

МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАДЫН ЦУВРАЛ
№30

С.ЦАГААНЫ НЭРЭМЖИТ
МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН
XLI ОЛИМПИАД

УЛААНБААТАР ХОТ, 2005 ОН

ӨМНӨХ ҮГ

Улсын болон Олон улсын математикийн олимпиадад бэлтгэгчид, математикийн төрөлжсөн сургалттай ангийн сурагч, оюутан, багш нар, математик сонирхогч өргөн олонд зориулсан цувралын ээлжит дугаар уншигч Таны гар дээр очиж байна. Тус гарын авлагыг бэлтгэхэд ММО Зохион Байгуулах Хорооны гишүүд, нийслэлийн арван жилийн 1-р дунд сургуулийн хамт олон, МУГБ С.Цагааны үр хүүхэд, МУИС-ийн математикийн ангийн оюутнууд идэвхтэй оролцлоо.

Уг номын талаархи аливаа санал хүсэлтээ МУИС-ийн Алгебрийн тэнхимд ирүүлнэ үү.

$$y(x) = \int f(x)dx$$

МОНГОЛ УЛСЫН ГАВЪЯАТ БАГШ С.ЦАГААНЫ
НЭРЭМЖИТ САН ИВЭЭН ТЭТГЭЖ ХЭВЛЭВ.

Монголын Математикийн ХLI олимпиад

Редактор: Цэрэндоржийн Дашдорж

Хэвлэлийн эхийг бэлтгэсэн: Цэрэндоржийн Навчаа

2006 оны 04-р сард 2000 хувь хэвлэв.

МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАДЫН СҮЛД ДУУ

Нарнаас илчийг нь авч болох уу
 Сарнаас гэрлийг нь салгаж болох уу
 Багш та юу гэж заасан бэ
 Багын нөхөд маань санаж байна уу
 Тоо тоогоо тоолон бодъёо
 Томъёогоор задлан бодъёо
 Олуулаа уралдан бодъёо
 Олимпиаддаа оролцож бодъёо

Орчлонгийн удмыг туулж болох уу
 Одод эрхсийг тоолж болох уу
 Эвклид юу гэж хэлсэн бэ
 Эрхэм нөхөд минь санаж байна уу

Дахилт

Эрдмийн оргилд хүрч болох уу
 Энгүй далайг хэмжиж болох уу
 Суут эрдэмтэн Мянгат өвөөгийн
 Сургаалт үгийг санаж байна уу

Дахилт

Гэрлийн хурдыг давж болох уу
 Тэнгэрийн хаяанд хүрч болох уу
 Дэлхийд алдартай эрдэмтэн Гауссын
 Дэлгэж нээсэн онолыг саная даа

Дахилт



2000 оны Сэлэнгийн
 олимпиадыг зохион
 байгуулагчдын бүтээл

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН ХЛІ ОЛИМПИАДЫН ДҮНГИЙН ТУХАЙ ИЛТГЭЛ

Ц.Дашдорж

Эрхэм хүндэт математикч багш сурагчид аа!
УБ, 1-р сургуулийн захирал ноён Ц.Гүррагчаа!
Мобикомын Ерөнхий захирал ноён Г.Баттөрөө!
МУГ багш С.Цагааны нэрэмжит сангийн тэргүүн Ц.Болдоо!
"Шинэ монгол" сургуулийн захирал ноён Ж.Галбадрахаа!
МУГ багш С.Цагааны төрөл төрөгсөд, үр хүүхэд ач зээ нараа!

Монголын Математикийн 41-р Олимпиад манай нэрт сурган хүмүүжүүлэгч, математикч багш С.Цагааны нэрэмжит болон 2005 оны 05 сарын 05-11-ний хооронд Нийслэл хотноо 1 дүгээр дунд сургууль дээр амжилттай явагдаж дүнгээ гаргаж байна. Энэ удаагийн олимпиадад 21 аймаг, Улаанбаатар хотын нийт 22 багийн 66 бага, дундын багш, 176 сурагчид оролцож нийт 242 хүн оюун ухаан, авъяас чадвараа сорин уралдлаа. Энэ удаагийн олимпиадыг зохион байгуулахад бүхий л талын боломж тусалцаа үзүүлсэн УБ 1-р сургуулийн хамт олон, манай ерөнхий ивээн тэтгэгч Мобиком корпорацийн хамт олон, МУГБ С.Цагааны нэрэмжит сан, түүний үр хүүхэд төрөл төрөгсөд, "Шинэ монгол" сургуулийн захирал Ж.Галбадрах нарт Монголын нийт Математикчдын нэрийн өмнөөс талархал илэрхийлье.

Олимпиадад 8-р ангийн 78 сурагч оролцсоноос УБ 1-р сургуулийн сурагч Б.Хүдэр (багш нь З.Бат-Эрдэнэ) 36 оноогоор 1-р байр эзэлж 8-р ангийн аварга боллоо. 1-р сургуулийн Б.Мягмаржав (багш нь Н.Энхбаатар), Д.Доржсэмбэ (З.Бат-Эрдэнэ) нар тус бүр 35 оноогоор 2-р байрыг, 1-р сургуулийн сурагч Н.Бямбажав (Н.Энхбаатар) 32 оноогоор, Дундговь аймгийн Э.Энх-Амгалан (Ганхуяг) 28 оноогоор, 1-р сургуулийн Н.Гансоронзон (З.Бат-Эрдэнэ) 27.5 оноогоор 3-р байрыг тус тус эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

Олимпиадад 9-р ангийн 44 сурагч оролцсоноос 11-р сургуулийн Б.Анх-Эрдэнэ (Эрдэнэбат) 23 оноогоор 1-р байр эзэлж 9-р ангийн аварга сурагч боллоо. УБ, Монгол-Турк сургуулийн

Б.Энхбат (Б.Батбаясгалан) 21 оноогоор, 1-р сургуулийн Д.Жаргалсайхан (З.Бат-Эрдэнэ) 20.5 оноогоор 2-р байрыг, Увс аймгийн Б.Анхбаяр (Р.Одгэрэл) 15 оноогоор, УБ, Шинэ-Үе сургуулийн сурагч У.Бат-Эрдэнэ (Ж.Батболд), Э.Цогбаяр (Ж.Батболд) нар тус тус 14.5 оноогоор, УБ, "Номун" сургуулийн Э.Алтангэрэл (Эрдэнэ) 14.5 оноогоор 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

Олимпиадад 10-р ангийн нийт 54 сурагч оролцсоноос 1-р сургуулийн сурагч Б.Чандмань (Н.Баянбат) 24 оноогоор 1-р байр эзэлж Улсын математикийн 41-р олимпиадын 10-р ангийн аварга сурагч боллоо. 1-р сургуулийн М.Отгонбаатар (Н.Баянбат) 15 оноогоор, 11-р сургуулийн Б.Энхжин (Эрдэнэсүвд) 14.5 оноогоор 2-р байрыг, УБ, Монгол-Турк сургуулийн Ч.Доржнамжил (Ц.Дашдорж), 1-р сургуулийн Г.Гантулга (Н.Баянбат) нар тус тус 14 оноогоор, УБ, Олонлог Ц.Насанбуян (Уранчимэг) 14 оноогоор тус тус 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

УБ 1-р сургуулийн 8-р ангийн сурагч Б.Хүдэр С.Цагааны нэрэмжит ММО-41-ийн үнэмлэхүй аваргаар тодорлоо.

Улсын Математикийн 41 дүгээр олимпиадад амжилттай оролцсон дээрх нэр бүхий сурагчид, олимпиадад сурагчдаа амжилттай бэлтгэж оролцуулсан багш нар болон сургуулиудын олимпиадыг зохион байгуулах хороо болон нийт математикчдын нэрийн өмнөөс чин сэтгэлийн талархал илэрхийлье.

Багш нарын олимпиадыг бага, дунд гэсэн хоёр ангилалаар явуулсны дотроос дунд ангийн математикийн 38 багш оролцсоноос, "Олонлог төв" сургуулийн багш Б.Баяржаргал 18 оноогоор түрүүлж, УБ, Шинэ Монгол сургуулийн багш Д.Алтангэрэл 17 оноогоор, Орхон аймгийн багш Ж.Батбаяр 16 оноогоор удаах байруудад орлоо.

Бага ангийн багш нарын олимпиадад нийт 28 багш оролцсоноос УБ, "Олонлог төв" сургуулийн багш Б.Намжилмаа 26 оноогоор түрүүлж, УБ, "Эхлэл" сургуулийн багш М.Отгонжаргал 21 оноогоор, УБ, "Олонлог төв" сургуулийн багш П.Чимэг 17 оноогоор удаах байруудыг эзлэв.

С.Цагааны нэрэмжит ММО-41-р Олимпиадын П.Энхболдын нэрэмжит уран бодолтын шагналтнаар МУИС-ийн харьяа Монгол-Турк сургуулийн 9-р ангийн сурагч Б.Энхбат шалгарлаа.

С.Цагааны нэрэмжит ММО-41-р Олимпиадын ангилал тус бүрийн тусгай шагналтнаар УБ, 1-р сургуулийн 8-р ангийн сурагч Ч.Алтан-Өлзий, Хөвсгөл аймгийн 9-р ангийн сурагч П.Нямсүрэн, УБ, Монгол-Турк сургуулийн Г.Очцэцэг, Өвөрхангай аймгийн бага ангийн багш Д.Балжинням, УБ, 1-р сургуулийн багш Д.Бат-Орших нар шалгарлаа.

Багийн дүнгээр аймаг хотуудыг байр эзлүүлэхэд УБ хот дундаж оноо 17, 1-р байр, Орхон аймаг дундаж оноо 9.6-аар 2-р байр, Өвөрхангай аймаг дундаж оноо 9.4-өөр 3-р байранд шалгарлаа.

ММО-41-д 1-р сургууль 9 медаль, "Олонлог төв" сургууль 4 медаль, Монгол-Турк сургууль, Шинэ-Үе сургууль, 11-р сургууль тус тус 2 медаль, УБ Эхлэл сургууль, "Номуун" сургууль, Орхон, Дундговь, Увс аймаг тус бүр 1 медаль авч олимпиадад оролцогчдоо хошуучлан сайхан амжилт гаргалаа.

Манай нэрт математикч Б.Баясгалангийн үүсгэн байгуулсан "Олонлог төв" сургуулиас багш нарын хос аварга төрсөнд Монголын нийт математикчдын өмнөс баяр хүргэе. Математикийн дунд ангийн багш нарын ангилалд 4 дэх удаагаа түрүүлж Далай даян дархан аварга хэмээх эрхэм цолыг хүртэж байгаа "Олонлог төв" сургуулийн захирал Бямбаагийн Баяржаргал бол манай Математикийн Олимпиадын өнгө төрхийг тодорхойлж байгаа энэ цаг үеийн шилдэг математикч гэдгийг тэмдэглэн хэлэхэд нэн таатай байна. Дархан аварга математикч Б.Баяржаргал Таныг энэ жил Мексик улсад болох ОУМО-46-д оролцох Монголын багийн орлогч удирдагч ба дасгалжуулагч багшаар томсилох болсныг ММОХороо баяртайгаар мэдэгдэж байна.

Энэ жилийн 7-р сард Мексик улсын Мерида хотод болох ОУМО-46-ын бэлтгэлд 1-р сургуулийн 10-р ангийн сурагч Б.Чандмань, М.Отгонбаатар, Г.Гантулга, 11-р сургуулийн 10-р ангийн сурагч Б.Энхжин, Монгол-Турк сургуулийн 10-р ангийн сурагч Д.Доржнажил, "Олонлог төв" сургуулийн 10 -р ангийн

сурагч Ц.Насанбуян, 11-р сургуулийн 9-р ангийн сурагч Б.Анх-Эрдэнэ нарыг үлдээхээр Олимпиадын хороо шийдвэрлэлээ.

ОУМО-46-мйн бэлтгэлд багтаж шалгарсан та бүхэндээ амжилт хүсч, Монголынхоо нэрийг дэлхийн тавцанд дуурсгах хүндтэй бөгөөд хариуцлагатай үйл хэргийн төлөө идэвхи чармайлт гарган сайн бэлтгэж амжилттай оролцохыг Монголын нийт Математикчдын нэрийн өмнөөс даалгаж байна.

Эрдэм оюун дэлгэрч Монголд математикчдын оюун ухаан улам хөгжин дэвших болтугай. Анхаарал тавьсан та бүхэнд баярлалаа.

Улаанбаатар хот, 2005.05.10

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН ХLI ОЛИМПИАДЫН БАГИЙН НЭГДСЭН ДҮН

№	Аймгийн нэр	VIII	IX	X	Бага	Дунд	Нийт оноо	Хүний тоо	Дундаж оноо
1	Улаанбаатар	307.5	146.5	137.5	94.5	94.5	780.5	46	17.0
2	Орхон	16	7	0	9	16	48	5	9.6
3	Өвөрхангай	13.5	8.5	1	16	8	47	5	9.4
4	Увс	14.5	15	0	5	9	43.5	5	8.7
5	Дорноговь	8	8	11	15	0	42	5	8.4
6	Дундговь	28	2	0	8	1	39	5	7.8
7	Хөвсгөл	9.5	11.5	1	9	5.5	36.5	5	7.3
8	Архангай	16	0	0	7	7	30	5	6
9	Баян-өлгий	20.5	0	0	7	0	27.5	5	5.5
10	Хэнтий	0.5	7.5	0	14	1	23	5	4.6
11	Ховд	8.5	0	9	3	1	21.5	5	4.3
12	Завхан	0.5	7	0	14	0	21.5	5	4.3
13	Дархан	8	16.5	0	0	1.5	26	7	3.7
14	Өмнөговь	2	2.5	0	9	0	13.5	5	2.7
15	Төв	3.5	0.5	0	7.5	0.5	12	5	2.4
16	Сэлэнгэ	1	0	0	7	2.5	10.5	5	2.1
17	Баянхонгор	1.5	0	0.5	0	8	10	5	2.0
18	Говьсүмбэр	7	0.5	1	0	1.5	10	5	2.0
19	Сүхбаатар	8	0.5	0	0	0.5	9	5	1.8
20	Булган	7	0	0	0	0	7	5	1.4
21	Дорнод	0	0	0	0	0.5	0.5	5	0.1
22	Говь-Алтай	0	0	0.5	0	0	0.5	5	0.1

БАГАХАН НӨХӨРЛӨСӨН Ч БАТ ХОНОГШЖЭЭ

Би Цагаан багшийн удирдлага дор бараг 2 хичээлийн жил ажилласан юм. 1979 онд УБДС-ийг хими биологийн багшийн мэргэжлээр төгсөж ирэхэд Цагаан багш маань хичээлийн эрхлэгч байв. Удирдах бас тэгээд нэр хүндтэй, гавьяат багш болохоор залуу багш нар их "сүрдэж" ханддаг байсан. Хэдий тийм ч багш маань өөрөө маш энгийн, нөхөрсөг, нийтэч хүн тул ажлын бус үед бидэнтэй яг л нэг "зиндааных" шиг ханддаг байлаа. Харин ажлын хувьд хариуцлагагүй байх ялангуяа мэдлэг, мэргэжилдээ муу байвал ёжтой үг хэлж, сургамж өгдөг байв. Тухайлбал: "Та нарт шавь нар чинь харагдаад, юу хийх чинь бодогдоод нойр чинь хүрэхгүй байгаа бол сайн багш болохын л шинж. Харин ... бол ... магадгүй. Анги удирдаж байж жинхэнэ багш болно шүү" гэх мэт ярьж байсан нь санаанд үлджээ. 1980 оны намар 9-р сард манай сургуулийн ахлах ангийн 300 орчим сурагчид, анги удирдсан багш нарынхаа хамт Олон улсын хүүхдийн Найрамдал лагерьт цахилгааны кабель тавих газар шорооны 14 хоногийн томоохон ажил хийсэн юм. Энэ ажлыг Цагаан багш удирдаж байсан бөгөөд тэр үед түүний энгийн агаад зохион байгуулах өвөрмөц арга барилыг нь хир хэмжээндээ л илүү мэдэрч авчээ гэж одоо бодогдоно. Цагаан багшийг мэдэх хүн бүр л түүний олон талын сайхан чанарыг сайн сайхнаар дурсаж, ярьж байдаг болохоор аргагүй л ардын багш байж дээ. Ингээд Цагаан багшдаа зориулж чадан ядан бичсэн бэсрэгхэн шүлгээ сэтгэлийн хадаг болгон өргөн барья.

Сэтгэлийн их өглөгч

Математикийн Цагаан, Логарифм Цагаан гэж
Монголдоо алдартай нэгэнтэй
Маш багахан хугацаанд хамт ажилласан хэдий ч
Мартагдахын арагуй тэрээр сэтгэлд Үлдсэн нь учиртай.

Яагаад гэвэл тэр хүн
Ясны сайн багш байлаа.
Ярьсан тайлбарласан хэлсэн нь

Яах аргагүй ой тойнд хоцордог
Хамгийн хүнд бодлогыг ч
Хялбархан бодох аргад сургадаг
Хэдхэн хормын хугацаанд ч
Хийсвэр сэтгэлгээг нь шалгачихдаг
Заах аргын мастер байлаа.

Заяаны авьяастай хүн байлаа.
Яагаад гэвэл, тэр хүн
Ёстой хүний нөхөр байлаа.
Залуу ахмад ялгахгүй
Энгийн сайхан ярьж
Зам зуурын юмсад
Сэтгэл хувиран өөрчлөгдөхгүй
Жижиг сажиг зүйлийг
Хэзээ ч тоож гоншигнохгүй
Жинхэнэ эр хүн шиг, хүн байлаа.
Яагаад гэвэл тэр хүн
Сэтгэлийн их өглөгч байлаа.

Хошин шогийн мэдрэмжээрээ
Инээд баясал төрүүлж
Хотоос гарч аялахдаа
Цээлийн загас аргадаж
Хорин нэг хориор хожигдсон ч
Одон бөмбөг шигээ цагаахан
Холын холд нөхөрлөмөөр
Сэтгэлийн их өглөгч байлаа.
Математикийн Цагаан, Логарифм Цагаан гэж
Монголдоо алдартай нэгэнтэй
Маш багахан хугацаанд хамт ажилласан хэдий ч
Мартагдахын аргагүй тэрээр
Сэтгэлд үлдсэн нь учиртай.

Нийслэлийн нэгдүгээр дунд
сургуулийн захирал Ц.Гүррагчаа
2001 оны 10 дугаар сарын 21

Бид АНХНЫХ

Ямарч үзэг харандаа, цаас хэрэглэхгүйгээр аль болох богино хугацаанд түргэн сэтгэж, уралдан бодоод, хариуг хэлэх янз бүрийн бодлогыг сурагчдын дунд нээлттэй тавьж, хамгийн түрүүнд зөв хариулсан хүүхдээр бодсон аргыг нь тайлбарлуулж, үнэлэлт өгөөд, хичээлийн үндсэн сэдэвтээ ордог тийм багш, тийм ангийнхан нийслэлийн нэгдүгээр арван жилийн сургуульд байсан юм. Энэ бол С.Цагаан багш, 1961 оны төгсөлтийн түүний даасан 10 а ангийнхан.

Бидний энэхүү чөлөөт сэтгэлгээний хичээл, дасгал нь 5 дугаар ангиас эхэлсэн болохоор бодлогууд нь хамгийн энгийн юм шиг атлаа, сар улирал өнгөрөх, анги ахих тусам өгөгдөхүүн, агуулга нь алхам алхамаар адармаатай болж гүнзгийрсээр сүүлдээ бодлого бодох нь тэмцээний хэлбэрт аяндаа орсон юм. Ингэсээр манай ангийн хүүхдүүдийн дунд математикийн хичээл тэмцээний хэлбэрээр гол төлөв явагдах болж, контроль хийхэд хэд хэдэн вариант бодож хүүхэд бүр өөрийгөө сорихыг хичээдэг болсон.

Багш ч биднийг "өдөж" аль болох олон вариантаар контролийн ажлыг явуулна. Өөртөө оногдсон вариантыг хамгийн оновчтой, дөт аргаар бодоогүй юмуу, ялихгүй ч гэсэн алдаа гаргасан байвал, бусад хичнээн ч вариантыг, ямар ч оновчтой аргаар бодож шийдлийг зөв гаргасан байхад, багш зөвхөн үндсэн вариантаар үнэлгээ өгнө. Тиймээс хүүхэд бүр өөрийн үндсэн вариантыг жин тан болгоогүй байж, бусдын вариантыг бодох нь зөвхөн өөрийгөө сорьсон хэрэг гэдгийг ойлгоно, багш ч үнэлгээ өгөхгүй атлаа өөрийнхөө чансааг ямагт сорьж байх хэрэгтэй гэж хэлээд, жуумалзан инээх нь битүүхэндээ биднийг дэмжиж байгаагийн илэрхийлэл болдог учраас хүүхэд бүрийн сонирхлыг улам татаж, хүсэл эрмэлзлэлийг оргилуулан дэвэргэх мэт болдогсон.

С.Цагаан багш хичээлийн үндсэн сэдвийг заахдаа сурах бичиг, үзүүлэн таниулах гэх мэт аар саар зүйлтэй ер зууралдахгүй. Ангид орж ирмэгцээ биднийг тойруулан хараад, шууд л самбарын талбайн зүүн дээд талд өгөгдөхүүнийг, түүний яг харалдаа доод талд бодож олох зүйл буюу асуултыг бичиж шугам татан хайрцаглана. Тэдгээрийн баруун талд үлдээсэн нилээн том зайд

бодлогыг бодох арга буюу томъёог тодоос тод маш цэвэрхэн бичиж тайлбарлан түүний задаргаа ба хураангуйллыг өөрөө бодож үзүүлээд, самбарт бичсэн тоон өгөгдөхүүнүүдийг хүүхдүүдээр хэлүүлэн үйлдлүүдийг бичсээр нэг мэдэхэд хариу буюу шийдэлд маш амархан хүргэж төгсгөнө. Дараа нь ёс юм шиг хэн самбарт гарах вэ гэж асуугаад, гараа өргөсөн хүүхдүүдээс хэн нэгийг дуудан гаргаж, ижил төсөөтэй бодлого өгч, өмнөхийн адилаар зохих үйлдлүүдийг өөрийнхөө оронд гүйцэтгүүлээд, үнэлэлт өгч дүгнэнэ. Ийм байдлаар дахиад бодлого бодох сонирхол оволзож, хорхой хүрэх үед ямар ном, сурах бичигт ийм төрлийн бодлого байгааг хуудас, дугаараар нь хэлж өгөөд, хэн олон бодлогыг хамгийн хялбар аргаар зөв бодсоноо, хэзээ ч хамаагүй өөртөө үзүүлэхийг хүснэ. Яг тэр үед завсарлах хонх дугарч таарна. Ингэж заалгасан томъёо, бодсон бодлого нилээд хугацаа өнгөрсөн хойно ч нүдэнд харагдаж, санаанаас барагтай бол гарахгүй тогтдог үлдэцтэй байсан учраас манай ангийнхан жигдхэн сурлагатай байлаа.

Багш дараагийн хичээлийн эхэнд, өмнө өгсөн даалгаврын дотроос хамгийн адармаатай аль нэг бодлогыг нийтийн дунд тавих мөртлөө, хэн нэгийг нэр заан дуудаж самбарт гарган томъёоны гаргалгаа задаргаа болон хураангуйллыг хийлгээд, харин бодох үйлдлийг өөр хүүхдээр гүйцэтгүүлж, хариу буюу шийдлийг гаргуулах явцад хэн, хичнээн бодлогыг яаж бодсоныг үндсэндээ шалгахдаг байсан юм.

Багш үүнийгээ бидэнд сургалтын төлөвлөгөөний гадуурхи программ гэж хэлдэг байсан юм.

Ингэж нэг талаас С.Цагаан багшийн санаачлага, нөгөө талаас хүүхдүүд бидний сонирхол, хүсэл эрмэлзэл нэгэн цэгт давхцаж, 7 дугаар ангиас эхлэн ангийн математикийн тэмцээнийг ямар ч дуулиангүйгээр жил бүр хийх болсноос санаа авч, улмаар нэгдүгээр сургуулийн, цаашлаад нийслэлийн сурагчдын дунд математикийн тэмцээн ямар нэг хэмжээгээр явагдаж эхэлснээр манай оронд математикийн олимпиад зохиогдох болсны эхлэл, үндэс суурь тавигдсан гэлтэй.

Тэгээд ч бид 8,9,10 дугаар ангид байхдаа сургуулийн болон

нийслэлийн сургуулиудын дунд зохиогдсон математикийн олимпиадад ангиараа шалгаран оролцож, эхний байруудад шалгарч багшийгаа баярлуулдаг байж билээ. Мөн физик, химийн олимпиадуудад ч шалгаран түрүүлдэг байлаа.

Иймээс ч биднийг Цагааны ангийнхан гэж манай сургуулийнхан төдийгүй, нийслэлийн сургуулиуд, Гэгээрлийн яамныхан нэрлэдэг байсан юм.

Бид сургуулиа төгсгөхдөө дээд тоо математикийн чухал сэдвүүд болсон олон үл мэдэгдэхтэй квадрат болон биквадрат тэгшитгэл, функц, прогресс, олонлог, интеграл, магадлал ба харьцангуйн онол, алгебр геометр тригонометрийн хавсарсан бодлого бодох, ямар ч адармаатай томьёоны задаргаа ба хураангуйллыг оновчтой хийж хэрэглэгээ үүсгэх талаар дээд сургуулийн нэгдүгээр курс төгссөн оюутны төвшинд хүрсэн байснаа их дээд сургуульд орсон хойноо мэдэрч, Цагаан багшдаа баярлан биширч байсан хүн олон гэдэгт эргэлзэхгүй байна.

Учир ийм болохоор С.Цагаан багш бол эх орондоо математикийн олимпиадыг анхлан санаачлагч, үндэс суурийг тавигч, манай улсын шилдэг математикчийн нэгэн төдийгүй, олон арван эрдэмтэн, математикчдыг бойжуулж сургасан алдартай сурган хүмүүжүүлэгч гавьяатай багш гэдэг алдар нэрээр Монгол улсын боловсрол, шинжлэх ухааны түүхэнд мөнхлөгдөх нэгэн билээ.

Үүнийг бидний үеийнхэн, биднээс өмнөх ба дараачийн үед С.Цагаан багшаар хичээл заалгаж байсан олон хүн илэрхийлэн батлаж, санал нэгдэх байхаа.

Орчин үеийн ойлголтоор бол бид үнэн чанартаа анхны математикийн ангийнхан, санаачлан хэрэгжүүлэгч нь С.Цагаан багш байсан юм.

Нийслэлийн арван жилийн нэгдүгээр сургуулийн 1961 оны төгсөлт, 10 а ангийнхан: Н.Дагвадорж, Ц.Шархүү, Ж.Алтангэрэл, Аюуш, Ж.Аюушжав, Д.Баатардорж, Р.Баасан, Д.Бадамгарав, С.Батболд, Х.Бадарч, Ц.Бараадий, Ц.Ганболд, Ч.Гомбо, Дэ.Жаргал, Ду.Жаргал, Л.Мижиддорж, Д.Минжүүр, М.Оюунбилэг, Н.Сандуйжав, Д.Сэлэнгэ, Б.Туул, Д.Туяа, Ж.Уртнасан, Б.Цэрэндондог, М.Цэцэгээ, Д.Цогт, Г.Шархүү, Энхжаргал, Ч.Эрдэнчимэг.

Биднээсээ үүрд одсон Эрдэнэтуяа, Ч.Дамбадорж, Г.Цэрэндулам, Н.Чанцал нар маань санал нэгдэх байсан нь чинхүү үнэн болой.

ТЕРПЕНЬЕ И ТРУД - ВСЁ ПЕРЕТРУД

Цагаан багш был создателем и хранителем педагогического мастерства. Быть человеком - значит быть самостоятельным в стремлении к разумным целям.

Для меня С.Цагаан багш был честный, умный, прямой, строгий и скромный. С Ним работала я несколько лет. В памяти особенно остался математический 8 в, который Он принял и был классным руководителем в 1977 году. Ученики этого класса пришли из разных школ. С первого урока я поняла, что знания у учеников отсутствуют. Было очень трудно проводить занятия, ребята не понимали меня, я не знала с чего начинать.

Говорила я Цагаан багш, не могу работать в вашем классе. Ваш класс не научился выполнять домашнее задание. Цагаан багш говорил мне: Ну потерпи одну четверть, они будут учить и выполнять все твои требования по домашнему заданию. Цагаан багш верил ребятам и понимал меня, что у нас одна цель - улучшить и удвоить знания по русскому языку. Цагаан говорил мне: Терпи, это будущие математики, умные, сильные ребята. Всё будет очень хорошо. Только не всё сразу. Я ждала, терпела улучшения и это время пришло. Цагаан багш говорил: Терпенье и труд - всё перетруд. Плохих учеников не бывает. Надо трудиться чтобы их учить. Это призывание учителя. Надо так работать чтобы когда ученикам плохо мы шли им на встречу, а когда нам хорошо они шли к нам.

Одновременно он проводил беседу с ребятами по поводу русского языка. Да улучшений были заметны. Ребята стали приходить в школу в 6.30, 7 часов утра. Они, читали, учили слова, рассказывали из газеты Новости Монголии. Цагаан багш радовался и спрашивал с хитрицей: Ну, как мои ребята. Пока стало лучше, говорю я. А он говорит нет, это уже хорошо. Я не знала, что Цагаан багш говорил с ребятами. Это всё было

тайно от меня. Он так умело и заботливо объяснил ребятам, значимость русского языка. Ребята поняли сознательно. Своим одарённым умом и великодушием ребята - ученики закончили школу и прошли конкурс с отличием.

Цагаан багш был большой шутник. Он хорошо поёт и знал некоторые русские частушки. Как-то раз после родительского собрания он обратился ко мне и говорит: Орсоо, родители говорят почему не учить ребят петь русские частушки и сам пел самые смешные частушки и оба рассмеялись.

Цагаан багш работал заучем, но с классом не расставался. А как остроумно составлял расписание уроков. Он знал, какие предметы поставить на первые часы, а какие на последние часы уроков. Цагаан багш был требовательным, благородным человеком. Очень жаль, что так рано ушли из жизни учителя одарённые талантом: Цагаан, Шарав, Цэрэннадмид, Гомбодаш, Гомбосүрэн, Базаргочоо... Вечная память живет в наши сердцах.

Любовь Михайловна Семёнова

САЙН ХҮМҮҮНИЙГ НЭХЭН ДУРСАХУЙ

Миний бие Улсын гавьяат багш Цагаан агсныг эдүгээгээс жараад жилийн тэртээгээс мэдэх юм.

Дэлхийн хоёрдугаар дайн шувтрах тийшээ хандаж байх үед бид Улаанбаатар хотын багшийн сургуульд орж байлаа. Тэр үед багшийн сургууль бага ангийн багш бэлтгэдэг жинхэнэ анги, дунд ангийн багш бэлтгэдэг факультет гэж хоёр хэсэгтэй байсан.

Цагаан Улаанбаатар хотын хоёрдугаар дунд сургуулиас багшийн сургуулийн тоо-физикийн факультетад орсон байв. Тэдний ангийнхнаас Цагаан, Мижиддорж, Нэргүй болон Түдэвбазар гээд хэдэн банди ердөө ч салдаггүй анд найз нар байсан санагдана. Тэр үед Цагаан 16-17 настай, нуруулаг, цайвар царайтай голдуу дугуй унаж явдаг жаал хүү байсан нь эгээ л өчигдөр шиг сэтгэлд буух юм.

Тэгтэл түүнээс хойш бүтэн жаран улиран өнгөрч, тэр үед багшийн сургуулийн сурагч асан бидний ихэнхи маань аль хэдийн нийлсэн өвгөн эмгэн болчихжээ. Энэ хорвоо дээр хүмүүний амьдрал яасан богино юм бэ.

Багшийн сургууль төгссөнөөс хойш Цагаан бид нар бараг дөч шахам жил ойрхон, бараа бараандаа ажиллаж, магтуулах, зэмлүүлэхийг тэнцүүлэн хүртэж, алба амины ажлыг залгуулж явахдаа их ч замыг туулж, их ч юм үзэж дээ. Тэгэхдээ бид улсын ажлыг бүтээчих юмсан, өмнөө тавьсан зорилгоо биелүүлчих юмсан гэсэн нэгэн үзүүрт сэтгэлээр хамтран ажиллаж байсан билээ.

Нэгэн хамт олонд багтаж, айл саахалт аж төрж, үр хүүхдээ өсгөж, өтгөсөө асрамжилж хорвоогийн олон өдөр хоногийг ардаа орхисны хувьд Цагаан агсны ямар хүн байсныг мэднэ.

Юуны өмнө Цагаан бол сайн багш байсан. "Тооны Цагаан", "Логарифм Цагаан" гэж алдаршсан нь учиртай. Тоо бодлого заах өвөрмөц содон аргатай байсныг багш нар болон шавь нар нь одоо хүртэл дурссаар буй.

Цагааны тоо заах аргын онцлогийг тэр үед манай боловсролын арга зүйч нар шинжилж судлаад, олон эрдэм шинжилгээний бичиг болон товхимлуудад оруулсан байдаг. Бодлогыг яаж олон янзаар бодох вэ гэдэг санааг сурагчдад өдөөж өгдөг байсан шиг байгаа юм. Бодлого бодоход загварчлах ба хэвшмэл арга хэрэглэхэд дургүй байсан учраас бүтээлч санаачлагад хүүхдийг сургахыг зорьдог багш. Тоо бодлогод сайн шавь нартаа тун хайртай, тэднийгээ магтаж, тэднээрээ бахархаж явдаг.

Хүүхдүүдийн тэгтлээ дурлаад байдаггүй болж өгвөл холхон шиг явахыг боддог тооны хичээлд олон хүүхдийг дуртай болгож оюуны мэдлэгийг нь нээсэн. Тооны хичээлд хэтэрхий үнэнч, түүнийгээ цээжээрээ хамгаалдаг, заримдаа тоглоом шоглоомоор тооны хичээлээс бусад ямар хичээл байхав гээд алиалдагсан.

Цагаан зөвхөн багш байгаагүй. Хичээлийн эрхлэгч, заах аргын нэгдлийн ахлагч, элдэв компанит ажлын комиссын дарга гээд олон үүрэгт ажлыг олон жил хийж ирсэн.

Залуу багш нарт багшлах арга барил ур дүй эзэмшүүлэх яв-

дал бол түүнд ноогддог нэг том ажил байсан.

Цагаан зөвхөн сайн багш байгаагүй, сайн хүн, сайн анд нөхөр, сайн хань, сайн эцэг, сайн хүргэн байсныг нь мэднэ.

Цагаан заяаны ханьтайгаа идэр залуудаа учирч олон сайхан үр хүүхдээ өсгөн хүмүүжүүлсэн хүн. Манай зарим багш бусдын хүүхдийг хүмүүжүүлээд замыг нь заагаад өгдөг атлаа өөрийнхөө үр хүүхдийг тэр хэмжээнд хүргэж чадахгүй явдал амьдрал дээр тохиолддог л үзэгдэл.

Цагаан бол шавь нараа ч, үр хүүхдээ ч гарамгай сайхан хүмүүжүүлсэн билээ.

Цагааны хүүхдүүд цөм онц сурдаг, улмаар өндөр боловсрол эзэмшин, эрдэм номын ариун замд сэтгэл шулуудсан иргэд болжээ.

Цагаан тамирчин хүн. Түүнд оролцохгүй, сонирхохгүй биеийн тамир спортын төрөл бараг байхгүй. Шатар, даам, одон бөмбөг, гар бөмбөг гээд олон тэмцээнд оролцож сургуулийнхаа нэр нүүрийг тахалж явсан удаатай.

Зан аашийн хувьд ер нь хошин, шогч, ёжтой, наргианч, заримдаа марзан ч гэмээр зантай. Уурлаж бухимдаж, хараал зүхэл урсгаж, хэрэлдэж байхыг нь би л хувьдаа үзээгүй сонсоогүй юм байна. Ер нь түүнтэй нэг баг болж ажиллахад үг хэлээ амархан ололцдог, ажил ч хялбар бүтдэг байсан нь түүний хөнгөн зугаатай аашинд байсан болов уу. Энгийн үед алиа хошин боловчиг албаны цагт бол тун зарчимч, аливаа асуудал хэлэлцэхэд ажил хэрэгч бөгөөд голыг нь олоод хэлчихдэг, шүүмжлэлтэй хандаж чаддаг. Ер нь сүр бадруулан дөвчигнөх, сэтгэлийн хөөрлөөр асуудал шийдэх, онгирч сагсуурахад дургүй, зүгээр эвтэйхэн ёжлоод, хошигноод өнгөрөөж чаддаг байна.

Цагаан сайн багшаас гадна хамт ажиллаж байгаа хүмүүстээ түшигтэй, тулгууртай, хандсан цагт нь тусалж чаддаг сайн найз нөхөр байжээ. Та нар чинь цалингаа ч бүрэн бодуулаад авч чаддаггүй амьтад шүү дээ гээд биднийг шоглодогсон. Зуны амралт эхлэхээр хууль эрхийн мэдлэгээр маруухан мань мэт нь амралтын мөнгөө Цагаан, Шарав хоёроор бодуулж санхүүд очин гомдол үүүсгээд дутуу бодсон хөлсөө нөхөн авч бөөн баяр болж байх жишээтэй.

Цагаан багшийн хувьд ч хүний хувьд ч ийм сайн хүн байсан болохоор Монгол Улсын Гавьяат багш хэмээх алдар цолыг түүнд хүртээсэн юм. Түүний хөдөлмөрийг үнэлсэн энэ өндөр үнэлгээ нь нэгдүгээр суургуулийн хамт олны амжилтын үнэлэлт байсан учир бид нар машинд баясан түүгээрээ бахархаж байлаа.

Даанч Цагаан маань ид бүтээн туурвих үедээ, эр хүний хувьд идэр гэж хэлж болох насандаа өөд болж, эрчимтэй хөдөлмөр нь тасарсан нь харамсалтай.

Алт эрдэнэс удах тусмаа улам гялалзах лугаа нэгэн сайн хүмүүн нөгчивч буянт мөр нь улам тодорч, үр хойчис нь үйлсийг нь залгамжилдаг ажгуу.

Сайн хүмүүнийг олон жилийн хойно нэхэн санаж өчүүхэн дурьдатгал бичсэн 1946-1981 онд 1-р сургуулийн багш асан

Я.Намсрайжав

ТА ӨӨРИЙНХӨӨ ХАМГИЙН ХАЙРТАЙ БАГШИЙГ НЭРЛЭНЭ ҮҮ

Надад ямар л эрдэм мэдлэг байна тэр бүхэн зааж сургасан багштай салшгүй холбоотой болохоор олон хүний нэрийг хэлэх нь дээ. Гэхдээ эрдэмтнэ докторууд, дэлхийд нэртэй академичдын нэрээр гайхуулаад яах вэ.

Хэрвээ зургадугаар ангийн сурагч Чадраа тооны багш С.Цагааны шавь болоогүй бол Ломоносовын нэрэмжит Москвагийн Их Сургуулийн хаалгыг татах эсэх нь болзолгүй байсан гэж би боддог.

ШУА-ийн ерөнхийлөгч Б.Чадраа

ЦАГААН БАГШИЙН "УЯАНЫ МОРЬ" – БИ АЗТАЙ ХҮН

Хэд хоногийн өмнө Цагаан багшийн хүү Болд утсаар ярьж "Бид аавын нэрэмжит математикийн олимпиадад зориулж ном

хэвлүүлэх гэж байгаа, та юм бичиж өгөх үү?" гэхэд нь би үнэхээр баярлан хүлээж авлаа. Бидэнд тооны хичээл зааж, тоо бодуулан уралдуулж, тооны олимпиадад бэлтгэж, түрүүлэхэд хамт баярлаж урам хайрлаж байсан ачит багшийнхаа талаар юу бичих билээ гээд бодоход багшийн маань дүр миний хүүхэд байх үеийн тэр л хэвээр тодорч сэтгэлд үлдсэн олон сайхан дурьдатгал төрж байна. Үүнийг бичвээс өнөөгийн хүүхэд залуус хэр сонирхохыг сайн мэдэхгүй ч Цагаан багш гэж чухам ямар хүн байсан бэ гэдгийг ойлгох, бас багш сурагчийн хооронд үүсдэг оюун сэтгэлийн нандин холбоос болон багшийн суулгасан эрдэм хүний ажил амьдралыг хэрхэн залж чиглүүлж байдаг талаар нэгийг ухаарахад тустай байж магадгүй гэж бодлоо.

