тулд $AX = AY$ гэж баталчихвал бодлого бодогдох болно. $\angle XD_1I_a = \pi - \angle QD_1F = \pi - \frac{1}{2}(\widetilde{CQ} + \widetilde{CF}) = \pi - \frac{1}{4}(\widetilde{CQE} + \frac{1}{4}\widetilde{CFB}) = \pi - \frac{1}{4}(2\pi - \widetilde{EPB}) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\widetilde{EPB} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\gamma = \gamma + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\gamma\right) = \gamma + \frac{\alpha + \beta}{2} = \angle I_aCX$ тул I_aCD_1X дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. Үүнтэй адилаар BI_aYD_1 дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана гэж батлагдана. Иймээс $\left. \begin{aligned} \angle I_aXC &= \angle I_aD_1C = \frac{1}{2}\widetilde{CF} \\ \angle I_aYB &= \angle I_aD_1B = \frac{1}{2}\widetilde{BF} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle I_aXC = \angle I_aYB \Rightarrow \angle XI_aA = \angle YI_aA$. Гурвалжнууд тэнцэх $\Theta T \Theta$ шинжээр $\Delta XAI_a = \Delta YAI_a$ болно. Эндээс $AX = AY$ гэж гарна.

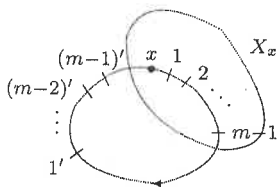
ДБ-В2. 1-ийг агуулсан бүх m ба $m - 1$ элементтэй дэд олонлогийн тоо нь $C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m-2} = C_n^{m-1}$. Иймд k -ийн хамгийн их утга нь C_n^{m-1} -ээс багагүй.

Одоо энэ тоо нь C_n^{m-1} болохыг баталъя. Үүнд дараах Эрдёш-Ко-Радогийн теоремыг ашиглая.

ТЕОРЕМ. Хэрэв $m \leq \frac{n}{2}$ ба $A_1, \dots, A_k$ нь $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ -ийн хувьд $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ байх m элементтэй олонлогууд (m -олонлогууд гэдэг) бол $k \leq C_{n-1}^{m-1}$ байна.

Баталгаа. $1, 2, \dots, n$ тоонуудыг тойрог дээр байрлуулсан байршуулалтыг цикл сэлгэмэл гээ. Эдгээрийн нийт тоо нь $(n-1)!$. Хэрэв A олонлогийн элементүүд нь ямар нэг π цикл сэлгэмлийн хувьд π -ийн дараалсан (цагийн зүүний дагуу) элементүүд болж байвал түүнийг π -ийн хувьд дараалсан гээ ((A, π) гэж тэмдэглэж байя). Одоо нийт (A, π) хосуудын тоо s -ийг олъё, энд A нь

$A_1, A_2, \dots, A_k$ -үүдийн нэг байна. Цикл бүр дээр хамгийн ихдээ m ширхэг л A_i олонлог байж болно. Учир нь π дээр байгаа X_x (x элементээс эхэлсэн) m -олонлог нь π дээрх өөр $2m-2$ ширхэг m -олонлогтой огтлолцоно. Гэтэл i' -ээс эхэлсэн $X_{i'}$ олонлог нь i -ээс эхэлсэн X_i олонлогтой үл огтлолцох (учир нь $2m \leq n$) тул эдгээрийн нэг нь л A_i олонлогуудын нэг байж чадах тул өгөгдсөн олонлогуудаас хамгийн ихдээ $1+m-1$ ширхэг олонлог л цикл дээр байна ($m+1+m > n$ байсан бол заавал $X_{i'} \cap X_i \neq \emptyset$ байна). Иймд $s \leq m(n-1)!$ байна. Нөгөө талаас A_i бүр нь яг $|A_i|!(n-|A_i|)!$ цикл сэлгэмэлтэй хос үүсгэх тул $s = k \cdot m!(n-m)!$. Эндээс



$$k \cdot m!(n-m)! \leq m(n-1)! \Rightarrow k \leq \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} = C_{n-1}^{m-1}$$

Теорем ёсоор бодлогын нөхцлийг хангасан m -олонлогийн тоо нь C_{n-1}^{m-1} , $m-1$ олонлогийн тоо нь C_{n-1}^{m-2} -ээс хэтрэхгүй тул нийтдээ $C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m-2} = C_{n-1}^{m-1}$ -ээс хэтрэхгүй.

ДБ-ВЗ. Олимпиадын аврага Увсын Р.Одгэрэлийн бодолтыг толилуулъя. $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ байг.

$$\mathbb{Z}_n^r = \mathbb{Z}_n \Leftrightarrow f : x \in \mathbb{Z}_n \longrightarrow x^r \in \mathbb{Z}_n \text{ инъектив буулгалт} \Leftrightarrow$$

$a \neq b \in \mathbb{Z}_n$ бол $a^r \neq b^r(n) \xrightarrow{MKI, III, §3.9} a^r \equiv b^r(n)$ бол $a \equiv b(n) \Leftrightarrow$

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} a^r \equiv b^r(p_i^{\alpha_i}) \\ i = \overline{1, k} \end{array} \right\} \text{ бол } \left\{ \begin{array}{l} a \equiv b(p_i^{\alpha_i}) \\ i = \overline{1, k} \end{array} \right\}} \quad (1) \quad (*) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} n = p_1 \dots p_k \\ (\varphi(n), r) = 1 \end{array} \right\} \quad (2)$$

(*)-г баталъя.

$\Rightarrow: \alpha \geq 2$ бол $p^{(\alpha-1)r} \equiv 0^{(\alpha-1)r} = 0(p^\alpha)$, учир нь $(\alpha-1)r \geq 2(\alpha-1) = 2\alpha-2 \geq \alpha + (\alpha-2) \geq \alpha$. Иймд (1) ёсоор $p^{\alpha-1} \equiv 0^{\alpha-1}(p^\alpha)$ гэж гарах ёстой, гэтэл $\mathbb{Z}_{p^\alpha}$ -д $p^{\alpha-1} \not\equiv 0(p^\alpha)$ байгаа. Иймд $\alpha = 1$, ө.х. $n = p_1 \dots p_k$ болов. $\varphi(n) = \prod (p_i - 1)$ тул $(p-1, r) = d > 1$ гээ. $x^{\frac{p-1}{d}} \equiv 1(p)$ тэгшитгэл $\mathbb{Z}_p$ -д яг $\frac{p-1}{d}$ язгууртай ба $\frac{p-1}{d} < p-1$ тул $\exists x_0 \in \mathbb{Z}_p^*$, $x_0^{\frac{p-1}{d}} \not\equiv 1(p)$. $y_0 \Leftrightarrow x_0^{\frac{p-1}{d}}$ гэвэл Фермагийн теоремоор $y_0^d \equiv 1(p)$ ба $d|r$ тул $y_0^r \equiv 1 \equiv 1^r(p)$ болно. Иймд (1) ёсоор $y_0 \equiv 1(p)$ гэж гарах ёстой, гэтэл энэ нь $y_0 = x_0^{\frac{p-1}{d}} \not\equiv 1(p)$ гэж өгсөнд зөрчинө. Үүгээр $(\varphi(n), r) = 1$ боллоо.

$\Leftarrow: (2)$ биелж байгаа тул (1)-д α_i бүр 1-тэй тэнцүү байгаа ба $\exists x, y \in \mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$, $x^r \equiv y^r(p)$ байг. $(p-1, r) = 1$, $\exists u, v \in \mathbb{Z}$, $u(p-1) + r \cdot v = 1$ болно. $x^{rv} \equiv y^{rv}(p)$ ба Фермагийн теоремоос $x^1 = x^{rv+(p-1)u} \equiv y^{rv+(p-1)u} = y^1(p)$ буюу $x \equiv y(p)$. Хэрэв $x = 0$ бол $0^r \equiv x^r \equiv y^r(p)$ -ээс $y \equiv 0$, ө.х. $x \equiv y(p)$ болов. Ө.х. аль ч тохиолдолд (1) биелэв.

Тэмдэглэл. $\mathbb{Z}_n^{*r} = \mathbb{Z}_n^* \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = p \\ (\varphi(n), r) = 1 \end{array} \right\}$ байдгийг ММО-36 пувралын 81-р хуудаснаас үзнэ үү.

ОУМО-44, I СОРИЛ

Б.Баяржаргал

1. $ABCDEF$ зургаан өнцөгт тойрог багтаана. AB, BC, CD, DE, EF, FA талууд тойргийг харгалзан G, H, K, L, M, N цэгүүдэд шүргэнэ. $GK \cap HL = X$, $KM \cap LN = Y$, $LN \cap MG = Z$ бол CX, EY, AZ шулуунууд 1 цэгт огтлолцохыг батал.

2. $d|n!$ ба $d < n!$ бол $b|n!$, $(d + b)|n!$ байх b гэсэн натурал тоо олдохыг батал.

3. $f(x) \in \mathbb{R}^+[x]$, $\deg f(x) = k$.

$$\begin{aligned} x_2 \cdot \frac{f(x_1)}{x_1^k} + \dots + x_n \cdot \frac{f(x_{n-1})}{x_{n-1}^k} + x_1 \cdot \frac{f(x_n)}{x_n^k} &\geq \\ &\geq x_1 \cdot \frac{f(x_2)}{x_2^k} + \dots + x_{n-1} \cdot \frac{f(x_n)}{x_n^k} + \dots + x_n \cdot \frac{f(x_1)}{x_1^k} \end{aligned}$$

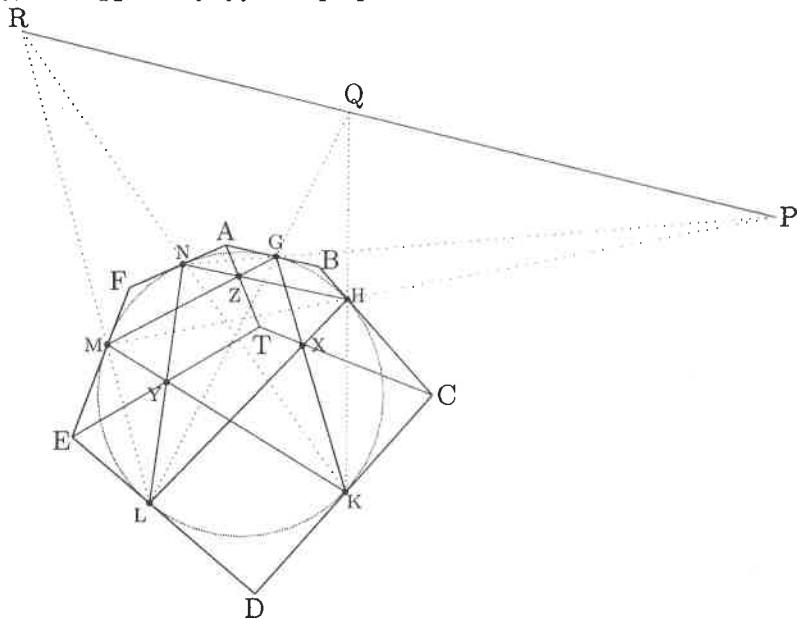
1. А цэгийн поляр шулуун нь $P \in (NG) \Rightarrow A \in \ell_P$ мөн $Z \in \ell_P \Rightarrow \ell_P = (AZ)$. Үүний адилаар $\ell_Q = (CX)$, $\ell_R = (EY)$ болно. $N = (1)$, $G = (2)$, $H = (5)$, $K = (6)$, $L = (3)$, $M = (4)$ гэж дугаарлавал Паскалийн теорем ёсоор

$$(12) \cap (45) = (NG) \cap (MH) = P$$

$$(23) \cap (56) = (LG) \cap (HK) = Q$$

$$(34) \cap (61) = (LM) \cap (NK) = R$$

P, Q, R цэгүүд 1 шулуун дээр оршино.



$(AZ) \cap (CX) = T$ гэе. Тэгвэл $\left. \begin{array}{l} T \in (AZ) = \ell_P \\ T \in (CX) = \ell_Q \end{array} \right\} \Rightarrow \ell_T = (PQ) \ni R \Rightarrow (EY) = \ell_R \ni T \Rightarrow EY, AZ, CX$ -үүд 1 цэгт огтлолцоно.

2. $dk = n!$ байг. $k > 1$, $k = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}$ ба $p_1 < \dots < p_s$ байг. Тэгвэл $(p_1 - 1) | d$ байна. Яагаад гэвэл $n! = q_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot q_k^{\beta_k}$ ба $q_i \leq n$, $i = \overline{1, k}$ болно. Иймд $(q_i - 1) < n \Rightarrow (q_i - 1) | n!$. Иймд $(p_1 - 1) | n! = k \cdot d$ ба $(p_1 - 1) \nmid k$ ба $(p_1 - 1, k) = 1$ юм. Иймд $(p_1 - 1) | d \Rightarrow b = \frac{d}{p_1 - 1}$ гэе.

$$b | n!, a + b = \frac{d}{p_1 - 1} + d = \frac{p_1 \cdot d}{p_1 - 1} | n! = d \cdot k \text{ батлагдав.}$$

3. n -ээр индукцлэе.

$n = 3$ үед

$$x_2 \cdot \frac{f(x_1)}{x_4^k} + x_3 \cdot \frac{f(x_2)}{x_2^k} + x_1 \cdot \frac{f(x_3)}{x_3^k} \geq x_1 \cdot \frac{f(x_2)}{x_2^k} + x_2 \cdot \frac{f(x_3)}{x_3^k} + x_3 \cdot \frac{f(x_1)}{x_1^k}$$

$$\frac{f(x)}{x^k} = \frac{\sum_0^k a_i x^i}{x^k} = \sum_0^k a_i x^{i-k} = g(x) \text{ гэе } (x \in (0; +\infty)). \quad g'(x) =$$

$$\sum_0^{k-1} a_i (i - k) x^{i-k-1}, \quad g''(x) = \sum_0^{k-1} a_i (i - k)(i - k - 1) x^{i-k-2} \Rightarrow g(x) \text{ нь } (0; +\infty) \text{ дээр хотгор юм. } x_1 > x_2 > x_3$$

$$\frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} g(x_1) + \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} g(x_3) \geq g(x_2)$$

$\alpha_1 = \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3}$, $\alpha_2 = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3}$ гэвэл $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ болно. $g(x)$ нь $(0; +\infty)$ дээр хотгор тул Йенсений тэнцэл биш ашиглая.

$$\frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} g(x_1) + \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} g(x_3) \geq g\left(\frac{x_1(x_2 - x_3) + x_3(x_1 - x_2)}{x_1 - x_3}\right) = g(x_2)$$

индукцийн үндэс батлагдав.

