

МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАДЫН ЦУВРАЛ
№29

Х.ДҮГЭРИЙН НЭРЭМЖИТ
МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН
XL ОЛИМПИАД

Улаанбаатар хот
2005 он

Өмнөх үг

Улсын болон олон улсын математикийн олимпиадад бэлтгэгчид, математикийн төрөлжсөн сургалттай ангийн сурагч, оюутан, багш нар, математик сонирхогч өргөн олонд зориулсан цувралын ээлжит дугаар уншигч Таны гар дээр очиж байна. Тус гарын авлагыг бэлтгэхэд ММО-ын Зохион байгуулах хорооны гишүүд, ШУ-ны доктор (Sc.D), профессор Х.Дүгэр багшийн үр хүүхэд, МУИС-ийн математикийн ангийн оюутнууд идэвхтэй оролцлоо.

Уг номын талаарх аливаа санал хүсэлтээ МУИС-ийн Алгебрийн тэнхимд ирүүлнэ үү.



ШУ-ны доктор (Sc.D), профессор Х.Дүгэрийн үр хүүхэд,
“Арилдал” ХХК ивээн тэтгэж хэвлэв.

Монголын математикийн XL олимпиад

Редактор: Цэрэндоржийн Дашдорж

Дүгэрийн Болдбаатар

Хэвлэлийн эхийг бэлтгэсэн:

“Арилдал” ХХК

Цэдэндоржийн Баатарсүх

2005 оны 4 сард -д 2000 хувь хэвлэв.

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАД (ММО)-ЫН 40 ЖИЛИЙН ЗАМНАЛ

*Монголын Математикийн 40-р Олимпиадын нээлт дээр
ММОХорооны дарга Ц.Дашдоржийн хэлсэн үг*

БСШУЯ-ны сайд ноён А.Цанжид аа,
БОЯ-ны сайд ноён У.Барсболд оо,
СХ Дүүргийн Засаг дарга Л.Найдан,
ИТХ-ын дарга ноён П.Ганбаатар нараа,
Эрхэм хүндэт математикч, багш сурагчидаа

Манай нэрт сурган хүмүүжүүлэгч, математикч, доктор, профессор, ахмад багш Х.Дүгэр багшийн нэрэмжит Монголын Математикийн 40-р Олимпиадын эцсийн даваанд оролцохоор мэдлэг чадварынхаа түвшин, оюун ухааныхаа хурц мэргэнээр шалгаран ирсэн эрхэм хүндэт математикч багш, сурагчид Та бүхэндээ энэ өдрийн цогтой халуун мэндийг дэвшүүлж, Монголын Математикийн Олимпиадын 40 жилийн түүхэн замналын тухай илтгэл тавих болсондоо миний бие туйлын баяртай байна.

I. Монголын Математикийн Олимпиадын тухай.

Манай улс гоц авъяас билэгтэй залуучууд бол манай нийгмийн үнэт баялаг, хөгжлийн ирээдүйг шийдвэрлэх гол хүчин зүйл мөн хэмээн үздэг учраас 1965 оноос эхлэн ЕБДС-ийн сурагчдын дунд жил бүр математикийн олимпиад явуулж байх шийдвэр гаргасан ба 1964 оноос манай улсын сурагчдын баг олон улсын математикийн олимпиадад оролцдог болсон юм.

Манай оронд Математикийн анхны Олимпиад 1960 онд УБ хотноо сурагчдын дунд явагдсан байна. Уг Олимпиадыг проф. Л.Шагдар, доц. Д.Ишцэрэн нар санаачлан зохион явуулжээ.

АБЯ-ны шийдвэрээр ММО албан ёсоор 1965 оноос эхлэн 4 даваатайгаар ЕБДС-ийн бүх сурагчдыг хамран жил бүр тогтмол уламжлал болон явагдаж байна.

Математикийн Олимпиадыг 1965-1990 онуудад БНМАУ-ын АБЯ, МХЗЭ-ийн Төв Хороо, МПБ-ын Төв зөвлөлийн хамтарсан хурлын тогтоолоор баталсан УМО-г ЗБХороо, 1990 оноос хойш Боловсролын Яамны баталсан ММОХороо удирдан зохион явуулж ирэв. Математикийн Олимпиадын Хороон даргаар 1965-1982 онд Ү.Санжмятав, 1983 онд Д.Шагдар, 1984-1989 онд А.Мекей, 1990 оноос Ц.Дашдорж нар ажиллаж байна.

I-II даваанд сургуулийн ангиудын аваргыг шалгаруулна, үүнд монголын нийт ЕБС-ийн бүх сурагчид хамрагдана, III даваагаар аймаг

(хот)-ын аваргыг шалгаруулна, эцсийн буюу IV даваагаар улсын аварга тоочдыг 8-10 ангийн сурагчид болон бага, дунд ангийн багш нарын дунд шалгаруулдаг.

1989 оныг хүртэл эцсийн даваанд зөвхөн 10-р ангийн сурагчдыг хамруулдаг байсан бол 1989 оноос 9-р ангийн, 1991 оноос 8-р ангийн сурагчдыг, 1990 оноос дунд ангийн тооны багш нарыг, 1996 оноос бага ангийн багш нарыг хамруулдаг болов. Багш нар олимпиадад оролцдог болсноор олимпиадын хөдөлгөөний хөгжил дэвшилд үндсэн эргэлт гарсан гэж хэлж болно. МО-оос үлгэр авч бусад олимпиадууд (физик, хими, биологи гэх мэт) багш нарынхаа дунд олимпиад явуулдаг болсон билээ.

ММО-ын III ба IV давааг зохион явуулах болон Олон Улсын Математикийн Олимпиадад (ОУМО) бэлтгэх, оролцох ажлыг МУИС-ийн Алгебрийн тэнхим хариуцан явуулдаг болсоор 40 жил болж байна. Энэ үйл хэрэгт МУИС ба МУБИС-ийн математикийн багш нар болон математикийн ангийн оюутнууд голлох үүрэг гүйцэтгэдэг бөгөөд түүний дотроос онцлон УГБ Ү.Санжмятав, академич, УГБ А.Мекей нарын оруулсан гавъяа зүтгэлийг дурдах нь зүйтэй юм. ММО-ын 40 жилийн түүхэнд бүрэлдэн тогтсон, математикаар хүчтэй сургууль гэвэл: УБ-I, УБ-XI, МУИС-ийн дэргэдэх Монгол-Туркийн сургууль, Хөвсгөл, Увс, Дундговийн төвийн I сургуулиуд мөн Олонлог төв, Эхлэл, Номун, Сант зэрэг хувийн сургуулиуд юм.

Манай олимпиадын эцсийн даваанд Буриад, Халимаг, Тува, Якут зэрэг монгол туургатнууд ч боломжтой үедээ дуртайяа оролцдог.

Манай олимпиадын медальтнуудын ихэнх нь цаашид математикаар мэргэждэг бөгөөд 1969 оноос хойш, их дээд сургуулиудын математикийн багш болсон хүмүүс болон шинжлэх ухааны байгууллагуудад математикаар эрдэм шинжилгээний ажил хийж буй хүмүүс 100 хувь олимпиадаар дамжигчид гэдгийг дурдахад ч таатай байна.

Математикийн Олимпиадын хөдөлгөөн одоогийн түвшиндээ хүрэхэд онцгой үүрэг гүйцэтгэсэн түрүү цагийн Д.Ишцэрэн, Ү.Санжмятав, Б.Алтангэрэл, Л.Шагдар, Д.Шагдар, Х.Дүгэр, Г.Гүнжээ, Х.Гэндэнжамц, Г.Загдрагчаа, У.Доёд, А.Мекей, Д.Ламжав, Л.Өвгөн, Ц.Дашдорж, Н.Жадамбаа, П.Дорж, Б.Дамдинсүрэн, Р.Гончигдорж, П.Энхболд, Ч.Раднаа, С.Цагаан, С.Шарав, Ү.Маам, А.Хашбаатар, Ж.Баатар, Д.Гүржав, Га.Дагва, Х.Шагдар, Ц.Цэнд-Аюуш, Ч.Даваадорж, Ц.Маам, шинэ үеийн Б.Баясгалан, В.Адъяасүрэн, Ц.Батхүү, Б.Батцэнгэл, Б.Сандагдорж, Л.Оюунцэцэг, Ш.Батхишиг, Б.Хоролдагва нарын хичээл зүтгэл, мэдлэг чадвар, авъяас билэг ихээхэн үүрэг гүйцэтгэснийг дурдах нь зүйтэй болов уу.

ММОХорооны гишүүн, Дархан хотын орлогч дарга байсан математикч Д.Баярцогт (ММО-ын дэд аварга багш)-ын санаачилгаар ММО анх хөдөө

орон нутагт зохиогдов. Дархан (дарга нь Л.Амарсанаа), Дундговь (Н.Чагнаа), Эрдэнэт (Доржпалам), Архангай (М.Гүррагчаа), Баянхонгор (Д.Бордух), Өвөрхангай (О.Батмөнх), Хөвсгөл (Л.Батсуурь), Увс (Ц.Баатар), Сэлэнгэ (Л.Алтангэрэл) аймгууд мөн УБ (М.Энхболд, П.Дорж), Баянзүрх дүүрэг (Т.Гантөмөр) ММО-г орон нутагтаа асар өндөр бэлтгэлтэйгээр зохион байгуулж Монгол улсынхаа Математик боловсролын хөгжилд зохих хувь нэмрээ оруулсныг ММОХороо баяртайгаар мэдэгдэж байна.

Монголын Математикийн Олимпиад нь өөрийн мөнхийн ивээн тэтгэгч БСШУЯ, СЭЗЯ, МУИС, МУИС-ийн МКС, МУГБ С.Цагааны сан, "Олонлог" сэтгүүл болон бусад сайн санаат хүмүүс, байгууллагын санхүүгийн дэмжлэгтэйгээр үйл ажиллагаагаа жигд давшингуй явуулж, өнөөдөр дэлхийн түвшинд хүрсэн гэж ам бардам хэлэх эрхтэй болсон юм.

Одоо манай бага, дунд ангийн багш нарын дотроос математик сэтгэлгээгээрээ онцгойрон шалгарч, ажил мэргэжилдээ үнэхээр эзэн болсон, ардын үр хүүхдийн эрдэм номд сургах үйлсэд мэдлэг чадвараараа үлгэр дууриал үзүүлэхүйц багш нар олон болжээ. Тухайлбал, дунд ангийн багш нараас Н.Дайвий-Од (Булган, Дархан, УБ) далай даян дархан аварга, Д.Бат-Орших (Увс, УБ-1) дархан аварга, Б.Баяржаргал (Баянхонгор, Хобби, Олонлог төв) даян аварга, Д.Цэрэнбямба (Дундговь) аварга, Д.Нарангэрэл (УБ-1) аварга, А.Энхжаргал (Эхлэл) аварга, А.Доржпалам (УБ-23) аварга, Б.Ганбилэг (Хөвсгөл) аварга, Р.Одгэрэл (Увс) аварга; бага ангийн багш нараас Б.Жаргалсүрэн (УБ-1, Оюуны нахиа), Г.Өнөрцэцэг (Оюуны нахиа), П.Чимэг (Олонлог төв), М.Отгонжаргал (Дундговь, Эхлэл), Ж.Энхцэцэг (Увс), Н.Даваа (Хөвсгөл), Г.Түмэндэлгэр (Сэлэнгэ), Ш.Хайрол (Баян-Өлгий), Б.Намжилмаа (Олонлог төв) нарын зэрэг ММО-ын удаа дараагийн медальтнуудыг дурдахад л хангалттай юм.

Манай улс математикийн суурь боловсролынхоо түвшингээр дэлхийн боловсрол хамгийн өндөр хөгжсөн 90-ээд орноос эхний 30-д сүүлийн 11 жилийн дундаж үзүүлэлтээр багтаж байгаа нь Монгол Улсын Боловсролын нүүр царайг харуулж байгаа хэрэг биш гэж үү! Үүнийг Монголын бүх математикчид, сурган хүмүүжүүлэгчдийн хамтын хөдөлмөрийн үр дүнгийн үзүүлэлт гэж үзэж болно. Дэлхийн аль ч улс орны хувьд хүүхдүүдийн ихэнхийг нь айлгадаг мангас нь математик байдаг бол одоо монголын бараг бүх хүүхэд, багачуудын хамгийн дуртай алим жимс нь математик болжээ, өөрөөр хэлбэл, хувь процентоор нь авч үзвэл Монгол улс лавтайяа дэлхийд тэргүүлэхээр байна.

II. Монголын Оюутны математикийн Олимпиад (МОМО) ба бусад уралдаануудын тухай.

1992 оноос МОМО-ыг зохион явуулдаг болсон нь манай дээд боловсролд илэрхий ажиглагдаад байсан тэр хоцрогдлыг арилгаж улмаар МУИС-ийн математик боловсролын түвшинг дэлхийн шилдэг их сургуулиудын түвшинд ойртуулах чухал шат гэж хэлж болно. МОМО-д МУИС-ийн математикийн ангийн оюутнууд завсаргүй 11 жил дараалан эхний 3 байрыг эзэлж байгааг дурдахад таатай байгаа ч гэсэн манай Математик Компьютерийн Сургууль (МКС)-д сургалтын агуулгадаа үндсэн өөрчлөлт хийх зайлшгүй шаардлагатай байгааг ойлгох хэрэгтэй.

Математикийн Олимпиад (МО)-ын хүрээнд аль болох олон хүнийг хамруулж бас хамгийн сонирхолтой болгох зорилгоор 1993 оноос хойш 2 жил тутамд П.Энхболдын улсын уралдааныг явуулдаг боллоо.

Энэ уралдаанд дэвшигдэх бодлогууд нь чөлөөтэй, өөрөөр хэлбэл программын хүрээнд боловч хичнээн ч хүнд байж болохыг үгүйсгэдэггүй юм. МО-ын хүрээнд үгүйлэгдээд байсан чухам энэ тал нь манай Олимпиадын хөгжилд нэг шинэ дэвшил авчирсан гэж хэлж болно. Тухайлбал, 1993 оноос хойш л манай улс ОУМО-аас тасралтгүй медаль авчирдаг болов. Түүнээс гадна П.Энхболдын уралдааны чөлөөт ангилалд хэн ч өрсөлдөж болох бөгөөд шагнал ч өндөр юм, чухамхүү энэ нь манай нийт математикчид, математик сонирхогчдын хөгжил боловсролд тус дэм болох ёстой гэж ММОХороо үзэж байгаа юм.

П.Энхболдын нэрэмжит Улсын уралдааны чөлөөт ангилалд 3 бодлогын 2-ыг нь бүтэн бодсон хүн л аваргаар нь тодрох дүрэмтэй. 2 удаа аваргаар тодорсон хүнд П.Энхболдын нэрэмжит улсын уралдааны Аварга математикч цол олгодог. Энэ цолыг хүртэх магадлал маш бага байх нь ойлгомжтой ч анхны аваргаар нь МУИС-ийн Алгебрийн тэнхимийн багш Г.Баярмагнай тодорсныг дуулгахад таатай байна. Г.Баярмагнай нөхдийнхөө хамт Математикийн төрөлжүүлсэн цуврал Олимпиадыг зохион явуулдаг болсоор 3 жил болж байгаа ба ажлынхаа үр дүнгээр 1-ээс 10-р ангийн сурагчид, багш нарт зориулсан онц сонирхолтой 2 ном бичсэнийг тэмдэглэн хэлье.

ММОХороо жил бүр ажлынхаа үр дүнгээр Олимпиадын цуврал гаргадаг. Математикийн Олимпиадын хүрээн дэх нэгэн өвөрмөц төрөл бол Оросын Холбооны Улсаас хэрэгжүүлж буй хот хоорондын уралдаан юм. Энэ уралдааныг Монгол оронд дэлгэрүүлэх үйл хэрэгт проф. А.Мекей, түүний шавь нар Л.Оюунцэцэг, Б.Баясгалан нар хүчин чармайлт гаргаж байсныг тэмдэглэх нь зүйтэй бөгөөд сүүлийн 3 жил Б.Батцэнгэл энэ олимпиадад анхаарлаа хандуулан ажиллаж байна.

Түүнээс гадна баруун таван аймгийн бүсийн олимпиад, Төмөр замын дагуух аймаг, хотуудын олимпиад, МУГБ Өлзийн нэрэмжит, МУГБ

Нямрэнцэнгийн нэрэмжит Олимпиад зэрэг олон уралдаанууд уламжлал болон явагдаж байна.

ММО ба П.Энхболдын нэрэмжит Улсын уралдааны сүүлчийн 2 шатанд дэвшигдэх бодлогуудын бусад улсуудынхаас ялгагдах нэг онцлог гэвэл тэнд дэвшигдэх бодлогуудыг заавал урьдчилан бодсон байхыг шаардахгүй гагцхүү математикийн хувьд сонирхолтой байхыг нь шаарддаг. Ийм бодлогууд дотор л хамгийн их нөлөө бүхий бодлогууд байдаг нь манай туршлагаар нотлогдоод байна. Бид асуудлын голыг нуусан, хүн төөрөлдүүлэх гэсэн бодлогын томъёоллоос аль болох зайлсхийж, бодлогыг шууд ил хэлбэрээр нь томъёолохыг эрхэмлэдэг. Бид олимпиадынхаа бодлогоор дамжуулан багш, оюутнуудынхаа мэргэжил, мэдлэгийг дээшлүүлэх системтэй арга хэмжээ авдагт ММО-ийн нэг гол зорилго оршдог юм, өөрөөр хэлбэл олимпиадад ямар ч хамаагүй хүнд бодлого дэвшүүлэх биш, чиглэсэн зорилготой, энэ онд ийм чиглэлийг гүнзгий эзэмшүүлнэ гэж зарим бодлогоо дэвшүүлдэг энэ уламжлал маань цаашид үргэлж хадгалагдан хөгжиж байгаасай гэж хүсэх байна.

III. Манай Улс ОУМО-д оролцож байгаа тухай.

ОУМО нь 1959 онд Румын улсын санаачилгаар анх зохион байгуулагдаж, түүнд тэр үеийн социалист системийн 7 орон оролцож байсан бол одоо дэлхийн боловсрол хамгийн өндөр хөгжсөн 90-ээд орон оролцдог болжээ.

Манай улс ОУМО-д 1964 оноос эхлэн нийт 33 удаа оролцохдоо 1 алт, 9 мөнгө, 28 хүрэл медаль авснаас сүүлийн 11 жилд жил тутам медаль авч амжилт нь ахисаар нийт 1 алт, 8 мөнгө, 21 хүрэл медаль авчээ. МО-ын нэг эрхэм зорилго бол авъяас билгийг нээн илрүүлж, хөгжүүлэн цэцэглүүлж, түүний үр шимийг хүртэх явдал болой. Энэ талаар ММОХороо алдсан нь бага, оносон нь үлэмж гэдэгт миний бие эргэлзэхгүй байна.

Математикийн Олимпиадгүйгээр орчин үед математикийн сайн мэргэжилтэн бэлтгэх тухай яриа байж болохгүй нь одоо дэлхий дахинд нэгэнт илэрхий болжээ. ОУМО-г зохион явуулахад дунджаар 3 сая орчим доллар зарцуулдаг байна. Ямар ч улс энэ их мөнгөний 90 орчим хувийг улсын нэгдсэн төсвөөрөө үүрч гардаг нь олон жилийн туршлагаар нотлогдсон юм. Нэг талаас хэдийгээр ийм их хөрөнгө зарцуулдаг, нөгөө талаас мөнгөөр хэмжигдэхгүй асар их цаг, хүч зарцуулж байж ОУМО-г зохион явуулдаг ч гэсэн дэлхийн олон орнууд өөрийн орондоо ОУМО-г зохион явуулахын төлөө маш их өрсөлддөгийн цаад нууц нь ОУМО-г зохион явуулснаар тухайн орны математик боловсролын түвшин мэдэгдэхүйц дээшилдэгт байгаа юм. Математик боловсролын түвшнээ дагаад нийт боловсролын түвшин ч дээшилдэг байна. Зарим нэг жишээ

дурдъя. 1990 онд ОУМО-31 Хятад улсад болоход нийт олимпиадад оролцогчдыг Хятадын нэг том дарга Их Хурлынхаа ордонд хүлээн аваад “Хятад улс хэдийд ч ОУМО-г зохион явуулахад бэлэн байна” гэж хэлж байв. ОУМО-40 Румын улсад болоход Румыны ерөнхийлөгч Э.Константинеску ОУМО-40-ийн нээлт хаалтанд биечлэн оролцож үг хэлэхдээ: “Румын улс аливаад арвигч хямгагч ханддагч гэсэн боловсролын төлөө бол хайрлах юм байхгүй. Энэ олимпиадын хугацаанд та бүхэн Румынчуудын бахархдаг бүхнийг үзэж харж, Румын орны бүрэн эзэн байх болно.” гэж хэлж байв. Харин манай улс ОУМО-г зохион явуулна гэж 3 удаа мэдэгдээд, нэг удаад нь ОУМО-г бүр мөсөн тасалдуулж, нөгөө хоёрт нь бусдад арга буюу царайчлан шилжүүлсэн нь тусгүй байна. Сүүлийн арван хэдэн жилийн байдлыг ажиглахад ОУМО-д Азийн орнууд асар их анхаарал хандуулдаг нь харагдаж байна. ОУМО-г зохион байгуулж байгаагаараа Азийн орнууд бусад бүх тивийн орнуудтай тэнцүү тоотой байгаа төдийгүй сүүлийн нилээд хэдэн жилийн байдлаар ОУМО-д эхний хорин байр эзэлж буй улсуудын дотор Азийн лавтай 10 орон байгаа нь шинэ зуун Азийн зуун болно хэмээн зарим нэг хүний ярьдгийг санагдуулах мэт.

“Бид Монгол улсынхаа математик боловсролыг дэлхийн өнөөгийн түвшинд хүргэж чадсан” гэж 40 жилийнхээ тэмдэглэлт ойн өмнө төр засаг, ард түмэндээ ММОХороо илтгэхэд нэн таатай байна.

Та бүхний минь мэдлэг өндөр, ухаан хурц, авъяас дэлгэр байж Х.Дүгэрийн нэрэмжит Монголын Математикийн 40-р Олимпиаддаа өндөр амжилт үзүүлж, алт мөнгө хүрэл медалийн эзнээр тодорч, сургууль, багш нар, аав ээж, ах дүүсээ баярлуулахын өлзийтэй ерөөлийг өргөн дэвшүүлье.

Улаанбаатар хот, 2004.05.07

Математикийн олимпиадын сүлд дуу

Нарнаас илчийг нь авч болох уу
Сарнаас гэрлийг нь салгаж болох уу
Багш та юу гэж заасан бэ
Багын нөхөд минь санаж байна уу.

Тоо тоогоо жоохон бодъёо
Томъёогоор задлан бодъёо
Олуулаа уралдан бодъёо
Олимпиадаа оролцож бодъёо

Орчлонгийн удамыг туулж болох уу
Одод эрхсийг тоолж болох уу
Эвклид юу гэж хэлсэн бэ
Эрхэм нөхөд минь санаж байна уу

Дахилт

Эрдмийн оргилд гарч болох уу
Энгүй далайг хэмжиж болох уу
Суут эрдэмтэн Мянгат өвөөгийн
Сургаалт үгийг санаж байна уу

Дахилт

Гэрлийн хурдыг давж болох уу
Тэнгэрийн хаяанд хүрч болох уу
Дэлхийд алдартай эрдэмтэн Гауссын
Дэлгэж нээсэн онолыг саная даа



*2000 оны Сэлэнгийн
олимпиадыг зохион
байгуулагчдын бүтээл

**Бурхан мэт ухаантай
Тэнгэр мэт ачлалтай
Уул мэт түшигтэй хайрт аавдаа мөргөмү.**

Бидний хайрт аав Бэсүд овогт Хайвангийн Дүгэр нь 1933 онд Говь-Алтай аймгийн Цогт суманд төрсөн. Говь-Алтай аймагт бага, дунд сургууль, Улаанбаатар хотод Багшийн сургуулийг дүүргэн, улмаар Архангай, Завхан аймаг, Улаанбаатар хотын сургуулиудад математикийн багшаар 6 жил ажиллаад, 1957-1962 онд Москва хотноо В.И.Лениний нэрэмжит Сурган Хүмүүжүүлэх Ухааны Их Сургуульд суралцан төгсгөж математик-шугам зургийн багшийн мэргэжил эзэмшсэн билээ.

Аав маань сургуулиа төгсөж ирээд 1962-1977 онд УБДС-д багш, тэнхмийн эрхлэгч, проректор, 1977-1982 онд Сурган Хүмүүжүүлэх Ухааны Хүрээлэнд эрдэм шинжилгээний ажилтнаар, 1982 оноос 1986 он хүртэл Ардын Боловсролын Яамны ерөнхий боловсролын сургуулийн хэлтсийн даргаар, 1986 оноос 1990 он хүртэл Сурган Хүмүүжүүлэх Ухааны Хүрээлэнгийн захирал, 1990 оноос Боловсрол Судлалын Үндэсний Хүрээлэнд төслийн удирдагч, секторын эрхлэгчээр ажиллаж байгаад 1997 оны 09-р сараас Гэгээрлийн Яамны харъяа Албан бус боловсролын төвийн зөвлөхөөр томилогдон улсад 46 жил ажилласан байна.

Аав минь ажил хөдөлмөрийн талбарт 46 жил ажиллахдаа өөрийн ухамсарт амьдралаа Монгол Улсын боловсролын салбарыг хөгжүүлэхэд зориулсан энгийн атлаа энгүй их судлаач эрдэмтэн байлаа. Түүний үйл ажиллагааны нэг томоохон хэсэг нь судалгааны ажил байсан бөгөөд математик, математик сургалт, сурган хүмүүжүүлэх ухааны ерөнхий асуудлуудыг хамарсан байдаг. Түүнчлэн математикаар функционал тэнцэл бишийн талаар судалгаа хийж “Н.Караматын тэнцэл бишийн нэгэн шинэ баталгаа”, “Гүйцэт тэгш хэмт функцийн тухай нэгэн тэнцэл бишийн баталгаа”-г математикт шинээр хийжээ.

Аав маань боловсролын салбарт олон “анхны” зүйлсийг санаачлан үр дүнд хүргэж байсан гавъяатай хүн билээ. Аавын минь багш бэлтгэх болон судалгаа шинжилгээ, сургууль боловсролыг хөгжүүлэх ажилд оруулсан хувь нэмэр, үр дүнг нь үнэлж Төрийн дээд шагнал Хөдөлмөрийн гавъяаны улаан тугийн одон, Алтан гадас одон, Хөдөлмөрийн хүндэт медаль, Засгийн газрын Хүндэт жуух, Ардын боловсролын, Соёлын, Биеийн тамир спортын, Радиогийн, Залуу үеийг сурган хүмүүжүүлэгч тэргүүний ажилтан цол тэмдгүүдээр удаа дараа шагнажээ.

Намтар түүхээр баян хүний энэ л орчлонд дуурсах алдартай, дурсамж дүүрэн, онцлох бүтээлтэй олонд хүндтэй, элбэрэл журамтай

амьдрах нь хүн болсны бахархал ажгуу. Ийм л эгэлгүй хүн байж дээ, бидний аав.

Хайрт ааваараа бахархаад баршгүй билээ.

Хүү Д. Гинжбаатар
 Д. Гинжболд
 Д. Болдбаатар
 Охин Д.Туяа

Зохиолч болох шахсан нь

Аав маань математикийн багш мэргэжлийг эзэмшсэн нь сонин түүхтэй агаад математикч биш зохиолч, яруу найрагч болох шахжээ. Энэ тухай эрдэмтэн, зохиолч, сэтгүүлч Ч.Алагсай гуай ингэж дурсаж байна.

“Дайн дуусч улс эх оронд маань сэргээн босголтын ажил ид өрнөж байлаа. Хөдөө, орон нутагт багшлах боловсон хүчин дутагдаж байсан тул 7-р анги төгсч байсан сурагчдыг Улаанбаатар хот руу сургуульд явуулж байв. Ингээд Алтай нутгаас Дүгэр, Цэдэндорж, Нина бид хэд багшийн сургуулийн босгыг 1949 онд алхаж орсон юм. Анги хуваарилалт болж Цэдэндорж, Дүгэр хоёр монгол хэл-уран зохиолын факультет, би физик-математикийн факультетэд хуваарилагдлаа.

Ингээд хичээл эхлээд хэд хонотол би тооны хичээлд тийм ч сайн биш, утга зохиолд сонирхолтой тул ангиа солимоор санагдаж тоонд сайнаар нь Дүгэртэйгээ ярьж тохироод ангиа сольсон юм. Ингэж миний зохиолч, сэтгүүлч болох, Дүгэрийн маань математикч болох зам нээгдсэн юм.



Тэр үед бидний гол зорилго бол сурах. Иймд бүгд хичээж сурч, нийгмийн идэвхт амьдралд оролцож дугуйлан секцэд хамрагдаж байв. Тэр үед Багшийн сургуулийн дэргэдэх гуулин хөгжмийн дугуйланд бид явдаг байлаа. Дүгэр клернетийг их чадварлаг үлээнэ.

Гаминноров гэж их чанга, бидэнтэй хир барагтай дуугардаггүй багш Дүгэрийг маань их үнэлж сайшаадаг байсан юм. Зарим үед багш нар (Раднаа, Гаминноров, Гончигдорж) Дүгэрээр маань бусад бага курсынхэнд хичээл заалгадаг байсныг би мэдэх юм.

Дүгэр маань их сэргэлэн, онц сурлагатан, авьяастай, аливаа юмны тэргүүнд л явдаг сурагч байсан юм.

Ангийн дарга

Тэр үеийн улс орны болон оюутны амьдрал хэцүү байсан ч хүндийг туулан амжилттай суралцан, маршалын цалин авч анд найз, анги хамт олноо дайлж, Сүхбаатарын талбайд гуулин хөгжим тоглодог байснаа төдийгүй багшийн сургуулийн нэг ангийн нөхөд буюу хожмын монгол орны соёлын үрийг таригч эрдэмтэн Чимидцэрэн, Загдрагчаа, Алмаас, Базаргүр, Сэр-Од, Дамдинжав, Лхагваа, Цэнд, Даваа нарынхаа тухай аав маань их ярьдагсан.



Ангийн багш Э.Раднаагийн хичээл дээр. 1949 он.

“1949 онд Багшийн сургуулийн дэргэдэх дунд сургуулийн тоо физикийн багш бэлтгэх 2 жилийн факультетэд элсэн орсон бөгөөд тэдний дотор Говь-Алтай аймгаас ирсэн, биднээс арай том биетэй, сэргэлэн хүүхэд байсан нь Хайвангийн Дүгэр байсан юм. Нэг өдөр анги удирдсан багш Э.Раднаа физикийнхээ кабинетэд Х.Дүгэрийг дуудаж аваачаад ангийн даргаар томилж, багшийн шадар туслах болгосноор Х.Дүгэр маань төгстлөө ангийн даргын үүргийг биелүүлэхийн зэрэгцээ Маршал Х.Чойбалсангийн нэрэмжит тэтгэлэгтэй Онц сурлагатан, тэргүүний сурагч байв. Мөн тэрээр гуулин хөгжмийн дугуйланд суралцдаг, калернет сайн үлээдэг байлаа. 1962-1963 оны хичээлийн жилд намайг УБДС-ийн физик- математикийн ангид суралцаж байхад тэрээр Москва хотын В.И.Лениний нэрэмжит Сурган Хүмүүжүүлэх Ухааны дээд сургуулийг математик- шугам зургийн багш мэргэжлээр төгсөн ирээд “ Бодот хувьсагчийн функцийн онол” хичээлийг зааж байлаа. Миний бие сургуулиа Онц төгсгөн Ардын гэгээрлийн сайдын 1963 оны 8сарын 1 ний тушаалаар Яамны физик- математикийн сургалт хариуцсан байцаагчаар томилогдон 1983 оны 11 сарын 15-ныг хүртэл ажилласан энэхүү 20 гаруй жилийн хугцаанд өөрийн эрхэлсэн ажил мэргэжлийн дагуу УБДС-ийн математикийн багш , тэнхмийн эрхлэгч , проректор, сурган хүмүүжүүлэх ухааны хүрээлэнгийн эрдэм шинжилгээний ажилтан, Ардын гэгээрлийн яамны Ерөнхий боловсролын хэлтсийн дарга Х. Дүгэртэй ажил хэргийн холбоотой байлаа.

1982-1983 онд Х.Дүгэртэйгээ хамтран ажиллах хувь тохиосонд би баярлаж явдаг билээ. Байцаагч хүнд тогтоол, тушаал, дүрэм заавар, албан даалгавар, албан захидал бичиж боловсруулахаас гадна хуралд тавих илтгэл, хэлэх үг бэлдэх, сонин хэвлэлд өгүүлэл бичих зэрэг бичиж боловсруулах ажил олонтаа тохиолддог. Энэ талаар Х. Дүгэр байцаагч нарынхаа бэлдсэн материалыг үзэж танилцаад үнэтэй зөвлөгөө өгдөг байсан нь түүний бичиж боловсруулах ажилд дадлагажсан, сургууль судлалын тухайд өргөн мэдлэгтэй байсантай холбоотой.

Х.Дүгэр УБДС-д ажиллаж байхдаа УБ хотын нэгдүгээр дунд сургуульд математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай анги байгуулж, математикт авьяастай хүүхдийг сургах сургалтын системийг боловсруулж практикт нэвтрүүлсэн нь бусад хичээлээр гүнзгийрүүлсэн сургалт явуулахын эхлэл болсон юм. Би 1967 онд БНУАУ-д ерөнхий боловсролын сургуулийн математикийн сургалтын туршлага судлах ажлаар 14 хоног явахдаа тэндхийн математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийн сурах бичгүүдийг авчирч Х.Дүгэрт өгсөн. Одоо хүртэл нэгдүгээр сургуулийн сурагчид орон нутгийн болон ОУ-ын математикийн олимпиадуудад амжилттай оролцдог нь Х.Дүгэр багшийн ажил хөдөлмөрийн бас нэг үр дүн мөн. Х.Дүгэр улсын математикийн олимпиадыг зохион байгуулах хорооны гишүүн байх үедээ 1967 онд

Холбооны Бүгд Найрамдах Югослав улсад болсон ОУ-ын математикийн олимпиадад манай орны багийг авч оролцож байсан. Тэрээр СХУХ-д эрдэм шинжилгээний ажилтан байхдаа математикийн багш нарын мэргэжил дээшлүүлэх дахин шалгаруулалтанд хичээл заах, математикийн багш нарын бүсчилсэн семинарыг зохион байгуулах ажилд оролцож лекц уншиж хичээл зааж байлаа.

Х.Дүгэр ЕБС-ийн математикийн хөтөлбөрүүдийг боловсронгуй болгон сайжруулах, математик сургалтын агуулгыг тогтоох улсын комисст ажиллаж үнэтэй хувь нэмрээ оруулсан билээ. Бид 1981 онд ЕБС-ийн математик сургалтын чанарыг дээшлүүлэх зарим арга хэмжээний тухай төсөл дээр хамтран ажиллаж байлаа. Х.Дүгэр бол шинийг санаачлагч, тал бүрийн өндөр мэдлэгтэй, удирдан зохион байгуулах авьяастай, заах аргач, судлаач эрдэмтэн хүн байлаа.

Дэд профессор Г. Загдрагчаа



1964-1966 он. Монгол улсын математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай анги

Онцлох бүтээлтэй олны багш

Дүгэр багшийн тухай домог шахам зүйлийг сонсож, уулзаж учирч түүний зохиосон математикийн бодлогуудыг бодож, математикийг яаж хэрэгжүүлэх вэ? хэмээн бодлоо солилцсон он жилүүдийг тоолбол бараг тавин жил болжээ.

Манай уугуул ах Б.Лхаасүрэн Улаанбаатар хотын багшийн сургуулийн захирлаар ажиллаж байхдаа Дүгэрээ, Гадинжид гэж гоц

авьяастай хоёр сурагчийг төрүүлсэн, түүний нэг нь Архангайн сургуульд багшаар ирэх болсон та нар их азтай хүүхдүүд гэж бидэнд ярьж байсан учир Дүгэрээ багшийг харах, учрах юмсан гэж бодоцгоож байж билээ.