1958-1968 онд би 10 жилийн 1 дүгээр дунд сургуульд суралцаж төгссөн. Намайг сурагч байхад сургуулийн захирал Гомбосүрэн, бага ангийн хичээл эрхлэгч Цэрэннадмид, дунд ангийнх Осор багш байв. Бага ангид Дашцэрэн, дунд ангид Содномпэлжээ, монгол хэлний буурал Цэрэндулам, тооны Амарсанаа багш нар анги даасан багш байв. Би нийгэм судлалыг Гомбосүрэн, түүхийг Намсрайжав, Цэнджав, монгол хэлийг Цэрэндулам, Осор, тоог Цагаан, Шарав, Гомбожав, Амарсанаа, физикийг Дагва, химийг Ламзав, Нэргүй, Давааням, газарзүйг Дэжидмаа, Дэжид, орос хэлийг Цэрэндулам, Зулхүү, биеийн тамирыг Шарав багш гээд тухайн үеийн хамгийн л эрдэм чадалтай, шилдэг манлай багш нараар заалгасан үнэхээр азтай хүн шүү. Эдгээрийн олонхи нь Монгол улсын Гаъяат багш алдар цолтон болсон.

Цагаан багш биднийг тоо бодох дуртай болгосон. Багш шинэ хичээлээ заагаад дараа нь тоо бодуулдаг. Тэгэхдээ биднийг уралдуулж тоо бодуулдаг байсан. Хамгийн түрүүнд зөв бодож багшдаа үзүүлж "зөв байна, сайн байна" гэдэг үгийг сонсохын тулд бид уралддаг байлаа. Энэ нь биднийг анхаарлаа төвлөрүүлэх, хурдан бодож сэтгэх дадалтай болгосон гэж би боддог. Цагаан багшийн хичээл дээр хэн ч үймүүлдэггүй байсан. Багш нь сурагчийг "цэнэглэж, асааж", сурагч нь багшаа "биширч хүндэлж", багш сурагч хоорондоо "богино" холбоотой харилцаж байхад хичээл илүү сонирхолтой, өгөөжтэй, сургалтын чанар ч жигд

сайн байдаг байх. Бид тоог дууриаж боддоггүй, утгыг нь ойлгоод аргыг нь өөрсдөө олохын тулд хичээдэг байсан. Заримдаа Цагаан багш шинэ теоремийг шууд заадаггүй, тайрбарлаж өгөөд биднийг батлаж гарга гээд 10-15 минутын хугацаа өгөөд суулгадаг байсан. Энэ нь тухайн үедээ сурагчдад өөрийгөө шалгаж сорих, хүчээ үзэх боломж олгож байснаараа маш их сонирхол төрүүлдэг байсан. Би нэг л мэдэхэд бодлогын хураамжаас хамгийн хүнд бодлогыг түүж бодох дуртай, зав чөлөө л гарвал тоо боддог болсон байсан.

Ер нь тоо бодох нь яг нэг зүйлд чиглүүлж анхаарлаа төвлөрүүлэх, хурдан бодох, хийсвэр сэтгэх, юмны учрыг олох гэж тууштай оролдох зэрэг зан чанарыг төлөвшүүлдэг байх. Үүнд багш, сургуулийн орчин маш чухал. Манай 1 дүгээр сургууль бага ангиас, бүр 1 дүгээр ангиас эхлээд хүүхдүүдийг төлөвшүүлэх, харилцааны соёлтой, зөв хүмүүжилтэй, анги танхимд сахилгатай, орчин тойрон нь цэвэр саруул байхад анхаардаг байсан. Үүнд Цэрэннадмид багш тун их үүрэг гүйцэтгэсэн гэж би боддог. Хичээлийн завсарлагааны үеэр ч нэг их хашгирч шуугиад байдаггүй байсан. Одоо зарим нэг сургуулиар ороход маш их шуугиантай, багш нар нь ч, сурагчид нь ч ядрахаар байх юм. Ийм нөхцөлд хүүхдүүдийн анхаарал хэрхэн төвлөрөх билээ. Ер нь эрдэм ном сургаж буй сургуулийн орчин цэвэр саруул, анги танхим шуугиангүй байх нь түүнд тавигдах хамгийн эхний шаардлага байх ёстой гэж би боддог.

Цагаан багш өөрөө шатар, ширээний теннис сайн тоглодог, сурагчидтайгаа ч тоглодог, энгийн харилцаатай, олон үггүй, хэлсэн цөөн үг нь оновчтой, юм бодогдуулдаг байсан. Багшийг дууриагаад би ширээний теннис, шатар тоглож сурсан. Нэг удаа намайг бас шатрын тэмцээнд ор гээд Пионерийн ордон руу явуулж байсан. 8 дугаар ангиа төгсөөд намар хичээлдээ ирсэн чинь "Чи тооны ангид ороорой" гэж Цагаан багш хэлсэн. Би хуучин ангиасаа салахгүй гээд "Багшаа би ормооргүй байнаа" гэсэн чинь намайг нэг их айхтар хараад "тэгвэл чамайг 9 дүгээр ангид оруулахгүй" гэхээр нь би айгаад тооны ангид орж билээ. Сүүлд бодоход багшийн зөв байсан. Тооны ангид орсноор ту-

хайн үеийн их, дээд сургуулийн хамгийн шилдэг багш Цэрэндулам, Дүгэрээ, Намсрай, Пүрэв нараар геометр, тригнометр, мат. анализ, физик заалгасан. Энэ нь дээд сургуульд суралцахад, улмаар мэргэжлээрээ ажиллахад маш сайн суурь болсон.

Цагаан багш биднийг тооны олимпиадад бэлтгэн "уядаг" байсан. Тэгэхдээ одоогийнх шиг хүүхдийн гэрийн даалгаварт хэдэн зуун тоо өгч шахдаггүй, эсвэл хэдэн хүүхдийг ялгаж аваад тусгай цаг гаргаад олон өдрөөр нэмэлт хичээл хийгээд байдаггүй. Ердийн хичээлийн явцад бүгдийг хамруулж, сурах бичигт байгаагаас өөр, сонирхолтой бодлого бодуулдаг, тэгээд хотын олимпиадын өмнө анги, сургуулийн шалгаруулалт хийдэг. Шалгарсан хэдэн хүүхдийг 2-3 удаа цуглуулж цөөн тоо бодуулаад, хэн яаж бодсоныг яриулж шинжлээд, зөвлөгөө өгөөд л олимпиадад оруулдаг байв.

Би 5 дугаар ангиас л хотын тооны олимпиадад орсон. 6-10 дугаар ангид дараалан хотын аврага болж байсан. 7 дугаар ангид байхдаа өвдөөд сар гаруй эмнэлэгт хэвтсэн юм. Эмнэлгээс гараад хичээлд орсон анхны өдөр "Олимпиадын шалгаруулалтанд орох сурагчид хичээлийн дараа үлдээрэй" гэж зарласан. Би ч хичээлээс нилээд хоцорсон тул түүнд орохгүй гэж бодоод шатаар бууж явтал Цагаан багш тааралдаад "Чи шалгаруулалтанд орохгүй явах гэж байгаа юм уу?" гэхээр нь "Би бодож чадахгүй байхаа" гэсэн чинь "Үзээд л алдахгүй юу" гэсэн. Тэгэхээр нь би "Багш надад итгэж байна даа, би чадахгүй л байхдаа" гэж бодоод их л итгэл муутай буцаж ороод шалгалтын бодлогуудыг хичээж бодсон. Үнэхээр миний хоцорсон, үзээгүй зүйлүүд байсан. Дүн гаргахад би хамгийн сайн бодсон тул сургуулиасаа шалгарч хотын олимпиадад ороод тэндээ түрүүлсэн. Хэрэв тэр үед Цагаан багш тааралдаж намайг оруулаагүй бол би тэр жил өнжих байсан.

Намайг сурч байхад улсын олимпиад зөвхөн 10 дугаар ангийнхны дунд явагддаг байв. 1968 оны улсын олимпиадад анх удаа магадлалын бодлого орсон бөгөөд тэр үед магадлалыг ердийн ангид ч, тооны ангид ч үздэггүй байсан юм. Би магадлалын бодлогыг гүйцэд бодож чадалгүй 2 дугаар байранд орсон. Дараа нь

манай ангийн Туул, Санчир, Жигжидсүрэн, бас өөр сургуулиас Батнасан, Жигмэддорж, Гэндэндорж, Мягмар нартай хамт наймуулаа Москва хотноо болсон олон улсын 10 дугаар олимпиадад оролцсон. Биднийг Дүгэрээ, Санжмятав багш дагуулж явсан. Тэр олон орноос ирсэн сурагчдын дунд ганцхан эмэгтэй байсан, тэр нь Монголоос ирсэн гээд намайг тайзан дээр дуудаж тусгай диплом гардуулж байсан. Бид бүгд л 3 дугаар зэргийн дипломтой ирцгээсэн.

10 жилийн сургуулиа төгсөөд би тухайн үеийн ЗХУ-ын Ленинград хотод ус цаг уурын дээд сургууль төгсч цаг уурч инженерийн мэргэжилтэй болсон. Дараа нь сансрын хиймэл дагуулын ба газрын мэдээлэл ашиглан хөрсний чийгийг тодорхойлох аргазүй гаргаж, программ хангамж зохиож тоо, физикийн ухааны дэд докторын зэрэг авсан.

Ээж маань тухайн үед 5 дугаар сургуульд тооны багш байлаа. Математикийн сургалт, Квант гэдэг орос сэтгүүл захиалдаг, тэр сэтгүүлүүдэд сонирхолтой бодлогууд байдаг, түүнийг нь би боддог байсан. Тэр сэтгүүлээс нэг бодлогыг би бодох гэж нилээд хэдэн өдөр үзээд болохгүй болохоор нь Цагаан багшаас асуухад "Чи өөрөө бод, чадна" гэсэн. Би зав гарах бүр л нөгөө бодлогоо оролддог, бүр оюутан болсон хойноо ч оролдсоор, аргын нь олж чадахгүй явсаар 5 жил болсон. Нэгэнт л Цагаан багш намайг чадна гэж хэлсэн болохоор хэнээс ч асуугаагүй, өөрөө аргыг нь олох ёстой гээд л үзээд байсан. Тэгээд бүр 4 дүгээр курст орсон жилээ Ленинград руу онгоцонд суугаад нөгөө бодлогоо бодож явсан чинь миний хажууд сууж байсан нэг орос хүн надаас "Чи юу бодоод байнаа?" гэж асуухад нь би түүнд бодлогоо хэллээ. Тэгсэн тэр хүн "Би бас бодож үзье" гээд нилээд хугацааны дараа "бодчихлоо" гэсэн. Би бүр гайхаад "та ямар хурдан бодов оо" гэсэн чинь "чи ч амархан бодно, гагцхүү нэг зүйл дээр л чи гацаад байж" гээд надаас нэг асуулт асуунгуут миний толгойд гэнэтхэн зурс хийгээд би нөгөө бодлогоо бодчихсон. Би бараг л амьдралынхаа зорилгыг биелүүлчихсэн юм шиг учиргүй их баярласан. 5 жил бодож чадахгүй байсан энгийн энэ бодлого надад их сургамжтай санагддаг юм. Үүнийг математикийн арга

ухаанаар биш, амьдралын энгийн логик, тэгээд бас орос хэлний ганц, олон тооны ялгааг харж бодох ёстой байсан юм билээ.

Тоо бодоход ухаантай болдог гэж олон хүн боддог, би ч бас тэгж бодож эндүүрч явсан. Харин ном сурах бичиг хийж, хэдэн мундаг өвгөчүүлтэй хамтарч ажиллаад "Тоо бодвол арга сурдаг юм байна. Жинхэнэ ухаан суулгадаг нь Монгол хэл юм байна" гэдгийг ухаарч ойлгож авсан. Монгол хэл бол үнэхээр аугаа баялаг, гүн ухаарлын хэл юм байна лээ шүү. Хэлний мэргэжлийн хүн биш боловч Монгол хэлний сурах бичиг хийхсэн гэж мөрөөдөж явдаг.

Багаас багш нараараа заалгаж сурч эзэмшсэн тоо бодох дуртай тэр л зангаараа агаар мандал, хөрс, ургамалд явагддаг физик, биофизикийн үзэгдэл, тэдгээрийн хөдлөлзүй, харилцан үйлчлэлийн мөн чанарыг ойлгох, ойлгож мэдсэнээ мэдээллийн технологт оруулан хэрэгжүүлэх гэж өнөөг хүртэл ажилласаар 30 гаруй жил болжээ. Эргээд бодоход би ер нь аз завшаантай хүн шүү. Хүний амьдрал бүхэлдээ л сургууль юм. Сургуульд сайн багш хэрэгтэй. Ус, цаг уурын З.Батжаргал, Ш.Жадамбаа, Д.Түвдэндорж, Б.Мягмаржав, М.Бадарч, С.Сангидансранжав, Д.Цээсдролцоо, Ж.Цогтоо, Б.Жигмэддорж, НИК хувьцаат компаний Ж.Оюунгэрэл, Ц.Багмид, эрсдэл судлах ажлын хэсгийн эрдэмтэн судлаачид Н.Тогтох, Н.Маньбазар, Г.Жамсранжав, Ё.Баяр, А.Хүчит, Г.Бизъяа, Д.Авирмэд, Р.Баатар, малчин, тэнгэр шинжээч Д.Бор, Дашдорж, хөдөлмөрийн баатар хоньчин Дагва, малчин Баярбат, ном хэвлэлийн Л.Түдэв, Г.Амар, Бямбажав, Ловор, Лхаахүү, Ахмет, Алтанцэцэг, Иргэний хамгаалалтын газрын (хуучин нэрээр) О.Үржин генерал, Ш.Болдбаатар, Дамдин, Батчулуун хурандаа гээд олон сайхан эрдэмтэй, чадалтай хүмүүстэй хамтарч ажиллаж байсан, одоо ч тэднээс, хийж бүтээснээс нь суралцсаар явна. Зайнаас тандан судлалын төв, Мэдээллийн технологийн Үндэсний паркийн залуусаас ч суралцаж байна.

Цагаан багшдаа хэлэх үг: Уугуул 1 дүгээр сургууль, тавыхаа тавьж өгсөн тэр л суурь мэдлэг, эрч хүчээ хадгалсаар, баяжуулсаар, хорвоогийн үнэнийг таньж мэдэх, Монгол улсдаа байгалийн гамшгийн эрсдлийг бууруулах, Цахим сум байгуулахад

хувь нэмэр оруулах санаа зорилготой, мөрөөдөлтэй, түүндээ хүрэх тэмүүлэл эрмэлзлэлтэй зүтгэсээр хичээсээр, өөрөө өөрийгөө "уяд", заримд нь уяулаад, заримыг нь "уяд" л явж байна. Таны уяа холын зайных, бүр бүхэл амьдралынх байжээ. Одоо тантай зөвлөхсөн. Цаг хэцүү, явах зам өргөн, урт, бартаа их, бариа хол байна даа багш минь. Гэвч бүх дэлхий энэ зүгт явж байна, тийм болохоор бид олуулаа. Би таны сурагч, би азтай хүн.

ЖЭМР ХХК-ний захирал,
тоо физикийн ухааны дэд доктор Р.Оюун

БИДНИЙ ҮЕИЙНХЭН БАГШИЙНХАА ТУХАЙ

Нэлээд олон үе улиран өнгөрсний дараа хойч үеийнхээ өмнө амьдрал нь нэгэнт өнгөрсөн суут хүмүүсийнхээ алдар нэр ач гавьяаг дурсах хүсэл бодол ямар ч улс үндэстэн хувь хүнд буй болдог жамтай бололтой. Нөгөө талаар мэргэжил нэгтэй ч юмуу, мэргэжил эзэмшүүлсэн багш нарынхаа нэр хүнд алдар цуу, ажил үйлсийн баялаг туршлагаас эргэн санах нь тухайн шинжлэх ухааны мэргэжил мэдлэгийг бүрэн эзэмшихэд залгамж үеийнхэнд тус дөхөм, чиг баримжаа болж магадгүй юм.

Тоо бодож сурах тийм ч хэцүү биш, ялангуяа нийгмийн ухааны тоймгүй олон томъёоллыг өөрийн амьдралдаа хүндрэлгүй байхаар цээжилж авах, эсвэл биологи, эмнэлгийн нэр томъёо, шавьж хорхойн нэрсийг латинаар цээжилж байгаад мартахаас хамаагүй хялбар зүйл юм.

Чухамдаа тоо бодоход дуртай болгох, бодлогын төрөл бүрийн арга сэтгэх чигийг түргэн сонгож олоход суралцах нь хүүхдийн төрөлхийн авьяас билгээс гадна тооны багшийн зааж сургах арга, хүн бүртэй ажиллах нарийн төвөгтэй хэлбэрээс хамаарна.

Цагаан багш гэж Улаанбаатар хотын олон мянган хүн андахгүй мэдэх, эсвэл алдар цууг нь дуулсан нэр хүндтэй багш байлаа. Тэр хүний нэгэн үеийн шавид нь би багтаж тоо бодлогд лут сонирхолтой болж, чухамхүү энэ багшийн ачаар өдгөө

өвгөн болтол энэ чиглэлээр ажиллаж, талхаа олж идэж яваа нэгэн билээ.

Цагаан багш хичээлийг тун сонирхолтой, нилээд хатуу дэг журамтай, өндөр шаардлагатай заадаг гэрийн даалгаврыг нягт нямбай хянадаг хүн байлаа. Гэрийн даалгаврыг тоо сайн боддог хүүхдүүдэд бүр ч хэцүү их хэмжээгээр өгч нийт хүүхдүүдийг өөрсдөөр нь сэтгэн бодуулах чиглэлийг баримталж бодлогын олон аргыг маш товчхон зарим үед санаа авах төдийгөөр хэлж өгөөд та нар чаддаг л юм бол арай хялбар өвөрмөц арга олоод богино замаар бодоод ирээрэй гэж хойноос хор шар маажсан үг заавал хэлдэг байсан. Бодлогын хариу зөв байсан ч утга төгөлдөр бус, нуршуу сунжруу аргаар бодсон байвал ээ чааваас сул байна гэж товчхон үг хэлдэг байлаа.

Үнэн сайн, туйлын өвөрмөц арга хэрэглэн бодлого бодсон хүүхдийг хамгийн товчхон, туйлын даруухан хэлбэрээр магтана.

Ер нь хичээлийн сурахаас гадуур номноос нэмэлт бодлого сайн дурын үндсэн дээр даалгаж, түүний бодлогыг нэгэн адил дүгнэнэ. Тэрбээр даалгавраа товлосон цагтаа яг таг ганцхан бодлого бодож чадаагүй байвал арай л тоо бодож сураагүй байна, тархиа сайн ажиллуул гэж хэлдэгсэн. Гэхдээ сурах шинж сүүмэлзэхийн төдий байна гэж бас магтана.

Тоо бодож сурна гэдэг бол тос иднэ гэсэн үг, сурахгүй бол тэг гэсэн үг гэж ёжилно. Одоо бодоход яг л үнэн юм хэлж байж дээ гэж санагдах юм. Ер нь нарт ертөнцийн хоромхон зуурын амьдралыг тоосгүй туулж өнгөрнө гэдэг туйлын их уйтгар гуниг, тун бэрх, туйлын ойлгомжгүй биологийн үзэгдэл юм даа. Дамын наймаачид ч гэсэн маш хурдан үржүүлж, хувааж сурах хэрэгтэй биз дээ. Тоо бодлогыг хичээвээс та нарын тархи сэргэн ажиллаж сэргэлэн цовоо явна гэж багш маань ярьдагсан. Зөвхөн бантан л хийж чаддаг байвал боллоо гэж охидуудад багш маань хошиггнон сануулдаг байсан юм.

Контролийн ажлыг илтэд богино хугацаанд хийлгэж хэн хамгийн хурдан, тэр дундаа хамгийн өвөрмөц аргаар бодож байгааг шалгаруулах их сонирхолтой хүн байсан юм. Энэ нь биднийг хурдан түргэн сэтгэн бодох чадвартай аливаа юманд авхаалжтай

хүмүүс болгох гэж мэрийж байсных юм даа. Ямар ч хүүхдийг чи тоонд муу байна гэж урмыг нь хугалдаггүй харин нэг тавилаа гэж тун товчхон дуугардагсан. Энэ нь хүүхдэд ихийг бодогдуулдаг байсан байхаа.

Цагаан багш логик сэтгэлгээ сайтай аливаа юм, үйл явцыг маш нарийн нэгтгэн бодож, ирээдүйг тоймлон харж таамаглахдаа сайн хүн байсан юм. Энэ нь түүнийг зөвхөн тооны багш байлгаад зогсоогүй олон хүүхдийн авьяас билгийг нээж өөрсдөд нь ойлгуулах, цаашдаа мэргэжлээ сонгож авахад нь үнэлж баршгүй хувь нэмэр болсон гэдэгт эргэлзэх зүйлгүй ээ.

Миний амьдралын олон жил, үйл явцын хүчин зүйлсээр Цагаан багштай холбогдож ирсэн тавилантай болохоор түүнийг бусдаас багагүйгээр мэддэг ойлгодог байсан юм. Тэр их нарийн гүн гүнзгий бодож чаддаг, өөрийн байр сууриндаа хагуу зогсдог, туйлын цагаан цайлган сэтгэлтэй, нийгэм хүмүүсийн амьдралын олон талт үйл явцад өөрийн хөдөлшгүй бат дүгнэлттэй явдаг хүн байсан юм. Тийм зан чанар түүний олон үеийн сурагчид шавь нарт шингэж үлдсэн гэдэгт бат итгэж явдаг. Энэ бол түүний амьдрал, оюун ухаан бидэнд шингэн үргэлжилж мөнхөрсөн гэж би боддог.

Цагаан багшийн олон шавь нар эрдэмтэн, инженер, улс төрийн зүтгэлтэн, эдийн засагч, эмч, зохиолч үгүй ер бүхий л мэргэжлийн хүмүүс болцгоож тус тусынхаа салбарт өөрсдийн хувь нэмрээ оруулж яваа билээ. Тэдгээр хүмүүс мэргэжлийнхээ анхны шалгалтыг тооноос эхэлсэн байж таарна. Чухам тэр үед Цагаан багшийн маань ач тус санагдаж байсан ч байж магад.

Бидний нилээд хүмүүс шавь нар физик, математикийн мэргэжил эзэмшиж шинжлэх ухаан боловсролын салбарт ажиллаж байна. Бид бүгдээрээ л багшийн маань ач гавьяа гэж өөрсдийн сурсан мэдсэн, хийж бүтээсэн зүйлээ хуваалцаж ойлгож явдаг юм. Харин түүний ачийг эхийн ачийн нэгэн адил хэзээ ч хариулж чадаагүй дээ харамсаж л байдаг юм даа.

Өнөөдөр Монголд физик, математикийн олон арван салбар хөгжиж, олон зуун эрдэмтэд төрж бойжиж орчин үеийн шинжлэх ухааны чиглэлүүдээр ажиллаж тоогоо бодсоор л сууцгаана.

Цагаан багшийн үеэс эхэлсэн Математикийн олимпиад үе улиран дамжсаар улам чанаржиж, улам олон хүүхдийг хамран одоо Цагаан багшийн нэрэмжит математикийн олимпиад зохион байгуулж байгаа нь сэтгэлд нэн таатай байгааг тэмдэглэж хэлмээр санагдана.

Энэ үйл явдал манай орны мянга мянган хүүхдийн авьяас билгийг тодруулан нээж, Монголд шинжлэх ухаан, инженер техникийн сэтгэлгээг хөгжүүлэх үйлст жинтэй хувь нэмэр оруулна гэдэгт итгэж байна.

Академич Ч.Цэрэн

ЦАГААН БАГШ БИДНИЙ АЧИТ БАГШ НАРЫН ЗАГАЛМАЙЛСАН ЭЦЭГ БАЙЛАА

1980 онд бид 35-уулаа 100 хувь онц сайн дүнтэй 10-р ангиа төгч, 4 нь өөрийн хүсэлтээр дотоодын бусад нь гадаадын дээд сургуулиудад элсэн суралцсан юм.

Төрөлх сургуулиасаа, ижилсэн дассан нөхдөөсөө салж одоогосныхоо дараахан биднийг багш нар маань ямар их эрдэмд сургаж, ямар их хайраар хайрлаж байсныг үнэнхүү үгүйлж байцгаасан билээ.

Гарыг минь ганзганд, хөлийг маань дөрөөнд хүргэж өгсөн ачит багш нарын маань загалмайлсан эцэг бол яах аргагүй бидний хайрт багш Цагаан билээ. Цагаан багш хүүхдүүдийг тоонд дуртай болгох, шүтэн бишрүүлэхэд үнэхээр хүчин зүтгэж байсан хэдий ч биднийг өв тэгш мэдлэгтэй болгоход хичээл бүрийг минь жигд анхаарч ажиллаж байсан юм. Үүний нэг жишээ бол бидний орос хэлний мэдлэгт ихээхэн анхаарч ажиллаж байсан явдал юм. Цагаан багш манай ангид орос хэлийг Люба багшаар заалгахаар болсон нь тухайн үед бидэнд хичнээн аймшигтай байсныг бид мартдаггүй юм. Тооноос өөр хичээлийг тоодоггүй бидний хувьд орос хэлний хичээл тэгээд бас орос багшаар заалгах нь үнэхээр аймаар, үнэхээр хүнд байлаа. Эхний үед орос хэлний хичээлд бараг бүгдээрээ муу дүн авч амьдралдаа үзээгүйгээ

үзэцгээж санаа сэтгэлээр унацгааж билээ. Люба багш маань ч биднээс айж, би энэ муу ангид чинь хичээл зааж чадахгүй гэж Цагаан багшид гомдоллож эхэлсэн юм. Харин Цагаан багш Люба багшийг тайтгаруулж, зүгээр нэг улирал тэвччих, ахиад нэг улирал гэсээр байгаад биднийг Люба багштайгаа орос хэл дээр маргалддаг болтол нь хичээл заалгуулж чадсан юм даа.

Манай ангийнхан Люба багшийнхаа хатуу шаардлага, Цагаан багшийнхаа холч харааны дүнд бид бүгдийг чадна гэсэн бодолтой болцгоож бүхий л хичээл дээр тэргүүлэгч болж чадагчаасан юм. Монгол хэлний олимпиадад хүртэл улсад тэргүүн байр эзэлж байлаа. Цагаан багш маань ангийн багшаар ганцхан жил ажиллаад хичээл ангийн эрхлэгч болоход бид их харамсаж байсан ч түүний биднийгээ гэсэн чин сэтгэл биднийг төгсөн төгстөл хамт байсан юм. Цагаан багшийн их хөдөлмөр, хичээл зүтгэлийн ачаар бид бүх тал дээр өв тэгш мэдлэг олж авснаас гадна бие биенээ гэсэн чин сэтгэлийг өвлөн авсан юм. Ямар ч асуудалд ул суурьтай хандах ухааныг бидэнд суулгаж өгсөн билээ.

1980 оны төгсөгч Г.Ожун

СЭТГЭЛД МӨНХӨРСӨН БИДНИЙ ХАЙРТАЙ БАГШ

Бидний хэсэг хүүхдүүд дунд сургуулийн 7-р ангиа төгсөөд, математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангид орох шалгалт өгснөөр янз бүрийн сургуулиас 28-уулаа нэг дор цугларч 1967 оны намар 1-р 10 жилийн сургуулийн 8 в анги тооны гэсэн тодотголтой бий болсон юм. Биднээс элсэлтийн шалгалт авахаар 40-өөд насны цайвар царайтай, өндөр гуалигхан, нүдэнд дулаахан багш орж ирээд бодлогын даалгаврыг бидэнд танилцуулж байсан нь сэтгэлд тодхон, мартагдахын аргагүй үлдсэн байдаг юм. Анх Цагаан багштайгаа ингэж танилцсанаас хойш биднийг 10-р ангиа төгстөл хөлийг минь дөрөөнд, гарыг минь ганзганд хүргэж, математикийн амтанд оруулж өгч, эмх цэгцтэй сэтгэж сурах, аливаад ухаалаг хандах хандлагыг минь бий болгож аавын оронд

аав болсон эрдмийн багшийнхаа тухай сэтгэлд дотно дурсамжууд одоо хүртэл бидний дотор хадгалаатай байдаг.

Одоо бодоход биднийг биеэ даах тал дээр их анхаарал хандуулж байсан юм. Цагаан багш маань олон үггүй, товч, тодорхой ярих дуртай, тэр чанарыг нь бид өөрийн эрхгүй өвлөн авч одоо ч тэр чанар нь бидний амьдралд үр нөлөөгөө өгсөөр байдаг. Эхний үед бидэнд томьёо цээжлүүлэх зорилгоор Киселев, Рыбкины бодлогуудаас нэг өдөр нэг сэдвийн бүх сондгой дугааруудыг, дараа өдөр нь тэгш тоотой дугааруудын даалгавар өгч бодуулна, бид даалгаврыг нь биелүүлэх гэж эхний үед дийлэхгүй, бодож чадахгүй, ойлгохгүй зүйл их гарч байсан. Тийм үедээ бид нар хэд хэдээрээ нийлж тоогоо нухна, тэгээд зарим барахгүй тоогоо шөнө орой болтол нухаад дийлэхгүй болохоороо хэдийд ч хамаагүй гэрт нь очиж асууж, бодлогоо дэргэд нь боддог байлаа. Заримдаа хонодог ч байсан тохиолдол бий. Энэ үед багш маань огт тээр шаасан янзгүй биднийг хүлээгээд тамхиа татаад сууж байдагсан. Бид дор бүрнээ томьёоны дэвтэртэй, тоо бодохоороо нөгөө дэвтрээ эргүүлж өгнө дөө, тэр үед Цагаан багш маань тоо өөрөө аяндаа бодогдохгүй, томьёонд оруулж байж л бодно доо. Гэхдээ томьёогоо хайгаад байхаар толгойдоо хийчихвэл ... гэж ирээд биднийг зэмлэх, зөвлөхийн ухаанаар сургадаг байсан. Нээрээ л томьёогоо цээжилснээс хойш тоо бодох нь их л дөхөмтэй болчихсон билээ.

Бодлогоо томьёоны хэлбэрт оруулах аргыг багш маань бидэнд эзэмшүүлэхдээ тоогоо гярхай ажиглах, хиймэл арга хэрэглэх, зэргээр сонирхолтой талаас нь ойлгуулдаг байж билээ.

Дараагийн шатанд биднийг зөвхөн томьёонд хавчигдаад байхгүйгээр улам өргөн хүрээтэй сэтгэж сурах, логик сэтгэлгээг улам сайн хөгжүүлэх нь чухал болохыг ойлгуулж чадсан гэж боддог. Энэ чанар нь хойшдоо бидэнд амьдралын маань алхам тутамд ямар нэгэн эгзэгтэй шийдвэр гаргахад байнга хэрэгцээ болсоор ирснийг бид мэдэрсээр байдаг юм.

Багш маань их хөнгөн шингэн хөдөлгөөнтэй бидний мэдэхээр гар бөмбөг, ширээний теннис, шатар сайн тоглодог, биднийг л лав урдаа гаргадаггүй л байсан юм даа. Түүний маань үргэлж

инээмсэглэж байдаг дотно дүр төрх, ёжтой үгээр хүний дотор нь голд нь ортол хэлдэг ухаантай үгс одоо ч бидний сэтгэлд гэрэл гэгээтэй хадгалагдаж байдаг юм. Зарим үед математикийн олимпиадад тааруухан амжилт гаргасан үед "бөмбөг тоглох чинь ихдээд байвал толгойд нь хий дүүрдэг талтай ...", дэмий тэнэдэг хэдэд "гутлын ул гудамжны шороо хоёр урвуу пропорционал ..." гэх юм уу "тогоо шанага барихад тооны ухаан хэрэггүй гэж бодож байна уу харин ч их хэрэг болно доо ..." гэж охидыг цаашлуулдаг байсан.

Бид багшаасаа их айдаг байсан ч түүнийг маш их хүндэлдэг, хайрладаг байсан, одоо ч энэ тухайгаа дурссаар байдаг. Цагаан багш маань бидэнд одоогийн ярьдгаар талх тариаг бэлнээр биш харин тариаг яаж тарьж талх хийдгийн үрийг толгойд минь суулгаж өгчээ гэдгийг ойлгосноороо бид их азтай шавь нар юм даа. Тэр үед Цагаан багштай маань хамтран биднийг хүмүүжүүлж өгсөн Гомбосүрэн захирал, Шарав багш, Цэрэннадмид багш, Люба багш, Нэргүй багш гээд сайхан хамт олон байсныг бид цугларах бүртээ бахархан дурсаж байдаг юм.

Ч.Давааням, А.Алимаа, Г.Лхагваа
1970 оны төгсөгчид

ТОО САЙН БОДСОН ХҮҮХЭД ХЭДЭН Ч ОНЦ ДҮН АВЧ БОЛДОГ БАЙЛАА

Би 1968 онд нийслэлийн 10 жилийн лаборатори 1-р дунд сургуулийн 7-р ангид шилжин суралцсан юм. Эхний жил шинэ сургуульд тэр тусмаа манай улсын тэргүүний сургуульд орсных хичээл бүр дээр мэрийж суралцсаны үр дүнд эхний улирлаар сайн дүнтэй гарч баярлаж байлаа. Тэр үед ахлах ангийн хичээлийн эрхлэгч багш Осор болон математикийн багш Цагаан нараар анх хичээл заалгаж эхлэсэн юм. Миний үндсэн зорилго бол тооны ангид шилжин суралцах ёстой байсан болоод ч тэр үү зав л гарвал тооны дугуйланд орж суудаг байсан юм. Цагаан багш хүүхэд

бидний тоо бодох авьясыг хөгжүүлэх тал дээр хамгийн их ажилладаг багш минь байсан билээ. Би энэ багшийн хүчинд тоо бодох ухаанд илүү их дур сонирхолтой болж зав л олдвол багшаасаа хүндхэн бодлого гэрийн даалгаварт авч түүнийгээ аль болох богино хугацаанд бодож Цагаан багшдаа тоогдохыг их хичээдэг байж билээ. 8-р ангид элсэх зунаа Цагаан багшийн өгсөн 2 тооны бодлогын хураамжийг эхнээс нь аваад дуустал бодож намар нь тооны ангид орох шалгалтандаа бэлтгэж билээ. Энэ шалгалтыг Цагаан багш маань авсан бөгөөд 8 бодлогоо эхний цагтаа бодчихоод багшаа би бодож дууссан бодолтоо өгөх үү гэж асуухад дахин дахин шалга тэр тусмаа өөр өөр аргаар хариугаа баталгаажуулах хэрэгтэй гээд намайг дахин бүх бодлогоо өөр аргаар баталгаажуулсны дараа буюу эхний хүүхэд ажлаа өгөх үед би цуг ажлаа өгсөнөө санаж байна. Энэ өдөр миний хүүхэд ахуй цагийн хамгийн эрхэм зорилго болох математикч болох хүслийнхээ дагуу тооны ангид орох эхний эрхийг авч билээ. Шалгалтаа өгсний дараа хичээлийн эрхлэгчтэй тааралдаад тооны ангид орох шалгалтаа өгсөн тухайгаа яриад зогсож байтал гаднаас Цагаан багш маань орж ирчихсэн миний хойноос үл мэдэг гар хүрэн "За манай сургуулиас тооны ангид шалгалт өгсөн 2 маань бүх оноогоо авч чадлаа та нар үндсэн ангидаа сайн суралцаж олон олон олимпиадад амжилттай оролцоорой" гэж сэтгэлийн их урмыг хайрлаж билээ. Ингэж л би анх удаа Цагаан багшдаа тоогдох болсон юм.

Үүнээс хойш Цагаан багшаар тооны төрлийн хэд хэдэн хичээл заалгаж олон удаагийн хот улсын тооны олимпиадад оролцож эцэст Олон улсын хүүхдийн тооны олимпиадад хүртэл орж явсан минь саяхан ч юм шиг санагдана. Нэг удаа 9 дүгээр ангид байхад Цагаан багш огторгуйн геометрийн хичээл дээр бодлогын номны бүхэл бүтэн бүлгийг бодох даалгавар өгөхөд нь би багшаа нэг биш 2 бүлгийг цагтаа багтаан бодвол 2 ширхэг онц авч болох уу гэж хошигноход бололгүй дээ гэж билээ. Би хэлсэндээ хүрч 2 бүлгийн бодлогыг хонхны дуутай уралдан байж дуусган багшдаа үзүүлэн нэг өдөр нэг цаг дээр журнал дээр 2 онц гэсэн үнэлгээ авч маш их баярлаж билээ. Цагаан багш хүүхэд биднийг цагийг ямагт үр дүнтэй ашиглаж байх оюун ухаанаа үргэлж хөгжүүлж

байхыг байнга сургаж бидэнд шаардлага их тавьж ажилладаг хүн байж билээ. Би хожим хойно дээд сургуульд суралцаж байхдаа багшийнхаа сургаж байсан уйгагүй, хичээнгүй, сурахын төлөө махруу ажилладаг зарчимаас бага боловч сурч үлдэж дээ гэж бодож билээ.

Цагаан багш ямарч үед их гоё цэмцгэр нүдэнд дулаахан хүүхэд бидний дууриал болсон багш байсан юм. Хожим нь би МЦХ ХК-ий захирлаар ажиллаж байхдаа багшийнхаа нэрэмжит нийслэлийн математикийн олимпиадыг ивээн тэтгэж жил бүр өөрийн төгссөн сургуулийнхаа хүүхдүүдийн амжилтыг сонсож байхдаа би өөрөө тэртээ 34 жилийн өмнө Цагаан багшийнхаа хичээлд суун олимпиадад орж байгаа мэт сэтгэгдэл төрж явдаг билээ. Миний эхлүүлсэн энэ ажлыг МЦХ ХК-ийн үе үеийн удирдлагууд уламжлал болгон хадгалж явдагт би их баярлаж, бахархаж байдаг юм.

ИНКОМНЭТ ХХК-ийн захирал
дэд доктор С.Ганбаатар

ЭРДЭМТЭЙ ХҮН ДАРУУ ИХ МӨРӨН ДӨЛГӨӨН

1977 оны намар нийслэлийн 1-р дунд сургуулийн математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангид элсэн орсон хэсэг нөхөд бид бага насаа эргэн дурсахдаа амьдралын ээдрээ нугачаа бүрийг гэтлэн давах олон талт ухааныг зааж сургасан эрхэм багш нараа хайрлаж, хүндэтгэх сэтгэлээр дурсан байдаг юм. Тэдний нэг болох гавьяат багш С.Цагааны тухай дурсахгүй байхын аргагүй билээ.

Цагаан багш 8-р ангиас эхлэн манай ангийг дааж байсан бөгөөд, математикийн хичээл заадаг байсан нь бидэнд тохиосон их аз завшаан байсан юм.