$n \rightarrow n+1$ шилжье.

$$\begin{aligned} x_2g(x_1) + x_3g(x_2) + \dots + x_ng(x_{n-1}) + x_{n+1}g(x_n) + x_1g(x_{n+1}) &\geq \\ x_2g(x_1) + \dots + x_ng(x_{n-1}) + x_1g(x_n) + x_{n+1}g(x_n) + x_1g(x_{n+1}) - x_1g(x_n) &\geq \\ x_1g(x_2) + \dots + x_{n-1}g(x_n) + x_ng(x_1) + x_{n+1}g(x_n) + x_1g(x_{n+1}) - x_1g(x_n) &\geq \\ x_1g(x_2) + \dots + x_{n-1}g(x_n) + x_ng(x_{n+1}) + x_{n+1}g(x_1) &\Leftrightarrow x_ng(x_1) + \\ x_{n+1}g(x_n) + x_1g(x_{n+1}) - x_1g(x_n) &\geq x_ng(x_{n+1}) + x_{n+1}g(x_1) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{x_n - x_{n+1}}{x_1 - x_{n+1}}g(x_1) + \frac{x_1 - x_n}{x_1 - x_{n+1}}g(x_{n+1}) \geq g(x_n)$$

Энд Йенсений тэнцэл биш ашиглая.

$$\begin{aligned} \frac{x_n - x_{n+1}}{x_1 - x_{n+1}}g(x_1) + \frac{x_1 - x_n}{x_1 - x_{n+1}}g(x_{n+1}) &\geq \\ &\geq g\left(\frac{x_n - x_{n+1}}{x_1 - x_{n+1}} \cdot x_1 + \frac{x_1 - x_n}{x_1 - x_{n+1}} \cdot x_{n+1}\right) = g(x_n) \end{aligned}$$

болж индукцийн шилжилт батлагдав.

ОУМО-44, II сорил

Б.Сандагдорж

1. Ялгаатай v элементийг ялгаатай v хайрцагт, хайрцаг бүр ялгаатай k элементтэй, элемент бүр яг ялгаатай k хайрцагт ордог ба аль ч ялгаатай хоёр элемент нь цугтаа λ хайрцагт ордог байхаар байрлуулжээ. Хэрэв v тэгш тоо бол $k - \lambda$ нь бүтэн квадрат болно гэж батал.
2. ABC гурвалжинд P, Q, R цэгийг $P \in [AB], R \in [BC], Q \in [PR]$ байхаар авав. Тэгвэл $\sqrt[3]{S_{ABC}} \geq \sqrt[3]{S_{APQ}} + \sqrt[3]{S_{QRC}}$ батал.
3. n оройтой гүйцэд графийн бүх ирмэгийг 3 өнгөөр будсан. $\frac{n}{2}$ -ээс багагүй орой агуулж нэг өнгийн холбоост дэд граф олдохыг батал.

1. Энэхүү бодлогын элементар баталгааг хийж чадаагүй байгаа болно. Үүний тулд дээд математикийн аппарат ашигласан баталгааг энд бичье.

ТОДОРХОЙЛОЛТ. Ялгаатай v элементийг b блокод, блок бүр ялгаатай k элементтэй, элемент бүр яг r ялгаатай блокод агуулагдах ба ялгаатай a_i, a_j элемент нь цугтаа λ блокод ордог бол үүнийг гүйцэд биш блок схем гэж (уравновешенной неполной блок схемой) нэрлэнэ.

Иймээс блок схем гэдэг нь олонлогийн ямар нэг дэд олонлогууд болно. Жишээ нь: $v = 9, b = 12, k = 3, r = 4, \lambda = 1$ байх блок схемийг байгуулъя.

$$\begin{array}{llll} B_1: 1;2;3. & B_4: 1;4;7. & B_7: 1;5;9. & B_{10}: 1;6;8. \\ B_2: 4;5;6. & B_5: 2;5;8. & B_8: 2;6;7. & B_{11}: 2;4;9. \\ B_3: 7;8;9. & B_6: 3;6;9. & B_9: 3;4;8. & B_{12}: 3;5;7. \end{array}$$

Блок схемийн 5 параметрийн хооронд дараах хоёр харьцаа биелнэ.

$$b \cdot k = v \cdot r \quad (1)$$

$$r(k-1) = \lambda(v-1) \quad (2)$$

(1) тэнцэл нь b блок бүр яг k элементийг агуулах ба v элемент бүр яг r блокод агуулагдана гэдгээс гарна.

(2) тэнцэл нь сонгож авсан a_1 элементийн хувьд a_1 элемент r блокод харъяалагдах ба бусад $k-1$ элементтэй хосуудыг үүсгэнэ, нөгөө талаас a_1 элемент үлдсэн $v-1$ бүх элементүүдтэй λ хосыг үүсгэнэ.

Блок схемтэй холбогдох өөртэй нь инцидент матрицыг байгуулъя.

Хэрэв $a_1, a_2, \dots, a_v$ элементүүд, $B_1, B_2, \dots, B_b$ блокууд бол $A = (a_{ij})$ $i = \overline{1, v}, j = \overline{1, b}$ инцидент матрицыг

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{хэрэв } a_i \in B_j \\ 0, & \text{хэрэв } a_i \notin B_j \end{cases} \quad (3)$$

гэж тодорхойлъё. Блок схемийн хувь дахь матрицын үржвэрийг бичвэл:

$$A \cdot A^T = B = \begin{pmatrix} r & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \dots & \lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & r \end{pmatrix} \quad (4)$$

болно. Энд A^T нь A матрицын хөрвүүлсэн матриц, B нь $v \cdot v$ хэмжээтэй квадрат матриц. B матрицын b_{ij} элемент нь A матрицын i ба j -р мөрийн скаляр үржвэртэй тэнцүү. Тэгэхлээр $b_{ii} = r$, энэ нь A -ийн i -р мөрийн 1-ийн тоо болно. Хэрэв $i \neq j$ бол i ба j -р мөрийн t -р багана 1 байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь a_i ба a_j элементүүд хоёулаа B_t -д харъяалагдах явдал. Тэгэхлээр B матрицын диагоналийн биш b_{ij} элемент нь a_i ба a_j хос элементүүдийн тоо болно. Энэ тоо λ -тай тэнцүү.

Хэрэв $v = b$ (тэгэхлээр $k = r$) байвал уг блок схемийг симметр блок схем гэнэ.

Одоо (4)-т тодорхойлогдсон B матрицын тодорхойлогчийг бодъё. Квадрат матрицын тодорхойлогч гэж мөр багана бүрээс нэг нэг элементийг сонгон авч үржүүлж тэмдэгтэйгээр авсан алгебр нийлбэрийг хэлнэ.

(4) матрицын 1-р мөрийг $2, 3, \dots, v$ -р мөрөөс хасъя. Үүссэн матрицын хувьд $2, 3, \dots, v$ -р баганыг 1-р багана дээр нэмье. Үүний үр дүнд гол диагоналиас доор орших бүх элементүүд тэгтэй тэнцэх ба гол диагоналийн эхний элемент нь $r + (v - 1)\lambda$, харин бусад элементүүд нь бүгд $r - \lambda$ байна. Иймээс

$$\det B = (r - \lambda)^{v-1}(v\lambda - \lambda + r) \quad (5)$$

байна.

Дээрх үр дүнгээс дараах теоремийг томъёолж болох нь ээ.

ТЕОРЕМ. Хэрэв симметр блок схемд v нь тэгш тоо бол $k - \lambda$ нь бүтэн квадрат байна.

Баталгаа. $v = b$ учир (3)-аар тодорхойлогдох A матриц нь квадрат матриц байна. Нөгөө талаас $\det A = \det A^T$ байдаг. Тэгэхлээр (5) нь

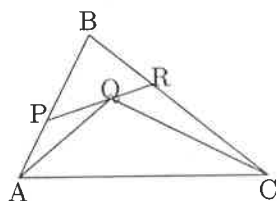
$$(\det A)^2 = \det B = (k - \lambda)^{v-1}(v\lambda - \lambda + k) \quad (6)$$

хэлбэртэй болно. A матрицын тодорхойлогч бүхэл тоо учир (6)-ийн баруун гар тал нь бүтэн квадрат байна. Симметр блок схемийн хувьд (2) нь $k(k - 1) = \lambda(v - 1)$ буюу $k^2 = k + v\lambda - \lambda$ байна.

Эндээс $\det b$ -ийн нөгөө үржигдэхүүн $(k - \lambda)^{v-1}$ тоо бүтэн квадрат болоход хүрнэ. v тэгш тоо учир $k - \lambda$ нь бүтэн квадрат болж теорем батлагдаж бодлого бодогдов.

Энэ теоремийн баталгаанаас харахад (1), (2) харьцаа биелнэ гэдгээс уг блок схем оршин байх зайлшгүй нөхцөл болохгүй. Жишээ нь $v = b = 22$, $K = 2 = 7$, $\lambda = 2$ үед (1), (2) нөхцлийг хангах ба (хэрэв энэ схем оршдог бол) блок схем нь симметр байх байсан. Гэтэл $v = 22$ тэгш, харин $k - \lambda = 5$ квадрат биш тул ийм схем оршихгүй.

2. Гурвалжнуудын талбайн дараах харьцаануудыг бичиж болно. $\frac{S_{APQ}}{S_{ABC}} = \frac{S_{APQ}}{S_{APR}} \cdot \frac{S_{APR}}{S_{ABR}} \cdot \frac{S_{ABR}}{S_{ABC}} = \frac{PQ}{PR} \cdot \frac{AP}{AB} \cdot \frac{BR}{BC}$ буюу



$$\sqrt[3]{\frac{S_{APQ}}{S_{ABC}}} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{PQ}{PR} + \frac{AP}{AB} + \frac{BR}{BC} \right) \text{ байна.}$$

$$\frac{S_{QRC}}{S_{ABC}} = \frac{S_{QRC}}{S_{PRC}} \cdot \frac{S_{PRC}}{S_{PCB}} \cdot \frac{S_{PCB}}{S_{ACB}} = \frac{RQ}{PR} \cdot \frac{CR}{BC} \cdot \frac{BP}{AB}$$

$$\text{буюу } \sqrt[3]{\frac{S_{QRC}}{S_{ABC}}} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{RQ}{PR} + \frac{CR}{BC} + \frac{BP}{AB} \right) \text{ болох}$$

$$\text{ба } AP + BP = AB, PQ + QR = PR, BR +$$

$$RC = BC \text{ учир } \sqrt[3]{\frac{S_{APQ}}{S_{ABC}}} + \sqrt[3]{\frac{S_{QRC}}{S_{ABC}}} \leq 1 \text{ болж бодлого бодогдлоо.}$$

3. Бодлогын нөхцлийг хангасан нэг өнгийн дэд граф олддоггүй байг. Боломжит хамгийн их оройтой нэг өнгийн холбоост графыг G_1 гэе. G_1 -ийн ирмэгүүд улаан өнгөөр будагдсан гээд G_1 -ийн оройн оройнуудын олонлог A_1 гэе. $x \in A_1$, $y \notin A_1$ байг. Тэгвэл xy ирмэг улаан өнгөөр будагдаагүй. Учир нь xy ирмэг улаан өнгөтэй бол G_1 -ээс их орой агуулсан нэг өнгийн холбоост $G_1 \cup xy$ дэд граф олдоход хүрнэ. xy ирмэгийг цэнхэр өнгөөр будсан гээд xy ирмэгийг агуулсан бүх ирмэг нь цэнхэр өнгөөр будагдсан хамгийн их оройтой холбоост графыг G_2 гэе. G_2 -ын оройнуудын олонлог A_2 байг. $A_1 \cap A_2 = A_{12}$, $A_{10} = A_1 \setminus A_2$, $A_{20} = A_2 \setminus A_1$, $A_{00} = A \setminus (A_1 \cup A_2)$ гэж тэмдэглэе. Энд A нь анхны графын оройнуудын олонлог. A_{12} , A_{10} , A_{20} , A_{00} олонлогууд хоосон биш. Учир нь $x \in A_{12}$, $y \in A_{20}$ тул $A_{12} \neq \emptyset$, $A_{20} \neq \emptyset$. $A_{10} = \emptyset$ бол $A_1 = A_{12} \subset A_2$ ба $A_1 \neq A_2$, өөрөөр хэлбэл $\text{Card}(A_2) > \text{Card}(A_1)$ болж G_1 -ийн сонголтонд харшилна.

$\text{Card}(A_1) < \text{Card}\left(\frac{A}{2}\right)$, $\text{Card}(A_2) < \text{Card}\left(\frac{A}{2}\right)$ тул $\text{Card}(A_1 \cup A_2) < \text{Card}A$ болж $A_{00} \neq \emptyset$. Аливаа $z \in A_{12}$ ба $t \in A_{00}$ хувьд zt ирмэг улаан ч, цэнхэр ч өнгөөр холбогдоогүй. Тэгэхлээр ийм бүх ирмэгүүд хөхөөр холбогдсон гээ. $A_{00} \cup A_{12}$ оройнуудын олонлог хөх өнгийн холбоост дэд графыг үүсгэнэ. Мөн $u \in A_{10}$, $v \in A_{20}$ оройнууд хөх өнгөөр холбогдоно. Иймээс $A_{10} \cup A_{20}$ оройнуудын олонлог хөх өнгийн холбоост дэд граф үүсгэнэ. Нөгөө талаас $A_{10} \cup A_{20}$ ба $A_{12} \cup A_{00}$ олонлогуудын нэгдэл A гарах тул эдгээрийн нэг нь $\frac{n}{2}$ -ээс багагүй элемент агуулна. Бодлого бодогдов.