Удалгүй намхан бор багш ирж математикт сонирхолтой хүүхдүүдэд зориулж Архангай аймагт математикийн дугуйлан байгуулж ажиллаж эхэлсэн юм. Хожим нь энэ дугуйланд явж байсан бүх хүүхдүүд гадаад, дотоодын дээд сургуульд тэнцэж суралцсан онцлогтой юм.

Математикийн бодлогын хариуг олон аргаар бодож гарган авч болдог шиг Дүгэрээ багш маань Монголын хүүхдүүдэд математик боловсрол эзэмшүүлэх гэдэг эцсийн хариуг гарган авахдаа цаг тухайн үеийнхээ байдалд зохицсон мөн ч олон оновчтой, янз бүрийн аргуудыг олж хэрэглэж чаддаг багш байсан юм.

Математикийн авьяастай хүүхдүүдийг сургах сургалтын систем боловсруулж амьдралд хэрэгжүүлсний ач буянаар математикийн сайн багш, эрдэмтэд, гоц авьяастан, сэтгэх чадвартай инженерүүд өдий төдий төрснийг өнөөдөр дурсахдаа баяртай, багшдаа баярлаж байна.

Миний сурч байсан Улаанбаатар хотын 1-р дунд сургууль дээр математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай анги байгуулж, хотын бүх сургуулиудаас математикийн авьяастай хүүхдүүдийг элсүүлэн сургасан нь үнэхээрийн чухал үр дүнд хүрч, үр дүн нь монголдоо төдийгүй дэлхийд үнэлэгдэх болсон юм. Үүний нэг жишээ бол энэ ангийн олон хүүхдүүд олон улсын олимпиадад тэргүүн байр эзэлж байсан явдал юм. Монголчуудын бахархал болсон энэ амжилтаа бататгахын тулд улсын математикийн олимпиадыг зохион байгуулж, хорооны дарга, орлогчоор 20-иод жил ажилласан бөгөөд энэ үед бид их ойр дотно харилцан санал бодлоо солилцдог байв.

Дүгэр багш маань сайн багшаас авьяаслаг сурагч төрдөг гэдэг зарчмыг хэрэгжүүлэхийн тулд багш бэлтгэх ажилд их анхаарч түүгээр ч барахгүй багшийг 3-н жилийн хугацаатай бэлтгэдэг байсныг 4 жил болгох, багш нарын давтан курс, бүтээлч багш нарын хамтлаг байгуулах зэрэг үр бүтээлтэй олон ажлыг зохион байгуулсныг бид мэднэ.

Өнөө үед дэлхий даяар өргөн нэвтрүүлж байгаа томоохон арга хэмжээ бол бүх нийтэд шинжлэх ухааны боловсролыг эзэмшүүлэх асуудал болоод байгаа билээ. Энэ асуудлыг монголд нэвтрүүлэх үндэс суурийг чухамхүү Дүгэрээ багш анх тавьсан гэж хэлж болно. Говийн эмэгтэйчүүдийн боловсрол нэртэй чухамдаа Монголын бүх эмэгтэйчүүдэд зориулсан радио хичээл, 20 гаруй гарын авлага ном нь шинжлэх ухааны боловсролыг сурталчлах аргазүйг боловсруулсан арга хэмжээ болсон юм.

Түүний боловсролын шинэчлэлд оруулсан ихээхэн хувь, хандив, боловсролын шинжлэх ухаанаар туурвисан олон арван бүтээлийг энд бас дурдах нь зүйтэй.

Багш бол Монголын боловсрол, Боловсролын шинжлэх ухаан, өндөр мэдлэгтэй олон сайхан сэхээтнүүд, ялангуяа математикчдийг бэлтгэхэд зүйрлэшгүй их гавьяа байгуулсан, мянга мянган шилдэг шавьтай хүн байлаа. Үнэндээ тэр бол гавьяат багш мөнөөс мөн байсан юм.

Дүгэр багштай багш шавь, эрдэм ухаан ажил төрлийн холбоотойгоор явж ирсэн 50-иад жилд тэрбээр ямар ч нөхцөлд нэг л зангаараа байж, багш шавийн жудаг сахиж ирснийг өнөөдөр тэмдэглэхдээ таатай байна.

УИХ-ын гишүүн, Академич, доктор (Ph.D, Sc.D)

Б. Чадраа



Гавьяатны гавьяа мартагддаггүй

Математикийн боловсролын хөгжилд аавын маань оруулсан нэг том хувь нэмэр бол ерөнхий боловсролын сургуулийн сурагчид болон төсөлд хамрагдсан насанд хүрэгчдэд зориулсан арваад сурах бичиг зохиож, редакторласан бөгөөд эрдэм шинжилгээ, арга зүйн 4 монограф, эрдэм шинжилгээний 4 тайлан, 8 гарын авлага,



судалгааны 31, аргазүйн 40 гаруй өгүүлэл бичиж нийтлүүлсний дээр онол аргазүйн 9 номыг гадаад хэлнээс орчуулан хэвлүүлсэн байна.

“Ахмад багш, нэрт сурган хүмүүжүүлэгч, шинжлэх ухааны доктор, профессор, Х.Дүгэрийг би 1962 оноос мэдэх бөгөөд түүнтэй 1965-1977, 1982-1990 онуудад хамт ажиллаж байсан юм.

1962 оны өвөл Х.Дүгэр багш Математикийн логикийн элементийг Монгол Улсын Их Сургуулийн оюутнуудад оройн цагаар зааж байлаа.

Х.Дүгэр багшийг Москвад дээд сургууль дүүргэн ирээд Улсын Багшийн Дээд Сургуулийн Математикийн тэнхмийн эрхлэгчээр ажиллаж байна гэж анхны хичээлийн эхэнд эрхлэгч, доцент Ү.Санжмятав багш маань танилцуулж бидний сургалтанд амжилт хүсч байж билээ. Х.Дүгэрийн намуун дөлгөөн зан, өндөр мэдлэг, заах ур чадвар, цэвэр цэмцгэр хувцаслалт нь оюутан бидэнд үлэмж таалагдаж байлаа. Х.Дүгэр УБДС-ийн математикийн тэнхмийг их сургууль дүүргэсэн үндэсний мэргэжилтнээр бэхжүүлэх бодлого тууштай баримталж хэрэгжүүлсэн юм. Үүнийг МУИС-ийг 1963 онд дүүргэсэн Д.Ламжав, Ц.Маам, 1965 онд дүүргэсэн Ж.Баатар, Б.Пүрэв, Ц.Цэнд-Аюуш, 1966 онд Ленинградын Их Сургуулийг дүүргэсэн Н.Намсрай болон ЕБС-д үр бүтээлтэй ажиллаж байсан зарим залуу багш Д.Гүржав, Д.Цэрэндулам, Н.Ичинхорлоо нарыг сонгон судалж математикийн багшаар авч ажиллуулсан явдал гэрчилнэ.

Х.Дүгэр УБДС-ийн математикийн тэнхмийн эрхлэгчээр 1962-1972 онд ажиллахдаа математикийн багш бэлтгэх ажлын чанарыг дээшлүүлэхийн тулд ЗХУ болон бусад социалист орны туршлага, эрдэмтдийн туслалцаанд тулгуурлан сургалтын төлөвлөгөө, хөтөлбөрийг шинэчлэн, хэрэгжүүлсэн юм. Тухайлбал, багш бэлтгэж байсан 3 жилийн сургалтын төлөвлөгөөг 4 жилийн болгож, тооцоолон бодох техникийн үндэс хичээлийг шинээр оруулж, математикийн хичээлийн онолын түвшинг дээшлүүлэхэд чиглэсэн зэрэг олон ажлыг удирдан зохион байгуулсан юм.

Х.Дүгэр тэнхмийнхээ багш нарын мэргэжлийг дээшлүүлэх ажилд санаачилгатай хандаж, өөрийн хувийн баялаг номын сангийнхаа номоор бидэнд үйлчлэхийн зэрэгцээ орчин үеийн математикийн шинжлэх ухааны үзэл санааг нэвтрүүлэхэд чиглэсэн семинарыг үндэслэлцэж, нөхцөл боломжоор хангаж байсан нь бидний мэргэжлийн мэдлэг, заах ур чадвар дээшлэхэд үнэтэй хувь нэмэр болж байлаа.

Х.Дүгэрийн ажилсаг, амралт чөлөөт цагийн наргианч зан чанар тэнхмийн эвсэг, гар сэтгэл нийлсэн хамт олныг бүрдүүлэхэд үлэмж нөлөөлсөн юм.

Түүний “Борхон голын ус нь . . .” гэж аялаад л, орчин цагийн бүжгийг чадварлаг бүжиглэж байсан нь тодхон санагдаж байна.

Х.Дүгэр УБДС-д математикийн өндөр боловсролтой багш бэлтгэх, математикийн тэнхмийг бэхжүүлэх хэрэгт мартагдашгүй их үүрэг гүйцэтгэсэн гавъяат үйлстэн билээ”.

МУБИС-ийн хүндэт профессор Ж.Баатар

**Хийсэн ажил, хэлдэг үг нь сэтгэлд тодхон
буурал багш минь**

УБДС-ийн проректороор ажиллахдаа тодорхой ажил хийж, үр дүнд хүрсэн бөгөөд түүний хичээл зааж төгсгөсөн 2000 гаруй багш, жүжигчин, тамирчин шавь нараас нь 20 гаруй хүн энэ хугацаанд гавъяат цол хүртжээ.



1976 он. Багшийн дээд сургуулийн багш нар

Миний бие 1972 онд УБДС-ийн математикийн тэнхимд багшаар томилогдон ирэхэд тус сургуулийн сургалт, эрдэм шинжилгээ эрхэлсэн дэд захирал Дүгэр гэдэг намхандуу нуруутай, эргэлдсэн алаг нүдтэй, нэлээн сэргэлэн байрын хүн хүлээн авч уулзан зөвлөгөө, даалгавар өгч байсан үеэс энэ хүнийг мэдэх болсон юм.

Х.Дүгэр багш 1972-1978 онд УБДС-ийн дэд захирлаар ажиллах хугацаандаа хэд хэдэн шинэлэг аргыг удирдан зохион байгуулж зохих үр дүнд хүрсэн юм. Үүнд:

Тэр үед мэргэжилтэн бэлтгэх онолд дөнгөж гарч байсан “Мэргэжилтний загвар”-ын тухай судалж, боловсруулсны үндсэн дээр анх удаа багш, боловсролын мэргэжлийн загваруудыг мэргэшил бүрээр гаргуулсан нь багшлах боловсон хүчин бэлтгэх ажлын чанарыг сайжруулах, олон улсын жишигт нийцүүлэхэд үнэтэй хувь нэмэр оруулсан юм.

Багш бүрийг судалгааны ажилд оролцуулах, тэнхим бүрийг судалгааны ажлын нэгдсэн чиглэлтэй болгох зорилт дэвшүүлэн тус сургуулийн цөөнгүй залуу багш нарыг Европын орнуудад аспирантурт суралцуулах, горилогчоор хамгаалуулах зэрэг арга хэмжээг авч хэрэгжүүлсний үр дүнд УБДС-ийн эрдэмтэн багш нарын эгнээ жилээс жилд өргөжин тэлж сургалтын хажуугаар судалгааны нэг томоохон төв болох үндэс суурь тавигдсан билээ.

Энэ хугацаанд математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалтын асуудлыг анх удаа судлан Улаанбаатар хотын нэгдүгээр дунд сургууль дээр туршилт явуулж тухайн сэдвээр дэд эрдэмтний зэрэг хамгаалсан бөгөөд энэ бүтээл нь Монгол улсын ерөнхий боловсролын дунд сургуулиудад гүнзгийрүүлсэн болон төрөлжсөн сургалт явуулах үндэс суурь нь болж чадсан юм. Энэ ажил нь өнөөгийн өндөрлөгөөс харахад сургалтыг нийгмийн хэрэгцээ шаардлага, суралцагчдын авъяас, сонирхолд нийцүүлэн явуулах тухай өнөө үед ид хүчээ авч дэлхийн олон оронд хэрэгжиж байгаа прагматизмын онолыг хэрэгжүүлэх анхны оролдлого эхлэл байж чадсанаараа онцгой чухал ач холбогдолтой юм.

Улс төр нь тэмдэглэхэд Дүгэр багш маань ажлын төлөө уйгагүй зүтгэдэг, эрэл хайгуул байнга хийдэг, залуу багш нарыг өсгөж өндийлгөх талаар ихээхэн анхаарч тусалж ажилладаг манай орны нэрт эрдэмтэн, ахмад багшийн нэг үлгэр жишээ мөнөөс мөн юмаа.

МУБИС-ийн дэд захирал, проф. Ц.Батсуурь

Х. ДҮГЭР БАГШИЙН ТУХАЙ ДУРСАМЖ

Аавын маань санаачлан гардан зохион байгуулсан “Сурагчийн жил”-ийн ажил нь ерөнхий боловсролын сургууль, цэцэрлэгт нийгмийн бүх салбар, эцэг эх, насанд хүрэгчдийн анхаарлыг чиглүүлж, тэдний сургууль, цэцэрлэгт хандах хандлагыг өөрчилсөн юм.



1982 он. Сурганы хүрээлэн. Эрдэм шинжилгээний бага хурал дээр

Х. Дүгэр багшийг 1973-74 оны үеэс оюутан байхдаа таних болсон ба 1975 онд УБДС-д багш болж үлдэхдээ түүнтэй нилээд ойр дотно танилцсан юм. Тэр үед багш маань тус сургуулийн проректор байлаа.

Дараа нь хэдэн жилийн хойно, 1982 онд Дээд, Тусгай, Дунд боловсролын улсын Хороо, Ардын боловсролын яамыг татан буулгаж нэгтгэхэд бид хоёр шинэ яамны хэлтсийн даргаар хамтарч ажиллах хувь тохиосон юм. Би Ардын боловсролын яамны Гадаад харилцааны хэлтсийн дарга, багш Ерөнхий боловсролын хэлтсийн даргаар томилогдов. 1985 онд би ЗХУ-д аспирантурт суралцахаар явж, 1988 онд төгсөж ирээд МАХН-ын ТХ-нд зааварлагчаар томилогдоход багш Сурган хүмүүжүүлэх ухааны хүрээлэнгийн захирлаар ажиллаж байлаа.

Харин 1991 оны 1-р сарын 21-нд СХУХ, Мэргэжлийн боловсролын аргазүй, судалгааны Төвийг нэгтгэж, Боловсролын хүрээлэнг байгуулахад багш бид хоёр бас дахин нэг газарт ажиллах болсон юм. Багш хүрээлэнд секторын эрхлэгчээр, би хүрээлэнгийн орлогч захирлаар томилогдов.

1997 оны 09-р сараас хүрээлэнгийн Албан бус боловсролын секторыг яамны харъяанд Албан бус боловсролын Төв болгон бие даалгаж гаргахад багш төвийн зөвлөхөөр томилогдов. Ийнхүү би багштай янз бүрийн завсарлагатайгаар бараг хорин хэдэн жилийн турш хамт ажилласан юм байна.

Х.Дүгэр багш намайг оюутан байхад хичээл заагаагүй боловч намайг шавиа гэж тооцно. Би ч тэр хүний олон жилийн их туршлага, мэдлэгээс хамт ажиллах хугацаандаа хэрээрээ суралцсаны тул багшаа гэж хүндэлдэг. Дүгэр багш одоо байхгүй, бурхан болсон ч тэр хүний зүтгэл, бүтээл цаашдаа ч бидний үеийнхэнд үлгэр дууриал болсоор байна.

Дүгэр багш Улаанбаатар хотын лаборатори 1-р дунд сургуульд математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай анги байгуулж, 1964 оноос туршилт явуулсан дүнгээрээ “Математикт авъяастай хүүхдийг сургах сургалтын системийг судалсан нь” сэдвээр 1972 онд сурган хүмүүжүүлэх ухааны дэд эрдэмтний зэргийг хамгаалснаас хойш математик сургалтын агуулгыг тогтоох, аргазүйг боловсронгуй болгох ажилд байнга гар бие оролцож, үр дүнтэй ажиллаж иржээ. Энэ чиглэлээрээ *Математикийн төрөлжүүлсэн сургалттай ангийн математик сургалтын системийг судалсан нь* монографи, математик сургалтын хэд хэдэн сурах бичиг бичиж, редакторласнаас гадна математик заах аргын олон өгүүлэл бичиж нийтийн хүртээл болгосон юм.

Х.Дүгэр багш Сурган хүмүүжүүлэх ухааны хүрээлэн, Боловсролын хүрээлэнд захирал, секторын эрхлэгч, төслийн удирдагчаар 15 жил ажиллах хугацаандаа сурган хүмүүжүүлэх хөдөлмөрийн зохион байгуулалтаар хэд хэдэн сэдвээр судалгаа хийж, үр дүнг нь практикт нэвтрүүлсэн юм. 1980-аад оны эхээр сурган хүмүүжүүлэх хөдөлмөрийг

шинжлэх ухааны үндэстэй зохион байгуулах нь сэдвээр томоохон судалгаа хийж, *Ерөнхий боловсролын сургуульд сурган хүмүүжүүлэх хөдөлмөрийг шинжлэх ухааны үндэстэй зохион байгуулах асуудалд* нэртэй 8 х.х монографийг зөвлөлтийн эрдэмтэдтэй хамтран бичиж хэвлүүлсэн байна.

1990 оноос ЮНЕСКО-гийн Ази, Номхон далайн бүсийн төвөөс тасралтгүй боловсролын талаар хэвлэн гаргасан цуврал 9 боть сургалтын материалыг хүрээлэнгийн Албан бус боловсролын секторын Г.Өлзийнэмэх, Д.Хишигбуян зэрэг ажилтнуудтай хамтран орчуулан хэвлүүлж, нийтийн хүртээл болгосон нь манай оронд албан бус, зайны сургалтын тухай ойлголт, шинэ хандлага бий болоход чухал арга хэмжээ болсон юм. Энэ шинэ байр сууринаас боловсролд хандах үзэл баримтлал бий болгох, 1991, 1995 онд боловсролын хуулийн төсөл боловсруулах Хүрээлэнгийн ажлын хэсэгт ажиллах зэргээр Монгол Улсад боловсрол нь албан ба албан бус боловсролын сектороос бүрдэнэ гэдэг санааг томъёолуулахад их үүрэг гүйцэтгэсэн билээ. Энэ нь Х.Дүгэр багшийн манай оронд ерээд оны эхнээс шинэ агуулгаар үүсэн хөгжсөн боловсрол судлалд оруулсан хувь нэмэр юм. Багшийн зарим бүтээл нь ЗХУ, АНУ, БНАГУ, Япон, Болгар улсуудад хэвлэгджээ.

Дүгэр багш олон шавьтай, сурган хүмүүжүүлэх ухаанаар эрдмийн зэрэг хамгаалуулах Зөвлөлд дарга, гишүүнээр ажиллаж байсан эрдэмтэн юм. Тэрээр 9 горилогчийн ажлыг удирдаж дэд эрдэмтний зэрэг хамгаалуулсан ба 6 хүний диссертацийн ажилд шүүмж бичсэн байна.

Х.Дүгэр багш 1974 онд дэд профессор, 1980 онд эрдэм шинжилгээний ахлах, 1990 онд эрдэм шинжилгээний тэргүүлэх ажилтан, 2000 онд профессор цол хүртэж, 2002 онд “Албан бус боловсролын тогтолцоог төлөвшүүлэн бүрэлдүүлэх онол арга зүй” сэдвээр сурган хүмүүжүүлэх ухааны докторын (Dr.Sc.) зэрэг амжилттай хамгаалсан эрдэмтэн юм.

Х. Дүгэр багш боловсролын салбарт 46 жил ажиллахдаа бага, дунд сургууль, дээд боловсролтой багш бэлтгэх сургалт, сурган хүмүүжүүлэх судалгааны салбарт бодотой хувь нэмэр оруулсан, манай гавъяатай ахмад үеийн төлөөлөгч юм.

Тэрээр хариуцсан салбараа хөгжүүлэхийн төлөө бие хайргүй зүтгэж, байнга шинийг сэдэн нэвтрүүлж, тодорхой үр дүнд хүрч ирсэн, манай нэртэй сурган хүмүүжүүлэгч эрдэмтэн байв. Иймд Боловсрол судлалын шинжлэх ухааны Академи 2002 онд профессор Х.Дүгэрийг жинхэнэ гишүүнээрээ сонгосон юм.



Боловсролын хүрээлэнгийн захирал
Проф.Н.Бэгз

Нөхрийн тухай дурсамж

Сургалтын чанарыг сайжруулах, багш нарын ур чадварыг өсгөн хөгжүүлэх талаар аавын маань санаачлан хийсэн бас нэг гол ажил бол "Бүтээлч багш нарын хамтлаг" байгуулж, тэргүүн туршлага бий болгох, бүтээлч багш нарын туршлагыг нэгтгэн дүгнэж нэвтрүүлэх, "Нээлттэй хичээлийн өдөрлөг" нэртэй тэргүүний заах аргач багш шалгаруулах ажил бөгөөд тэр үед бүтээлч багшаар бүртгэгдэж, тэрхүү хамтлагт орж байсан 20-иод багшийн 4 нь улсын гавъяат багш болжээ. "Нээлттэй хичээлийн өдөрлөг" нь уламжлал болон "Багш нарын ур чадварын уралдаан" нэртэйгээр одоо ч явагдаж үр дүнгээ өгсөөр байгаа билээ.



1987 он. Улаанбаатар хот. СХУХ. Олон улсын бага хурал

Миний бие 10 жилийн лаборатори нэгдүгээр дунд сургуульд бага ангийн багшаар ажиллаж байх үеэс Х.Дүгэр багшийг зүс таних болсон юм. Манай сургуульд 1960-аад оны дунд үеэс математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай анги нээж, тус ангид математикийн төрлийн хичээлийг тэр үеийн их, дээд сургуулийн багш нар заадаг байлаа. Тэдгээр багш нарын нэг нь Улсын Багшийн Дээд Сургууль (тэр үеийн нэрээр)-ийн багш махлаг цагаан залуу Х.Дүгэр байсан юм.

Х.Дүгэр багш энэ ангид хичээл заасан олон жилийн туршлага, онолын судалгаанд үндэслэн 1970-аад оны эхээр "Математикт авъяастай хүүхдийг сургах сургалтын системийг судалсан нь" сэдвээр сурган хүмүүжүүлэх ухааны дэд эрдэмтний зэрэг амжилттай хамгаалсан. Тэр үед сурган хүмүүжүүлэх ухаанаар эрдмийн зэрэг хамгаалах нь манайдаа босго өндөртэй, нарийн ажил байлаа.

Хожим нь би 1977-1982 онд Х.Дүгэр багштай Сурган Хүмүүжүүлэх Ухааны Хүрээлэнгийн «сурган хүмүүжүүлэх ухааны ерөнхий асуудал судлах сектор», «сургалтын агуулга, арга зүйн сектор»-т эрдэм шинжилгээний ажилтан, ахлах ажилтан, 1986-1990 онд Сурган Хүмүүжүүлэх Ухааны Хүрээлэнгийн захирлаар ажиллах үед нь олон жил ойр дотно хамтран ажиллаж байлаа.

Х.Дүгэр багш мэргэжлийн хүмүүстэйгээ хамтарч ерөнхий боловсролын сургуулийн математикийн боловсролын агуулга, арга зүйг боловсронгуй болгох чиглэлээр үр бүтээлтэй ажиллаж байсан. Сургах туршилт, сурган хүмүүжүүлэх тэргүүн туршлага, онолын судалгааг үндэс болгож боловсруулсан математикийн боловсролын агуулга нь хэд хэдэн үеийнхний оюун ухааны шимт тэжээл болсон.

Х.Дүгэр багш шинжлэх ухаан техникийн дэвшлийг сургалтын практикт нэвтрүүлэхэд их анхаардаг байсан. Тухайлбал түүний идэвхтэй санаачилгаар 1980-аад оны сүүлчээр ерөнхий боловсролын сургуулийн сургалтын төлөвлөгөөнд **«Тооцоолон бодох техникийн үндэс»**-ийг судлагдахуун болгон тусгасан нь өнөөдөр ямар их ач холбогдолтой байгаагаар илэрч байна.

Х.Дүгэр, сургалтын агуулга нь хичнээн сайн байлаа ч түүнийг хөгжсөн багшгүйгээр хэрэгжүүлэх ямар ч боломжгүй гэж үздэг байлаа. Энэ үзэл баримтлалаа иш үндэс болгож, багшийн хөгжилд тус дэм болох, сурган хүмүүжүүлэх тэргүүн туршлагыг нэгтгэн дүгнэх, түгээн дэлгэрүүлэх зорилгоор «бүтээлч багш нарын хамтлаг», «нээлттэй хичээлийн өдөрлөг»-ийг тэр үеийн төрийн захиргааны төв байгууллагаар шийд гаргуулан зохион байгуулж эхэлсэн нь өнөөдөр ч ач холбогдлоо алдаагүй байна.

Х.Дүгэр Сурган Хүмүүжүүлэх Ухааны Хүрээлэнгийн захирлаар ажиллах хугацаандаа байгууллагын гадаад харилцааг бэхжүүлэх, эрдэм шинжилгээний ажилтнуудын онолын бэлтгэл, ур чадварыг ахиулахад анхаарч ажилладаг байлаа.

МУБИС-ийн дэд проф. Д.Дашхүү

**Манай улс ЕБС-ийг 11 жилийн сургалтын тогтолцоонд
тэр үед шилжүүлсэн бол...**

**1980-аад оны эхэн байна уу, дунд үед байна уу аав маань:
“Африкийн Мали, манай улс хоёр л дунд сургуульд хүүхдийг найман
наснаас нь авах юм.” гэж их л халаглан ярьж билээ.**

Х.Дүгэр багш нь Сурган Хүмүүжүүлэх Ухааны Хүрээлэнд ажиллаж байх хугацаандаа ЕБС-ийн бүтцийг шинэчлэх ажлыг шинжлэх ухааны

үндэстэй зохион байгуулах талаар нэлээд санаа тавьдаг эрдэмтдийн нэг байлаа.

СХУХ-ийн захирлаар ажилласан тухайлбал, 1986 оноос ЕБС-ийн сургалтын төлөвлөгөө, агуулгыг 11 жилийн тогтолцоонд шилжүүлэх, хүүхдийг 7 наснаас нь сургуульд элсүүлэн сургах ажлыг санаачлан зохион байгуулж идэвхтэй ажиллаж байсан юм. Энэхүү ажил нь тухайн цаг үеийн байдлаас болж хойшлогдож байлаа.

Түүнчлэн хүрээлэнгийн гадаад харилцааг өргөжүүлэх жишээлбэл, ОХУ-ын эрдэм шинжилгээний байгууллагууд, БНХАУ-ын ӨМӨЗО-ны Сурган Хүмүүжлийн Хороо, Япон, БНСУ зэрэг Зүүн Өмнөд Азийн орнуудын боловсрол, шинжлэх ухаан, сургалтын байгууллагуудтай хамтын ажиллагааг хөгжүүлэхэд ихээхэн анхаарсны дүнд манай улсад албан бус боловсрол болон тасралтгүй боловсрол хөгжих үндэс суурь тавигдсан юм.

Мөн суралцагчдад эдийн засгийн боловсрол, хүмүүжил олгоход тодорхой анхаарал тавьж, бид хамтран өгүүлэл бичиж зөвлөмж, гарын авлага хэвлүүлж байсан нь миний сэтгэлд тодхон байна.

Монголын сурган хүмүүжүүлэх ухаан, боловсрол судлалын томоохон эрдэмтэн, математикч Х.Дүгэр багшийн ажилсаг чанар, хичээл зүтгэл, бүтээл туурвилыг эргэн санахад бахархалтай байна.

Г.Содномваанчиг Ph.D (Боловсролын Хүрээлэнгийн
сургалтын агуулга, технологийн төвийн
эрхлэгч, дэд.проф)

Эргэн санахын учир

Аав маань 1964 оноос 20 гаруй жил Улсын математикийн олимпиадыг зохион байгуулах комисст орлогч дарга, гишүүнээр ажиллаж математикт авъяастай хүүхдийг сургах, хөгжүүлэх ажилд идэвх зүтгэл гарган ажиллаж олон улсын математикийн олимпиадад сурагчдыг бэлтгэж манай улсын төлөөлөгчдийг хэд хэдэн удаа тэргүүлэн явж байжээ.

Монголын боловсролын салбарыг хөгжүүлэх үйлсэд хүчин зүтгэж явсан нэгэн ахмадын тухай өөрт төрсөн бодол эргэцүүллээ нэхэн санахад таатай байна.

Энэ хүн аваас Хайвангийн Дүгэр хэмээх эрдэмтэн бөгөөд байнга сурч мэдэхийн төлөө өөрийгөө болон өрөөл бусдыг, тухайлбал багш нар, шавь нараа уриалан дуудсан бүтээлч, хөдөлмөрч нэгэн тул бүхий л амьдралаа Монголын боловсролын салбарыг хөгжүүлэхэд зориулсан

багш, сурган хүмүүжүүлэгч, эрдэмтэн хүн байсан гэдэгтэй ихэнх хүмүүс санал нэгдэх буй заа.

Түүний гар бие оролцсон, санаачлан хийсэн бодотой ажлаас тоймлон дурдахад:



1972 он. Олон улсын математикийн олимпиадад оролцох багийг бэлтгэж байсан багш нар

Хайвангийн Дүгэр нь жирийн багшаас УБДС-ийн тэнхмийн эрхлэгч, проректор, СХУХ-ийн захирал, Ардын Боловсролын Яамны хэлтсийн дарга зэрэг ажлыг хийж байлаа.

Х.Дүгэр нь боловсрол судлал, Албан бус боловсролын тогтолцоог монгол улсад оновчтой тогтоох, математикийн сургалтыг боловсронгуй болгох, багш нарын мэргэжлийн боловсролыг тасралтгүй дээшлүүлэхэд ихээхэн анхаарч иржээ. Ялангуяа, “Математикт авьяастай хүүхдийг сургах сургалтын системийг судалсан нь” сэдвээр эрдмийн зэрэг хамгаалсан бөгөөд математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийг Улаанбаатар хотод 1-р сургуулийг түшиглэн байгуулсан, олимпиадын хөдөлгөөнийг монгол улсын нөхцөлд дэлгэрүүлэн хөгжүүлэхэд үнэтэй хувь нэмэр оруулсан билээ. Энэ суурь дэвсгэр дээр суурилсан математикийн олимпиадыг олон улсын хэмжээнд хүргэхэд Х.Дүгэр багшийн оруулсан хувь нэмрийг мартах учиргүй.

Боловсролын Яаманд хэлтсийн дарга байхдаа тэр үеийн зөвлөлтийн сурган хүмүүжүүлэгчдийн туршлагад тулгуурлан “Нээлттэй хичээлийн өдөрлөг”-ийг санаачлан зохион байгуулсан нь эдүгээ “Багш нарын ур чадварын уралдаан” болон цар хүрээ нь улам өргөжиж, нийт сургууль багш нарыг хамарсан үр дүнтэй ажил боллоо.

Х.Дүгэр нь боловсролын салбарт ажиллахдаа олон арван ном, товхимол, өгүүлэл, монограф бичсэнээс гадна боловсролын салбарын гадаад харилцааг өргөжүүлэхэд идэвхтэй ажилласан юм. ЮНЕСКО-ийн Азийн соёлын төв (АССИ), Ази номхон далай-Зүүн өмнөд бүсийн тасралтгүй боловсролын төвтэй байнга холбоотой ажиллан албан бус боловсрол, тасралтгүй боловсролын үзэл санааг монголд нэвтрүүлэхэд удирдах боловсон хүчин, сургагч багш нарыг бэлтгэх, сургалтын материал бэлтгэхэд маш чухал үүрэг гүйцэтгэсэн юм.

Үүнтэй холбогдон “Говийн эмэгтэйчүүдийн боловсролын хэрэгцээг хангах албан бус боловсрол” төсөл, “Зайны сургалтын төв” зэргийг байгуулж түүнийг хөл дээр нь босгоход Х.Дүгэр багшийн оруулсан хувь нэмэр асар их билээ.

Говь-Алтай аймгийн харъяат Хайвангийн Дүгэр багшийн тухай хамтран ажиллаж энэ хүнээс их зүйлийг мэдэж авсан хүний хувьд эргэн санахад ийм бөлгөө.

ММО-ын зохион байгуулах хорооны орлогч дарга,
Соёл-Эрдэм ДС-ийн захирал Шарнууд овогт
Пүрэвдоржийн Дорж



2002 он. Шинжлэх Ухааны Докторын зэрэг хамгаалсны дараа

Багш маань урам хайрлаж, номын үрийг тариална.

**Тарьсан тэр л үрнээс нь хойч үе маань
арвин их эрдмийн ургац хураасаар ажгуу**

...Тэр үед электрон тооцоолох машин гэж нүсэр том зүйл байсныг бид ааваасаа мэдэж авч билээ. Аав маань тэрхүү машины талаар бичсэн “ЭВМ” нэртэй сурах бичгийг багш, оюутнууддаа уншуулж заах тухайгаа ярьж, үүнийгээ ч ажил хэрэг болгосон нь одоогийн мэдээлэл зүй буюу компьютерийн хичээлийн үндэс суурь болсон юм.

Аугаа их эрдэмтэн Гаусс “Математик бол шинжлэх ухааны хаан, харин арифметик бол математикийн хатан хаан” гэж хэлсэн байдаг. Энэ сургаалыг удирдлага болгон Монголын залуучууд, өсвөр үеийг эрдэм боловсролтой, тэр тусмаа математик сэтгэлгээтэй иргэд болгон төлөвшүүлэхийн төлөө өөрийн ухамсарт амьдралаа бүхэлд нь зориулсан хүн бол яах аргагүй миний багш Х.Дүгэр байлаа.

Багш маань Москва хотод Их сургууль төгсөж математикийн багшийн мэргэжил эзэмшсэн гэдэг. Тэрээр 1967 онд намайг УБДС-ийн математикийн ангид ороход багшилж, математикийн олон сонирхолтой бодлого бодуулж шинжлэх ухааны нээлт, шинэ санаа, батлагдаагүй байгаа теором, аксиомын тухай мэдээлэл өгч оюутан бидний сурах идэвхийг өрнүүлж, багш бэлтгэх ажилд чанарын амжилт гаргасан хүн гэж ангийнхан маань ярилцдаг сан.

Дүгэр багш маань биднээр ном их уншуулж, тэмдэглэл хөтөлж хугацаандаа өгсөн номоо авч, агуулгыг нь яриулан шалгаад “Сайн байна” гэхэд нь илүү ихийг мэдэхсэн хэмээн урам ордог байлаа. Магадгүй багшийнхаа өгсөн энэ л урмын хүчинд онц сурдаг оюутан байж дээ, би.

Манай багш ажлынхаа хажуугаар нийслэл, аймгийн зарим ЕБС дээр математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай анги байгуулж, сургалтын гарын авлага, аргазүйгээр мэргэжлийн багш нарыг хангадаг, мөн математикийн олимпиад явуулж дүгнэдэг байлаа. 1964 оноос математикийн олимпиадыг зохион байгуулах ажлыг 20 гаруй жил удирдаж, тоонд авьяаслаг хүүхдийг сургах, хөгжүүлэхийн төлөө багш маань идэвх зүтгэл гарган ажиллаж, “Математикт авьяастай хүүхдийг сургах сургалтын тогтолцоог судалсан нь” сэдвээр 1972 онд эрдмийн зэрэг хамгаалж төстээр сурагчдын мэдлэгийг шалгаж дүгнэх асуудлыг боловсруулсан эрдэмтэн мөн.

Х.Дүгэр багш сурган хүмүүжүүлэх хөдөлмөрийг шинжлэх ухааны үндэстэй зохион байгуулах талаар “Монгол оронд албан бус боловсролыг хөгжүүлэх онол, аргазүй” сэдвүүдээр томоохон судалгаа хийж эрдэм шинжилгээний тайлан, монографийг бичиж хэвлүүлсэн юм. Түүний

удирдлаган дор Албан бус боловсролын “Зайны сургалтын төв” байгуулагдан хүн амын боловсролыг тасралтгүй дээшлүүлэх янз бүрийн сургалт аймаг, сум бүрт байнга явагдаж байна.