Хичээлийн эхний өдөр математикийн тэгээд тэргүүний гэсэн тодотголтой сургуулийн босгыг алхсан даруй хүүхэд бүрт болгоомжлол, хүүхэд насны ичингүйрэл зэрэг чамлахааргүй айдас

нүүрлэж байсныг одоо бид ам булаалдан ярьж дурсдаг юм. Гэвч нэн удалгүй өрөөлийг өөлөх байтугай, тооноос өөр зүйл бодох завгүй явсаар нэг мэдэхэд зарим багш нараас биеэ тоолоо гэж загнуулах хүртлээ өсөж өндийж, өөрчлөгдсөн байв. Бид энэ сургуульд, тэр дундаа тооны ангийг төгссөн бүр цаашилбал ховор сайхан багш нараар хичээл заалгаж байснаараа бахархах сэтгэл дүүрэн байдаг билээ. Цагаан багш маань биднийг эрдэм мэдлэгтэй хүн болгох гэж зорихын зэрэгцээ хүнлэг, хариуцлагатай хүмүүс болгохын төлөө бүхий л сэтгэл, оюунаа зориулж байсныг бид одоо болтол дурссаар байдаг.

Цагаан багш маань даруу дөлгөөн, хүнийг загнаж чичлэдэггүй, даалгаврыг хангалттай их өгдөг, хүнийг бага залуу гэж голддоггүй, сурагчдаа бүхнийг чаддаг мэддэг мэт тоож ярьдаг саруул ухаантай хүнлэг сайхан хүн байсан юм.

"Эрдэмтэй хүн даруу, их мөрөн дөлгөөн" гэсэн ардын зүйр цэцэн үгийн баталгаа болж, өөрийн олон мянган шавь нартаа амьдралын утга учир, сайн сайхныг таньж мэдэх, аливаа асуудлыг сайн муу олон хувилбараар тооцох, эцэст нь оновчтой зөв хариу гаргах, түүнийгээ батлахын төлөө ажиллаж амьдрах тэр аугаа их ухаан тэвчээр хатуужлыг эзэмшүүлэхийн төлөө зүтгэсэн эгэл жирийн хүн, бидний үлгэр дууриал болон бидний зүрх, сэтгэл үүрд хоногшин үлдсэн билээ.

Б.Ганбат, КтМС-ийн багш
1979 оны математикийн ангийн төгсөгч

БАГШ ХҮН ӨӨРИЙГӨӨ ТУХАЙН АНГИЙН ХҮҮХДИЙН ХЭМЖЭЭНД АВААЧИН ТАВЬЖ СЭТГЭЖ ЧАДАЖ БАЙВАЛ ЖИНХЭНЭ БАГШ БОЛЖ ЧАДНА

Миний бие одоогоос 30 жилийн тэртээ 1975 онд Монгол Улсын Их сургуулийн математикийн ангийг төгсөөд, нийслэлийн 10 жилийн лаборатори 1-р дунд сургуульд багшаар томилогдон ирснээр Монгол Улсын Гавьяат багш С.Цагаантай ойр дотно ажиллаж эхэлсэн билээ.

Тэр үед С.Цагаан багш математикийн сургалт хариуцсан мэргэжилтнээр ажиллаж байсан юм. Манай улсын аль ч ерөнхий боловсролын дунд сургуульд ийм орон тоо байгаагүй бөгөөд зөвхөн 10 жилийн лаборатори 1-р сургуульд л байсан орон тоо юм. Энэ нь тухайн үед дунд сургуулийн математикийн хичээлийн агуулгыг шинэчлэх, түүнийг хэрэгжүүлэх арга зүйг боловсронгуй болгохтой холбогдсон бүхий л туршилт судалгааны ажлуудыг тухайн үеийн Сурган хүмүүжүүлэх ухааны хүрээлэнгээс эрхлэн С.Цагаан багшийн удирдлаган дор тус сургууль дээр хийдэг байсантай холбоотой болов уу.

С.Цагаан багш хүнд итгэл үзүүлэх, урам хайрлах, хүнийг итгэл сэтгэлээр дэмжиж ажиллахдаа үнэхээр гойд онцлог хүн байсныг тухайн үед хамт ажиллаж байсан багш нар бид дурсан ярьцгааж байдаг билээ.

1975-1976 оны хичээлийн жилд тус сургуульд Нямцэрэн, Нэргүй бид нарын математикийн 3 шинэ багш очиход гурвууланг нь математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай 9-10 дугаар ангиудад математикийн хичээл заалгахаар цаг хувиарлан өгч билээ. Энэ нь бид гуравт өгсөн их том итгэл, сэтгэл байсан юм гэж бодож явдаг даа.

Энэ ч итгэл сэтгэлийг алдахгүйн тулд ихээхэн хичээл зүтгэл гарган багшийн заавар зөвлөлгөөг авч ажилласны дүнд Нямцэрэнгийн геометр, миний алгебр, математикийн анализийн эхлэл болон сонгон суралцах хичээл зааж байсан 10-р ангийн сурагчдаас 1976 онд Улсын математикийн олимпиадад 6-7 сурагч шалгаран оролцоноос А.Ганбаатар Улсын аварга болсон нь бидний ажлын гараа, эхлэл байв.

1978-1979 оны хичээлийн жилээс С.Цагаан багш дунд ангийн сургалт хариуцсан хичээлийн эрхлэгч болохдоо өөрийн дааж байсан математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай 9-р ангиа надад өгч хариуцуулан ажилласан билээ. Энэ ангиас маань 1979 онд математикийн олимпиадын 9-р ангийн улсын аваргаар Батнасан, 1980 оны 10-р ангийн аваргаар Б.Баасандорж нар шалгарч байсан нь С.Цагаан багшийн маань итгэл сэтгэлийн үр өгөөж байсан гэж боддог.

1980 онд С.Цагаан багш маань өөр ажилд шилжихдээ надад өөрийн эрхлэн хийж байсан дунд ангийн сургалт хариуцсан хичээлийн эрхлэгчийн ажлаа өгч байсан юм.

С.Цагаан багшийн санал санаачлага, дэмжлэг, зөвлөгөөний дагуу ажиллаж байсан нь надад дахин олдхоггүй аз завшаан байсанд одоо хүртэл баярлаж явдаг билээ.

С.Цагаан багш "Багш хүн өөрийгөө тухайн ангийн хүүхдийн хэмжээнд аваачин тавьж сэтгэж чадаж байвал жинхэнэ багш болж чадна" гэдэг зарчмыг баримталдаг байсан. Энэхүү зарчмаа хичээлд бэлтгэх, хичээл заах, хүүхэдтэй ажиллах бүхий л явцдаа өөрөө ягштал биелүүлдэг, биднийг ийм зарчим баримтлан ажиллаж сурахыг зааж зөвлөдөг байв.

С.Цагаан багш ээлжит хичээлийн бэлтгэлийг хичээлийн эрхлэгчид үзүүлэхийн тулд цаасан дээр хийдэггүй өөрийн оюун ухаандаа олон хувилбартайгаар бодож боловсруулан тэдгээрээсээ сонгох байдлаар хичээлээ заадаг байв. Багш хүний ээлжит хичээлээ хэрхэн яаж заах талаар байнга бодож боловсруулж байвал үр дүнд хүрч болохыг бидэнд өөрийн биеэр үлгэрлэн үзүүлдэг байв.

С.Цагаан багш аливаа хүнтэй их нөхөрсөг харьцаатай, хүний алдаа дутагдал, сул талыг алиа хошин наргианы байдлаар ойлгуулдаг, хүүхдийг бүхий л талаар нь тэр тусмаа тэдний математик сэтгэлгээг нь хөгжүүлэхэд ихээхэн анхаарч ажилладаг ардын багш, найз нөхөр дотны зөвлөгч минь байсан юм.

1975-1989 оны 1-р сургуулийн багш,
Боловсролын тэргүүний ажилтан,
СБД-ийн ИТХ-ын дарга Ж.Дангаа

УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН ХЛI ОЛИМПИАДЫН
VII АНГИЙН III ДАВААНЫ БОДЛОГО

Б.Сандагдорж (МУБИС), Ч.Гантөмөр (МУБИС)

VII-A1 (Н.Дайвий-Од). n тоог гурван натурал тоны нийлбэр хэлбэрт k янзаар задалж болдог бөгөөд нийлбэрт оролцсон $3k$ ширхэг тоонууд нь бүгд ялгаатай байх k -ийн хамгийн их утгыг $D(n)$ гэе. Жишээ нь $15 = 1+5+9 = 2+6+7 = 3+4+8$ ба 15-ыг дөрвөн гуравтад ялгаатай 12 тооны тусламжтай задалж болохгүй учир $D(15) = 3$ болно. Тэгвэл
а) $D(41) = ?$ б) $D(301) = ?$

тоонуудыг ол.

VII-A2 (Б.Эрдэнэбаяр). Хэрэв $a, b, c > 0$ ба $a \cdot b \cdot c = 4$ байх тоонууд бол $2a + b + c \geq 4 \cdot \sqrt[4]{a + b + c}$ тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

VII-A3 (Н.Аргилсан). p периметртэй гурвалжин дотор орших дурын O цэгээс гурвалжны талуудад перпендикуляр буулгав. Перпендикуляруудын суурийн цэгүүдээр үүсгэх гурвалжны периметр хамгийн их байх O цэг ба анхны гурвалжныг ол.

VII-B1 (Ч.Гантөмөр). 8 мөр n баганатай хүснэгтийн аль ч хоёр баганыг авч 8×2 тэгш өнцөгт үүсгэхэд түүнд 00; 01; 10; 11 гэсэн мөрүүд тус бүр 2 байхаар нүднүүдийг нь 0 эсвэл 1-ээр бөглөж болдог хамгийн их n -ийн утгыг ол.

VII-B2 (Б.Сандагдорж). $\{1, 2, 3, \dots, 33, 34\}$ олонлогоос хамгийн багадаа хэдэн элемент дарахад үлдсэн тоонуудын үржвэр бүхэл тооны квадрат болох вэ? Уг дарагдсан тоонуудыг ол.

VII-B3 (Ч.Гантөмөр). ABC гурвалжны BC талын дундаж цэг M бөгөөд $\angle CAB = 45^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$ болно.

а) AMC өнцгийг ол.

б) $|AB| \cdot |BC| = 2 \cdot |AM| \cdot |AC|$ гэж батал.

VII-A1. Жич: Энэ бодлого нь Квант 1990, №3, М1215*. 15 тоог $15 = +6 + 8 = 2 + 4 + 9 = 3 + 5 + 7$ хэлбэртэйгээр 9-н ялгаатай тоонууд оролцуулан 3-н тооны нийлбэр хэлбэрт гурван

янзаар тавьж болно. Үүнтэй адилаар $k(n)$ -ээр n тоог $3k(n)$ ялгаатай тоонуудын тусламжтайгаар 3-н тооны нийлбэр хэлбэрт тавьж болох хамгийн их тоог тэмдэглэе. Тэгвэл

а) $k(n) > \frac{n}{2} - 1$, б) $k(n) < \frac{2n}{9}$, в) $k(100) = 21$, г) $k(500) = 110$ болохыг батал, мөн түүний бодолт 1990 №8-д хэвлэгдэхдээ $k(n) \leq \frac{2n-3}{9}$, $k(n) \geq \frac{2}{9}n - \frac{11}{6} \log_4 \frac{n}{3}$ гэсэн үнэлгээг хийснээс урган гарсан бодлого юм. Энэ бодлогыг ерөнхийд нь $k(n)$ -г ол гэсэн хэлбэрээр шийдэж болдог. Мөн түүнчлэн 3-н тооны нийлбэр хэлбэрээр төдийгүй k ширхэг тооны нийлбэр хэлбэрт тавих хувилбарын үед ч бүрэн шийдэгдсэн юм.

Юуны өмнө $\forall n \in \mathbb{N}: k(n) \leq \left\lfloor \frac{2n-3}{9} \right\rfloor$ болохыг баталъя. Үнэхээр n -г задалж бичдэг тэдгээр тоонуудыг $b_1, b_2, \dots, b_{3k(n)}$ гэе. Эдгээр нь $K(n)$ ширхэг 3-туудад хуваагдаад гуравт тус бүрийн нийлбэр нь n -тэй тэнцүү байх учир

$$nR(n) = \sum_{i=1}^{3k(n)} b_i \geq \sum_{i=1}^{3k(n)} i = \frac{3k(n)(3k(n)+1)}{2}$$

болно. Эндээс $n \geq \frac{3}{2}(3k(n)+1)$ ба $k(n) \leq \frac{2n-3}{9}$ ба $k(n)$ нь бүхэл тоо учир түүнийг $k(n) \leq \left\lfloor \frac{2n-3}{9} \right\rfloor$ гэж бичиж болно. Нөгөө талаас $\left\lfloor \frac{2n-3}{9} \right\rfloor$ ширхэг тоонуудад n -г хэрхэн задалж болдгийг харуулъя.

$$\begin{array}{rcl} 1 & + 2s - \frac{s-1}{2} & = \frac{2s+3}{2} \\ 3 & + 2s - \frac{s-1}{2} - 1 & = \frac{3s+5}{2} \\ \vdots & + \vdots & = \vdots \\ s-2 & + s+2 & = \dots \\ s & + s+1 & = \dots \\ \hline 2 & + 2s & = \dots \\ 4 & + 2s-1 & = \dots \\ \vdots & + \vdots & = \vdots \\ s-3 & + 2s - \frac{s-1}{2} + 2 & = \frac{5s-1}{2} \\ s-1 & + 2s - \frac{s-1}{2} + 1 & = \frac{5s+1}{2} \end{array}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2		2								
3			3							
4				4						
5					5					
6						6				
7							7			
8								8		
9									9	
10										10

Эхлээд s -сондгой натурал тооны хувьд $1, 2, \dots, 2s$ тоонуудыг

нийлбэр нь дэс дараалсан тоонууд гарах 2-туудад хувааж болно гэж харуулъя. Үүнийг $2s$ тооны нийлбэрийн хүснэгтийн зүүн диагоналийн доод хэсэгт гол s ширхэг налуугийн тоонууд дээр шатрын хөлгийн морины нүүдлээр сонгон авч болдог. Зураг дээр $s = 5$ үед харуулсан бөгөөд ерөнхий тохиолдолд ба хос тус бүрийн нийлбэр дэс дараалсан s ширхэг тоо байх болно.

Одоо $\frac{2n-3}{9}$ бүхэл тоо байх үеийг сонирхъя. Энэ үед $\frac{2n-3}{9} = s$ гэвэл s сондгой болох нь илэрхий. Тиймээс өмнөх бодлогод гаргасан нийлбэрүүдийг гарган авч тэдгээр дээрээ $2s + 1$ -ээс $3s$ хүртэлх тоонуудыг тонгоруулан нэмбэл

$$\frac{3s+3}{2} + 3s = n$$

$$\frac{3s+5}{2} + 3s - 1 = n$$

$$\vdots + \vdots = \vdots$$

$$\frac{5s+1}{2} + 2s + 1 = n$$

болж бид $3s$ ширхэг тоонуудыг нийлбэр нь n байх s ширхэг гуравтуудад хуваагдаж бодлого бодогдов.

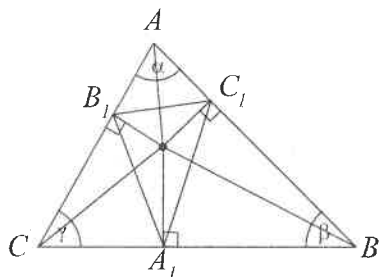
Харин $\frac{2n-3}{9}$ бүхэл биш бол $\left[\frac{2n-3}{9} \right] = s'$ дээр дээрх замаар гарган авсан нийлбэрийн сүүлчийн нэмэгдэхүүнүүдийг тогтмол $n - \frac{9s'+3}{2}$ тоогоор нэмэгдүүлэх замаар байгуулалтыг хийж болох нь тодорхой. Ингээд

$$k(41) = \left[\frac{2 \cdot 41 - 3}{9} \right] = 8, \quad k(301) = \left[\frac{2 \cdot 301 - 3}{9} \right] = 66$$

болно.

VII-A2. $2a + b + c = (a + b) + (a + c) \geq 2\sqrt{(a + b)(a + c)}$ болно. $(a + b)(a + c) = a(a + b + c) + bc \geq 2\sqrt{a(a + b + c)bc} = 4\sqrt{a + b + c}$ болох ба эндээс $2a + b + c \geq 2\sqrt{(a + b)(a + c)} \geq 2\sqrt{4\sqrt{a + b + c}} = 4\sqrt[4]{a + b + c}$ болж батлах тэнцэл биш гарна. Одоо хэдийд тэнцэлдээ хүрэхийг тогтооё. $a + b = a + c$, $a(a + b + c) = bc$, $abc = 4$ гэдгээс $b = c$ ба $a(a + 2b) = b^2$, $ab^2 = 4$ болох ба $a = \frac{4}{b^2}$ гэвэл $a(a + 2b) = b^2 \Leftrightarrow \frac{4}{b^2} \left(\frac{4}{b^2} + 2b \right) = b^2 \Leftrightarrow \frac{16}{b^2} + \frac{8}{b} = b^2 \Leftrightarrow 16 + 8b^3 = b^6$ болно. $b^3 = t$ гэвэл $t^2 - 8t - 16 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = 4 \pm 4\sqrt{2} \Rightarrow b^3 = 4 \pm 4\sqrt{2}$ болох ба $b > 0$ учир $b = \sqrt[3]{4 + 4\sqrt{2}}$ болно. Ийнхүү $b = \sqrt[3]{4 + 4\sqrt{2}}$, $c = \sqrt[3]{4 + 4\sqrt{2}}$, $a = \frac{4}{\sqrt[3]{48 + 32\sqrt{2}}}$ байх зөвхөн тэр үед тэнцэлдээ хүрнэ.

VII-A3. $\triangle ABC$ -ны доторхи дурын O цэгээс талуудад буулгасан перпендикулярын суурийг харгалзан A_1, B_1, C_1 гээ. $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ гээ. AC_1OB_1 дөрвөн өнцөгт нь AO диаметртэй тойрогт багтана (эсрэг өнцгүүдийн нийлбэр 180° учир). Иймд синусын



теорем ёсоор $B_1C_1 = AO \sin \alpha$. Үүнтэй адил $C_1A_1 = OB \sin \beta$ ба $A_1B_1 = OC \sin \gamma$ болно. Эндээс $B_1C_1 + C_1A_1 + A_1B_1 = OA \sin \alpha + OB \sin \beta + OC \sin \gamma$ буюу тэнцэтгэлийн баруун талд Коши-Буняковскийн тэнцэтгэл биш хэрэглэвэл $B_1C_1 + C_1A_1 + A_1B_1 = OA \sin \alpha + OB \sin \beta + OC \sin \gamma \leq \sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2} \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma}$ болно. Энэ нь $\frac{OA}{\sin \alpha} = \frac{OB}{\sin \beta} = \frac{OC}{\sin \gamma}$ үед тэнцэлдээ хүрэх буюу энэ нөхцөл биелдэг байх өнцөгтэй гурвалжин ба түүн дотор орших O цэгийн хувьд $A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1$ нь тах утгандаа хүрэх боломжтой.

$OA = OB = OC$ ба $\sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma$ буюу зөв гурвалжин үед $A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 = \frac{P}{2}$ болох нь тодорхой. Тэгвэл $\frac{OA}{\sin \alpha} = \frac{OB}{\sin \beta} = \frac{OC}{\sin \gamma}$ нөхцлийг хангадаг өөр O цэг байх уу? гэсэн асуудал гарна. Тэгвэл адил хажуут гурвалжны хувьд тийм тохиолдол байж болохыг хялбархан ажиглаж болно. Түүнийг зургаар дүрсэлбэл $AB = AC$ ба O нь A оройгоос буусан өндөр дээр оршдог байг. Тэгвэл $\frac{B_1A_1}{\sin \gamma} = \frac{A_1C_1}{\sin \beta}$ болно. Тэгвэл BC талын урт маш бага тоо руу тэмүүлэх ба O нь AA_1 өндрийн дагуу A цэг рүү төгсгөлгүй ойртоход AC -ийн урт A_1C_1 -ийн урттай, B_1A_1 -ийн урт AB -ийн урттай, B_1C_1 -ийн урт BC -ийн урттай бараг дүйцэж очно. Иймд $A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1$ -ийн урт нь бараг P -тэй адил болно. Үүнээс үзэхэд анхны гурвалжны суурь нь маш бага урттай байх адил хажуут гурвалжин байх ба O нь суурьт буулгасан өндрийн дагуу орой руу төгсгөлгүй ойрхон байх цэгийн хувьд талд буулгасан перпендикуляр сууриар үүсэх гурвалжны периметр нь бараг P байна.

VII-B1. $n = 8$ байж болохгүйг баталъя.

Эсрэгээс нь $n = 8$ болог. i -р мөрөнд байгаа 0 -ийн тоог a_i гээ.

Хүснэгтэд байгаа нийт 0-ийн тоо нь $8 \cdot 4 = 32$ байх нь ойлгомжтой. "00" гэсэн 1×2 хэмжээтэй мөрийн тоо нь $2C_8^2 = 56$. Нөгөө талаас энэ нь

$\sum_{i=1}^8 C_{a_i}^2$ -тай тэнцэнэ. $a_1 = 8$ болог (ин-

гэж үзэж болно). Эндээс $\sum_{i=2}^8 a_i = 24$

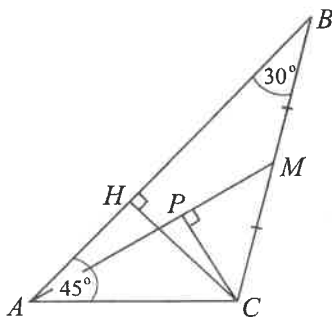
ба $\sum_{i=2}^8 C_{a_i}^2 \geq 30$ гэдгийг нотлоход төвөггүй. Эндээс $56 = \sum_{i=1}^8 C_{a_i}^2 \geq 58$ болж зөрчилд хүрнэ. $n = 7$ байхад бодлогын нөхцлийг хангахаар бөглөгдсөн хүснэгтийг байгуулж болно. Жишээ нь: хүснэгт үз.

0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1

VII-B2. $34!$ тоо анхны тоонуудын үржвэрт $34! = 2^{32} \cdot 3^{15} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$ гэж бичигдэнэ. Иймээс үлдсэн тоонуудын үржвэр бүтэн квадрат байхаар $3 \cdot 5 = 15$, 11, 19, 23, 29, 31 тоонуудыг дарна.

VII-B3. (а) AB талд CH өндөр татъя. $\angle ACH = 45^\circ = \angle CAH$ ба $\angle HCB = 60^\circ$. $\triangle ACH$ -ийн хувьд $|AH| = |HC|$. $\triangle CHB$ -ийн хувьд $|CH| = \frac{1}{2}|CB| = |HM|$. Эндээс $|AH| = |HM|$ болох ба $\angle MAN = \angle AMH = \frac{180^\circ - \angle AHM}{2}$ болно. $\angle CHM = 60^\circ$ ба $\angle ANM = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$. Эндээс $\angle AMH = 15^\circ$ болж $\angle AMC = \angle HMC - \angle AMH = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$ болно.

(б) $\triangle ABC$ -ийн талбайг S гэе. $S = \frac{|AB| \cdot |CH|}{2} = \frac{|AB| \cdot |CB|}{4}$. AM нь медиан тул $S_{AMC} = \frac{S}{2}$. Хэрэв $CP \perp AM$ бол $\frac{S}{2} = \frac{|AM| \cdot |CP|}{2}$ бөгөөд $\angle CAM = \angle CAB - \angle MAB = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$. Эндээс $|CP| = \frac{|AC|}{2}$ буюу $\frac{S}{2} = \frac{|AM| \cdot |AC|}{4}$. Ийнхүү $\frac{|AB| \cdot |CB|}{4} = \frac{|AM| \cdot |AC|}{2}$ гэдгээс $2|AM| \cdot |AC| = |AB| \cdot |BC|$ болно.



Б.Сандагдорж, Ч.Гантөмөр

VIII-A1 (Э.Чойсүрэн, МУБИС, III курс). Хайрцаганд

анх 2005 ширхэг цагаан өнгийн бөмбөг байв.

- (1) 2 цагаан бөмбөг авч оронд нь 1 ногоон бөмбөг хийх,
- (2) 2 улаан бөмбөг авч оронд нь 1 ногоон бөмбөг хийх,
- (3) 2 ногоон бөмбөг авч оронд нь 1 цагаан ба 1 улаан бөмбөг хийх,
- (4) 1 цагаан ба 1 ногоон бөмбөг авч оронд нь 1 улаан бөмбөг хийх,
- (5) 1 ногоон ба 1 улаан бөмбөг авч оронд нь 1 цагаан бөмбөг хийх

гэсэн 5 үйлдлийг хийсээр

а) хайрцаганд 3 бөмбөг үлдээж чадах уу?

б) Хэрвээ хайрцаганд 5 бөмбөг үлдсэн бол дор хаяж нэг нь улаан өнгөтэй бөмбөг, эсвэл цагаан өнгийн бөмбөг дор хаяж 4, эсвэл ногоон өнгийн бөмбөг яг 4 ширхэг байна гэж батал.

VIII-A2 (Б.Сандагдорж). Тус бүр нь нэгээс их ямар нэг бүхэл тооны квадратад хуваагддаг дэс дараалсан 4 натурал тоог ол.**VIII-A3 (Л.Даваажаргал).** ABC гурвалжин дотор O цэгийг $\angle COA = \angle B + 60^\circ$, $\angle COB = \angle A + 60^\circ$, $\angle AOB = \angle C + 60^\circ$ байхаар авав. Хэрэв AO , BO , CO хэрчмүүд гурвалжин үүсгэдэг бол ABC гурвалжны өндрүүд гурвалжин үүсгэх ба уг гурвалжнууд төсөөтэй гэж батал.**VIII-B1 (Ч.Гантөмөр).** $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 + \dots + a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n$ нийлбэр тэгш тоо байх $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ гэсэн n оронтой тоо хичнээн байх вэ?**VIII-B2 (Н.Дайвий-Од).** n өгсөн натурал тоо, $a_1, a_2, \dots, a_n$; $b_1, b_2, \dots, b_n$ нь эерэг бүхэл тоонууд ($a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$) бол $n \cdot \max\{a_n; b_n\} + (n-1) \cdot \max\{a_{n-1}; b_{n-1}\} + \dots + \max\{a_1; b_1\} \leq a_n \cdot b_n + (a_n + a_{n-1})(b_n + b_{n-1}) + \dots + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1)(b_n + b_{n-1} + \dots + b_1)$ тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

VIII-B3 (Б.Сандагдорж). Хурц өнцөгт ABC гурвалжны өнд-
рүүд H цэгт огтлолцоно. BC диаметртэй тойрогт A цэгээс
 AP, AQ шүргэгчүүд татав. P, Q, H цэгүүд нэг шулуун дээр
оршино гэж батал.

VIII-A1. Хайрцаганд байгаа цагаан бөмбөгний тоог x , но-
гоон бөмбөгний тоог y ба улаан бөмбөгний тоог z -ээр тэмдэглэе.
 $x + 2y + 3z$ хэмжигдэхүүнийг сонирхье.

Үйлдэл	Цагаан бөмбөг (x)	Ногоон бөмбөг (y)	Улаан бөмбөг (z)	$x + 2y + 3z$
1	$x - 2$	$y + 1$	z	$x + 2y + 3z$
2	x	$y + 1$	$z - 2$	$x + 2y + 3z - 4$
3	$x + 1$	$y - 2$	$z + 1$	$x + 2y + 3z$
4	$x - 1$	$y - 1$	$z + 1$	$x + 2y + 3z$
5	$x + 1$	$y - 1$	$z - 1$	$x + 2y + 3z$

Дээрх хүснэгтээс харахад аль ч үйлдлийг хийсэн $x + 2y + 3z$
хэмжигдэхүүнийг 4-д хуваахад гарах үлдэгдэл үл өөрчлөгдөх
чанартай байна. Анх $x = 2005, y = 0, z = 0$ байсан учир
 $x + 2y + 3z = 2005 \equiv 1 \pmod{4}$ болно.

(б) хэсгийг бодъё. $x + y + z = 5$ ба $x + 2y + 3z \equiv 1 \pmod{4}$
гэдгээс (x, y, z) гуравтын хувьд нэг бол $z \geq 1$ эсвэл $x \geq 4$ эсвэл
 $y = 4$ нөхцөл л биелнэ гэдгийг шууд шалгаж болно.

(а) хайрцаганд 3 бөмбөг үлдээж болно. Жишээлбэл 1 цагаан,
2 удаан бөмбөг үлдээж болохыг өөрсдөө шалгаж үзээрэй.

$$\text{VIII-A2.} \quad \begin{cases} n - 3 \equiv 0(2^2) \\ n - 2 \equiv 0(3^2) \\ n - 1 \equiv 0(5^2) \\ n \equiv 0(7^2) \end{cases} \quad \text{жишлэгийн систем үлдэгдлийн}$$

тухай Хятадын теоремоор шийдтэй. Уг системийг бодож n -ийг
олно. 1-р жишлэгээс $n = 4k + 3$ буюу үүнийг 2-р тэгшитгэлд
орлуулбал $4k + 3 - 2 \equiv 0(9) \Rightarrow 4k \equiv -1(9) \Leftrightarrow 4k \equiv 8(9) \Rightarrow k \equiv 2(9)$
буюу $k = 9t + 2$ болно. Иймээс $n = 4(9t + 2) + 3 = 36t + 11$ болох ба
3-р жишлэгт орлуулбал $36t + 11 - 1 \equiv 0(25) \Rightarrow 36t \equiv -10(25) \Rightarrow$
 $t \equiv 15(25)$ буюу $t = 25\ell + 15$ болно. Иймээс $n = 36(25\ell + 15) + 11 =$
 $900\ell + 551$ болох ба 4-р жишлэгт орлуулбал $900\ell + 551 \equiv 0(49) \Rightarrow$

$900\ell \equiv -551(49) \Rightarrow \ell = 32(49)$ буюу $\ell = 32 + 49m$ болно. Эндээс $n = 900(32 + 49m) + 551 = 29351 + 44100m$ гэж гарна. Иймд $\{29348, 29349, 29350, 29351\}$ тоонууд бодлогын нөхцлийг хангана.

VIII-A3. $\angle BA'A = \angle BCA = \gamma$, $\angle AA'C = \angle ABC = \beta$ болно.

$$\text{Нөгөө талаас } \begin{cases} \angle BOA' = 120^\circ - \gamma \\ \angle COA' = 120^\circ - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \angle OBA' = 60^\circ \\ \angle OCA' = 60^\circ \end{cases}$$

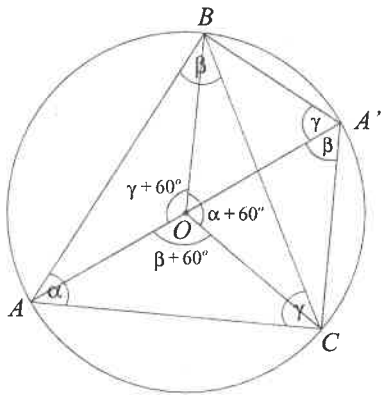
OBA' гурвалжны хувьд синусын теорем бичихэд $\frac{OB}{\sin \gamma} = \frac{OA'}{\sin 60^\circ}$. Үүн-

тэй адилаар $\frac{OC}{\sin \beta} = \frac{OA'}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \frac{OB}{\sin \gamma} = \frac{OC}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{OC}{OB} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$ болно. $\frac{OB}{OA} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$, $\frac{OA}{OC} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$ илэрхий. Нөгөө та-

лаас $\begin{cases} c \cdot \sin \alpha = h_b \\ c \cdot \sin \beta = h_a \end{cases} \Rightarrow \frac{h_b}{h_a} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$,

мөн $\frac{h_a}{h_c} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$, $\frac{h_c}{h_b} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$ болно.

$\frac{OB}{OA} = \frac{h_b}{h_a}$, $\frac{OA}{OC} = \frac{h_a}{h_c}$, $\frac{OC}{OB} = \frac{h_c}{h_b} \Rightarrow \frac{h_b}{OB} = \frac{h_a}{OA} = \frac{h_c}{OC}$ болно.



VIII-B1. Анх бодлого $n = 8$ гэж тавигдсан байсан боловч материал дээр ерөнхий байдлаар бичигдсэнээс болж хүнд бодлого болсонд хүлцэл өчье.

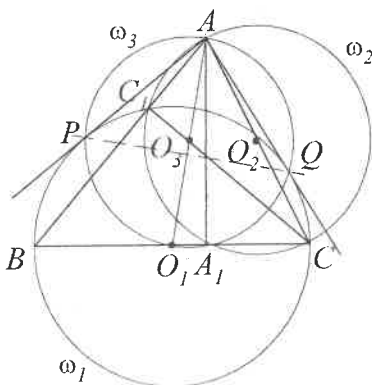
$n = 8$ үед дээрх нөхцлийг хангах 8 оронтой хичнээн тоо байхыг халз тоолж болно.

VIII-B2. Материал дээр $a_{n-1} > 0$, $a_{n-2} > 0$, ..., $a_1 > 0$ ба $b_{n-1} > 0$, $b_{n-2} > 0$, ..., $b_1 > 0$ гэж ойлгогдохоор бичигдсэнээс болж бодлого хялбархан бодогдох хэлбэрт шилжсэнд хүлцэл өчье. Бодолтын үндсэн санааг дурдъя.

Хэсэг тооны, ижил хэмжээтэй шоонуудыг өрсөн гээ. Тэдгээрийн хойно, урдаас нь эсвэл баруун, зүүн талаас нь харагдах байдлыг сонирхъя. Энэ нь хэдэн квадратууд давхарлан өрсөн мэт харагдах бөгөөд яг k давхар квадрат харагдах баганын тоо, урдаасаа a_k , хажуугаасаа b_k , хамгийн олон давхар нь n байг. Тэгвэл яг ийм байдлаар харагдах шоонуудын байж болох хамгийн цөөн тоо нь: $S_{\min} = n \cdot \max\{a_n, b_n\} + (n-1) \max\{a_{n-1}, b_{n-1}\} + \dots + \max\{a_1, b_1\}$ ба хамгийн ихдээ $S_{\max} = a_n b_n + (a_n + a_{n-1})(b_n + b_{n-1}) +$

$\dots + (a_n + \dots + a_1)(b_n + \dots + b_1)$ болно. Энэ тохиолдолд баруун зүүн ба урд хойд талаас нь проекцлосон дурын зурганд ингэж харагдахаар шоонуудыг ямагт өрж болох учир $S_{\max} \geq S_{\min}$ болно.

VIII-B3. BC диаметртэй тойргийг ω_1 , AC диаметртэй тойргийг ω_2 гэе. ω_2 тойргийн BC талтай огтлолцсон цэгийг A_1 , AB талтай огтлолцсон цэгийг C_1 гэвэл AA_1, CC_1 нь ABC гурвалжны өндрүүд болно. O_1 нь ω_1 тойргийн төв, O_2 нь ω_2 -ийн төв болог. $O_1P \perp AP$, $O_1Q \perp AQ$ учир AO_1 диаметртэй тойрог дээр A, P, O_1, Q цэгүүд орших бөгөөд уг тойргийг ω_3 гэе. ω_3 тойргийн төв O_3 болог.



PQ нь ω_1, ω_3 тойргийн ерөнхий хөвч, CC_1 нь ω_1, ω_2 тойргийн ерөнхий хөвч, AA_1 нь ω_2, ω_3 тойргийн ерөнхий хөвч бөгөөд $AA_1 \cap CC_1 = H$ билээ. Нөгөө талаас $O_1O_3 \perp PQ$, $O_2O_3 \perp AA_1$, $O_1O_2 \perp CC_1$ болох бөгөөд $O_1O_2O_3$ гурвалжны хувьд Карногийн теоремоор PQ шулуун дээр H цэг орших болж бодлого бодогдов.

КАРНОГИЙН ТЕОРЕМ. ABC гурвалжны AB, BC, CA талууд дээр C_1, A_1, B_1 цэгүүд орших бөгөөд эдгээр цэгүүдэд татсан перпендикулярууд нэг цэгт огтлолцох зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $|A_1B|^2 - |BC_1|^2 + |C_1A|^2 - |AB_1|^2 + |B_1C|^2 - |CA_1|^2 = 0$ байна.

ММО-41, VIII АНГИЙН IV ДАВАА

Б.Сандагдорж, Ч.Гантөмөр

VIII-A1 (Ч.Гантөмөр, М.Батбилэг). $n_1, n_2, \dots, n_{2005}$ нь ялгаатай бүхэл тоонууд бол $(n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + \dots + (n_{2004} - n_{2005})^2 + (n_{2005} - n_1)^2$ нийлбэрийн авч болох хамгийн бага утгыг ол.

VIII-A2 (Н.Аргилсан). a ба b үсгүүдээс тогтох төгсгөлгүй урттай үгэнд " a " үсгийг " ab " үгээр, " b " үсгийг " aab " үгээр нэгэн зэрэг солиход уг үг өөрчлөгдөөгүй болно. Тэгвэл энэ үгийн 2009 дахь үсгийг ол.

VIII-A3 (Б.Батбаясгалан). O төвтэй тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн диагоналиудын огтлолцлын цэг P байв. OP -д перпендикуляр шулуун нь дөрвөн өнцөгтийн талуудыг огтлох цэгийг M, N гэвэл $OM = ON$ гэж батал.

VIII-B1 (Б.Батцэнгэл). 8×8 хэмжээтэй квадратыг 1×2 хэмжээтэй 32 ширхэг тэгш өнцөгтөд хуваажээ. Зарим тэгш өнцөгтийг хараар, үлдсэн тэгш өнцөгтийг цагаанаар будахдаа 4 нүд нь ижлээр будагдсан 2×2 квадрат үүсэхгүй байхаар будав. Хар ба цагаан өнгийн тэгш өнцөгтийн тооны ялгавар хамгийн ихдээ хэд байж болох вэ?

VIII-B2 (Ч.Гантөмөр, Н.Дайвий-Од). $a_1, a_2, \dots, a_{2005}$ нь арифметик прогресс үүсгэх зэрэг тоонууд, $b_1, b_2, \dots, b_{2005}$ нь геометр прогресс үүсгэх тоонууд болно. Хэрэв $a_1 = b_1$ ба $a_{2005} = b_{2005}$ бол $a_1 + a_2 + \dots + a_{2005} \geq b_1 + b_2 + \dots + b_{2005}$ тэнцэл биш биелэхийг батал.

VIII-B3 (Б.Сандагдорж). APK, BPC гурвалжнуудын талбайнууд тэнцүү байхаар ABC гурвалжны AC тал дээр K, BD медиан дээр P цэг авав. AP ба BK шулуунуудын огтлолцлын цэгийн геометр байрыг ол.

VIII-A1. Ерөнхий тохиолдолд $n_1, n_2, \dots, n_k$ нь ялгаатай бүхэл тоонууд бол $(n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + \dots + (n_{k-1} - n_k)^2 + (n_k - n_1)^2$ нийлбэрийн авч болох хамгийн бага утга нь $4k - 6$ болохыг харуулъя. Юуны өмнө эдгээр бүхэл тоонуудын хамгийн бага нь $n_k = 0$ гэж үзэж болно. $n_0 = 0$ болог. $S_i = |n_i - n_{i-1}|$, $i \leq i \leq n$ болог. $\max\{n_1, n_2, \dots, n_k\} = n_r$ гэвэл $n - 1 \leq n_r = n_r - n_0 = |n_r - n_0| \leq |n_1 - n_0| + \dots + |n_r - n_{r-1}| = S_1 + \dots + S_r$ ба $n - 1 \leq n_r - n_0 = |n_k - n_r| \leq |n_{r+1} - n_r| + \dots + |n_k - n_{k-1}| = S_{r+1} + \dots + S_n$ болно. Эндээс $S_1 + S_2 + \dots + S_n \geq 2n - 2$ болно.

$$\left(\frac{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_n^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} \geq \frac{2n - 2}{n}$$

буюу $S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_n^2 \geq \frac{4n^2 - 8n + 4}{n} = 4n - 8 + \frac{4}{n}$. Иймд

$\sum_{i=1}^n S_i^2 \geq 4n - 8 + \left[\frac{4}{n}\right] + 1$ юм. $S_1^2 + \dots + S_n^2$ нь тэгш тоо бөгөөд $4n - 8$ нь мөн тэгш тоо ба $n \geq 2$ үед $S_1^2 + \dots + S_n^2 > 4n - 8$

учир $\sum_{i=1}^n S_i^2 \geq 4n - 8 + 2 = 4n - 6$ боллоо. 1-ээс n хүртэлх

тоонуудыг эхлээд 1, 3, 5, ... гэх мэтээр бүх сондгой тоонуудыг нь өсөх эрэмбээр бичиж дараа нь тэгш тоонуудыг буурах эрэмбээр

бичихэд үүсэх дарааллын хувьд $\sum_{i=1}^n S_i^2$ нийлбэрийг зохиовол утга

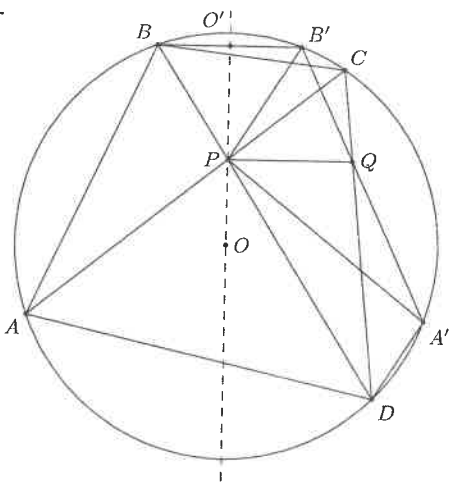
нь $2^2 \cdot (n - 2) + 1^2 + 1^2 = 4n - 6$ гарахыг харж болно. Өгөгдсөн бодлогын хувьд олбол зохих хамгийн бага утга нь $n = 2005$ үед $4 \cdot 2005 - 6 = 8014$ болно.