ОУМО-44, III СОРИЛ

Т.Баасанжав, Б.Нямцэрэн

1. Эерэг бүхэл $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -үүдийн хувьд $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ ба $x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = 2n - 2$ бол $x_1 + 4x_2 + 9x_3 + \dots + n^2x_n$ -ийн хамгийн их утгыг ол.
2. O цэгт төвтэй тойргийн AB диаметрийг M цэгт огтлох CD хөвч татав. ($MB < MA$, $MD < MC$) $\triangle AOC$, $\triangle BOD$ -г багтаасан тойргуудын огтлолцлын цэг K бол $OK \perp KM$ гэж батал.
3. $a, b > 2$ байх өгөгдсөн N тоонууд. Тэгвэл $n_1 = a$, $n_k = b$, $(n_i + n_{i+1}) \mid n_i n_{i+1}$ байх ($i = \overline{1, k-1}$) $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ төгсгөлөг дараалал олдохыг батал.

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \sum_{k=1}^n k^2 x_k = n \cdot \sum_{k=1}^n k x_k - \sum_{k=1}^n k(n-k) x_k = n(2n-2) - \sum_{k=1}^n k(n-k) x_k \\
 & k) x_k \leq n(2n-2) - \sum_{k=1}^n 1 \cdot (n-1) x_k = n(2n-2) - (n-1)n = n^2 - n \\
 & \text{ба энд } (k(n-k) \geq 1(n-1) \text{ нь илэрхий) } x_1 = n-1, x_{n-1} = 1 \\
 & \text{ба } x_2 = x_3 = \dots = x_{n-2} = x_n = 0 \text{ үед } \sum_{k=1}^n k^2 x_k = n^2 - n \Rightarrow \\
 & \max\left(\sum_{k=1}^n k^2 x_k\right) = n^2 - n \text{ болно.}
 \end{aligned}$$

2. $\angle DBO = \beta$, $\angle ACO = \alpha$. Тэгвэл $\angle OKC = 180^\circ - \alpha$, $\angle OKB = 180^\circ - \beta$ болох ба $\angle BKC = \alpha + \beta$ болно. $\angle BMC = \angle MAC + \angle MCA = \alpha + \angle DBA = \alpha + \beta \Rightarrow B, C, K, M$ цэгүүд 1 тойрог дээр оршино. Иймд $\angle MKB = \angle MCB = \angle DCB = 90^\circ - \angle MCA = 90^\circ - \beta$ болно. $\Rightarrow OKB = 180^\circ - \beta \Rightarrow \angle OKM = 90^\circ$ болж батлагдав.

3. $a = a_1, \dots, b = a_t, a_i + a_{i+1} \mid a_i a_{i+1}, i = \overline{1, t-1}$ байх $\mathbb{N}$ тоон дараалал олддог бол $a \sim b$ гэе. $a \sim b$ бол $b \sim a$ нь илэрхий юм. $2m \sim 2m + 2$ болохыг харуулъя. $b_1 = 2m, b_2 = 2m^2 - 2m, b_3 = 2m^2 + 2m, b_4 = 2m + 2$ гэвэл $\frac{b_2 b_1}{b_2 + b_1} = 2m - 2, \frac{b_3 b_2}{b_3 + b_2} = m^2 - 1, \frac{b_3 b_4}{b_3 + b_4} = 2m \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2m \sim 2m + 2$ болно. $\Rightarrow \forall m, k$ хувьд $2m \sim 2k$ болно. $a \sim a^2 - a$ ба $b \sim b^2 - b$ тул $a^2 - a, b^2 - b$ нь тэгш $\Rightarrow a \sim b$ болно.

ОУМО-44, IV сорил

Ц.Даншдорж

1. Хоёртын тооллын систем дэх бичлэг нь дараалсан 3 ижил цифр агуулахгүй ба $4 \leq n \leq 1023$ байх бүх n тоонуудын тоог ол.
2. $A = \{a_1, \dots, a_9\} \subseteq \mathbb{N}$ нь $\forall n \leq 500$ -ийн хувьд $\exists B \subseteq A, \sum_{b \in B} b = n$ бол ийм байх бүх A -ийн тоог ол.
3. ДБ-А1, IV давааг үз.

1. $n \geq 3$ үед a_n -ээр дараалсан 3 адил цифр агуулаагүй n урттай $0, 1$ үгийн тоог тэмдэглэе. $a, b \in \{0, 1\}$ -ийн хувьд x_{ab}^n -ээр ab -ээр төгссөн a_n -ийн үгийн тоог тэмдэглэе. Тэгвэл $n \geq 5$ үед $x_{00}^n = x_{10}^{n-1}, x_{01}^{n-1} + x_{10}^{n-1}, x_{10}^n = x_{11}^{n-1} + x_{01}^{n-1}, x_{11}^n = x_{01}^{n-1}$ байх нь илэрхий. Эдгээрийг нэмбэл $a_n = a_{n-1} + x_{10}^{n-1} + x_{01}^{n-1} = a_{n-1} + a_{n-2}$ болно. $a_3 = 3, a_4 = 5$ учир $a_5 = 8, a_6 = 13, a_7 = 21, a_8 = 34, a_9 = 55, a_{10} = 89$. Бидний олбол зохих тоо $a_3 + a_4 + \dots + a_{10} = 228$ болно.

2. $A = \{1, 2, \dots, 2^8\}$ -ийн дэд олонлог B -ээр $2^9 - 1 = 511 \geq n$ байх n бүрийг дүрсэлж болно. A -д $x = y + z$ байх x, y, z элемент байдаг бол $B \cup \{x\}$, $B \cup \{y, z\}$ олонлогууд нь $x, y, z \notin B$ байх $B \subseteq A$ дэд олонлог бүрийн хувьд адил нийлбэрийг өгнө. Ийм B -г сонгох боломж 2^6 ба $511 - 2^6 = 447$ тул тийм A олонлог нь хамгийн ихдээ 447 ялгаатай нийлбэрийг л өгнө. Яг үүний адилаар A -д $x = y + z + t$, $x = y + z + s + t$ байх элементүүд байж үл болох нь гарна. $1 \in A$, $2 \in A$ байх нь илэрхий ба $3 = 1 + 2$ тул $3 \notin A$. Иймд $4 \in A$. $1, 2, 4$ -г ашиглан $2^3 - 1 = 7$ -оос үл хэтрэх нийлбэрийг гаргаж авна. Иймд $8 \in A$. $1, 2, 4, 8 \in A$ тул $1, 2, \dots, 15$ -г гаргаж авч чадна. Иймд $16 \in A$. $1, 2, 4, 8, 16$ -аар $\overline{1, 31}$ -г гаргаж авах ба $31 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16$ гэсэн 5 элементийн нийлбэр болж байгаа тул $31 \in A$ байж болно. Иймд $a_6 = 32 - a$, $a = 0 \vee 1$. $\{1, 2, 4, 8, 16, 32 - a\}$ нь $1, 2, 3, \dots, 31, 32 - a, 32 - a + 1, \dots, 63 - a$ -г өгнө. Иймд A -ийн дараагийн элемент нь $a_7 = 64 - a - b$, $b = 0, 1, 2$ хэлбэртэй байна. $\{1, 2, 4, 8, 16, 32 - a, 64 - a - b\}$ нь $1, 2, 3, \dots, 63 - a, 64 - a - b + 1, \dots, 127 - 2a - b$ -үүдийг өгнө. Иймд A -ийн элемент нь $a_8 = 128 - 2a - b - c$, $c \geq 0$ байна. $a_9 = 256 - 4a - 2b - c - d$ байна. A -аас гаргаж болох элементүүд нь $1, 2, \dots, 511 - 8a - 4b - 2c - d$. $511 - 8a - 4b - 2c - d \geq 500 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d \leq 11$.

$a = 0$ үед $b = 2$ бол 6 шийд, $b = 1$ бол 20 шийд, $b = 0$ бол 42 шийд.

$a = 1$ үед $b = 0$, $2c + d \leq 3$ үед 6 шийд нийт 74 шийд.

Олон Улсын Математикийн XLIV

Олимпиадад оролцсон тухай

Ц.Дашдорж

ОУМО-XLIV 2003.07.07-19-нд Японы Токиод болж өнгөрлөө. Дэлхийн 83 орон оролцсон энэ Олимпиадад Болгар 227, Хятад 211, АНУ 188, Вьетнам 172, Орос 167, Өмнөт Солонгос 157, Румын 143, Англи 128, Казакстан 119, Украин 118 оноогоор эхний 10 байранд шалгарлаа.

Манай улсаас

1. С.Сайнбаяр	(I сургууль, 9-р анги)	24 оноо	мөнгө
2. Ц.Гэрэлт	(I сургууль, 9-р анги)	18 оноо	хүрэл
3. Х.Сайнжаргал	(I сургууль, 9-р анги)	16 оноо	хүрэл
4. Г.Энхтайван	(Байгаль-Эх, 10-р анги)	16 оноо	хүрэл
5. А.Ганбат	(I сургууль, 9-р анги)	11 оноо	
6. Н.Энхбаясгалан	(Номун, 9-р анги)	8 оноо	

медаль авч багийн дүнгээр 93 оноогоор 25-р байранд орлоо.

Багийн орлогч удирдагчаар Монгол улсын аварга багш "Эхлэл" сургуулийн захирал А.Энхжаргал явлаа

ОУМО-XLV Грекийн Афинд 2004.07.06-18-нд болно.

ОУ-1 (Бразил). $S = \{1, 2, \dots, 1000000\}$ -ийн яг 101 элемент бүхий дэд олонлог нь A байг. $j = 1, 2, \dots, 100$ үед $A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}$ олонлогууд хос хосоороо үл огтлолцдог байхаар S дотор $t_1, \dots, t_{100}$ тоонууд олдохыг батал.

ОУ-2 (Болгар). $\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$ натурал тоо байхаар бүх натурал хос (a, b) -г ол.

ОУ-3 (Польш). Өгсөн гүдгэр зургаан өнцөгтөд аль ч хоёр эсрэг тал нь дараах чанартай. Тэдний дундаж цэгүүдийн хоорондох зай нь тэдний уртын нийлбэрээс $\frac{\sqrt{3}}{2}$ дахин их. Тэгвэл зургаан өнцөгтийн бүх өнцгүүд тэнцүү гэж батал.

ОУ-4 (Финлянд). $ABCD$ нь багтсан дөрвөн өнцөгт байг. D цэгээс BC, CA, AB шулуунуудад босгосон перпендикулярын суурь нь харгалзан P, Q, R байг. $PQ = QR$ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\angle ABC, \angle ADC$ -ийн биссектрисүүд AC дээр огтлолцохыг батал.

ОУ-5 (Ирланд). n натурал тоо ба $x_1, \dots, x_n$ нь $x_1 \leq \dots \leq x_n$ байх бодит тоонууд байг.

а) $\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \right)^2 \leq \frac{2(n^2 - 1)}{3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2$ гэж батал.

б) Тэнцэл биелэх зайдшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $x_1, \dots, x_n$ арифметик прогресс гэж батал.

ОУ-6 (Франц). p анхны тоо байг. Ямар ч бүхэл тоо n -ийн хувьд $n^p - p$ тоо q -д үл хуваагддаг байхаар анхны тоо q олдохыг үзүүл.

ОУ-1 (Бодолт 1). $D = \{x - y \mid x, y \in A\}$ гэвэл $|D| \leq 101 \cdot 100 + 1 = 10101$. $A_i \cap A_j \neq \emptyset \Leftrightarrow t_i - t_j \in D$.

Одоо энэ элементүүдийг индукцээр сонгож авъя. Нэг элементийг дураараа сонгоё. k ($k \leq 99$) элемент сонгогдсон байг. Урьд сонгогдсон x элемент $x + D$ олонлогоос элемент авахыг хориглоно. Иймд k ширхэг элемент сонгогдсон бол хамгийн ихдээ $10101k \leq 999999$ ширхэг элемент сонголтоос хасагдахын тул дахин нэг элементийг сонгож чадаж байна.

Тэмдэглэл. $|S| = 10^6$ нь хангалттай том тоо юм. Үнэндээ дараахь өгүүлбэр үнэн юм. $S \supseteq A$, $|A| = k$ ба $n > (m - 1)(C_k^2 + 1)$ байх натурал тоо нь m бол $\exists t_1, \dots, t_m \in S$, $A_j \cap A_i = \emptyset$, $i \neq j$.

ОУ-1 (Бодолт 2). Ерөнхийн тохиолдолд бодлогыг бодъё. $B = \{|x - y| \mid x, y \in A\}$ гэвэл $|B| \leq C_k^2 + 1$. Ялгаатай i, j бүрийн хувьд $|t_i - t_j| \notin B$ байхаар $t_1, \dots, t_m \in S$ элементүүд оршин байхыг батлахад хангалттай. $t_1, \dots, t_m$ -үүдийг индукцээр сонгож авъя. t_1 -ээр 1-ийг сонгоё. $C_1 = S \setminus (B + t_1)$ гэвэл Тэмдэглэл ёсоор $|C_1| \geq n - (C_k^2 + 1) > (m - 2)(C_k^2 + 1)$.

$1 \leq i < m$ байх i бүрийн хувьд $t_1, \dots, t_i$, C_i тодорхойлогдсон ба $|C_i| > (m - i - 1)(C_k^2 + 1) \geq 0$ байг. C_i -ийн хамгийн бага элементийг t_{m+1} -ээр сонгоод $C_{i+1} = C_i \setminus (B + t_{m+1})$ олонлогийг авч үзвэл $|C_{i+1}| \geq |C_i| - (C_k^2 + 1) > (m - i - 2)(C_k^2 + 1) \geq 0$, $t_1, \dots, t_m$ дурьдсан нөхцлийг хангах нь илэрхий.