Миний бие эрдэмтэн багшийнхаа удирдлага дор “Монгол улсад бүх нийтийн боловсролыг албан бус сургалтаар хөгжүүлэх аргазүйн зарим асуудал” сэдвээр судалгаа хийж 2003 онд докторын (Ph.D) зэрэг хамгаалсан билээ. Багш маань сургууль, багш сурагчид, насанд хүрэгсдэд зориулж 10 гаруй сурах бичиг, эрдэм шинжилгээ, онол, аргазүйн 12 ном, мөн олон арван өгүүлэл бичиж нийтлүүлсний гадна ЮНЕСКО-гийн Ази Номхон далайн бүсийн төвөөс тасралтгүй боловсролын талаар гаргасан цуврал 9 боть сургалтын номыг орчуулан хэвлүүлж олны хүртээл болгосон нь манай орны боловсролын салбарын хөгжилд тодорхой хувь нэмрээ оруулсан нь дамжиггүй.

Түүний олон арван шавь болох математикийн багш нар монгол улсын өнцөг булан бүрт өсвөр үеийг эх орон, ард түмнээ гэсэн бүтээлч иргэд болгон сурган хүмүүжүүлэхийн төлөө хайрт багшийнхаа хөдөлмөр зүтгэлийн үргэлжлэл, залгамж болон ажиллаж байгаа нь бахархууштай.

Шавь Боловсрол судлалын ухааны
доктор (Ph.D) Б.Сандаг

Дүгэр багшаа дурсахуй

Ном бол аавын маань багш, нөхөр, нандигнан хайрладаг, үр хүүхэд биднийг, шавь нараа нөхөрлүүлэхийг хүсдэг зүйл нь байлаа. Тэр үеийн математикийн сонирхолтой бодлоготой ном, сэтгүүлүүд (“Квант”, “Математика в школе”), гадаад болон европын орнуудын математикийн хичээлийн сурах бичгүүд бүгд л байдаг, багш найз, нөхөд нь манайд ирж үздэг байлаа. Боловсрол судлал, сурганы номууд ч бас аавын маань номын сангийн ихэнх хувийг эзэлдэг байсан юм.

1964 онд манай улс анх удаагаа Олон улсын Математикийн Олимпиадад оролцохоор болж аймаг хотуудаас 10-р ангийн нилээд сурагчдыг шалгаруулан УБДС дээр сар илүү бэлтгэл хийж билээ. Тэгэхэд бидэнд МУИС ба УБДС-ийн багш нар тухайлбал, Л.Шагдар, Г.Гүнжээ, Х.Гэндэнжамц, Д.Гүржав, Б.Алтангэрэл, У.Доёд, Цэрэндулам, Х.Дүгэр, Амарсанаа нарын олон багш хичээл зааж, контроль хийлгэж, тэр жил Москвад болсон ОУМО-6-д оролцох найман хүүхдийг шилж авахад миний бие тэдний тоонд орж байж билээ.

Тэр үед Лениний нэрэмжит Москвагийн Багшийн Дээд Сургуулийг төгссөн цэл залуу багш Х.Дүгэр бидэнд “Математика в школе” сэтгүүлийн бодлогуудыг бодох талаар хичээл заадаг байлаа. Тэгэхэд л бид анх

удаагаа ийм сэтгүүл байдгийг мэдэж олон улсын хэмжээний олимпиадын бодлого гэж иймэрхүү бодлого байдаг юм байна гэдэгтэй тулгарч байж билээ. Харин түүний дараагийн жилээс Улсын Математикийн Олимпиад албан ёсоор зохиогдох болж мөн Х.Дүгэр багш маань нөхдийнхөө хамт математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийг II сургууль дээр нээж байсан тэр үеэс хойш үргэлж багштайгаа тааралдаж багшийнхаа математикийн төлөө үргэлж шинийг сэдэж явдаг ховорхон чанарыг нь биширч хүндэлж явдаг болсон юм. Дүгэр багш маань Гэгээрлийн Яамны Сургуулийн Хэлтсийн дарга, Сурганы Хүрээлэнгийн захирал, УБДС-ийн орлогч захирал байсан жилүүддээ ч урьдын адил Математикийн Олимпиадын Хорооны гишүүнээр ажиллаж Математикийн Олимпиадын болоод гүнзгийрүүлсэн сургалтынхаа төлөө ямагт анхаарал тавьж, бидэнд үргэлж тусалж зөвлөж явдаг, математикийн төлөө төрсөн юм шиг өөрийн бүх мэдлэг боловсрол, оюун ухаан, амьдралын баялаг туршлагаа математиктаа бүрэн зориулсан сайхан багш байснаар шавь биднийхээ сэтгэл зүрхэнд мөнхөрсөн юм даа.

Ц.Дашдорж, ММОХороо

Дүгэр багш бол Монгол улсын албан бус боловсролын «загалмайлсан эцэг»

Аавын минь амьдралынхаа сүүлийн жилүүдэд мэргэн оюунаа зориулж байсан томоохон зүйл бол албан бус боловсролыг Монгол улсын боловсролын нэгэн дэд тогтолцоог бий болгосон явдал юм.



1990-ээд он хүртэл улс оронд төрийн өмчид тулгуурласан албан ёсны боловсролын тогтолцоо дангаар үйлчилж байснаа зах зээлийн хуулиар үйлдвэр, хөдөө аж ахуй, нийгмийн салбар задарч хувьд шилжсэнээр, ажилгүйдэл сургууль завсардалт үлэмж хэмжээгээр нэмэгдэж, тэдэнд боловсрол, мэргэжил олгох боловсролын шинэ тогтолцоо нийгмийн захиалга болон тавигдсан билээ.

Боловсролын байгууллагын өмнө тавигдсан нийгэм, сурган хүмүүжүүлэх ухааны үндэслэлтэй энэхүү томоохон асуудлыг шийдвэрлэх албан бус сургалтыг үүсгэн бий болгож бие даасан боловсролын дэд тогтолцоо болтол хөгжиж төлөвшихөд Х.Дүгэр багш өөрийн туршлага, хүч хөдөлмөрөө дайчлан ажилласан хүн билээ.

Х.Дүгэр багш тус оронд албан бус сургалтын тогтолцоог үүсгэн байгуулахад зориулсан олон жилийнхээ хөдөлмөрийн үр дүнг нэгтгэн нэг сэдэвт зохиол туурвиж, олон арван өгүүлэл, ном, зөвлөмж гаргасан юм. Энэ бүхэн нь өнөөдөр багш оюутнууд, судлаачдын гарын авлага болсоор байна.

Х. Дүгэр багш зах зээлийн онцлогийг харгалзан боловсролын тогтолцоог боловсронгуй болгох, түүний дотроос албан бус боловсролын тогтолцоог бүрдүүлэн төлөвшүүлж үйлчлэх, албан бус боловсролын үр дүнг дээшлүүлэх, нээлттэй сургалтын зарчмыг нэвтрүүлж, зайны сургалтыг ашиглах асуудлаар иж бүрэн шинжтэй судалгаа хийж хойч үедээ үлдээсэн нь боловсрол судлалын шинжлэх ухаанд түүний оруулсан үнэт хувь нэмэр юм.

Боловсролын тогтолцоог боловсрол олгож байгаа байгууллагуудын нь шатлал, холбоо шүтэлцээгээр тодорхойлж, албан ёсны боловсролын тогтолцоо давамгайлж байсан хуучин ойлголтыг өөрчилж, боловсролын дэд тогтолцоонуудыг тогтолцооны онолд тулгуурлан, боловсрол эзэмшүүлэх өөр өөр шинж чанар бүхий бүрэлдэхүүн хэсгүүдээр нь тодорхойлж томъёолсон нь шинэ бөгөөд оновчтой зүйл байсан юм.

Дүгэр багш албан бус боловсролын тогтолцоог цаашид боловсронгуй болгож, үр дүнгий нь дээшлүүлэх зорилгоор түүнд нээлттэй сургалтын зарчмыг нэвтрүүлэх, зайны сургалтыг ашиглах талаар бас нэлээд судалгаа хийж байсан нь даяарчлал бодот байдал болж, шинжлэх ухаан техникийн дэвшил түргэсч ХХI зуунд амьдрах иргэдээ түүнд бэлтгэх шинэ шаардлага тавигдаж байгаа өнөөгийн нөхцөлд боловсролын хүртээмжийг сайжруулах, бүх нийтийн боловсролыг дээшлүүлэх гол хэрэглүүр болсон зайны сургалтыг албан бус боловсролын хүрээнд нэвтрүүлэх санаачилга эхлэл болсон юм.

Х.Дүгэр багш судалгаандаа үндэслэн “Албан бус боловсролыг хөгжүүлэх Үндэсний хөтөлбөр”-ийг боловсруулж 1997 онд Засгийн газарт оруулан батлуулсан нь одоо ч хэрэгжсээр байна.

Х.Дүгэр багш Монголд албан бус боловсролын тогтолцоо бүрдэж хөгжих үндэс суурийг тавьсан судлаач эрдэмтэн, зохион байгуулагч байсан төдийгүй залуу үеийг сурган хүмүүжүүлэхэд сэтгэл оюунаа зориулдаг, ажиллаж байгаа хамт олноо бүрдүүлэхэд нөлөө бүхий сайхан буурал байсныг түүний хамт ажиллаж байсан Албан бус боловсрол, зайны сургалтын төвийнхөн бахархалтайгаар дурсаж байна.

Би багшийнхаа зургийг хоймортоо залдаг

Аав маань мянга мянган шавь нартаа эрдэм ухаан, дадлага туршлага, үүх түүхийн нэгэн их нээлттэй сургууль байж, тэднийхээ хүндэтгэлийг хүлээж, хийж бүтээхийн үлгэр дууриал нь болон амьдарч байсан юм.

Баянхонгор аймагт Албан бус боловсрол хөгжих эхлэлийг тавьсан”, “Говийн эмэгтэйчүүд “ төслийг гардан зохион байгуулж манай аймгийн говийн эмэгтэйчүүдийн танил болж улмаар тэдний амьдрал ахуй ч сайжирч албан бус боловсролын үнэ цэнийг хөдөөгийнхөн мэдэрч эхэлсэн.

Тэр цагаас хойш Дүгэр багшийг минь таньдаггүй хүн цөөхөн болсон.

Багшийнхаа буянтай үйлсийг би чин сэтгэлээсээ дэмжиж албан бус боловсролын хөгжилд өөрийн хувь нэмрээ оруулахаар зориг шулуудаж билээ.

1996 онд би аймгийн нийгмийн салбарын бодлогыг хариуцаж байхдаа “Боловсролоор дамжуулж ажилгүйдэл, ядуурлыг бууруулах нэгдсэн хөтөлбөр, нийгмийн салбарын үйл ажиллагаа боловсрол төвтэйгээр интеграцичлах бодлого”, “Албан бус боловсролын тогтолцоо”, шинэлэг ажлуудыг Дүгэр багшийнхаа заавар зөвлөмжийн дагуу санаачлан зохион байгуулж нэлээд үр дүнд хүрч байлаа.



1998 онд Боловсролын яам, Албан бус боловсролын төв, аймгийн ЗДТГ-ын Нийгмийн бодлогын хэлтэс, Боловсрол соёлын төвтэй хамтран “Албан бус боловсрол-Баянхонгор аймаг” сэдвийн дор улсын хэмжээний үзүүлэх сургуулийг зохион байгуулсан нь Яамны сайдын шийдвэрээр бидний ажлыг туршлага болгосон явдал байлаа. Багш бид хоёр урам орж баярлан зөвлөлдөж байгаад энэ ажлаар сэдэв авч эрдмийн ажлаа эхлэхээр тохирч билээ. Багш маань миний удирдагчаар томилогдов. Хоёулаа сэдвээ оновчтой томьёолох гэж бүтэн гурван өдөр сууж билээ. Бид дессартацийг бараг 50 хувь хийсэн байлаа. Нэрээ л зөв олох хэрэгтэй гэж мэрийнэ. Бодож бодож “Хөдөөгийн хүн амд албан бус сургалтаар боловсрол олгож ажилгүйдэл, ядуурлыг бууруулах арга зүйн зарим асуудал” гэсэн нэрийг олж билээ.

Эрдмийн ажил хийж байх үед багшийн маань бие сайнгүй байв. Миний санаа зовж “Шаргалжуут” сувиллын газар амрааж жаахан тэнхрүүлж байгаад дахиад л бичиг цаастайгаа ноцолдоно. Багш маань уйгагүй, махруу хүн байсан. Надад “больё, нутаг буцъя, орхиё” гэж шантрах үе олон байсаан. Багш маань зэмлэнэ, аргадна, тайвшруулна, урам өгнө. Багш маань оюун дүгнэлтийг сайн хийдэг хүн байсан юм. Би бичиж боловсруулсан хэдэн өгүүлбэрээ уншиж өгнө. Багш бие нь тааруу, хэвтээд л сонсоно. Бүр нүдээ аниад унтаад өгч байгаа юм шиг чимээгүй болчихно. За жаахан амраг дээ гэж бодоод босоод явах гэхээр –Хаачих нь вэ, бич гээд л урсгаж өгдөгсөн. Баярлаад л бичиж гарна. Овоо бүгдийг нь хэлээд өгөх нь дээ гэж байтал гэнэт зогсоод “За цааш нь өөрөө хийгээд үзүүл” гэдэгсэн.

Үнэхээр монгол улсад албан бус боловсролын тогтолцоог бий болгохыг зорьж зорилгоо ч биелүүлж чадсан юм. Багш маань намайг өмөөрч, үгүйсгэсэн болгонтой тэмцэж, яагаад хөдөөний хүн эрдмийн зэрэг хамгаалж болохгүй гэж? Эмэгтэй хүн чадах ёстой гээд л үзэж тарна шүү дээ Шөнө дөл болтол цаас шагайна. Ядарч сульдсан хүн гэртээ харина, багш маань араас утастана, шалгана. Ингэсээр бид хоёр жилийн нүүр үзэж 1999 оны 11 дүгээр сарын 13-ны могой өдөр эрдмийн зэргээ хамгаалсан түүхтэй.

Би багшийгаа урт наслуулъя хэмээн мэрийж гурван жил Шаргалзуутад амрааснаа эс тооцвол ачийг нь хариулж чадаагүй хүн. Гэхдээ би багшийнхаа ажил үйлсийг чадлын хирээр үргэлжлүүлж, амжаагүй дуусгаагүй бүхнийг нь биелүүлнэ гэж бодож мэрийж явнаа.

Би багштайгаа хамт авахуулсан зургаа гэрийнхээ хойморт залж залбирч явдаг даа.

Шавь Сурган Хүмүүжүүлэх Ухааны доктор (Ph.D)
Шархүүгийн Чимгээ

Монголын Математикийн XL Олимпиадын дүнгийн тухай тайлан

*Монголын Математикийн 40-р Олимпиадын хаалт дээр
ММОХорооны дарга Ц.Дашдоржийн хэлсэн үг*

Эрхэм хүндэт математикч, багш, сурагчид аа!
Сонгигохайрхан дүүргийн ЗДГГ болон засаг дарга ноён Л.Найдан!
УБ хотын Боловсролын Газрын дарга ноён М.Лхан-Аажав аа!
“Ирээдүй” цогцолборын ерөнхий захирал ноён Т.Даш-Очир оо!
Х.Дүгэр багшийн гэр бүл, үр хүүхэд, ач зээ нар аа!

Монголын Математикийн XL Олимпиад манай нэрт сурган хүмүүжүүлэгч, доктор, профессор, математикч багш Х.Дүгэрийн нэрэмжит болон 2004 оны 05 сарын 03-08-ны хооронд Нийслэл хотноо Сонгинохайрхан дүүргийн “Ирээдүй” цогцолборын 86 дугаар дунд сургууль дээр амжилттай явагдаж дүнгээ гаргаж байна. Энэ удаагийн олимпиадад 21 аймаг, Улаанбаатар хотын ба “Олонлог” багийн нийт 23 багийн 66 бага, дундын багш, 190 сурагчид оролцож нийт 256 хүн оюун ухаан, авъяас чадвараа сорин уралдлаа. Энэ удаагийн олимпиадыг зохион байгуулахад бүхий л талын боломж туслалцаа үзүүлсэн Сонгинохайрхан дүүргийн Засаг дарга Л.Найдан, ИТХ-ын дарга П.Ганбаатар, 86-р сургуулийн хамт олон, түүний дундаас захирал Т.Даш-Очир, “Ирээдүй” 1-р ахлах сургуулийн гүйцэтгэх захирал Ж.Пүрэвсүрэн, сургалтын менежер Д.Долгор, Нийгмийн ажилтан Ж.Сарантуяа, Физикийн багш Г.Гүнбаяр, Зургийн багш Ц.Нэргүй, “Сургуулийн математик” сонины ерөнхий эрхлэгч, ЕБДС-ийн Математикийн багш нарын холбооны мянгат сангийн тэргүүлэгч Б.Эрдэнэсүвд, 86-р сургуулийн Гандолгор эрхлэгчтэй математикийн секцийн хамт олон, ММОХорооны гишүүд, тухайлбал П.Дорж, Ч.Даваадорж, БСШУЯ-ны газрын дарга Г.Батболд, мэргэжилтэн Мягмар, мөн Д.Болдбаатар нарын Х.Дүгэр агсны үр хүүхдүүд, ач гуч нар, БОЯ-ны сайд У.Барсболд, газрын дарга Б.Баясгалан, УБ 1-р сургуулийн багш Д.Нарангэрэл нарт Монголын нийт Математикчдын нэрийн өмнөөс талархал илэрхийлье.

Олимпиадын 8-р ангид 92 сурагч оролцсоноос “Номун” сургуулийн сурагч Н.Золбаяр 27 оноогоор 1-р байр эзэлж 8-р ангийн аварга боллоо. 1-р сургуулийн Д.Жаргалсайхан 23 оноогоор, Хөвсгөл аймгийн Б.Сумъяа 21.5 оноогоор тус тус 2-р байрыг, 11-р сургуулийн сурагч Б.Анх-Эрдэнэ, Дархан-Уул аймгийн Д.Очирпүрэв, “Номун” сургуулийн Э.Алтанхуяг нар тус бүр 20 оноогоор 3-р байрыг тус тус эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

Олимпиадад 9-р ангийн 54 сурагч оролцсоноос Монгол-Турк сургуулийн сурагч Г.Очцэцэг 16 оноогоор 1-р байр эзэлж 9-р ангийн аварга сурагч боллоо. 11-р сургуулийн Л.Одонтуул, Өвөрхангай аймгийн Н.Батболд нар тус бүр 14.5 оноогоор 2-р байрыг, 11-р сургуулийн Д.Энхбат, Монгол-Турк сургуулийн Б.Эрдэнэбаяр, Монгол-Турк сургуулийн Э.Болдбаяр нар тус бүр 14 оноогоор 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

Олимпиадад 10-р ангийн нийт 44 сурагч оролцсоноос 1-р сургуулийн сурагч С.Сайнбаяр 41 оноогоор 1-р байр эзэлж Улсын математикийн 40-р олимпиадын 10-р ангийн аварга сурагч боллоо. 1-р сургуулийн А.Ганбат 31 оноогоор, Ц.Гэрэлт 29.5 оноогоор 2-р байрыг, Дархан-Уул аймгийн Ч.Сугардорж 20 оноо, 1-р сургуулийн Б.Мэндбаяр 18.5 оноо, 1-р сургуулийн Э.Цэнгүүн 17 оноогоор тус тус 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

ОУМО-43-ын хүрэл, ОУМО-44-ийн мөнгөн медальт, УБ 1-р сургуулийн 10-р ангийн сурагч С.Сайнбаяр Х.Дүгэрийн нэрэмжит ММО-40-ийн үнэмлэхүй аваргаар тодорч мөн Монголын Математикийн Олимпиадын түүхэнд хамгийн өндөр буюу 41 оноо авсныг та бүхэнд дуулгахад таатай байна.

Улсын Математикийн 40 дүгээр олимпиадад амжилттай оролцсон дээрх нэр бүхий сурагчид, олимпиадад сурагчдаа амжилттай бэлтгэж оролцуулсан багш нар болон сургуулиудын олимпиадыг зохион байгуулах хороо болон нийт математикчдын нэрийн өмнөөс чин сэтгэлийн талархал илэрхийлье.

Багш нарын олимпиадыг бага, дунд гэсэн хоёр ангиллаар явуулсны дотроос дунд ангийн математикийн 42 багш оролцсоноос, "Олонлог төв" сургуулийн багш Б.Баяржаргал 12 оноогоор түрүүлж, Хөвсгөл аймгийн багш Б.Ганбилэг 11 оноогоор, 1-р сургуулийн багш Д.Бат-Орших 10 оноогоор удаах байруудад орлоо.

Бага ангийн багш нарын олимпиадад нийт 24 багш оролцсоноос "Эхлэл" сургуулийн багш М.Отгонжаргал 26.5 оноогоор түрүүлж, "Номун" сургуулийн багш Т.Наранбат 15.5 оноогоор, Дорноговь аймгийн багш О.Наранчимэг 12 оноогоор удаах байруудыг эзлэв.

Доктор, профессор Х.Дүгэрийн нэрэмжит ММО-40-өөр багш нарын дундаас хос дархан аварга зэрэг төрснийг ММОХ баяртайгаар мэдэгдэж байна.

ММО-40-д 1-р сургууль 7 медаль, Монгол-Турк сургууль 3 медаль, 11-р сургууль 3 медаль, "Номун" сургууль 3 медаль, Хөвсгөл аймаг 2 медаль, Дархан-Уул аймаг 2 медаль, Дорноговь, Өвөрхангай аймаг, "Эхлэл" сургууль, "Олонлог төв" сургууль тус тус 1 медаль авч олимпиадад оролцогчдоо хошуучлан сайхан амжилт гаргалаа.

Аймаг хотуудыг авсан онооны дарааллаар байр эзлүүлэхэд УБ-15.9 оноогоор 1-р байр, Дархан-Уул 9.8 оноогоор 2-р байр, Хөвсгөл аймаг 9.5 оноогоор 3-р байр, Дорноговь аймаг 5.9 оноогоор 4-р байр, Ховд аймаг 4.8 оноогоор 5-р байр тус тус эзэллээ.

Энэ жилийн 7-р сард Грек улсын Афин хотод болох ОУМО-45-ын бэлтгэлд 1-р сургуулийн сурагч С.Сайнбаяр, А.Ганбат, Ц.Гэрэлт, Б.Мэндбаяр, Э.Цэнгүүн, Дархан-Уул аймгийн Ч.Сугардорж, Монгол-Турк сургуулийн Г.Очцэцэг нарыг үлдээхээр Олимпиадын хороо шийдвэрлэлээ. ОУМО-45-д Монголын багийн орлогч удирдагчаар Монгол улсын аврага багш, 1-р сургуулийн математикийн секцийн эрхлэгч Д.Нарангэрэлийг томилохоор ММОХороо шийдвэрлэлээ.

ОУМО-45-ын бэлтгэлд багтаж шалгарсан та бүхэндээ амжилт хүсч, Монголынхоо нэрийг дэлхийн тавцанд дуурсгах хүндтэй бөгөөд хариуцлагатай үйл хэргийн төлөө идэвх чармайлт гарган сайн бэлтгэж амжилттай оролцохыг Монголын нийт Математикчдын нэрийн өмнөөс даалгаж байна.

Эрдэм оюун дэлгэрч Монголд математикчдын оюун ухаан улам хөгжин дэвших болтугай. Анхаарал тавьсан та бүхэнд баярлалаа.

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН XL ОЛИМПИАДЫН
VII АНГИЙН III ДАВААНЫ БОДЛОГО

Б.Сандагдорж (БИС), Ч.Гантөмөр (БИС)

VII-A1 (Ш.Батхишиг). Шатрын тэмцээнд 10 шатарчин оролцжээ. Тэмцээн тойргоор тоглосон (аливаа хоёр тамирчин бүр хоорондоо нэг удаа тоглоно) ба хожвол 2 оноо, тэнцвэл 1 оноо, хожигдвол 0 оноо авна. тэмцээний дүн гарахад тамирчид бүгд ялгаатай оноо авсан бөгөөд 1 ба 2-р байранд шалгарсан тамирчид нэг ч хожигдолгүй байв. Мөн 1 ба 2-р байрт шалгарсан тамирчдын авсан онооны нийлбэр 3-р байранд шалгарсан тамирчны авсан онооноос 20-оор их ба 4-р байранд шалгарсан тамирчны авсан оноо, сүүлийн дөрвөн байранд шалгарсан тамирчдын авсан онооны нийлбэртэй тэнцүү. Эхний 6 байранд шалгарсан тамирчдын авсан оноо тус бүрийг ол.

VII-A2 (Ч.Гантөмөр, Э.Азжаргал). 0 эсвэл 1-ээс тогтох 7 урттай дарааллуудын олонлог өгөгдөв. Хоёр дарааллын харгалзах байрын ялгарах гишүүдийн тоог тэдгээрийн хоорондын "зай" гэж нэрлэе. Жишээ нь: $(\boxed{0}; 1; \boxed{1}; 0; 1; \boxed{0}; 0)$ ба $(\boxed{1}; 1; \boxed{0}; 0; 1; \boxed{1}; 0)$ дарааллуудын хоорондын зай нь 3-тай тэнцүү. Хэрэв өгөгдсөн олонлог 16-аас олон дарааллуудаас тогтох бол хоорондох "зай" нь 2-той тэнцүү хоёр дараалал олдоно гэж батал.

VII-A3 (Б.Сандагдорж). ABC гурвалжны AD ба BE медианууд M цэгт огтлолцов. Хэрэв AMB өнцөг а) тэгш, б) хурц бол $AC + BC > 3 \cdot AB$ болохыг батал.

VII-B1 (Ш.Батхишиг). 2004 тамирчид 1-ээс 2004 дугаартай цамц өмсчээ. Эдгээр тамирчдаас n ширхэг тамирчдыг сонгож ёслолын нээлтийн үйл ажиллагаанд оролцуулах болов. Гэхдээ үлдсэн тамирчид дунд аль нэг тамирчны дугаар нь нөгөө хоёр тамирчныхаа дугааруудын үржвэртэй тэнцүү байх гурван тамирчин олдохгүй байхаар тамирчдыг сонгоно. Хамгийн багадаа хэдэн тамирчин сонгон оролцуулж болох вэ?

VII-B2 (Б.Сандагдорж). a, b, c нь эерэг тоонууд бол

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$$

болохыг батал.

VII-B3 (Б.Сандагдорж). $AB = 2a$, $BC = \sqrt{2}a$ байх $ABCD$ тэгш өнцөгт өгчээ. AB талаар диаметр хийсэн хагас тойргийг тэгш өнцөгтийн гадна талд байгуулав. M нь хагас тойргийн дурын цэг, MD шулуун AB талтай N цэгт, MC шулуун AB талтай L цэгт огтлолцдог байг. Тэгвэл $AL^2 + BN^2$ нийлбэрийг ол.

VII-A1. 1 ба 2-р байранд шалгарсан тамирчид нэг ч хожигдолгүй байх тул хоорондоо тэнцэх ёстой. x_i -ээр i -р байранд шалгарсан тамирчны авсан оноог тэмдэглэвэл $x_1 \leq 17$, $x_2 \leq 16$ байна. Нөгөө талаас $x_1 + x_2 = x_3 + 20$ байх тул $x_3 \leq 13$ байна. Мөн $x_4 = x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \geq 12$ байна. Иймээс $x_4 = 12$, $x_3 = 13$, $x_2 = 16$, $x_1 = 17$ байна. Иймд $90 = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{10} = 2x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 + 20 = 70 + x_5 + x_6 \Rightarrow x_5 + x_6 = 20$ болно. Эндээс $x_5 = 11$, $x_6 = 9$ гэж гарна.

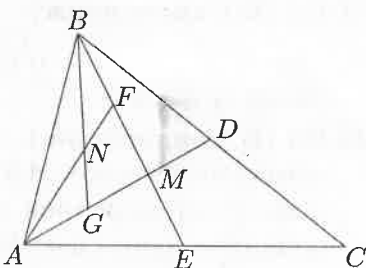
VII-A2. Эхлээд ямар нэг A ба B гэсэн дарааллын хувьд тэдгээрээс 1 зайтай C дараалал олддог бол A ба B дарааллуудын хоорондох зай 2 байна гэдгийг баталъя. $A = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $C = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ гэж үзэж болох нь илэрхий. Тэгвэл B дараалал нь эхний координат нь 1 ба сүүлийн 6 байрны аль нэг нь 1 байх дараалал болно. Эндээс A ба B -ийн хоорондох зай 2 болно.

N ширхэг дараалал өгөгдсөн байг ($N > 16$). Уг дарааллуудаас тус бүрээс өөрөөс нь ялгаатай 1 зайтай 7 дараалал оршино. Тэгвэл нийт $N \cdot 8 > 17 \cdot 8$ дараалал үүснэ. Нийт ялгаатай дарааллын тоо $2^7 = 128$ ба $17 \cdot 8 > 128$ тул Дирихлейн зарчмаар өгөгдсөн дарааллуудын аль нэг 2-оос 1 зайтай байх дараалал олдоно. Уг хоёр дараалал нь бидний олох дарааллууд болно. Бодлого бодогдов.

VII-A3. AMB гурвалжны AF , BG медианууд N цэгт огтлолцдог байг. $MB = 2 \cdot ME$ учир $ME = MF$ байна. Хэрэв $AM \perp BE$ бол $AE = AF$ болно. $AN = \frac{2}{3}AF \leq \frac{2}{3}AE = \frac{1}{3}AC$. Үүнтэй адилаар $BN = \frac{2}{3}BG \leq \frac{2}{3} \cdot BD = \frac{1}{3}BC$ болно.

Гурвалжны тэнцэтгэл бишээс $AC + BC \geq 3AN + 3BN = 3(AN + BN) > 3AB$ болж батлагдана.

VII-B1. 2, 3, 4, ..., 43, 44 дугаартай тамирчдыг сонгоход үлдсэн тамирчид дунд аль нэг тамирчны дугаар нь нөгөө 2 тамирчдынхаа дугааруудын үрж-



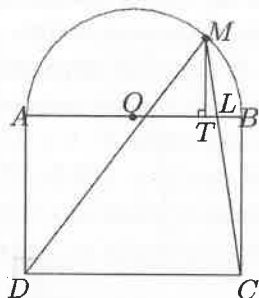
вэртэй тэнцүү байх гурван тамирчин олдохгүй ($45 \cdot 46 = 2070 > 2004$). Одоо үүнээс цөөн тамирчныг бодлогын нөхцөл хангахаар сонгож болохгүйг харуулъя.

$$\left. \begin{array}{l} (2, 87, 2 \cdot 87) \\ (3, 86, 3 \cdot 86) \\ (4, 85, 4 \cdot 85) \\ \vdots \\ (43, 46, 43 \cdot 46) \\ (44, 45, 44 \cdot 45) \end{array} \right\} 43\text{-н хос тоонуудыг авч үзье.}$$

Бодлогын нөхцлийг хангахын тулд эдгээр хос бүрээс ядаж нэг тамирчин сонгогдсон байна.

VII-B2. $A = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} + \frac{b}{\sqrt{b(a+c)}} + \frac{c}{\sqrt{c(a+b)}} > \frac{a}{\frac{a+b+c}{2}} + \frac{b}{\frac{a+b+c}{2}} + \frac{c}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = 2$ болж батлагдана.

VII-B3. M цэгийн AB шулуун дээрх проекцийг T , AB талын дундаж O , MD шулуун AB талыг огтолсон цэг N , MC шулуун AB талыг огтолсон цэг L байг. $OT = x$ гэвэл $AT = a + x$, $BT = a - x$ болно. $MT = \sqrt{a^2 - x^2} = y$ гэж тэмдэглэе. $\triangle NAD \sim \triangle NTM$ гэдгээс $\frac{AN}{AD} = \frac{NT}{MT} = \frac{AT - AN}{MT} \Rightarrow AN = \frac{(a+x)\sqrt{2a}}{y + \sqrt{2a}}$, $BN = 2a - AN = \frac{a\sqrt{2}(\sqrt{2y+a-x})}{a\sqrt{2+y}}$ гэж гарна. $\triangle LTM \sim \triangle LBC$ гэдгээс $\frac{BL}{BC} = \frac{TL}{MT} =$



$$\frac{BT-BL}{MT} \Rightarrow BL = \frac{a\sqrt{2}(a-x)}{y+a\sqrt{2}}, AL = 2a - BL = \frac{a\sqrt{2}(\sqrt{2}y+a+x)}{y+a\sqrt{2}}$$

болно. Эндээс $AL^2 + BN^2 = 4a^2$ гэж гарна.

ММО-40, VIII ангийн III даваа

Б.Сандагдорж, Ш.Батхишиг

VIII-A1 (Ш.Батхишиг). Нийлбэр нь 70, квадратуудын нийлбэр нь 100 байх 51 ширхэг бодит тоо өгөгдөв. Эдгээр тоонуудын хамгийн их тооных нь авч болох хамгийн их утгыг ол.

VIII-A2 (Ч.Гантөмөр, Э.Азжаргал). 0 эсвэл 1-ээс тогтох 8 урттай дарааллуудын олонлог өгөгдөв. Хоёр дарааллын харгалзах байрын ялгарах гишүүдийн тоог тэдгээрийн хоорондын "зай" гэж нэрлэе. Жишээ нь: $(\boxed{0}; 0; 1; 0; 0; \boxed{1}; 1; \boxed{1})$ ба $(\boxed{1}; 0; 1; 0; 0; \boxed{0}; 1; \boxed{0})$ дарааллуудын хоорондын зай нь 3-тай тэнцүү. Хэрэв өгсөн олонлог 64-өөс олон дарааллуудаас тогтох бол аль ч хоёрын нь хоорондын "зай" тэнцүү байх дор хаяж гурван дараалал олдоно гэж батал.

VIII-A3 (Б.Эрдэнэбаяр, Б.Сандагдорж). Хурц өнцөгт ABC гурвалжны өнцөг A нь 40° байв. Уг гурвалжин дотор $\angle CMB = 110^\circ$ байх M цэгийг сонгож авав. BM ба CM хэрчмүүдийн дундажид татсан перпендикулярууд AB ба AC талуудыг харгалзан P ба Q цэгт огтлов. Тэгвэл PQ хэрчим дээр M цэг оршино гэж батал.

VIII-B1 (Б.Сандагдорж). Натурал n тооны хувьд d_1, d_2, d_3, d_4 нь хамгийн бага дөрвөн хуваагч нь $(d_1 < d_2 < d_3 < d_4)$ байг. $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$ байх бүх n тоог ол.

VIII-B2 (Ш.Батхишиг). $a_1, a_2, \dots, a_n$ ялгаатай натурал тоонууд өгөгдөв. Хэрэв эдгээр тоонуудын аль ч хоёр x ба y тоонуудын хувьд $|x - y| \geq \frac{xy}{35}$ тэнцэтгэл биш биелэх бол n -ийн авч болох хамгийн их утгыг ол.

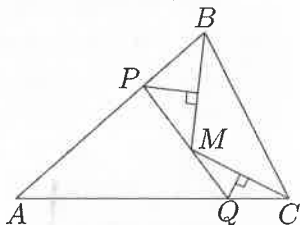
VIII-B3 (Ш.Батхишиг). $AB + AC = 2BC$ байх ABC гурвалжин өгчээ. Уг гурвалжныг багтаасан тойргийн төв O , уг

гурвалжинд багтсан тойргийн төв I бол $AI \perp OI$ болохыг батал.

VIII-A1. $a_1 + a_2 + \dots + a_{51} = 70$, $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{51}^2 = 100$, $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{51}$ гээ. Тэгвэл $(a_1 - \frac{4}{3})^2 + (a_2 - \frac{4}{3})^2 + \dots + (a_{51} - \frac{4}{3})^2 = 4$ байна. Иймээс $(a_1 - \frac{4}{3})^2 \leq 4$ болно. $a_1 > 0$ байх тул $a_1 - \frac{4}{3} \leq 2 \Rightarrow a_1 \leq \frac{10}{3}$ байна. $a_1 = \frac{10}{3}$, $a_2 = a_3 = \dots = a_{51} = \frac{4}{3}$ үед бодлогын нөхцлийг хангана. Иймд олох утга маань $\frac{10}{3}$ болно.

VIII-A2. VII ангийн III давааны A2-той адилаар хийгдэх тул бодолтыг уншигчдад үлдээе.

VIII-A3. BM хэрчмийн дундаж татсан перпендикуляр AB талыг P цэгт огтолсон учир $\triangle BPM$ адил хажуут, өөрөөр хэлбэл $\angle PBM = \angle PMB = \alpha$, адилаар $\triangle MQC$ адил хажуут $\angle QMC = \angle QCM = \beta$ учир M цэг PQ хэрчим дээр оршихыг харуулна гэдэг нь $\angle PMB + \angle QMC = 70^\circ$ гэдгийг харуулна гэсэн үг.