VIII-A2. Энэ үйлдлийг хийхэд төгсгөлгүй үгийн хувьд хэвээр үлдэх учир эхлэл $abaab \dots$ байх нь тодорхой. Ө.х. энэ үйлдлийг хэдэн ч удаа хийсэн үг инвариант байна. Иймд анхны a үсгээс энэ үйлдлийг хийсээр төгсгөлгүй үг үүсгэсэн гэж үзэж болно. S_k нь " a " үсэг дээр $(k - 1)$ удаа үйлдэл хийхэд гарах үгийг тэмдэглэе. Тэгвэл $S_1 = a \rightarrow S_2 = ab \rightarrow S_3 = abaab \rightarrow S_4 = abaabababaab \rightarrow \dots$ болно. Эндээс $k \geq 3$ үед $S_k = \overline{S_{k-1} S_{k-2} S_{k-1}}$ (залгуулж бичсэн) хэлбэр үргэлж биелнэ. S_k -ийн үсгийн тоог n_k гээ. Тэгвэл $n_k = 2 \cdot n_{k-1} + n_{k-2}$ байна.

$k = 1$ үед $n_1 = 1$	$k = 6$ үед $n_6 = 70$
$k = 2$ үед $n_2 = 2$	$k = 6$ үед $n_7 = 169$
$k = 3$ үед $n_3 = 5$	$k = 6$ үед $n_8 = 408$
$k = 4$ үед $n_4 = 12$	$k = 6$ үед $n_9 = 985$
$k = 5$ үед $n_5 = 29$	$k = 6$ үед $n_{10} = 2378$

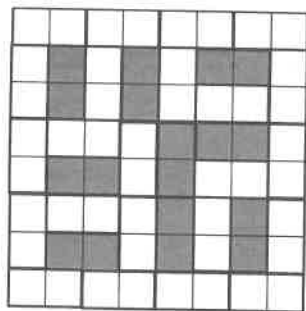
Иймд 2005 дахь үсэг нь S_{10} -д хувагдана. $n_{10} = 985 + 408 + 985 \Rightarrow 2005 - 985 - 408 = 612$, ө.х. 2005 дахь үсэг нь S_9 -ийн 612 дахь үсэг болно. $n_9 = 985 = 408 + 169 + 408 \Rightarrow 612 - 408 - 169 = 35 \Rightarrow n_6 > 35$ тул энэ үсэг нь S_2, S_7 болон S_6 -ийн 35 дахь үсэг болно. $S_6 = 70 = 29 + 12 + 29 \Rightarrow 35 - 29 = 6 \Rightarrow S_4$ -ийн 6 дахь үсэг болох буюу $S_4 = abaabababaab$ тул 6 дахь үсэг " a ". Эндээс 2005 дахь үсэг " a " байна.

VIII-A3. Бодлогын өгүүл-
бэр алдаатай тавигдсан. Сүү-
лийн өгүүлбэрийг “ OP -д пер-
пендикуляр, P -г дайрсан шу-
луун дөрвөн өнцөгтийн AB ,
 CD талуудыг огтлох цэгийг
 M , N гэвэл $OM = ON$ гэж
батал.” гэж ойлгоно. OP шу-
лууны хувьд A , B цэгүүдтэй
тэгш хэмтэй цэгүүдийг A' , B'
гээ. CD ба $A'B'$ хэрчмүү-
дийн огтлолцлыг Q гээ. Мөн
 OP ба BB' -ийн огтлолцлыг
 O' гээ. Нэг нумд тулсан



өнцгүүд тул $\angle ABD = \angle ACD$ ба $\triangle ABP = \triangle A'B'P$ гэдгээс
 $\angle ABP = \angle A'B'P$ болно. Эндээс $\angle PB'Q = \angle PB'A' = \angle PBA =$
 $\angle ABD = \angle ACD = \angle PCQ$ буюу $B'CQP$ дөрвөн өнцөгт тойрогт
багтана. Үүнтэй яг адилаар $QA'DP$ дөрвөн өнцөгт тойрогт баг-
тана. $B'CA'D$ тойрогт багтсан гэдгээс $\angle CB'Q = \angle A'DQ$ ба
 $PB'CQ$ ба $PQA'D$ дөрвөн өнцөгтүүд тойрогт багтана гэдгээс
 $\angle CB'Q = \angle CPQ$ ба $\angle A'PQ = \angle CPQ$ болно. $PB'CQ$ ба $PQA'D$
дөрвөн өнцөгтүүд тойрогт багтана гэдгээс $\angle CPB' = \angle CQB'$ ба
 $\angle A'PD = \angle A'QD$ буюу $\angle CPB' = \angle CQB' = \angle A'QD = \angle A'PD$
болно. Нөгөө талаас $\angle B'PO' = \angle OPD$ тул $\angle O'PQ = \angle OPQ =$
 $90'$ болно. Өөрөөр хэлбэл Q цэг N цэгтэй давхцах ба M цэгийн
 OP шулууны хувь дахь тэгш хэмтэй цэг болно. Эндээс $OM =$
 ON байх нь ойлгомжтой.

VIII-B1. Зурагт үзүүлсний дагуу
9 хар 23 цагаанаар будаж болно. Энэ
үед 2×1 тэгш өнцөгтүүдийн ялгавар 14
болно. Одоо 14-өөс их байж болохгүйг
баталъя. Хэрэв 14-өөс их байсан бол
будагдсан хар нүдний тоо 9-өөс бага
байх ёстой. 8 байдаг гээ. 8×8
квадратаас 2×2 квадратыг нийт 49 ял-

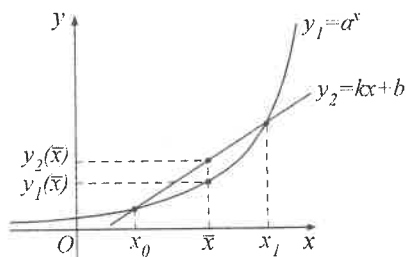


гаатайг сонгож чадна. Харин 1 ш домино нь хамгийн олондоо 6 ширхэг 2×2 -т л орж чадна. $8 \cdot 6 = 48$ гэдгээс нийт 49 ширхэг 2×2 байгаа тул дор хаяж 9-г будна. Иймд ялгавар нь 14 байна.

VIII-B2. $1 \leq k \leq 2005$

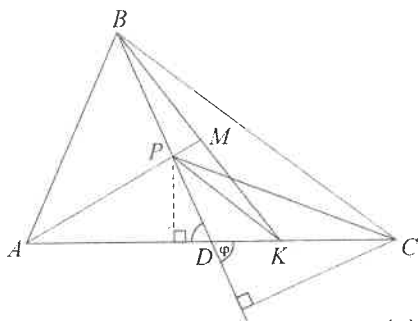
$$\text{бол } b_k = b_1^{\frac{2005-k}{2005-1}} \cdot b_{2005}^{\frac{k-1}{2005-1}} = b_1^{\frac{2005-k}{2004}} \cdot b_{2005}^{\frac{k-1}{2004}} = a_1^{\frac{2005-k}{2004}} \cdot a_{2005}^{\frac{k-1}{2004}} \leq \frac{2005-k}{2004} a_1 + \frac{k-1}{2004} a_{2005} = a^k$$

Эндээс $a_1 + a_2 + \dots + a_{2005} \geq b_1 + b_2 + \dots + b_{2005}$ байх нь батлагдав. Энэ бодлогын геометр утга нь зурагт үзүүлснээр тайлбарлагдана.



VIII-B3. $AP \cap BK = M$

байг. BD медиан AC талтай үүсгэх өнцгийг φ гэвэл P цэгээс AC талд буулгасан өндөр $h_1 = PD \sin \varphi$, C цэгээс BD шулуунд буулгасан өндөр $h_2 = CD \sin \varphi$ болно. Эндээс $S_{APK} = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot PD \cdot \sin \varphi$, $S_{PBC} = \frac{1}{2} \cdot BP \cdot CD \cdot \sin \varphi$ болох буюу $S_{APK} = S_{PBC}$ гэдгээс



$$AK \cdot PD = BP \cdot CD \quad (*)$$

болно. $\triangle DBK$ хувьд Менелайн теорем бичвэл $\frac{BM}{MK} \cdot \frac{KA}{AD} \cdot \frac{DP}{PB} = 1$ буюу $(*)$ -оос $BM = MK$ гэж гарна. Эндээс бодлогын нөхцлийг хангах M цэгийн геометр байр нь AC талтай параллель ABC гурвалжны дундаж шугам болно.

Б.Баяржаргал

IX-A1 (Б.Баяржаргал). mn ба $(m+1)(n+1)$ нь бүтэн квадрат байх (m, n) ялгаатай хос төгсгөлгүй олон байх уу?

IX-A2 (Б.Баяржаргал). $p(x) = 5 \cdot x^{2004} + 2$ олон гишүүнтийг бүхэл коэффициенттэй 2 олон гишүүнтийн квадратуудын нийлбэрт тавьж болох уу?

IX-A3 (Б.Баяржаргал). $\triangle ABC$ -д багтсан тойргийн төв I байг. I -г дайрсан AB , AC шулуунуудыг харгалзан X ба Y цэгт шүргэдэг тойрог татжээ. Тэгвэл XY хэрчим нь ABC -д багтсан тойргийг шүргэнэ гэж батал.

IX-B1 (Б.Баяржаргал). $F(x) = x^{2004} - x^{1002} + 1, \forall i \neq j$ хувьд $a_i a_j \mid F(a_i)F(a_j)$ байх $a_1, a_2, \dots, a_{2005}$ натурал тоонууд олдох уу?

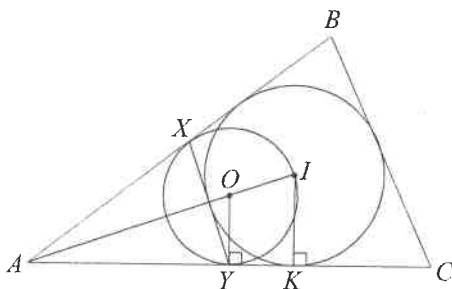
IX-B2 (Б.Баяржаргал). Хавтгайд аль ч 2 нь ерөнхий цэггүй ба нэг шулуун дээр оршдоггүй 30 хэрчим өгөгджээ. Тэгвэл аль ч хэрчмийг агуулсан шулуун бүр нь өөр 15-н хэрчмийг дотоод цэгээр нь огтолдог байж болох уу?

IX-B3 (Б.Баяржаргал). A ба B цэгт огтолдог 2 тойрог өгөгджээ. Уг 2 тойрогт эхний тойргийг C цэгт, хоёр дахийг D цэгт шүргэдэг ерөнхий шүргэгчийг A -г бодвол B -д илүү ойр байхаар татжээ. CB шулууны хоёр дахь тойрогтой огтлолцох цэгийг E гэвэл AD нь $\angle CAE$ -ийн биссектрис гэж батал.

IX-A1. $a^1 - 1 = 2b^2, a, b \in \mathbb{N}$ Пелегийн тэгшитгэл нь төгсгөлгүй олон шийдтэй. $a_1^2 - 1 = 2b_1^2, a_2^2 - 1 = 2b_2^2$ байх $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ гэсэн ялгаатай шийдүүдийг авъя. Тэгвэл $m = 2b_1^2, n = 2b_2^2$ гэвэл манай нөхцлийг хангах шийдүүд болно. Иймд (m, n) хос төгсгөлгүй олон байна.

IX-A2. $p(x) = q_1^2(x) + q_2^2(x)$ гэе, энд $q_1(x), q_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Тэгвэл $p(1) = q_1^2(1) + q_2^2(1)$ ба $q_1(1), q_2(2) \in \mathbb{Z}$ гэтэд $p(1) = 5 \cdot 1^{2004} + 2 = 7$ болох ба 7 нь 2 бүхэл тооны квадратуудын нийлбэрт тавигдахгүй.

IX-A3. Сүүлд татсан тойргийн төв O , $XY \cap AI = P$ гээ. Мөн $OY = r$, $IK = R$ гээ.



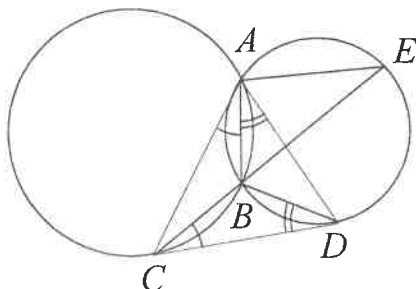
$\triangle AOY \sim \triangle AIK \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{AI}{AO}$ буюу $O = \frac{r}{R} \cdot AI$ $AI - AO = r = AI \left(1 - \frac{r}{R}\right) \Rightarrow AI = \frac{Rr}{R-r}$ $AO = \frac{r}{R} \cdot \frac{Rr}{R-r} = \frac{r^2}{R-r}$ $\triangle APY \sim \triangle AOY$ ($AX = AY$ гэдгээс $\angle APY = 90^\circ$) $\frac{AO}{AY} = \frac{AP}{AY} \Rightarrow AP = \frac{AY^2}{AO} = \frac{AO^2 - r^2}{AO} = AO - \frac{r^2}{AO} = \frac{r^2}{R-r} - (R-r)$ $AI - AP = IP = \frac{Rr}{R-r} + R - r = \frac{(R-r)r}{R-r} + R - r = R$. Иймд P нь ABC -д багтсан тойрог дээр оршино. P -д татсан шүргэгч нь AI -д перпендикуляр байдаг учир XY -тэй давхцана.

IX-B1. $\forall i$ хувьд $F(a_i) = a_i^{2004} - a_i^{1002} + 1 \Rightarrow (F(a_i), a_i) = 1$ $a_i a_j \mid F(a_i) F(a_j)$ гэдгээс $a_j \mid F(a_i)$, $\forall i \neq j$ болно. $\forall i, j$ авъя. $(a_i, a_j) = d$ байг. $F(a_i) = a_i^{1002}(a_i^{1002} - 1) + 1 = d \cdot A + 1$ учир $(F(a_i), d) = 1$. Мөн $(F(a_j), d) = 1$ ба $d \mid a_i a_j \mid F(a_i) F(a_j)$ гэдгээс $d = 1$ болно. $a_1 < a_2 < \dots < a_{2005}$ гээ. $a_j \mid F(a_1)$, $j = 2, 3, \dots, 2004$ ба $\forall j$ хувьд $(a_j, a_1) = 1$ учир $a_2 a_3 \dots a_{2004} \mid F(a_1) = a_1^{2004} - a_1^{1002} + 1 \Rightarrow a_2 a_3 \dots a_{2004} \leq a_1^{2004} - a_1^{1002} + 1 \leq a_1^{2004} < a_2 a_3 \dots a_{2004}$ болж зөрчил үүсэв. Иймд ийм тоонууд олдохгүй.

IX-B2. a хэрчмийг агуулсан шулуун b хэрчмийг дотоод цэгээр нь огтолдог бол b -г агуулсан шулуун a хэрчмийг дотоод цэгээр нь огтлохгүй. Учир нь хэрэв огтолдог бол a ба b -г агуулсан 2 шулуун 1 цэгээр огтлолцдог гэдгээс a ба b хэрчмүүд нь огтлолцдог болно. Гэтэл бүгд хоорондоо огтлолцохгүй гэж өгсөн. a хэрчмийг агуулсан шулуун b хэрчмийг дотоод цэгээр нь огтолдог гэвэл (a, b) гэж тэмдэглэе. Тэгвэл a хэрчмийн хувьд (a, b) хосын тоо дор хаяж 15 болох ба a хэрчим өөрөө 30 янзаар хувирах учир уг хосын тоо

$30 \cdot 15 = 450$ болно (Энд хосууд давхцана гэж байхгүй). Гэтэл 30 хэрчим хамгийн ихдээ $C_{30}^2 = \frac{30 \cdot 29}{2}$ хос үүсгэнэ. Иймд зөрчил үүсч байна.

IX-B3. CD нь эхний тойргийг шүргэнэ гэдгээс $\angle DCB = \angle CAB$ мөн CD нь II тойргийг шүргэнэ гэдгээс $\angle CDB = \angle DAB$ мөн $\angle DBE = 180^\circ - \angle CBD = \angle BCD + \angle BDC = \angle CAB + \angle BAD = \angle CAD$. $\angle DBE = \angle DAE$ нэг нумд тулсан иймд $\angle CAD = \angle DAE$ буюу AD нь $\angle CAE$ -ийн биссектрис болно.



ММО-41, IX АНГИЙН IV ДАВАА

Б.Баяржаргал

IX-A1 (Б.Баяржаргал). $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ба $\forall x \in \mathbb{R}, f(x - f(x)) = \frac{x}{2}$ байх тасралтгүй бүх функцийг ол.

IX-A2 (Ц.Гэрэлт). $n! = p^m - m$ тэгшитгэлийг бод. p анхны тоо, $m \geq 2, m, n \in \mathbb{N}$.

IX-A3 (Б.Сандагдорж). A ба B цэг нь R радиустай O цэгт төвтэй ω тойрог дээр оршино. Тойргийн A, B цэгүүдэд татсан шүргэгчүүд P цэгт огтлолцов. AB хэрчмийн дундаж цэгийг дайрсан ω тойргийн MK хөвчүүдийг татав. MKP гурвалжинд багтсан тойргийн төвүүдийн геометр байрыг ол.

IX-B1 (Б.Батбаясгалан). Хавтгайн аль ч хоёрынх нь хоорондох зай 1-ээс хэтрэхгүй ерөнхий байршилтай 9 цэгээс талуудынх нь урт $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -оос хэтрэхгүй гурвалжны орой болох 3 цэг сонгож болохыг батал.

IX-B2 (Б.Батцэнгэл). ABC гурвалжны BC, CA, AB талууд дээр A_1, B_1, C_1 цэгүүдийг AA_1, BB_1, CC_1 хэрчмүүд нэг цэгт

огтлолцож байхаар авав. AA_1, BB_1, CC_1 хэрчмийн дундаж цэгүүд A_2, B_2, C_2 ба A_2B_2, A_2C_2 шулуунууд BC талыг P, Q цэгт огтолно. Тэгвэл $BP = QC$ гэж батал.

IX-B3 (Г.Энхтайван). $a_1, a_2, \dots, a_n$ нь эерэг тоонууд ба $a_1 + a_2 + \dots + a_n = S$ гэе. Тэгвэл

$$\frac{a_1}{S - a_1} + \frac{a_2}{S - a_2} + \dots + \frac{a_n}{S - a_n} + \frac{S - a_1}{a_1} + \frac{S - a_2}{a_2} + \dots + \frac{S - a_n}{a_n}$$

нийлбэрийн авч болох хамгийн бага утгыг ол.

IX-A1.

$$x - f(x) = g(x) \quad (1)$$

гэе. Тэгвэл $f(x)$ нь тасралтгүй, x нь тасралтгүй функц учир $g(x)$ нь тасралтгүй. (1)-д $x \rightarrow g(x)$ гэвэл $g(x) - f(g(x)) = g(g(x))$ ба өгсөн нөхцлөөс $f(g(x)) = \frac{x}{2}$ гарна. Эндээс

$$g(g(x)) = g(x) - \frac{x}{2} \quad (2)$$

ба мөн энд $x \rightarrow g(x)$ гэвэл

$$g(g(g(x))) = g(g(x)) - \frac{g(x)}{2} \stackrel{(2)}{=} g(x) - \frac{x}{2} - \frac{g(x)}{2} = \frac{g(x) - x}{2} \quad (3)$$

болно. Ямар нэг x, y дээр $g(x) = g(y)$ гэвэл $g(g(x)) = g(g(y))$ буюу $0 = g(g(x)) - g(x) - \frac{x}{2} = g(g(y)) - g(y) + \frac{x}{2} = g(g(y)) - g(y) + \frac{y}{2}$ буюу $x = y$ болно. Иймд $g(x)$ функц харилцан нэг утгатай. Харилцан нэг утгатай тасралтгүй функц эрс монотон функц байдаг. (2)-т $x = 0$ гэе. Тэгвэл $g(g(0)) = g(0)$ болох ба $g(0) = c$ гэвэл $g(c) = c$ болно. (2)-т $x = c$ гэвэл $g(g(c)) = g(c) - \frac{c}{2}$ буюу $g(g(c)) = g(c) = c$ гэдгээс $\frac{c}{2} = 0$ буюу $c = 0$ гэж гарна, ө.х. $g(0) = 0$.

а) $g(x)$ өсдөг гэе. Тэгвэл $x > 0$ үед $g(x) > g(0) = 0$ болох ба $g(x) \geq x$ гэвэл $g(g(x)) \geq g(x)$ буюу $g(x) - \frac{x}{2} \geq g(x) \Rightarrow x < 0$ болж зөрчил. Иймд $g(x) < x$ болно. Иймд $g(g(g(x))) = \frac{g(x) - x}{2} < 0$ болно. Гэтэл $g(x) > 0, g(g(x)) > 0, g(g(g(x))) > 0$. Иймд зөрчил.

б) $g(x)$ буурдаг гэе. Тэгвэл $x > 0$ үед $g(x) < 0 \Rightarrow g(g(x)) > 0 \Rightarrow$

$$g(g(g(x))) < 0 \quad (*)$$

болно. Мөн $g(x) \leq x$ үед $g(g(x)) \geq g(x)$ буюу $g(x) - \frac{x}{2} \geq g(x)$, $x \leq 0$ болж зөрчил. Иймд $g(x) > x$ болно. Гэтэл $g(g(g(x))) = \frac{g(x)-x}{2} > 0$. Энэ нь (*)-той зөрчилдөнө. Иймд ийм функц оршин байхгүй.

IX-A2. I. $p > n$ үед

а) $m > n$ үед $n! = p^m - m \geq (n+1)^m - m \geq n^m > n^n \Rightarrow \emptyset$.

б) $m \leq n$ үед $n! : m$ учир $p^m : m$ болно. $m \geq 2$ учир $m = p^s$ болно. Гэтэл $m = p^s \leq n < p \Rightarrow \emptyset$.

II. $n \geq p$ үед $n! : p \Rightarrow m \equiv 0(p) \Rightarrow m = pk$, $k \in \mathbb{N}$.

а) $k = 1$ үед $p = 2$ бол $2^2 - 2 = 2$. $p \geq 3$ бол $\text{ord}_2 n! = \text{ord}_2(p^p - p) = \text{ord}_2(p^{p-1} - 1)$ байна. $n! = p^m - p \not\equiv p^2 \Rightarrow n < 2p$, $\text{ord}_2(n!) = \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n}{4} \right] + \dots > \frac{p}{2} + \frac{p}{4} = \frac{3}{4}p$. $\text{ord}_2(p-1) = s$ гэвэл $\text{ord}_2(p^{p-1} - 1) = \text{ord}_2(p-1) + \text{ord}_2(p+1) + (s-1) < 3 \log_2 p - 1$ байна. Иймд $\frac{3}{4}p < 3 \log_2 p - 1$ гэж гарна. $\Rightarrow p < 16$ болно. Энэ тохиолдолд $3^3 - 3 = 4!$ гэсэн ганц шийдтэй шалгах болно.

б) $k \geq 2$ үед

1) $n < 2p$ байг. $p^m - m = n! \leq (2p-1)! < \left(\frac{(2p-1)+1}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{(2p-2)+1}{2} \right)^2 \dots \cdot p = p^{2p-1}$

$$f(x) = p^x - x \quad (*)$$

функц өсдөг учир $2^{2p-1} > p^m - m \geq p^{2p} - 2p \Rightarrow 2p > p^{2p-1}(p-1) \Rightarrow 2 > p^{2p-2} \cdot (p-1) > p^{2p-2} \geq 4 \Rightarrow \emptyset$.

2) $n \geq 2p$ үед $\text{ord}_p(n!) = \left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \dots \geq \left[\frac{n}{p} \right] \Rightarrow n! : p^{\left[\frac{n}{p} \right]}$, $\left[\frac{n}{p} \right] = t$

гэе. $n! = p^m - m : p^t \Rightarrow m : p^t \Rightarrow m \geq p^t$, $n^{n-1} > n! = p^m - m \geq p^{p^t} - p^t \Rightarrow n^n > n(p^{p^t} - p^t) > p^{p^t}$. $n^n < ((t+1)p)^{(t+1)p} \Rightarrow ((t+1)p)^{(t+1)p} > p^{p^t} \Rightarrow ((t+1)p)^{t+1} > p^{p^{t-1}}$.

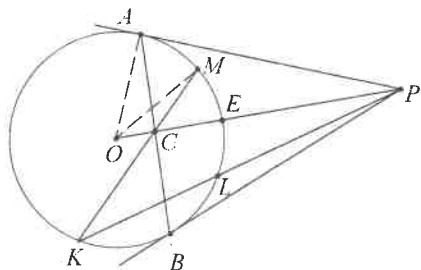
• $p^{t-1} \geq (t+1)t$ бол $((k+1)p)^{t+1} > p^{p^{t-1}} > p^{(t+1)t} \Rightarrow (t+1)p > p^t$.
 $p^t = p \cdot p^{t-1} \geq p(t+1)t$ учир $(t+1)p > p(t+1)t \Rightarrow \emptyset$.

• $p^{t-1} < (t+1)t$ байх үед мөн шийдгүйг шалгах болно. Тэгэхээр
 $p = 3$, $m = 3$, $n = 4$
 $p = 2$, $m = 2$, $n = 2$ гэсэн хариутай.

IX-A3. $OP \cap \omega = E$,
 $OP \cap AB = C$, $PK \cap \omega = L$
байг. $\left. \begin{array}{l} AC^2 = OC \cdot CP \\ AC \cdot CB = KC \cdot CM \end{array} \right\}$

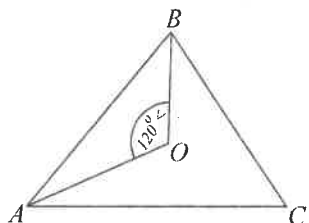
гэдгээс $OC \cdot CP = KC \cdot CM$ учир
 K, O, M, P цэгүүд нэг тойрог
дээр оршино. $\angle POM = \angle PKM$
учир $\frac{1}{2} \widehat{LM} = \widehat{EM}$ буюу E нь
 LM нумын дундаж цэг болно.

Иймээс бидний олох геометр байр нь E цэг байна.



IX-B1 Аль ч хоёрынх нь хоорондох зай нь 1-ээс бага байдаг
4 цэг авъя.

а) Хэрэв гүдгэр бүрхүүл нь гурвалжин
бол тэдгээрийн дотор орших цэг нь гур-
валжны оройн аль нэг 120° -аас их байна.
 $\angle AOB \geq 120^\circ$ гээ. Косинусын теоремоос
 $AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cos \angle AOB$
буюу $1 > AB^2 > AO^2 + OB^2$ гэдгээс
 $\min(AO, OB) < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

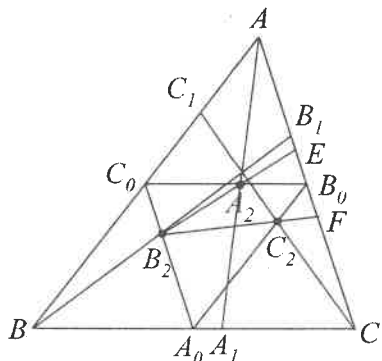


б) Хэрэв гүдгэр бүрхүүл нь дөрвөн өнцөгт бол хоорондох өнцөг нь
 90° -аас их байдаг $\angle AOB$ олдох бөгөөд $AB < 1$ гэдгээс өмнөхтэй
ижил $\min(AO, OB) < \frac{1}{\sqrt{2}}$ болно.

Одоо өгөгдсөн цэгүүдийг холбосон хэрчмийн хоорондох зай
нь $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -аас бага бол улаан өнгөөр, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -аас багагүй бол хөх өнгөөр

будъя. $R(3, 4) = 9$ (Рамсейн тоо)
тул улаан өнгийн 3 эсвэл ирмэгүүд
нь хөх байх 4 цэг олдоно. Гэтэл
хөх дөрвөн өнцөгт олдохгүй тул
улаан 3 олдоно.

IX-B2. $A_0B_0C_0$ гэсэн дун-
даж гурвалжинг байгуулъя. Тэг-
вэл A_2, B_2, C_2 цэгүүд нь $AA_1, BB_1,$
 CC_1 хэрчмүүдийн дундаж цэгүүд



болно.

$$\frac{C_0 A_2}{A_2 B_0} = \frac{B A_1}{A_1 C}, \quad \frac{A_0 C_2}{C_2 B_0} = \frac{B C_1}{A C_1}, \quad \frac{B_2 A_0}{C_0 B_2} = \frac{B_1 C}{B_1 A}$$

гэдгээс

$$\frac{C_1 A_2}{A_2 B_1} \cdot \frac{C_2 B_0}{A_0 C_2} \cdot \frac{A_0 B_2}{C_0 B_2} = 1 \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \Delta C_0 A_2 B_2 \sim \Delta B_0 A_2 E &\Rightarrow EB_0 = C_0 B_2 \frac{A_2 B_0}{C_0 A_2} \\ \Delta B_2 C_2 A_0 \sim \Delta F C_2 B_0 &\Rightarrow B_0 F = B_2 A_0 \frac{C_2 B_0}{A_0 C_2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$AE = FC \Leftrightarrow B_0 E = B_0 F \Leftrightarrow C_0 B_2 \frac{A_2 B_0}{C_0 A_2} = B_2 A_0 \frac{C_2 B_0}{A_0 C_2} \Leftrightarrow \frac{C_0 A_2}{A_2 B_0} \cdot \frac{C_2 B_0}{A_0 C_2} \cdot \frac{B_2 A_0}{C_0 B_2} = 1 \Leftrightarrow (*) \text{ болж батлагдав.}$$

$$\begin{aligned} \text{IX-B3. } A &= \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{S - a_i} + \sum_{i=1}^n \frac{S - a_i}{a_i} = \sum_{i=1}^n \frac{S}{S - a_i} - n + \sum_{i=1}^n \frac{S}{a_i} - \\ n &= S \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} + S \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{S - a_i} - 2n \geq S \cdot \frac{n}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}} + S \cdot \frac{n}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (S - a_i)}} - \\ 2n &\geq S \cdot \frac{n}{\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}} + S \cdot \frac{n}{\frac{\sum_{i=1}^n (S - a_i)}{n}} = S \cdot \frac{n^2}{S} + S \cdot \frac{n^2}{(n-1)S} - 2n = \\ n \cdot \frac{(n-1)^2 + 1}{n-1}. &\text{ Иймд } a_1 = a_2 = \dots = a_n \text{ үед тэнцэтгэл болно.} \end{aligned}$$

ММО-41, X АНГИЙН III ДАВАА

Б.Батбаясгалан

X-A1 (Б.Батбаясгалан). 2n хүүхэдтэй ангийн сурагчдыг баг бүрд 2 найз орсон байхаар тус бүр нь 2 хүүхэдтэй n баг болгон хуваах болов. Хэрэв үүнийг цор ганц аргаар гүйцэтгэх боломжтой нь тогтоогдсон бол найз хосын тоо хамгийн ихдээ n^2 болохыг батал.

Х-А2 (Б.Батбаясгалан). Зөвхөн a, b үсгүүдээр зохиогдох ba үгийг тэгш ба сондгой тоотой агуулсан n урттай үгийн тоог харгалзан T_n ба C_n гэе. Жишээ нь: babbbba, aaaaaab нь T_7 -д, aabbabb, ba baaba нь C_7 -д хамаарна. Ямар $n \in \mathbb{N}$ тооны хувьд $T_n = C_n$ байх вэ?

Х-А3 (Б.Батбаясгалан). Тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгт өгчээ. ABC , ABD , ACD , BCD гурвалжнуудын орто төвүүдээр үүссэн дөрвөн өнцөгт мөн тойрогт багтах ба багтаасан тойргийн радиус нь $ABCD$ -г багтаасан тойргийн радиустай тэнцүү гэж батал.

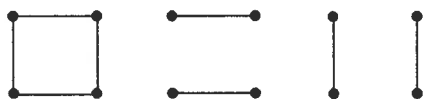
Х-В1 (Б.Батбаясгалан). N ширхэг банз бүхий тойрог хэлбэрийн модон хашааг Бат будахаар болов. Тэрээр хашааг цагийн зүүний дагуу будахдаа дараах дүрмийг ашиглав. Эхний банзыг будсаны дараа 2 банз орхиод дараагийн банзыг будна, үүний дараа 3 банз орхиод дараагийн банзыг будна гэх мэтчилэн алхам бүрдээ өмнөхөөсөө 1-ээр илүү банз орхиж будаж байв (Зарим банз дахин дахин будагдаж болно). Бат хэзээ нэгэн цагт бүх банзыг дуусгана гэж бодож байв. Гэтэл түүний авга ах Дорж нь зарим банз будагдахгүй үлдэх юм байна гэжээ. Хэрэв N нь 2-ын зэрэг бол Батын зөв, бусад үед авга ах Доржийн зөв болохыг батал.

Х-В2 (Б.Батбаясгалан). Хавтгайн цэгүүдийг 2 өнгөөр будахад оройнууд нь ижил өнгийн байх 1 талтай зөв гурвалжин олдож байв. Тэгвэл $|a - b| < 1 < a + b$ байх дурын $a, b > 0$ тоонуудын хувьд нэг өнгийн оройтой, 1, a, b талуудтай гурвалжин олдохыг батал.

Х-В3 (Б.Батбаясгалан). Тетраэдрийн 4 талсын талбайнууд нь хоорондоо тэнцүү бол эдгээр 4 талс бүгд тэнцүү гэж батал.

Х-А1. Хүүхдүүдээ графын оройгоор, найз хосуудыг ирмэгээр төлөөлүүлэе. Тэгвэл графын оройнуудыг хоорондоо холбогдсон n ширхэг хос болгон хувааж болно. Эдгээрээс аль нэг хосыг нь хасаад үлдэх хосуудыг сонирхвол тэдгээрийг мөн л цор ганц аргаар хосуудад хувааж болох нь ойлгомжтой. Индукцээр үлдэх оройнуудыг холбосон ирмэгийн тоо $(n - 1)^2$ -аас хэтрэхгүй. Түүнээс

гадна сонгогдсон хосоос үлдэх оройнууд руу хамгийн ихдээ $2(n-1)$ ирмэг гарч болно.



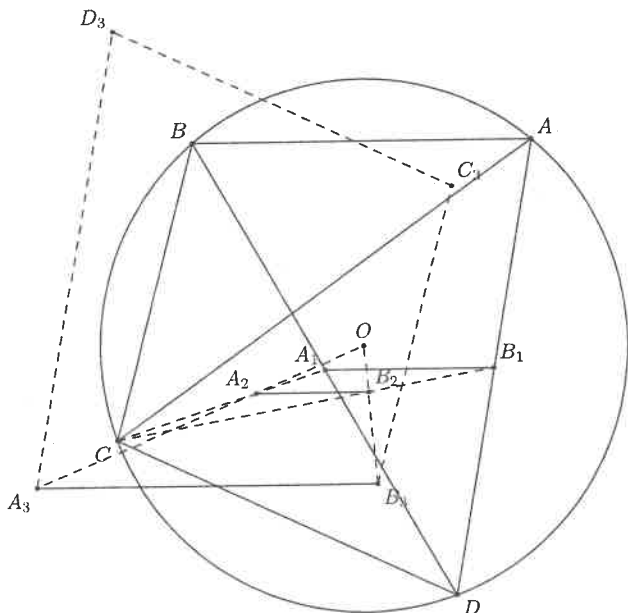
Эсрэг тохиолдолд сонгогдсон хосоос үлдэх хосуудыг аль нэг рүү дор хаяж 3 ирмэг гарах бөгөөд энэ тохиолдолд зурагт үзүүлсэн графын дэд хэсэг үүсэх бөгөөд үүнийг зурагт үзүүлснээр 2 янзаар хосуудад хувааж болно. Энэ тохиолдолд үлдэх оройнуудыг хоорондоо холбогдсон хосуудад хувааж болох тул цор ганц аргаар хосуудад хувааж болно гэдэгт зөрчинө.

Х-А2. a үсгээр төгссөн тэгш тооны ba агуулсан үгийн тоог Ta_n , сондгой тооны ba агуулсан үгийн тоог Ca_n , b үсгээр төгссөн тэгш тооны ba агуулсан үгийн тоог Tb_n , сондгой тооны ba агуулсан үгийн тоог Cb_n гэж тус тус тэмдэглэе. Тэгвэл $T_n = Ta_n + Tb_n$, $C_n = Ca_n + Cb_n$ байх нь илэрхий. Түүнчлэн үгийн сүүлээсээ 2 дахь үсэг нь ямар үсэг байхаас хамаарч $Ta_{n+1} = Ta_n + Cb_n$, $Tb_{n+1} = Ta_n + Tb_n$, $Ca_{n+1} = Tb_n + Ca_n$, $Cb_{n+1} = Ca_n + Cb_n$ болно. Мэдээж $Ta_1 = Tb_1 = 1$, $Ca_1 = Cb_1 = 0$ байна. Ямар нэг k -ийн хувьд $Ta_k = Tb_k = p$ ба $Ca_k = Cb_k = q$ ба $p \neq q$ гэж үзье. Одоо $n = k, k+1, k+2, k+3, k+4$ утгуудад дээрх тоонуудыг бодъё.

n	k	$k+1$	$k+2$	$k+3$	$k+4$
Ta_n	p	$p+q$	$p+3q$	$2p+6q$	$6p+10q$
Tb_n	p	$2p$	$3p+q$	$4p+4q$	$6p+10q$
Ca_n	q	$p+q$	$3p+q$	$6p+2q$	$10p+6q$
Cb_n	q	$2q$	$p+3q$	$4p+4q$	$10p+6q$
T_n	$2p$	$3p+q$	$4p+4q$	$6p+10q$	$12p+20q$
C_n	$2q$	$p+3q$	$4p+4q$	$10p+6q$	$20p+12q$

Нэгэнт $p \neq q$ тул $2p \neq 2q$, $3p+q \neq p+3q$, $6p+10q \neq 10p+6q$ байна. Иймээс $T_k \neq C_k$, $T_{k+1} \neq C_{k+1}$, $T_{k+2} = C_{k+2}$, $T_{k+3} \neq C_{k+3}$ байна. Мөн $Ta_{k+4} = Tb_{k+4}$ ба $Ca_{k+4} = Cb_{k+4}$ бөгөөд эдгээр нь хоорондоо ялгаатай хэвээр үлдэнэ. Иймд индукцээр $T_n = C_n$ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $n = 4m+3$ болно.