ОУ-2. $\frac{a^2}{2ab - b^3 + 1} = k$ бол $a^2 - 2ab^2k = -b^3k + k$ -аас бүтэн квадратыг ялгаж $a^2 - 2ab^2k + b^4k^2 = b^4k^2 - 2b^2k \cdot \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} + k - \frac{b^2}{4}$
 $\Rightarrow (a - b^2k)^2 = \left(b^2k - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(k - \frac{b^2}{4}\right) \cdot 4 \Rightarrow (2a - 2b^2k)^2 = (2b^2k - b)^2 + 4k - b^2$, $2a - 2b^2k = m$ гэвэл
 1) $4k - b^2 = 0$ бол $2a - 2b^2k = \pm(2b^2k - b)$

$$1a) 2a - 2b^2k = b - 2b^2k \text{ бол } b = 2a$$

$$1б) 2a - 2b^2k = 2b^2k - b \text{ бол } 2a = 4b^2k - b.$$

b тэгш тул $b = 2n$ гэвэл $a = 8n^4 - n$.

$$2) 4k - b^2 > 0 \text{ бол } m \geq 2b^2k - b + 1 \text{ ба } 4k - b^2 = m^2 - (2b^2k - b)^2 \geq 2(2b^2k - b) + 1 \Leftrightarrow 4k(b^2 - 1) + (b - 1)^2 \leq 0 \Rightarrow b = 1, a = 2e.$$

$$3) 4k - b^2 < 0 \text{ бол } m \leq 2b^2k - b - 1 \text{ ба } 4k - b^2 = m^2 - (2b^2k - b)^2 \leq (2b^2k - b - 1)^2 - (2b^2k - b)^2 \Rightarrow 4k - b^2 \leq -2(2b^2k - b) + 1 \text{ энэ нь } b\text{-ийн хувьд шийдгүй квадрат тэнцэл биш юм.}$$

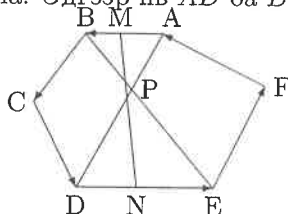
Иймд хариу нь $(a, b) = (e, 2e)$ эсвэл $(8e^4 - e, 2e)$ эсвэл $(2e, 1)$, $e \in \mathbb{N}$ гэж гарна.

ОУ-3.

ЛЕММ. ΔPQR -д $\angle QPR \geq 60^\circ$ ба L нь QR -ийн дундаж цэг бол $PL \leq \frac{\sqrt{3}}{2}QR$ байна, энд тэнцэл биелэх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь ΔPQR зөв гэж батал.

Баталгаа. ΔQRS зөв ба P, S цэгүүд нь QR шулуунаар зааглагдсан нэг хагас хавтгайд оршдог байг. Тэгвэл P цэг нь (QRS) тойрог дотор орших ба (QRS) тойрог нь L дээр төвтэй $\frac{\sqrt{3}}{2}QR$ радиустай тойрог дотор оршино. Үүгээр Лемм батлагдлаа.

Гүдгэр 6 өнцөгтийн гол диагональ (эсрэг оройг холбосон)-ууд гурвалжин үүсгэнэ (бөхсөн гурвалжин буюу цэг байж болно). Энэ 3 диагоналиас 60° -аас багагүй өнцөг үүсгэх 2-ыг сонгож чадна. Эдгээр нь AD ба BE , $\angle APB \geq 60^\circ$ гэж үзэж чадна.



M, N нь AB ба DE талын дундаж гээд Леммээ анхаарвал $MN = \frac{\sqrt{3}}{2}(AB + DE) \geq PM + PN \geq MN$ буюу эндээс $\Delta ABP, \Delta DEP$ зөв гэж гарна. Иймд CF диагональ AD ба BE -ийн аль нэгтэй нь 60° -аас багагүй өнцөг үүсгэнэ.

$\angle AQF \geq 60^\circ$ гэж үзэж чадна, энд $Q = AD \cap CF$. Саяын хийсний адилаар $\Delta AQF, \Delta CQD$ зөв гэж гарна. Эндээс $\angle BRC = 60^\circ$, энд $R = BE \cap CF$. Мөн энэ хийснийг 3 дахь удаагаа давтан $\Delta BCR, \Delta EFR$ зөв гэж гарна. Үүгээр бодлого бодогдов.

ОУ-4. Симпсоны теоремоор P, Q, R нэг шулуун дээр оршино. $\angle PDC = 90^\circ = \angle DQC$ учир D, P, Q, C -үүд нэг тойрог дээр орших ба $\angle DCA = \angle DPQ = \angle DPR$ байна. Яг үүнтэй адилаар D, Q, R, A -үүд нэг тойрог дээр орших тул $\angle DAC = \angle DRP$. Иймд $\triangle DCA \sim \triangle DPR$. Үүний адилаар

$$\triangle DAB \sim \triangle DQR, \quad \triangle DBC \sim \triangle DRQ$$

Тэгвэл $\frac{DA}{DC} = \frac{DR}{DP} = \frac{DB \cdot \frac{QR}{BC}}{DB \cdot \frac{PQ}{BA}} = \frac{QR}{PQ} \cdot \frac{BA}{BC}$. Үүгээр $PQ = QR \Leftrightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}$. $\angle ABC$ ба $\angle ADC$ -ийн биссектрисүүд нь AC талыг $\frac{BA}{BC}$ ба $\frac{DA}{DC}$ харьцаагаар хуваагдгийг анхаарвал бодлого бодогдоно.

ОУ-5. Коши-Буняковскийн тэнцэл бишээр

$$\sum_{i,j} (x_i - x_j)^2 \cdot \sum_{i,j} (i - j)^2 \geq \left(|i - j| \cdot |x_i - x_j| \right)^2 \Rightarrow$$

$$\left(\sum_{i,j} (x_i - x_j)^2 \right) \cdot \frac{n^2(n^2-1)}{6} \geq \left(|i - j| \cdot |x_i - x_j| \right)^2 \text{ болно. Иймд}$$

$$\sum_{i,j} |i - j| \cdot |x_i - x_j| = \frac{n}{2} \sum_{i,j} |x_i - x_j| \quad (1)$$

гэж үзүүлбэл бодлого бодогдоно.

(1)-ийн зүүн тал дахь x_i -ийн коэффициент нь $(i-1) + (i-2) + \dots + 1 - 1 - \dots - (n-i) = \frac{n(2i-n-1)}{2}$ -тэй тэнцүү. (1)-ийн баруун тал дахь x_i -ийн коэффициент $\frac{n}{2} \left(\underbrace{1 + \dots + 1}_{i-1} - \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n-i} \right) = \frac{n}{2} (2i - n - 1)$ -тэй тэнцүү. Коши-Буняковскийн тэнцл биш ёсоор тэнцэл биелэх $\Leftrightarrow \frac{x_i - x_j}{i - j} = \text{тогтмол} \Leftrightarrow \div \{x_i\}$ гэж гарна.

ОУ-6. $\frac{p^p-1}{p-1} \equiv p + 1(p^2)$ байх тул

$$\exists q \in P, \quad q \mid \frac{p^p - 1}{p - 1} \quad (1)$$

$q \neq 1(p^2)$. Энэ q бол бидний олох ёстой тоо мөн.

Эсрэгээс нь

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad n^p \equiv p(q) \quad (2)$$

гэе. Тэгвэл $n^{p^2} \equiv p^p \equiv 1(q)$. Нөгөө талаас Фермагийн теоремоор $n^{q-1} \equiv 1(q)$. $p^2 \nmid q-1$ тул $(p^2, q-1) \mid p$ болох тул $n^{(p^2, q-1)} \equiv 1(q)$ -ээс $n^p \equiv 1(q)$ гэж гарна. Иймд (2)-г анхаарвал $p \equiv 1(q)$ боллоо. Үүгээр $1+p+\dots+p^{p-1} \equiv p(q)$ болох тул (1)-ийг анхаарвал $p \equiv 0(q)$ гэж зөрчилд хүрнэ.

МОНГОЛЫН ОЮУТНЫ МАТЕМАТИКИЙН XI ОЛИМПИАД

Ц.Дашдорж

а) эчнээ давааны бодлогууд

I анги

1 (Ц.Дашдорж). Өгсөн $k \in \mathbb{N}$, $z_1, \dots, z_k$ ялгаатай комплекс тоонууд ба өгсөн $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{C}$ -үүдийн хувьд $\{a_n = u_1 z_1^n + \dots + u_k z_k^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ олонлог төгсгөлөг тооны элементтэй бол $\exists p \in \mathbb{N}$, $\forall n$, $a_n = a_{n+p}$ гэж батал.

2 (Ц.Дашдорж). $x_1, \dots, x_n$ суурьтай чөлөөт бүлэг A -ын

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad a_{ij} \in \mathbb{Z}$$

үүсгэгч бүхий дэд бүлэг нь B байг.

а) A/B төгсгөлт бүлэг $\Leftrightarrow \det(a_{ij}) \neq 0$ гэж батал.

б) мөн энэ үед $|A/B| = |\det(a_{ij})|$ байна гэж батал.

3 (Ц.Дашдорж). $A, B, C, D \in \mathbb{R}_n$, $\det A \neq 0$ бол

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - ACA^{-1}B) \quad (*)$$

гэж батал. Мөн

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{cases} \det(AD - CB), \text{ хэрэв } AC = CA \\ \det(DA - CB), \text{ хэрэв } AB = BA \end{cases}$$

гэж батал.

- 4 (Г.Баярмагнай). $A \in M_n(\mathbb{C})$ байг. Хэрэв $\text{rang } A = \text{rang } A^2 = m$ бол $\forall k \geq 3$ хувьд $\text{rang } A^k = m$ болохыг батал.
- 5 (Г.Баярмагнай). f олон гишүүнт, $f(0) \neq 0$ ба A нь нильпотент матриц бол $f(A)$ -г урвуутай гэж батал.
- 6 (Г.Баярмагнай). A төсгөлөг абелийн бүлэг. $A \geq B$ бол A -д A/B -тэй изоморф дэд бүлэг байхыг батал.
- 7 (Г.Баярмагнай). G бүлгийн a, b элементүүдийн хувьд $a^n = 1$ ба $aba^{-1} = b^2$ бол b -ийн эрэмбийг ол.
- 8 (Г.Баярмагнай). Хэрэв G бүлэг $H_1, H_2, \dots, H_n$ дэд бүлгүүдийн төсгөлөг тооны баруун зэрэгцээ ангиудын нэгдэлд тавигддаг бол $[G : H_i] < \infty$ байх $\exists i$ батал.
- 9 (Г.Баярмагнай). $A_5 \triangleright H$ нь ямар нэг 5 урттай цикл агуулдаг бол $H = A_5$ болохыг батал.
- 10 (Г.Баярмагнай). $|G| = \infty$, $G \geq H$ нь төсгөлөг индекстэй. H нь өөртэйгөө хосмог дэд бүлгүүдтэй нэгжээс ялгаатай элементээр огтлолцоно гэж батал.
- 11 (С.Цогзолмаа). L ба M талуудтай тэгш өнцөгтөөр зурааслагдсан хавтгай уруу ℓ периметртэй, диаметр нь $\min(L, M)$ -ээс хэтрэхгүй гүдгэр олон өнцөгтийг шидэхэд ядаж 1 шулууныг огтлох магадлалыг ол.
- 12 (Д.Пүрэвсүрэн). R^3 гурван өнгөөр будахад өгөгдсөн T гурвалжинтай конгруент бүх орой нь ижил өнгөтэй байх гурвалжин олдохыг батал.

Зарим бодлогын бодолтууд

1. (a_n) дарааллын дараалсан k тоо $\bar{a}_s = (a_s, a_{s+1}, \dots, a_{s+k-1})$ -ээс тогтох дараалал $(\bar{a}_s)$, $s = \overline{1, \infty}$ -ийг авч үзвэл $\{a_n \mid n = \overline{1, \infty}\}$

нь төгсгөлөг олонлог гэдгээс $\exists p, q \in \mathbb{N}, \bar{a}_q = \bar{a}_{q+p}$ буюу $a_q = a_{q+p}$,
 $a_{q+1} = a_{q+1+p}, \dots, a_{q+k-1} = a_{q+p+k-1} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} u_1 z_1^q(z_1^p - 1) + u_2 z_2^q(z_2^p - 1) + \dots + u_k z_k^q(z_k^p - 1) = 0 \\ u_1 z_1^{q+1}(z_1^p - 1) + u_2 z_2^{q+1}(z_2^p - 1) + \dots + u_k z_k^{q+1}(z_k^p - 1) = 0 \\ \vdots \\ u_1 z_1^{q+k-1}(z_1^p - 1) + u_2 z_2^{q+k-1}(z_2^p - 1) + \dots + u_k z_k^{q+k-1}(z_k^p - 1) = 0 \end{cases}$$

нь $x_1 = z_1^p - 1, \dots, x_k = z_k^p - 1$ үл мэдэгдэгчийн хувьд нэгэн төрлийн шугаман тэгшитгэлийн систем ба тодорхойлогч нь

$$\begin{vmatrix} u_1 z_1^q & \dots & u_k z_k^q \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1 z_1^{q+k-1} & \dots & u_k z_k^{q+k-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^k u_i z_i^q \prod_{1 \leq j < i \leq k} (z_i - z_j) \neq 0$$

тул систем зөвхөн $x_1 = \dots = x_k = 0$ гэсэн тривиал шийдтэй. Иймд $z_i^p = 1$, $i = \overline{1, k}$ болох тул $\forall n \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд $a_n = a_{n+p}$ болно.

$$2. AX = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = Y \text{ бон}$$

$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 + \lambda A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 + \lambda y_2 \end{pmatrix}$ буюу A -ийн мөрүүдийн эле-
 ментар хувиргалтад Y -ийн мөр дээр хийгдэх элементар хувиргалт
 буюу $L = \langle y_1, y_2 \rangle$ бүлгийн 1 үүсгэгчдийн системээс B -ийн өөр
 үүсгэгчдийн системд шилжих шилжилт харгалзав.

$$\langle y'_1, y'_2 \rangle, \quad y'_1 = y_1, \quad y'_2 = y_2 + \lambda y_1$$

$$\begin{pmatrix} A^{(1)} + \lambda A^{(2)} & A^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(1)} & A^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + \lambda x_1 \end{pmatrix}$$

буюу A -ийн багануудын элем. хувиргалтад X -ийн мөрүүдийн элементар хувиргалт буюу $M = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ чөлөөт абелийн бүлгийн 1 сууриас нөгөө суурьт шилжих шилжилт харгалзав. Иймд A -ийн мөр ба баганууд дээр хийгдэх I ба II төрлийн элементар хувиргалтаар түүнийг ямагт диагональ хэлбэрт шилжүүлж болно гэдэг (бодлого 8.12-13-г үз). $AX = Y$ -ээс $DX' = Y'$ -д шилжиж болно гэсэн үг, энд X' нь M -ийн ямар нэг базис, Y'

нь $L = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ дэд алгебрийн ямар нэг үүсгэгчдийн систем гэсэн үг. $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & d_r \end{pmatrix}$ бол $(d_i | d_{i+1})$ ч байдаг $d_i x'_i = y'_i$ болно гэсэн үг.

$$A/B = \bigoplus_{i=1}^n \langle x'_i \rangle / \bigoplus_{i=1}^n \langle y'_i \rangle \cong \bigoplus_{i=1}^n \langle x'_i \rangle / \langle y'_i \rangle = C$$

байхыг шууд шалгаж болох $(A \xrightarrow{\varphi} C, \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n), \varphi(a) = (\varphi_1(a_1), \dots, \varphi_n(a_n)), \varphi_i : \langle x'_i \rangle \rightarrow \langle x'_i \rangle / \langle y'_i \rangle$ жинхэнэ гомоморфизм, $\ker \varphi = B$) ба $|A/B|$ төгсгөлтэй $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ байх нь илэрхий ба $|A/B| = d_1 \dots d_n$ байх нь мөн гарна. $\det A \neq 0$ бол $\det A = \det D = d_1 \dots d_n$ байна.