$\angle MBC = x$, $\angle MCB = y$ гэвэл $x + y + 110^\circ = 180^\circ$ буюу $x + y = 70^\circ$ болно. Нөгөө талаас $\triangle ABC$ хувьд $\alpha + x + \beta + y + 40^\circ = 180^\circ$ буюу $\alpha + \beta = 70^\circ$ болж батлагдана.

VIII-B1. n тэгш тоо байна. n сондгой бол түүний бүх хуваагчид сондгой байх ба $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$ тэгш тоо болж зөрчил үүснэ. n тэгш тоо учир $d_1 = 1$, $d_2 = 2$ байна. Хэрэв $d_3 = 4$ бол d_4 нь сондгой тоо болох ба $d_4 = p$ байна. $n = 1^2 + 2^2 + 4^2 + p^2$ гэдгээс $n = 21 + p^2$ буюу n тоо 4-д хуваагдах учир $p^2 \equiv 1(4)$ тул $21 + p^2 \not\equiv 0(4)$ зөрчил үүснэ. Иймд $d_3 = p$ ба d_4 нь тэгш тоо байх учир $d_4 = 2p$ болно. Эндээс $n = 1^2 + 2^2 + p^2 + (2p)^2 = 5 + 5p^2$ буюу $n \equiv 0(5)$ учир $p = 5$ гэж гарна. Иймд $n = 5 + 5 \cdot 25 = 130$. Өөр шийдгүй.

VIII-B2. $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $a_{i+1} = a_i + d_i$, $d_i > 0$ болог. Эхлээд A -д 35-аас багагүй элемент нэгээс олонгүй байна гэж батлая. Эсрэгээс нь A -д 35-аас багагүй элемент дор хаяад 2 ширхэг байдаг гээ. Тэдгээрийг a_k, a_ℓ гэвэл $a_k > a_\ell \geq 35$ болно. $a_k - a_\ell \geq \frac{a_k \cdot a_\ell}{35} \Rightarrow a_k > \frac{a_k \cdot a_\ell}{35} \Rightarrow a_\ell < 35$ болж зөрчил үүснэ.

$a_{i+1} - a_i = d_i \geq \frac{a_i \cdot (a_i + d_i)}{35}$, $i = 1, 2, \dots, n$ биелнэ. $35d_i \geq a_i^2 + a_i d_i$ буюу $d_i \geq \frac{a_i^2}{35 - a_i}$, энд $a_i < 35$ байна. $a_6 \geq 6$ гэдэг нь илэрхий. Иймээс $d_6 \geq \frac{36}{35-6} = \frac{36}{29} > 1 \Rightarrow a_7 \geq 8$, $d_7 \geq \frac{8^2}{35-8} > 2$ тул $a_8 \geq 11$, $d_8 \geq \frac{121}{35-11} > 5 \Rightarrow a_9 \geq 17$, $d_9 \geq \frac{289}{35-17} > 16$, $a_{10} \geq 34$, $d_{10} \geq \frac{34^2}{35-34} = 1156 \Rightarrow a_{11} \geq 1190$ болно. Эндээс $n \leq 11$. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 11, 17, 34, 1190\}$ олонлог бодлогын нөхцлийг хангана.

VIII-B3. AI -ийн үргэлжлэл $\triangle ABC$ -г багтаасан тойргийг A' цэгээр огтолдог байг. $ACA'B$ дөрвөн өнцөгтийн хувьд Птолемейн теорем бичвэл

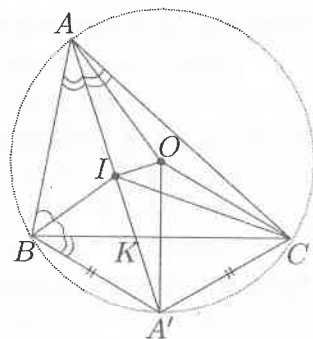
$$AC \cdot BA' + AB \cdot A'C = AA' \cdot BC$$

болно. $BA' = A'C$ тул

$$2 = \frac{AC + AB}{BC} = \frac{AA'}{BA'} \Rightarrow AA' = 2 \cdot BA'$$

болно. $\widehat{A'BC} = \frac{\alpha}{2}$, $\widehat{CBI} = \frac{\beta}{2} \Rightarrow$

$$\widehat{A'BI} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$



Нөгөө талаас $\triangle KBI$ -ийн хувьд $\widehat{AKB} = \pi - \frac{\alpha}{2} - \beta$ тул

$$\widehat{BIK} = \pi - \frac{\beta}{2} - \widehat{IKB} = \pi - \frac{\beta}{2} - (\pi - \frac{\alpha}{2} - \beta) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$$

болно. Иймд

$$\widehat{A'BI} = \widehat{KIB} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$$

буюу $BA' = IA'$ болно. $AI + IA' = AA' = 2 \cdot BA' = 2 \cdot IA' \Rightarrow AI = IA'$, $AO = OA'$ тул $AI \perp OI$ болно.

ММО-40, VIII ангийн IV даваа

Б.Сандагдорж (БИС)

VIII-A1 (В.Адъяасүрэн). 40×40 хэмжээтэй хүснэгтийн нүднүүдийг -1 ; 0 ; 1 тоонуудаар аль ч 3×3 хүснэгт дэх тоонуудын нийлбэр тэгтэй тэнцүү байхаар бөглөв. 40×40 хэмжээтэй хүснэгтэн дэх тоонуудын нийлбэр хамгийн ихдээ хэд байх вэ?

VIII-A2 (Ш.Батхишиг). Нийлбэр нь 150, квадратуудынх нь нийлбэр нь 2500-аас их байх 50-н ширхэг эерэг тоо өгөгджээ. Эдгээр тоонуудаас нийлбэр нь 50-иас их байх гурван тоо сонгож болохыг харуул.

VIII-A3 (Б.Сандагдорж). $BC < AB$ байх ABC гурвалжны BL биссектрис, BM медианыг татав. C оройг дайруулан BL биссектрис перпендикуляр шулуун BM медиантай P цэгт, BL биссектрис тэй Q цэгт огтлолцдог бол MQ хэрчим PL хэрчмийг хагаслан хуваахыг батал.

VIII-B1 (Б.Сандагдорж). n натурал тоо, q нь бүхэл тоо биш, рациональ тоо ба $0 < q < 2004$ байг. $\{\frac{n!}{6000}\} = \{q^2\}$ байх $\{n, q\}$ хосын тоог ол. Энд $\{x\}$ нь x бутархай хэсэг.

VIII-B2 (А.Хашбаатар). ABC гурвалжны гадаад багтсан тойргуудын BC, CA, AB талтай шүргэлцсэн цэгийг харгалзуулан D, E, F гэвэл $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{0}$ байх бүх гурвалжны хэлбэрийг тогтоо.

VIII-B3 (Ш.Батхишиг). x, y, z нь эерэг бодит тоонууд ба $x + y + z = 1$ бол

$$\frac{x^4}{y(1-y^2)} + \frac{y^4}{z(1-z^2)} + \frac{z^4}{x(1-x^2)} \geq \frac{1}{8}$$

болохыг батал.

VIII-A1. 40×40 -ын 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40-р мөр эсвэл 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40-р баганаас 1 мөр, 1 багана сонгон авч, үлдсэн 169 ширхэг 3×3 хувааж авбал 169 ширхэг 3×3 нийлбэр 0 ба сонгон авсан мөр баганадаа 1 аль болох олныг тавибал уг 40×40 хамгийн их утгаа авна. Бид нийлбэр нь их байхыг хүсвэл 0 аль болох бага байх ёстой. Иймд 1 ширхэг 3×3 -д 4 ширхэг 1, 4 ширхэг -1, 1 ширхэг 0 дор хаяж байна. Бид 1-р мөр ба 1-р баганыг сонгон аваад үзвэл уг мөр ба баганы уулзварыг багтаасан 3×3 сонирхвол уг мөр ба баганад хамгийн их 1 бичнэ гэсэн учир уг мөр багана ороогүй үлдсэн 4-н нүдэнд -1 байна. Иймд 4 ширхэг -1 нь 2×2 гэсэн квадратын 4 нүдэнд байна. Гэтэл бид уг 1-р мөр ба 1-р баганаа дураараа сонгосон учир сонгох мөрөө ба баганаа өөрчилбөл бас уг мөр ба баганы уулзварыг сонгон авбал өмнөх үр

дүн гарна. Эндээс байгуулалт хийвэл (сонгосон мөр ба баганад -1 бичихгүй учир) ингэж -1 нь байрлал тодорхой боллоо.

	1	2	3	4	...
1					
2		-1	-1		
3		-1	-1		
4					
5					

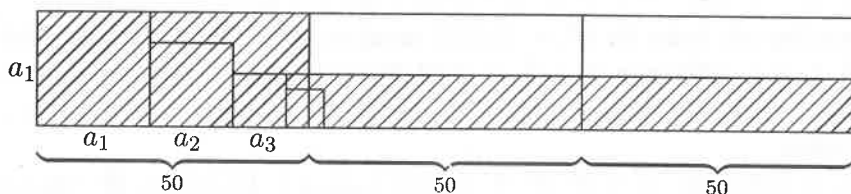
		-1	-1		-1	-1	
		-1	-1		-1	-1	
		-1	-1		-1	-1	
		-1	-1		-1	-1	

Одоо сонгосон мөрөндөө 40 ширхэг 1 тавиад, сонгосон баганадаа тохируулан байрлуулъя. Тэгвэл $\sum = 40 + 26 = 66$ болно. 67 ширхэг 1 байвал энд сонгон авсан баганад 12 ширхэг 0 байна. Гэтэл баганаа 3-аар дээрээс хувааж үзвэл 13 ширхэг болно. Гэтэл 13 ширхэг болгонд дор хаяж 1 удаа 0 орсон байх ёстой. Эндээс 12 ширхэг байж болохгүй. Иймд хамгийн ХИУ=66 болно.

VIII-A2. Тоонуудыг $a_1, a_2, \dots, a_{50} > 0$ гэвэл

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{50} &= 150 \\ a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{50}^2 &> 2500 \\ a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{50} &> 0 \end{aligned}$$

гэе. Эсрэгээс нь $a_1 + a_2 + a_3 \leq 50$ гэж үзье. a_i^2 тоог a_i талтай квадратын талбай гэж ойлгож болно.



Тэгвэл зурагт үзүүлснээр авч үзвэл $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{50}^2 \leq a_1 \cdot 50 + a_3 \cdot 100 = a_1 \cdot 50 + a_3 \cdot 50 + a_3 \cdot 50 \leq a_1 \cdot 50 + a_2 \cdot 50 + a_3 \cdot 50 = (a_1 + a_2 + a_3)50 \leq 50^2 = 2500$ болно. Энэ нь өгөгдсөн нөхцөлд харшилна.

VIII-A3. CQ шулууны AB талтай огтлолцсон цэгийг K ,

VIII-B1. Хариу 802. Хэрэв $n > 15$ бол $\frac{n!}{6000}$ тоо бүхэл байна. Өөрөөр хэлбэл $\{\frac{n!}{6000}\} = 0$ гэсэн үг. Эндээс $n < 15$ ба $\frac{n!}{6000}$ тооны бутархай хэсэг квадрат гэдгээс $6000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3$ буюу $n!$ нь 5-д хуваагддаг ба 25-д хуваагдахгүй байх ёстой. Иймд $5 \leq n \leq 9$ гэсэн үг.

2. $n = 6$ байг. $6! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ буюу $\{\frac{6!}{6000}\} = \frac{3}{5^2}$. Эндээс $q = \frac{k}{5}$ хэлбэртэй байх ба $k^2 \equiv 3(25)$ жишлэг шийдгүй. Учир нь тооны квадрат 3 ба 8-аар төгсөхгүй.

4. $n = 8!$ байг. $8! = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ буюу $\left\{ \frac{8!}{6000} \right\} = \left\{ \frac{2^3 \cdot 3 \cdot 7}{25} \right\} = \frac{18}{25}$. Эндээс $q = \frac{k}{5}$ буюу $k^2 \equiv 18(25)$ жишлэг шийдгүй.

VIII-B2. Өгсөн ABC гурвалжны BC , CA , AB талын гадуур

багтсан тойргийн дурьдсан талуудтай шүргэлцсэн цэгийг харгалзуулан A_1, B_1, C_1 гэвэл

$$BA_1 = p - c, \quad CA_1 = p - b, \quad CB_1 = p - a,$$

$$AB_1 = p - c, \quad AC_1 = p - b, \quad BC_1 = p - a$$

байдгаас $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{p-c}{p-b} \cdot \frac{p-a}{p-c} \cdot \frac{p-b}{p-a} = 1$. Иймд AA_1, BB_1, CC_1 нэг цэгт огтлолцсон учир өгсөн $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь A_1, B_1, C_1 цэгүүд харгалзан BC, CA, AB талын дундач болдог. Ийнхүү

$$\begin{cases} p - c = p - b, & b = c \\ p - a = p - c, & a = c \\ p - b = p - a, & a = b \end{cases}$$

Өгсөн гурвалжны $a = b = c$ зөв гурвалжин байжээ.

VIII-B3. $a_1 = \frac{x^2}{\sqrt{y(1-y^2)}}, a_2 = \frac{y^2}{\sqrt{z(1-z^2)}}, a_3 = \frac{z^2}{\sqrt{x(1-x^2)}},$
 $b_1 = \sqrt{y(1-y^2)}, b_2 = \sqrt{z(1-z^2)}, b_3 = \sqrt{x(1-x^2)}$ гэж сонгож авч Коши-Бунаковскийн тэнцэл биш хэрэглэвэл

$$\left(\frac{x^4}{y(1-y^2)} + \frac{y^4}{z(1-z^2)} + \frac{z^4}{x(1-x^2)} \right) \left(y(1-y^2) + z(1-z^2) + x(1-x^2) \right) \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

болно. Энэ нь

$$\frac{x^4}{y(1-y^2)} + \frac{y^4}{z(1-z^2)} + \frac{z^4}{x(1-x^2)} \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x+y+z-(x^3+y^3+z^3)} = \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{1-(x^3+y^3+z^3)}$$

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^2 = \frac{1}{3^2} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$$

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^3 = \frac{1}{3^3} \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 \geq \frac{1}{9}$$

байх тул

$$\frac{x^4}{y(1-y^2)} + \frac{y^4}{z(1-z^2)} + \frac{z^4}{x(1-x^2)} \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{1-(x^3+y^3+z^3)} \geq \frac{(\frac{1}{3})^2}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{8}$$

болж батлагдана.

ММО-40, IX АНГИЙН III ДАВАА

Б.Баяржаргал

IX-A1 (Б.Баяржаргал). Дурын m натурал тооны хувьд n гэсэн m -д хуваагддаг ба зарим нэг тэг биш цифрийг нь дарахад мөн m -дээ хуваагддаг байх тоо олдохыг батал.

IX-A2 (Б.Баяржаргал). $\angle A = \alpha < 90^\circ$ байх ABC гурвалжин тойрогт багтжээ. B оройгоос буулгасан өндрийн суурийг дайрсан тойргийн диаметр гурвалжны талбайг хагаслан хуваадаг бол $\angle B$ -г ол.

IX-A3 (Б.Баяржаргал). $\triangle ABC$ -д

$$8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{C-A}{2}$$

биелнэ гэж батал.

IX-B1 (Б.Баяржаргал). $a_1 = 1$ ба $n \geq 2$ үед a_n нь $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ -ээс ялгаатай $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ нь n -д хуваагдах хамгийн бага натурал тоо байна нэсэн дүрмээр тодорхойлогдох дарааллын a_n дүгээр гишүүнийг ол.

IX-B2 (Б.Баяржаргал). $M, A_1, A_2, \dots, A_n (n \geq 3)$ нь

$$A_1 A_2 = A_2 A_3 = \dots = A_{n-1} A_n = A_n A_1.$$

байх ялгаатай цэгүүд байг. Тэгвэл

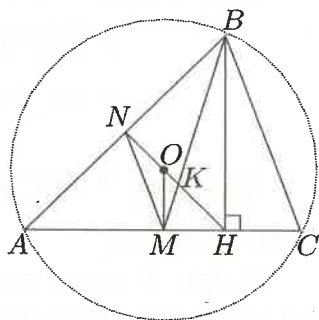
$$\frac{1}{MA_1 \cdot MA_2} + \frac{1}{MA_2 \cdot MA_3} + \dots + \frac{1}{MA_{n-1} \cdot MA_n} \geq \frac{1}{MA_1 \cdot MA_n}.$$

IX-B3 (Б.Баяржаргал). Улс N хоттой ба аль ч 2 хот нь нэг бол авто замаар нэг бол төмөр замаар ходбогдсон байжээ. Аялагч нэг хотоос эхлээд бүх хотоор нэг нэг удаа ороод анхны хотдоо ирэх маршрут зохиох болжээ. Тэгвэл аялагч ингэж аялахдаа унаагаа нэг л удаа өөрчлөхөөр эхлэх хотоо сонгож чадахыг батал.

IX-A1. $m = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ гэе. $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_n a_1 a_2 \dots a_n}$ тоог авч сүүлийн n оронгийн тэгээс ялгаатай бүх цифрийг дарахад үлдэх тоо нь $\overline{a_1 a_2 \dots a_n 0 \dots 0}$ хэлбэрийн тоо гарах ба энэ нь m -д хуваагдах нь илэрхий.

IX-A2. O нь багтаасан тойргийн төв, A нь B оройгоос

буулгасан өндрийн суурь, M нь AC талын дундаж, N нь AB , OH шулуунуудын огтлолцолын цэг, K нь OH , BM шулуунуудын огтлолцолын цэг байг. $S_{AHN} = \frac{1}{2}S_{ABC} = S_{ABM}$ $ANKM$ дөрвөн өнцөгт нь ерөнхий учир $S_{NKB} = S_{MKH}$, $S_{NKB} = \frac{1}{2}NK \cdot KB \cdot \sin \angle NKB = S_{MKH} = \frac{1}{2}MK \cdot KH \sin \angle MKH$, $\angle NKB = \angle MKH$ учир $\frac{NK}{MK} = \frac{HK}{KB}$ болно.



Эндээс $\triangle NKM \sim \triangle KBN$ буюу $MN \parallel BH$ буюу NOM нь нэг шулуун дээр оршино гэж гарна. Эндээс нэг бол N, O цэгүүд давхцана, нэг бол M, H цэгүүд давхцана.

а) $N \equiv O$ бол AB нь диаметр буюу $\angle C = 90^\circ$. Эндээс $\angle B = 90^\circ - \alpha$.

б) $M \equiv H$ бол $AB = BC$ буюу $\angle B = 180^\circ - 2\alpha$.

IX-A3.

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}, \quad \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}},$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \quad \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}, \quad \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$\text{гэдгийг санавал } \cos \frac{A+B}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p^2(p-a)(p-b)}{abc^2}} + \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)^2}{abc^2}} = \frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p+p-c)}}{c\sqrt{ab}} = \frac{(a+b)\sqrt{(p-a)(p-b)}}{c\sqrt{ab}}$$

$$\cos \frac{B-C}{2} = \frac{(b+c)\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a\sqrt{bc}}, \quad \cos \frac{C-A}{2} = \frac{(c-a)\sqrt{(p-c)(p-a)}}{b\sqrt{ac}} \text{ орлуулбал}$$

$$8 \cdot \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \leq \frac{(a+b)(a+c)(b+c)(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2b^2c^2}$$

$(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$ болно.

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $a+c \geq 2\sqrt{ac}$, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$ гэдгээс $(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$ болж батлагдав.

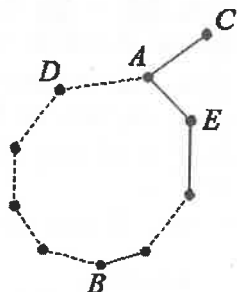
IX-B1. Бодолт байхгүй.

IX-B2. M цэг дээр төвтэй 1 радиустай тойргийн хувьд инверс хийе. A_i цэгийн дүр A'_i гэвэл

$$\begin{aligned}
A'_1 A'_2 + A'_2 A'_3 + \dots + A'_{n-1} A'_n &= \frac{1^2 - A_1 A_2}{MA_1 MA_2} + \frac{1^2 - A_2 A_3}{MA_2 MA_3} + \dots \\
&\dots + \frac{1^2 - A_{n-1} A_n}{MA_{n-1} MA_n} = A_n A_1 \left(\frac{1}{MA_1 MA_2} + \frac{1}{MA_2 MA_3} + \dots \right. \\
&\left. \dots + \frac{1}{MA_{n-1} MA_n} \right) \geq A'_n A'_1 = \frac{1^2 - A_n A_1}{MA_n MA_1} \\
\frac{1}{MA_1 MA_2} + \frac{1}{MA_2 MA_3} + \dots + \frac{1}{MA_{n-1} MA_n} &\geq \frac{1}{MA_n MA_1}
\end{aligned}$$

болж батлагдав.

IX-B3. N хотын тоогоор индукцлэе. $N = 3$ үед нэг бол 3-н зам нь бүгд ижил эсвэл 2 нь ижил 1 нь өөр байна. Эхний тохиолдолд хаанаас ч эхэлж болно. Харин 2 дахь тохиолдолд 1 өөр замын 2 төгсгөлийн аль нэгээс нь эхлээд 2 ижил замаар явахад болно. $N \leq K$ үед явж эхлэх хотоо сонгож чаддаг гэе. $N = K + 1$ үед батлал. Ямар нэг K хотыг нь авбал A хотоос эхлээд B дээр нэг унаагаа солиод явж болдог гэе (индукцийн өмнөх алхам ёсоор).



C гэсэн $K + 1$ дэх хотыг авъя. CA -г тод гэж үзэхэд явцуурахгүй A -ийн хөрш 2 хотыг D, E гэе. CD нь тод хэрчмээр холбогдвол D -ээс C рүү, C -ээс A руу гээд өмнөх замаар явж тойроход болно. Хэрэв CD нь тасархай хэрчмээр холбогдсон бол C -ээс A руу, A -аас E -рүү гээд өмнөх замаар явж D дээр ирээд D -ээс C рүү очиж болно.

ММО-40, IX ангийн IV даваа

Б.Баяржаргал

IX-A1 (Б.Баяржаргал). $f : \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{Q}$ хувьд $f(xy) = f(x)f(y)$ ба $f(x + y) \leq \max(f(x), f(y))$ байх бүх функцийг ол.

IX-A2 (Ш.Батхишиг). $x_1 = 2, x_2 = 4, x_{n+1} = x_n^2 - x_{n-1} (n \geq 2)$ рекурент томъёогоор $\{x_n\}$ дараалал өгөгджээ. Энэ дараалалд 2004-д хуваагдах төгсгөлгүй олон гишүүн байх уу?

IX-A3 (Г.Батзаяа). Тойрогт багтсан ба багтаасан дөрвөн өнцөгтийн диагоналуудын огтлолцлын цэг, багтсан тойргийн төв, багтаасан тойргийн төвүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

IX-B1 (Б.Баяржаргал). a, b, c нь эерэг тоонууд бол

$$\frac{ab}{3a+b} + \frac{bc}{b+2c} + \frac{ac}{c+2a} \leq \frac{2a+20b+27c}{49}$$

болохыг батал.

IX-B2 (М.Батбилэг). Хавтгайд ABC гурвалжин ба дурын O цэг өгөгдөв. OA, OB, OC шулуунуудад перпендикуляр O цэгийг дайрсан шулуунууд BC, AC, AB талуудыг харгалзан A_1, B_1, C_1 цэгүүдэд огтолно. A_1, B_1, C_1 цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

IX-B3 (Ж.Батболд). $p > 2$ анхны тоо. $ax \equiv 1 \pmod{p}$ байх x тоог a^{-1} гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $\frac{2^{p-1}-1}{p} \equiv 1^{-1} + 3^{-1} + 5^{-1} + \dots + (p-2)^{-1} \pmod{p}$ гэж батал.

IX-A1. $f(x) = f(x)f(1) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = 0$ гэсэн шийд байна. Хэрэв $\exists x_0, f(x_0) \neq 0$ гэвэл $f(1) = 1$ гэж гарна. $f(x)f(\frac{1}{x}) = f(1)$, $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{f(x)}$, $f(0) = f(0)f(x) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = 1$ гэсэн шийд байна. $\exists x_0, f(x_0) \neq 1$ гэвэл $f(0) = 0$ болно. $f(-1)f(-1) = f(1) = 1 \Rightarrow f(-1) = \pm 1$ байна ($\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \leq 1$ гэдгийг индукцээр баталж болно).

а) $f(-1) = -1$ бол $f(1) = f(-1+2) \leq \max(f(-1), f(2))$, $f(2) \leq f(1)$ ба $f(-1) = -1$ учир $f(1) \geq \max(f(2), f(-1)) \geq f(1)$ буюу $f(2) = 1$ гэж гарна. $f(-2) = -1$ болно. $1 = f(1) = f(-2+3) \leq \max(f(-2), f(3))$, $f(3) = f(2+1) \leq \max(f(2), f(1)) = f(1) = 1$ учир $f(3) = 1$ гэж гарна. Эндээс индукцээр $n \in \mathbb{Z}^+$, $f(n) = 1$ гэж гарах ба $f(-n) = -1$ болно. Эндээс $\forall q \in \mathbb{Q}^+$ үед $f(q) = f(\frac{n}{m}) = \frac{f(n)}{f(m)} = 1$ болж $f(-q) = -1$ болно. Энэ нь манай шийд болно.

б) $f(-1) = 1$ байг. $\forall q \in \mathbb{Q}, q < 0$ бол $q = -q_1$, $f(q) = f(-1) \cdot f(q_1) = f(q_1)$ буюу $q \in \mathbb{Q}^+$ үед л бодоход хангалттай гэсэн үг. $\forall p \in P$ хувьд $f(p) = 1$ бол $\forall q \in \mathbb{Q}^+$ хувьд $q = \frac{p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}}{p_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \cdots p_{s+l}^{\alpha_{s+l}}}$ гэж

бичигддэг тул $f(q) = \frac{f^{\alpha_1}(p_1) \cdots f^{\alpha_s}(p_s)}{f^{\alpha_{s+1}}(p_{s+1}) \cdots f^{\alpha_{s+l}}(p_{s+l})} = 1$ гэж гарна.

$\exists p, q \in P, f(p) < 1, f(q) < 1$ гэе. Тэгвэл $(p, q) = 1$ учир $up + vq = 1$ байх $u, v \in \mathbb{Z}$ олдоно. $f(u) \leq 1, f(v) \leq 1$ учир $f(up) = f(u)f(p) < 1, f(vq) = f(v)f(q) < 1$ болно. Эндээс $\max(f(up), f(vq)) < 1$ буюу $f(up + vq) = f(1) = 1 \leq \max(f(up), f(vq)) < 1$ болж зөрчил үүснэ. Иймд $\exists! p \in P, f(p) < 1$. Иймд $q \in \underline{P}, q \neq p$ бол $f(q) = 1$ болно. Эндээс $\forall n \in \mathbb{Q}^+$ хувьд $n = p^\alpha \cdot p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s} \cdot p_{s+1}^{\beta_{s+1}} \cdots p_k^{\beta_k}$ энд $\alpha_1, \dots, \alpha_s > 0$ ба $\beta_{s+1}, \dots, \beta_k < 0$. $f(n) = f^\alpha(p) \cdot f^{\alpha_1}(p_1) \cdots f^{\alpha_s}(p_s) \cdot f^{\beta_{s+1}}(p_{s+1}) \cdots f^{\beta_k}(p_k) = f^\alpha(p) = f(p)^{\text{ord}_p n}$ болно. Мөн $n \in \mathbb{Q}^-$ үед $f(n) = f^{\text{ord}_p n}(p)$ гэж гарна. Энэ функц 2 дахь нөхцлийг хангахыг харуулъя.

$\forall x, y \in \mathbb{Q}, x = p^\alpha \cdot \frac{x_1}{x_2}, y = p^\beta \cdot \frac{y_1}{y_2}, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}, \alpha \geq \beta$ гэе.
 $x + y = p^\beta \left(p^{\alpha-\beta} \frac{x_1}{x_2} + \frac{y_1}{y_2} \right) = p^\beta \cdot \frac{p^{\alpha-\beta} x_1 y_2 + y_1 x_2}{x_2 y_2}$ болох ба $p^{\alpha-\beta} x_1 y_2 + y_1 x_2, x_2, y_2$ нь p -тэй харилцан анхны тоо учир $f(x + y) = f^\beta(p) = \min(f(x), f(y)) \leq \max(f(x), f(y))$ болж батлагдав.

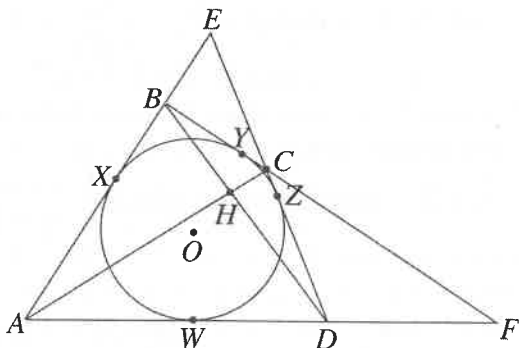
IX-A2. $x_0 = 0, x_1 = 2, x_{n+1} = x_n^2 - x_{n-1}, n \geq 1$ гэж тодорхойлж болно. Энэ дарааллын гишүүдийг mod 2004-өөр жишиж үүсэх дарааллыг авч үзье. Уг дарааллыг r_n гэвэл $x_n = r_n \pmod{2004}, 0 \leq r_n < 2004$ байна. Одоо r_n дараалал үетэй гэж харуулъя. $(r_0, r_1), (r_1, r_2), \dots, (r_{2004^2}, r_{2004^2+1})$ хосуудыг авч үзвэл Дирихлейн зарчимаар ижил хоёр хос бий. $r_n \equiv r_{n+1}^2 - r_{n+2} \pmod{2004}$ байх тул энэ дараалал нь цэвэр үетэй (r_0 -оос эхлэнэ). Иймээс $r_m = 0$ байх тэгсгөлгүй олон m дугаар олдоно. Энэ нь 2004-дуваагдах тэгсгөлгүй олон x_m гишүүн бий юмаа гэдгийг үзүүлж байна.

IX-A3.

ЛЕММ. $ABCD$ багтаасан (багтсан) 4 өнцөгтийн хувьд багтаасан (багтсан) тойргийн төв нь O , диагалуудын огтлолцлын цэг нь H ба эсрэг талууд нь харгалзан E ба F цэгүүдэд огтлолцдог бол $OH \perp EF$ байна.

Баталгаа. Поляр шулуун ашиглан баталгааг хийе (Багтсан 4 өнцөгтийн тохиолдолд баталгаа адилхан хийгдэнэ). Багтсан тойргийн AB, BC, CD, DA талуудтай шүргэлцэх цэгүүдийг харгалзан x, y, z, w гэж тэмдэглэе. Одоо бодлогоо бодъё. Багтаасан ба багтсан тойргийн төвүүдийг харгалзан O ба I гэж тэмдэглэе.

$l_F = WY \ni H$ (поляр шулууны чанар) $l_E = XZ \ni H$ байна. Эндээс $E \in l_H, F \in l_H \Rightarrow l_H = EF$ болно. Иймд $OH \perp EF$ болж лемм батлагдлаа. Диагналиудын огтлолцлын цэгийн H , эсрэг талуудын огтлолцлын цэгүүдийг E ба F гэж тус тус тэмдэглэе.



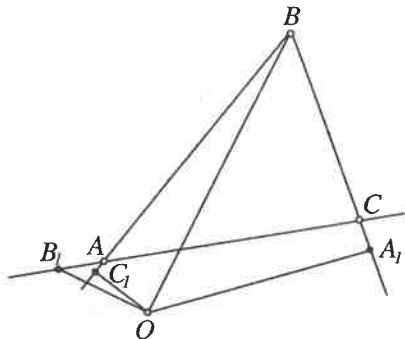
Лемм ёсоор $HI \perp FE$ ба $HO \perp FE$ байна. Эндээс I, H, O цэгүүд коллинеар болж бодлого бодогдлоо.

IX-B1 (Өвөрхангай, Хархорин сум, Н.Батболд). $\frac{ab}{3a+b} \leq \frac{a+12b}{49}, \frac{bc}{b+2c} \leq \frac{8b+9c}{49}, \frac{ac}{c+2a} \leq \frac{a+18c}{49}$ гэсэн тэнцэл бишийг тус тусд нь батлаад нэмбэл манай бодлого батлагдана.

IX-B2. $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$ болохыг шалгахад хангалттай юм. $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{S_{AOB_1}}{S_{COB_1}} = \frac{OA \cdot OB_1 \cdot \sin(\widehat{AOB_1})}{CO \cdot OB_1 \cdot \sin(\widehat{COB_1})} = \frac{OA}{CO} \cdot \frac{\sin(\widehat{AOB_1})}{\sin(\widehat{COB_1})}$ болно. Үүний адилаар

$$\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{OC}{OB} \cdot \frac{\sin(\widehat{COA_1})}{\sin(\widehat{BOA_1})},$$

$$\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{OB}{OA} \cdot \frac{\sin(\widehat{BOC_1})}{\sin(\widehat{AOC_1})}.$$



Эдгээрийг хооронд нь харгалзан үржүүлж $\sin(\widehat{AOB_1}) = \sin(\widehat{BOA_1})$, $\sin(\widehat{COA_1}) = \sin(\widehat{AOC_1})$, $\sin(\widehat{BOC_1}) = \sin(\widehat{COB_1})$ болохыг тооцвол батлах зүйл гарлаа. Бодлого бодогдов.

IX-B3. $2^p = (1+1)^p = 2 + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k$, $C_p^k = p \frac{(p-1)(p-2)\dots(p-k+1)}{k!} = p \cdot x_k$, $k!x_k = (p-1)(p-2)\dots(p-k+1) \equiv (-1)^{k-1}(k-1)! \pmod{p} \Rightarrow kx_k \equiv (-1)^{k-1} \pmod{p} \Rightarrow x_k \equiv (-1)^{p-1} \cdot k^{-1} \pmod{p}$, $C_p^k = p \cdot x_k \equiv$

$(-1)^{k-1} p \cdot k^{-1} \pmod{p^2}$. $\frac{2^p-2}{p} = \sum_{k=1}^{p-1} x_k \equiv 1 - 2^{-1} + 3^{-1} - 4^{-1} + \dots + (p-2)^{-1} - (p-1)^{-1} \pmod{p}$. $1 + 2^{-1} + 3^{-1} + \dots + (p-2)^{-1} + (p-1)^{-1} \equiv 0 \pmod{p}$ гэж баталбал бодлого бодогдоно. $\mathbb{Z}_p = \{1, 2, \dots, p-1\}$ олонлогийн хувьд $\{1^{-1}, 2^{-1}, \dots, (p-1)^{-1}\}$ олонлогийг авч үзье. $x, y \in \mathbb{Z}_p$ гэсэн x, y тооны хувьд $\begin{cases} xa \equiv 1 \pmod{p} \\ yb \equiv 1 \pmod{p} \end{cases}$ системээс $x \neq y$ бол $a \neq b$ тул $\{1, 2, \dots, p-1\} = \{1^{-1}, 2^{-1}, \dots, (p-1)^{-1}\}$ болох тул $1 + 2^{-1} + 3^{-1} + \dots + (p-1)^{-1} \equiv 1 + 2 + 3 + \dots + (p-1) \equiv 0 \pmod{p}$ болж $1 - 2^{-1} + 3^{-1} - 4^{-1} + \dots + (p-2)^{-1} - (p-1)^{-1} \equiv 2(1 + 3^{-1} + 5^{-1} + \dots + (p-2)^{-1}) - (1 + 2^{-1} + 3^{-1} + \dots + (p-1)^{-1}) \equiv 2(1 + 3^{-1} + \dots + (p-2)^{-1}) \pmod{p}$ болж $\frac{2^{p-1}-1}{p} \equiv 1 + 3^{-1} + 5^{-1} + \dots + (p-2)^{-1} \pmod{p}$ болж батлагдав.

ММО-40, X ангийн III даваа

Б.Батбаясгалан

X-A1 (Б.Батбаясгалан). Дурын $p \geq 5$ анхны тооны хувьд $\sum_{0 < k < \frac{2p}{3}} C_p^k$ нийлбэр p^2 -д хуваагдахыг батал.