Х-А3. Багтаасан тойргийн төвийг O гэе. Мөн BD ба AD хэрчмүүдийн дунджуудыг харгалзан A_1, B_1 гэж нэрлэе.

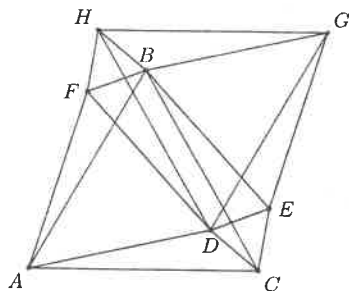


Тэгвэл $\triangle BCD, \triangle ACD$ -үүдийн хүндийн төвүүд нь C оройгоос A_1, B_1 цэгүүд хүртэлх зайн $\frac{2}{3}$ -д байрлана. Тэдгээрийг харгалзан A_2, B_2 гэе. Гурвалжны хүндийн төв нь уг гурвалжыг багтаасан тойргийн төв ба ортоцентрийг холбосон хэрчмийг $1 : 2$ харьцаагаар хуваадаг тул O дээр төвтэй 3 коэффициенттэй гомоте-тоор A_2, B_2 цэгүүд $\triangle ABD, \triangle ACD$ -үүдийн ортоцентр-т бууна. Нөгөө талаас $AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$ ба $AB = 2A_1B_1 = 3A_2B_2 = A_3B_3$ тул гурвалжнуудын ортоцентрээр үүсэж байгаа дөрвөн өнцөгт анхны дөрвөн өнцөгттэй тэнцүү болох нь харагдаж байна.

Х-В1. Банзуудыг $0, 1, 2, \dots, N - 1$ тоонуудаар дугаарласан ба хамгийн түрүүнд будагдсан банз 0 дугаартай байсан гэе. Хэрэв n -р удаад будагдах хашаа j гэсэн дугаартай байсан гэвэл $j \equiv \frac{(n-1)(n+4)}{2} \pmod{N}$ байна. Өөрөөр хэлбэл ямар ч j натурал тооны хувьд $j \equiv \frac{(n-1)(n+4)}{2} \pmod{N}$ тэгшитгэл шийдтэй бол бүх

хашааг будаж болно. Харин ямар нэг j натурал тооны хувьд $j \equiv \frac{(n-1)(n+4)}{2} \pmod{N}$ тэгшитгэл шийдгүй бол бүх хашааг будаж чадахгүй гэсэн үг. $N = 2^s$ гэе. Хэрэв $j \equiv \frac{(\ell-1)(\ell+4)}{2} \equiv \frac{(m-1)(m+4)}{2} \pmod{2^s}$ бол $\ell^2 + 3\ell \equiv m^2 + 3m \pmod{2^{s+1}}$ буюу $(\ell-m)(\ell+m+3) \equiv 0 \pmod{2^{s+1}}$ болно. Эндээс $\ell \equiv m \pmod{2^{s+1}}$ эсвэл $\ell \equiv -m-3 \pmod{2^{s+1}}$ тул 2^{s+1} удаа будахад j дугаартай банз яг 2 удаа будагдана. Хашааг 2^{s+1} удаа будахад k банз будагдсан гэвэл давхардсан тоогоор нийт $2k$ банз будагдах тул $k = 2^s$ буюу бүх хашаа будагдана. Одоо $N = 2^s r$, r -сондгой гэе. Тэгвэл $j \equiv 2^{-1}(n-1)(n+4) \pmod{r}$ болно. Энд 2^{-1} нь 2-ийн r модулиархи урвуу. Хэрэв $r \neq 5$ бол $2^{-1}(1-1)(1+4) \equiv 2^{-1}(-4-1)(-4+4) \equiv 0 \pmod{r}$ ба $1 \not\equiv -4 \pmod{r}$ болно. Харин $r = 5$ үед $2^{-1} \equiv 3 \pmod{5}$ ба $3(3-1)(3+4) \equiv 3(4-1)(4+4) \pmod{5}$ байна. Энэ нь $n \in \{1, 2, 3, \dots, r\}$ үед $2^{-1}(n-1)(n+4)$ илэрхийлэл r модулиар ялгаатай үлдэгдлүүд өгч чадахгүйг харуулж байна. Өөрөөр хэлбэл ямар нэг j -ийн хувьд $j \equiv 2^{-1}(n-1)(n+4) \pmod{r}$ тэгшитгэл шийдгүй.

Х-В2. Эсрэгээс нь тийм гурвалжин олддоггүй гэе. Зурагт үзүүлсэн дүрсийг авч үзье. Энд $AB = BC = CA = DG = GH = HD = 1$, $BH = HF = FB = CD = DE = EC = a$, $AF = FD = DA = BG = GE = EB = b$ байна. ABC гурвалжны оройнууд улаан өнгөтэй гэе. Хэрэв D, E, F оройнуудын аль нэг



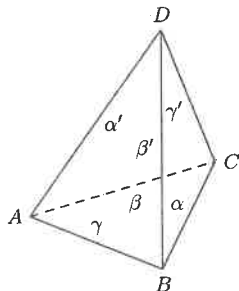
нь улаан бол улаан гурвалжин олдоход хүрнэ. Иймд D, E, F оройнууд цэнхэр гэе. Хэрэв G, H -ийн аль нэг нь цэнхэр бол DEG юмуу DFH нь нэг өнгийн гурвалжин болно. Харин G, H нь хоёул улаан тохиолдолд BGH нь нэг өнгийн гурвалжин болно.

Х-В3. Тетраэдрэ $ABCD$ гэе. Талсуудын талбайг S ; ABC , ABD талсуудын хоорондох өнцгийг γ ; BCA , BCD талсуудын хоорондох өнцгийг α ; CAB , CAD талсуудын хоорондох өнцгийг β ; ADB , ADC талсуудын хоорондох өнцгийг α' ; BDA , BDC талсуудын хоорондох өнцгийг β' ; CDA , CDB талсуудын хоорондох

өнцгийг γ' гэе.

Тэтэрдрийн талсын талбай нь уг талсыг агуулж байгаа хавтгай дахь бусад талуудын проекцүүдийн нийлбэртэй тэнцүү байдгийг ашиглавал:

$$\begin{cases} S \cos \alpha + S \cos \beta + S \cos \gamma = S \\ S \cos \alpha + S \cos \beta' + S \cos \gamma' = S \\ S \cos \alpha' + S \cos \beta + S \cos \gamma' = S \\ S \cos \alpha' + S \cos \beta' + S \cos \gamma = S \end{cases}$$



болох бөгөөд 2-4-р тэгшитгэлүүдийн нийл-
бэрээс 1-ийг хасаад $2S$ -д хураавал $\cos \alpha' + \cos \beta' + \cos \gamma' = 1$ болох
бөгөөд үүнийг S -ээр үржүүлээд 2-4-ээс хасвал $\cos \alpha = \cos \alpha'$,
 $\cos \beta = \cos \beta'$, $\cos \gamma = \cos \gamma'$ буюу $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$
болно. Нөгөө талаас тетраэдрийн оройнуудаас эсрэг талуудад
буусан өндрүүд нь $\frac{3V}{S}$ байх тул эдгээр нь хоорондоо тэнцүү байна.
Үүнийг h гэе. Тэгвэл ABD ба BDC гурвалжнуудын D ба B
оройнуудаас гарсан өндрүүд нь $\frac{h}{\sin \gamma}$ ба $\frac{h}{\sin \gamma'}$ болох тул хоорон-
доо тэнцүү. Нөгөө талаас ABD ба BDC гурвалжнуудын талбай
тэнцүү тул $AB = CD$ болно. Өөрөөр хэлбэл тетраэдрийн эсрэг
талууд хоорондоо тэнцүү. Эндээс батлах зүйл хялбар батлаг-
дана.

ММО-41, X ангийн IV даваа

Б.Батбаясгалан

Х-А1 (А.Ганбат). Хавтгай дээр 2005 ширхэг хар, 2005 ширхэг
цагаан тойрог өгөгдөв. Дурын хар тойрог нь ядаж 1003 ца-
гаан тойрогтой огтлолцдог, дурын цагаан тойрог нь ядаж
1003 хар тойрогтой огтлолцдог бол 1 хар, 2005 ширхэг ца-
гаан тойрогтой огтлолцох шулуун татаж болохыг батал.¹

¹Энэ бодлого алдаатай болсон бөгөөд өгүүлбэрийг тэр хэвээр нь өгөв.

Х-А2 (С.Сайнбаяр). Хурц өнцөгт ABC гурвалжны BC талаар диаметрээ хийсэн ω тойргийг гадаад байдлаар шүргэх, мөн AB , AC талуудыг шүргэх тойрог ω тойрогтой A_1 цэгт шүргэлцэнэ. Үүний адилаар B_1 , C_1 цэгүүдийг тодорхойлбол AA_1 , BB_1 , CC_1 шулуунууд 1 цэгт огтлолцохыг батал.

Х-А3 (Ц.Гэрэлт). $a \geq b \geq c > 0$; $a + c \geq 2b$ бол

$$4(a^4 + b^4 + c^4) + 6abc(a + b + c) \geq 5(a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b)$$

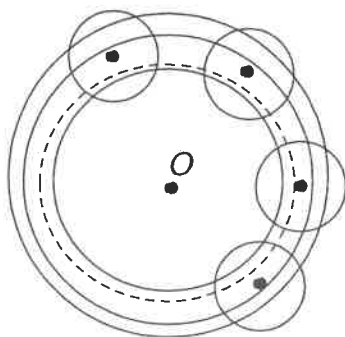
гэж батал.

Х-В1 (У.Батзориг). Хурц өнцөгт ABC гурвалжинд AN_1 , BN_2 өндрүүд, AL_1 ба BL_2 биссектрисүүд татав. O нь багтаасан тойргийн төв, I нь багтсан тойргийн төв бол $O \in L_1L_2$ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $I \in H_1H_2$ гэж батал.

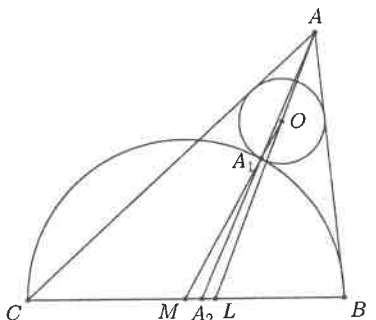
Х-В2 (В.Адъяасүрэн). 12×12 хэмжээтэй хөлөг дээр бэрс бүр яг 3 бэрс иддэг байхаар хамгийн олондоо хичнээн бэрс байрлуулж болох вэ?

Х-В3 (Б.Батцэнгэл). Ялгаатай натурал $m_1, m_2, \dots, m_k$ тоонуудын нийлбэр нь $\frac{n(n+1)}{2}$ бол $\{1, 2, \dots, n\}$ олонлогийг A_i ($1 \leq i \leq k$) олонлогийн тоонуудын нийлбэр m_i -тэй тэнцүү байхаар хоорондоо үл огтлолцох $A_1, A_2, \dots, A_k$ олонлогуудад ямагт хувааж болох уу?

Х-А1. Бодлогын өгүүлбэр алдаатай тавигдсан. Эсрэг жишээ байгуулъя. O төвтэй $r_1 < r_2 < \dots < r_{2005}$ радиустай хар тойргууд татаад цагаан тойргуудыг зурагт үзүүлсэн байдлаар бүх хар тойргуудтай огтлолцдог байхаар байрлуулъя. Энэ үед 1 хар, 2005 ширхэг цагаан тойрог дайрсан шулуун татах боломжгүй.



X-A2. $CM = MB$, $AA_1 \cap BC = A_2$, $AO \cap BC = L$ байх M , A_2 , L цэгүүдийг тэмдэглэе. Мөн гурвалжны талуудыг a , b , c , талбайг S гэе. OML гурвалжин AA_1A_2 шулууны хувьд Менелайн теорем бичвэл $\frac{A_2L}{A_2M} \cdot \frac{MA_1}{A_1O} \cdot \frac{OA}{AL} = 1$ болно. Энд $\frac{AO}{OA_1} = \frac{1}{\sin A/2}$, $AL = \frac{2bc}{b+c} \cdot \cos A/2$, $MA_1 = a/2$ гэдгээс $ML = \frac{a}{2} - \frac{ac}{b+c} = \frac{ab-ac}{2(b+c)}$. Хэрэв $A_2M = x$ гэвэл $A_2L = x \cdot \sin A \cdot \frac{2bc}{a(b+c)}$ тул



$$x \left(\sin A \frac{2bc}{a(b+c)} + 1 \right) = \frac{a(b-c)}{2(b+c)} \text{ буюу } x = \frac{a(b-c)}{4 \frac{bc}{a} \sin A + 2(b+c)}$$

болно. Эндээс

$$CA_2 = CM + MA_2 = \frac{a}{2} + x = \frac{a}{2} \left(1 + \frac{b-c}{2 \frac{bc}{a} \sin A + (b+c)} \right) = \frac{2S + ab}{2 \frac{bc}{a} \sin A + (b+c)}$$

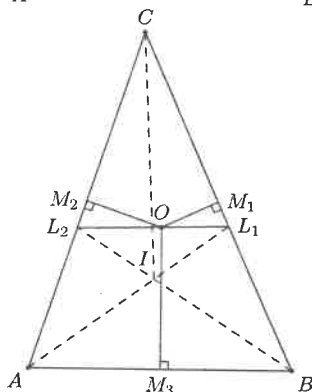
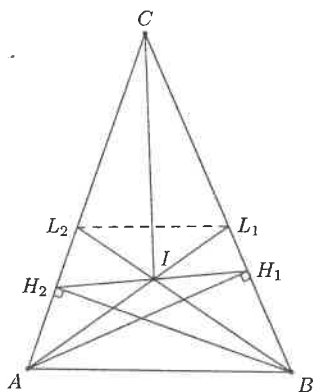
тул $\frac{CA_2}{BA_2} = \frac{2S + ab}{2S + ac}$. Үүний адилаар

$$\frac{BC_2}{AC_2} = \frac{2S + ca}{2S + cb}, \quad \frac{AB_2}{CB_2} = \frac{2S + bc}{2S + ba} \text{ буюу } \frac{CA_2}{BA_2} \cdot \frac{BC_2}{AC_2} \cdot \frac{AB_2}{CB_2} = 1$$

болж Чевийн теоремоор батлагдав.

X-A3. $4(a^4 + b^4 + c^4) + 6abc(a+b+c) \geq 5(a^3(b+c) + b^3(a+c) + c^3(a+b))$. $f(x) = 4(x^4 + b^4 + c^4) + 6x bc(x+b+c) - 5x^3(b+c) - 5b^3(x+c) - 5c^3(x+b)$ функц авч үзье. $F(x) = f'(x) = 16x^3 + 12x bc + 6bc(b+c) - 15x^2(b+c) - 5b^3 - 5c^3$ гэвэл $F'(x) = f''(x) = 48x^2 + 12bc - 30(b+c)x = 6(8x^2 + 2bc - 5(b+c)x) = 6(5(x-b)(x-c) + 3x^2 - 3bc)$ болох бөгөөд $x \geq 2b - c$, $b \geq c$ үед $F'(x) \geq 0$ тул $F(x)$ функц өсдөг функц болно. $F(x) \geq F(2b - c) = 9(7b^3 - 18b^2c + 15bc^2 - 4c^3) = 9(b - c)(7b^2 - 11bc + 4c^2) = 9(b - c)^2(7b - 4c) \geq 0$ буюу $f'(x) = F(x) \geq 0$ тул $f(x)$ өсдөг функц буюу $f(a) \geq f(2b - c) = 24(b - c)^4 \geq 0$ байна.

Х-В1. $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ гэе. $\angle AH_2B = 90^\circ$, $\angle AH_1B = 90^\circ$ тул AH_2H_1B дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. $\angle A + \angle H_2H_1B = 180^\circ$ тул $\angle H_2H_1C = \alpha$, $\angle B + \angle H_2H_1A = 180^\circ$ тул $\angle H_1H_1C = \beta$ болно. $\triangle BH_2C$ -ийн хувьд: $CH_2 = a \cos \gamma$, $\triangle AH_1C$ -ийн хувьд: $CH_1 = b \cos \gamma$ болно. $\triangle H_1H_2C$ ба $\triangle ABC$ -ийн хувьд $\frac{CH_2}{CB} = \frac{a \cos \gamma}{a} = \cos \gamma$, $\frac{S_{H_1H_2C}}{S_{ABC}} = \frac{CH_2}{a} \cdot \frac{CH_1}{b} = \cos^2 \gamma$. $I \in H_1H_2$ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $S_{CH_1H_2} = S_{CH_2I} + S_{CIH_1}$ буюу $\frac{1}{2}r(a + b + c) \cos^2 \gamma = \frac{1}{2}ra \cos \gamma + \frac{1}{2}rb \cos \gamma$ болно. Энэ нь $\cos \gamma = \frac{a+b}{a+b+c}$ буюу $a = b \cos \gamma + c \cos \beta$, $b = a \cos \gamma + c \cos \alpha$ болохыг анхаарвал $\cos \gamma = \cos \alpha + \cos \beta$ болно.



BC , CA , AB талуудын дундаж цэгүүдийг харгалзан M_1 , M_2 , M_3 гэе. $\triangle OM_2C$ -ийн хувьд: $M_2O = R \cos \beta$. Аналогоор $M_1O = R \cos \alpha$, $M_3O = R \cos \gamma$ болно. $O \in L_1L_2$ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $S_{CL_1L_2} = S_{CL_2O} + S_{COL_1}$ буюу $S_{ABC} \cdot \frac{a}{a+c} \cdot \frac{b}{b+c} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ba}{a+c} \cdot R \cos \beta + \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{b+c} \cdot R \cos \alpha$ болно. Эндээс

$$\left(\frac{1}{2}aR \cos \alpha + \frac{1}{2}bR \cos \beta + \frac{1}{2}cR \cos \gamma \right) \cdot \frac{a}{a+c} \cdot \frac{b}{b+c} = \frac{1}{2}Rab \left(\frac{\cos \beta}{a+c} + \frac{\cos \alpha}{b+c} \right)$$

буюу $\cos \gamma = \cos \alpha + \cos \beta$ болно. Батлах зүйл батлагдав.

Х-В2. Дараагийн цувралд энэ бодлоготой холбогдсон өгүүлэл гарах болно.

Х-В3. $n = 6$, $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, $k_3 = 3$, $k_4 = 7$, $k_5 = 8$ үед албагүй. Өөрөөр хэлбэл A_1 , A_5 олдохгүй.

В.Адъяасүрэн

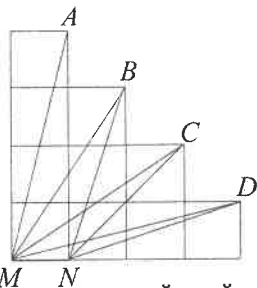
ББ-А1 (В.Адъяасүрэн). $y^2 = 6(x^3 - x)$ тэгшитгэлийн 7 ширхэг бүхэл тоон шийд (x, y) -ийг ол.

ББ-А2 (В.Адъяасүрэн). $\sqrt{x} + y = 1$, $\sqrt{y} + z = 5$, $\sqrt{z} + x = 2$ байх (x, y, z) гуравтуудыг ол.

ББ-А3 (В.Адъяасүрэн). Тэмдэглэгдсэн нүднүүдийн төв дээр оройтой мохоо өнцөгт гурвалжин олддоггүй байхаар хамгийн олондоо хичнээн нүдийг шатрын хөлөг дээр тэмдэглэж болох вэ?

ББ-В1 (В.Адъяасүрэн). Дөрвөлжин шугамтай цаасан дээр 10 ижилхэн квадратаас тогтсон дүрс зурагдсан байв. $\angle MAN + \angle MBN + \angle MCN + \angle MDN$ нийлбэрийг ол.

ББ-В2 (В.Адъяасүрэн). Дурын натурал m, n, k тоонуудын хувьд $(m^2n^2 + \ell)(n^2k^2 + \ell)(k^2m^2 + \ell)$ тоо бүтэн квадрат байх натурал ℓ тоо олдоно гэж батал.



ББ-В3 (В.Адъяасүрэн). 5-аас багагүй аливаа натурал a бүрийн хувьд $x^2 + ax = y^2$ тэгшитгэл (x, y) натурал тоон шийдтэй гэж батал.

ББ-А1. $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(-1; 0)$, $(3; 12)$, $(3; -12)$, $(2; 6)$, $(2; -6)$, $(49; 840)$.

ББ-А2. 1) $\sqrt{x} + y = 1 \Rightarrow y \leq 1$.

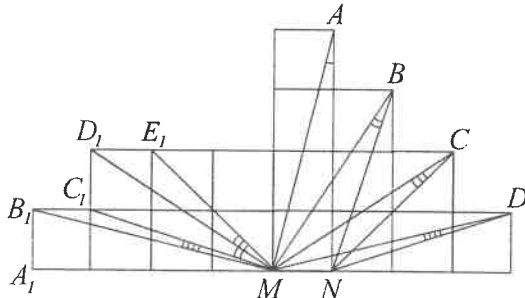
2) $\begin{cases} y \leq 1 \\ \sqrt{y} + z = 5 \end{cases} \Rightarrow z \geq 4 \quad (1).$

3) $\begin{cases} \sqrt{z} + x = 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{z} \leq 2 \Rightarrow z \leq 4 \quad (2).$

4) (1) ба (2)-оос $z = 4$ гэж гарна. Иймд $\sqrt{y} + z = 5 \Rightarrow y = 1$, $\sqrt{z} + x = 2 \Rightarrow x = 0$. Ийнхүү өгөгдсөн тэгшитгэл $x = 0$, $y = 1$, $z = 4$ гэсэн ганц шийдтэй.

ББ-А3. 8 нүдийг тэмдэглэж болно. Нэг багананд байрлах 8 нүдний төвийг тэмдэглэхэд эдгээр нь бодлогын нөхцлийг хангана. 9 нүдийг бодлогын нөхцлийг хангахад тэмдэглэж болохгүй гэж баталчихвал бодлого бодогдоно. 9 нүдний төвийг тэмдэглэхэд тэдгээр нь нэг шулуун дээр үл оршино. Нэг шулуун дээр үл орших 6 цэгээс мохоо өнцөгт гурвалжны орой болох 3 цэгийг ямагт сонгон авч болдог. Үүнийг гүдгэр бүрхэвчийг авч үзэх замаар шийднэ.

ББ-В1. Зурагт үзүүлсэн байдлаар нэмэлт байгуулалт хийвэл $\angle MAN + \angle MBN + \angle MCN + \angle MDN = \angle A_1MB_1 + \angle B_1MC_1 + \angle C_1MD_1 + \angle D_1ME_1 = 45^\circ$ гэж гарна.



ББ-В2. $\ell = m^2nk + mn^2k + mnk^2$ гэж авбал $(m^2n^2 + \ell)(n^2k^2 + \ell)(k^2m^2 + \ell) = (mnk(m+n)(n+k)(k+m))^2$ болно.

ББ-В3. $x^2 + ax = y^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4ax = 4y^2 \Leftrightarrow (2x+a)^2 = (2y)^2 + a^2 \Leftrightarrow (2x+a)^2 - (2y)^2 = a^2 \Leftrightarrow$

$$(2x + a + 2y)(2x + a - 2y) = a^2 \quad (*)$$

а) $a = 2m + 1, m \geq 2$ байг.

$$(*)\text{-оос} \quad \begin{cases} 2x + (2m + 1) + 2y = 4m^2 + 4m + 1 \\ 2x + (2m + 1) - 2y = 1 \end{cases} \quad \text{гэж гарна.}$$

Эндээс $4y = 4m^2 + 4m$ буюу $y = m^2 + m$. Иймд $x = m^2$. Ийнхүү энэ тохиолдолд өгөгдсөн тэгшитгэл $x = m^2, y = m^2 + m$ натурал тоон шийдтэй.

б) $a = 4m + 2, m \geq 1$ байг.

$$(*)\text{-оос} \quad \begin{cases} 2x + (4m + 2) + 2y = 2(4m^2 + 4m + 1) \\ 2x + (4m + 2) - 2y = 2 \end{cases} \quad \text{гэж гарна.}$$

Эндээс $4y = 8m^2 + 8m$ буюу $y = 2m^2 + 2m$. Иймд $x = 2m^2$. Ийнхүү энэ тохиолдолд өгөгдсөн тэгшитгэл $x = 2m^2$, $y = 2m^2 + 2m$ натурал тоон шийдтэй.

в) $a = 4m$, $m \geq 2$ байг.

(*)-оос $\begin{cases} 2x + 4m + 2y = 4m^2 \\ 2x + 4m - 2y = 4 \end{cases}$ гэж гарна. Эндээс $4y = 4m^2 - 4$ буюу $y = m^2 - 1$. Иймд $x = (m - 1)^2$. Ийнхүү энэ тохиолдолд өгөгдсөн тэгшитгэл $x = (m - 1)^2$, $y = m^2 - 1$ натурал тоон шийдтэй.

ММО-41, БАГЫН БАГШИЙН IV ДАВАА

Ц.Батхүү

ББ-А1 (Н.Дайвий-Од). n ширхэг ялгаатай ($n \geq 4$) бөмбөгийг 3 ялгаатай хайрцагт хоосон хайрцаг байхгүй, яг 1 ширхэг бөмбөгтэй хайрцаг ядаж нэг олдож байхаар хийх боломжийн тоог ол.

ББ-А2 (Ж.Батболд). $a, b, c > 0$ тоонуудын хувьд

$$\frac{ab}{5a+6b} + \frac{bc}{7b+2c} + \frac{ca}{4c+a} \leq \frac{7a+11b+30c}{128}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

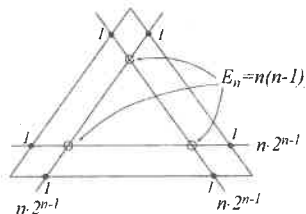
ББ-А3 (С.Сайнбаяр). ω_1, ω_2 огтолцсон тойргуудын ерөнхий шүргэгчүүд A цэгт огтолцоно. ω_3 тойрог ω_1, ω_2 тойргуудыг B ба C цэгүүдэд гадаад байдлаар, мөн тэдгээрийн ерөнхий шүргэгчийг шүргэдэг бол A, B, C цэгүүд нэг шулуун дээр оршихыг батал.

ББ-В1 (Ц.Батхүү). $\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 3,9 \\ y + [z] + \{x\} = 3,5 \\ z + [x] + \{y\} = 2 \end{cases}$ системийг бод.

ББ-В2 (Т.Баасанжав). $\perp$ хэлбэрийн нэгж талтай, тэгш өнцөгт тахир шугамуудын оройнуудыг гагнах замаар $t \times n$ хэмжээтэй тэгш өнцөгт торыг байгуулж болдог бол $m = n$ гэж батал.

ББ-Б3 (В.Адьяасүрэн). a тооны хувьд $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = a_3$,
 $\frac{1}{a_1^3} + \dots + \frac{1}{a_n^3} = 1$ байх $a_1, \dots, a_n$ натурал тоонууд олдож байвал
 a тоог сонирхолтой тоо гээ. 36016 сонирхолтой тоо мөн үү?

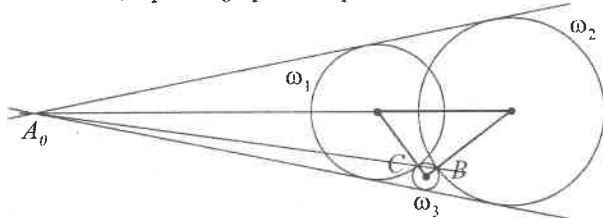
ББ-А1. Хоосон хайрцаг байхгүй атлаа яг нэг хайрцаг 1 бөмбөгтэй байх боломжийн тоо нь Паскалийн пирамидын $n+1$ -р бүслүүрийн гаднаасаа 2 дахь хүрээний тоонуудын нийлбэр болно. Энэ хүрээний оройн тоонууд нь $E_n = n(n-1)$ буюу 2 хайрцаг нь 11 бөмбөгтэй бусад нь



$n-2$ бөмбөгтэй байх тохиолдол юм. Харин энэ хүрээний нэг тууш эгнээ нь $D_n = n \cdot 2^{n-1}$ нийлбэртэй. Иймд хүрээний нийт нийлбэр нь $3 \cdot D_n - 3 \cdot E_n - 6n = 3n \cdot 2^{n-1} - 3n^2 - 3n$ болно.

ББ-А2. Алдаатай.

ББ-А3. $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ тойргийн төвийг харгалзан O_1, O_2, O_3 , $O_1O_2 \cap BC = A_0$ гээ. Тэгвэл $O_1O_2O_3$ гурвалжин ба A_0BC шулууны хувьд Менелайн теорем бичвэл $\frac{O_2B}{BO_3} \cdot \frac{O_3C}{CO_1} \cdot \frac{O_1A_0}{A_0O_2} = 1$. Энд $O_3B = O_3C$ учир $\frac{O_2B}{CO_1} = \frac{A_0O_2}{A_0O_1} = \frac{AO_2}{AO_1}$ болох тул $A \equiv A_0$ болно.



$$\text{ББ-В1. } \begin{cases} x + [y] + [z] = 3, 9 \\ y + [z] + [x] = 3, 5 \\ z + [x] + [y] = 2 \end{cases} \text{ тэгшитгэлүүдийг нэмбэл}$$

$x + y + z = 4, 7$ болно. Үүнээс тэгшитгэл бүрийг хасвал:

$$\begin{aligned} \{y\} + [z] &= 0, 8 \rightarrow [z] = 0, \{y\} = 0, 8 \\ \{z\} + [x] &= 1, 2 \rightarrow [x] = 1, \{z\} = 0, 2 \\ \{x\} + [y] &= 2, 7 \rightarrow [y] = 0, \{x\} = 0, 7 \end{aligned}$$

Иймд $x = 1, 7, y = 2, 8, z = 0, 2$.

ББ-В2. $m \times n$ хүснэгтийг $\perp$ дүрсээр эвлүүлж байгаа учир босоо талын тоо хэвтээ талын тоотой тэнцүү байх ёстой. Эндээс босоо талын тоо $n(m+1)$ хэвтээ талын тоо $m(n+1)$ болно. $\Rightarrow n(m+1) = m(n+1) \Rightarrow m = n$ болно.

ББ-В3. Мөн $\underbrace{4^3 + \dots + 4^3}_{16} + \underbrace{6^3 + \dots + 6^3}_{162} = 16 \cdot 64 + 162 \cdot 216 = 36016$, $\underbrace{\frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^3}}_{16} + \underbrace{\frac{1}{6^3} + \dots + \frac{1}{6^3}}_{162} = \frac{16}{64} + \frac{162}{216} = 1$.

ММО-41, Дундын багшийн III даваа

Ц.Дашдорж

ДБ-А1 (Ц.Дашдорж). t_n нь a, b -ээр бичигдэх $aaaa$ эсвэл bbb -г агуулдаггүй n урттай үгийн тоо бол

$$\frac{t_{2005} - t_{2003} - t_{2000}}{t_{2002} + t_{2001}}$$

утгыг ол.

ДБ-А2 (Ц.Дашдорж). $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) > n$ ба $\forall m \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд $P(1)$, $P(P(1))$, $P(P(P(1)))$, ... дараалалд m -д хуваагдах гишүүн байдаг бол $P(x) = x + 1$ гэж батал.

ДБ-А3 (Ц.Дашдорж). $a, b, n \in \mathbb{N}$, $b > 1$ ба $b^n - 1 \mid a$ байг. a тооны b суурь дахь бичлэг нь n -ээс цөөнгүй 0-ээс ялгаатай цифр агуулахыг батал.

ДБ-В1 (Ц.Дашдорж). O нь $\triangle ABC$ -ны дотор орших цэг ба OA , OB , OC шулуунууд нь $\triangle ABC$ -ны талуудыг A_1, B_1, C_1 цэгт огтолно. R_1, R_2, R_3 нь (O, B, C) , (O, C, A) , (O, A, B) тойргуудын радиусууд, R нь (A, B, C) тойргийн радиус бол

$$\frac{OA_1}{AA_1} \cdot R_1 + \frac{OB_1}{BB_1} \cdot R_2 + \frac{OC_1}{CC_1} \cdot R_3 \geq R$$

гэж батал, энд (X, Y, Z) нь X, Y, Z цэгүүдийг дайрсан тойрог.

ДБ-В2 (Ц.Дашдорж). $a, b, c \in \mathbb{Z}$, b сондгой тоо ба $x_0 = 4$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2c$, $x_3 = 3b$ ба $n \geq 4$ үед $x_n = ax_{n-4} + bx_{n-3} + cx_{n-2}$ бол $p \in \mathbb{P}$, $m \in \mathbb{N}$ үед $p \mid x_{p^m}$ гэж батал.

ДБ-В3 (Ц.Дашдорж). $n \geq 3$ ба $A_1, \dots, A_n$ нь тойрог дээр орших цэгүүд бол эдгээр дээр оройтой хурц өнцөгт гурвалжны тоо хамгийн олондоо хэд вэ? Тэр утгаа авах нөхцлийг нь заа.

ДБ-А1. a_n, b_n -ээр a ба b -ээр төгссөн олбол зохих боломжит үгүүдийг тэмдэглэе. Тэгвэл

$$t_n = a_n + b_n \quad (1)$$

$n \geq 4$ байг. a -аар төгссөн боломжит үг нь $ba \vee baa \vee baaa$ -ээр төгссөнө. Эдний тоо харгалзан $b_{n-1}, b_{n-2}, b_{n-3}$ байх тул

$$a_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3} \quad (2)$$

Үүний адилаар $n \geq 3$ бол

$$b_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (3)$$

$a \geq 6$ байг.

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3} \stackrel{(3)}{=} (a_{n-2} + a_{n-3}) + (a_{n-3} + a_{n-4}) + \\ &+ (a_{n-4} + a_{n-5}) = a_{n-2} + 2a_{n-3} + 2a_{n-4} + a_{n-5} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \stackrel{(2)}{=} (b_{n-2} + b_{n-3} + b_{n-4}) + (b_{n-3} + b_{n-4} + b_{n-5}) = \\ &= b_{n-2} + 2b_{n-3} + 2b_{n-4} + b_{n-5} \end{aligned} \quad (5)$$

$$(4) + (5) \stackrel{(1)}{=} t_{n-2} + 2t_{n-3} + 2t_{n-4} + t_{n-5}. \text{ Иймд}$$

$$n \geq 6 \text{ бол } 2 = \frac{t_n - t_{n-2} - t_{n-5}}{t_{n-3} + t_{n-4}} \text{ боллоо.}$$

ДБ-А2. $x_1 = 1, k > 1$ бол $x_k = P(x_{k-1})$ гэе. $1 < n \in \mathbb{N}$ -г бэхлээд $\mathcal{N} = x_n - 1$ гэе. Тэгвэл $x_1 \equiv 1 \equiv x_n(\mathcal{N})$ тул $P(x_1) \equiv P(x_n)(\mathcal{N})$ буюу $x_2 \equiv x_{n+1}(\mathcal{N})$ болно. Индукцээр $\forall k \geq 2$ -ийн хувьд

$$x_k \equiv x_{n+k-1}(\mathcal{N}) \quad (1)$$

болно. Бодлогын нөхцлөөр $\exists s,$

$$x_s \equiv 0(\mathcal{N}) \quad (2)$$

Иймд (1)-ийн үндсэн дээр $s \leq n-1$ гэж үзэж чадна. $\forall n, P(n) > n$ ба $x_k = P(x_{k-1})$ -ээс

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n \quad (3)$$

гэж гарна. Энэ нь $x_{n-1} \leq x_n - 1$, мөн

$$x_s \leq x_n - 1 \quad (4)$$

болохыг үзүүлнэ. $N = x_n - 1/x_s$ ба (4)-өөс

$$x_s = N \quad (5)$$

Хэрэв $s < n-1$ бол (3)-аар $x_s < x_{n-1}$ болох тул $x_n - 1 = N \stackrel{(5)}{=} x_s < x_{n-1} \leq x_n - 1$ зөрчилд хүрнэ. Иймд $s = n-1$ болох тул $x_n - 1 = N = x_s = x_{n-1}$ буюу $x_{n-1} = x_n - 1$ боллоо. Эндээс $P(x_{n-1}) = x_n = x_{n-1} + 1$ ба энэ нь $\forall n \geq 2$ -ийн хувьд биелэх нь ойлгомжтой тул $P(x) = x + 1$ болно.

ДБ-А3. $X \in \mathbb{N}$ тооны b суурь дахь бичлэгийг $X = (X)_b = x_1 b^{k_1} + \dots + x_\ell b^{k_\ell}$, $k_1 > \dots > k_\ell \geq 0$, $x_i \in \{1, \dots, b-1\}$ гэж тэмдэглэж байя, мөн $\ell = t(X)_b$ урт нь $N = \{n \in \mathbb{N} \mid b^n - 1 \mid m\}$, $s = \min_{m \in M} t(m)_b$

гэе. $M \ni A = a_1 b^{n_1} + \dots + a_s b^{n_s}$, $s(A) = \sum_1^s a_i = \min$ гэж үзэж чадна. Тэгвэл

$$n_i \not\equiv n_j(n) \quad (1)$$

болохыг баталъя.

Хэрэв $n_i \equiv n_j(n)$ бол $n_i \equiv n_j \equiv r(n)$, $0 \leq r \leq n-1$ гэж аваад $B = A - a_i b^{n_i} - a_j b^{n_j} + (a_i + a_j) b^{nn_1+r}$ гэвэл $B \in M$.

Хэрэв $a_i + a_j < b$ бол $t(B)_b = s-1$ болж зөрчилд хүрнэ. Иймд $b \leq a_i + a_j < 2b$ болох тул $a_i + a_j = b + q$, $0 \leq q < b$ гэе. Тэгвэл $B = (B)_b = b^{nn_1+r+1} + q b^{nn_1+r} + a_1 b^{n_1} + a_{i-1} b^{n_{i-1}} + a_{i+1} b^{n_{i+1}} + a_{j-1} b^{n_{j-1}} + a_{j+1} b^{n_{j+1}} + \dots + a_s b^{n_s}$. $s(B) = \sum_{i=1}^s a_i - (a_i + a_j) + 1 + q =$

$$\sum_{i=1}^s a_i + 1 - b < \sum_{i=1}^s a_i \text{ болж } A\text{-ийн сонголтод харшилна. Иймд}$$

$\forall i \neq j$ -ийн хувьд $n_i \neq n_j(n)$. Үүгээр $s \leq n$ боллоо. $s < n$ гэж үзээд $C = a_1 b^{r_1} + \dots + a_s b^{r_s}$, энд $r_i \equiv n_i(n)$ ба $r_i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

тоог авч үзье. $b^n - 1 \mid b^{n_i} - b^{r_i}$ гэдгээс $b^n - 1 \mid \sum_{i=1}^s a_i (b^{n_i} - b^{r_i})$,

$b^n - 1 \mid A - C$ болно. Эндээс $b^n - 1 \mid C$ болно, мөн $C > 0$ билээ.

$s < n$ учир $C \leq (b-1)b + (b-1)b^2 + \dots + (b-1)b^{n-1} = b^n - 1 - (b-1) < b^n - 1$ зөрчил. Иймд $s = n$.

$$\text{ДБ-В1. } \frac{OA_1}{AA_1} = \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}} = \frac{OB \cdot OC \cdot BC}{4R_1} \cdot \frac{4R}{AB \cdot AC \cdot BC}. \text{ Иймд}$$

$$\sum OB \cdot OC \cdot BC \geq AB \cdot AC \cdot BC \quad (1)$$

гэж баталъя. $A, B, C \in \mathbb{C}$ тоонуудын хувьд (1) нь

$$\sum |B||C||B-C| \geq |A-B||B-C||C-A| \quad (3)$$

хэлбэртэй болно. Гэтэл энэ нь $\sum |B^2C - C^2B| \geq |AB^2 + BC^2 + CA^2 - A^2B - B^2C - C^2A|$ гэсэн илэрхий тэнцэл биш болж хувирна.