3. Бодолтонд дараах 2 леммийг ашиглая.

ЛЕММ 1. $A, B, C, D, X, Y, Z, T \in \mathbb{R}_n$ бол

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} AX+BZ & AY+BT \\ CX+DZ & CY+DT \end{pmatrix}$$

байна.

ЛЕММ 2. $A, B, C \in \mathbb{R}_n$ бол $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C$ байна.

Энэ 2 леммийн баталгаа илэрхий.

$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ гэж тэмдэглэе. $S' = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ гэвэл $\det S \cdot \det S' = \det \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$ байх S' -г олъё. Энд Лемм 1-ийг хэрэглэвэл

$$\begin{cases} AX + BZ = E_n \\ CX + DZ = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CX + CA^{-1}BZ = CA^{-1} \\ CX + DZ = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} Z = (CA^{-1}B - D)^{-1} \cdot CA^{-1} \\ X = A^{-1} - A^{-1}B(CA^{-1}B - D)^{-1}CA^{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AY + BT = 0 \\ CY + DT = E_n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} CY + CA^{-1}B \cdot T = 0 \\ CY + DT = E_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = (D - CA^{-1}B)^{-1} \\ Y = -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \end{cases}$$

буюу

$$S' = \begin{pmatrix} A^{-1} - A^{-1}B(CA^{-1}B - D)^{-1} \cdot CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ (CA^{-1}B - D)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}$$

гэж олдлоо. Энэ тохиолдолд $\exists S' \Leftrightarrow \exists (D - CA^{-1}B)^{-1}$ гэдэг нь харагдаж байгаа тул хэрвээ $\exists S'$ гэвэл $\det S = 0$, $\det(D - CA^{-1}B) = 0$ болох тул (*) томъёо мөн хүчинтэй байна. $\exists S'$ гэвэл

$$\frac{1}{\det S} = \det S' = \begin{pmatrix} A^{-1} - A^{-1}B(CA^{-1}B - D)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ (CA^{-1}B - D)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}$$

II баганыг CA^{-1} -ээр баруунаас нь үржээд I багана дээр нэмбэл

$$\det \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ 0 & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix} \stackrel{\text{Лемм 2}}{=} \stackrel{\text{Лемм 2}}{\det A^{-1} \cdot \det(D - CA^{-1}B)^{-1}} = \frac{1}{\det A \cdot \det(D - CA^{-1}B)} =$$

$$= \frac{1}{\det(AD - ACA^{-1}B)} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - ACA^{-1}B)$$

болно. Эндээс мөн $AC = CA$ бол энэ томъёо нь

$$\det(AD - ACA^{-1}B) = \det(AD - CAA^{-1}B) = \det(AD - CB).$$

$AB = BA$ бол $\det(AD - ACA^{-1}B) = \det(AD - ACBA^{-1}) = \det(A^{-1}(AD - ACBA^{-1})A) = \det(DA - CB)$ болно. Үүгээр бодлого бодогдов.

4. A матрицад харгалзан n хэмжээст огторгуйн өгсөн суурь дахь шугаман хувиргалтыг π гээ. Тэгвэл A^k матрицад $\pi \circ \pi \circ \dots \circ \pi = \pi^k$ шугаман хувиргалт харгалзана $\Rightarrow \dim(\ker \pi^k) + \dim(\operatorname{Im} \pi^k) = n, \forall k \in \mathbb{N}$. $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^2 = \dim(\operatorname{Im} \pi) = \dim(\operatorname{Im} \pi^2) \Leftrightarrow \dim(\ker \pi) = \dim(\ker \pi^2)$ ба $\ker \pi \subseteq \ker \pi^2$ байхыг анхаарвал $\ker \pi = \ker \pi^2$ болно $\Rightarrow \forall k$ хувьд $\ker \pi = \ker \pi^k \Rightarrow \dim(\operatorname{Im} \pi) = \dim(\operatorname{Im} \pi^k)$ буюу $\operatorname{rank} A^k = \operatorname{rank} A$ болж бодлого бодогдоно.

5. $B^n = 0$ (*) байг. $E = E^n - B^n = (E - B)(E + B + \dots + B^{n-1})$ байх тул $E - B$ урвуутай. $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, $a_0 \neq 0$ байг. Хэрэв $A^m = 0$ байвал $B = a_n \cdot A^n + \dots + a_1 A$ матрицын хувьд $B^m = 0$ байна. Иймд (*) $\Rightarrow f(A)$ матриц урвуутай болно.

6. Төгсгөлөг абелийн тухай теоремоос гарна.

8. n -ээр нь индукцлэн баталъя. G бүлгийн хучилт дахь H_n дэд бүлгийн баруун зэрэгцээ ангиуд нь $H_n g_1, \dots, H_n g_m$ байг. Хэрэв $[G : H_n] < \infty$ биш байвал $\exists g : H_n g \cap H_n g_i = \emptyset$, $i = \overline{1, m}$ байна. $H_n g \subseteq G$ учраас $H_n g$ нь G бүлгийн $H_1, \dots, H_{n-1}$ дэд бүлгээрхи зэрэгцээ ангиудын нэгдэлд агуулагдах ба энэ нь H_n дэд бүлэг, улмаар $H_n g_1, \dots, H_n g_m$ -үүд $H_1, \dots, H_{n-1}$ бүлгүүдийн баруун зэрэгцээ ангиудын нэгдэлд орохтой адил. Үүгээр G нь $H_1, \dots, H_{n-1}$ дэд бүлгүүдийн зэрэгцээ ангиар хучигдах болж индукцээр бодлого бодогдов.

9. $\tau = (ijklm)$ нь H дэд бүлгийн 5 урттай цикл байг. $\sigma = (ik)(ij) = (ikj)$ учир $\sigma \in A_5$. $(ij\ell) = (im\ell k j)(ikj)(ijklm)(ijk) = \tau^{-1}(ijk)^{-1}\tau(ijk) \in H$ болно. Одоо дурын 3 урттай цикл $(pqr) \in H$ гэж үзүүлье. $\sigma_1 = \begin{pmatrix} i & j & \ell & k & s \\ p & q & r & t & v \end{pmatrix}$ ба $\sigma_2 = \begin{pmatrix} i & j & \ell & k & s \\ p & q & r & v & t \end{pmatrix}$ орлуулгуудын аль нэг нь тэгш орлуулга байх тул $\sigma_1 \in A_5$ гэж үзэхэд явцуурахгүй. $(pqr) = \sigma_1^{-1} \begin{pmatrix} i & j & \ell \\ j & \ell & i \end{pmatrix} \sigma_1$ байх буюу $(pqr) \in H$ болно. $(ij\ell) = (ij)(i\ell)$ ба $(ij)(k\ell) = (ijk)(i\ell k)$ байх учраас ямар ч тэгш орлуулгууд 3 урттай циклүүдээр илэрхийлэгдэнэ. Иймд $A_5 = H$ болно.

10. $a \in G$ өгсөн элемент үед $\pi : gH \rightarrow agH$ буулгалт нь H -ын зүүн зэрэгцээ ангид орлуулга тодорхойлно. Иймд $\pi(a)$ адилтгал байх $\Leftrightarrow a \in N = \bigcap_{g \in G} H^g$ байхыг хялбархан шалгаж болно. $[G : H] = n$ ба $|G| = \infty$ байх тул $\exists a \neq b : \pi(a) = \pi(b) \Rightarrow \pi(ab^{-1})$ нь адилтгал болох бөгөөд $ab^{-1} \in N$ болно $\Rightarrow N \neq \{\ell\}$ болсноор бодлого бодогдов.

II-IV анги

- 1 (Ц.Дашдорж). Өгсөн $k \in \mathbb{N}$, $z_1, \dots, z_k$ ялгаатай k тоонууд ба өгсөн $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{C}$ -үүдийн хувьд $\{a_n = u_1 z_1^n + \dots + u_k z_k^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ олонлог төгслөг тооны элементтэй бол $\exists p \in \mathbb{N}$, $\forall n, a_n = a_{n+p}$ гэж батал.
- 2 (Ц.Дашдорж). $x_1, \dots, x_n$ суурьтай чөлөөт бүлэг A -ын $y_i = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i$, $j = 1, \dots, n$, $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ үүсгэгч бүхий дэд бүлэг нь B байг.
 - а) A/B төгсгөлт бүлэг $\Leftrightarrow \det(a_{ij}) \neq 0$ гэж батал.
 - б) мөн энэ үед $|A/B| = |\det(a_{ij})|$ байна гэж батал.
- 3 (Г.Баярмагнай). $A \in M_n(\mathbb{C})$ байг. Хэрэв $\text{rang } A = \text{rang } A^2 = m$ бол $\forall k \geq 3$ хувьд $\text{rang } A^k = m$ болохыг батал.
- 4 (Г.Баярмагнай). G бүлгийн a, b элементүүдийн хувьд $a^n = 1$ ба $aba^{-1} = b^2$ бол b -ийн эрэмбийг ол.
- 5 (Г.Баярмагнай). Хэрэв G бүлэг $H_1, H_2, \dots, H_n$ дэд бүлгүүдийн төгсгөлөг тооны баруун зэрэгцээ ангиудын нэгдэлд тавигддаг бол $[G : H_i] < \infty$ байх $\exists i$ батал.
- 6 (Г.Баярмагнай). $A_5 \triangleright H$ нь ямар нэг 5 урттай цикл агуулдаг бол $H = A_5$ болохыг батал.
- 7 (Г.Баярмагнай). $|G| = \infty$, $G \geq H$ нь төгсгөлөг индекстэй. H нь өөртэйгөө хосмог дэд бүлгүүдтэй нэгжээс ялгаатай элементээр огтлолцоно.
- 8 (Д.Пүрэвсүрэн). R^3 гурван өнгөөр будахад өгөгдсөн T гурвалжинтай конгруент бүх орой нь ижил өнгөтэй байх гурвалжин олдохыг батал.
- 9 (Ц.Дашдорж). G төгсгөлөг абелийн бүлэг байг.
 - а) $\exists K \mid Q, G(K \mid Q) = G$,
 - б) ийм өргөтгөл төгсгөлгүй олон олдохыг батал.
- 10 (Ц.Дашдорж). $K \mid k \in \text{Gal}$, $k \leq F \leq K$, $G = G(K \mid k)$, $H = \{\sigma \in G \mid \sigma(F) \subseteq F\}$ бол $G(K \mid F)$ -ийн G дахь нормализатор нь

H гэж батал.

- 11 (Ц.Дашдорж). $\chi(F) = p$, ${}_F V$, $\dim {}_F V = n$, G нь V -ийн үл бөхөх шугаман хувиргалтуудын p бүлэг бол $\exists 0 \neq x \in V$, $\forall g \in G, gx = x$ гэж батал.
- 12 (Г.Баярмагнай). $\sum_{i=1}^n x_i^2 + 1$ олон гишүүнтийг $\mathbb{R}$ -д коэффициенттэй $x_1, \dots, x_n$ -ээс хамаарсан n ширхэг олон гишүүн-түүдийн квадратуудын нийлбэрт бичиж болохгүйг батал.
- 13 (Г.Баярмагнай). $\text{Rad} A$ -аар A цагиргийн тах идеалуудын огтлолцлыг тэмдэглэе. Хэрэв R коммутатив бол $a \in R \cap \text{Rad} R[x]$ -ыг нильпотент гэж үзүүл.
- 14 (Г.Баярмагнай). $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \supset a \neq 0$ идеалын хувьд $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]/a$ -ыг гол идеалын болохыг батал.
- 15 (С.Цогзолмаа). $\lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^a \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ хязгаарыг ол. Энд a эерэг, бүхэл тоо.

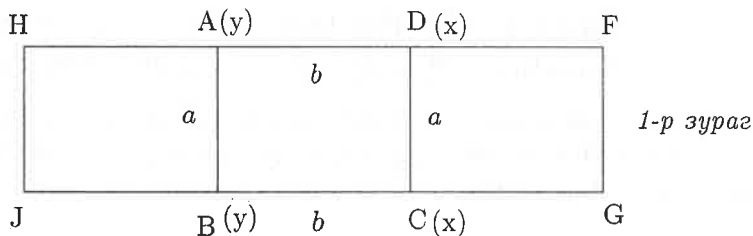
Зарим бодлогын бодолтууд

8. T нь a ба b катет бүхий тэгш өнцөгт гурвалжин, $\mathbb{R}^3$ -г улаан (у), хөх (х), ногоон (н) гурван өнгөөр будсан будалт авч үзье. T -тэй конгурент гурвалжны хувьд ижил оройтой бол *сайн* гэе.