X-A2 (Б.Батбаясгалан). Хавтгайд n ширхэг улаан цэг өгөгдөв. Улаан цэгүүд дээр оройтой ямар ч гурвалжин дотор ядаж нэг цэнхэр цэг байхаар $2n$ ширхэг цэнхэр цэг байрлуулж болохыг батал.

X-A3 (Б.Батбаясгалан). Хурц өнцөгт ABC гурвалжины A, B, C оройгоос гарсан медианууд уг гурвалжиныг багтаасан тойрогтой харгалзан A_1, B_1, C_1 цэгүүдээр огтлолцдог бол $S_{A_1BC} + S_{B_1CA} + S_{C_1AB} \geq S_{ABC}$ болохыг батал. Энд S нь гурвалжны талбай.

X-B1 (Б.Батбаясгалан). $a, b \in \mathbb{R}$ өгсөн бодит тоонууд бол $\left| ac + b + \frac{1}{c+1} \right| > \frac{1}{24}$ байхаар $c \in (0; 1)$ олдоно гэж батал.

Х-В2 (Б.Батбаясгалан). Аяллын турш Дорж, Бат хоёр өглөөний цайндаа зөвхөн алим гадил хоёрын аль нэгийг дараах байдлаар идэж явав. Үүнд: Дорж эхний m өдөр гадил, дараагийн m өдөр алим, дараагийн m өдөр гадил гэх мэт, харин Бат эхний n өдөр гадил, дараагийн n өдөр алим, дараагийн n өдөр алим гэх мэт идэж явав. Хэрвээ m нь n -тэйгээ харилцан анхны ба нийт mn өдөр аялсан бол тэд хэдэн өдөр ижил жимс идсэн бэ?

Х-В3 (Б.Батбаясгалан). Тойрог дээрх $2n$ хүний эхний n -ийг нь “сайн”, дараагийн n -ийг нь “муу” гээ. Тэгвэл эхний хүнээс эхлэн тоолоод m дэх хүн бүрийг хасахад эхлээд n ширхэг “муу” хүн нь хасагдсан байх m тоо олдохыг батал.

Х-А1. Эхлээд дараах леммийг баталъя.

ЛЕММ. Хэрэв p нь анхны тоо бол $C_p^k/p \equiv -1^{k-1}k^{-1} \pmod{p}$.

Баталгаа. $C_p^k/p = \frac{(p-1)!}{(p-k)!k!} = \frac{(p-k+1)\dots(p-1)}{k!} \equiv \frac{-1(k-1)(-1)(k-2)\dots(-1)1}{k!} \equiv \frac{(-1)^{k-1}}{k} \pmod{p}$ болох ба $\mathbb{Z}_p$ талбар тул $C_p^k/p \equiv -1^{k-1}k^{-1} \pmod{p}$ болов.

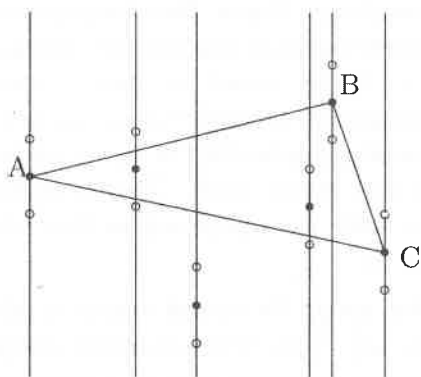
Бид $\sum_{0 < k < \frac{2p}{3}} C_p^k/p \equiv 0 \pmod{p}$ гэж батлахад хангалттай. Гэтэл

$$\begin{aligned} \sum_{0 < k < \frac{2p}{3}} C_p^k/p &\equiv \sum_{0 < k < \frac{2p}{3}} -1^{k-1}k^{-1} \pmod{p} \text{ ба} \\ \sum_{0 < k < \frac{2p}{3}} -1^{k-1}k^{-1} &= \sum_{0 < k < \frac{2p}{3}} k^{-1} - 2 \sum_{0 < k < \frac{p}{3}} (2k)^{-1} = \\ &= \sum_{0 < k < \frac{2p}{3}} k^{-1} - \sum_{0 < k < \frac{p}{3}} k^{-1} \end{aligned}$$

мөн $p > 5$ гэдгийг тооцвол $\sum_{0 < k < \frac{2p}{3}} C_p^k/p \equiv \sum_{\frac{p}{3} < k < \frac{2p}{3}} k^{-1} \pmod{p}$ болно.

Хэрэв $\frac{p}{3} < k < \frac{2p}{3}$ бол $\frac{p}{3} < p-k < \frac{2p}{3}$, мөн $k^{-1} + (p-k)^{-1} \equiv pk^{-1}(p-k)^{-1} \equiv 0 \pmod{p}$ тул сүүлийн нийлбэрийг 2 талаас нь нэмэхэд 0 гарна.

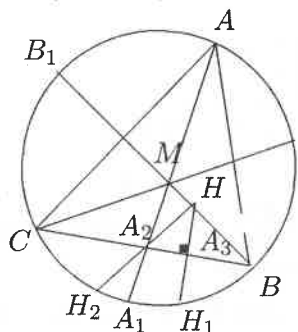
Х-А2. Өгөгдсөн цэгүүдийг дайрсан шулуунуудтай параллель



биш ямар нэг ℓ шулуун татъя. Улаан цэгүүдийн хоёрыг нь дайрсан шулуунуудын тоо C_n^2 тул энэ нь үргэлж боломжтой. Одоо улаан цэгүүдийг дайрсан ℓ -тэй параллель шулуунууд татъя. Улаан цэгүүд дээр оройтой нийт C_n^3 гурвалжин байх ба эдгээрийн хамгийн бага өндөрийн уртыг d гэе. Шулуун бүр дээр улаан цэгүүдийн 2 талд түүнээс $\frac{d}{2}$ зайд орших

цэнхэр цэгүүд байрлуулъя. Нийт n шулуун татагдсан тул цэнхэр цэгүүдийн тоо яг $2n$ байна. Одоо энэ байгуулалт бидний шаардлагыг хангахыг баталъя. Улаан цэгүүд дээр оройтой ABC гурвалжины B орой нь нөгөө хоёрынхоо дунд байдаг гэе. Тэгвэл түүнийг дайрсан шулуун AC хэрчимтэй огтлолцох бөгөөд огтлолцлын цэгийг B_1 гэвэл $|BB_1| > \frac{d}{2}$ ба B цэгийг дайрсан шулуун дээрх аль нэг цэг нь $\overrightarrow{BB_1}$ чиглэлд тавигдсан байх тул тэр цэг ABC гурвалжин дотор байна. Иймд аль ч гурвалжин дотор ядаж нэг цэнхэр цэг оршино.

Х-А3. ABC гурвалжины ортоцентрийг H гэе. AA_1 шулууны



BC талыг огтлох цэгийг A_2 , ортоцентрийг BC талын хувьд тэгш хэмтэй хувиргасан цэгийг H_1 гэе. Тэгвэл H_1 цэг нь ABC гурвалжины багтаасан тойрог дээр байна. Мөн H -ийг BC талын дундаж цэгийн хувьд тэгш хэмтэй хувиргахад гарах цэгийг H_2 гэвэл энэ цэг нь мөн адил ABC гурвалжиныг багтаасан тойрог дээр байхыг хялбар харж болно.

Нөгөө талаас H_1, H_2 цэгүүдээс BC тал хүрэх зайнууд тэнцүү бөгөөд A_1 цэг нь H_1, H_2 цэгүүдийн дунд орших тул $d(H_1, BC) \geq d(A_1, BC)$ байх ба $S_{HBC} = S_{H_1BC} \leq S_{A_1BC}$ болно. Энэ тэнцэл

тадын теоремоор ямар ч i, j -уудын хувьд $\begin{cases} x \equiv i \pmod n \\ x \equiv j \pmod m \end{cases}$ систем $x \in \{1, \dots, mn\}$ байх шийдтэй тул (q_1, q_2) нь

$$\begin{array}{ccccc} (0, 0) & (0, 2) & \dots & (0, m-1) \\ (1, 1) & (1, 3) & \dots & (1, m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1, 2) & (n-1, 4) & \dots & (n-1, m-1) \end{array}$$

-уудтай яг нэг, нэг удаа тэнцэх бөгөөд эдгээр хосуудын тоо нь $\frac{mn+1}{2}$ болно. Энэ нь бидний хайж буй тоо билээ.

Х-В3. m -ээр $n+1, n+2, \dots, 2n$ тоонуудын ямар ч давталтыг авч болох бөгөөд энэ тохиолдолд эхний n удаагийн хасалтаар тойрог дээрх хамгийн их дугаартай хүмүүс хасагдахыг төвөггүй харж болно.

ММО-40, X ангийн IV даваа

Б.Батбаясгалан

Х-А1 (Г.Баярмагнай). $m \in \mathbb{N}$, $(m, 6) = 1$ байг. S_m нь m -ээс бага m -тэй харилцан анхны натурал тоонуудын олонлог ба $\sum_{n \in S_m} \frac{1}{n} = \frac{A}{B}$, $A, B \in \mathbb{N}$ бол $m^2 \mid A$ гэж батал.

Х-А2 (Б.Батбаясгалан). $S = \{1, 2, \dots, n\}$ ба $A_1, A_2, \dots, A_m$ нь S -ийн k элементтэй дэд олонлогууд, $B_1, B_2, \dots, B_m$ нь 1 элементтэй дэд олонлогууд ба $k + \ell \leq n$ байг. Хэрэв дурын $i \neq j$ хувьд $A_i \cap B_i = \emptyset$ ба $A_i \cap B_i \neq \emptyset$ байдаг бол $m \leq C_{k+\ell}^\ell$ гэж батал.

Х-А3 (Б.Баяржаргал). $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн AC , BD диагоналийн дундаж цэгүүдийг харгалзан P , Q ; PQ шулууны AB , CD -тэй огтлолцох цэгүүдийг харгалзан N , M гээ. Тэгвэл NAP , NBQ , MQD , MPC гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд нэг цэгт огтлолцохыг батал.

тадын теоремоор ямар ч i, j -уудын хувьд $\begin{cases} x \equiv i \pmod{n} \\ x \equiv j \pmod{m} \end{cases}$ систем $x \in \{1, \dots, mn\}$ байх шийдтэй тул (q_1, q_2) нь

$$\begin{array}{ccccc} (0, 0) & (0, 2) & \dots & (0, m-1) \\ (1, 1) & (1, 3) & \dots & (1, m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1, 2) & (n-1, 4) & \dots & (n-1, m-1) \end{array}$$

-уудтай яг нэг, нэг удаа тэнцэх бөгөөд эдгээр хосуудын тоо нь $\frac{mn+1}{2}$ болно. Энэ нь бидний хайж буй тоо билээ.

Х-В3. m -ээр $n+1, n+2, \dots, 2n$ тоонуудын ямар ч давталтыг авч болох бөгөөд энэ тохиолдолд эхний n удаагийн хасалтаар тойрог дээрх хамгийн их дугаартай хүмүүс хасагдахыг төвөггүй харж болно.

ММО-40, X ангийн IV даваа

Б.Батбаясгалан

Х-А1 (Г.Баярмагнай). $m \in \mathbb{N}$, $(m, 6) = 1$ байг. S_m нь m -ээс бага m -тэй харилцан анхны натурал тоонуудын олонлог ба $\sum_{n \in S_m} \frac{1}{n} = \frac{A}{B}$, $A, B \in \mathbb{N}$ бол $m^2 \mid A$ гэж батал.

Х-А2 (Б.Батбаясгалан). $S = \{1, 2, \dots, n\}$ ба $A_1, A_2, \dots, A_m$ нь S -ийн k элементтэй дэд олонлогууд, $B_1, B_2, \dots, B_m$ нь 1 элементтэй дэд олонлогууд ба $k + \ell \leq n$ байг. Хэрэв дурын $i \neq j$ хувьд $A_i \cap B_i = \emptyset$ ба $A_i \cap B_i \neq \emptyset$ байдаг бол $m \leq C_{k+\ell}^\ell$ гэж батал.

Х-А3 (Б.Баяржаргал). $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн AC , BD диагоналийн дундаж цэгүүдийг харгалзан P , Q ; PQ шулууны AB , CD -тэй огтлолцох цэгүүдийг харгалзан N , M гэе. Тэгвэл NAP , NBQ , MQD , MPC гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд нэг цэгт огтлолцохыг батал.

X-B1 (Б.Батцэнгэл). $1, 2, \dots, n$ тоонуудын $\forall k (1 \leq k \leq n)$ хувьд $|a_k - k| = 0$, эсвэл 1, эсвэл 2 байх $a_1, a_2, \dots, a_n$ сэлгэмлийн тоог A_n гэж тэмдэглэе. $n \geq 6$ үед $A_n = 2a_{n-1} + 2A_{n-3} - A_{n-5}$ тэнцэл биелнэ гэж батал.

X-B2 (В.Адъяасүрэн). ABC гурвалжинд багтсан тойргийн AC талтай шүргэлцэх цэгийг D гэе. $[BD], [DC]$ цацрагууд ба ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг гадаад байдлаар шүргэсэн тойрог B өнцөгт харгалзах гадаад багтсан тойрогтой тэнцүү гэж батал.

X-B3 (Б.Баяржаргал). $1, 2, 3, \dots, 40$ тоонуудыг тойрог дээр дараалсан аливаа a, b, c тоонуудын хувьд $b^2 - ac : 41$ байхаар хэдэн янзаар байрлуулж чадах вэ? (Эргүүлэлт, тэгш хэмээр бие биедээ шилждэг байрлуулалтуудыг нэг байрлуулт гэж тооцно).

X-A1. $A = B \sum_{n \in S_m} \frac{1}{n} = Bm \sum_{(n \in S_m, n < \frac{m}{2})} (\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m-n})$ ба $(m, 6) = 1$

гэдгээс

$$6 \sum_{n \in S_m, n < \frac{m}{2}} n^{-1} \cdot (m-n)^{-1} \equiv 3 \sum_{n \in S_m} n^{-1} (m-n)^{-1} \equiv 0(m)$$

гэж батлахад хангалттай. $(m-n)^{-1} \equiv -n^{-1}(m)$ мөн $S_m = \{n^{-1} \mid n \in S_m\}(m) = \{2n \mid n \in S_m\}(m)$ гэдгийг тооцвол $3 \sum_{1 \in S_m} n^{-1} (m-n)^{-1} \equiv -3 \sum_{n \in S_m} (n^{-1})^2 \equiv -3 \sum_{n \in S_m} n^2 \equiv \sum_{n \in S_m} n^2 - \sum_{n \in S_m} (2n)^2 \equiv 0(m)$

болж батлагдав.

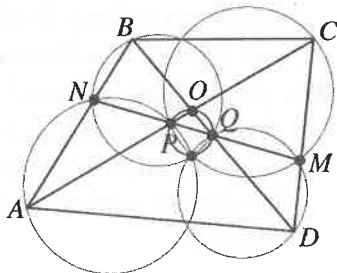
X-A2. Бодлогын өгүүлбэр алдаатай болсон тул дорхи зөв өгүүлбэрийг өгье.

$S = \{1, 2, \dots, n\}$ ба $A_1, A_2, \dots, A_m$ нь S -ийн k элементтэй дэд олонлогууд, $B_1, B_2, \dots, B_m$ нь ℓ элементтэй дэд олонлогууд ба $k + \ell \leq n$ байг. Хэрэв дурын $i \neq j$ хувьд $A_i \cap B_i = \emptyset$ ба $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ байдаг бол $m \leq C_{k+\ell}^\ell$ гэж баталъя.

S олонлогийн ямар нэг π сэлгэмлийг авъя. Хэрэв π сэлгэмэлд A_i -ийн бүх элемент, B_i -ийн элементүүдийн өмнө ордог бол π -г i -р төрлийнх гэе. Одоо π нь нэгэн зэрэг i ба j -р төрлийнх байж болохгүйг баталъя. Эсрэгээс нь π нь i ба j -р төрлийнх байг. x_i нь A_i -ийн π дэх хамгийн сүүлчийн элемент, x_r нь A_r -ийн π дэх

хамгийн сүүлчийн элементийг тус тус тэмдэглэж байг. Хэрэв x_i нь x_j -ээс хойш байрладаггүй бол $A_i \cap B_j = \emptyset$ болох тул зөрчил үүснэ. Иймд π нь зөвхөн нэг л төрлийнх байж болно. Одоо i -р төрлийн сэлгэмэлийн тоог олѐ. Энэ нь $C_n^{k+\ell} \cdot (n-k-\ell)! k! \ell! = \frac{n!}{C_{k+\ell}^k}$. Эдгээрийг нэмэхэд батлах зүйл батлагдана.

Х-А3. Диагоналиудын огтлолцлын цэгийг O гэе. ANP, PCQ гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд K цэгт огтлолцдог байг. $\angle OQP = \angle OKP, \angle BNP = \angle AKP$ учир $\angle ABO = 180^\circ - (\angle BNP + \angle OQP) = 180^\circ - (\angle AKP + \angle OKP) = 180^\circ - \angle AKO$ буюу $ABOK$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. Яг ижил аргаар $NBQK$ нэг



тойрог дээр оршино. $\angle BQK = 180^\circ - \angle OPK = \angle APK$ ба $\angle KBQ = \angle OAK$ гэдгээс $\triangle APK \sim \triangle BQK \Rightarrow \frac{AK}{BK} = \frac{BQ}{AP} = \frac{BD}{AC}$ ба $\angle DBK = \angle CAK$ учир $\triangle ACK \sim \triangle BDK \Rightarrow \angle OCK = \angle ODK$ болж $OC DK$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. Эндээс $\angle KDC = \angle POK = \angle PQK = 180^\circ - \angle KQM$ буюу $KQMD$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. Бас $\angle KCM = \angle KOD = \angle KPQ$ буюу $PCMK$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. Үүгээр бодлого бодогдов.

Х-В1. $1, 2, \dots, n-1, n+1$ тоонуудын, $\forall k (1 \leq k \leq n)$ тооны хувьд $|b_k - k| = 0$, эсвэл 1, эсвэл 2 байх $b_1, b_2, \dots, b_n$ сэлгэмэлийн тоог B_n гэе. Тэгвэл $a_n = n$ байх сэлгэмэлийн тоо A_{n-1} . $a_{n-1} = n$ байх сэлгэмэлийн тоо нь $B_{n-1} = A_{n-2} + B_{n-2}$, $a_{n-2} = n$ байх сэлгэмэлийн тоо нь $B_{n-2} + A_{n-3} + A_{n-4}$ болохыг төвөггүй харж болно. Иймд

$$\begin{cases} A_n = A_{n-1} + A_{n-2} + A_{n-3} + A_{n-4} + 2B_{n-2} = \\ \quad = A_{n-1} + A_{n-2} + A_{n-3} + A_{n-4} + 2(A_{n-3} + B_{n-3}) \\ A_{n-1} = A_{n-2} + A_{n-3} + A_{n-4} + A_{n-5} + 2B_{n-3} \end{cases}$$

Эдгээрийг хасвал $A_n = 2A_{n-1} + 2A_{n-3} - A_{n-5}$ болж батлах зүйл батлагдав.

Х-В2. ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг ω ; $[BD)$, $[DC)$ цацрагууд ба ω тойргийг гадаад байдлаар шүргэсэн тойргийг ω_1 ; ω_1 тойргийг $[BD)$, $[DC)$ цацрагуудыг шүргэх цэгийг P, Q ;

B өнцгийн биссектрисийн AC -тэй огтлолцох цэгийг L ; B өнцөгт харгалзах гадаад багтсан тойргийн төвийн O_3 ; $(BL) \cap (PQ) = T$ гэе.

A, B, C, ω_1 тойргууд ω тойргийг шүргэнэ. Кезийн теорем хэрэглэвэл: $AB \cdot CQ + BC \cdot AQ = AC \cdot BP \Leftrightarrow c \cdot CQ + a \cdot (b + CQ) = b \cdot BP$. Гэвч $CQ = DQ - DC = DP - DC = (BP - BD) - DC$ учраас

$$BP \cdot (c + a - b) + ab = (a + c)(BD + DC) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} BD + DC &= (BP - DP) + DC = BP - DQ + DC = BP - CQ = \\ &= BP - (LQ - LC) = BP - LQ + LC = BP + \frac{ab}{a+c} - LQ \end{aligned} \quad (2)$$

(1) ба (2)-оос $BP(c + a - b) + ab = ab + (a + c) \cdot (BP - LQ) \Leftrightarrow$

$$\frac{LQ}{BP} = \frac{b}{a + c} \quad (3)$$

BDL гурвалжин ба QP огтлогчийн хувьд Менелайн теорем хэрэглэвэл: $\frac{LT}{TB} \cdot \frac{BP}{PD} \cdot \frac{DQ}{QL} = 1 \Rightarrow$

$$\frac{LT}{TB} = \frac{PD}{BP} \cdot \frac{QL}{DQ} \xrightarrow{PD=DQ} \frac{QL}{BP} \quad (4)$$

(3) ба (4)-өөс $\frac{LT}{TB} = \frac{b}{a+c}$ гэж гарах тул $T \equiv O_b$ яагаад?

ω_1 тойргийн төвийг O_1 , B өнцөгт харгалзах гадаад багтсан тойргийн AC талтай шүргэлцэх цэгийг K гэвэл $\triangle DQO_1 \sim \triangle O_b KQ \Rightarrow \frac{KO_b}{DQ} = \frac{KQ}{QO_1} \Rightarrow$

$$KO_b \cdot QO_1 = DQ \cdot KQ \quad (5)$$

AC талын дундаж цэгийг M гэвэл $DP \parallel O_b M$ (батал!). Иймээс

$$\begin{aligned} KO_b^2 &= O_b M^2 - MK^2 = MQ^2 - MK^2 = \\ &= (MQ + MK) \cdot (MQ - MK) = DQ \cdot KQ \end{aligned} \quad (6)$$

(5) ба (6)-аас $KO_b \cdot QO_1 = KO_b^2 \Leftrightarrow QO_1 = KO_b$ гэж гарч батлах зүйл батлагдав.

Х-ВЗ. g нь 41 модулиархи анхны язгуур байг. Тойрог дээрх тоонууд маань 41 модулиар геометр прогресс үүсгэх тул ноогдвор нь $q = g^\alpha$ гэе. Тэгвэл тоонууд маань тойрог дээр $1, g^\alpha, g^{2\alpha},$

..., $g^{39\alpha}$ дарааллаар байрлана. Нөгөө талаас эдгээр нь ялгаатай байхын тулд $0 \leq i < j \leq 40$ байх дурын i, j тоонуудын хувьд $i\alpha \equiv j\alpha(40)$ буюу $(\alpha, 40) = 1$ байх шаардлагатай. $\varphi(40) = 40(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{5}) = 16$. Нөгөө талаас ноогдвор нь $g^\alpha, g^{-\alpha}$ байх 2 байрлал тэгш хэмтэй тул нийт $\frac{16}{2} = 8$ ялгаатай байрлал бий.

ММО-40, Багын багшийн III даваа

В.Адъяасүрэн

ББ-А1 (В.Адъяасүрэн). Гурвалжныг, аль ч хоёр нь ерөнхий талтай байж болдоггүй байхаар 7 гурвалжинд хуваа.

ББ-А2 (В.Адъяасүрэн). n тоог $n = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ (a, b, c бүхэл тоонууд) хэлбэртэйгээр бичиж болдог байвал $2n$ тоог ийм хэлбэртэйгээр бичиж болно гэж батал.

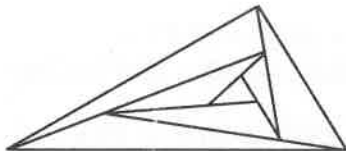
ББ-А3 (В.Адъяасүрэн). Сондгой натурал тоонуудын квадратыг залган бичих замаар 19254981121... олон оронтой тоо үүсгэв. 2004-р байранд ямар цифр байх вэ?

ББ-В1 (В.Адъяасүрэн). 10^{19} -ээс бага, $n^n + 1$ хэлбэрийн бүх анхны тоог ол.

ББ-В2 (В.Адъяасүрэн). ABC гурвалжны AE, BF медиануудын урт харгалзан 1 ба 2-той тэнцүү. ABC гурвалжны талбайн хамгийн их утгыг ол.

ББ-В3 (В.Адъяасүрэн). a, b, c, d нь $2 \leq a, b, c, d \leq 4$ байх тоонууд бол $25(ab + cd)^2 \geq 16(a^2 + d^2)(b^2 + c^2)$ гэж батал.

ББ-А1.



ББ-А2. $(a + b)^3 + (b + c)^3 + (c + a)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a) = 2(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$ адилтгалаас $2n = (a + b)^3 + (b + c)^3 + (c + a)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a)$ гэж гарна.

ББ-А3. Бүтэн квадрат болдог

- 1 оронтой сондгой тоо 2 ширхэг $(1^2, 3^2)$,
 2 оронтой сондгой тоо 3 ширхэг $(5^2, 7^2, 9^2)$,
 3 оронтой сондгой тоо 11 ширхэг $(11^2, 13^2, \dots, 31^2)$,
 4 оронтой сондгой тоо 34 ширхэг $(33^2, \dots, 99^2)$,
 5 оронтой сондгой тоо 108 ширхэг $(101^2, \dots, 315^2)$,
 6 оронтой сондгой тоо 342 ширхэг $(317^2, \dots, 999^2)$.

Ийнхүү бүтэн квадрат болдог 1, 2, 3, 4, 5 оронтой тоонуудыг бичихэд $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 11 + 4 \cdot 34 + 5 \cdot 108 = 717$ цифр оролцоно. $2004 \cdot 717 = 1287$ ба $1287 = 6 \cdot 214 + 3$ тул бүтэн квадрат болдог сондгой 6 оронтой тоонуудын 215 дахь тооны эхнээсээ 3 дахь цифр нь бидний олох цифр болно. $(316 + 2 \cdot 214 + 1)^2 = 555025$ тул 2004 дэх цифр нь 5 болно.

ББ-В1. $16^{16} + 1 > 2^{64} = 2^4 \cdot (2^{10})^6 > 16 \cdot 1000^6 = 1,6 \cdot 10^{19} > 10^{19}$ тул $n < 16$. Хэрэв n нь нэгээс их k гэсэн сондгой хуваагчтай байвал $n = mk$ байх ба $n^n + 1 = n^{mk} + 1 = (n^k + 1)(n^{(m-1)k} - n^{(m-2)k} + \dots - n^k + 1)$ болж энэ тохиолдолд $n^n + 1$ зохиомол тоо болно. Иймээс n нь 2-ын зэрэг байх тоонуудын хувьд л $n^n + 1$ анхны тоо байх боломжтой. $1^1 + 1 = 2$, $2^2 + 1 = 5$, $4^4 + 1 = 257$ анхны тоо $8^8 + 1 = (2^8)^3 + 1 \cdot 2^8 + 1$. Ийнхүү бидний олох тоонууд 2, 5, 257 болно.

ББ-В2. AE , BF медиануудын огтлолцлын цэгийг M , $\angle BME = \varphi$ гэе. $ME : MA = 1 : 2$ тул $S_{BAE} = 3S_{BME}$, $BE : EC = 1 : 1$ тул $2 \cdot S_{BAE} = S_{ABC}$. Иймээс $S_{ABC} = 6 \cdot S_{BME}$. Нөгөө талаас, $S_{BME} = \frac{1}{2} MB \cdot ME \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \sin \varphi = \frac{2}{9} \sin \varphi$. Иймд $S_{ABC} = 6 \cdot \frac{2}{9} \sin \varphi = \frac{4}{3} \sin \varphi \leq \frac{4}{3}$ ба энэ тэнцэтгэл биш $\sin \varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi = 90^\circ$ үед тэнцэтгэл болно. Ийнхүү ABC гурвалжны талбайн хамгийн их утга $\frac{4}{3}$ -тэй тэнцүү.

ББ-В3. Бодлогын нөхцлөөс $(2a-d)(2d-a) \geq 0$ ба $(2c-b)(2b-c) \geq 0$ гэж гарна. Эндээс $5ad \geq 2a^2 + ad^2$ ба $5bc \geq 2b^2 + 2c^2$ гэж гарах эдгээр тэнцэтгэл бишүүдийг гишүүнчлэн үзүүлбэл:

$$4(a^2 + d^2)(b^2 + c^2) \leq 25abcd \Leftrightarrow 16(a^2 + d^2)(b^2 + c^2) \leq 100abcd \quad (1)$$

$(x + y)^2 \geq 4xy$ тэнцэтгэл бишийг ашиглавал:

$$4abcd \leq (ab + cd)^2 \quad (2)$$

(1) ба(2)-оос $16(a^2 + d^2)(b^2 + c^2) \leq 25(ab + cd)^2$ гэж гарч батлах тэнцэтгэл биш батлагдав.

ММО-40, Багын багшийн IV даваа

Б.Баяржаргал

ББ-А1 (А.Хашбаатар). ABC гурвалжны BD биссектрисийн үргэлжлэл уг гурвалжныг багтаасан тойргийг E цэгт огтолно. Гурвалжинд багтсан тойргийн төв O бол $\frac{1}{OD} - \frac{1}{OE} = \frac{1}{OB}$ болохыг батал.

ББ-А2 (В.Адъяасүрэн). $x_1, x_2, \dots, x_{25}$ нь $0 \leq x_1, x_2, \dots, x_{25} \leq 1$ байх тоонууд бол $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{24} - x_{25})^2 + (x_{25} - x_1)^2$ илэрхийллийн хамгийн их утгыг ол.

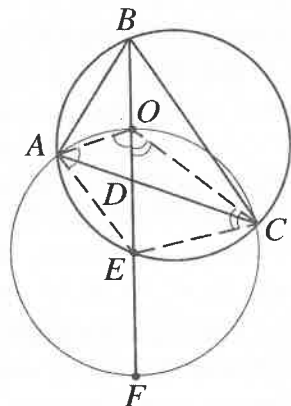
ББ-А3 (Б.Батцэнгэл). 5×5 хүснэгтийн нүднүүдэд бүхэл тоонууд бичигдсэн байв. Аль нэг 2 мөр ба 2 баганын огтлолцолд үүсэх 4 нүдэнд бичигдсэн дөрвөн тооны нийлбэр 4-д хуваагдах ёстой гэдгийг батал.

ББ-В1 (Б.Батцэнгэл). Аль ч 2 тооны ялгавар нь уг хоёр тооныхоо багыг нь хуваадаг байх ялгаатай 5 натурал тоо бич.

ББ-Б2 (Ч.Гантөмөр). 8×8 хэмжээтэй хөлгийн нүд бүрийг хар эсвэл цагаан өнгөөр будахдаа, аль ч 2×2 квадратыг авахад 2 нүд нь хараар, 2 нүд нь цагаанаар будагдсан байхаар нийт хичнээн ялгаатай аргаар будаж болох вэ?

ББ-Б3 (В.Адъяасүрэн). Тус бүр нь 1 гр жинтэй 2004 ширхэг гархинаас бүрдэх гинж байв. Гинжийг ашиглаад 1 гр, 2 гр, ..., 2003 гр, 2004 гр жинтэй ачааг бүгдийг нь жинлэж болдог байхын тулд уг гинжийг хамгийн цөөндөө хичнээн удаа таслах ёстой вэ?

ББ-А1. $EA = EO = EC$ байдгаас E төвтэй EA радиустай тойрог татвал огтлолцсон хөвчийн чанараар $AD \cdot CD = OD \cdot DF$. Өгсөн тойргоос $AD \cdot CD = BD \cdot DE$. Эдгээр тэнцлээс $OD \cdot DF = BD \cdot DE$, $DF = DE + EF = DE + OE = OE - OD + OE = 2OE - OD$. Өмнөх тэнцэлд орлуулахад $OD(2 \cdot OE - OD) = (OB + OD)(OE - OD) \Rightarrow 2OD \cdot OE - OD^2 = OB \cdot OE + OD \cdot OE - OB \cdot OD - OD^2 \Rightarrow OD \cdot OE = OB \cdot OE - OB \cdot OD$ тэнцэтгэлийн хоёр талыг $OB \cdot OD \cdot OE$ -д хуваавал $\frac{1}{OB} = \frac{1}{OD} - \frac{1}{OE}$.



ББ-А2. $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3), (x_2 - x_3)(x_3 - x_4), \dots, (x_{24} - x_{25})(x_{25} - x_1), (x_{25} - x_1)(x_1 - x_2)$ тоонуудын үржвэр нь сөрөг биш тул эдгээр тоо бүгд нэгэн зэрэг сөрөг байж болохгүй. Тухайлбал, $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3) \geq 0$ байвал $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 \leq (x_1 - x_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2 = (x_1 - x_3)^2 \leq 1$. Иймээс $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{25} - x_1)^2 \leq 1 + \underbrace{1 + \dots + 1}_{23} = 24$ болох ба энэ тэнцэтгэл биш $x_1 = x_2 = \dots = x_{22} = x_{24} = 1, x_3 = x_5 = \dots = x_{23} = x_{25} = 0$ үед тэнцэтгэл болно. Иймд $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{25} - x_1)^2$ илэрхийллийн хамгийн их утга 24-тэй тэнцүү.

ББ-А3. Хүснэгтийн 1-р мөрөнд тэгш сондгойгоороо ижил 3 тоо олдono. Уг 3 тоог агуулсан 3 баганыг сонирхоё. Үлдсэн аль ч мөрийн уг 3 баганад байгаа 3 тооны аль нэг 2 нь тэгш сондгойгоороо ижил байх ба тэр 2 ижил тооны уг 3 баганад байрлах боломж 3 янз байна. (Зурагт тэдгээрийг x -ээр тэмдэглэв) Тэгэхлээр нэгэнт 4 мөр үлдсэн тул Дирихлейн зарчим ёсоораль нэг 2 үлдсэн мөрөнд тэгш сондгойгоор ижил тоонууд адилхан байрлалаар байрлана. Тэр тоонууд нь 1, 2-р баганад байрлаж байсан болог. Тэгвэл уг тоонуудын нийлбэр, мөн 1-р мөрийн 1, 2-р баганад бичигдсэн тоо-

x	x	x		
x	x			
x		x		
	x	x		
x	x			

нуудын нийлбэр тэгш тоо байх ба энэ 3 тэгш нийлбэрийн аль нэг хоёрын нийлбэр нь 4-д хуваагдах ёстой.

ББ-В1. $a_1, a_2, \dots, a_n$ тоонуудын аль ч 2-ын ялгавар нь бага тоог нь хуваадаг чанартай байг. $A = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ бол $A, A + a_1, \dots, A + a_n$ тоонууд нь мөн дээрх чанартай гэдгийг хялбархан харуулж болно. Энэ аргаар $1, 2 \rightarrow 2, 3, 4 \rightarrow 24, 26, 27, 28 \rightarrow 471744, 471768, 471770, 471771, 471772$ гэж 5 тоог олж болно. Үүнээс бага 5 тоог ч олж болно. Тухайлбал уг бодлогыг бодсон ихэнхи багш нар 40, 42, 44, 45, 48 гэсэн 5 тоог олсон байв.

ББ-В2. Хөлгийн 1-р мөрийг будах боломжийн тоо нь $2^8 = 256$ юм. Хэрэв 1-р мөрний аль нэг 2 нүд ижил өнгөөр будагдсан байвал хөлгийн үлдэх мөрүүд нь цор ганц аргаар будагдана. Харин 1-р мөрний хөрш нүднүүд өөр өнгөтэй, өөрөөр хэлбэл нүднүүд сөөлжлөн будагдсан байвал дараагийн мөр бүр мөн сөөлжлөн будагдах ба ингэж будах боломж нь 2 янз байна. Иймд нийт будалтын тоо $254 \cdot 1 + 2 \cdot 2^7 = 510$ юм.

ББ-В3. Эхлээд 7 удаа таслаад 1г, 2г, ..., 2004г жинтэй ачааг жинлэж болно гэдгийг харуулья. 9-р, 26-р, 59-р, 124-р, 253-р, 510-р 1023-р гархиар хувааж 8, 1, 16, 1, 32, 1, 64, 1, 128, 1, 256, 1, 512, 1, 981 хэсгүүд болгоно. Эдгээрээр 1г, 2г, ..., 2004г жинтэй ачааг бүгдийг жинлэж болно. 6 хуваалтаар их сайндаа 1г, 2г, ..., $6 + 7 + 14 + 28 + 56 + 112 + 224 + 448 = 895$ г жинтэй ачааг л жинлэж чадна. Ийнхүү хамгийн цөөн таслалтын тоо 7 байна.