ДБ-В2.

$$f = x^4 - cx^2 - bx - a = 0 \quad (1)$$

характеристик тэгшитгэл нь давхар язгуургүй. $\alpha \in \mathbb{C}$ ба

$$\begin{cases} f(\alpha) = \alpha^4 - c\alpha^2 - b\alpha - a = 0 \\ f'(\alpha) = 4\alpha^3 - 2c\alpha - b = 0 \end{cases} \quad \text{-ээс эхлээд } \alpha^4, \text{ дараа нь } \alpha^3 \text{ ба } \alpha^2 -$$

ийг зайлуулбал $(2c^3 + 8ac - 9b^2)\alpha + bc^2 - 12ab = 0$ буюу $\alpha \in \mathbb{Q}$ гэж гарлаа. Гэтэл $f(x)$ унитар олон гишүүнт ба $f(\alpha) = 0$, $\alpha \in \mathbb{Q}$ -ээс $\alpha \in \mathbb{Z}$ гэж гарна. b сондгой тоо тул $f'(\alpha) = 0$ зөрчил гарна. Иймд

$$x_n = \sum a_i \alpha_i^n \quad (2)$$

$f(\alpha_i) = 0$, $i = \overline{1, 4}$. Одоо $a_i = ?$

$$\begin{cases} x_0 = 4 = \sum_{i=1}^4 \alpha_i^0 \\ x_1 = 0 \stackrel{(1)}{=} \sum \alpha_i = \sigma_1(\alpha) \\ x_2 = 2c = -2 \sum \alpha_i \alpha_j \stackrel{(3)}{=} \sum \alpha_i^2 = -2\sigma_2(\alpha) \\ x_3 = 3b = 3 \sum_{i \neq j \neq k} \alpha_i \alpha_j \alpha_k \stackrel{(3),(4)}{=} \sum \alpha_i^3 = 3\sigma_3(\alpha) \end{cases} \quad (3)$$

$$(4)$$

тул (*)-ийн үндсэн дээр $a_1 = \dots = a_n = 1$ (ба энд a_i -үүд нь x_0, x_1, x_2, x_3 -ээрээ нэг утгатай тодорхойлогдох ёстой).

$p \in P$ бол $p \mid C_k^p, k = \overline{1, p-1}$ байдаг тул $(x+y)^p = x^p + y^p + pQ(x, y), Q(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ тэгш хэмтэй олон гишүүнт болно. Үүнийг цааш өргөтгөж $(x+y+z+t)^p = x^p + y^p + z^p + t^p + pR(x, y, z, t), R(x, y, z, t) \in \mathbb{Z}[x, \dots, t]$ тэгш хэмт олон гишүүнт гэж гарна.

Одоо m -ээр индукцэлж бодлогоо бодъё. $m = 1$ бол $x_p = \sum \alpha_i' = -pR(\alpha_1, \dots, \alpha_4)$ ба $R(\alpha_1, \dots, \alpha_4)$ тэгш хэмт олон гишүүнт нь элементар тэгш хэмт олон гишүүнт $\sigma_1(\alpha) = 0, \sigma_2(\alpha) = -c, \sigma_3(\alpha) = b, \sigma_4(\alpha) = -a$ -үүдээрээ бүхэл коэффициенттойгоор илэрхийлэгдэх тул $R(\alpha_1, \dots, \alpha_4) \in \mathbb{Z}$. Иймд $p \mid x_p$ болов. $p \mid x_{p^m}$ гэж үзье. Тэгвэл $x_{p^{m+1}} = \sum \alpha_i^{p^{m+1}} = -pR(\alpha_i^{p^m}) + (\sum \alpha_i^{p^m})^n = pS(\alpha_1, \dots) - x_{p^m}^p \Rightarrow p \mid x_{p^{m+1}}$ болно, учир нь $s(\alpha_1, \dots) \in \mathbb{Z}[\alpha_1, \dots]$ тэгш хэмтэй олон гишүүнт билээ.

ДБ-ВЗ. Тойрог дээр $A_1, A_2, \dots, a_n$ цэгүүд цагийн зүүний эсрэг байрласан гэе. $A_{n+1} = A_1, A_{n+2} = A_2, \dots$ гэж үзье. $A_i A_j$ -ээр A_i дээр эхлэлтэй A_j дээр төгсгөлтэй нумыг тэмдэглэе (цагийн зүүний эсрэг чиглэлд). $m(A_i A_j) \geq 180^\circ$ бол $A_i A_j$ нумыг мохоо гэе. $X_s = \{A_i A_j \mid m(A_i A_j) \geq 180^\circ \text{ ба } A_i A_j \text{ нум дотор яг } s-1 \text{ цэг бий}\}, |X_s| = x_s$ гэе.

$\forall i, s$ -ийн хувьд $m(A_i \widetilde{A_{i+s}}) + m(\widetilde{A_{i+s}} A_i) = 360^\circ$ тул $\forall i, A_i A_{i+s} \in X_s \vee A_{i+s} A_i \in X_s$ байна. Эндээс,

$$\forall s, x_s + x_{n-s} \geq n \quad (1)$$

гэж гарна. (1)-д тэнцэл биелэх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\forall i, A_i$ ба A_{i+s} нь нэг диагональ дээр үл орших явдал юм.

Одоо мохоо $\Delta A_i A_j A_k$ -г тоолъё (тоо нь N). Тийм гурвалжин нь мохоо нумд харгалзах яг нэг өнцөгтэй байна. $A_i A_j \in X_s$ (энд $j = i + s$) бүрийн хувьд $n - s - 1$ ширхэг мохоо $\Delta A_i A_j A_k$ байна,

энд A_k нь $A_j A_i$ -ийн дотоод цэг.

$$N = \sum_{0 \leq s-1 \leq n-2} |X_s|(n-s-1) = \sum_{s=1}^{n-1} x_s(n-s-1) = \\ = x_1(n-2) + x_2(n-3) + \dots + x_{n-3} \cdot 2 + x_{n-2} \cdot 1 + x_{n-1} \cdot 0 \quad (2)$$

(1)-г ашиглахын тулд дахин бүлэглэвэл (2) нь n сондгой үед

$$N \geq 0 \cdot (x_{n-1} + x_1) + 1 \cdot (x_{n-2} + x_2) + \dots + \frac{n-3}{2} \left(X_{\frac{n+1}{2}} + X_{\frac{n-1}{2}} \right) \geq \\ \geq n \left(1 + 2 + \dots + \frac{n-3}{2} \right) = \frac{n(n-3)(n-1)}{8} \quad (3)$$

n тэгш үед

$$N \geq 0 \cdot (x_{n-1} + x_1) + 1 \cdot (x_{n-2} + x_2) + \dots \\ \dots + \frac{n-4}{2} \cdot \left(X_{\frac{n+2}{2}} + X_{\frac{n-2}{2}} \right) + \frac{n-2}{2} \cdot X_{\frac{n}{2}} \geq \\ \geq n \cdot \left(1 + 2 + \dots + \frac{n-4}{2} \right) + \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n(n-2)^2}{8} \quad (4)$$

(3) ба (4)-д тэнцл биелэх $\Leftrightarrow$ нэг диаметрийн 2 цэг байхгүй ба $k < \frac{n}{2}$ бүрийн хувьд $x_k = 0$ байх явдал гэдэг нь баталгааны явцаас харагдах тул n сондгой үед $m(A_1 A_2) = m(A_2 A_3) = \dots = m(A_n A_1) = \frac{360^\circ}{n}$, n тэгш үед $m(A_1 A_2) = m(A_2 A_3) = \dots = m(A_{n-1} A_n) = \frac{360^\circ}{n+\varepsilon}$ ба $m(A_n A_1) = \frac{360^\circ}{n-(n-1)\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < \frac{360^\circ}{n^2}$ гэж гарна.

$$\text{Олох тоо маань } C_n^3 - \mathcal{N}_{\min} = \begin{cases} \frac{(n-1)n(n+1)}{24}, & n \text{ сондгой} \\ \frac{(n-2)n(n+2)}{24}, & n \text{ тэгш} \end{cases}$$

ММО-41, Дундын багшийн IV даваа

Ц.Дашдорж

ДБ-А1 (А.Хашбаатар). O төвтэй тойрогт багтсан ABC гурвалжны багтаасан тойргийн радиус R , багтсан тойргийн радиус r байв. Түүн дотор орших N цэгийн хувьд $\frac{S_{NBC}}{p-a} = \frac{S_{NCA}}{p-b} = \frac{S_{NAB}}{p-c}$ (p хагас периметр, a, b, c харгалзах талууд) байдаг бол ON -ийг ол.

ДБ-А2 (А.Ганбат). $3^k = m^2 + n^2 + 1$ тэгшитгэл $\mathbb{N}$ олонлогт төгсгөлгүй олон шийдтэй гэж батал.

ДБ-А3 (Ч.Гантөмөр). $\forall n \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд $p(n) = k \Leftrightarrow 2^k \mid n$ ба $2^{k+1} \nmid n$ болог. $x_0 = 0$ ба $n \geq 1$ үед $x_n = (1 + 2p(n) - x_{n-1})^{-1}$ гэсэн рекуррент харьцаагаар $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ дараалал тодорхойлов. Тэгвэл $\forall a \in \mathbb{Q}^+$ авахад $\exists! m \in \mathbb{N}$ ба $x_m = a$ гэж батал.

ДБ-В1 (В.Адъяасүрэн). 13×13 хэмжээтэй хөлөг дээр бэрс бүр яг 3 бэрс иддэг байхаар хамгийн олондоо хичнээн бэрс байрлуулж болох вэ?

ДБ-В2 (Н.Дайвий-Од). 2005 талбайтай квадрат хэлбэртэй ширээг 1604 талбайтай 5 ширхэг квадрат бүтээлгээр ширээний цэг бүр яг 4 давхар бүтээгдсэн байхаар бүтээж болох уу? (Бүтээлгийг нугалж болно, урт болохгүй)

ДБ-В3 (Б.Батбаясгалан). Самбарт a, b үсгүүдээс тогтох n урттай, m ширхэг үг өгөгдөв. Хэрэв алхам бүрд ямар нэг үгийн аль нэг a үсгийг арчаад оронд нь b үсэг бичих үйлдэл өгөгдсөн бол самбарт n урттай бүх үг ядаж нэг удаа бичигдээд өнгөрсөн байх m -ийн хамгийн бага утгыг ол. Энэ m -ийн хувьд хамгийн цөөндөө хэдэн үйлдлээр бүх үг бичигдэх вэ?

ДБ-А1. AN, BN, CN шулууны BC, CA, AB талтай огтлолцсон цэгийг харгалзуулан A_1, B_1, C_1 гэвэл, өгсөн нөхцлөөс

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_{NAB}}{S_{NAC}} = \frac{p-c}{p-b} \quad (1)$$

Энэ мэтчилэн $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{p-a}{p-c}$, AA_1C гурвалжнаас Менелайн теоремоор $\frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AN}{NA_1} \cdot \frac{A_1B}{BC} = 1$. Эндээс $\frac{AN}{NA_1} = \frac{p-c}{p-a} \cdot \frac{BC}{A_1B}$.

(1) нөхцлөөс $BA_1 = \frac{(p-a)a}{p-b+(p-c)} = \frac{p-c}{a}a$ болохоор $\frac{AN}{NA_1} = \frac{p-c}{p-a}$. $\frac{a}{p-c} = \frac{a}{p-a}$ буюу $\frac{NA_1}{AA_1} = \frac{p-a}{a}$. Мөн зарчмаар $\frac{NB_1}{BB_1} = \frac{p-b}{b}$, $\frac{NC_1}{CC_1} = \frac{p-c}{c}$. Иймээс $ON^2 = R^2 \cdot \frac{p-a}{p} + R^2 \cdot \frac{p-b}{p} + R^2 \cdot \frac{p-c}{p} - \left(a^2 \cdot \frac{p-b}{p} \cdot \frac{p-c}{p} + b^2 \cdot \frac{p-c}{p} \cdot \frac{p-a}{p} + c^2 \cdot \frac{p-a}{p} \cdot \frac{p-b}{p} \right) R^2 - \frac{abc}{p^2} \left(a \sin^2 \frac{\alpha}{2} + b^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} + c^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right) = R^2 - \frac{4rR}{p} \left(a \cdot \frac{1-\cos \alpha}{2} + b \cdot \frac{1-\cos \beta}{2} + c \cdot \frac{1-\cos \gamma}{2} \right) = R^2 - \frac{4rR}{p} \left(p - \frac{1}{2}(a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma) \right) =$

$R^2 - 4rR + \frac{4rR}{p} \cdot 2R \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = R^2 - 4rR + \frac{4r}{p} \cdot S = R^2 - 4rR + 4r^2$
 буюу $ON = R - 2r$.

ДБ-А2. I бодолт. Ферма-Эйлерийн теоремоор $4k + 1$ хэлбэрийн анхны тоо $x^2 + y^2$ хэлбэрт тавигдана. Бид $p \nmid 3^k - 1$, $p \equiv 3(4)$ байхаар k -г олж. $k = 2^s$ гээ. $\Rightarrow 3^{2^s} - 1 = (3 - 1)(3 + 1)(3^2 + 1)(3^{2^2} + 1) \dots (3^{2^{s-1}} + 1) = 2^3(3^2 + 1)(3^{2^2} + 1) \dots (3^{2^{s-1}} + 1)$ эсрэгээс $\exists p : p \equiv 3(4)$, $p \mid 3^{2^s} - 1 \Rightarrow p \mid 3^{2^t} + 1 \Rightarrow 3^{2^t} \equiv -1(p) \Rightarrow (3^{2^t})^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1(p)$. Нөгөө талаас $p \neq 3$ байх нь илэрхий тул Фермагийн бага теоремоор $(3^{2^{t-1}})^{p-1} \equiv 1(p)$. Иймд 3^{2^s} нь $4k + 1$ хэлбэрийн анхны тоонуудын үржвэрт задрана. Гауссын теорем ёсоор $K = \{x^2 + y^2 \mid x, y \in \mathbb{N}\}$ хэлбэрийн тоонуудын үржвэр нь мөн K -д орно. Иймд $3^{2^s} - 1$ нь $m^2 + n^2$ хэлбэртэй байна. $\Rightarrow$ Төгсгөлгүй олон шийдтэй.

ДБ-А2 (М.Буянтогтохын бодолт). $m = 2, n = 2, k = 2$ үед $2^2 + 2^2 + 1 = 3^2$ билээ. $a^2 + b^2 + 1 = 3^{2k}$ буюу $(a, b, 2k)$ шийд байг. $(a \cdot 3^k - b)^2 + (b \cdot 3^k + a)^2 = (a^2 + b^2)(3^{2k} + 1) = (3^{2k} - 1)(3^{2k} + 1) = 3^{4k} - 1$ болох ба $(a \cdot 3^k - b, b \cdot 3^k + a, 4k)$ нь шийд болно. $a \cdot 3^k - b \in \mathbb{N}$, $b \cdot 3^k + a \in \mathbb{N}$ ба $(a, b, 2k)$ нь өсч буй учир төгсгөлгүй олон шийдтэй.

ДБ-А3. а)

$$\left. \begin{array}{l} k \geq 0 \text{ үед } x_{2k+1} = x_k + 1 \\ k \geq 1 \text{ үед } \frac{1}{x_{2k}} = \frac{1}{x_k} + 1 \end{array} \right\} \quad (*)$$

гэж батал. $(x_0, x_1, x_2) = (0, 1, \frac{1}{2})$ бөгөөд энэ нь $(*)$ -г хангана.

$k \geq 1$ үед $a_{2k-1} = x_{k-1} + 1$ болог. Тэгвэл $\frac{1}{x_{2k}} = 1 + 2p(2k) - x_{2k-1} = 1 + 2 \cdot (1 + p(k)) - (x_{k-1} + 1) = 1 + ((1 + 2p(k)) - x_{k-1}) = 1 + \frac{1}{x_k}$ ба $\frac{1}{x_{2k+1}} = 1 - x_{2k} = 1 - \frac{x_k}{x_k + 1} = \frac{1}{x_k + 1}$ буюу $x_{2k+1} = x_k + 1$ болно. Иймд математик индукцийн зарчим ёсоор $(*)$ тэнцэтгэл биелнэ.

б) $n > 1$, сондгой тоо байхад $x_n > 1$ ба $n > 0$, тэгш тоо байхад $x_n < 1$ юм. Эндээс $x_0 = 0, x_1 = 1$ тоонууд өгөгдсөн дараалалд цор ганц байх нь гарна. $s > r \geq 2, x_r = x_s$ байх хамгийн бага r -ийг авч үзье. Тэгвэл $(*)$ -оос r ба s -ийн тэгш сондгой адил гэж гарна. Үүнийг буулган r -ийн хамгийн бага гэсэн сонголтод харшлал үүсгэнэ. Эндээс өгөгдсөн дараалалд тэнцүү 2 гишүүн байхгүй гэж гарна.

в) Сөрөг биш бүхэл m -ийн хувьд $x_{2^m-1} = m$ ба $x_{2^m} = \frac{1}{m+1}$ юм. Хэрэв $x_u \cdot x_v = 1$ бол $\frac{1}{x_{2^v}} = \frac{1}{x_v} + 1 = x_u + 1 = x_{2u+1}$. Эндээс $x_{2u+1} \cdot x_{2v} = 1$ болно. Одоо $0 \leq k \leq 2^m - 1$, $i = 2^m + k$ ба $j = 2^{m+1} - (k+1)$ бол $x_i \cdot x_j = 1$ гэж баталъя.

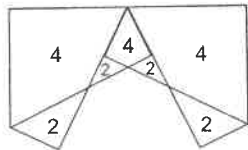
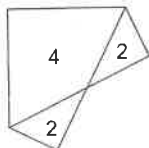
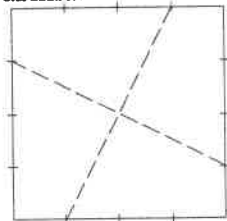
$m = 1$ үед $x_1 \cdot x_3 = 1$.

$m \geq 1$ үед дээрх өгүүлбэр биелдэг байг. $m \rightarrow m+1$ шилжилтийг харъя. $0 \leq \ell \leq 2^{m+1} - 1$, $i = 2^{m+1} + \ell = 2^{m+2} - (2^{m+1} - \ell)$ ба $j = 2^{m+2} - (\ell+1) = 2^{m+1} + (2^{m+1} - \ell - 1)$. Эндээс i ба j нь тэгш сондгойгоороо ялгаатай бөгөөд $\ell = 2r$ гэвэл $i = 2v$, $j = 2u+1$, $v = 2^m + r$, $u = 2^m - (r+1)$. Индукцэд үзэж байгаагаар $x_u \cdot x_v = 1 \Rightarrow x_i \cdot x_j = x_{2v} \cdot x_{2u+1} = 1$ болно. $S = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$ болог.

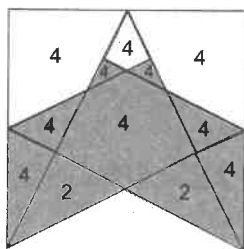
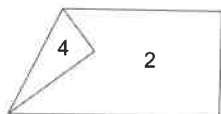
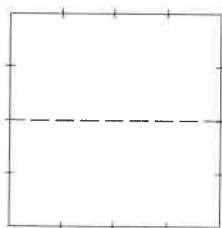
г) Бид а)-аас хэрэв $x \in S$ бол $x+1 \in S$ болохыг, б)-ээс $i \neq j$ бол $x_i \neq x_j$ гэдгийг, харин в)-ээс хэрэв $x \in S$ бол $\frac{1}{x} \in S$ гэдгийг баталсан. Түүнчлэн $0, 1 \in S$ юм. Эдгээрээс $S \equiv \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ гэдгийг дараах байдлаар харуулж болно. $0 \in S$ тул S -д бүх сөрөг биш бүхэл тоо орно. Хэрэв хуваарь нь s -ээс хэтрэхгүй зөв бутархайнууд S -д ордог бол $\frac{s+1}{p} \in S$, $1 \leq p \leq s$ тул $\frac{p}{s+1} \in S$ эндээс аливаа сөрөг бус бүхэл t -ийн хувьд $\frac{p}{s+1} + t = \frac{p+(s+1)t}{s+1} \in S$ буюу хуваарь нь $s+1$ -ээс хэтрэхгүй бүх рациональ тоонууд S -д орж байна. $\frac{1}{2} \in S$ тул индукцээр $\forall a \in \mathbb{Q}^+$ авахад $a \in S$ болов.

ДБ-В1. Дараагийн цувралд энэ бодлоготой холбогдсон өгүүлэл гарах болно.

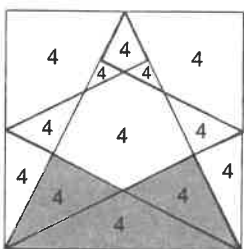
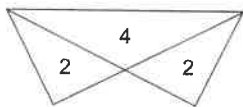
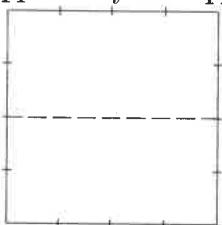
ДБ-В2. 2 бүтээлгийг дараах аргаар нугалаад нийлүүлж тавина.



Дараагийн 2 бүтээлгийг дараах аргаар нугалаад өмнөх 2 бүтээлэг дээрээ нийлүүлж тавина.



Үлдсэн 1 бүтээлгийг дараах маягаар нугалаад дээрхтэй нийлүүлбэл хучилт үүснэ.



ДБ-В3. Ижил урттай үгүүд бие биедээ шилжихгүй, мөн үгийн a үсгийн тоо нэмэгдэхгүй тул $\left[\frac{n}{2}\right]$ урттай үгүүд нь ялгаатай үгүүдээс үүсэх ёстой. Өөрөөр хэлбэл m нь $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ -ээс багагүй байх шаардлагатай. Одоо $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ үгнээс $2^n - C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ үйлдлээр бүх үгийг гаргаж чадахыг батлая. a үсгийг b үсгийг (-ээр сольё. Шинээр үүссэн үгүүдэд зөв тавигдсан хаалтуудыг тэмдэглэе. Өөрөө хэлбэл дараалж байрласан $(,)$ хаалтууд нь зөв тавигдсан гэж үзэх бөгөөд хооронд нь зөв тавигдсан хаалтууд байрлах $(,)$ хаалтууд нь мөн зөв тавигдсан хаалт гэж үзнэ. Эдгээрийг тэмдэглэсний дараа үлдэх хаалтуудын хувьд $($ хаалтууд нь баруун гар талд, $)$ хаалтууд нь зүүн гар талд байрлана. Зөв тавигдсан хаалтууд нь ижил байрлалтай байх хоёр үгийг ижил төрлийн үг гээ. Мэдээжээр n урттай үг бүр ямар нэг төрлийн үг болох нь ойлгомжтой. Ижил төрлийн үгүүд нь дараах үйлдлээр бие биедээ шилжинэ. Үгийн хамгийн сүүлийн буруу тавигдсан $)$ хаалтыг $($ хаалтаар солино. Энэ нь эх үгийн хувьд a үсгийг b үсгээр сольж байгаа хэрэг билээ. Мөн энэ үйлдлээр ижил төрлийн үгүүд нь хамгийн олон $)$ хаалттай мөн төрлийн үгээс гарах бөгөөд эцэст

нь хамгийн олон (хаалттай үгэнд шилжинэ. Мэдээжээр эдгээр дотор $\left[\frac{n}{2}\right]$ ширхэг) хаалттай үг байгаа. Өөрөөр хэлбэл үгийн төрлийн тоо нь $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ -ээс хэтрэхгүй. Ингэхээр бид тухайн төрлийн үгүүд дотроос хамгийн олон) хаалт агуулсан үгүүдийг сонговол нийт $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ үг сонгогдох бөгөөд бид дээр тодорхойлсон үйлдлийн тусламжтайгаар бүх үгийг давхардуулалгүй гаргаж авч чадах тул хамгийн цөөн үйлдлийн тоо $2^n - C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ болно.

ОУМО-46, I СОРИЛ

Б.Баяржаргал (Олонлог)

- 1 (Ш.Батхишиг). x, y, z нь $x + y + z = 1$ байх сөрөг биш бодит тоонууд. Ялгаатай m, n натурал тоонуудын хувьд

$$x^m \cdot y^n + y^m \cdot z^n + z^m \cdot x^n \leq \frac{m^m \cdot n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

- 2 (Б.Баяржаргал). A, B цэгүүдээр огтлолцох ω_1, ω_2 тойргууд өгөгдөв. A цэгийг дайрсан шулуун ω_1 -г C цэгт, ω_2 -г D цэгт огтлов. CD, BC, BD хэрчмүүд дээр харгалзан M, N, K цэгүүдийг $MN \parallel BD, MK \parallel BC$ байхаар сонгов. E нь ω_1 -ийн A -г агуулаагүй CB нумын, F нь ω_2 -ийн A -г агуулаагүй BD нумын цэгүүд бөгөөд $EN \perp BC, FK \perp BD$ бол E, A, M, F цэгүүдийг нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

- 3 (Б.Баяржаргал). $\forall n \geq 3$ үед $2^n = x^2 + 7y^2$ байх (x, y) хос сондгой натурал тоонууд олдоно гэж батал.

1. $f(x, y, z) = x^m y^n + y^m z^n + z^m x^n$ тэмдэглэе. Тэгвэл

$$f(x, y, z) = f(y, z, x) = f(z, x, y)$$

болохыг шалгаж болно. Ө.х. f функц цикл функц юм. Иймд y -ыг дундах тоо гэж авч үзэж болно. m, n ялгаатай натурал тоонууд тул $m > n \geq 1$ гэж үзэж болно.

Бид $f(x, y, z) \leq f(x + z, y, 0) \leq \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$ гэж баталъя.

$x \geq y \geq z$ ба $m \geq 2$ үед $(x+z)^m \geq x^m + mx^{m-1}z \geq x^m + 2x^{m-1}z$ тул $f(x+z, y, 0) - f(x, y, z) = (x+z)^m y^n - (x^m y^n + y^m z^n + z^m x^n) \geq x^m y^n + 2zx^{m-1}y^n - x^m y^n - y^m z^n - z^m x^n = zy^n(x^{m-1} - y^{m-1}) + zy^m(y^{n-1} - z^{n-1}) + x^n y^n z(x^{m-n-1} - y^{m-n-1}) + x^n z(y^{m-1} - z^{m-1}) \geq 0$.

$x \leq y \leq z$ үед $(x+z)^m \geq x^m + mxz^{m-1} + z^m \geq x^m + xz^{m-1} + z^m$ тул $f(x+z, y, 0) - f(x, y, z) \geq x^m y^n + xz^{m-1}y^n + z^m y^n - x^m y^n - y^m z^n - z^m x^n = z^{m-1}y^{n-1}(z-y)(y-x) + z^n y^{n+1}(z^{m-n-1} - y^{m-n-1}) + z^m x(y^{n-1} - x^{n-1}) \geq 0$.

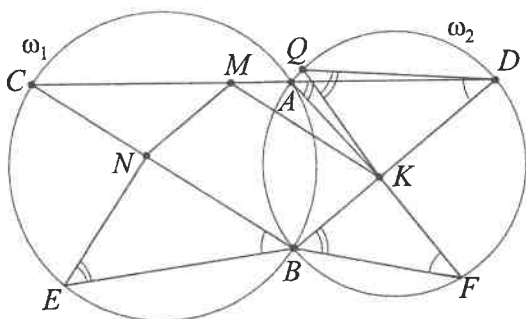
Иймд $m \geq 2$ ба y нь дундах тоо байхад $f(x, y, z) \leq f(x+z, y, 0)$ болно. Одоо $f(x+z, y, 0) \leq \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$ болохыг баталъя.

$$f(x+z, y, 0) = f(1-y, y, 0) = (1-y)^m y^n = \frac{1}{m^n n^m} \cdot (n-ny)^m (my)^n \leq \frac{1}{m^n n^m} \left(\frac{nm}{m+n}\right)^{m+n} = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}. \text{ Эндээс}$$

$$x^m y^n + y^m z^n + z^n x^m \leq \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

болно. Тэнцэтгэл биш $\left(\frac{m}{m+n}, \frac{n}{m+n}, 0\right)$ буюу эдгээрийн сэлгэмэл үед тэнцэлдээ хүрнэ.

2. $\angle CEB = \angle BAD$ ($ABEC$, $ADFB$ багтсан).
 $(FK) \cap \omega_2 = Q$ гээ.



$\angle BQD = \angle BAD = \angle CEB$. $\frac{CN}{NB} = \frac{CM}{MD} = \frac{BK}{KD}$ ($MN \parallel BD$ $MK \parallel BC$)

$$\begin{cases} \angle CEB = \angle BQD \\ \frac{CN}{NB} = \frac{BK}{KD} \\ EN, QK - \text{өндөрүүд} \end{cases} \Rightarrow \triangle CEB \sim \triangle BQD \text{ болно. } \Rightarrow \angle QOB =$$

$$\begin{cases} \angle KFB = \angle CBE = \alpha \Rightarrow \\ \angle DAF = \angle KBF = \angle NEB = 90^\circ - \alpha \\ \angle CAE = \angle CBE = \alpha \end{cases} \Rightarrow \angle EAF = 90^\circ \text{ боллоо.}$$

Одоо $\angle EMF = 90^\circ$ гэж харвал болно. $\triangle ENB \sim \triangle BKF \Rightarrow \frac{EN}{NB} = \frac{BK}{KF} \Rightarrow \frac{EN}{BK} = \frac{EN}{MN} = \frac{NB}{KF} = \frac{MK}{KF}$ ба $MNBK$ параллелограмм $\Rightarrow \angle MKB = \angle ENM = \angle MKF$. Эдгээрээс $\triangle ENM \sim \triangle MKF \Rightarrow$

$$\begin{cases} \angle NME = \angle KFM \\ MN \perp KF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \angle EMF = 90^\circ \\ \angle EAF = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow EAMF \text{ багтсан дөр-}$$

вөн өнцөгт боллоо.

3. I бодолт. $n = 3$ үед $2^3 = 1^2 + 7 \cdot 1^2$, $(1; 1)$ хос олдож байна. Цааш нь n -ээр индукцлэн $2^n = x^2 + 7y^2$ байх $(x; y)$ сондгой хос олддог гэж үзье.
$$\begin{cases} 2^n = (x + \sqrt{7}iy)(x - \sqrt{7}iy) \\ 2^3 = (1 + \sqrt{7}i)(1 - \sqrt{7}i) \end{cases} \Rightarrow \text{харгалзан}$$

үржүүлээд хоёр янзаар бүлэглэвэл

$$2^{n+1} = \left(\frac{1}{2}(x + \sqrt{7}iy)(1 + \sqrt{7}i)\right) \cdot \left(\frac{1}{2}(x - \sqrt{7}iy)(1 - \sqrt{7}i)\right) \text{ ба } 2^{n+1} = \left(\frac{1}{2}(x + \sqrt{7}iy)(1 - \sqrt{7}i)\right) \cdot \left(\frac{1}{2}(x - \sqrt{7}iy)(1 + \sqrt{7}i)\right) \Rightarrow 2^{n+1} = \left(\left(\frac{x+y}{2} - 4y\right) + \left(\frac{x+y}{2}\right)\sqrt{7}i\right) \cdot \left(\left(\frac{x+y}{2} - 4y\right) - \left(\frac{x+y}{2}\right)\sqrt{7}i\right) = \left(\frac{x+y}{2} - 4y\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \cdot 7$$

$$\text{ба } 2^{n+1} = \left(\left(\frac{x-y}{2} + 4y\right) + \left(\frac{x-y}{2}\right)\sqrt{7}i\right) \cdot \left(\left(\frac{x-y}{2} + 4y\right) - \left(\frac{x-y}{2}\right)\sqrt{7}i\right) = \left(\frac{x-y}{2} + 4y\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \cdot 7 \text{ болно.}$$

x ба y сондгой гэдгээс $\frac{x-y}{2}$ ба $\frac{x+y}{2}$ хоёрын аль нэг нь заавал сондгой байх тул индукцийн шилжилт батлагдлаа.

II бодолт (УБ, I сургууль, VII анги, Н.Бямбажав). $n = 3$ үед $2^3 = 1^2 + 7 \cdot 1^2$ байх $(1; 1)$ хос олдож байна. $n = k$ үед $2^k = x_0^2 + 7y_0^2$ байх $(x_0; y_0)$ сондгой хос олдоно гэж үзье. x_0, y_0 сондгой $\Rightarrow \begin{cases} x_0 = a + b \\ y_0 = a - b \end{cases}$ байх тэгш сондгойгоороо ялгаатай a, b бүхэл тоонууд олдоно. $2^{n+1} = 2x_0^2 + 14y_0^2 = 2(a+b)^2 + 14(a-b)^2 = 16a^2 + 16b^2 - 24ab$

1) a нь тэгш, b нь сондгой үед $2^{n+1} = 7b^2 + (4a - 3b)^2$ буюу $(|4a - 3b|; b)$ хос шийд олдож байна.

2) a нь сондгой, b нь тэгш үед $2^{n+1} = 7a^2 + (3a - 4b)^2$ буюу $(|3a - 4b|; a)$ хос шийд болно. Индукцийн шилжилт хийгдэж бодлого бодогдов.

ОУМО-46, II СОРИЛ

Б.Баяржаргал (Олонлог)

1 (Б.Сандагдорж). Гүдгэр $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн BC, CD, DA, AB талуудыг харгалзан P, Q, R, S цэгүүд 1 : 2005

харьцаагаар хуваав. Тэгвэл

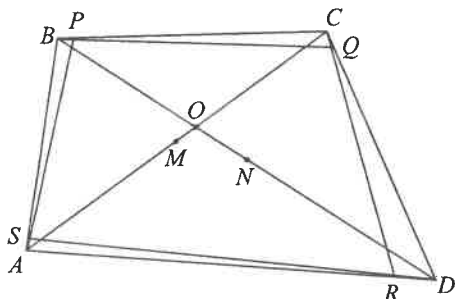
$$\frac{AP^2 + BQ^2 + CR^2 + DS^2}{AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2} \leq k$$

байх хамгийн бага k тоог ол.

2 Б.Баяржаргал. $2^n - 1 \mid m^2 + 9$ байх $m \in \mathbb{N}$ олддог байх бүх $n \in \mathbb{N}$ -г ол.

3 Б.Баясгалан. $n \in \mathbb{N}$ -ийн ямар утганд $n \times 2005$ тэгш өнцөгтийг 2×2 , 3×3 квадратаар давхцах ба илүү гаргалгүйгээр битүү хучиж болох вэ?

1. $\angle BPA = \alpha$ гэвэл $\angle APC = 180^\circ - \alpha$.



$$AB^2 = \left(\frac{BC}{2006}\right)^2 + AP^2 - 2 \cdot \frac{BC}{2006} \cdot AP \cdot \cos \alpha$$

$$AC^2 = \left(\frac{2005}{2006} BC\right)^2 + AP^2 + 2 \cdot \frac{2005}{2006} \cdot BC \cdot AP \cdot \cos \alpha \text{ гэдгээс}$$

$$\frac{AP^2 + \left(\frac{BC}{2006}\right)^2 - AB^2}{2 \cdot BC \cdot AP \cdot \frac{1}{2006}} = \frac{AC^2 - \left(\frac{2005}{2006} BC\right)^2 - AP^2}{2BC \cdot AP \cdot \frac{2005}{2006}}$$

$$\Rightarrow AP^2 \left(\frac{2005}{2006} + \frac{1}{2006}\right) = AC^2 \cdot \frac{1}{2006} + AB^2 \cdot \frac{2005}{2006} - BC^2 \cdot \frac{2005}{2006^2} \text{ болно.}$$

Үүний адилаар

$$CR^2 = AC^2 \cdot \frac{1}{2006} + CD^2 \cdot \frac{2005}{2006} - AD^2 \cdot \frac{2005}{2006^2}$$

$$DS^2 = BD^2 \cdot \frac{1}{2006} + AD^2 \cdot \frac{2005}{2006} - AB^2 \cdot \frac{2005}{2006^2}$$

$$BQ^2 = BD^2 \cdot \frac{1}{2006} + BC^2 \cdot \frac{2005}{2006} - CD^2 \cdot \frac{2005}{2006^2} \text{ болно.}$$

$$AP^2 + CR^2 + DS^2 + BQ^2 =$$

$$\frac{2}{2006}(AC^2 + BD^2) + \frac{2005^2}{2006^2}(AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2)$$

$$\frac{AP^2 + CR^2 + DS^2 + BQ^2}{AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2} = \frac{\frac{2}{2006}(AC^2 + BD^2) + \frac{2005^2}{2006^2}(AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2)}{AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2} \leq k$$

$$\Rightarrow \frac{2005^2}{2006^2} + \frac{\frac{2}{2006}(AC^2 + BD^2)}{AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2} \leq k.$$

ТЕОРЕМ. Дурын гүдгэр $ABCD$ өнцөгтийн хувьд AC , BD диагоналиудын дундаж цэгүүд харгалзан M , N бол $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$ байна. Дээрх теоремоос $MN = 0$ байхад k нь хамгийн бага утгаа авна.

$$k_{\min} = \frac{2005^2}{2006^2} + \frac{2}{2006} = 1 + \frac{1}{2006^2} \text{ байна.}$$

Баталгаа. $OD = y$, $OA = x$ гэе. диагоналиудын хоорондох өнцгийг β гэе.

$$AB^2 = (BD - y)^2 + x^2 - 2(BD - y) \cdot x \cdot \cos \beta$$

$$BC^2 = (BD - y)^2 + (AC - x)^2 + 2 \cos \beta (BD - y)(AC - x)$$

$$CD^2 = (AC - x)^2 + y^2 - 2 \cos \beta (AC - x)y$$

$$AD^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos \beta$$

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 2((BD - y)^2 + (AC - x)^2 + x^2 + y^2) + 2 \cos \beta (AC - 2x)(BD - 2y) \text{ ба } 4MN^2 = 4y^2 - 4y \cdot BD + BD^2 + AC^2 - 4y \cdot AC + 4x^2 + 2 \cos \beta (2y - BD)(2x - AC) \Rightarrow AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = BD^2 + AC^2 + 4MN^2.$$

2. $n = 2^\ell$ гэж эхлээд баталъя. $n = 2^\ell \cdot k$ ба $k \geq 3$ байх сондгой тоо байг. $2^k - 1$ нь $4t - 1 = q$ хэлбэртэй анхны тоон хуваагчтай байх ба $q \mid m^2 + 9$ байна. Тэгвэл $m^2 \equiv -9(q)$ -ийг $\frac{p-1}{2}$ зэрэгт дэвшүүлбэл $m^{q-1} \equiv -3^{q-1}(q) \Rightarrow$ Фермагийн бага теоремд $2 \equiv 0(q)$ болж зөрчил үүснэ.

$$2^n - 1 = 3(2^2 + 1)(2^{2^2} + 1) \dots (2^{2^{k-1}} + 1)$$

гэж Фермагийн тоонуудад задрах бөгөөд $\alpha \neq \beta$ үед $(2^{2^\alpha} + 1, 2^{2^\beta} + 1) = 1$ байна. Учир нь $(2^{2^\alpha} + 1, 2^{2^\beta} + 1) = d$ гэвэл $\alpha > \beta$ гэж үзэж болох ба $2^{2^\alpha} \equiv (2^{2^\beta})^{2^{\alpha-\beta}} \equiv 1(d)$ ба $2^{2^\alpha} \equiv -1(d) \Rightarrow d = 1$ боллоо. Иймд $2^{2^y} + 1$ ($y = 1, 2, \dots, \ell - 1$) тоонууд хос хосоороо харилцан

анхны учраас Хятадын теорем ёсоор $\begin{cases} c \equiv 2^{2^y} \pmod{2^{2^{y+1}} + 1} \\ y = 0, 1, \dots, \ell - 2 \end{cases}$
 систем шийдтэй байх ба эндээс $\begin{cases} c^2 + 1 \equiv 0 \pmod{2^{2^{y+1}} + 1} \\ y = 0, 1, 2, \dots, \ell - 2 \end{cases} \Rightarrow$
 $(3c)^2 + 9 \equiv 0(2^n - 1)$ болно. Иймд $n = \ell^\ell$ үед $2^n - 1 \mid m^2 + 9$ байх нь олдох нь ээ.