Эсрэгээс нь тийм гурвалжин олдоггүй гэе. Ийм будалтын дараахь чанарыг баталж болно.

ЛЕММА 1. $ABCD$ тэгш өнцөгтийн хувьд $AB = CD = a$, $BC = AD = b$ байг. A ба B -у, C ба D нь -х бол 1-р зураг дээрх H, F, G цэгүүд -н байна.

Баталгаа.



F цэг -х байж болохгүй. Иймд F -у гээ. $\vec{v} \perp AB$ -д $\perp$, $ABCD$ хавтгайтай $\frac{\pi}{3}$ өнцөг үүсгэдэг b урттай вектор болог. $ABCD$ -г $\vec{v}$ -ээр параллель зөөгөөд $A'B'C'D'$ гээ. Тэгвэл $ABA'B'$, $CDC'D'$, $A'B'CD$ нь $ABCD$ -тэй конгруент тэгш өнцөгтүүд байна. A' , B' -н байна. C' , D' -у байна гэдгээс $C'D'F$ гэсэн улаан сайн гурвалжин олдлоо. Зөрчилд хүрлээ. H , J , G -г айдлхан замаар -н болохыг баталж болно.

Хоёр тохиолдолд салгая.

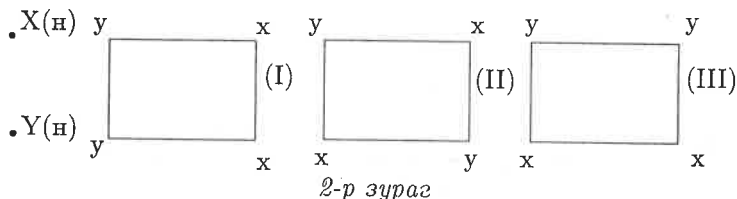
1) $2a$ эсвэл $2b$ урттай төгсгөлүүд ба дундаж ижил өнгөтэй хэрчим олддог гээ (a -сайн, b -сайн хэрчим гэж нэрлэе).

2) Ямарч сайн хэрчим олддоггүй.

$a \geq b$ гээ. a, b талтай тэгш өнцөгтийг *нормаль* гэж нэрлэе.

$ABCD$ нормаль байг. E ба F нь $ABCD$ хавтгайн дээр орших $AE = DE = b$, $BE = CE = a$, $AF = DF = a$ ба $BF = CF = b$ байх цэгүүд болог. G ба H нь харгалзан E ба F цэгүүдийн $ABCD$ хавтгайн хувь дахь тэгш хэмтэй цэгүүд. E, F, H, G -г тусгай гадаад цэгүүд, E ба H (F ба G) эсрэг цэгүүд гээ. Эсрэг цэгүүд нь $ABCD$ -ын аль ч оройтой нийлээд a, b катеттай тэгш өнцөгт гурвалжин үүсгэнэ.

1-р тохиолдол. a -сайн XZ хэрчим олддог гээ. Дундаж нь Y болог (-н өнгөтэй). $c(X)$, $c(Y)$, $c(Z)$ нь XZ -д $\perp X, Y, Z$ төвүүдтэй b радиустай тойргууд болог. Эдгээр нь ямарч -н цэггүй. Хоёр орой нь $c(X)$ дээр, хоёр орой нь $c(Y)$ дээр орших нормаль 4 өнцөгт авч үзье. Энэ нь 3 зарчимын ялгаатай янзаар будагдана (2-р зураг).



Бид III хэлбэрийн будалт байхгүй гэж үзэж чадна. Оршин байвал лемм 1 ёсоор манай 4 өнцөгтийн хавтгай дээр $c(Z)$ тойргийн хоёр цэг -н болж зөрчилд хүрнэ. Эсвэл хоёр орой нь $c(X)$

дээр, хоёр орой нь $c(Y)$ дээр байх I хэлбэрийн будалттай, эсвэл хоёр орой нь $c(Y)$ дээр, хоёр орой нь $c(Z)$ дээр байх I хэлбэрийн будалттай тэгш өнцөгт оршин байна. Учир нь бүх тийм дөрвөн өнцөгтүүд II хэлбэрийн будалттай бол тийм нормаль дөрвөн өнцөгтийн тусгай гадаад цэгүүд -н байна. Иймд гадаад цэгүүдээр үүсгэгдэх тойрог -н болно. Эндээс төгсгөлгүй олон -н гурвалжин үүсч зөрчилд хүрнэ.

ЛЕММ 2. $a, \sqrt{3}b$ талуудтай, a урттай талууд нь ижил өнгийн орой бүхий яг 2 өнгөөр будагдсан тэгш өнцөгт оршин байхгүй.

Баталгаа. $ABCD$ нь тийм тэгш өнцөгт болог. A, B -у, C, D -х гэе. $ABCD$ хавтгайд $\perp$, богино диагональ нь b байх $AEDF$, $BGCH$ ромбуудыг авч үзье. Тэгвэл E, F, G, H цэгүүд нь -н байх ёстой. Эндээс $EFGH$ нормаль ба бүх орой нь -н тул 4 сайн гурвалжин үүснэ. Иймд зөрчилд хүрнэ.

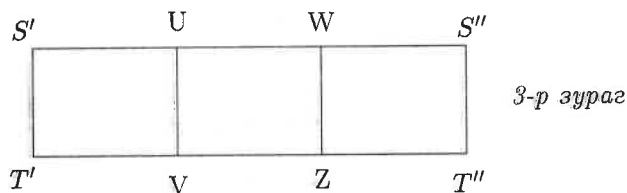
Одоо 1-р тохиолдлын баталгааг дуусгая. XZ нь a -сайн хэрчим ба Y нь түүний дундаж цэг байг. Хоёр орой нь $c(X)$ дээр, хоёр орой нь $c(Y)$ дээр орших I будалттай $KMLN$ нормаль тэгш өнцөгт авч үзье. $KMLN$ хавтгайн хувьд X, Y цэгүүдийн тэгш хэмтэй хувиргавал S, T гэсэн -н цэгүүд үүснэ. $XYKLMNST$ олон талстыг $XYK'L'M'N'S'T'$ болтол $STS'T'$ нормаль байхаар XY -г тойруулан эерэг чиглэлд эргүүлбэ. Лемм 2-ыг $XY S'T'$ -д хэрэглэвэл S' ба T' нь өөр өөр өнгөтэй байх ёстой. S' -у, T' -х тус тус болог. $K'L'M'N'$ -ийн будалтыг сонирхье. Тэгвэл $K'L'M'N'$ I будалттай байж болохгүй. Иймд II будалттай. Эндээс $K'L'S'T'$ эсвэл $M'N'S'T'$ нь III будалт бүхий нормаль тэгш өнцөгт байна. $K'L'S'T'$ нь тийм тэгш өнцөгт гэвэл ерөнхийлөл алдагдахгүй. Лемм 1-ийг хэрэглэвэл $c(Z)$ дээр хоёр -н цэг олдох болж зөрчилд хүрнэ. Иймд 1-р тохиолдолд батлагдлаа.

2-р тохиолдол. Тэгвэл ямарч сайн хэрчим олдохгүй. Ижил өнгийн X, Y гэсэн $XY = a$ байх цэгүүд авч үзье (Зөв тетраэдр авч үз).

1-р тохиолдолтой адилаар $c(X)$, $c(Y)$ тойргууд байгуулъя. I будалттай нормаль тэгш өнцөгтийн хоёр орой нь $c(X)$ дээр, хоёр

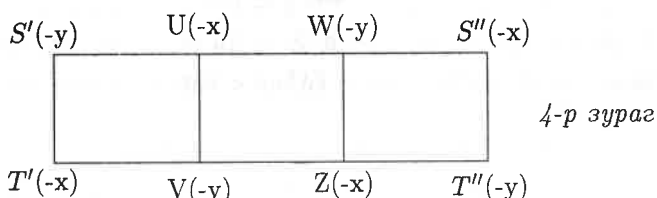
орой нь $c(Y)$ дээр байхаар X, Y цэгүүдийг сонгосон гэе. Хэрэв тийм биш бол хоёр орой нь $c(X)$ дээр, хоёр орой нь $c(Y)$ дээр байх нормаль тэгш өнцөгтийг XY -г тойруулан эргүүлбэ. Хэрэв III будалттай байрлал олбол I будалттайг оллоо гэсэн үг. Учир нь тэгш өнцөгтийн ижил өнгийн хоёр орой X, Y цэгүүдийн үүрэг гүйцэтгэнэ (a -г b -ээр сольж, a, b -ийн хувьд тэмдэглэгээг солино). Иймээс бүх тийм тэгш өнцөгт II хэлбэрийн будалттай гэж үзье. Дээр өгүүлснээр нормаль тэгш өнцөгтүүдийн тусгай гадаад цэгүүдээр үүсгэгдэх тойргуудын цэгүүд -н байна. Хамгийн их радиустайг нь сонгоё. Тэгвэл энэхүү тойрог дээр b зайтай хоёр цэг аваад тэдгээрийг X, Y цэгүүдийн оронд байдаг гэе. Энэ хоёрын сонголт ба нормаль тэгш өнцөгтийн сонголтонд II будалттай бол өмнөх үйлдлийг давтан энэ тойргийн тойрсон бүхэл бүтэн -н тоор гарган авна. Иймд хангалттай олон сайн гурвалжин олдоно.

Эндээс X, Y цэгүүдийн хоёр орой нь $C(X)$ хоёр орой нь $C(Y)$ дээр байх I будалттай нормаль тэгш өнцөгт олддог гэж үзэж болно. $KLMN$ нь энэхүү нормаль тэгш өнцөгт болог. $S, T, S', T', K', L', M', N'$ цэгүүдийг өмнөхтэй адилаар байгуулъя. Тэгвэл S' ба T' цэгүүдийн нэг нь -х нөгөө нь -у байна. S нь -х гэвэл ерөнхийлөл алдагдахгүй. Эдгээр цэгүүдийг XY хэрчмийг тойруулан эерэг чиглэлд $\frac{2}{3}\pi$ өнцөг эргүүлбэ. S' ба T' цэгүүдийн дүрийг S'' ба T'' гэж тэмдэглэвэл нэг нь -х нөгөө нь -у байна (Учир нь I будалттай нормаль тэгш өнцөгтийг дүр мөн I будалттай байна). $S'S''$ ба $T'T''$ нь $3b$ урттай ба түүнийг $1:2$ ба $2:1$ харьцаатай хуваах цэгүүд $C(X)$ ба $C(Y)$ тойрог дээр байна. Эдгээр цэгүүдийг зурагт үзүүлснээр U, V, W, Z гэж тэмдэглэе.

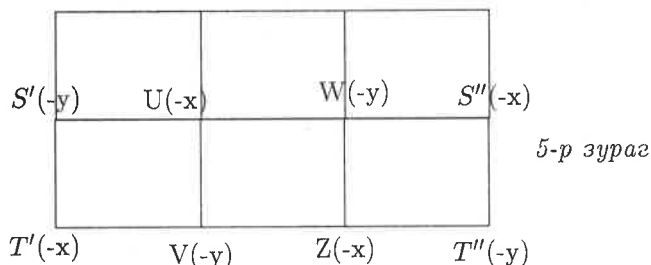


$S, T, S', T', K', L', M', N'$ цэгүүд -х эсвэл -у өнгөтэй байх бүх боломжуудыг шалгая. Тэгш хэмээр зарчмын ялгаатай дөрвөн янзын

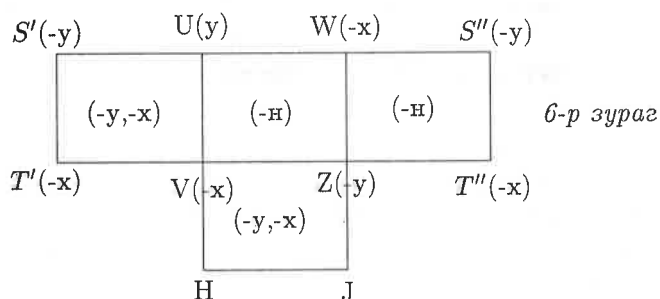
тохиолдол байна. а) ба б) тохиолдолд S'' ба T'' нь $-x$ ба $-y$ өнгөтэй байг.



2.а) тохиолдол. 4-р зурагт үзүүлснээр будагдсан байг. Эдгээр гурван нормаль тэгш өнцөгтийн бүх тусгай гадаад цэгүүд -н байх ёстой. Энэ нь хэрчим байхгүй гэдэгт зөрчинө.

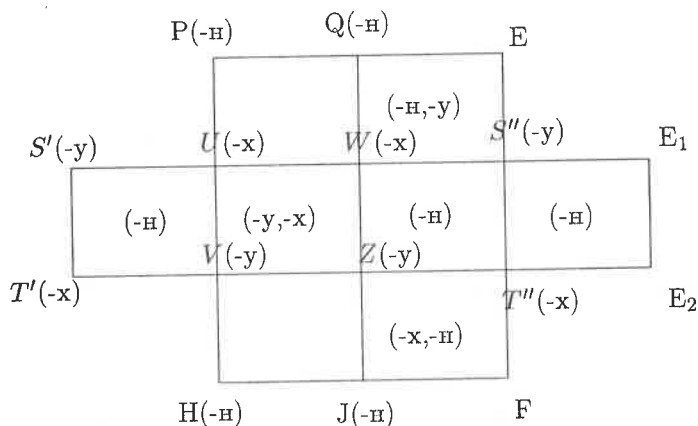


2.б) тохиолдол. 5-р зурагт үзүүлснээр будагдсан байг. Лемм 1-ийг $S'UVT'$ ба $WS''T''Z$ тэгш өнцөгтүүдэд хэрэглэвэл хоорондоо a зайтай дөрвөн коллинеар -н цэгтэй болно. Энэ нь сайн хэрчим байхгүй гэдэгт зөрчинө.