ММО-40, Дундын багшийн III даваа

Ц.Дашдорж

ДБ-А1 (Ц.Дашдорж). $\triangle ABC$ өгчээ. $|A| = |B| = |C| = 1$ ба $\exists \alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$, $A + B \cos \alpha + C \sin \alpha = 0$ бол $1 < S_{\triangle ABC} \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ гэж батал (X цэгийн комплекс тоон координатыг мөн X -ээр тэмдэглэв).

ДБ-А2 (Ц.Дашдорж). $m \in \mathbb{N}$ өгсөн тоо бол $S(m)$ -ээр $n \in \mathbb{N}$ ба $[\sqrt{n}] = [\sqrt{m}]$ байх бүх $\frac{n}{m}$ бутархайнуудын нийлбэрийг

тэмдэглэе ($[x]$ нь x тооны бүхэл хэсэг). $S(m) = 2004$ байх бүх m -г ол.

ДБ-А3 (Ц.Дашдорж). $f(x) = x^n + ax + b \mid g(x) = x^m + ax + b$ байх бүх бүхэл тооны дөрвөл (a, b, m, n) , $m > n$ -ийг ол.

ДБ-В1 (Ц.Дашдорж). $0 < x, y, z \in \mathbb{R}$ ба $xyz = 32$ бол $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2$ -ийн хамгийн бага утгыг ол.

ДБ-В2 (Ц.Дашдорж). P анхны тоонуудын олонлог. $M \subseteq P$, $|M| \geq 3$, $\forall A \subsetneq M$ -ийн хувьд $P \ni q \mid -1 + \prod_{p \in A} p \Rightarrow q \in M$ бол

$M = P$ гэж батал.

ДБ-В3 (Ц.Дашдорж). $\div(a, b) = \{a + bn \mid 0 \leq n \in \mathbb{Z}\}$ -ээр ариф-

метик прогрессийг тэмдэглэе. Хэрэв $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^m \div(a_i, b_i)$ ба

$i \neq j$ үед $\div(a_i, b_i)$ ба $\div(a_j, b_j)$ нь огтлолцдоггүй бол $\div(a_i, b_i)$, $i = \overline{1, m}$ нь $\mathbb{N}$ -ийн нарийн бүрхэлт болж байна гее. $\div(a_i, b_i)$, $i = \overline{1, m}$ нь $\mathbb{N}$ -ийн нарийн бүрхэлт ба $2 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_m$ бол $b_{m-1} = b_m$ гэж батал.

ДБ-А1. $1 = |A|^2 = (B \cos \alpha + C \sin \alpha)(\overline{B} \cos \alpha + \overline{C} \sin \alpha) = 1 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha \left(\frac{B}{C} + \frac{C}{B} \right) \Rightarrow B^2 + C^2 = 0$, $B = \pm C_i$ учир $\angle BOC = \frac{\pi}{2}$. $M = B \cos \alpha + C \sin \alpha$ цэг нь O дээр төвтэй 1 радиустай нэгж тойргийн $\widehat{BC}$ бага нум дээр орших ба O цэгийн хувьд $B \cos \alpha - C \sin \alpha = A$ -тай тэгш хэмтэй оршино. A оройгоос татагдсан h өндөр нь $\sqrt{2} < h \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ нөхцлийг хангах тул

$$1 = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} < S_{\triangle ABC} \leq \frac{1}{2} \sqrt{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

ДБ-А2. $k^2 \leq m < (k+1)^2$ (1) бол $S(m) = \sum_{n=k^2}^{k^2+2k} \frac{n}{m} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{m} = 2004$ -өөс $2k-1 < \frac{(k+2)(2k-1)+3}{k+2} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{k(k+2)} \leq 2004 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{m} \stackrel{(1)}{\leq} \frac{k(k+1)(2k+1)}{k^2} = 2k + 3 + \frac{1}{k} \rightarrow 1001 \leq k \leq 1002$ гэж гарах ба $m = \frac{k(k+1)(2k+1)}{2004}$ нь $k = 1001$ ба $k = 1002$ үед бутархай тоо гарах тул бодлогын нөхцлийг хангах m -ийн утга оршихгүй.

ДБ-А3. $g = x^n + ax + b \mid f - g = x^n(x^{m-n} - 1)$ (1)
 буюу $g = 0$ -ийн язгуур бүр $x^n(x^{m-n} - 1) = 0$ -ийн язгуур болно.
 а) $g(0) = 0$ бол $b = 0$ буюу

$$x^{n-1} + a \mid f - g \quad (2)$$

(2)-оос $a = 0$ бол $(0, 0, m, n)$, $m > n$ нь шийд болно. (2)-т $a \neq 0$ бол $x^{n-1} + a \mid x^{m-n} - 1$ болно. Өөрөөр хэлбэл $x^{n-1} + a = 0$ -ийн язгуур бүр $\sqrt[n-n]{1}$ -д орох тул $a = \pm 1$ гэж гарна. Энэ үед $g \mid f$ нь

$$x^{n-1} \pm 1 \mid x^{m-1} \pm 1 \quad (3)$$

болно. $x^{n-1} - 1 \mid x^{m-1} - 1 \Leftrightarrow n - 1 \mid m - 1$ байх тул $k \in \mathbb{N}$, $(-1, 0, (n - 1)k + 1, n)$ шийдийг олно. $x^{n-1} + 1 \mid x^{m-1} + 1$ бол $x^{n-1} + 1 = 0$ -ийн язгуур z_k бүр $x^{m-1} + 1 = 0$ -ийн язгуур болно гэдгээс ө.х. $z_k = \sqrt[n-1]{-1} \cdot e^{i\frac{\pi}{n-1}} \cdot e^{i\frac{2k\pi}{n-1}} = e^{i\frac{2k+1}{n-1}\pi}$, $k = \overline{0, n-2}$ бол $z_k^{m-1} = e^{i\frac{(2k+1)}{n-1} \cdot \pi \cdot (m-1)} = -1$ -ээс $\frac{(2k+1)\pi(m-1)}{n-1} = \arg(-1) = \pi + 2s\pi = (2s+1)\pi$, $m = (2\ell+1)(n-1) + 1$ буюу $(1, 0, (2\ell+1)(n-1) + 1, n)$, $\ell \in \mathbb{N}$ шийдийг олно.

б) $g(0) \neq 0$ буюу $b \neq 0$ байг. (1)-ээс

$$x^n + ax + b \mid x^{m-n} - 1 \quad (4)$$

болно. (4)-өөс $g = 0$ -ийн язгуур бүр $\sqrt[n-n]{1}$ -д орно гэж гарах тул $|b| = 1$ буюу $b = \pm 1$ болно. $g(\varepsilon_k) = 0$ бол $g(x) \in \mathbb{R}[x]$ тул $g(\overline{\varepsilon_k}) = 0$ гэж гарна. Гэтэл $\overline{\varepsilon_k} = \frac{1}{\varepsilon_k}$ байдаг тул $a = (-1)^{n-1} \prod_1^n \varepsilon_i \left(\sum_1^n \frac{1}{\varepsilon_i} \right) \Rightarrow$

$$a = (-1)^{2n-1} b \cdot \sum_1^n \overline{z_i} \quad (5)$$

Хэрэв $n > 2$ бол

$$\sum_1^n \overline{\varepsilon_i} = \sum_1^n \varepsilon_i = 0 \quad (6)$$

гэж гарна. Иймд (5)-аас $a = 0$ болж $x^n + b \mid x^m + b$, $m > n$ тул $b = \pm 1$ гэж гарна.

$x^n - 1 \mid x^m - 1 \Leftrightarrow n \mid m$ тул $(0, -1, nk, n), k \in \mathbb{N}$ шийдийг олно. Мөн $x^n + 1 \mid x^m + 1$ -ийг бодож $(0, +1, (2\ell + 1)n, n)$ шийдийг олно. Иймд хэрэв $n = 2$ бол (5)-аас $a = (-b)(-a) \rightarrow b = 1$ гэж гарна. $x^2 + ax + 1 = 0$ ба $|x| = 1$ гэдгийг анхаарвал $|a| = |ax| = |1 + x^2| \leq 1 + |x|^2 = 2$ -оос $a \in \{\pm 1, \pm 2\}$ болно. $a = \pm 2$ нь (4)-т зөрчинө. $a = 1$ бол (4) нь $x^2 + x + 1 \mid x^{m-2} - 1 \rightarrow m - 2 = 3k$ буюу $(1, 1, 3k + 2, 2)$; $a = -1$ бол (4) нь $x^2 - x + 1 \mid x^{m-2} - 1 \rightarrow m - 2 = 6k$ буюу $(-1, 1, 6k + 2, 2)$.

ДБ-В1. $f = x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2 = x^2 + 2xy + 2xy + 4y^2 + z^2 + z^2 \geq 6 \cdot \sqrt[6]{(xyz)^4 \cdot 2^4} = 96$ буюу $f(x, y)$ нь хамгийн бага утгаа $x^2 = 2xy = 4y^2 = z^2, x, y, z > 0$ цэг дээр авна. $x = 2y = z, 6x^2 = 96, x = 4 = z, (4, 2, 4)$ цэг дээр уг утгаа авна.

ДБ-В2. $p \in M$ байг. $p \neq 2$ бол $2 \mid p - 1 \rightarrow 2 \in M$. Хэрэв $p \equiv 1(3)$ бол $3 \mid p - 1 \Rightarrow 3 \in M$, хэрэв $p \equiv -1(3)$ бол $2p - 1 \equiv -2 - 1 \equiv -3 \equiv 0(3) \rightarrow 3 \mid 2p - 1$ буюу $3 \in M$. Иймд $2, 3 \in M$ боллоо. $2 \cdot 3 - 1 = 5 \in M, 3, 5 \in M \rightarrow 7 \mid 3 \cdot 5 - 1 \rightarrow 7 \in M$. Одоо M олонлог төгсгөлгүй олон элементтэй гэж баталъя. $M = \{2, 3, 5, 7, p_1, \dots, p_s\}$ байг. Тэгвэл $2 \cdot 3 \cdot 5p_1 \dots p_s - 1 = 7^a - 1 \equiv 1(6)$ зөрчил. $\forall p \in P$ -г авч үзье. p -д хуваахад адил үлдэгдэл өгдөг тоо M -ээс дор хаяж $p - 1$ олдох ёстой. Эдний олонлогийг A гэвэл, $\forall p_k \in A, k = \overline{1, p-1}$ хувьд $p_k \equiv a(p), 0 < a \leq p - 1$. Иймд $-1 + \prod_{p_k \in A} p_k \equiv a^{p-1} - 1 \equiv 0(p) \rightarrow p \in M$ болно, ө.х. $P = M$.

ДБ-В3. Бүх $a_k \geq 0$ гэж үзэж чадна. $\div(a_i, b_i), i = \overline{1, m}$ нь $\mathbb{N}$ -ийн нарийн бүрхэлт $\Leftrightarrow$

$$\frac{z}{1-z} = \frac{z^{a_1}}{1-z^{b_1}} + \dots + \frac{z^{a_m}}{1-z^{b_m}} \quad (1)$$

(1)-ийн 2 талаас $\frac{z^{a_m}}{1-z^{b_m}}$ -г хасч $z = e^{\frac{2\pi i}{b_m}}$ гэж тавибал (1)-ийн зүүн тал нь ∞ болж баруун тал нь хэрэв $b_{m-1} \neq b_m$ бол төгслөг тоо гарч зөрчилд хүрнэ.

ДБ-А1 (А.Хашбаатар). Тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн AB , CD талууд дээр $AN \cdot BN = AM \cdot BM = CM \cdot DM - CN \cdot DN = MN^2$ байхаар M, N цэгүүдийг байгуул.

ДБ-А2 (Г.Баярмагнай). $m \in \mathbb{N}$, $(m, b) = 1$ байг. $S_m = \{a \in \mathbb{N} \mid a < m, (a, m) = 1\}$ ба $\sum_{n \in S_m} \frac{1}{n} = \frac{A}{B}$, $A, B \in \mathbb{N}$ бол $m^2 \mid A$ гэж батал.

ДБ-А3 (Ц.Дашдорж). Ямар нэг үгийн b зэргийг үл агуулах 0 , 1 үгүүд $a_1 \dots a_n$ -ийн олонлогийг B_n гэе. $|B_n| = S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ гэж батал.

ДБ-В1 (Б.Батцэнгэл). $1, 2, \dots, n$ тоонуудын $\forall k$ ($1 \leq k \leq n$) хувьд $|a_k - k| = 0$, эсвэл 1 , эсвэл 2 байх $a_1, a_2, \dots, a_n$ сэлгэмлийн тоог A_n гэж тэмдэглэе. $n \geq 6$ үед $A_n = 2a_{n-1} + 2A_{n-3} - A_{n-5}$ тэнцэл биелнэ гэж батал.

ДБ-В2 (В.Адьяасүрэн). $\triangle ABC$ -ын AC талын үргэлжлэл $[AC]$ цацраг дээр D цэг авав. $[DA]$, $[DB]$ цацрагуудын үргэлжлэл ба $\triangle ABC$ -г багтаасан тойргийг гадаад байдлаар шүргэсэн тойрог AC шулууныг E цэгт шүргэнэ. E цэгийг дайрсан BD шулуунтай параллель шулуун $\triangle ABC$ -ийн C өнцөгт харгалзах гадаад багтсан тойргийг шүргэнэ гэж батал.

ДБ-В3 (Ц.Дашдорж). Төгсгөлөг олонлог A нь $A \subseteq \mathbb{C}$ ба $z \in A$ бол $\forall n \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд

$$z^n \in A \quad (*)$$

байг. Тэгвэл

а) $S(A) = \sum_{z \in A} z \in \mathbb{Z}$ гэж батал.

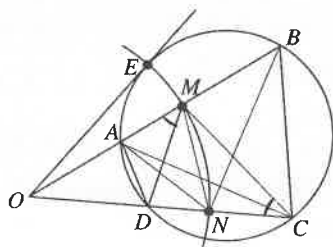
б) $k \in \mathbb{Z}$ бүрийн хувьд $S(A) = k$ байх $(*)$ чанар бүхий A -г сонгож болохыг батал.

ДБ-А1. O цэгээс татсан шүргэгч $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн

багтаасан тойргийг E цэгт шүргэсэн бол

$$OE^2 = OA \cdot OB = OD \cdot OC \quad (1)$$

O төвтэй OE радиустай тойрог AB , CD талыг харгалзан M, N цэгт огтолсон бол (1) ёсоор



$$OM^2 = ON^2 = OA \cdot OB = OD \cdot OC \quad (2)$$

Эндээс DMC гурвалжныг багтаасан тойрог AB талыг M цэгт, мөн ANC гурвалжныг багтаасан тойрог CD талыг N цэгт шүргэх нь илэрхий. (2) тэнцэл үүний зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл. Иймээс $\triangle OMD \sim \triangle OCA \Rightarrow \frac{DM}{CM} = \frac{OM}{OC} = \frac{\sqrt{OD \cdot OC}}{OC} = \sqrt{\frac{OD}{OC}}$. Нөгөө талаас $\frac{DN}{CN} = \sqrt{\frac{(ON - OD)^2}{(OC - ON)^2}} = \frac{OD}{ON} \cdot \frac{\sqrt{(\frac{ON}{OD} - 1)^2}}{\sqrt{(\frac{OC}{ON} - 1)^2}} = \frac{OD}{ON} = \frac{OD}{\sqrt{OD \cdot OC}} = \sqrt{\frac{OD}{OC}}$. Ийнхүү $\frac{DM}{CM} = \frac{DN}{CN}$ байгаа нь MN хэрчим DMC гурвалжны биссектрис болдог зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл. Үүний адилаар MN хэрчим ANB гурвалжны биссектрис болохыг батлана.

Байгуулалт бүхэн зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл байсныг санавал M, N цэгүүд ганц утгатай олдох нь илэрхий.

ДБ-А2 (I бодолт). $(a, m) = 1 \Leftrightarrow (a, m - a) = 1$

$$\frac{2A}{B} = 2 \sum_{a \in S_m} \frac{1}{a} = \sum_{a \in S_m} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{m-a} \right) = m \cdot \sum_a \frac{1}{a(m-a)} \quad (*)$$

$$\sum_a \frac{1}{a(m-a)} \equiv (-1) \sum_a \frac{1}{a^2} \pmod{m}.$$

$a, b \in S_m$ байг. $a \not\equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow \frac{1}{a} \not\equiv \frac{1}{b} \pmod{m}$.
 $\sum_a \frac{1}{a^2} \equiv \sum_a a^2 \pmod{m}$. $\sum_a a^2 \equiv 0 \pmod{m}$ гэж батлагдвал $(*)$ -оос $m^2 | A$ болох нь гарна. $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ байг. $\sum_{a \in S_m} a^2 \equiv (1^2 + 2^2 + \dots + m^2) - \sum_{i=1}^n p_i^2 \left(1^2 + 2^2 + \dots + \left(\frac{m}{p_i} \right)^2 \right) + \dots + (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} p_{i_1}^2 \dots p_{i_k}^2 \left(1^2 + \dots \right)$

$$2^2 + \dots + \left(\frac{m}{p_{i_1} \dots p_{i_k}}\right)^2 + \dots + (-1)^n p_1^2 \dots p_n^2 \left(1^2 + 2^2 + \dots + \left(\frac{m}{p_1 \dots p_n}\right)^2\right) =$$

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + \dots + (-1)^k \sum p_{i_1}^2 \dots p_{i_k}^2 \cdot \frac{\frac{m}{p_{i_1} \dots p_{i_k}} \left(\frac{m}{p_{i_1} \dots p_{i_k}} + 1\right) \left(2 \cdot \frac{m}{p_{i_1} \dots p_{i_k}} + 1\right)}{6} +$$

$$\dots + (-1)^n p_1^2 \dots p_n^2 \cdot \frac{\frac{m}{p_1 \dots p_n} \left(\frac{m}{p_1 \dots p_n} + 1\right) \left(\frac{2m}{p_1 \dots p_n} + 1\right)}{6} \equiv 0(m)$$

ДБ-А2 (II бодолт). Х ангийн IV даваа, X-A1-ийн бодолтыг хар.

ДБ-А3. $S_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$ гэж батлахын тулд $S_n \geq \frac{3}{2}S_{n-1}$ гэж баталъя. $S_1 = 2 > \frac{3}{2}$ гээд $S_{n+1} \geq \frac{3}{2}S_n$ гэж баталъя.

$$n \geq i \text{ байх } i \text{ бүрийн хувьд } S_i \geq \frac{3}{2}S_{i-1} \quad (1)$$

(1)-ээс

$$S_i \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-i} S_n \quad (2)$$

$$V_k = \{v_k = x_1 \dots x_k \mid x_i = 0 \vee 1\}, \quad |V_k| = 2^k \quad (3)$$

$$|B_n V_1| = 2S_n, \quad B_n V_1 \supseteq B_{n+1} \text{ тул}$$

$$|B_n V_1 \setminus B_{n+1}| = |B_n V_1| - |B_{n+1}| = 2S_n - S_{n+1} \quad (4)$$

Нөгөө талаас

$$\begin{aligned} x \in B_n V_1 \setminus B_{n+1} \quad (A\text{-өгүүлбэр}) \\ \downarrow \\ \exists v_k \in V_k, \quad x \in B_{n+1-6k} v_k^6 \quad (B\text{-өгүүлбэр}) \end{aligned} \quad (5)$$

буюу $A \rightarrow B$ үнэн, харин $B \rightarrow A$ байх нь албагүй. Иймд (5)-аас

$$B_n V_1 \setminus B_{n+1} \subseteq \bigcup_{k=1}^{6k \leq n+1} B_{n+1-6k} V_k^6 \quad (6)$$

энд $V_k^6 = \{v_k^6 \mid v_k \in V_k\}$,

$$\begin{aligned}
 2S_n - S_{n+1} &\stackrel{(4)}{=} |B_n V_1 \setminus B_{n+1}| \stackrel{(6)}{\leq} \left| \bigcup_{k=1}^{6k \leq n+1} B_{n+1-6k} V_k^6 \right| \leq \\
 &\leq \sum_{k=1}^{6k \leq n+1} |B_{n+1-6k} V_k^6| = \sum_{k=1}^{6k \leq n+1} S_{n+1-6k} \cdot 2^k \stackrel{(2)}{\leq} \\
 &\leq \sum_{k=1}^{6k \leq n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-(n+1-6k)} S_n 2^k \leq S_n \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{6k-1} 2^k = \\
 &= S_n \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6\right)^k = S_n \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \frac{1}{1-2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6} = \\
 &= 3 \cdot \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^6 - 2} \cdot S_n < \frac{3}{2} S_n
 \end{aligned}$$

буюу $S_{n+1} > \frac{3}{2} S_n$

ДБ-В1. 10-р ангийн 4 давааны В1 бодолтыг үз.

ДБ-В2. $[DA]$, $[DB]$ цацрагууд ба ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг гадаад байдлаар шүргэсэн тойргийг ω_1 , энэхүү тойргийн $[DB]$ цацрагтай шүргэлцэх цэгийг Q , ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг ω гэе. Бичлэгийг товчлохын тулд $BD = d$, $AD = b_1$, $AE = x$ гэе. A, ω_1, B, C тойргууд ω тойргийг гадаад байдлаар шүргэнэ. Кезийн теорем хэрэглэвэл: $AB \cdot CE = AE \cdot BC + AC \cdot BQ \Leftrightarrow c \cdot (b+x) = x \cdot a + b \cdot BQ$. Гэвч $BQ = DQ - DB = DE - DB = b_1 + x - d$. Иймд $c(b+x) = xa + b(b_1 + x - d)$ болох ба эндээс

$$x = \frac{b(d+c-b_1)}{a+b-c} \quad (1)$$

гэж гарна. E -г дайрсан BD -тэй параллель шулуун AB шулуунтай огтлолцох цэгийг F гэе. $\triangle AEF \sim \triangle ADB \Rightarrow \frac{EF}{d} = \frac{AF}{c} = \frac{x}{b_1}$. Эндээс $EF = \frac{xd}{b_1}$, $AF = \frac{xc}{b_1}$.

$$S_{AEF} = \left(\frac{x}{b_1}\right)^2 S_{ADB} = \left(\frac{x}{b_1}\right)^2 \cdot \frac{b_1}{b} S_{ABC} = \frac{x^2}{bb_1} S_{ABC} \quad (2)$$

AB , AE хэрчмүүд ба FE шулууныг шүргэсэн тойргийн радиусыг r_1 гэе. Тэгвэл (1) ба (2)-оос $r_1 = \frac{2S_{AEF}}{EF+FA-AE} = \frac{2 \cdot \frac{x^2}{bb_1} S_{ABC}}{\frac{xd}{b_1} + \frac{xc}{b_1} - x} =$

$\frac{2 \cdot \frac{x^2}{b_1} S_{ABC}}{\frac{x}{b_1}(d+c-b_1)} = \frac{2x S_{ABC}}{b(d+c-b_1)} = \frac{2S_{ABC}}{a+b-c} = r_c$ гэж гарч батлах зүйл батлагдав.

ДБ-В3. а) $0 \neq z \in A$ байг. $|A| < \infty$ гэдгээс $\exists m < n, z^m = z^n, z^{n-m} = 1 \in A$. Иймд $z^k = 1$ байх хамгийн бага утга нь d гэвэл $\sqrt[d]{1} = \{1, z, z^2, \dots, z^{d-1}\} = U_d \subseteq A$. Эндээс $A \setminus \{0\} = \bigcup_{k=1}^m U_{n_k}$.
 $S(U_1) = 1, p \geq 2$ бол $S(U_p) = 0$ ба $U_p \cap U_q = U_{(p,q)}$ тул

$$S(A) = \sum_{k=1}^m S(U_{n_k}) - \sum_{k < \ell} S(U_{n_k} \cap U_{n_\ell}) + \dots \in \mathbb{Z}$$

б) $A = \bigcup_{i=1}^m U_{n_i}$ ба $S(A) = k$ байг. $n_i, i = \overline{1, m}$ -үүдийн хуваагчдаас ялгаатай $p_1, \dots, p_6 \in P$ байг. Тэгвэл $S(A \cup U_{p_1}) = S(A) + S(U_{p_1}) - S(A \cap U_{p_1}) = k - S(U_1) = k - 1$. $S = \left(A \cup U_{p_1 p_2 p_3} \cup U_{p_1 p_4 p_5} \cup U_{p_2 p_4 p_6} \cup U_{p_3 p_5 p_6} \right) = S(A) + \sum S(U_{p_i p_j p_k}) \dots = k + 4 \cdot 0 - 4 \cdot S(U_1) - \sum_{i=1}^6 S(U_{p_i}) + 10 \cdot S(U_1) - 5S(U_1) + S(U_1) = k - 4 + 10 - 5 + 1 = k + 2$.
 $k - 1 + 2 - k + 1$ тул $S(B) = k + 1$ боллоо.

1. $x, y, z > 0$, $xyz = 1$ бол

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+x)(1+z)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}$$

батал.

2. $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $x, y, z \in \mathbb{Q}$ хувьд дараах нөхцлийг хангах бүх f -ийг ол. $f(x-y) + f(y-z) + f(z-x) + f(x+y+z) = 3(f(x) + f(y) + f(z))$

3. $p \geq 5$ анхны тоо $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot C_p^{\frac{p-1}{2}} \equiv 4^{p-1}(p^3)$ гэж батал.

1 (МУИС, А.Ганбат). $\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+x)(1+z)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}$
 $\Leftrightarrow 4(x^3(1+x) + y^3(1+y) + z^3(1+z)) \geq 3(1+x)(1+y)(1+z) \Leftrightarrow$
 $4(x^4 + y^4 + z^4 + x^3 + y^3 + z^3) \geq 3(1 + (x+y+z) + (xy+xz+yz) + xyz) +$
 $4(x^4 + y^4 + z^4 + x^3 + y^3 + z^3) = (x^4 + y^4 + z^4) + 2(x^3 + y^3 + z^3) + 3(x^4 +$
 $y^4 + z^4) + 2(x^3 + y^3 + z^3) \geq 3 \cdot 3 + 3(x^4 + y^4 + z^4) + 2(x^3 + y^3 + z^3) =$
 $(x^3 + y^3 + 1) + (x^3 + z^3 + 1) + (y^3 + z^3 + 1) + 6 + 3(x^4 + y^4 +$
 $z^4) \geq 3xy + 3xz + 3yz + 3 + 3xyz + 3(x^4 + y^4 + z^4)$ болно. Эндээс $x^4 + y^4 + z^4 \geq x + y + z$ гэж батлахад хангалттай. $x^4 + y^4 + z^4 \geq$
 $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 \geq xy \cdot xz + xy \cdot yz + xz \cdot yz = xyz(x+y+z) = x+y+z$
 болж батлагдав.

2. $x = y = z = 0 \Rightarrow 4f(0) = 9f(0) \Rightarrow f(0) = 0$.

$x = y = 0 \Rightarrow f(-z) + f(z) + f(z) = 3f(z) \Rightarrow f(z) = f(-z)$.

$z = 0 \Rightarrow f(x-y) + f(y) + f(x) + f(x+y) = 3(f(x) + f(y)) \Rightarrow$

$$f(x-y) + f(x+y) = 2(f(x) + f(y)) \quad (*)$$

$x = y \Rightarrow f(2x) = 4f(x)$.

$$n \in \mathbb{N}, \quad f(nx) = n^2 f(x) \quad (**)$$

гэж индукцээр баталъя. $n = 1, 2$ үед үнэн, n хүртэл үнэн гээд $n+1$ үед баталъя. $x \rightarrow nx$, $y = x$ гэж $(*)$ -д орлуулбал $f((n -$

$$1)x) + f((n+1)x) = 2(f(nx) + f(x)) \Rightarrow f((n_1)x) = 2(n^2 f(x) + f(x)) - (n-1)^2 f(x) = (n+1)^2 f(x).$$

$$f(1) = a \text{ гэвэл } x = 1 \text{ үед } \forall n \in \mathbb{N}: f(n) = n^2 a \text{ болно. } \Rightarrow f(n) = f(-n) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}: f(n) = an^2. \quad (**)\text{-д } x \rightarrow \frac{m}{n} \Rightarrow f(m) = n^2 f\left(\frac{m}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = a \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{Q}: f(x) = ax^2.$$

3. Бодолт байхгүй.

ОУМО-45, II СОРИЛ

Б.Батбаясгалан

1. Гүдгэр олон талстын орой бүрээс яг 3 ирмэг гарсан байв. Хэрэв нэг талсаас бусад бүх талс нь тойрогт багтдаг бол үлдэх нэг талс нь ч мөн тойрогт багтана гэж батал.
2. $0 \leq x, y, z, w \leq 36$ байх бүхэл тоонуудыг бол

$$x^2 + y^2 \equiv z^3 + w^3 \pmod{37}$$

байх бүх (x, y, z, w) дөрвөлийн тоог ол.

3. $A_1, A_2, \dots, A_m \subseteq S = \{1, 2, \dots, n\}$. Хэрэв дурын $i \neq j$ тоонуудын хувьд $|A_i \cap A_j| \leq k$ ба $|A_i| = r$ бол

$$\frac{r^2 m}{r + (m-1)k} \leq n$$

гэж батал.

1. Гүдгэр олон талстын тойрогт багтдаг талсуудыг цагаанаар, үлдэх талсыг хараар будъя. Одоо нэг ерөнхий оройтой гурван цагаан талсуудын оройнууд нэг бөмбөрцөгт багтахыг батлая. Орой бүрээс гурван ирмэг гарах тул A орой түүнтэй холбогдсон 3 орой нь тетраэдр үүсгэнэ. Мөн A орой дах бүх талсууд нь цагаан гээ. Тэгвэл тетраэдрийн A оройг агуулсан талсуудыг багтаасан тойрогууд нь нэг бөмбөрцөг дээр байна. Учир нь энэ талсын 3

оройг багтаасан тойрог нь бөмбөрцөг дээр байгаа бөгөөд үлдсэн оройнууд нь тэдгээртэй нэг тойрог дээр оршино. Аль ч хөрш 2 цагаан талсын хувьд тэдгээртэй хөрш цагаан талс олдох тул эдгээр нь нэг бөмбөрцөг дээр оршино. Эндээс бүх цэг нэг бөмбөрцөг дээр байхыг харахад төвөггүй. Хар талсыг агуулсан хавтгай нь энэ бөмбөрцөгтэй тойргоор огтлолцох тул энэ талс ч тойрогт багтана.

2. $0 \leq x, y \leq 36$ ба $x^2 + y^2 \equiv k \pmod{37}$ байх (x, y) хосын тоог олъё. Энэ нь $(x - 6y)(x + 6y) \equiv k \pmod{37}$ -тэй эквивалент болохыг харахад төвөггүй.

Эхлээд $k = 0$ байх тохиолдлыг авч үзье. 37 модуль тэгийн хуваагчгүй тул $(x - 6y)(x + 6y) \equiv 0 \pmod{37}$ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $x \equiv \pm 6y \pmod{37}$. Эндээс $y = 0$ байхад ганц хос $(0, 0)$ бусад y -ийн хувьд хоёр хос үүсэх тул $(x - 6y)(x + 6y) \equiv 0 \pmod{37}$ байх (x, y) хос $2 \cdot 36 + 1 = 73$ байна.

Одоо $k \neq 0$ байх тохиолдлыг авч үзье. Хэрэв $a \equiv x + 6y$, $b \equiv x - 6y$ гэвэл ямарч $a \in \{1, 2, \dots, 36\}$ тооны хувьд $b \in \{1, 2, \dots, 36\}$ байх яг нэг b тоо олдоно. Нөгөө талаас $x = (a + b)2^{-1}$, $y = (a - b)12^{-1}$ байх утгуудад $(x - 6y)(x + 6y) \equiv k \pmod{37}$ болох тул $k \neq 0$ үед яг 36 шийдтэй.

$x^2 + y^2 \equiv z^3 + w^3 \equiv 0 \pmod{37}$ байх (x, y, z, w) дөрвөлийн тоог олъё. 37 модуль анхны язгууртай тул түүнийг нь g гээ. Тэгвэл 1, g^{12} , g^{24} гэсэн гурван ширхэг нэгжийн 3 зэргийн язгууртай. Өгөгдсөн z -ийн хувьд w нь зөвхөн $-z$, $-zg^{12}$, $-zg^{24}$ -үүдийн нэг байх үед л $z^3 + w^3 \equiv 0 \pmod{37}$ байх тул $z^3 + w^3 \equiv 0 \pmod{37}$ байх хосын тоо 109 болно. $z = 0$ байхад нэг бусад үед гурван w олдоно. Иймд $x^2 + y^2 \equiv z^3 + w^3 \equiv 0 \pmod{37}$ байх хосын тоо нь $109 \cdot 73$.

Үлдэх $37^2 - 109$ ширхэг $z^3 + y^3 \not\equiv 0 \pmod{37}$ байх (z, w) хосын хувьд тус бүрд нь 36 ширхэг $x^2 + y^2 \equiv z^3 + w^3 \pmod{37}$ байх (x, y) олдох тул $z^3 + y^3 \not\equiv 0 \pmod{37}$ байх хосын тоо нь $(37^2 - 109) \cdot 36$ болно. Иймд

$$109 \cdot 73 + (37^2 - 109) \cdot 36$$

ширхэг $x^2 + y^2 \equiv z^3 + w^3 \pmod{37}$ байх (x, y, z, w) дөрвөл олдоно.

3. $d(x)$ -ээр x элемент өгөгдсөн олонлогуудын яг хэдийнх нь элемент болохыг тэмдэглэе. Тэгвэл ямар ч A_k олонлогийн хувьд

$$\sum_{x \in A_k} d(x) = \sum_{i=1}^m |A_k \cap A_i| = r + \sum_{i=1, i \neq k}^m |A_k \cap A_i| \leq r + (m-1)k$$

болно. Үүнийг бүх олонлогуудын хувьд нэмбэл

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \sum_{x \in A_k} d(x) &= \sum_{x=1}^n d(x)^2 = n \frac{\sum_{x=1}^n d(x)^2}{n} \geq \\ &\geq n \left(\frac{\sum_{x=1}^n d(x)}{n} \right)^2 = \frac{\left(\sum_{k=1}^m |A_k| \right)^2}{n} = \frac{m^2 r^2}{n} \end{aligned}$$

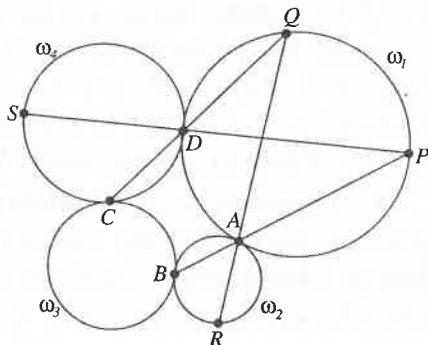
болно. Иймд $\frac{m^2 r^2}{n} \leq m(r + (m-1)k)$ буюу $n \geq \frac{mr^2}{r + (m-1)k}$ болно.

ОУМО-45, III сорил

Б.Батцэнгэл

1. 10×10 хэмжээтэй квадратын нүднүүдийг, ямар ч 2×2 хэмжээтэй квадрат дотор сондгой тооны хар нүд байхаар хар ба цагаан өнгөөр будав. Уг квадратын 3 мөр хоорондоо ижил будагдсан байна гэдгийг харуул.
2. Натурал k тоог хуваадаг бүх анхны тоонуудын үржвэрийг $\text{rad}(k)$ гэж тэмдэглэе. a, b гэсэн нэгээс их бүхэл тоонууд өгөгдөв. Ямар ч натурал n тооны хувьд $\text{rad}(a^n - 1) = \text{rad}(b^n - 1)$ байдаг бол $a = b$ гэдгийг батал.
3. Аль ч хэдийнх нь арифметик дундаж бүтэн квадрат болдог 2004 ширхэг ялгаатай натурал тоонууд олдох уу? (Тоонууд өөрсдөө бүтэн квадрат байх албагүй).

4. ω_1, ω_2 тойргууд A цэгт, ω_2, ω_3 тойргууд B цэгт, ω_3, ω_4 тойргууд C цэгт, ω_4, ω_1 тойргууд D цэгт гадаад байдлаар шүргэлцэж байв. AB шулуун P цэгээр, CD шулуун Q цэгээр ω_1 тойргийг дахин огтолно. AQ шулуун R цэгээр ω_2 тойргийг, DP шулуун S цэгээр ω_4 тойргийг дахин огтолдог бол B, C, R, S цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэдгийг батал.