3. $n \times 2005$ хүснэгтийг 2×2 , 3×3 квадратуудаар хучсан гэж үзье. Эхлээд хүснэгтийг баганаар хар, цагаанаар сөөлжлүүлэн будъя. Тэгвэл 2×2 квадратын хувьд хар ба цагаан нүдний тоо тэнцүү, 3×3 квадратын хувьд хар ба цагаан нүдний тоо 3-аар зөрнө. Иймд нийт ха ба цагаан нүдний тооны зөрүү 3-д хуваагдана. Ө.х.

$$6 \mid n \quad (*)$$

байна. Одоо хүснэгтээ мөрөөр нь хар цагаан сөөлжлүүлэн будъя. Хэрэв n сондгой бол өмнөх дүгнэлтээс 3-д 2005 хуваагдах болж зөрчил үүснэ. Иймд

$$n \text{ тэгш тоо} \quad (**)$$

байна. (*) ба (**) $f \Rightarrow 6 \mid n$ боллоо. Байгуулалт нь 2005 баганын эхний 4 баганыг 2×2 квадратуудаар үлдсэн тэгш өнцөгтөө 3×3 квадратуудаар хучна.

ОУМО-46, III СОРИЛ

Б.Баяржаргал (МУИС)

1 (Б.Баяржаргал). $2^x \cdot 3^y - 5^z \cdot 7^w = 1$ ба $x, y, z, w \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ байх (x, y, z, w) гэсэн бүх шийдийг ол.

2 (Б.Баяржаргал). $f(f(x - y)) = f(x) \cdot f(y) - f(x) + f(y) - xy$ байх $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ бүх функцийг ол.

3 (Ц.Дашдорж). $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ бол $a_n = \sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j}$ гэж $n \geq 2$ үед

(a_n) дарааллыг тодорхойлов. $2 \leq N$ байх N бүрийн хувьд $\sum_{n=2}^N a_2 \dots a_n < 1$ гэж батал.

1. $x = 0$ бол (сондгой) – (сондгой) = (сондгой) болж зөрчил үүснэ. $x \geq 3, y \geq 1$ бол $5^z \cdot 7^w \equiv -1(3) \Rightarrow 5^z \equiv -1(3) \Rightarrow z$ сондгой. $-5^z \cdot 7^w \equiv 1(8) \Rightarrow z$ тэгш гэж гарч зөрчил үүснэ.

1) $x = 1$ ба $z \geq 1, w \geq 1$ бол 7 модулиар бодоход $y \equiv 4(6), 5$ модулиар бодоход $y \equiv 1(4)$ гэж гарч зөрчил үүснэ.

2) $x = 1$ ба $z = 0, w \geq 0$ бол $2 \cdot 3^y - 7^w = 1$ болох ба $y = 0$ үед $(1; 0; 0; 0)$ гэсэн шийд гарна. $y = 1$ бол $7^w = 5$ болж шийдгүй. $y \geq 2$ бол $-7^w \equiv 1(9)$ болж энэ нь шийдгүй.

3) $x = 1$ ба $z > 0, w = 0$ бол $2 \cdot 3^y - 5^z = 1$ болох ба $y = 1$ үед $(1; 1; 1; 0)$ гэсэн шийдтэй. $y \geq 2$ үед $-5^z \equiv 1(9) \Rightarrow z = 3k$ болох ба $5^{3k} + 1 \equiv 0(7)$ гэтэл $5^{3k} + 1 = 2 \cdot 3^y$ учир зөрчил.

$x = 2$ бол $(2; 2; 1; 1)$ шийдтэй ба 5 ба 7 модулиар $y = 2k$ гэж гарна. $y \geq 4$ үед $5^z \cdot 7^w = 4 \cdot 3^{2k} - 1 = (2 \cdot 3^k - 1)(2 \cdot 3^k + 1)$ болох ба $2 \cdot 3^k - 1$ нь $5^z \cdot 7^w$ -ийг хуваана гэдгээс 1), 2), 3)-тай ижлээр өөр шийдгүй гэж гарна. Иймд одоо $y = 0$ болно. $z \geq 1$ бол $2^k \equiv 1(5)$ буюу $x \equiv 0(4)$ болно. $x = 2^k$ гэвэл $2^{2k} - 1 \equiv 0(3)$ болж $2^{2k} - 1 = 5^z \cdot 7^w$ гэдэгт зөрчнө. Эндээс $z = 0$ болно.

$2^x - 7^w = 1$ болох ба $x \leq 3$ үед $(3; 0; 0; 1)$ -ээс өөр шийд гарахгүй. Харин $x \geq 4$ үед $7^w \equiv -1(16)$ гэтэл энэ нь шийдгүй. Иймээс $(1; 1; 1; 0), (1; 0; 0; 0), (2; 2; 1; 1), (3; 0; 0; 1)$ -ээс өөр шийд байхгүй.

2. $y = x$ гэвэл $f(f(0)) = f^2(x) - x^2, f(0) = a$ гээ. $y = 0 = x$ гэвэл $f(a) = a^2$ болох ба

$$f^2(x) = x^2 + a^2 \quad (1)$$

болно. Энд $x = f(x)$ гэвэл

$$f^2(f(x)) = f^2(x) + a^2 \quad (2)$$

гарна. Харин анхны нөхцөлд $y = 0$ гэвэл

$$f(f(x)) = f(x)(a - 1) + a \quad (3)$$

гарах нь (2) ба (3)-аас $f^2(x) + a^2 = f^2(f(x)) = f^2(x)(a - 1)^2 + 2f(x)(a - 1)a + a^2, af(x)(af(x) - 2f(x) - 2 + 2a) = 0$ болно. $f(x) = 0, f(x) = \frac{2-2a}{a-2}$ байхгүй x олдоно гэдэг нь (1)-ээс харагдана. Иймд $a = 2$ буюу $f(0) = 0$ ба (1) нь

$$f^2(x) = x^2 \quad (4)$$

(3) нь $f(f(x)) = -f(x)$ болно. $f(x_0) = x_0$ байх $\exists x_0$ гэвэл $f(f(x_0)) = f(x_0) = -f(x_0) = -x_0$ буюу $x_0 = 0$ гэж гарна. Ө.х. $x \neq 0$ бол $f(x) \neq x$ учир (4)-өөс $f(x) = -x$ гэж гарна.

3.

$$\sum_{k=2}^n a_k = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{p_{i_1}} + \dots + \frac{1}{p_{i_s}} \right) = \sum_{P \ni p \leq n} \frac{1}{p} \left[\frac{n}{p} \right] \leq$$

$$\sum \frac{1}{p} \cdot \frac{n}{p} = n \cdot \sum \frac{1}{p^2} \leq n \cdot \left(\frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \right) < \quad (1)$$

$$n \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \right) = \frac{n}{2}$$

$$(a_2 a_3 \dots a_n)^{\frac{1}{n-1}} < \frac{a_2 + \dots + a_n}{n-1} \text{ тул}$$

$$a_1 \dots a_n < \left(\frac{a_2 + \dots + a_n}{n-1} \right)^{n-1} \stackrel{(1)}{<} \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1} < \frac{e}{2^{n-1}} < \frac{3}{2^{n-1}} \quad (2)$$

(2)-уудыг нэмбэл $\sum_{n=2}^{\infty} a_2 \dots a_n = a_2 + a_2 a_3 + a_2 a_3 a_4 + \dots < \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} +$

$$\frac{1}{60} + 3 \left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \dots \right) = \frac{46}{60} + \frac{3}{2^5} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) = \frac{46}{60} + \frac{6}{32} = \frac{229}{240} < 1.$$

ОУМО-46, IV СОРИЛ

Ц.Дашдорж

- 1 (Ц.Дашдорж). $f(x) = x^{10} + a_1 x^9 + \dots + a_{10} \in \mathbb{Z}[x]$ бол $\exists a \neq b \in \mathbb{N}$, $a, b \leq 101$ ба $101 \mid f(a) - f(b)$ гэж батал.
- 2 (Ц.Дашдорж). $n \geq 5$ байг. Зөв n өнцөгтийн дараалсан 5 орой бүр бүгд өөр өнгөтэй байхаар бүх оройг 6 өнгөөр будав. n -ийн авч болох утгуудыг ол.
- 3 (Б.Батбаясгалан). $S = \{1, 2, \dots, 10000\}$ олонлогийн $A_1, \dots, A_{16}$ дэд олонлогуудыг, S олонлогийн ямар ч элемент x нь эдгээрийн аль нэг 8-ынх нь огтлолцол болдог байхаар (ө.х. $\exists i_k$, $k = \overline{1, 8}$, $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_8} = \{x\}$) сонгож болохыг батал.

1. Эсрэгээс нь үзвэл $a \neq b \in \mathbb{Z}_{101}$ бол $f(a) \neq f(b)(101)$ буюу $\mathbb{Z}_{101} = f(\mathbb{Z}_{101}) = \{f(a) \mid a \in \mathbb{Z}_{101}(\text{mod } 101)\}$ гэсэн үг. Иймд МК-1-ийн 1.9.-12-оор

$$\sum_{k=0}^{100} f(k)^{10} \equiv \sum_{k=0}^{100} n^{10} \equiv 0(101) \quad (*)$$

Нөгөө талаас $f(x)^{10} = x^{100} + \sum_{m=0}^{99} b_m x^m$ тул $\sum_{k=0}^{100} f(k)^{10} = \sum_{k=0}^{100} k^{100} + \sum_{m=1}^{99} b_m \left(\sum_{k=0}^{100} k^m \right) + \sum_{k=0}^{100} b_0 \equiv -1 + \sum_{m=1}^{99} b_m \cdot 0 + 101 \cdot b_0 \equiv -1(101)$ болж $(*)$ -той зөрчилдөв.

2 (Цогбаярын бодолт). 6 өнгө 1, 2, ..., 6 гэж тэмдэглэе. $n = 5k$ үед 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, ... гэж будаж болно. $n = 6k$ үед 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... гэх мэт будна. $n = 6k$ үед k ширхэг 6 байгаа, эднээс хэдийг нь ч авч болно, ө.х. $[5k, 6k]$, $k = 1, 2, \dots$ гэх мэт завсруудын тоонууд бодлогын нөхцлийг хангана. Тухайлбал $[5, 6]$, $[10, 12]$, $[15, 18]$, $[20, 24]$, $[25, 30]$, $[30, 36]$, ... $n > 19$ байх n бүр нь бодлогын нөхцлийг хангана. $n = 7, 8, 9, 13, 14, 19$ үед боломжгүй гэдгийг баталъя. $\left[\frac{19}{6} \right] = 3$ -ээс нэг өнгийн 4 цэг олдono. Энэ 4 цэг нь дор хаяж хоорондоо 4 цэгийн зайтай орших буюу $4 \cdot 4 + 4 = 20 > 19$ болж зөрчил үүснэ.

2 (Тэмүгэгийн бодолт). $n = 6k + r$, $r = \overline{1, 5}$ үед $k + r < 5$ бол болохгүй гэж баталъя. $n = 6k + r$, $r \geq 1$ -ээс аль нэг өнгө нь $k + 1$ -ээс багагүй удаа орно. Иймд $5(k + 1) \leq 6k + r$ байх ёстой, эндээс $5 \leq k + r$ байна. $n \geq 20$ үед болно гэж баталъя. $n = 5k + r$, $n \geq 20$ байг. $k \geq 4$. Эндээс $k \geq r$ болох тул $n = 5k + r = 5(k - r) + 6r$ оройн аль нэг оройг нь сонгож түүнээс эхлэн цагийн зүүний дагуу $6r$ оройг нь 1, 2, ..., 6 гэж будаад үлдсэн $5(k - r)$ ширхэг оройг нь 1, 2, 3, 4, 5 гэж будахад бодлогын нөхцөл биелнэ.

3. $g_1, g_2, \dots, g_{16}$ гэсэн 16 элементтэй олонлогийн бүх 8 элементтэй дэд олонлогийг авч үзье. Тэгвэл эдгээрийн нийт тоо нь $C_{16}^8 = 12870$ болно. Эдгээрийг $G_1, G_2, \dots, G_{12870}$ гэж тэмдэглээд

$i \leq 10000$ бүрийн хувьд $i \in A_j \iff g_j \subseteq G_i$ байхаар A_j олонлогуудыг тодохойлье. G_i бүр нь бүр нь яг 8 элементтэй тул i бүр нь яг 8 ширхэг олонлогт харъяалагдана. Хэрэв $i \in A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_8}$ бол $G_i = \{i_1, i_2, \dots, i_8\}$ болно. Мөн $j \in A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_8}$ гэвэл $G_j = \{i_1, i_2, \dots, i_8\}$ болох тул $G_i = G_j$ буюу $i = j$ болно. Өөрөөр хэлбэл аль ч 8-ынх нь огтлолцол яг 1 элементтэй. Эндээс батлах зүйл батлагдав.

ОУМО-46, V сорил

Ц.Дашдорж

1 (Б.Батбаясгалан). Хоёр тоглогч бүхэл тоонуудыг ээлжлэн будаж тоглов. I тоглогч улаанаар, II тоглогч хөхөөр будах ба I тоглогч ямар нэг арифметик прогрессийн дараалсан 4 гишүүнийг будаж чадвал хожно. I тоглогч үргэлж хожиж чадахыг батал.

2 (Б.Баяржаргал). $x, y, z > 0$ ба $x + y + z = \frac{3}{2}$ бол

$$\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} \geq \frac{40}{3}$$

гэж батал.

3 (Ц.Дашдорж). Бүхэл тооны төгсгөлгүй арифметик прогресс нь квадрат ба кубыг агуулдаг бол 6 зэргийг агуулахыг батал.

1. I тоглогч 4^i хэлбэрийн 4 ширхэг тоог тэмдэглэе. Тэгвэл $2 \cdot 4^i - 4^j$, $3 \cdot 4^i - 2 \cdot 4^j$, $2 \cdot 4^j - 4^i$ тоонуудын аль нь ч хөхөөр будагдаагүй ба 4^i , 4^j тоонууд улаанаар будагдсан байх i, j хос олдоно. Учир нь дээрх хэлбэрийн тоонууд нь хоорондоо ялгаатай байх i, j хосын тоо $C_4^2 = 6$. Гэтэл хөх өнгийн 4 нь л тоо байгаа. Одоо $2 \cdot 4^i - 4^j$, тоог улаанаар будаад дараа нь $3 \cdot 4^i - 2 \cdot 4^j$, $2 \cdot 4^j - 4^i$ тоонуудын аль боломжтойг нь улаанаар будахад улаан өнгийн 4 урттай арифметик прогресс үүснэ.

2. $x, y, z > 0$ хувьд

$$3(xy + yz + xz) \leq (x + y + z)^2$$

байдаг:

$$\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{16}{9}(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2\sqrt{\frac{16(x^2 + y^2 + z^2)}{9(x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{8}{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{yz} + 16yz &\geq 8, \quad \frac{1}{xz} + 16xz \geq 8, \quad \frac{1}{xy} + 16xy \geq 8. \quad \text{Эдгээрийг нэмж (1)-г} \\ \text{анхаарвал } A + \frac{16}{9}((x^2 + y^2 + z^2) + 9(xz + xy + yz)) &\geq 8\left(\frac{1}{3} + 3\right) = \frac{80}{3} \\ \Rightarrow \frac{80}{3} \leq A + \frac{16}{9}((x + y + z)^2 + 7(xz + xy + yz)) &\stackrel{(1)}{\leq} A + \frac{16}{9}\left(\frac{9}{4} + \frac{7}{3}(x + y + z)^2\right) \\ = A + \frac{16}{9}\left(\frac{9}{4} + \frac{7}{3} \cdot \frac{9}{4}\right) &\Rightarrow \frac{80}{3} \leq A + \frac{16}{9} \cdot \frac{30}{4} = A + \frac{40}{3} \Leftrightarrow \frac{40}{3} \leq A. \end{aligned}$$

3 (Ч.Доржнамжил). $\div (a, d)$ өгснөөр $\exists m, n \in \mathbb{Z}, \exists p, q \in \mathbb{Z}$.
 $\begin{cases} p^2 = a + dm \\ q^3 = a + dn \end{cases}$ буюу $\begin{cases} p^2 \equiv a(d) \\ q^3 \equiv a(d) \end{cases} \cdot (a, d) = s$ байг.

$$a = sa_1, \quad d = sd_1, \quad p = sp_1, \quad q = sq_1 \quad (2)$$

$$\text{тул (1) нь } \begin{cases} s^2 p_1^2 \equiv sa_1(sd_1) \\ s^3 q_1^3 \equiv sa_1(sd_1) \end{cases}, \quad \begin{cases} sp_1^2 \equiv a_1(d_1) \\ s^2 q_1^3 \equiv a_1(d_1) \end{cases} \xrightarrow{(a_1, d_1)=1}$$

$$\begin{cases} (s, d_1) = 1 \\ (p_1, d_1) = 1 \\ (q_1, d_1) = 1 \end{cases} \quad (3)$$

болно. (1)-ээс $p^6 \equiv a^3 = a \cdot a^2 \equiv aq^6(d) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} s^6 p_1^6 \equiv s^7 a_1 q_1^6(sd_1) \Rightarrow s^5 p_1^6 \equiv s^6 a q_1^6(d_1)$.

(3)-аас $q_1^{-1}, s_1^{-1} \in \mathbb{Z}_{d_1}$ тул $s^5 s^{-6} p_1^6 q_1^{-6} \equiv a_1(d_1) \mid \cdot s$ буюу $s^6 s^{-6} p_1^6 q_1^{-6} \equiv sa_1(sd_1), p_1^6 q_1^{-6} \equiv a(d), p_1 q_1^{-1} \in \mathbb{Z}$ тул бодлого бодогдов.

МОНГОЛЫН ОЮУТНЫ МАТЕМАТИКИЙН
XIII ОЛИМПИАД

Ц.Дашдорж

а) эчнээ, давааны бодлогууд

I хэсэг (ОМ1–ОМ4)

- 1 (Ц.Дашдорж). $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$, $AB = BA$, $\det B = 1$ байг. $\det(A^3 + B^3) = 1$ бол $A^2 = E$ гэж батал.
- 2 (Ц.Дашдорж). $A \in M_2(\mathbb{C})$ ба $K(A) = \{B \in M_2(\mathbb{C}) \mid AB = BA\}$ байг. $\forall B \in K(A)$, $|\det(A+B)| \geq |\det B| \Leftrightarrow A^2 = O$ гэж батал.
- 3 (Ц.Дашдорж). $A \in M_3(\mathbb{R})$ байг.
- а) $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ нь бодит язгуургүй олон гишүүнт бол $f(A) \neq O_3$ гэж батал.
- б) $\exists n \in \mathbb{N}$, $(A + \hat{A})^{2n} = A^{2n} + \hat{A}^{2n} \Leftrightarrow \det A = O$ гэж батал, энд $\hat{A}$ нь A -тай уялдсан матриц.
- 4 (Ц.Дашдорж). $n \geq 2$ бол
- а) $\exists A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $r(AB) - r(BA) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ гэж батал.
- б) $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ бол $r(XY) - r(YX) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ гэж батал.
- 5 (Ц.Дашдорж). $A \in M_n(\mathbb{C})$, $r(A) = r$, $n \geq 2$, $1 \leq r \leq n-1$ байг.
- а) $\exists B \in M_{n,r}(\mathbb{C})$, $C \in M_{r,n}(\mathbb{C})$, $r(B) = r = r(C)$, $A = BC$ гэж батал.
- б) A матриц $\mathbb{C}$ дээр коэффициенттой $r+1$ зэргийн олон гишүүнтийн язгуур болно гэж батал.
- 6 (Ц.Дашдорж). K талбар ба $2 \leq n \in \mathbb{N}$ байг.
- а) $Z(M_n(K))$ нь $M_n(K)$ цагиргийн төв бол $Z(M_n(K)) \cong K$ гэж батал.
- б) $M_n(\mathbb{R})$ ба $M_n(\mathbb{C})$ нь изоморф биш цагиргууд гэж батал.
- 7 (Ц.Дашдорж). $A \in M_2(\mathbb{C})$ байг. $n \in \mathbb{N}$ бүрийн хувьд $x_n = \det(A^n + I)$ гээ. Хэрэв $x_1 = x_2 = 1$ бол $x_n = 1 \vee 4$ гэж батал.

- 8 (Ц.Дашдорж). $(G, +)$ төгслөг абелийн бүлгийн хувьд $(G, +, *)$ нь нэгжтэй цагираг болж байхаар $(G, *)$ алгебрийн үйлдлийн тоо нь $i(G)$ бол
- а) $i(\mathbb{Z}_{12}) = 4$ гэж батал.
- б) Дурын A, B төгслөг абелийн бүлгүүдийн хувьд $i(A \times B) \geq i(A)i(B)$ гэж батал.
- в) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|G_k|}{i(G_k)} = 0$ ба $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|H_k|}{i(H_k)} = \infty$ байх төгслөг абелийн бүлгүүдийн $(G_k)_{k \geq 1}, |H_k|_{k \geq 1}$ гэсэн 2 дараалал олдохыг үзүүл.
- 9 (Ц.Дашдорж). $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$ ба $\varphi, \psi \in L(\mathbb{C}V)$, $r(\varphi\psi - \psi\varphi) \leq 1$ бол φ, ψ нь ерөнхий хувийн вектортой гэж батал.
- 10 (Ц.Дашдорж). $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\det A \neq 0$ ба $k \in \mathbb{N}$ бол $X^k = A$ тэгшитгэл шийдтэй гэж батал.
- 11 (Ц.Дашдорж). $A \in M_n(\mathbb{C})$ бүр нь тэгш хэмт матрицтай төстэй гэж батал.
- 12 (Ц.Дашдорж). G абелийн бүлэг ба $g \in G$ элементийн эрэмбэ, n -тэй харилцан анхны бол $nx = a$ тэгшитгэл A -д шийдтэй гэж батал.
- 13 (Ц.Дашдорж). G бүлгийн a, b элементүүдийн хувьд $a^n = 1$, $aba^{-1} = b^2$ бол b -ийн эрэмбийг ол.
- 14 (Ц.Дашдорж). $p = 1 + 4k$ анхны тоо ба $\chi(K) = p$ байг. $a \in K^* = K \setminus \{0\}$ бүрийн хувьд $\exists x, y, z \in K^*$, $a = x^2 + y^2 + z^2$ гэж батал.
- 15 (Ц.Дашдорж). G бүлэг ба $e \neq x \in G$ бүрийн эрэмбэ p бол
- а) p анхны тоо гэж үзүүл.
- б) Хэрэв G -ийн $p^2 - 1$ элементтэй дэд олонлог бүр нь бие биетэйгээ байр сольдог p элементийг агуулдаг бол G -абелийн бүлэг гэж үзүүл.
- 16 (Ц.Дашдорж). S_n бүлгийн ямарч элементийн эрэмбэ $e^{n/e} \cong 1, 44^n$ -ээс хэтрэхгүй гэж батал.
- 17 (Ц.Дашдорж). $|G| < \infty$ ба $A \leq G$ байг. $[G : A] < p \mid |G|$ бол $\bigcap_{g \in G} A^g$ нь G -ийн Силовын p дэд бүлгүүдийг агуулна гэж батал.

- 18 (Ц.Дашдорж). $|G| < \infty$ бол $\exists n$, $G \lesssim A_n$, ө.х. G нь A_n -д изоморфоор багтана гэж батал.
- 19 (В.Адьяасүрэн). $1+xy+x^2y^2 = a(x)c(y)+b(x)d(y)$ байх $a(x)$, $b(x)$, $c(y)$, $d(y)$ байх олон гишүүнтүүд оршин байх уу?
- 20 (В.Адьяасүрэн). b нь $b > 1$ байх натурал тоо. Дурын натурал n -ийн хувьд n тооны b суурьтай тооллын систем дэх оронгийн тоог $d(n)$ гэж тэмдэглэе. $\{f(n)\}$ дараалал $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(n) = nf(d(n))$ рекуррент томъёогоор өгөгджээ. b -ийн ямар утганд $\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \dots$ цуваа нийлэх вэ?
- 21 (В.Адьяасүрэн). 2-оос багагүй аливаа натурал n -ийн хувьд $\frac{1}{e} - \frac{1}{ne} < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{e} - \frac{1}{2ne}$ гэж батал.
- 22 (Б.Батбаясгалан). $2 \times 2 \times n$ хэмжээтэй баганыг $1 \times 1 \times 2$ хэлбэрийн тоосгоор хичнээн янзаар өрөх вэ?
- 23 (Б.Батбаясгалан). $v_1, v_2, \dots, v_n$ оройтой мод графын тоо нь n^{n-2} болохыг батал.

II хэсэг (ОМ2–ОМ4)

- 1 (Ц.Дашдорж). $x^6 + 22x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 37x^2 - 29x - 15 \in \mathbb{Q}[x]$ -ийн Галуагийн бүлгийг ол.
- 2 (Ц.Дашдорж). $n \in \mathbb{N}$ өгсөн байг. $\exists f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ унитар олон гишүүнт, $G(L|\mathbb{Q}) = S_n$, энд $L = SF_{\mathbb{Q}}(f)$ гэж батал.
- 3 (Ц.Дашдорж). $K|F \in \text{Gal}$, $G(K|F) = \langle \sigma \rangle$, $\chi(F) = p$, $[K : F] = p^{m-1}$, $m \geq 2$ байг. $\beta \in K$, $\text{tr}_{K|F}(\beta) = 1$ бол
 а) $\exists \alpha \in K$, $\sigma\alpha - \alpha = \beta^p - \beta$
 б) $f = x^p - x - \alpha \in K[x]$ үл задарна.
 в) $f(0) = 0$ бол $F(\Theta)|F$ цикл Галуагийн өргөтгөл ба $[F(\Theta) : F] = p^m$, $G(F(\Theta)|F)$ нь $\sigma^*(\Theta) = \Theta + \beta$ байх σ -ийн үргэлжлэл σ^* -ээр төрөгдсөн цикл бүлэг гэж батал.

- 4 (В.Адьяасүрэн). $\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{\frac{1}{x} + |\ln y| - 1} \leq 1$ гэж батал.

5 (В.Адьяасүрэн). $f \in C[0;1]$ бол

$$\int_0^1 \int_0^1 |f(x) + f(y)| dx dy \geq \int_0^1 |f(x)| dx$$

гэж батал.

6 (В.Адьяасүрэн). a, b, c -ийн ямар утганд $\forall x \in \mathbb{R} : f(ax^2 + bx + c) = f(x)$ байх тогтмолоос ялгаатай, тасралтгүй f функц оршин байх вэ?

Зарим бодлогын бодолтууд

1. $\det B = 1$ тул $\exists B^{-1} \in M_2(\mathbb{Z})$ ба $AB^{-1} = B^{-1}A$ болно. Иймд $A^3 + B^3 = ((AB^{-1})^3 + E_2)B^3$ -ээс

$$\det((AB^{-1})^3 + E) = 1 \quad (1)$$

$(AB^{-1})^2 = 0$ гэж харуулбал болно, учир нь эндээс $A^2 = 0$ гэж гарна. $AB^{-1} = A_1 \in M_2(\mathbb{Z})$ ба $1 \neq \varepsilon$ нь $\sqrt[3]{1}$ -ийн язгуур гэвэл

$$A_1^3 + E_2 = (A_1 + E_2)(A_1 + \varepsilon E_2)(A_1 + \varepsilon^2 E_2) \quad (2)$$

болох ба $\det(A_1 - xE_2) = P(x) = x^2 - \text{tr} A_1 \cdot x + \det A_1 = x^2 - mx + n$ гэсэн A_1 -ийн характеристик олон гишүүнтийн хувьд

$$P(-1)P(-\varepsilon)P(-\varepsilon^2) \stackrel{(2)}{=} 1 \quad (3)$$

болно. $\bar{\varepsilon} = \varepsilon^2$ тул $P(-\varepsilon^2) = \overline{P(-\varepsilon)}$ буюу $P(-\varepsilon)P(-\varepsilon^2) \in \mathbb{N}$ болно. Иймд (3)-аар $P(-1) = P(-\varepsilon)P(-\varepsilon^2) = 1$, $P(-1) = 1 + m + n$, $P(-\varepsilon)P(-\varepsilon^2) = (\varepsilon^2 + m\varepsilon + n)(\varepsilon + m\varepsilon^2 + n) = 1$ -ээс $m = n = 0$ буюу $P(A_1) = A_1^2 - \text{tr} A_1 \cdot A_1 + \det A_1 E_2 = A_1^2 - mA_1 + nE_2 = A_1^2 = 0$.

2. $\Rightarrow$: λ_1, λ_2 нь $P(\lambda) = \det(A - \lambda E_2)$ -ийн язгуурууд байг. Тэгвэл $(A - \lambda_1 E_2)(A - \lambda_2 E_2) = 0$ ба $-\lambda_1 E_2, -\lambda_2 E_2 \in K(A)$ тул $0 = |\det A - \lambda_i E_2| \geq |\lambda_i|^2$, $i = 1, 2$ буюу $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Иймд $A^2 = 0$.

$\Leftarrow$: $A^2 = 0$ байг. $\forall B \in K(A)$ -ийн хувьд $\det(A+B) = \det(B)$ гэж баталъя. $\exists B^{-1}$ бол $\forall x \in \mathbb{C}$ -ийн хувьд $0 \neq \det(-B^2) = \det(x^2 A^2 - B^2) = \det(xA + B)\det(xA - B)$. Эндээс $Q(x) = \det(xA + B)$ олон гишүүнт нь $\forall x \in \mathbb{C}$ бүрийн хувьд 0 биш буюу тогтмол тоо гэж

гарна. Иймд $Q(0) = Q(1)$ буюу $\det(A + B) = \det B$. Хэрэв B нь урвуургүй бол $\exists x_n \in \mathbb{R}$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $\forall n$, $\det(x_n E_2 + B) \neq 0$, $\forall n$, $\det(A + x_n E_2 + B) = \det(x_n E_2 + B)$. Эндээс $n \rightarrow \infty$ үед $\det(A + B) = \det B$ гэж гарна.

3. а) $f(x)$ нь бодит язгуургүй бол $f(x)$ -ийн тэмдэг тогтмол байна. Иймд $\forall x \in \mathbb{R}$ -ийн хувьд $f(x) > 0$ гэж үзье. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$ тул тасралтгүй функц $f(x)$ нь минимум утгатай, тэр нь $m > 0$ байг.

$$g(x) = f(x) - \frac{m}{2} \quad (1)$$

олон гишүүнт нь бодит язгуургүй тул түүний үл эмхтгэгдэх бодит үржигдэхүүнүүд $x^2 + 2ax + a^2 + b^2$, $a, b \in \mathbb{R}$ хэлбэртэй байна. $a, b \in \mathbb{R}$ -ийн хувьд $\det(A^2 + 2aA + (a^2 + b^2)E_3) = \det(A + aE_3 + bE_3) \det(A + aE_3 - bE_3) = z\bar{z} \geq 0$ буюу $A \in M_3(\mathbb{R})$ -ийн хувьд

$$\det g(A) \geq 0 \quad (2)$$

боллоо. Хэрэв $\exists A \in M_3(\mathbb{R})$, $f(A) = O_3 \in M_3(\mathbb{R})$ гэвэл (1)-ээр $g(A) = -\frac{m}{2}E_3$ болно. Эндээс $\det g(A) = \det\left(-\frac{m}{2}E_3\right) = -\frac{m^3}{8} < 0$ болж (2)-д зөрчив.

б) $\Rightarrow$: $\det A = 0$ бол $A\hat{A} = \hat{A}A = O_3$, эндээс $(A + \hat{A})^2 = A^2 + (\hat{A})^2$.

$\Leftarrow$: $\exists n \in \mathbb{N}$

$$(A + \hat{A})^{2n} = A^{2n} + \hat{A}^{2n} \quad (3)$$

$d = \det A \neq 0$ байг. (3) $A^{2n} : (A^2 + dE_3)^{2n} = A^{4n} + d^{2n}E_3$ болно. Иймд $f(x) = (x^2 + d)^{2n} - x^{4n} - d^{2n}$ гэвэл $f(A) = O_3$ болно. $f'(x) = 4nx\left((x^2 + d)^{2n-1} - x^{4n-2}\right)$ -ийн энгийн язгуур нь 0 ба 0 нь $f'(x) = 0$ -ийн цор ганц бодит язгуур ба $f(0) = 0$ тул 0 нь $f(x) = 0$ -ийн цор ганц бодит язгуур буюу $f(x) = dx^2 \cdot g(x)$, $g(x)$ бодит язгуургүй олон гишүүнт гэж гарна, учир нь $f(x)$ -ийн 2 бодит язгуурын хооронд $f'(x)$ -ийн нэг бодит язгуур оршдог. $f(A) = O_3$ -оос $dA^2 \cdot g(A) = O_3$ болно. Эндээс $g(A) = \frac{1}{d}O_3 \cdot A^{-2} = O_3$. а)-аар $g(A) \neq O_3$ байх ёстой. Энэ зөрчил нь $\det A = 0$ болохыг үзүүлэв.

$$4. \text{ а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ гэвэл}$$

$$\text{rang}(AB) - \text{rang}(BA) = 1.$$

$$n = 2p \text{ үед } A = A_{2p} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ & \dots \\ 0 & A \end{pmatrix}, B = B_{2p} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ & \dots \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$n = 2p+1 \text{ үед } A = A_{2p+1} = \begin{pmatrix} A_{2p} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = B_{2p+1} = \begin{pmatrix} B_{2p} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

гэвэл $\text{rang } AB - \text{rang } BA = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ болно.

б) $r(XY) \geq r(YX)$ байг.

$$r(XY) - r(YX) \leq r(XY) \leq r(X), r(Y) \quad (1)$$

Сильвестрийн тэнцэл бишээр $r(YX) \geq r(X) + r(Y) - n$ тул $r(XY) - r(YX) \leq r(Y) + n - r(X) - r(Y)$

$$r(XY) - r(YX) \leq n - r(X) \quad (2)$$

(1) ба (2)-оос $r(XY) - r(YX) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

5. а) $A = (A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$, энд $A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ буюу $A^{(i)}$ -үүд нь A -ийн баганууд байг. $r(A) = r$ бол энэ багануудаас r ширхэг шугаман хамааралгүйг нь сонговол, тэр нь r эрэмбийн тэг биш тодорхойлогчийг агуулна. Тэдгээр нь $A^{(i_1)}, \dots, A^{(i_r)}$ байг. $B = (A^{(i_1)}, \dots, A^{(i_r)})$, $B \in M_{n,r}(\mathbb{C})$, $r(B) = r$. $\forall 1 \leq k \leq n$ -ийн хувьд $A^{(k)} \in \langle A^{(i_1)}, \dots, A^{(i_r)} \rangle$ тул $\exists X_k \in M_{r,1}(\mathbb{C})$, $BX_k = A^{(k)}$ болно. $C = (X_1, \dots, X_n) \in M_{r,n}(\mathbb{C})$ гэвэл $BC = B(X_1, \dots, X_n) = (BX_1, \dots, BX_n) = (A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = A$, $r(A) = r = r(BC) \leq r(C) \leq r$ -ээс $r(C) = r$ гэж гарна.

б) $M = CB \in M_r(\mathbb{C})$ гэе. Гамильтон-Кэлийн теоремоор M нь r зэргийн тэгшитгэлийн язгуур болно. $\alpha_r M^r + \dots + \alpha_1 M + \alpha_0 E_r = O_r$. Эндээс $\alpha_r B M^r C + \dots + \alpha_1 B M C + \alpha_0 B C = O_n$. Гэтэл $B M^k C = (B C)^{k+1} = A^{k+1}$ тул $\alpha_r A^{r+1} + \dots + \alpha_1 A^2 + \alpha_0 A = O_n$ боллоо.

6. а) $E_{ij} = (x_{ks}), x_{ks} = \begin{cases} 1, & k = i, j = s \\ 0, & \text{бусад тохиолдолд} \end{cases}$, $1 \leq k, s \leq n$
 $E_{ij} \in M_n(K)$. $A = (a_{ks}) \in \mathbb{Z}(M_n(K))$ байг. $A E_{1i} = E_{1i} A$ -ээс $a_{i1} = a_{i2} = \dots = a_{ii-1} = a_{ii+1} = \dots = a_{in} = 0$, $a_{11} = a_{ii}$ болох тул $A = a E_n$, $a \in K$ гэж гарна. $\forall x \in M_n(K)$ -ийн хувьд

$AX = XA = aX$ болно. $f : K \rightarrow \mathbb{Z}(M_n(K))$, $f(a) = aE_n$ нь изоморфизм болно.

б) $\exists f : M_k(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ изоморфизм гэе. $f(Z(M_n(\mathbb{R}))) = Z(M_1(\mathbb{C}))$ байх нь илэрхий. Иймд а)-аар $R \cong \mathbb{C}$ гэж гарна. Гэтэл $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ изоморфизм бол $a = g^{-1}(i) \in \mathbb{R}$ -ийн хувьд $a^2 = g^{-1}(i^2) = g^{-1}(-1) = -1$ болж зөрчилд хүргэнэ.

7. $P(x) = \det(A - xE_2) = x^2 - ax + b$, энд $a = \text{tr} A$, $b = \det A$ байг. $x_1 = \det(A + E_2) = P(-1) = 1$ -ээс $a + b = 0$. $x_2 = 1 = \det(A^2 + E_2) = \det(A + iE_2) \det(A - iE_2) = P(-i)P(i) = (-1 + ai + b)(-1 - ai + b) = (b - 1)^2 + a^2$. Иймд $\begin{cases} a^2 + b^2 - 2b = 0 \\ a = -b \end{cases}$

ээс $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b = 1 \\ a = -1 \end{cases}$ болно. $a = b = 0$ бол $A^2 = O$, $n \geq 2$ үед $A^n = O$, $x_n = 1$. $a = -1$, $b = 1$ бол $P(x) = x^2 + x + 1$, $P(A) = A^2 + A + E = 0 \Rightarrow A^3 = E$, $A^{3k} = E$, $x_{3k} = \det(2E) = 4$, $A^{3k+1} = A$ буюу $x_{3k+1} = x_1 = 1$. $A^{3k+2} = A^2$ буюу $x_{3k+2} = x_2 = 1$.

8. а) $(\mathbb{Z}_{12}, +, *)$ цагираг бол $\forall 0 \leq x, y \leq 11$ -ийн хувьд $\bar{x} * \bar{y} = (\underbrace{\bar{1} + \dots + \bar{1}}_{x \text{ удаа}}) * (\underbrace{\bar{1} + \dots + \bar{1}}_{y \text{ удаа}}) = xy(\bar{1} * \bar{1})$ байх тул $*$ үйлдэл $\bar{1} * \bar{1}$ -ээрээ

бүрэн тодорхойлогдоно. Хэрэв $\bar{u}$ нь $(\mathbb{Z}_{12}, +, *)$ цагиргийн нэгж ба $\bar{1} * \bar{1} = a\bar{1}$, $a \in \overline{0, 11}$ бол $\bar{u} * \bar{1} = \bar{1}$ гэдгээс $ua\bar{1} = \bar{1}$ буюу $ua \equiv 1 \pmod{12}$ гэж гарна. Эндээс $a \in \{1, 5, 7, 11\}$ буюу $\bar{1} * \bar{1}$ -г тодорхойлох 4 боломж байна, эд бүгд боломжтой тул $i(\mathbb{Z}_{12}) = 4$.

б) $(A, +, *)$, $(B, +, \Delta)$ цагиргууд бол $(A \times B, +, \circ)$ нь $(a_1, b_1) \circ (a_2, b_2) = (a_1 * a_2, b_1 \Delta b_2)$ гэсэн цагираг байна. Хэрэв $*_1$ ба $*_2$ нь A дээрх ялгаатай алгебрийн үйлдлүүд бол $\circ_1$ ба $\circ_2$ нь мөн ялгаатай үйлдлүүд байх нь илэрхий тул $i(A \times B) \geq i(A) \cdot i(B)$ боллоо.