2.с) тохиолдол. 6-р зурагт үзүүлснээр будагдсан байг. Тэгш өнцөгтүүдийн дотор тусгай гадаад цэгүүдийн боломжит өнгийг

тэмдэглэе. $S''T''WZ$ ба $UVWZ$ тэгш өнцөгтүүдийн тусгай гадаад цэгүүд -н байна. $S'UVT'$ ба $VZJH$ тэгш өнцөгтүүдийн тусгай гадаад цэгүүд -н байж болохгүй (Эсрэг тохиолдолд эсвэл сайн хэрчим эсвэл гурвалжин олдоно). $S'UVT'$ ба $VZJH$ тэгш өнцөгтүүд -у ба -х оройнүүдтой учир тэдгээрийн эсрэг тусгай гадаад цэгүүд -у ба -х байх ёстой. B_1 ба B_2 нь $S'UVT'$ тэгш өнцөгтийн эсрэг тусгай гадаад цэгүүд, C_1 ба C_2 нь $VZJH$ тэгш өнцөгтийн эсрэг тусгай гадаад цэгүүд ба B_1B_2 -г параллель зөөхөд C_1C_2 гардаг байг. B (C) нь B_1, B_2 (C_1, C_2)-хосын -х цэгийг тэмдэглэе. B ба C цэгүүд $S'TS''$ хавтгайн нэг талд бол BCV сайн гурвалжин болно. B ба C цэгүүд $S'TS''$ хавтгайн хоёр өөр талд бол BCV сайн хэрчим болно. Иймд зөрчилд хүрнэ.



7-р зураг

2.d) тохиолдол. 7-р зурагт үзүүлснээр будагдсан байг. $WZT''S''$ ба $S'T'VW$ тэгш өнцөгтүүдийн тусгай гадаад цэгүүд -н учир $UVWZ$ -ийн эсрэг тусгай гадаад цэгүүдийн нэг нь -х нөгөө нь -у байна. лемм 1-ийг $UVWZ$ -д хэрэглэвэл H, J, P, Q цэгүүд бүгд -н болно. 2.c) тохиолдлын төгсгөлийг давтвал $ZT''FJ$ -ийн эсрэг тусгай гадаад цэгүүд -х ба -н байна. Мөн $QWS''E$ -ийн эсрэг тусгай гадаад цэгүүд -у ба -н байна (Үгүй бол өмнөх тохиолдолтой адил замаар баталгаа дуусна). Ижил шалтгаанаар

$S''T''E_1E_2$ -ийн бүх тусгай гадаад цэгүүд -н байна. Иймд E_2 ба E_2 -н биш ба ялгаатай өнгөтэй байна. Хэрэв E_1 -у ба E_2 -х бол $E_1E_2S''T''$ -д лемм 1-ийг хэрэглэвэл HF гэсэн J дундажтай сайн хэрчимтэй болно. Хэрэв E_1 -х ба E_2 -у бол $V, Z, T'', E_2, E_1, S'', W, U$ цэгүүд өмнөх тохиолдол дахь $S', U, W, S'', T'', Z, V, T'$ ижил будалттай. Иймд өмнөх тохиолдол ёсоор зөрчилд хүрнэ.

2 тохиолдлын баталгаа дууслаа.

12. Эсрэгээс нь болно гэж үзье. Тэгвэл

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 + 1 = \sum_{i=1}^n f_i^2(x_1, \dots, x_n)$$

хэлбэрт бичиж болно. f_i нь олон гишүүнт учраас

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + c_i$$

байхыг төвөггүй үзүүлж болно.

$K = \mathbb{R}(x_1, \dots, x_{n-1})$ ба $x = x_n$ гэж тэмдэглэе. Тэгвэл (1) $\Rightarrow$
 $\sum_{i=1}^n x_i^2 + 1 = x^2 + d = \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2$, $a_i, b_i, d \in K$, $d = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + 1$
 гэж бичиж чадна. $x^2 = (a_n x + b_n)^2$ байх x олдох ба түүнийг c
 гэвэл $d = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i c + b_i)^2$, $a_i, b_i, c \in K$ болно. Энэ нь уг бодлогыг
 n -ээр нь индукцлэх боломжтойг үзүүлж байгаа тул $x^2 + 1$ олон
 гишүүнтийг $\mathbb{R}$ дээр x -ээс хамаарсан ямар нэг олон гишүүнтийн
 квадрат хэлбэрт бичиж болох уу? гэсэнтэй анхны бодлого адил
 болно. Энэ нь боломжгүй тул зөрчил гарч бодлого бодогдоно.

13. Хэрэв $a \in \bigcap_{\substack{R \supset P \\ P - \text{энгийн}}} P$ байвал a нильпотент байх нь тодорхой.

(*) $\exists p \triangleleft R$, p энгийн, $p \ni a$ байг. Тэгвэл $a \in \text{Rad}(\mathbb{R}[x]) \Rightarrow 1 - ax$
 нь $\mathbb{R}[x]$ -д урвуутай $\Rightarrow 1 - ax$ нь $(\mathbb{R}/P)[x]$ -д мөн урвуутай. $P \not\ni$
 a учраас a нь $(\mathbb{R}/P)$ -д мөн урвуутай ба урвууг нь b гее. $(1 -$
 $ax) \cdot f(x) = 1$ байх $\exists f \in (\mathbb{R}/P)[x]$. $x = b$ орлуулгаар $0 = 1$

гэсэн зөрчил гарч (*) боломжгүй болохыг үзүүлж байна. Үүгээр бодлого бодогдов.

14.

ТЕОРЕМ. A дедекиндийн муж ба $P \neq 0$ нь A -ийн идеал бол A/P нь гол идеалын цагираг байна.

Бид $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ -ыг дедекиндийн муж гэж үзүүлэх хэрэгтэй. Үүний тулд $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ талбарын бүхэл алгебрийн тоонуудын олонлог B нь $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ болохыг үзүүлэхэд хангалттай.

1 ба $\sqrt{-5}$ нь K -ийн $\mathbb{Q}$ -базис байх тул $\alpha \in K$ бол $\alpha = n + m\sqrt{-5}$, $m, n \in \mathbb{Q}$ байна. $\text{tr}_K(\alpha) = 2n$, $N_K(\alpha) = n^2 + 5m^2$ болохыг төвөггүй үзүүлж болно. $\alpha \in B$ байвал, α -элементийн мөр ба норм нь бүхэл байдаг. Иймд $2n$ ба $n^2 + 5m^2$ бүхэл тоо байвал m, n -ыг бүхэл гэж батлах шаардлагатай. Хэрэв $m = \frac{n_1}{2}$ байвал $m = \frac{n_1}{2}$ хэлбэртэй байх ёстой. $x^2 \equiv \{0; 1\} \pmod{4}$ байх учраас $n_1^2 + 5m_1^2$ нь 4-т хуваагдахгүй. Үүгээр m, n нь бүхэл болж $B = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ болох нь батлагдана.

Эчнээ Олимпиадын дүнгээр байр эзлүүлэхэд

I ангиудад:	Д.Чулуунсүрэн, ОМ-1,	I байр
	Э.Мөнхбат, ОМ-1,	II байр
II-IV ангиудад	Т.Баасанжав, ОМ-2,	I байр
	Б.Нямцэрэн, ОМ-2,	II байр
	О.Ням-Эрдэнэ, ОМ-2,	III байр

МОМО-11-ийн үнэмлэхүй аврагаар ОМ-1 ангийн Д.Чулуунсүрэн шалгарлаа.

б) багийн тэмцээн

1 (Б.Баяржаргал). $A = B + iC$ ба B, C нь $n \times n$ хэмжээст бодит квадрат матриц. $\tilde{A} = \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}$ бол $\det \tilde{A}$ -г $\det A$ -аар илэрхийл.

2 (Ц.Дашдорж). Төгсгөлөг талбар дээр язгуургүй олон гишүүнт нь үл задрах байх n -ын утгыг ол (n нь олон гишүүнтийн зэрэг).

3 (Г.Баярмагнай). a, b, c өгсөн натурал тоонууд $a^x + x \equiv c(b)$ тэгшитгэл төгсгөлгүй олон шийдтэйг батал.

4 (Ц.Дашдорж). A_6 бүлэгт 5 индекстэй дэд бүлэг оршин байхгүй гэж батал.

Зарим бодлогын бодолтууд

$$\begin{aligned} 1. \det \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} i &= \det \begin{pmatrix} B+iC & -C+iB \\ C & B \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} A & iB+i^2C \\ C & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & iA \\ C & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & Ai - Ai \\ C & B - iC \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & \bar{A} \end{pmatrix} = \det A \cdot \det \bar{A} = \det A \cdot \overline{\det A}. \end{aligned}$$

2. $F_q, q = p^m$ төгсгөлөг талбар байг. $n = 2, 3$ байх нь ойлгомжтой. $n = 4$ үед F_q дээр коэффициент бүхий 2 үл задрах олон гишүүнтийн үржвэр F_q -д язгуургүй боловч задарна. Цаашилбал $n \geq 4$ бол n -ийг ямагт $n = 2u + 3v, \exists u, v \in \mathbb{Z}^+$ гэж бичиж болох $\exists f \in F_q[x], f = f_1^u \cdot f_2^v$, энд $f_i \in A_i, i = 1, 2$ ба $A_i = \{f \in F_q[x] \mid \deg f = i, f\text{-үл задрах}\}$ болж f нь n зэргийн язгуургүй боловч задрах олон гишүүнт байгаа тул $n = 2, 3$ болов.

4. Эсрэгээс нь $\exists H \leq A_6, [A_6 : H] = 5$ гээ. Тэгвэл Пуанкаре-н теоремоор $\exists N \triangleleft A_6, 5 \mid [A_6 : N]5!, A_6 = \frac{6!}{2} = 3 \cdot 5!$ тул $N = e$ гэвэл $3 \cdot 5! \mid 5!$ болж зөрчилдөнө. Иймд $N \neq e \Rightarrow A_6$ энгийн гэдэгт зөрчинө.

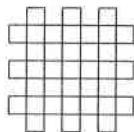
	Хүний тоо	I	II	III	IV	Нийт оноо	Байр
Мат-1	5	4	0	0	6	10	II
Мат-2	3	4	5	4	6	19	I
Мат-3	4	0	0	0			
Мат-4	3	0	0	0			

БАГА АНГИЙН МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАД

С.Цогзолмаа, Т.Батчимэг

1-р анги

1. Зурагт үзүүлсэн 37 нүдтэй дүрсийг зөвхөн хөндлөн эсвэл босоо шугамаар хамгийн цөөндөө хэдэн тэгш өнцөгт болгон хувааж болох вэ?



2. 11×11 шатрын хөлгийн буудал бүр дээр нэг нэг хүү тавиад хамж аваад дахин хөлөг дээр байрлуулахад хүү бүр анхны байсан буудлын хувьд хөрш нүдэнд байрласан байх боломж бий юу?
3. Самбарт $1, 2, \dots, 2003$ тоонууд бичсэн байв. Эхлээд бүх сондгой тоонуудыг арчиж, үлдсэн тоонуудаас сондгой байранд байрлах тоонуудыг арчих гэх мэтээр нэг ширхэг тоо үлдтэл нь үргэлжлүүлэв. Ямар тоо үлдэх вэ?
4. Бактер 30 минут тутамд шинэ бактер төрүүлдэг ба 2 дахь бактериа төрүүлээд үхдэг. Анх нэг бактер байсан бол а) 4 цаг, б) 6 цагийн дараа хэд болсон байх вэ? (Цагаан)

2-р анги

1. Арал дээр 100 хүн амьдардаг ба зарим нь үргэлж худал ярьдаг, зарим нь байнга үнэн ярьдаг байв. Хүн бүр Нар эсвэл Сар эсвэл Газрын бурхан шүтдэг байжээ.
- I. Нарны бурхан шүтдэг үү?
- II. Сарны бурхан шүтдэг үү?
- III. Газрын бурхан шүтдэг үү?
- гэсэн 3 асуулт тавихад эхний асуултанд 60 хүн, II асуултанд 40 хүн, III асуултанд 30 хүн тийм гэж хариулсан бол арал дээр хэдэн худалч амьдардаг вэ?
2. 4 ширхэг 1, 3 ширхэг 2, 3 ширхэг 3 цифрийг дурын зэргэлдээ 3 тооны нийлбэр 3-г хуваагддаггүй байхаар байрлуул.
3. Цагаан толгойн 35 үсгийг $1, 2, \dots$ гэх мэтчилэн дугаарлажээ. 1234512345 гэдэг үгийг хэдэн янзаар уншиж болох вэ?

4. Самбарт 1,2,...,2003 тоонууд бичигдсэн байв. Эхлээд бүх сондгой тоонуудыг арчиж, үлдсэн тоонуудаас тэгш байранд байрлах тоонуудыг арчив. Үлдсэн тоонуудын байранд сондгой байранд байрлах тоонуудыг арчих гэх мэтээр нэг ширхэг тоо үлдтэл нь үргэлжлүүлэв. Ямар тоо үлдэх вэ? (Цагаан)

3-р анги

1. 40 хулгана 40 зоос авч явжээ. 2 хулгана тус бүр 2 ширхэгийг, цөөн бус хулгана нэг ч зоос бариагүй, том хулгана тус бүр 7 ширхэгийг, үлдсэн нь тус бүр 4 ширхэг зоос авч явсан бол хэдэн хулгана огт зоосгүй явсан бэ?
2. 22 цэг тэмдэглээд, цэг бүрийг өөр 4 цэгтэй хэрчмээр холбох бөгөөд холбосон хэрчмүүд нь хоорондоо үл огтлолцсон байхаар зур.
3. Шооны тал бүрийг 4 хэсэг хуваагаад, хэсэг бүр дээр бүхэл тоонууд бичихдээ энэ тоо болон түүнтэй хөрш 4 нүдэн дэх тоонуудын нийлбэр 13 байхаар бичиж болох уу?
4. Дараах цифрүүдийн дарааллыг байгуулъя. Эхний цифр 2, дараагийнх нь 3 байг. Гурав дахь нь 6 болно ($2 \cdot 3 = 6$). 2,3,6 боллоо. $3 \cdot 6 = 18$ тул дөрөв дэх нь 1, тав дахь нь 8. 2,3,6,1,8 боллоо. $6 \cdot 1$ тул 6 дахь нь 6, $1 \cdot 8 = 8$ тул долоо дахь нь 8. 2,3,6,1,8,6,8,... $6 \cdot 8 = 48$ тул ес дэх нь 4, арав дахь нь 8 гэх мэтчилэн үүссэн дараалалд 5,7,9 цифрүүд хэзээ ч гарахгүйг харуул. (Цагаан)

4-р анги

1. Дэс дараалсан 2 тооны үржвэрийг тэдгээрийн дараагийн тоонд хуваахад 2 үлдэгдэл гарна гэж батал.
2. Зөв 110 өнцөгтийн ямар нэг зөв 5 өнцөгт үүсгэх 5 оройг улаанаар, ямар нэг зөв 11 өнцөгт үүсгэх 11 оройг хөхөөр будав (Нэгэнт будагдсан оройг будахгүй). Энэ 110 өнцөгтөд улаан, хөх төгсгөлтэй тал байгаа гэж батал.
3. Цифрүүдийн байрыг урвуулан бичихэд анхны тоондоо хуваагдаг байх 4 оронтой тоо олдох уу?