ОУМО-45, IV СОРИЛ

Ц.Дашдорж

1. $p_1, p_2, \dots$ нь дараах чанар бүхий анхны тоонуудын дараалал байг. $n \geq 3$ бол p_n нь $p_{n-1} + p_{n-2} + 2000$ тооны хамгийн их анхны тоон хуваагч. Тэгвэл $p_1, p_2, \dots$ дараалал зааглагдана гэж батал.
2. $A \subseteq \mathbb{Z}_{n^2}$, $|A| = n$ байг. $\exists B \subseteq \mathbb{Z}_{n^2}$, $|B| = n$ ба $|A + B| = \left| \{a + b \mid a \in A, b \in B\} \right| \geq \frac{n^2}{2}$ гэж батал.
3. $S = \left\{ p \in \mathbb{P} \mid \frac{1}{p} = 0, (a_1 \dots a_d), 3 \mid d = 3r \right\}$, энд d нь ийм хамгийн бага тоо үед суурь үе гэх ба $r = r(p)$ гээ. $\forall p \in S$ ба $\forall k \geq 1$ -ийн хувьд $f(k, p) = a_k + a_{k+r} + a_{k+2r}$ гээ.
 а) S төгсгөлгүй олон элементтэй гэж батал.
 б) $f(k, p)$ -ийн хамгийн их утгыг ол.

1 (С.Сайнбаярын бодолт). Эхлээд $\forall n \geq 2$ -ийн хувьд $p_n \leq p_{n-1} + 2002$ эсвэл $p_n \leq p_{n-2} + 2002$ байхыг баталъя.
 $p_{n-1} = p_{n-2} = 2$ үед $p_n \leq 2004$.

$p_{n-1} = 2$, p_{n-2} сондгой бол $p_n \leq p_{n-1} + p_{n-2} + 2000 = p_{n-2} + 2002$.
 p_{n-1} , p_{n-2} хоёулаа сондгой бол $p_{n-1} + p_{n-2} + 2000$ тэгш тул $p_n \leq \frac{p_{n-1} + p_{n-2}}{2} + 1000$, энд $p_{n-1} \geq p_{n-2}$ гэвэл $p_n \leq p_{n-1} + 1000$.

p_1, p_2 -оос эрс их дараалсан 2002 ширхэг зохиомол тоо олдоно ($n \geq 2003$ үед $n! + 2$, $n! + 3$, ..., $n! + 2003$). Эдгээр тоонуудыг $a_1 < a_2 < \dots < a_{2002}$ гэвэл $p_1, p_2 < a_1$ тул $p_3 \leq a_{2002}$. Эндээс $p_3 < a_1$. Иймд $p_4 \leq a_{2002}$ эндээс мөн $p_4 < a_1$ г.м. бүх $p_n < a_1$.

2. (Бодолт 1. С.Сайнбаярын бодолт). $\mathbb{Z}_{n^2}$ -ийн k элементтэй дэд олонлогийг цаашид B_k -ээр тэмдэглэе. $|A + B_1| = n$ байх нь ойлгомжтой. Хэрэв $\exists k < n$, $\exists B_k \subseteq \mathbb{Z}_{n^2}$, $|A + B_k| \geq \frac{n^2}{2}$ бол $\forall B \supseteq B_k$ -ийн хувьд $|A + B| \geq \frac{n^2}{2}$ болж бодлого бодогдоно. Иймд

$$\forall k < n \text{ ба } \forall B_k \subseteq \mathbb{Z}_{n^2}\text{-ийн хувьд } |A + B_k| < \frac{n^2}{2} \text{ байна} \quad (*)$$

гэж үзье. Одоо $(*)$ нөхцөлд

$$\exists B_{k+1} \subseteq \mathbb{Z}_{n^2}, \quad |A + B_k| + \frac{n}{2} \leq |A + B_{k+1}| \quad (1)$$

байхыг харуулъя. $B_k \cup m = B_k^m$ гэж тэмдэглэе.

(1)-ийг батлахын тулд

$$\exists m \in \mathbb{Z}_{n^2}, \quad |A + B_k| + \frac{n}{2} \leq |A + B_k^m| \quad (1')$$

гэж баталбал болно. Эсрэгээс нь $\forall m \in \mathbb{Z}_{n^2}$ -ийн хувьд

$$\begin{aligned} |A + B_k^m| &= |(A + B_k) \cup (A + \{m\})| = \\ &= |A + B_k| + |A + \{m\}| - |(A + B_k) \cap (A + \{m\})| < \frac{n}{2} + |A + B_k| \\ &\text{буюу } \frac{n}{2} < |A + B_k \cap (A + \{m\})| \end{aligned} \quad (2)$$

байна гэе. Одоо $x = \sum_{m=1}^{n^2} |(A + B_k) \cap (A + \{m\})|$ -ийг үнэлэе. $x \in A + B_k$ -г авахад $x \in (A + \{m\})$ байх m яг n ширхэг олдоно гэдгээс

$$X = |(A + B_k)|n \stackrel{(*)}{\leq} \frac{n^3}{2} \quad (3)$$

Нөгөө талаас $\frac{n^3}{2} = \sum_{m=1}^{n^2} \frac{n}{2} \stackrel{(2)}{<} \sum_{m=1}^{n^2} |(A + B_k) \cap (A + \{m\})| = X \stackrel{(3)}{<} \frac{n^3}{2}$ болж зөрчилд хүрэв. Өөрөөр хэлбэл (1) биелэв. Энэ нь (*) нөхцөлд B_1 -г авахад (1) биелэхээр $B_2, B_3, \dots, B_n$ олдлоод $|A + B_n| \geq \frac{n}{2} + |A + B_{n-1}| \geq \dots \geq \frac{n}{2}(n-1) + |A + B_1| = \frac{n^2+n}{2} > \frac{n^2}{2}$ болж бодлого бодогдов.

2. (Бодолт 2). Өгөгдсөн X олонлогийн n элементтэй бүх дэд олонлогуудын олонлогийг $\mathcal{B}_n(X)$ -ээр тэмдэглэж байя. Ө.х. $\mathcal{B}_n(X) = \{I \subseteq X \mid |I| = n\}$. Тэгвэл $|\mathcal{B}_n(X)| = C_{|X|}^n$ байх нь ойлгомжтой. $\exists B \in \mathcal{B}_n(\mathbb{Z}_{n^2})$, $|A + B| \geq \left(1 - \frac{1}{c}\right)n^2$ гэж баталъя.

$i \in \mathbb{Z}_{n^2}$ үед $C_i = \{a + i \mid a \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{Z}_{n^2})$ ба $\mathbb{Z}_{n^2} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_{n^2}} C_i$ байх нь илэрхий.

$x \in \mathbb{Z}_{n^2}$ бүр нь яг $d(x) = n$ ширхэг олонлог C_i -д орно. $M = \{(x, I) \mid x \in \mathbb{Z}_{n^2}, I \in \mathcal{B}_n(\mathbb{Z}_{n^2}), x \in \bigcap_{i \in I} \overline{C_i}\} = \{(X, I) \mid x \rho I\}$ олонлогийг авч үзье, энд $x \in \mathbb{Z}_{n^2}$, $I \in \mathcal{B}_n(\mathbb{Z}_{n^2})$, $x \in \bigcap_{i \in I} \overline{C_i}$ өгүүлбэрийг товчоор $x \rho I$ гэж тэмдэглээд x ба I нь ρ харьцаанд оршиж байна гэж уншиж байя. $x \in \mathbb{Z}_{n^2}$ бүрийн хувьд $X_x = \{(x, I) \mid x \rho I\} \subseteq M$ -г авч үзвэл $x \neq y$ үед $X_x \cap X_y = \emptyset$ байх тул

$$|M| = \left| \bigcup_{x \in \mathbb{Z}_{n^2}} X_x \right| = \sum_x |X_x| = \sum_x C_{n^2-d(x)}^n = \sum_x C_{n^2-n}^n = n^2 C_{n^2-n}^n \quad (1)$$

Нөгөө талаас $I \in \mathcal{B}_n(\mathbb{Z}_{n^2})$ бүрийн хувьд $Y_I = \{(x, I) \mid x \rho I\} \subseteq M$ -г авч үзвэл $(x, I) \in Y_I \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} \overline{C_i}$ ба $I \neq J$ үед $Y_I \cap Y_J = \emptyset$ байх тул

$$|M| = \left| \bigcup_I Y_I \right| = \sum_I |Y_I| = \sum_I \left| \bigcap_{i \in I} \overline{C_i} \right| \quad (2)$$

$|\mathcal{B}_n(\mathbb{Z}_{n^2})| = C_{n^2}^n$ тул

$$\begin{aligned} \sum_{I \in \mathcal{B}_n(\mathbb{Z}_{n^2})} \left| \bigcup_{i \in I} C_i \right| &= \sum_I (|\mathbb{Z}_{n^2}| - |\bigcup \overline{C_i}|) = \sum_I (|\mathbb{Z}_{n^2}| - |\bigcap \overline{C_i}|) = \\ &= \sum_I |\mathbb{Z}_{n^2}| - \sum_I \left| \bigcap_{i \in I} \overline{C_i} \right| \stackrel{(1),(2)}{=} C_{n^2}^n n^2 - n^2 C_{n^2-n}^n = (C_{n^2}^n - C_{n^2-n}^n) n^2 \end{aligned}$$

болно. Иймд $\exists I \in \mathcal{B}_n(\mathbb{Z}_{n^2})$,

$$\left| \bigcup_{i \in I} C_i \right| \geq \frac{(C_{n^2}^n - C_{n^2-n}^n)n^2}{|\mathcal{B}_n(\mathbb{Z}_{n^2})|} = \left(1 - \frac{C_{n^2-n}^n}{C_{n^2}^n}\right)n^2 > \left(1 - \frac{1}{e}\right)n^2$$

энд сүүлчийн тэнцэл биш нь $a, b > 0$ үед

$$\frac{a}{b} < \frac{a-1}{b-1} \quad (3)$$

учир $\frac{C_{n^2}^n}{C_{n^2-n}^n} = \frac{n^2(n^2-1)\dots(n^2-n+1)}{(n^2-n)(n^2-n-1)\dots(n^2-2n+1)} \stackrel{(3)}{\geq} \left(\frac{n^2}{n^2-n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > e > 2$. Иймд $B = I = \{i_1, \dots, i_n\}$ олонлог $|A+B| = |C_{i_1} \cup \dots \cup C_{i_n}| > \left(1 - \frac{1}{e}\right)n^2 > \frac{1}{2}n^2$ -ийг хангана.

3. а) d нь $\frac{1}{p}$ -ийн суурь үе бол

$$\frac{1}{p} = \frac{a_1 \dots a_d}{9 \dots 9} = \frac{a_1 \dots a_d}{10^d - 1} \Leftrightarrow 10^d \equiv 1(p) \quad (*)$$

$2 \notin S$ байх нь илэрхий. $s \in P$ ба $N_s = 10^{2s} + 10^s + 1$ гэвэл $N_s \equiv 3(9)$.

$$P \ni p_s \mid \frac{N_s}{3} \quad (1)$$

байг. $p_s \neq 3$ ба $N_s \mid 10^{3s} - 1$ тул $\frac{1}{p_s}$ -ийн 10-тын бичлэгийн үе нь $3s$ байх тул $\frac{1}{p_s}$ -ийн суурь үе $r(p_s)$ нь $3s$ -ийн хуваагч байна. Гэвч $r(p_s) \neq s$: $r(p_s) = s$ бол $10^s \equiv 1(p_s) \rightarrow N_s \equiv 3 \not\equiv 0(p_s)$ нь (1)-д зөрчинө. $r(p_s) = 3 \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} p_s \mid 10^3 - 1 = 3^3 \cdot 37 \Leftrightarrow p_s = 37$ буюу $r(p_s) = 3 \Leftrightarrow p_s = 37$: $r(p_s) = 3$ бол $p_s = 37$ байх нь илэрхий. $p_3 = 37$ бол $\frac{1}{p_s} = \frac{1}{37} = 0, (027)$ буюу $r(p_s) = 3$ боллоо.

Одоо $p_s \neq 37$ байхаар p_s -ийг сонгож болохыг харуулъя: Эсрэг тохиолд $N_s = 3 \cdot 37^k \equiv 3(4)$ ба $N_s = 10^{2s} + 10^s + 1 \equiv 1(4)$, $3 \equiv 1(4)$ зөрчил. Иймд $\forall s \in P$ -ийн хувьд $\exists p_s \in P$, $r(p_s) = 3s$ ($r(p_s) \mid 3s$) ба $r(p_s) \neq 3$, $r(p_s) \neq s$.

б) $p \in S$ -ийн суурь үе нь $3r(p)$ байг. Тэгвэл $p \mid 10^{3r(p)} - 1$ ба $p \nmid 10^{r(p)} - 1$ тул

$$p \mid N_p = 10^{2r(p)} + 10^{r(p)} + 1 \quad (2)$$

$$\frac{1}{p} = 0, a_1 a_2 a_3 \dots, \quad x_j = \frac{10^{j-1}}{p} \quad (3)$$

$$y_j = \{x_j\} = 0, a_j a_{j+1} a_{j+2} \dots \quad (4)$$

$a_j < 10y_j$ байх тул

$$f(k, p) = a_k + a_{k+r(p)} + a_{k+2r(p)} < 10(y_k + y_{k+r(p)} + y_{k+2r(p)})$$

(2)-оор $x_k + x_{k+r(p)} + x_{k+2r(p)} = \frac{10^{k-1} N_p}{p}$ бүхэл тоо тул $Y = y_k + y_{k+r(p)} + y_{k+2r(p)}$ мөн бүхэл тоо ба $Y < 3$ тул $Y \leq 2$. Иймд (5) ёсоор $f(k, p) < 20$ ө.х. $\max f(k, p) \leq 19$. Гэтэл $f(2, 7) = 4 + 8 + 7$ тул $\max f(k, p) = 19$.

ОЛОН УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН XLV ОЛИМПИАДАД ОРОЛЦСОН ТУХАЙ

Ц.Дашдорж

ОУМО-45 2004.07.04–18-нд Грекийн Афин хотод болж өнгөрлөө. Дэлхийн 85 орон оролцсон энэ Олимпиадад Хятад 220, АНУ 212, Орос 205, Вьетнам 196, Болгар 194, Тайван 190, Унгар 187, Япон 182, Иран 178, Румын 176, Украин 174, Өмнөт Солонгос 166, Беларус 154, Энэтхэг 149, Израил 147, Польш 142, Молдав 140, Сингапур 139, Монгол 135, Англи 134 оноогоор эхний 20 байр эзэлсэн бол Канад 132, Казахстан 130, Герман 130 оноогоор удаах байруудад орлоо.

Манай улсаас

1. Ц.Гэрэлт	(I сургууль, 10-р анги)	31 оноо	мөнгө
2. С.Сайнбаяр	(I сургууль, 10-р анги)	25 оноо	мөнгө
3. А.Ганбат	(I сургууль, 10-р анги)	24 оноо	мөнгө
4. Э.Цэнгүүн	(I сургууль, 10-р анги)	18 оноо	хүрэл
5. Ч.Сугардорж	(Дархан-Уул, 10-р анги)	22 оноо	хүрэл
6. Б.Мэнхбаяр	(I сургууль, 10-р анги)	15 оноо	

тус тус авч Багийн дүнгээр 135 оноо авч 85 орноос 19-р байранд оров. Багийн орлогч удирдагчаар Монгол улсын аврага багш Д.Нарангэрэл (УБ, I сургууль) явлаа.

ОУМО-46 Мексикийн Меридад 2005.07.08–19-нд болно.

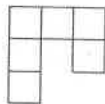
ОУ-1 (Румын). Хурц өнцөгт гурвалжин ABC -д $AB \neq AC$ байг. BC диаметртэй тойрог AB ба AC талуудыг харгалзан M ба N цэгт огтлоно. BC талын дундаж цэгийг O гээ. BAC ба MON өнцгүүдийн биссектрисүүд нь R цэгт огтлолцоно. BMR ба CNR гурвалжнуудыг багтаасан тойргуудын огтлолцлын цэг нь BC тал дээр оршихыг батал.

ОУ-2 (Солонгос). $ab + bc + ca = 0$ байх ямар ч бодит тоонууд a, b, c -ийн хувьд

$$P(a - b) + P(b - c) + P(c - a) = 2P(a + b + c)$$

байх бодит коэффициенттой бүх $P(x)$ олон гишүүнтүүдийг ол.

ОУ-3 (Эстони). Зурагт үзүүлсэн зургаан нэгж квадратаас тогтох дүрс ба мөн түүнээс эргүүлэлт ба толин тусгалаар гарах дүрсүүдийг дэгээ гээ.



Ямар $m \times n$ тэгш өнцөгтүүдийг дэгээнүүдээр

– давхардал ба хоосон зайгүйгээр

– дэгээний нүднүүд тэгш өнцөгтийн гадна гараагүй байхаар бүрхэж болох вэ?

ОУ-4 (Солонгос). $n \geq 3$ натурал тоо байг. $t_1, \dots, t_n$ эерэг бодит тоонуудын хувьд

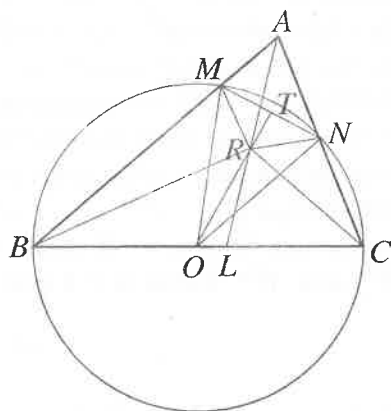
$$n^2 + 1 > (t_1 + \dots + t_n) \left(\frac{1}{t_1} + \dots + \frac{1}{t_n} \right)$$

бол $1 \leq i < j < k \leq n$ байх бүх i, j, k -ийн хувьд t_i, t_j, t_k тоонууд гурвалжны талууд болж чадахыг үзүүл.

ОУ-5 (Польш). Гүдгэр дөрвөн өнцөгт $ABCD$ -д BD диагональ нь ABC өнцгийн ч, CDA өнцгийн ч биссектрис болж чадахгүй. $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн дотор орших P цэг нь $\angle PBC = \angle DBA$, $\angle PDC = \angle BDA$ нөхцлүүдийг хангаж байв. $ABCD$ нь багтсан дөрвөн өнцөгт байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $AP = CP$ гэж батал.

ОУ-6 (Иран). Тооны 10-ын бичлэг дэх аливаа 2 зэрэгцээ цифрийн тэгш сондгой нь өөр бол уг тоог судалтай тоо гээ. n тооны хувьд түүнд хуваагддаг судалтай тоо оршин байх бүх n тоог ол.

ОУ-1 (Бодолт 1).
 AR, BC шулууны огтлолцлыг L ; OR, MN шулууны огтлолыг T гээ. $BMNC$ нь тойрогт багтсан 4 өнцөгт тул $\angle BMN = 180^\circ - \angle C$, $\angle CNM = 180^\circ - \angle B$ болно. Эндээс $\angle AMN = 180^\circ - \angle BMN = \angle C$, $\angle ANM = 180^\circ - \angle CNM = \angle B$ гэж гарах ба $AB \neq AC$ тул $\angle B \neq \angle C$ байна. Иймд $\angle AMN \neq \angle ANB \Rightarrow AM \neq AN$.



$$\left. \begin{array}{l} OM = ON \text{ радиус} \\ \angle MOR = \angle NOR \\ OR \text{ ерөнхий} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OMR = \triangle ONR \text{ буюу } MR = RN$$

болно. M цэгийн AR хэрчмийн хувьд тэгш хэмтэй цэгийг M' гэвэл AR нь $\angle BAC$ өнцгийн биссектрис учраас $M' \in AC$ ба $RM = RM'$, $\angle BMR = \angle RM'N$ байна. $RM' = RM = RN \Rightarrow \angle RM'N = \angle ANR = \angle BMR$. Ийнхүү $\angle AMR = 180^\circ - \angle BMR = 180^\circ - \angle ANR$ болж $ANRM$ нь тойрогт багтана. Иймд $\angle AMN = \angle ARN = 180^\circ - \angle NRL = \angle C = \angle NCL$ болж $CNRL$ тойрогт багтана. Мөн $\angle ABC = \angle ANM = \angle ARM = 180^\circ - \angle MRL$ тул

BMRL тойрогт багтана. $L \in BC$ ба *BMR*, *CNR* гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд L цэгт огтлолцох болж бодлого бодогдов.

ОУ-2 (1-р бодолт).

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c) \quad (1)$$

$$ab + bc + ca = 0 \quad (2)$$

гэе. $P(x)$ нь (1)-ийг хангаж байг. Хэрэв $a = b = 0$ бол $c \in \mathbb{R}$ бүрийн хувьд (2) биелэх тул $P(0-0) + P(0-c) + P(c-0) = 2P(0+0+c)$ буюу $P(0) + P(-c) = P(c)$ гэж олно, энд $c = 0$ гэвэл $P(0) = 0$ гэж гарах тул $\forall c \in \mathbb{R}$ -ийн хувьд $P(-c) = P(c)$ буюу $P(x)$ нь тэгш функц тул $P(x) = a_n x^{2n} + a_{n-1} x^{2(n-1)} + \dots + a_1 x^2$, $a_i \in \mathbb{R}$ гэж олно. Одоо $2a \leq 4$ гэж харуулъя. Аливаа $u, v \in \mathbb{R}$ -ийн хувьд $a = uv$, $b = (1-u)v$, $c = (u^2-u)v$ тоонууд нь $ab + bc + ca = (a+b)c + ab = v(u^2-u)v + uv(1-u)v = 0$ нөхцлийг хангах тул (1) нь $\forall u, v \in \mathbb{R}$ -ийн хувьд $P((2u-1)v) + P((1-u^2)v) + P((u^2-2u)v) = 2P((u^2-u+1)v)$ тэгшитгэлийг өгөх ба энд u -г тогтмол гэж үзвэл v хувьсагчтай олон гишүүнтийн адилтгал гэж үзээд тэнцлийн 2 тал дахь ахмад гишүүдийн коэффициентийг тэнцүүлбэл, $\forall u \in \mathbb{R}$ -ийн хувьд $(2u-1)^{2n} + (1-u^2)^{2n} + (u^2-2u)^{2n} = 2(u^2-u+1)^{2n}$ гэж олно. Энд $u = -2$ гэвэл $5^{2n} + 3^{2n} + 8^{2n} = 2 \cdot 7^{2n}$ буюу эндээс $8^{2n} < 2 \cdot 7^{2n}$. Гэтэл $n = 3$ үед

$$8^{2n} > 2 \cdot 7^{2n} \quad (3)$$

байна. $n > 3$ үед ч (3) биелэх нь ойлгомжтой. Иймд $n \leq 2$ буюу $P(x) = \alpha x^2 + \beta x^4$, $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Одоо ийм хэлбэрийн олон гишүүнт бүр (1)-г хангана гэж харуулъя. Үүний тулд шийдүүдийн шугаман комбинац бас шийд болно гэж харуулъя. x^2 ба x^4 -ийн хувьд л шалгахад хангалттай. x^2 -ийн хувьд $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 - 2(a+b+c)^2 = -6(ab+bc+ca)$ -аас гарна. x^4 -ийн хувьд $x = a-b$, $y = b-c$, $z = c-a$ гэж авахад x^2 -ийн хувьд сая шалгах явцад $x^2 + y^2 + z^2 = 2(a+b+c)^2$ гэж баталсныг анхааръя. $x+y+z=0$ тул (1) нь $xy+yz+zx = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) = -(a+b+c)^2$, $(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 = (xy+yz+zx)^2 - 2xyz(x+y+z) = (a+b+c)^4$,

$x^4 + y^4 + z^4 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2((xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2) = 2(a+b+c)^4$ -аас гарна.

ОУ-2 (2-р бодолт). $P(0) = 0$ ба $P(x)$ тэгш олон гишүүнт гэдэг нь гарсан байг. Тэгвэл $P(x) = Q(x^2)$ болно. (1) нь

$$Q((a-b)^2) + Q((b-c)^2) + Q((c-a)^2) = 2Q((a+b+c)^2) \quad (4)$$

энд $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $ab + bc + ca = 0$. $ab + bc + ca = 0$, $x = a - b$, $y = b - c$, $z = c - a$ гээ. $x + y + z = 0$ тул $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$, $x^2 + y^2 + z^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) = 2(a^2 + b^2 + c^2) = 2(a+b+c)^2$, $(a+b+c)^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + (-x-y)^2) = x^2 + xy + y^2$. (4) нь

$$Q(x^2) + Q(y^2) + Q((x+y)^2) = 2Q(x^2 + xy + y^2) \quad (5)$$

болно. (5)-д $y = x$ гэвэл

$$2Q(x^2) + Q(4x^2) = 2Q(3x^2) \quad (6)$$

болно, энд x нь $\exists a, b, c \in \mathbb{R}$, $x = a - b$, $x = b - c$, $ab + bc + ca = 0$ байх тоо. Гэтэл ямар ч тоо x -ийн хувьд ийм чанартай a, b, c бодит тоонууд олдох нь илэрхий. $a = x + \frac{|x|}{\sqrt{3}}$, $b = \frac{|x|}{\sqrt{3}}$, $c = \frac{|x|}{\sqrt{3}} - x$. Иймд (6) нь $\forall x \in \mathbb{R}$ -ийн хувьд биелнэ. Иймд $x \geq 0$ бол

$$2Q(x) + Q(4x) = 2Q(3x) \quad (7)$$

болно. $Q(x)$ олон гишүүнт тул $\forall x \in \mathbb{R}$ -ийн хувьд

$$2Q(x) + Q(4x) = 2Q(3x) \quad (8)$$

болно. $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ нь (8)-г хангана гэдгээс (8)-ын 2 талаас коэффициентүүдийг нь жишвэл $2b_i + 4^i b_i = 2 \cdot 3^i b_i$, $i = \overline{0, n}$ гэж олно. Ө.х. $(4^i - 2 \cdot 3^i + 2)b_i = 0$, $i = \overline{0, n}$. $i > 2$ бол $4^i - 2 \cdot 3^i + 2 > 0$ тул $i > 2$ үед $b_i = 0$ гэж гарна. $b_0 = 0$ гэдгийг бид мэдэж байгаа тул $Q(x) = \alpha x + \beta x^2$, $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ гэж гарна. Тэгвэл $P(x) = \alpha x^2 + \beta x^4$ нь $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ -ийн хувьд (1)-г хангахыг шалгах л үлдлээ.

ОУ-3. $m \times n$ тэгш өнцөгтийг бодлогын нөхцлийг хангахаар бүрхсэн байг. Ямарваа A дэгээний хувьд түүний дотоод квадратыг захын квадратаараа бүрхсэн ганц B дэгээ орших (ба B -ийн хувьд A мөн тийм чанартай) тул бүрхэлтэд бүх дэгээнүүд хосод хуваагдана. Харин A -тай давхардаагүй ба хоосон зайгүй (завсаргүй) байхаар B -г байрлуулах боломж 2 л байна. Үүний 1-д нь A ба B нь 3×4 тэгш өнцөгтийг үүсгэнэ (X). Нөгөө тохиолдолд A ба B -ийн нэгдэл нь 3,2, 1,2, 3,2, 1,2 талууд бүхий 8 өнцөгт хэлбэрийн дүрс Y үүсгэнэ. Иймд $m \times n$ тэгш өнцөгт дэгээгээр бүрхэгдэнэ $\Leftrightarrow m \times n$ тэгш өнцөгт X ба Y -ээр бүрхэгдэнэ. Тийм бүрхэлт оршдог гэе. Тэгвэл $12/mn$. Одоо m, n -ийн нэг нь 4-т хуваагдахыг харуулъя. Эсрэгээс нь тийм биш гэвэл $m \equiv n \equiv 0(2)$ болно. Тэгш өнцөгт маань $1, \dots, m$ гэж тэмдэглэсэн m мөртэй, $1, \dots, n$ гэж тэмдэглэгдсэн n баганатай нэгж квадратуудад хуваагдсан гэж үзье.

Хэрэв i, j -ийн яг нэг нь 4-т хуваагддаг бол (i, j) квадратад 1-ийн тоо бичиж, хэрэв i, j хоёул 4-т хуваагддаг бол (i, j) квадратад 2-ын тоо бичье. Багана бүр дэх ба мөр бүр дэх нэгж квадратын тоо тэгш тул бичигдсэн бүх тоонуудын нийлбэр тэгш байна. X -ээр бүрхэгдсэн тоонуудын нийлбэр 3 эсвэл 7 байна. Y -ээр бүрхэгдсэн тоонуудын нийлбэр 5 эсвэл 7 байна. Иймд X ба Y дүрсийн нийт тоо тэгш байна. Иймд $24/mn, 8/mn$. Энэ $4 \nmid m, 4 \nmid n$ гэдэгт зөрчинө. $m, n \notin \{1, 2, 5\}$ болохыг хялбархан шалгаж болно. Үүгээр хэрэв бүрхэлт олддог бол m, n -ийн нэг нь 3-т хуваагдана, m, n -ийн нэг нь 4-т хуваагдана, Мөн $m, n \in \{1, 2, 5\}$ гэдгийг баталлаа. Үүний урвуу нь хүчинтэй, ө.х. энэ нөхцлүүд биелж байвал бүрхэж болно (зөвхөн X -ээр ч бүрхэж чадна).

ОУ-4 (1-р бодолт). Тэгш хэмийн үндсэн дээр $t_1 < t_2 + t_3$ гэж харуулбал болно.
$$\sum_1^n t_i \sum_1^n \frac{1}{t_i} = n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \right) = n + t_1 \left(\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \right) + \frac{1}{t_1} (t_2 + t_3) + \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ (i, j) \neq (1, 2); (1, 3)}} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \right). A \geq G\text{-ээр}$$

$$\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \geq \frac{2}{\sqrt{t_2 t_3}}, t_2 + t_3 \geq 2\sqrt{t_2 t_3}, \frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \geq 2, \forall i, j \text{ тул } a = \frac{t_1}{\sqrt{t_2 t_3}} > 0$$

гэж аваад $n^2 + 1 > \sum t_i \sum \frac{1}{t_i} \geq n + 2 \frac{t_1}{\sqrt{t_2 t_3}} + 2 \frac{\sqrt{t_2 t_3}}{t_1} 6 + 2[C_n^2 - 2] = 2a + \frac{2}{a} + n^2 - 4$. Иймд $2a + \frac{2}{a} - 5 < 0$ болох ба эндээс $\frac{1}{2} < a = \frac{t_1}{\sqrt{t_2 t_3}} < 2$ гэж гарна. Үүгээр $t_1 < 2\sqrt{t_2 t_3} \leq t_2 + t_3$ боллоо.

ОУ-4 (2-р бодолт). Э.Цэнгүүн Караматын тэнцэтгэл биш ашиглан дараах бодолтыг хийв.

$t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R}^+ (n \geq 3)$ байх тоонуудын аль нэг гурав t_i, t_j, t_k -уудын хувьд $t_k \geq t_i + t_j (i \neq j \neq k)$ бол $(t_1 + \dots + t_n) \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} \right) \geq n^2 + 1$ гэж батал.

$t_1, t_2, \dots, t_n$ тэгш эрхтэй учир $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ гэж эрэмбэлье. $t_n \geq t_k \geq t_i + t_j \geq t_1 + t_2 \Rightarrow t_n \geq t_1 + t_2$. $t_1 + t_2 + t_n = S_1$, $t_3 + \dots + t_{n-1} = S_2$ $\bar{a} = (t_1, t_2, t_n)$ $\bar{b} = \left(\frac{S_1}{4}, \frac{S_1}{4}, \frac{S_1}{2} \right)$, $\bar{a}^o = (t_n, t_2, t_1)$, $\bar{b}^o = \left(\frac{S_1}{2}, \frac{S_1}{4}, \frac{S_1}{4} \right)$. $t_1 \leq t_2 \leq t_n$, $\frac{S_1}{4} \leq \frac{S_1}{4} \leq \frac{S_1}{2}$, $2t_n \geq t_n + t_2 + t_1 = S_1$ учир $t_n \geq \frac{S_1}{2}$. Мөн $2t_1 \leq t_1 + t_2 \leq \frac{S_1}{2}$, $t_1 \leq \frac{S_1}{4}$. Эндээс $t_n + t_2 \geq \frac{3S_1}{4} = \frac{S_1}{2} + \frac{S_1}{4}$, $t_n + t_2 + t_1 = \frac{S_1}{2} + \frac{S_1}{4} + \frac{S_1}{4}$ буюу $\bar{a}^o > \bar{b}^o$, $f(x) = \frac{1}{x}$ функц нь $x > 0$ үед $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ буюу $x > 0$ үед $f(x) = \frac{1}{x}$ нь хотгор функц тул Караматын тэнцэтгэл биш ёсоор $f(t_n) + f(t_2) + f(t_1) \geq f\left(\frac{S_1}{4}\right) + f\left(\frac{S_1}{4}\right) + f\left(\frac{S_1}{2}\right)$

$$\frac{1}{t_n} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_1} \geq \frac{10}{S_1} \quad (1)$$

Йенсеней тэнцэтгэл биш ёсоор $f(t_3) + \dots + f(t_{n-1}) \geq f\left(\frac{t_3 + \dots + t_{n-1}}{n-3}\right)$, $\frac{1}{t_3} + \dots + \frac{1}{t_{n-1}} \geq \frac{(n-3)^2}{t_3 + \dots + t_{n-1}}$ болно.

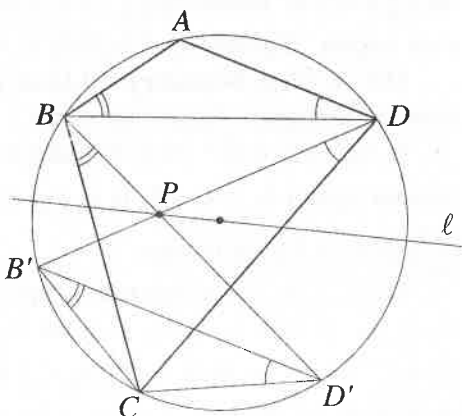
$t_1 + \dots + t_n = S_1 + S_2$, $n \geq 4$ үед $(t_1 + \dots + t_n) \left(\frac{1}{t_1} + \dots + \frac{1}{t_n} \right) \geq (S_1 + S_2) \left(\frac{(n-3)^2}{S_2} + \frac{10}{S_1} \right) = (n-3)^2 + 10 \frac{S_2}{S_1} + (n-3)^2 \frac{S_1}{S_2} + 10 \geq (n-3)^2 + 10 + 2\sqrt{(n-3)^2 \frac{S_2}{S_1} \cdot 10 \frac{S_1}{S_2}} > n^2 + 1$.

$n = 3$ үед (1)-ээс $(t_1 + t_2 + t_n) \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_n} \right) \geq S_1 \cdot \frac{10}{S_1} = 10 = 3^2 + 1$ болно.

$n \geq 4$ үед $(n-3 + \sqrt{10})^2 = (n + (\sqrt{10} - 3))^2 > n^2 + 1$ гэж баталъя. $n = 4$ бол $(1 + \sqrt{10})^2 > 17 \Leftrightarrow 2\sqrt{10} > 6$ үнэн байна. $f(n+1) > f(n)$ тул илэрхий батлагдав.

ОУ-5. Эхлээд $AP = PC$ үед $ABCD$ дөрвөн өнцөгт нь тойрогт

багтахыг үзүүлбэ. $\triangle BCD$ -г багтаасан тойрог авч үзье. P цэгийг BCD гурвалжин дотор оршдог гэж үзье. DP, BP шулуунуудын тойрогтой огтлолцох цэгүүдийг B', D' гээ.



Тэгвэл $\triangle B'D'C \sim \triangle BDA$ ба $\triangle B'D'P \sim \triangle BDP$ болно. Иймд $ABPD$ ба $CB'PD'$ нь төсөөтэй. $AP = CP$ тул $ABPD$ ба $AB'PD'$ нь тэнцүү. Эндээс $BD = B'D'$

ба $B \neq B', D \neq D'$ тул $BB'DD'$ нь адил хажуут трапец ба $\angle BPB'$ -ийн биссектрисийг дайрсан ℓ шулуун тойргийн диаметрийг агуулна. Иймээс $\angle B'CD' = \angle BAD$ гэдгээс A ба C нь ℓ шулууны хувьд тэгш хэмтэй гэж гарна. Иймд A цэг тойрог дээр орших болж бодлого бодогдоно.

ОУ-6. n судалтай давталттай $\Leftrightarrow 20 \nmid n$ гэж баталъя.

Хэрэв $20 \mid n$ бол kn -ийн сүүлчийн 2 цифр нь тэгш буюу n -д судалтай давталт байхгүй. Иймд ганц $\Rightarrow$ -ийг л баталъя.

2-ын зэргүүд ба $2 \cdot 5^n$ хэлбэрийн тоонуудыг тусад нь авч үзнэ. u^k нь a -г хуваах u -ийн хамгийн их зэрэг гэхийг $u^k \parallel a$ гэж тэмдэглэж байя.

Лемм 1. 2^n бүр нь тэгш тооны цифр бүхий судалтай давталттай.

Баталгаа. n бүрийн хувьд $a_n \equiv n + 1 (2)$, $2^{2n-1} \parallel \overline{a_{2n-1} \dots a_1}$, $2^{2n+1} \parallel \overline{a_{2n} \dots a_1}$ байх 10-тын цифрүүдийн төгсгөлгүй дараалал $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ -ийг байгуулбал Лемм 1 батлагдана. $a_1 = 2$, $a_2 = 7$ гээ. Хэрэв дараалалд a_{2n} байгуулагдсан $a_{2n+1} = 4$ гэж авъя. Тэгвэл $2^{2n+1} \parallel \overline{a_{2n+1} a_{2n} \dots a_1} = 4 \cdot 10^{2n} + \overline{a_{2n} \dots a_1}$ болно. Индукцэд үзэж буйгаар $2^{2n+1} \parallel \overline{a_{2n} \dots a_1}$ ба $2^{2n+2} \parallel 4 \cdot 10^{2n}$. $\overline{a_{2n+1} \dots a_1} = 2^{2n+1} A$,

А-сондгой. Одоо a_{2n+2} сондгой ба

$$\begin{aligned} 2^{2n+3} \parallel \overline{a_{2n+2} a_{2n+1} \dots a_1} &= a_{2n+2} \cdot 10^{2n+1} + \overline{a_{2n+1} \dots a_1} = \\ &= 2^{2n+1} (a_{2n+2} \cdot 5^{2n+1} + A) \end{aligned} \quad (1)$$

байх ёстой. Хэрэв

$$5 \cdot a_{2n+2} + A \equiv 4(8) \quad (2)$$

бол (1) биелнэ. Гэтэл (2) шийдтэй ба A сондгой тул шийд нь сондгой байна, тодруулбал $a_{2n+2} \in \{1, 3, 5, 7\}$. Үүгээр лемм батлагдав.

Лемм 2. $2 \cdot 5^n$, $n = 1, 2, \dots$ хэлбэрийн тоо бүр тэгш цифр бүхий судалтай давталттай байна.

Баталгаа. 10-тын цифрүүдийн төгсгөлгүй дараалал $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ -г n бүрийн хувьд $b_n \equiv n + 1(2)$, $2 \cdot 5^n \mid \overline{b_n \dots b_1}$ байхаар байгуулъя. $b_1 = 0$, $b_2 = 5$ гэе. $b_1, \dots, b_n$ байгуулагдсан байг. $\overline{b_n \dots b_1} = 5^\ell B$, $\ell \geq n$ ба $5 \nmid B$ байг. b_{n+1} -г $b_{n+1} \equiv n + 2(2)$, $5^{n+1} \mid \overline{b_{n+1} \dots b_1} = b_{n+1} \cdot 10^n + \overline{b_n \dots b_1} = 5^n (b_{n+1} \cdot 2^n + 5^{\ell-n} \cdot B)$ байхаар олъя. Хятадын теоремоор $b_{n+1} \equiv n + 2(2)$, $b_{n+1} 2^n + B \equiv 0(5)$ систем $[0, 1, \dots, 9]$ -д шийдтэй лемм батлагдлаа.

Одоо $n = 2^\alpha 5^\beta k$, $(k, 10) = 1$ байх ерөнхий тохиолдолд шилжье. $20 \nmid n$ тул $2^\alpha 5^\beta = 2^\alpha l \vee 5^\beta \vee 2 \cdot 5^\beta$ болно. Лемм 1 ба 2-оор аль ч тохиолдолд $2^\alpha 5^\beta$ нь тэгш тооны $2m$ цифр бүхий тэгш судалтай давталт M -тэй. $\overline{M \dots M}$ хэлбэрийн ямарч тоо нь $2^\alpha 5^\beta$ -ийн судалтай давталт болно. Одоо тэдгээрийн зарим нь $n = 2^\alpha 5^\beta k$ тооны давталт болохыг харуулъя. $C_\ell = 1 + 10^{2m} + \dots + 10^{2m(\ell-1)}$, $\ell = 1, k + 1$ тоонуудыг авч үзье. Эдгээрийн хоёр нь Дирихлейн зарчмаар k модулиар тэнцүү байна. $k \mid C_{\ell_2} - C_{\ell_1} = C_{\ell_2 - \ell_1} \cdot 10^{2m\ell_1} \rightarrow k \mid C_{\ell_2 - \ell_1}$. $C_{\ell_2 - \ell_1} \cdot M$ нь $\overline{M \dots M}$ хэлбэртэй ба n -ийн судалтай давталт болно.

МОНГОЛЫН ОЮУТНЫ МАТЕМАТИКИЙН XII ОЛИМПИАД

Б.Батцэнгэл

а) эчнээ давааны бодлогууд

I анги

- 1 (Б.Батцэнгэл). а) $0, 1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$ тоонуудыг *квадрат* тоонууд гэж нэрлэнэ. Натурал n тоог 2 ширхэг квадрат тооны нийлбэрт задлах боломжийн тоог a_n гэж тэмдэглэе (энд $1 = 0+1$ ба $1 = 1+0$ гэсэн задаргааг ижил гэж тооцно).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n+1} = \frac{\pi}{4}$$

болохыг батал.

- б) $0, 1, 3, 6, \dots, \frac{n(n+1)}{2}, \dots$ тоонуудыг *гурвалжин* тоонууд гэж нэрлэнэ. Натурал n тоог 2 ширхэг гурвалжин тооны нийлбэрт задлах боломжийн тоог b_n гэж тэмдэглэе.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_0 + b_1 + \dots + b_n}{n+1}$$

хязгаарыг ол.

- 2 (Б.Батцэнгэл). $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ матрицуудын хувьд $(A \cdot B)^2 = A^3 \cdot B^3 = E$ байдаг бол $\begin{cases} A \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v} \\ B \cdot \vec{v} = \mu \vec{v} \end{cases}$ байх тэгээс ялгаатай $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ вектор олдоно гэдгийг батал.

- 3 (Б.Батцэнгэл). $A_1, \dots, A_m \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ матрицууд шугаман хамааралгүй бөгөөд хос хосоороо байраа сэлгэдэг, өөрөөр хэлбэл ямар ч i, j -ийн хувьд $A_i \cdot A_j = A_j \cdot A_i$ байдаг бол m -ийн авч болох хамгийн их утгыг ол.

- 4 (Б.Батцэнгэл). Эерэг $x_1, \dots, x_n$ тоонуудын хувьд

$$S_\alpha = \left(\frac{x_1^\alpha + \dots + x_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

тоог тэдгээрийн α зэргийн дундаж гэж нэрлэдэг. $x_{i_1 \dots i_k}$ ($1 \leq i_s \leq n_s$) эерэг тоонууд өгөгдөв. Тэгээс ялгаатай $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ тоонууд ба $1, \dots, k$ тоонуудын $r_1, \dots, r_k$ гэсэн сэлгэмлийн хувьд, $x_{i_1 \dots i_k}$ тоонуудаас эхлээд r_1 -р координатаар α_1 зэргийн дундаж авч, үүсэх тоонуудаас r_2 -р координатаар α_2 зэргийн дундаж авч, ... эцэст нь, r_k -р координатаар α_k зэргийн дундаж авахад гарагх тоог $S_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}^{r_1, \dots, r_k}$ гэж тэмдэглэе. $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{k-1} \leq \alpha_k$ бол

$$S_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k}^{1, 2, \dots, k-1, k} \leq S_{\alpha_k, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-2}, \alpha_{k-1}}^{k, 1, \dots, k-2, k-1} \leq \dots \leq S_{\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k, \alpha_1}^{2, 3, \dots, k, 1}$$

байхыг батал.

- 5 (Б.Батцэнгэл). $2n \times 2n$ хэмжээтэй квадратыг 1×2 хэмжээтэй тэгш өнцөгтөд хуваах боломжийн тоог D_n гэж тэмдэглэе.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln D_n}{n^2}$ хязгаар олдохыг батал.

- 6 (Б.Батцэнгэл). $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ матрицийн хувьд $\text{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$ тоог түүний *перманент* гэж нэрлэнэ (энд S_n нь сэлгэмлийн бүлэг бөгөөд перманент нь тодорхойлогчоос тэмдэг тооцохгүйгээр ялгаатай юм). A нь аль ч мөр, аль ч баганы элементүүдийн нийлбэр нь 1 гардаг сөрөг биш элементтэй матриц бол түүний перманент $\frac{n!}{n^n}$ -ээс багагүй байхыг батал.

- 7 (Б.Батцэнгэл). Эерэг $x_1, \dots, x_n$ тоонууд өгөгдөв. $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ нөхцлийг хангах сөрөг биш $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ тоонуудын хувьд

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_1^{\alpha_{\sigma(1)}} \dots x_n^{\alpha_{\sigma(n)}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

тэнцэл биш биелнэ гэдгийг батал.

- 8 (Б.Батцэнгэл). Натурал n тооны хувьд $a_n = 1 + C_2^1 + C_4^2 + \dots + C_{2(n-1)}^{n-1}$ бол

$$\text{ord}_3(a_n) = \text{ord}_3(C_{2n}^n) + 2\text{ord}_3(n)$$

байхыг батал. Энд $\text{ord}_3(n)$ -ээр n тоог хуваадаг 3-ын хамгийн их зэргийг тэмдэглэв.

- 9 (Д.Пүрэвсүрэн). 2-р эрэмбийн $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ муруйнууд 4 ерөнхий цэгтэй байв. ℓ шулууны γ_1, γ_2 муруйг огтлоход үүсэх хөвчүүдийн дундаж цэгүүд O цэгт давхцдаг бол O цэг нь мөн ℓ шулууны γ_3 муруйг огтлоход үүсэх хөвчийн дундаж цэг мөн гэдгийг батал.
- 10 (В.Адьяасүрэн). $f(x)$ нь $[0; 1]$ хэрчим дээр дифференциалчлагдах бөгөөд $f(0) = 0, f(1) = 1$ байх функц байг. Аливаа эерэг α, β тоонуудын хувьд $\frac{\alpha}{f'(x)} + \frac{\beta}{f'(y)} = \alpha + \beta$ байх ялгаатай $x, y \in [0; 1]$ тоонууд олдоно гэж батал.
- 11 (В.Адьяасүрэн). a, b, c, d, e, f нь $a^2 - 4a + b^2 - 2b + 2 = 0, c^2 - 4c + d^2 - 2d + 2 = 0, e^2 - 4e + f^2 - 2f + 2 = 0$ нөхцлийг хангах тоонууд бол $(a-c)(f-d) + (c-e)(b-d)$ илэрхийллийн авч болох хамгийн их утгыг ол.

II-IV анги

1. I анги, бодлого 1.
- 2 (Б.Батцэнгэл). m, n нь харилцан анхны натурал тоонууд болог. G нь a, b гэсэн үүсгэгчтэй, цор ганц $a^m = b^n$ харьцаатай бүлэг бол $G/G' \cong \mathbb{Z}$ байна гэдгийг батал. Энд G' нь G бүлгийн коммутатор дэд бүлэг юм.
3. I анги, бодлого 2.
4. I анги, бодлого 3.
5. I анги, бодлого 4.
6. I анги, бодлого 5.
- 7 (Б.Батцэнгэл). Харгалзан a, b, c төгрөгтэй гурван тоглогч дараах тоглоомыг тоглож байв. Гурван тоглогч нэгэн зэрэг хуруу гаргах (тоглогч тус бүр аль нэг хуруугаа $\frac{1}{5}$ магадлалтайгаар санамсаргүй гаргана) бөгөөд хэрэв нэг тоглогчийн гаргасан хуруу нөгөө 2 тоглогчийн гаргасан хурууг идвэл, 2 тоглогч түүнд 1, 1 төгрөг өгнө. Эсрэг тохиолдолд тоглогчид дахин хуруу гарган тоглоом цааш үргэлжилнэ. Тоглоом аль нэг тоглогч мөнгөгүй болох хүртэл үргэлжилдэг бол тоглоом үргэлжлэх хугацааны математик дунджийг ол.

8. I анги, бодлого 6.
 9. I анги, бодлого 7.
 10. I анги, бодлого 8.
 11. (Б.Батцэнгэл). p нь сондгой анхны тоо бол

$$1 + C_2^1 \cdot x + C_4^2 \cdot x^2 + \dots + C_{\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}} \cdot x^{\frac{p-1}{2}}$$

олон гишүүнтийг $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ талбар дээр задал.

12. I анги, бодлого 9.
 13. (В.Адьяасүрэн). $A = (a_{ij})$ ($1 \leq i, j \leq n$) тэгш хэмтэй, тодорхой эерэг матриц бол

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j\right) dx_1 \dots dx_n = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}}$$

болохыг батал.

14. (В.Адьяасүрэн). $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ эерэг тоон дарааллын хувьд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ цуваа нийлдэг байвал

$$8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^3 \leq 27 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$$

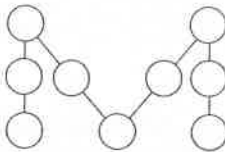
тэнцэтгэл биш биелнэ гэж батал.

15. (В.Адьяасүрэн). Δ нь $\mathbb{R}^n$ огторгуй дахь ирмэгүүдийн урт нь 1-тэй тэнцүү n хэмжээст симплекс болог. $\ell \in \mathbb{R}^n$ шулууны хувьд, Δ симплексийн оройнуудаас ℓ шулуун хүртэлх зайнуудаас хамгийн ихийг нь $d(\ell, \Delta)$ гэж тэмдэглэе. $\min_{\ell \in \mathbb{R}^n} d(\ell, \Delta)$ -ийг ол.

БАГА АНГИЙН МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАД

С.Цогзолмаа, Т.Батчимэг

1-р анги (Бодох хугацаа: 2 цаг)

1. Ногооны хоёр агуулах байв. Хэрэв I агуулахын ногоог 4 тонны даацтай машинаар, II агуулахын ногоог 5 тонны даацтай машинаар зөөвөл нийт 40 машин шаардагдана. Харин I агуулахын ногоог 5 тонны даацтай машинаар, II агуулахын ногоог 4 тонны даацтай машинаар зөөвөл нийт 41 машин шаардагдана. Хоёр агуулахад нийт хэдэн тонн ногоо байсан бэ?
2. Зурагт дүрсэлсэн дугуйнууд дотор 1, 2, . . . , 8, 9 цифрүүдийг, нэг хэрчим дээр байрлах гурван дугуйнд бичигдэх цифрүүдийн нийлбэр хоорондоо тэнцүү бөгөөд хамгийн бага байхаар бөглө (нэг цифрийг нэг удаа бичнэ). 
3. 2, 3, ..., 8, 9 цифрүүдийг нэг нэг удаа ашиглан 2 тоо бичив. Жишээ нь: 672 ба 58943. Бичсэн хоёр тооны нэг нь нөгөөгөөсөө 2 дахин их байж болох уу?
4. 4 ширхэг туухайг эгнүүлэн байрлуулахад аль ч зэрэгцээ хоёр туухайны жин 1кг-аар зөрөөтэй байв. Бүх туухайг жигнүүрийн хоёр таваг дээр хоёр, хоёроор нь жин тэнцэж байхаар тавьж болно гэж харуул. (С.Цагааны нэрэмжит)

2-р анги (Бодох хугацаа: 1 цаг 30 минут)

1. 1-р ангийн зарим сурагч "ө" үсгийг "ү" үсгээр, "ү" үсгийг "ө" үсгээр сольж бичдэг байв. Багш 1-р салааны 20 сурагчаар "Бөртө " гэсэн үг, 2-р салааны 20 сурагчаар "Бүртэ " гэсэн үг бичүүлэв. Нийт 25 сурагч Бөртө гэж бичсэн бол аль салаанд олон зөв бичдэг хүүхэд суудаг вэ?
2. Нийт урт нь 100м байх тус бүр 2м, 3м, 4м урттай 40 ширхэг банз байв. Банз тус бүрийг 1м урттай болгохын тулд банзуудыг хэдэн удаа хөрөөдөх шаардлагатай вэ? (Банзуудыг давхарлаж хөрөөдөхгүй)

3. Ойд өдөр унтдаг, шөнө унтдаг 2 төрлийн нийт 13 мангас амьдардаг байжээ. Шөнө унтдаг мангас бүр өдөр нэг нэг унтаж байгаа мангасыг барьж иддэг. Өдөр унтдаг мангас бүр шөнө нэг нэг унтаж байгаа мангасыг барьж иддэг байв. Хэсэг хугацааны дараа ойд цор ганц өдөр унтдаг мангас үлдсэн бол анх хэдэн шөнө унтдаг мангас байсан бэ? (С.Цагааны нэрэмжит)
4. Зурагт дүрсэлсэн дугуйнууд дотор 1, 2, ..., 8, 9 цифрүүдийг, нэг хэрчим дээр байрлах гурван дугуйнд бичигдэх цифрүүдийн нийлбэр хоорондоо тэнцүү бөгөөд хамгийн бага байхаар бөглө (нэг цифрийг нэг удаа бичнэ).

3-р анги (Бодох хугацаа: 2 цаг 30 минут)

1. 2, 3, ..., 8, 9 цифрүүдийг нэг нэг удаа ашиглан 2 тоо бичив. Жишээ нь: 672 ба 58943. Бичсэн хоёр тооны нэг нь нөгөөгөөсөө 2 дахин их байж болох уу?
2. x, y хоёр тооны нийлбэр 120 байв. 1, 2, 3, ..., 14, 15 тоонуудыг хоёр хэсэгт, 1-р хэсгийн тоонуудын нийлбэр x -тэй, 2-р хэсгийн тоонуудын нийлбэр y -тэй тэнцүү байхаар ямагт хувааж болох уу?
3. 9×9 хэмжээтэй хөлгөөс 3×3 хэмжээтэй квадратыг, хөлгийн үлдэх хэсгийг 2×3 хэмжээтэй тэгш өнцөгтөд хувааж болдог байхаар хэдэн янзаар ухаж авч болох вэ?
4. Багш самбар дээр 6 ширхэг тоо бичив. Дараа нь сурагчид самбарт бичигдсэн тоонуудаас 3 тоог бүх боломжит аргаар сонгон авч нийлбэрийг нь олоход 10 ширхэг 15 гэсэн нийлбэр, мөн 10 ширхэг 18 гэсэн нийлбэр гарчээ. Багш самбарт ямар тоонууд бичсэн бэ? (С.Цагааны нэрэмжит)

4-р анги ((Бодох хугацаа: 3 цаг))

1. Хүүхдэд улаан, хөх 2 өнгийн савх байсан бөгөөд бүх улаан савхнууд 4см урттай, бүх хөх савхнууд 5см урттай байв. Хэрэв савхнуудын нийт урт 5м байсан бол хүүхэд бүх савхаа оролцуулан нэг ч савх хугалалгүйгээр квадрат хийж чадна гэдгийг үзүүл.

2. Нэг ангийн сурагчид 3 салаанд хуваагдан суудаг байв. Бат 1-р салаанаас 2-р салаанд, Цэцэг 2-р салаанаас 3-р салаанд, Дорж 3-р салаанаас 1-р салаанд шилжин суужээ. Тэгэхэд 1-р салааны сурагчдын дундаж нас 1 долоо хоногоор, 2-р салааны сурагчдын дундаж нас 2 долоо хоногоор тус тус өсөж, харин 3-р салааны сурагчдын дундаж нас 4 долоо хоногоор буурчээ. 1 ба 2-р салаанд тус бүр 12 сурагч суудаг бол 3-р салаанд хэдэн сурагч суудаг вэ?
3. 10 эгнээ сандалтай кинотеатрын танхимд 112 үзэгч кино үзэж байлаа. Аль ч дараалсан хоёр эгнээнд 25-аас цөөн үзэгч, аль ч дараалсан гурван эгнээнд 33-аас олон үзэгч сууж байв. Урдаасаа 2, 3, 4, 5, 6-р эгнээнд нийт хэдэн үзэгч суусан бэ? (С.Цагааны нэрэмжит)
4. 1, 2, ..., 119, 120 тоонуудыг тус бүр дараалсан тоонуудаас тогтох 15 хэсэг болгон хуваав. Хэсгүүд дотор 1 ширхэг тооноос тогтох 1 хэсэг, 2 ширхэг тооноос тогтох 1 хэсэг, ... 14 ширхэг тооноос тогтох 1 хэсэг, 15 ширхэг тооноос тогтох 1 хэсэг байв. Сондгой тоогоор эхэлсэн хэсэг хамгийн олондоо хэд байж болох вэ?

5-р анги

1. 1, 2, ..., 999, 1000 тоонуудыг тус бүр 4 тооноос тогтох 250 хэсэг болгон хуваажээ. Хэсэг тус бүрийн нэг тоо нь нөгөө гурван тооныхоо арифметик дундажтай тэнцүү байж болох уу?
2. Ялгаатай дөрвөн натурал тооны нийлбэр 2004-тэй тэнцүү байв. Эдгээр тоонуудын хамгийн их ерөнхийлөн хуваагч хамгийн ихдээ хэд байж болох вэ?
3. Самбарт өгөгдсөн хэдэн цэгийг хос хосоор нь хэрчмээр холбож, үүссэн хэрчмүүдийн заримыг улаанаар, үлдсэнийг нь хөхөөр будсан байв. Хүүхэд ямар нэг цэгийг сонгон авч, уг цэгээс татагдсан бүх хэрчмийн өнгийг нэгэн зэрэг өөрчилж нөгөө өнгөөр сольж будаж байв. Хүүхэд аль ч гурван цэг дээр оройтой гурвалжны 3 талыг хөх өнгөтэй болгож чаддаг бол тэрээр бүх хэрчмийг хөх өнгөтэй болгож чадна гэж батал.

4. Бат өдөр бүр хичээлээс тараад 4 найзаа, эсвэл 6 найзаа дагуулан гэртээ харьж ирдэг байв. Нэг өглөө Батын ээж тэдэнд зориулан бялуу хийжээ. Ээж бялууг бүх хүүхдэд тэнцүү хувааж өгөхийн тулд хамгийн цөөндөө хэдэн хэсэг болгон хувааж бэлдсэн байх ёстой вэ? (хэсгүүд нь ижил хэмжээтэй байх албагүй) (С.Цагааны нэрэмжит)

6-р анги

1. Аль ч оройгоос татсан өндөр нь гурвалжны аль нэг талын хагастай тэнцүү байх гурвалжин олдох уу?
2. Аль ч хоёр тооны ялгаврын квадрат нь уг хоёр тооны үржвэрийг хуваадаг байх ялгаатай 100 ширхэг натурал тоо олдох уу?
3. Самбарт өгөгдсөн хэдэн цэгийг хос хосоор нь хэрчмээр холбож, үүссэн хэрчмүүдийн заримыг улаанаар, үлдсэнийг нь хөхөөр будсан байв. Хүүхэд ямар нэг цэгийг сонгон авч, уг цэгээс татагдсан бүх хэрчмийн өнгийг нэгэн зэрэг өөрчилж нөгөө өнгөөр сольж будаж байв. Хүүхэд аль ч гурван цэг дээр оройтой гурвалжны 3 талыг хөх өнгөтэй болгож чаддаг бол тэрээр бүх хэрчмийг хөх өнгөтэй болгож чадна гэж батал.
4. 1×2 хэмжээтэй тэгш өнцөгтүүдэд хуваагдсан 6×6 хэмжээтэй хөлөг дээр 2 тоглогч дараах тоглоомыг тоглож байв. Тоглолт эхлэхэд хөлгийн зүүн доод булангийн нүдэнд 1-р тоглогчийн даам, хөлгийн зүүн дээд булангийн нүдэнд 2-р тоглогчийн даам байрлаж байна. 1-р тоглогчоос эхлэн тоглогчид ээлжлэн өөрийн даамыг, уг даам байрлаж байгаа тэгш өнцөгттэй хөрш байрлах тэгш өнцөгтийн аль нэг нүд рүү нүүнэ (ерөнхий хэрчмээр хиллэх хоёр тэгш өнцөгтийг "хөрш" гэж тооцно). Өөрийн даамыг хөлгийн эсрэг булангийн нүдэнд (1-р тоглогчийн даам баруун дээд буланд, 2-р тоглогчийн даам зүүн доод буланд) эхэлж аваачсан тэр тоглогч хождог бол зөв тоглолтонд 2-р тоглогч хождог байхаар хөлгийг хувааж болох уу? (С.Цагааны нэрэмжит)

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН НИЙГЭМЛЭГИЙН ТОВЧ ТАНИЛЦУУЛГА

Монголын Математикийн Нийгэмлэг нь 1994 оны 11 дүгээр сарын 12-нд байгуулагдсан. Нийгэмлэгийн ерөнхийлөгч нь академич А.Мекей, нарийн бичгийн дарга нар нь доктор Б.Батцэнгэл, доктор А.Галтбаяр. 1996 онд тус нийгэмлэг нь Америкийн математикийн нийгэмлэгт гишүүнээр элссэн. АНУ, Герман, Орос, Японы математикийн нийгэмлэгүүдтэй хамтын ажиллагаатай ажилладаг. Эгнээндээ дотоодын 50, гадаадын 4 гишүүнтэй. Нийгэмлэг гишүүдийн татвар, хандивын тусламжтайгаар өөрийгөө санхүүжүүлдэг. Монголын Математикийн Нийгэмлэгийн сэтгүүлийг жил бүр англи хэл дээр гаргадаг.

Одоогоор сэтгүүлийн 3 дугаарыг гаргасан бөгөөд сэтгүүлд гадаад, дотоодын математикчидын онолын бүтээлийг хэвлэдэг.

Нийгэмлэгийн цаашдын зорилт нь санхүүгийн хувьд бэхжих, гадаад харилцаагаа өргөтгөх, авьяаслаг математикчидыг дэмжих зэрэгт оршино.

Жич: Манай нийгэмлэг одоо математикийн зарим чухал сэтгүүлийг захиалж авах, олон улсын математикийн бага хурлыг зохион байгуулах, гадаад гишүүддээ тусгай үнэмлэх олгох, өөрийн сэтгүүлийг тогтмол хэвлэдэг болох зэрэг олон ажил гүйцэтгэх шаардлагатай байгаа бөгөөд эхний хэдэн жил гишүүдээсээ сард 50-100 төгрөгийн татвар авч байсан боловч, дээрх үйл ажиллагаануудыг явуулахад хүрэлцэхгүй байгаа билээ. Иймд тус нийгэмлэг нь санхүүгийн хувьд баталгаатай болох үүднээс гишүүд та бүгдийг нийгэмлэгтээ амьдралдаа ганц удаа тодорхой хэмжээний хандив өргөхийг урийлж байна. Энэ тухай мэдээллийг олимпиадын цувралаар дамжуулан тогтмол мэдээлж байх болно.

Нийгэмлэгийн дотоод данс:

Валютын данс:

Голомт банк (I салбар)
2250704 Р.Энхбат

Голомт банк (I салбар)
2270409 Р.Энхбат

"Төгс Тоо" төвийн тухай

Манай орны математик боловсролын хөгжилд мэдэгдэхүйц амжилт гарч математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай сургууль, ангиуд олноор байгуулагдаж байгааг харгалзан үзэж, тэднийг нэгдсэн удирдлага, үйл ажиллагаагаар хангах зорилгоор БСШУЯ-ны санаачилга дэмжлэгтэйгээр Монгоолын Математик Олимпиадын Хорооны дэргэд математикийн багш нарын мэргэжил дээшлүүлэх "Төгс тоо" төв байгуулагдсаар хэдэн жил болж байна. Тус төв нь математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийн багш нарын мэргэжлийг системтэйгээр дээшлүүлэх ажлынхаа хүрээнд дунд ангийн багш нарын дунд тус бүр 90 цагийн багтаамжтай, 90000 төгрөгийн төлбөртэй I ба II шатны дамжааг 15 хоногоор; бага ангийн багш нарын дунд 60 цагийн багтаамжтай, 60000 төгрөгийн төлбөртэй сургалтыг 12 хоногоор хичээллүүлж, дамжааг амжилттай дүүргэсэн хүмүүст харгалзах сертификат олгон төгсгөдөг юм. Жил бүрийн хичээлийг МУИС, хичээлийн III байрны 306, 308 тоотод 6 сарын 23-24-нд бүртгэж, хичээл 6 сарын 25-аас эхлэн явагддаг. Төлбөрийг "Төгс тоо" төв дансанд хийж, төлбөрийн баримтаа үзүүлээд бүртгүүлж болно, эсвэл бэлнээр авчирна.

"Төгс тоо" төвийн данс:

Лавлах утас:

Голомт банк

2119483, "Төгс тоо" төв

312383 (гэр)

99879779 (Ц.Дашдорж)

Монголын Математикийн Нийгэмлэгт хандив өгсөн хүмүүсийн жагсаалт

	Нэрс	Албан газар	Утас	Хандив өгд хэргийн сүлжээ, нэгтгэлээр төгссөн	Хандивын хэмжээ	Хязгаар өгсөн
1.	Б.Бат	"Их алт" ком-паний ерөнхий захирал	99115441	МУИС, Мат, 1987 он	250᠐\$	1998.04
2.	Б.Батбаасан	"Космо" ком-паний ерөнхий захирал	99115561	МУИС, Мат, 1987 он	100.000₮	1998.09
3.	Ц.Данзорж	МУИС-ийн багш	372828	МУИС, Мат, 1969 он	50.000₮	1998.04
4.	Ү.Бадам	ШУА, ФТХ	368209	Эрхүү, УИС, 1969 он	4.000₮	1998.05
5.	С.Будням	ШУА, ФТХ	358949	Эрхүү, УИС, 1966 он	5.000₮	1998.05
6.	С.Тогид	УБИС-ийн захирал	322705	МУИС, Мат, 1969 он	10.000₮	1998.06
7.	Д.Бямбажав	Математик хүрээлэнгийн захирал	451136	МУИС, Мат, 1970 он	5.000₮	1998.05
8.	Ш.Эрдэнэ	"Ээргэд" бро-нерийн нүү- сийн захирал	99112152	МУИС, Мат, 1985 он	200᠐\$	1998.10
9.	Р.Ринчинбаатар	ЗГО	326454	МУИС, Мат, 1980 он	10.000₮	1999.03
10.	Н.Тунгааг	МУИС-ийн ня-бо бүртгэл	-	МУИС, Ня-бо,	5.000₮	1998.05
11.	Ц.Болдсүх	МУИС-ийн ш.харууссан орлогч захирал	322508	ХВНГУ, 1982 он	4.000₮	1998.05
12.	Н.Нямсрай	УБИС-ийн багш	323626	ЛГУ, 1966 он	5.000₮	1998.05
13.	Р.Энхбат	МУИС-ийн багш	351007	ИГУ, 1980 он	5.000₮	1998.05
14.	Т.Жаглав	МУИС-ийн багш	325631	МУИС, Мат, 1970 он	5.000₮	1998.05
15.	Х.Гэндэнжамц	МУИС-ийн багш	325022	МУИС, Мат, 1955 он	3.000₮	1998.05
16.	А.Дорж	ФТХ	452313	Эрхүү, УИС, 1966 он	5.000₮	1998.05
17.	Ч.Бат-Эрлэнэ	НИК, Мэд.Тех.Газрын захирал	99117954	МУИС, Мат, 1991 он	100.000₮	1999.09

18.	А.Мейкей	МУИС Док.-т албаны дарга	321983	МУИС, Мат, 1963 он	10.000₮	2000.04
19.	Ц.Лхамсүрэн	МУИС, МА-МО тэнхимийн эрхлэгч	321102	Мос.ИС, 1966 он	5.000₮	2000.04
20.	Б.Баясгалан	МУИС, Мат. Хүр. эрд. н.б.д.	451136	Урал ИС, 1978 он	50.000₮	2000.04
21.	Ш.Монцэцэг	ХI сур-ийн захирал	99187215	МУИС, Мат, 1986 он	10.000₮	2000.03
22.	УБ, ХI сург.	Захирал Ш.Монцэцэг	324649	-	100.000₮	2000.03
23.	А.Хадхүү	МУИС, багш	684042	МУИС, Мат, 1979 он	5.000₮	2000.04
24.	Л.Өвгөн	МУИС, Хэр. мат. тэнхимийн эрхлэгч	311244	МУИС, Мат, 1959 он	10.000₮	2000.03
25.	В.Адъяасүрэн	МУИС, багш	321102	МУИС, Мат, 1983 он	10.000₮	2000.04
26.	Д.Пүрэвсүрэн	МУИС, багш	321107	МУИС, Мат, 1991 он	15.000₮	2000.10
27.	С.Чинэд	Гэртээ		ХААДС, 1968 он	4.000₮	2000.12
28.	Л.Эрдэнэсоял	МУИС, МТСур. Х анги			5.000₮	2001.01
29.	С.Чинэмдцэрэн	МУИС, Мат. анализ тэнхимийн багш		МУИС, Мат, 1958 он	5.000₮	2001.06
30.	Б.Батбаасан	"Космо" компанийн ерөнхий захирал	99115561	МУИС, Мат, 1987 он	1.000.000₮	2003.11
31.	Б.Баясгалан, Б.Баяржаргал	"Олонлог тов" сургууль	324010	Урал ИС, 1978 он УБИС, 1990 он	1.000.000₮	2003.11

50.000-аас доошгүй төгрөг хандивлаасан хүмүүс ба байгууллагад ММО-ын болоод ММН-ийн жил бүрийн цувралуудыг үнэггүйгээр авч байх болно.

Нийгэмлэгийн дотоод данс:

Голомт банк (1 салбар)

2250704 Р.Энхбат

Голомт банк (1 салбар)

Валютын данс:

Гарчиг

Монголын Математикийн 40-р Олимпиадын нээлт дээр	3
ММОХорооны дарга Ц.Дашдоржийн хэлсэн үг	9
Математикийн олимпиадын сүлд дуу	10
ШУ-ны доктор (Sc.D), профессор Х.Дүгэрийн тухай дурсамж	11
Зохиолч болох шахсан нь	12
Ангийн дарга	14
Онцлох бүтээлтэй олны багш	16
Гавьяатны гавьяа мартагддаггүй	18
Хийсэн ажил, хэлдэг үг нь сэтгэлд тодхон	19
буурал багш минь	22
Х. Дүгэр багшийн тухай дурсамж	23
Нөхрийн тухай дурсамж	24
Манай улс ЕБС-ийг 11 жилийн сургалтын тогтолцоонд	
тэр үед шилжүүлсэн бол...	27
Эргэн санахын учир	28
Багш маань урам хайрлаж, номын үрийг тариална.	
Тарьсан тэр л үрнээс нь хойч үе маань	
арвин их эрдмийн ургац хураасаар ажгуу	27
Дүгэр багшаа дурсахуй	28
Дүгэр багш бол Монгол улсын	
албан бус боловсролын «загалмайлсан эцэг»	29
Би багшийнхаа зургийг хоймртоо залдаг	31
Монголын Математикийн XL Олимпиадын	
дүнгийн тухай тайлан	33
Улсын математикийн XL олимпиадын VII ангийн	
III давааны бодлого	36
ММО-40, VIII ангийн III даваа	39
ММО-40, VIII ангийн IV даваа	41
ММО-40, IX ангийн III даваа	46
ММО-40, IX ангийн IV даваа	48
ММО-40, X ангийн III даваа	52
ММО-40, X ангийн IV даваа	55
ММО-40, X ангийн IV даваа	56
ММО-40, Багын багшийн III даваа	60
ММО-40, Багын багшийн IV даваа	62
ММО-40, Дундын багшийн III даваа	64
ММО-40, Дундын багшийн IV даваа	68
ОУМО-45, I сорил	73
ОУМО-45, II сорил	74
ОУМО-45, III сорил	76
ОУМО-45, IV сорил	77
ОУМатематикийн XLV олимпиадад оролцсон тухай	81
Монголын Оюутны Математикийн XII олимпиад	90
Бага ангийн математикийн олимпиад	94
Монголын математикийн Нийгэмлэгийн товч танилцуулга	98
“Төгс Тоо” төвийн тухай	99
Монголын Математикийн Нийгэмлэгт хандив	
өгсөн хүмүүсийн жагсаалт	100