4. Эхний 100 тооноос дурын 55-ыг нь авахад тэдний дунд ялгавар нь 9 гардаг 2 тоо олдоно гэж харуул. Ялгавар нь 11 гардаг 2 тоо олддоггүй байх авалтыг ол. (Цагаан)

5-р анги

- 2003 ширхэг 9-өөс тогтох тооны кубын цифрүүдийн нийлбэрийг ол.
- Дэс дараалсан хэдэн тооны нийлбэр нь тэдгээрийн хамгийн ихээс нь 20 дахин, хамгийн багаас нь 30 дахин их бол эдгээр тоог ол.
- m ширхэг 0-ээр төгссөн факториал байдаг боловч $m-1$ ширхэг 0-ээр төгссөн факториал байдаггүй бол $m+1$ ширхэг 0-ээр төгссөн факториал байдаг гэж харуул.
- 1995-д хуваагддаг, цифр бүрийн зэргэлдээ орших хоёр цифр нь хоорондоо тэнцүү байдаг хамгийн бага тоог ол. (Цагаан)

6-р анги

- $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 99! \cdot 100!$ үржвэрээс үлдэх тоо нь бүтэн квадрат байхаар 100 үржигдэхүүнийг дарж болох уу?
- 3×3 хүснэгтэд 1,2,3,4,5,6,7,8,9 тоонуудыг аль ч 2×2 хүснэгт дэх тоонуудын нийлбэр S байхаар бичжээ. Тэгвэл S -ийн авч болох бүх утгыг ол.
- Шооны талстууд дээр 1-ээс 6 хүртэлх цифрүүдийг эсрэг талсууд дээрх цифрүүдийн нийлбэр нь тэнцүү байхаар бичсэн хэсэг шоонуудыг зурагт  үзүүлснээр дөрөв дөрвөөр нь давхарлан 1 багана болгон өрөв. Үл харагдах талстууд дээрх тоонуудын нийлбэр 2003 байсан бол хамгийн цөөндөө хэдэн шоо өрсөн бэ?
- Дурын нүд бүрийн хувьд зэргэлдээ орших яг нэг нүд нь будагдсан байхаар 13×13 хүснэгтийн зарим нэг нүдийг будаж болох уу? (Цагаан)

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН НИЙГЭМЛЭГИЙН ТОВЧ ТАНИЛЦУУЛГА

Монголын Математикийн Нийгэмлэг нь 1994 оны 11 дүгээр сарын 12-нд байгуулагдсан. Нийгэмлэгийн ерөнхийлөгч нь академич А.Мекей, нарийн бичгийн дарга нар нь доктор Б.Батцэнгэл, доктор А.Галтбаяр. 1996 онд тус нийгэмлэг нь Америкийн математикийн нийгэмлэгт гишүүнээр элссэн. АНУ, Герман, Орос, Японы математикийн нийгэмлэгүүдтэй хамтын ажиллагаатай ажилладаг. Эгнээндээ дотоодын 50, гадаадын 4 гишүүнтэй. Нийгэмлэг гишүүдийн татвар, хандивын тусламжтайгаар өөрийгөө санхүүжүүлдэг. Монголын Математикийн Нийгэмлэгийн сэтгүүлийг жил бүр англи хэл дээр гаргадаг.

Одоогоор сэтгүүлийн 3 дугаарыг гаргасан бөгөөд сэтгүүлд гадаад, дотоодын математикчидын онолын бүтээлийг хэвлэдэг.

Нийгэмлэгийн цаашдын зорилт нь санхүүгийн хувьд бэхжих, гадаад харилцаагаа өргөтгөх, авьяаслаг математикчидыг дэмжих зэрэгт оршино.

Жич: Манай нийгэмлэг одоо математикийн зарим чухал сэтгүүлийг захиалж авах, олон улсын математикийн бага хурлыг зохион байгуулах, гадаад гишүүддээ тусгай үнэмлэх олгох, өөрийн сэтгүүлийг тогтмол хэвлэдэг болох зэрэг олон ажил гүйцэтгэх шаардлагатай байгаа бөгөөд эхний хэдэн жил гишүүдээсээ сард 50-100 төгрөгийн татвар авч байсан боловч, дээрх үйл ажиллагаануудыг явуулахад хүрэлцэхгүй байгаа билээ. Иймд тус нийгэмлэг нь санхүүгийн хувьд баталгаатай болох үүднээс гишүүд та бүгдийг нийгэмлэгтээ амьдралдаа ганц удаа тодорхой хэмжээний хандив өргөхийг урийлж байна. Энэ тухай мэдээллийг олимпиадын цувралаар дамжуулан тогтмол мэдээлж байх болно.

Нийгэмлэгийн дотоод данс:

Голомт банк (I салбар)
2250704 Р.Энхбат

Валютын данс:

Голомт банк (I салбар)
2270409 Р.Энхбат

Монголын Математикийн Нийгэмлэгт хандив өгсөн хүмүүсийн жагсаалт

	Нэрс	Албан газар	Утас	Хэдэн онд хаана ямар сургууль, мэргэжлээр төгссөн	Хандивын хэмжээ	Хэзээ өгсөн
1.	Б.Бат	"Их алт" ком-паний ерөнхий захирал	99115441	МУИС, Мат, 1987 он	250U\$	1998.04
2.	Б.Батбаасан	"Космо" ком-паний ерөнхий захирал	99115561	МУИС, Мат, 1987 он	100.000₮	1998.09
3.	Ц.Дашдорж	МУИС-ийн багш	372828	МУИС, Мат, 1969 он	50.000₮	1998.04
4.	Ү.Бадам	ШУА, ФТХ	368209	Эрхүү, УИС, 1969 он	4.000₮	1998.05
5.	С.Будням	ШУА, ФТХ	358949	Эрхүү, УИС, 1966 он	5.000₮	1998.05
6.	С.Тогмид	УБИС-ийн захирал	322705	МУИС, Мат, 1969 он	10.000₮	1998.06
7.	Д.Бямбажав	Математик хүрээлэнгийн захирал	451136	МУИС, Мат, 1970 он	5.000₮	1998.05
8.	Ш.Эрдэнэ	"Зэргэд" бро-керийн пүү-сийн захирал	99112152	МУИС, Мат, 1985 он	200U\$	1998.10
9.	Р.Ринчинбаатар	ЗГО	326454	МУИС, Мат, 1980 он	10.000₮	1999.03
10.	Н.Тунгалаг	МУИС-ийн ня-бо бүртгэл	-	МУИС, Ня-бо,	5.000₮	1998.05
11.	Ц.Болдсүх	МУИС-ийн ш.хариуцсан орлогч захирал	322508	ХБНГУ, 1982 он	4.000₮	1998.05
12.	Н.Намсрай	УБИС-ийн багш	323626	ЛГУ, 1966 он	5.000₮	1998.05

13.	Р.Энхбат	МУИС-ийн багш	351007	ИГУ, 1980 он	5.000₮	1998.05
14.	Т.Жанлав	МУИС-ийн багш	325631	МУИС, Мат, 1970 он	5.000₮	1998.05
15.	Х.Гэндэнжамц	МУИС-ийн багш	325022	МУИС, Мат, 1955 он	3.000₮	1998.05
16.	Л.Дорж	ФТХ	452313	Эрхүү, УИС, 1966 он	5.000₮	1998.05
17.	Ч.Бат-Эрдэнэ	НИК, Мэд Тех Газрын захирал	99117954	МУИС, Мат, 1991 он	100.000₮	1999.09
18.	А.Мекей	МУИС Док.-т албаны дарга	321983	МУИС, Мат, 1963 он	10.000₮	2000.04
19.	Ц.Лхамсүрэн	МУИС, МА-МО тэнхимийн эрхлэгч	321102	Мос.ИС, 1966 он	5.000₮	2000.04
20.	Б.Баясгалан	МУИС, Мат. Хур. эрд. н.б.д.	451136	Урал ИС, 1978 он	50.000₮	2000.04
21.	Ш.Мөнхцэцэг	XI сур-ийн захирал	99187215	МУИС, Мат, 1986 он	10.000₮	2000.03
22.	УБ, XI сург.	Захирал Ш.Мөнхцэцэг	324649	-	100.000₮	2000.03
23.	Л.Хадхүү	МУИС, багш	684042	МУИС, Мат, 1979 он	5.000₮	2000.04
24.	Л.Өвгөн	МУИС, Хэр. мат. тэнхимийн эрхлэгч	311244	МУИС, Мат, 1959 он	10.000₮	2000.03

25.	В.Адъяасүрэн	МУИС, багш	321102	МУИС, Мат, 1983 он	10.000₮	2000.04
26.	Д.Пүрэвсүрэн	МУИС, багш	321107	МУИС, Мат, 1991 он	15.000₮	2000.10
27.	С.Чимэд	Гэртээ		ХААДС, 1968 он	4.000₮	2000.12
28.	Л.Эрдэнэсөёл	МУИС, МТСур. Х анги			5.000₮	2001.01
29.	С.Чимэдцэрэн	МУИС, Мат. анализ тэнхимийн багш		МУИС, Мат, 1958 он	5.000₮	2001.06
30.	Б.Батбаасан	"Космо" компаний ерөнхий захирал	99115561	МУИС, Мат, 1987 он	1.000.000₮	2003.11
31.	Б.Баясгалан, Б.Баяржаргал	"Олонлог төв" сургууль	324010	Урал ИС, 1978 он УБИС, 1990 он	1.000.000₮	2003.11

50.000-аас доошгүй төгрөг хандивласан хүмүүс ба байгууллагад ММО-ын болоод ММН-ийн жил бүрийн цувралуудыг үнэгүйгээр авч байх болно.

Нийгэмлэгийн дотоод данс:

Голомт банк (1 салбар)
2250704 Р.Энхбат

Валютын данс:

Голомт банк (1 салбар)

"Төгс Тоо" төвийн тухай

Манай орны математик боловсролын хөгжилд мэдэгдэхүйц амжилт гарч математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай сургууль, ангиуд олноор байгуулагдаж байгааг харгалзан үзэж, тэднийг нэгдсэн удирдлага, үйл ажиллагаагаар хангах зорилгоор БСШУЯ-ны санаачилга дэмжлэгтэйгээр Монгоолын Математик Олимпиадын Хорооны дэргэд математикийн багш нарын мэргэжил дээшлүүлэх "Төгс тоо" төв байгуулагдсаар хэдэн жил болж байна. Тус төв нь математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийн багш нарын мэргэжлийг системтэйгээр дээшлүүлэх ажлынхаа хүрээнд дунд ангийн багш нарын дунд тус бүр 90 цагийн багтаамжтай, 90000 төгрөгийн төлбөртэй I ба II шатны дамжааг 15 хоногоор; бага ангийн багш нарын дунд 60 цагийн багтаамжтай, 60000 төгрөгийн төлбөртэй сургалтыг 12 хоногоор хичээллүүлж, дамжааг амжилттай дүүргэсэн хүмүүст харгалзах сертификат олгон төгсгөдөг юм. Жил бүрийн хичээлийг МУИС, хичээлийн III байрны 306, 308 тоотод 6 сарын 23-24-нд бүртгэж, хичээл 6 сарын 25-аас эхлэн явагддаг. Төлбөрийг "Төгс тоо" төв дансанд хийж, төлбөрийн баримтаа үзүүлээд бүртгүүлж болно, эсвэл бэлнээр авчирна.

"Төгс тоо" төвийн данс:

Лавлах утас:

Голомт банк

2119483, "Төгс тоо" төв

312383 (гэр)

99879779 (Ц.Дашдорж)

ГАРЧИГ

Улсын Их Хурлын дарга С.Төмөр-Очирын мэндчилгээ	3
Олимпиадын дүнгийн тухай /Ц.Дашдорж/	5
Монгол Улсын Гавъяат багш Ү.Санжмятавын тухай зарим дурсамж	9
VII ангийн III даваа /Б.Сандагдорж, Ш.Батхишиг/	22
VIII ангийн III даваа /Т.Баасанжав/	25
VIII ангийн IV даваа /Б.Сандагдорж/	28
IX ангийн III даваа /Б.Баяржаргал/	32
IX ангийн IV даваа /В.Адъяасүрэн/	35
X ангийн III даваа /Г.Баярмагнай/	39
X ангийн IV даваа /Г.Баярмагнай/	42
Багын багшийн III даваа /В.Адъяасүрэн/	47
Багын багшийн IV даваа /Б.Баяржаргал/	50
Дундын багшийн III даваа /Ц.Дашдорж/	53
Дундын багшийн IV даваа /Ц.Дашдорж/	59
ОМУО-44, I сорил /Б.Баяржаргал/	64
ОМУО-44, II сорил /Б.Сагдагдорж/	67
ОМУО-44, III сорил /Т.Баасанжав, Б.Нямцэрэн/	71
ОМУО-44, IV сорил /Ц.Дашдорж/	72
Олон Улсын Математикийн XLIV Олимпиад /Ц.Дашдорж/ ..	73
Монголын Оюутны Математикийн XI Олимпиад	78
Бага ангийн математикийн олимпиад /Т.Батчимэг, С.Цогзолмаа/	94
ММН-ийн товч танилцуулга	97
ММН-т хандив өгсөн хүмүүсийн жагсаалт	98
"Төгс тоо" төвийн тухай	101