в) $K = \{0, a, b, c\}$, $(K, +)$ Клейны бүлэг байг, ө.х. $a + b = b + a = c$, $a + c = c + a = b$, $b + c = c + b = a$, $a + a = b + b = c + c = 0$ байг. a -аар цагиргийн мультипликатив нэгжийг авбал цагиргийн дор хаяж дараах 2 ялгаатай бүтцийг олно. Үүний нэг нь $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = cb = 0$ ($\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -д харгалзах $a = (\bar{1}, \bar{1})$, $b = (\bar{1}, \bar{0})$, $c = (\bar{0}, \bar{1})$, $0 = (\bar{0}, \bar{0})$) нөгөө нь $b^2 = c$, $c^2 = b$, $cb = bc = a$ (4 элементтэй талбарт харгалзах).

Мөн ийм замаар b эсвэл c -г мультипликатив нэгжээр авбал ца-

гиргийн өөр 4 ялгаатай бүтцийг олно, иймд $i(K) \geq 6$.

б)-г ашиглан $G_p = (k, +)^p$ -ийн хувьд $i(G_p) \geq 6^p$ гэж олох тул

$$\frac{n(G_p)}{i(G_p)} \leq \frac{4^p}{6^p} \text{ ба } \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{n(G_p)}{i(G_p)} = 0$$

Одоо в)-ийн сүүлчийн хэсгийг баталъя. а)-д хийснээс шууд $i(\mathbb{Z}_n) = \varphi(n)$ гэж гарна. $n_k = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p_k$, $H_k = \mathbb{Z}_{n_k}$ гэвэл $i(H_k) =$

$$(2-1)(3-1)\dots(p_k-1) \text{ тул } \frac{n(H_k)}{i(H_k)} = \prod_{i=1}^k \frac{p_i}{p_i-1} = a_k \text{ гэе. } \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty$$

гэдгийг батлах нь төвөгтэй биш юм.

11. Вильсоны теоремоор $p \mid (p-1)! + 1$ тул K талбарт $(p-1)! + 1 = 0$ байна, ө.х. $(4m)! = -1$. $1 = -4m$, $2 = -(4m-1)$, ..., $2m = -(2m+1)$ тул

$$-1 = (-1)^{2m} (4m)^2 (4m-1)^2 \dots (2m+1)^2 = \left(4m(4m-1)\dots(2m+1) \right)^2 \quad (1)$$

$a, b \in K^*$ байг.

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad (2)$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \quad (3)$$

$b = 2^{-1}$ гэе. Хэрэв $a \neq -2^{-1}$ бол (2)-оос $a = (a+2^{-1})^2 - a^2 - b^2 \stackrel{(1)}{=} (a+2^{-1})^2 + a_1^2 + b_1^2$, энд $\exists a_1, b_1 \in K^*$. Хэрэв $a = -2^{-1}$ бол $a \neq b$ байна. (3)-аас $a = a^2 + b^2 - (a-b)^2 \stackrel{(1)}{=} a^2 + b^2 + c^2 \exists c \in K^*$.

15 (Ц.Гэрэлтийн бодолт). а) $p = ab$, $a > 1$, $b > 0$ бол $|x^a| = b$ болох тул баталгаа илэрхий.

б) ЛЕММ. $x, y \in G$ ба $\exists i, j$, $2 \leq i, j \leq p-1$ -ийн хувьд $x^i y^j = y^j x^i$ бол $xy = yx$ байна.

Баталгаа. $(j, p) = 1$ -ээс $\exists a$, $1 \leq a \leq p-1$, $aj \equiv 1 \pmod{p}$. Иймд $x^i y^{aj} = y^{aj} x^i$. $aj = 1 + mp$, $y^{aj} = y^{1+mp} = y$. Үүгээр $x^i y = y x^i$. $(i, p) = 1$ тул $\exists b$, $1 \leq b \leq p-1$, $bi \equiv 1 \pmod{p}$. $x^i y = y x^i$ -ээс $x^{bi} y = y x^{bi}$, $x^{bi} = x$ тул $xy = yx$.

Одоо бодлогынхоо бодолт руу орёе. Эсрэгээс нь $\exists x, y \in G$, $xy \neq yx$ гэж үзье.

$$A = \{x^i y^j \mid 0 \leq i, j \leq p-1\} \setminus \{e\} \subseteq G$$

гэвэл $|A| = p^2 - 1$ гэдгийг баталж болно. $B \subseteq A$, $|B| = p$ ба B -ийн дурын 2 элемент нь байр сольдог байг. Хэрэв $\exists i, i \geq 1, x^i \in B$ ба B нь $x^a y^b$ хэлбэрийн элемент агуулдаг бол $x^i (x^a y^b) = (x^a y^b) x^i$ -ээс $x^i y^b = y^b x^i$ болох тул леммээр $xy = yx$ гэж гарна. Мөн адилаар $\exists y^j \in B$ бол $xy = yx$ болно.

$$\begin{array}{cccc} xy & xy^2 & \dots & xy^{p-1} \\ x^2y & x^2y^2 & \dots & x^2y^{p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{p-1}y & x^{p-1}y^2 & \dots & x^{p-1}y^{p-1} \end{array}$$

гэсэн $p-1$ ширхэг мөрийн аль нэгд нь B -ийн хоёр элемент оршино, тэр нь $x^a y^b, x^a y^c$ байг. $b > c$ гэвэл $(x^a y^b)(x^a y^c) = (x^a y^c)(x^a y^b)$ -ээс $y^{b-c} x^a = x^a y^{b-c}$ болох тул леммээр $xy = yx$ болно.

16 (Н.Энхбаясгалангийн бодолт).

$S_n \ni \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} = \sigma_1 \dots \sigma_m$ гэж σ_i үл хамаарах циклүүдийн үржвэрт задарна. $\ell(\sigma_i) = a_i$ бол $|\sigma_i| = a_i$ буюу $\sigma_i^{a_i} = e$ байна. Иймд $|\sigma| = [a_1, \dots, a_m]$ байна. $\sum_{i=1}^m a_i \leq n$ бол $|\sigma| \leq \prod a_i \leq e^{\frac{n}{e}}$ гэж баталбал болно. $y = x^{\frac{1}{e}}$ функцийн максимум нь $e^{\frac{1}{e}}$ тул

$$m \cdot \sqrt[m]{\prod_{i=1}^m a_i} \leq \sum_{i=1}^m a_i \leq n, \prod_{i=1}^m a_i \leq \left(\frac{n}{m}\right)^m = \left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{n}}\right)^n \leq \left(e^{\frac{1}{e}}\right)^n.$$

б) багийн тэмцээн

- 1 (Ц.Дашдорж). H, K нь G -ийн төгслөг дэд бүлгүүд бол $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$ гэж батал, энд $HK = \{hk \mid h \in H; k \in K\}$.
- 2 (Ц.Дашдорж). $|G| = 112 = 16 \cdot 7$ бол G энгийн бүлэг биш гэж батал.
- 3 (Ц.Дашдорж). G нь транспозиц агуулсан S_p -ийн транзитив дэд бүлэг бол $G = S_p$ гэж батал.
- 4 (Ц.Дашдорж). Төгслөг талбарын элемент бүр 2 квадратын нийлбэрт тавигдана гэж батал.

5 (Ц.Дашдорж). $\mathbb{Z}[x]/\langle x^3 + 1 \rangle$ ба $\mathbb{Z}[x]/\langle x^3 + 2x^2 + x + 1 \rangle$ -үүд изоморф биш цагиргууд гэж батал.

6 (Ц.Дашдорж). $|K| = 27$ бол K талбарт $a^3 = a - 1$ байх a элемент бий гэж батал.

7 (Ц.Дашдорж). $A, B \in \mathbb{C}_n$ ба $A + \lambda B$ нь ялгаатай $n+1$ тоо $\lambda \in \mathbb{C}$ -ийн хувьд нильпотент матриц бол A, B нь нильпотент матриц гэж батал.

8 (Ц.Дашдорж). $|G| = 16 \cdot 9$ бол G энгийн бүлэг биш гэж батал.

Зарим бодлогын бодолтууд

1. $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$. $|H| = r$, $|K| = s$, $|H \cap K| = t$ гээ. $|HK| \leq rs$ байх нь илэрхий. $h_1k_1 = h_2k_2$ бол $x = (h_2)^{-1}h_1 = k_2k_1^{-1} \in H \cap K$, $h_2 = h_1x^{-1}$, $k_2 = xk_1$. Нөгөө талаас $y \in H \cap K$ бол $h_3 = h_1y^{-1}$, $k_3 = yk_1$ гэвэл $h_3k_3 = h_1k_1$ болно. Иймд $hk \in HK$ элемент нь $|H \cap K| = t$ янзаар $h_i k_i$ хэлбэртэй бичигдэнэ. Иймд $|HK| = \frac{rs}{t}$.

2. Хэрэв G нь энгийн бүлэг гэвэл G -д Силовын 2 дэд бүлэг $s_2 = 1 + 2k \mid 7$ буюу 7 ширхэг байна, эдгээр нь $H_1, \dots, H_7$ байг. $|H_i| = 16$, $i = \overline{1, 7}$ ба бодлого 1-ээр

$$|H_1 H_2| = \frac{|H_1||H_2|}{|H_1 \cap H_2|} = \frac{16 \cdot 16}{|H_1 \cap H_2|} \leq 16 \cdot 7 \quad (1)$$

гэдгээс $m = |H_1 \cap H_2| \geq 4$ буюу $m = 4, 8, 16$ гэж гарна.

а) $m = 16$ бол $H_1 H_2 \supseteq H_1, H_2$ гэдгээс $|H_1 H_2| \geq 17$ тул (1)-ээс зөрчил гарна.

б) $m = 8$ бол $H_1 \cap H_2$ нь H_1 ба H_2 -ын 2 индекстэй дэд бүлэг тул $H_1 \cap H_2 = H' \triangleleft H_1, H_2$ буюу $N(H') \supseteq H_1, H_2$ гэдгээс $17 \leq |N(H')| \mid |G| = 16 \cdot 7$ гэдгээс $|N(H')| = 16 \cdot 7$ буюу $N(H') = G$ болох тул $H_1, H_2 \triangleleft G$ болж зөрчилд хүрнэ.

в) $m = 4$ байх тохиолдлыг уншигчдад үлдээе.

3. $M = \{1, 2, \dots, p\}$ олонлог дээр $i \sim j$ харьцааг дараахь дүрмээр оруулъя. $i \sim j \Leftrightarrow i = j$ эсвэл $(i, j) \in G$. $(i, j)(j, k)(i, j) = (i, k)$ байдаг тул $\sim$ нь M дээр эквивалентийн харьцаа болно (а) $i \sim j$ бол $j \sim i$, б) $i \sim i$, в) $i \sim j, j \sim k$ бол $i \sim k$).

$E(i)$ нь i -ээр тодорхойлогдох эквивалентийн анги, ө.х. $E(i) = \{j \in M \mid i \sim j\}$ байг. $|E(i)| = |E(j)|$ буюу бүх эквивалентийн анги адил тооны элементээс тогтохыг харуулъя. $\forall i, j \in M$ -г авъя. G транзитив бүлэг тул $\exists \sigma \in G, \sigma(i) = j$. $a \in E(i)$, ө.х. $(i, a) \in G$ байг. $\sigma(i, a)\sigma^{-1} = (\sigma(a), \sigma(i)) = (j, \sigma(a)) \in G$ буюу $\sigma(E(i)) \subseteq E(j)$, $|E(i)| \leq |E(j)|$ боллоо. Үүний адилаар $|E(j)| \leq |E(i)|$ болно. p анхны тоо тул эквивалентийн ганц анги байна, ө.х. $\forall i, j \in M, i \sim j$ буюу $(i, j) \in G$. Эндээс $G = S_p$.

4. $|F| = q$ байг.

а) $\chi(F) = 2$ бол $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ байх учир $F^2 = \{a^2 \mid a \in F\} = F$ болно. Эндээс $b \in F$ -г авахад $b = a^2 = a^2 + 0^2$ гэж бичигдэв.

б) $0 < \chi(F) = p \neq 2$ бол p сондгой анхны тоо байна. $|F| = q = p^n$ болно. $F^2 = \{a^2 \mid a \in F\}$ гээ. $0 \neq a \in F$ бол $a \neq -a$ ба $a^2 = (-a)^2$ байх тул $|F^2| = \frac{q-1}{2} + 1 = \frac{q+1}{2}$. $0 \neq b \in F$ -г авч $b - F^2 = \{b - a^2 \mid a \in F\}$ -г зохиовол $|b - F^2| = \frac{q+1}{2}$ болно. $|b - F^2| + |F^2| = 2 \cdot \frac{q+1}{2} = q + 1 > |F|$ тул $(b - F^2) \cap F^2 \neq \emptyset$ ө.х. $\exists x = b - c^2 = d^2, b = c^2 + d^2$ болно.

5. $A = \mathbb{Z}[x] / \langle x^2 + 1 \rangle, B = \mathbb{Z}[x] / \langle x^3 + 2x^2 + x + 1 \rangle, A \cong^{\varphi}$ гэж үзье. $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} \overline{B} = B / \langle 3 \rangle \xrightarrow{\psi}$ жинхэнэ гомоморфизм гэж үзье. $a \in A, \psi\varphi(a) = 0 \Leftrightarrow \psi(\varphi(a)) = 0 \Leftrightarrow \varphi(a) \in \ker \psi = \langle 3 \rangle = 3B \Leftrightarrow a \in \varphi^{-1}(3B) = 3A = \langle 3 \rangle \triangleleft A$ тул $\ker \varphi\psi = \langle 3 \rangle$ боллоо. Гомоморфизмын тухай үндсэн теоремоор $A / \langle 3 \rangle \cong \overline{B}$ болно. Гэтэл $\overline{A} = A / \langle 3 \rangle \cong \overline{B}$ бол $\exists \bar{a} \in \overline{A}, \bar{a}^2 = 0$ болох ба $\overline{B}$ -д ийм элемент байхгүй: $(ax^2 + bx + c)^3 = (x^3 + 2x^2 + x + 1)d(x)$ гэвэл энэ тэнцлийн зүүн тал 2 ялгаатай язгууртай ба баруун тал 3 ялгаатай язгууртай гэсэн зөрчил агуулна.

6. $\chi(K) = 3, G = K^*$ нь 26 эрэмбийн абелийн бүлэг. Иймд $\forall x \in K^*, x^{26} = 1, x^{26} - 1 = 0$ ба $x^3 - x + 1 \mid x^{26} - 1$ тул $\exists a \in K^*, a^2 - a + 1 = 0, a^3 = a - 1 = a + 2$.

7. $(A + \lambda B)^n = A^n + \lambda C_1 + \dots + \lambda^{n-1} C_{n-1} + \lambda^n B^n, C_i$ нь λ -аас үл хамаарна. $a, c_1, \dots, c_{n-1}, b$ нь $A^n, C_1, \dots, C_{n-1}, B$ матрицуудын (i, j) байрны элементүүд гэвэл $a + \lambda c_1 + \dots + \lambda^{n-1} c_{n-1} + \lambda^n b = 0$ тэгшитгэл нь $n + 1$ ялгаатай язгууртай гэдгээс $f(x) = bx^n +$

$c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + a$ нь тэг олон гишүүнт буюу $b = c_{n-1} = \dots = c_1 = a = 0$. Иймд $A^n = B^n = 0$.

Багуудын байр

	1(5)	2(7)	3(8)	4(5)	5(7)	6(7)	7(7)	8()	Нийт оноо	Байр
ОМ1	5	-	-	5	7	-	-	-	17	I
ОМ2	5	-	-	-	-	-	7	-	12	II
ОМ3	5	-	-	-	-	-	-	-	5	III
ОМ4	-	-	-	-	-	-	-	-		

П. ЭНХБОЛДЫН НЭРЭМЖИТ УЛСЫН МАТЕМАТИКИЙН VIII УРАЛДААНЫ ДҮНГИЙН ТУХАЙ ИЛТГЭЛ

*П.Энхболдын нэрэмжит математикийн гүнзгийрчлсэн
сургалттай 32-р сургуулийн захирал Ган-Уяа
2005.10.30.*

ММО-ыг зохион байгуулах Хорооны дарга, гишүүд ээ!

Энэ уралдааныг амжилттай явуулахад дэмжлэг туслалцаа үзүүлж, өнөөдөр энд хүрэлцэн ирсэн хүндэт зочид оо!

Эрхэм хүндэт математикчид, математикт хүч оюунаа сорьж уралдуулж буй сурагч багачууд аа!

Та бүхэнд Монголын нэгэн сод хүн, нэрт математикч агсан Пагважавын Энхболдын нэрэмжит математикийн улсын VIII уралдааны дүнгийн хуралд хүрэлцэн ирсэнд талархаж, энэ өдрийн мэндийг дэвшүүлье.

П.Энхболдын нэрэмжит математикийн улсын VIII уралдааныг түүний нэрэмжит МГС-тай 32-р сургууль, ММОХороотой хамтран 2005 оны 10-р сарын 28, 29-ний өдрүүдэд амжилттай зохион байгуулж, өнөөдөр дүнгийн хурлаа хийж байна. Математикч багш, сурагчид, түүнчлэн математикийг дээдлэн хүндэлдэг математикийн авъяас сонирхолтой хүн бүрийн хүсэн хүлээдэг, өндөр ач холбогдол бүхий, нэр хүндтэй энэхүү уралдаан нь П.Энхболд агсны сурч төгссөн унаган сургуулийнх нь 40 жилийн ойн өмнө болж байгаа, мөн Монголын боловсролын тогтолцооны шилжилтийн жилд явагдаж байгаа онцлогтой юм.

Монгол улсын нийслэл УБ хотын 50 гаруй сургууль, Дундговь, Хэнтий, Сүхбаатар, Өвөрхангай, Дархан, Эрдэнэт, Дорноговь зэрэг 9 аймаг хотын сургуулиудаас нийт 1256 өсвөрийн математикчид багш нарынхаа хамт, 51 математикийн мэргэжлийн багш, оюутнууд зорин ирж оюун ухаан, уран сэтгэмжээрээ уралдлаа. Энэ уралдаан 1-11-р анги, бага ангийн багш, нээлттэй гэсэн 13 ангиллаар явагдаж I ангиас 1-р байрыг Олонлог сургуулийн Ууганбаяр, 2-р байрыг Соёмбо сургуулийн Төгөлдөр, 3-р байрыг Соёмбо сургуулийн Т.Ариунзаяа; II ангиас 1-р байрыг 1-р сургуу-

лийн С.Билгүүн, Х.Энхсаруул, 2-р байрыг Гэгээрэл сургуулийн Сайнсанаа, 3-р байрыг Төгсжаргалант сургуулийн М.Ариунболор; III ангиас 1-р байрыг 12-р сургуулийн Ч.Золбоо, 2-р байрыг Олонлог сургуулийн Н.Батболд, 3-р байрыг Соёмбо сургуулийн Түвшинбаяр; IV ангиас 1-р байрыг Гэгээрэл сургуулийн М.Ананд, 2-р байрыг Сант сургуулийн А.Оюундалай, 3-р байрыг Сант сургуулийн Б.Ганзориг; V ангиас 1-р байрыг 39-р сургуулийн Оргил-Эрдэнэ, 2-р байрыг Эхлэл сургуулийн Баатархүү, 3-р байрыг 32-р сургуулийн С.Оюун-Эрдэнэ, Гэгээрэл сургуулийн Эрдэнэбаяр; VI ангиас 1-р байрыг Олонлог сургуулийн Э.Мишээл, 2-р байрыг 1-р сургуулийн Мөнхбаясгалан, 3-р байрыг 1-р сургуулийн Батхуяг, Хэнтийн Бор-Өндөрийн Золбоо; VII ангиас 1-р байрыг 11-р сургуулийн Д.Отгонбаатар, 2-р байрыг 1-р сургуулийн Ундралбат, 3-р байрыг 28-р сургуулийн Б.Баяржаргал; VIII ангиас 1-р байрыг Олонлог сургуулийн Өлзийбаяр, 2-р байрыг Олонлог сургуулийн Энхзаяа, 3-р байрыг 11-р сургуулийн Түвшинтөр; IX ангиас 1-р байрыг 1-р сургуулийн Оюундарь, 2-р байрыг 1-р сургуулийн Мягмаржав, 3-р байрыг 11-р сургуулийн Болдбаатар; X ангиас 1-р байрыг 1-р сургуулийн Ч.Алтан-Өлзий, 2-р байрыг Мон-Турк сургуулийн Б.Хүдэр, 3-р байрыг 1-р сургуулийн Доржсэмбэ; XI ангиас 1-р байрыг Шинэ үе сургуулийн Бат-Эрдэнэ, 2-р байрыг Сант сургуулийн Мөнхбаясгалан, 3-р байрыг 11-р сургуулийн Анх-Эрдэнэ; Бага ангийн багш нарын ангиллаас 1-р байрыг Эхлэл сургуулийн багш Отгонжаргал, 2-р байрыг Олонлог сургуулийн багш Намжилмаа, 3-р байрыг Олонлог сургуулийн багш Чимэг; Чөлөөт ангиллаас 1-р байрыг МУИС, 2-р курсын оюутан Ц.Гэрэлт, 2-р байрыг МУИС-ийн багш Б.Батбаясгалан, 3-р байрыг Математикийн хүрээлэнгийн э.ш.а. М.Батбилэг нар эзэлж, 8-р уралдааны алт, мөнгө, хүрэл медалийн эздээр тодорлоо. Ингээд оролцсон ангилалдаа медалийн эзнээр тодорч, оюун ухаан, уран сэтгэлгээний гайхамшгийг үзүүлэн тодорсон тоочин багачууд, шилдэг математикчиддаа халуун баяр хүргэе.

Чөлөөт ангилалд 3 бодлогоос 2-ыг бодсон байвал үнэмлэхүй аваргаар тодорхойлдог журмаар VIII уралдааны үнэмлэхүй аваргаар МУИС-ийн онолын математикийн 2-р курсын оюутан

ОУМО-ын 3 удаагийн шагналт Ц.Гэрэлт шалгарлаа. Энэ уралдааны уран бодолтын шагналыг МУИС-ийн Алгебрийн тэнхимийн багш Б.Батбаясгалан, Дорноговь аймгийн багш О.Наранчимэг нар хүртсэнийг хэлэхэд таатай байна.

Энэ уралдааныг амжилттай зохион байгуулахад чин сэтгэлийн дэмжлэг үзүүлж, ивээн тэтгэсэн Б.Цогоо гүйцэтгэх захиралтай МИАТ ХК, Ө.Цэрэннадмид захиралтай "Зориг сан", Б.Мягмаржав захиралтай MCS-ийн Coca-Cola компани, Б.Батбаасан захиралтай Cosmo компани, н.Батсайхан захиралтай "Мон-Амикал" буюу MCCWS компани, Б.Баяржаргал захиралтай "Олонлог" сургууль, Энхжаргал захиралтай "Эхлэл" сургууль, Батсайхан захиралтай "Гэгээрэл" сургууль, 32-р сургуулийн 10-р ангийн сурагч П.Энхболдын нэрэмжит улсын IV уралдааны алтан медалийн эзэн Г.Мөнхжаргалын гэр бүл, хамт олонд гүн талархал илэрхийлье. Мөн түүнчлэн 1300 орчим математикчид, тоочдыг ухааны ур, сэтгэлгээний царыг сорих 13 ангиллын бүх бодлогыг бэлтгэж тавих, оролцогч бүрийн бодолтыг шүүн хэлэлцэж эрэмбэлэн жагсаах нөр их ажлыг гардан зохион байгуулсан ММОХорооны дарга доктор, профессор Ц.Дашдорж танд болон гишүүд, шүүгчийн бүрэлдэхүүнд ажилласан бусад эрдэмтэд, математикчдад чин сэтгэлийн баяр, талархал дэвшүүлье. Энэхүү өндөр хариуцлагатай, улсын хэмжээний өргөн цар хүрээтэй явагдаг уралдааныг товлон зарлаж, сурталчлан мэдээлэхээс эхлээд энэ цаг мөчийг хүртэлх бүхий л ажлыг сайн зохион байгуулсан сургалтын менежер Д.Оюунханд ахлагчтай 32-р сургуулийн ажлын хэсгийнхэнд, түүнчлэн нийт хамт олондоо талархал илэрхийлье.

Нийт тоочин багачууд, математикчууддаа халуун баяр хүргэж, Монголын математикийн хөх тэнгэр ивээн тэтгэхийн өлзийтэй сайхан ерөөлийг өргөн дэвшүүлье.

1 (В.Адъяасүрэн). а) Аливаа эерэг $x_1, x_2, \dots, x_7$ тоонуудын хувьд

$$\sum_{k=1}^7 \frac{x_k}{x_{k+2} + x_{k+3}} > 3 \text{ гэж батал.}$$

б) 3-ыг түүнээс их тоогоор сольж болох уу?

2 (Ц.Дашдорж). $a_1 < a_2 < \dots$ бүхэл тоонуудын төгсгөлгүй дараалал байг. Тэгвэл $a_i + a_j$, $i, j = 1, 2, \dots$ дарааллаас аль ч элемент нь нөгөө элементээ хуваадаггүй төгсгөлгүй дэд дараалал сонгож болохыг батал.

3 (Ц.Дашдорж). Дугуй цилиндрийн хажуу гадаргууг суурьтай нь параллель $n - 1$ хавтгай ба үүсгэгчтэй нь параллель m шулуунаар mn хайрцагт (хэсэгт) хуваав. ($n \geq 1$, $m \geq 3$). Ерөнхий талтай 2 хэсгийг хөрш гээ.

(А) Хайрцаг бүрт бичигдсэн бодит тоо нь хөрш хайрцагуудад бичигдсэн тоонуудын нийлбэртэй тэнцүү байхаар ядаж нэг нь тэг биш тоонууд олдох

зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\exists k, l \in \mathbb{Z}, n+1 \nmid k$ ба $\cos \frac{2l\pi}{m} + \frac{\cos k\pi}{n+1} = \frac{1}{2}$ гэж батал.

1 (Ц.Гэрэлт). а) $S = \sum_{k=1}^7 \frac{x_k}{x_{k+2} + x_{k+3}}$ Коши-Буняковскийн тэнцэл бишээр $\left(\frac{x_1}{x_3 + x_4} + \frac{x_2}{x_4 + x_5} + \dots + \frac{x_7}{x_2 + x_3} \right) (x_1(x_3 + x_4) + x_2(x_4 + x_5) + \dots + x_7(x_2 + x_3)) \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_7)^2 \Rightarrow S \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_7)^2}{x_1(x_3 + x_4) + \dots + x_7(x_2 + x_3)} = S_1$ байна.

$S_1 \geq 3$ гэж баталъя. $\Leftrightarrow (x_1 + x_2 + \dots + x_7)^2 \geq 3(x_1(x_3 + x_4) + \dots + x_7(x_2 + x_3))$ $x_1 + x_2 + \dots + x_7 = A$ гээд тогтмолоор авъя. $f(x_1; x_2; \dots; x_6; A - x_1 - x_2 - \dots - x_6) = f(x_1; \dots; x_7) = 3(x_1(x_3 +$

$x_4) + \dots x_7(x_2 + x_3))$ гэж функц зохиоё. Манай тэнцэл биш цикл учир $x_3 \leq x_7$ гэж үзэх болно. Тэгвэл $f(x_1; \dots; x_7) \leq f(0; x_1 + x_2; x_3; \dots; x_7)$ байна. Мөн $f(0; x_1 + x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; x_7) \leq f(0; x_1 + x_2; 0; x_3 + x_4; x_5; x_6 + x_7; 0) = f(0; x_1 + x_2; 0; x_3 + x_4 + x_5; 0; x_6 + x_7; 0)$ гэдгийг хялбар харж болно. $f(0; x_1 + x_2; 0; x_3 + x_4 + x_5; 0; x_6 + x_7) = f(0; a; 0; b; 0; c) = 3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 = (x_1 + x_2 + \dots + x_7)^2$ гээд батлагдав. $S \geq S_1 \geq 3$ байна. $S = S_1$ байхын тулд $x_1 = x_2 = \dots = x_7$ байх ёстой. Гэтэл тэр үед $S = S_1 = 3, 5 > 3$ учир $S > 3$ байна.

б) S -д $x_1 = \frac{1}{n^4}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{1}{n}$, $x_4 = 1$, $x_5 = \frac{1}{n^3}$, $x_6 = 1$, $x_7 = \frac{1}{n^2}$ гэж орлуулбал n -ээс хамаарсан A_n дараалал үүснэ гэе. $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 3$ учир сайжруулж болохгүй.

2 (Б.Батбаясгалан). Юуны өмнө a_i дарааллын бүх гишүүд эерэг гэж үзье. Сөрөг гишүүдтэй байх тохиолдол нь өмнөхөөс мөрдөн гарах нь ойлгомжтой. Учир нь бодлогын нөхцөлийг хангах дарааллын гишүүд нь тодорхой нэг дугаараас эхлээд эерэг болно.

Одоор $a_1 + a_2$, $a - 1 + a_3$, $a_1 + a_4, \dots$ оройтой төгсгөлгүй графын ирмэгүүдийг дараах дүрмээр хоёр өнгөөр будъя. Хэрэв $a_1 + a_i \mid a_1 + a_j$ бол $\{a_1 + a_2, a_1 + a_j\}$ ирмэг улаан өнгөтэй эсрэг тохиолдолд хөх өнгөтэй гэе. Төгсгөлгүй Рамсейн теорем ёсоор энэ хоёр өнгийн аль нэгээр будагдсан (бүх ирмэг нь ижил өнгөөр будагдсан) төгсгөлгүй бүтэн дэд граф олдоно. Хэрэв хөх өнгийн төгсгөлгүй граф олдвол бодлого дуусна. Иймд улаан өнгийн төгсгөлгүй дэд граф олддог гэе. Өөрөөр хэлбэл $a_{11} < a_{12} < a_{13} < \dots$ гэсэн дэд дарааллын хувьд $a_1 + a_{11} \mid a_1 + a_{1i}$ буюу дурын i, j тоонуудын хувьд $a_{1i} = (a_1 + a_{11}) \cdot k_i - a_1$, $a_{1j} = (a_1 + a_{11}) \cdot k_j - a_1$ болно. Эндээс $a_{1i} + a_{1j} = (a_1 + a_{11})(k_i + k_j) - 2a_1$ ба $2a_1 < a_1 + a_{11}$ тул $a_1 + a_{11} \nmid a_{1i} + a_{1j}$ болно. Бид хайж байгаа дарааллынхаа эхний гишүүнээр $a_1 + a_{11}$ -ийг аваад $a_{11} < a_{12} < a_{13} < \dots$ дарааллын хувьд дээр хийсэн үйлдлийг яг давтан хийгээд 2 дахь гишүүнийг гэх мэтчилэн аль нь ч алийгаа хуваадаггүй төгсгөлгүй олон гишүүнтэй дэд дараалал олж чадна.

3 (Ц.Дашдорж). Цагиргуудыг $1, 2, \dots, n$ -ээр (дээрээс нь доош

нь), багануудыг $1, 2, \dots, m$ -ээр (цагийн зүүний эсрэг) дугаарлая. i -р цагираг ба j -р багананд a_{ij} тоо бичигдсэн гээд i -р цагирагт

$$P_i(x) = a_{i1} + a_{i2}x + \dots + a_{im}x^{m-1}$$

олон гишүүнтийг харгалзуулъя. $P_0(x) = P_{n+1}(x) = 0$ гэж үзье. $(A) \Leftrightarrow P_i(x) = P_{i-1}(x) + P_{i+1}(x) + (x^{m-1} + x)P_i(x) \pmod{X^m - 1}$, $i = \overline{1, n} \Leftrightarrow P_{i+1}(x) = (1 - x - x^{m-1})P_i(x) - P_{i-1}(x) \pmod{x^m - 1}$, $i = \overline{1, n}$. $Q_0(x) = 0$, $Q_1(x) = 1$, $Q_{i+1}(x) = (1 - x - x^{m-1})Q_i(x) - Q_{i-1}(x) \pmod{x^m - 1}$ -ээр тодорхойлогдох $Q_i(x)$, $i = \overline{0, n+1}$ олон гишүүнтүүдийн дарааллыг авч үзье.

$P_i(x) = Q_i(x) \cdot P_1(x)$, $i = \overline{1, n+1}$ байх нь илэрхий ба мөн бүх a_{ij} тоонууд тэг $\Leftrightarrow P_1 = 0$ байх нь бас илэрхий. Иймд $(A) \Leftrightarrow \exists P_1 \in \mathbb{R}[x]$, $P_1 \not\equiv 0 \pmod{x^m - 1}$, $P_1 Q_{n+1} = 0 \pmod{x^m - 1} \Leftrightarrow (Q_{n+1}, x^m - 1) \neq 1 \Leftrightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{C} (\varepsilon^m = 1, Q_{n+1}(\varepsilon) = 0)$. $(x_k)_{k=\overline{0, n+1}}$, $x_k = Q_k(\varepsilon)$ дарааллыг авч үзье. Энэ дараалал нь $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_{k+1} = x_k(1 - \varepsilon - \varepsilon^{m-1}) - x_{k-1}$ нөхцлийг хангана. $\alpha = 1 - \varepsilon - \varepsilon^{m-1}$ гээ. $x^2 - \alpha x + 1 = 0$ -ийн язгуурыг r_1 , r_2 гэвэл $x_k = \begin{cases} \frac{r_1^k - r_2^k}{r_1 - r_2}, & r_1 \neq r_2 \\ kr_1^{k-1}, & r_1 = r_2 \end{cases}$ болно. $r_1 = r_2$ үед $Q_{n+1}(\varepsilon) = 0$ нөхцөл нь $x_{n+1} = (n+1)r_1^n = 0$ болж хувирах ба $r_1 r_2 = 1$ тул энэ нь боломжгүй. $r_1 \neq r_2$ үед $Q_{n+1}(\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow x_{n+1} = 0 \Leftrightarrow r_1^{n+1} = r_2^{n+1} \Leftrightarrow \exists \omega \neq 1$, $\omega^{n+1} = 1$, $r_2 = \omega r_1 \Leftrightarrow \exists \omega \neq 1$, $\exists r \in \mathbb{C}$, $r(1 + \omega) = \alpha$, $r^2 \omega = 1 \Leftrightarrow \exists \omega + 1$, $\frac{(1+\omega)^2}{\omega} = \alpha^2 \Leftrightarrow \exists \omega \neq 1$, $\bar{\omega} + 2 + \omega = (1 - \varepsilon - \bar{\varepsilon})^2 \Leftrightarrow 2 + 2 \cos \frac{2k\pi}{n+1} = \left(1 - 2 \cos \frac{2\ell\pi}{m}\right)^2 \Leftrightarrow 4 \cos^2 \frac{2k\pi}{n+1} = \left(1 - 2 \cos \frac{2\ell\pi}{m}\right)^2 \Leftrightarrow \cos \frac{2k\pi}{n+1} + \cos \frac{2\ell\pi}{m} = \frac{1}{2}$ (шаардлагтай үед $n+1 - k - \ell$ k -аар сольж).

3 (Б.Батбаясгалан). Аль нэг баганыг сонгоод тэр баганаас эхлэн нэгдүгээр бүслүүрийн тоонуудыг $x_1, x_2, \dots, x_m$, 2-р бүслүүрийн тоонуудыг $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{2m}$ гэх мэтчилэн n -р бүслүүрийн тоонуудыг $x_{(n-1)m+1}, x_{(n-1)m+2}, \dots, x_{nm}$ гэж нэрлэе. Хайрцаг бүрт бичигдсэн тоо нь түүний хөрш нүднүүд дэх тоонуудын нийлбэртэй тэнцүү тул бид $x_1 = x_2 + x_m + x_{m+1}$, $x_2 = x_1 + x_3 + x_{m+2}, \dots$ гэсэн mn ширхэг үл мэдэгдэгчтэй mn ширхэг нэгэн төрлийн шугаман тэгшитгэлийн системтэй болно. Энэ систем тэг биш шийдтэй байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй

нөхцөл нь уг системийн үндсэн матрицийн тодорхойлогч тэгтэй тэнцүү буюу

$$B = \underbrace{\begin{pmatrix} A & E & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ E & A & E & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & E & A & E & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & E & A \end{pmatrix}}_n = 0$$

байна. Энд E нь m эрэмбийн нэгж матриц ба

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_m.$$

ЛЕММА. $B = U_n(A/2)$ байна. Энд

$$U_n = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2x \end{pmatrix}$$

ба $U_n(x)$ нь $U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}$ гэсэн рекуррент томъёотой Чебышёвын II төрлийн олон гишүүнт байна.

Баталгаа. Эхний блокийн II элемент E -г ашиглан II мөр, II баганад байгаа A -г тэг болгоё. Өөрөөр хэлбэл I блок мөрийг A -аар үржүүлээд II блок мөрөөс хасна. Ингэж хасахад тодорхойлогч өөрчлөгдөхгүй болохыг шалгана уу! Ингэхэд II мөрний I блокийн элемент $V_2 = E - A^2$ болно. Үүний дараа III мөрөөс I мөрийг хасаж III мөрний II блокийг тэг болгоё. Үүний дараа II блок мөрийг A -аар үржүүлээд III блок мөрөөс хасна гэх мэтчилэн k мөр $k + 1$ баганад нэгж матрицууд, нэгдүгээр баганад $V_1 = A$,

$V_2 = E - A^2, \dots V_{k+2} = -AV_{k+1} - V_k$ матрицууд байх матрицад шилжүүлж болно. Нөгөө талаас $\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$ ба

$$U_n = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2x \end{vmatrix}$$

тодорхойлогчийг ч гэсэн дээрхтэй яг ижил аргаар бодож болно гэдгээс батлах зүйл батлагдана.

Реккурент томъёоноос нь $x = \cos \theta$ бол $U_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$ болохыг хялбархан шалгаж болно. Иймд $U_n(x/2) = (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)$, $x_i = \cos \frac{2\theta}{n+1}$, $i = 1, \dots, n$ байна. Өөрөөх хэлбэл $U_n(A/2) = (A/2 - x_1 E)(A/2 - x_2 E) \dots (A/2 - x_n E)$. Иймээс $B = 0$ байх $\iff 2x_i$ нь A матрицийн хувийн утга байна.

$$\text{Одоо } \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \text{ тэгшитгэлийг бодъё.}$$

Эхлээд $|x| \leq 2$ байх шийдүүдийг олъё. $x = 2 \cos \theta$ гэвэл

$$\begin{aligned} & 2 \cos \theta U_{m-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 \cos \theta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos \theta & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \\ & + (-1)^{m-1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \cos \theta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos \theta & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ & = 2 \cos \theta \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} - \frac{\sin(m-1)\theta}{\sin \theta} - (-1)^{m-2} \\ & \quad + (-1)^{m-1} + (-1)^{m-1} \cdot (-1)^{m-2} \cdot \frac{\sin(m-1)\theta}{\sin \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \cos \theta \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} - 2 \frac{\sin(m-1)\theta}{\sin \theta} + 2(-1)^{m-1} \\
&= \frac{2 \cos \theta (\sin \theta \cos(m-1)\theta + \cos \theta \sin(m-1)\theta) - 2 \sin(m-1)\theta}{\sin \theta} \\
&\quad + 2(-1)^{m-1} = 2 \cos m\theta + 2(-1)^{m-1} = 0
\end{aligned}$$

$\cos m\theta = (-1)^m$ тэгшитгэлийг бодъё.

m тэгш бол $\cos m\theta = 1$ гэдгээс $\theta = \frac{2\pi t}{m}$ гэдгээс $-1 + 2 \cos \frac{k\pi}{n+1} = -2 \cos \left(\pi - \frac{2\pi t}{m} \right)$ буюу $\cos \frac{k\pi}{n+1} + \cos \frac{2\pi t}{m} = \frac{1}{2}$.

m сондгой бол $\cos m\theta = -1$ гэдгээс $\theta = \frac{(2t+1)\pi}{m}$ гэдгээс $-1 + 2 \cos \frac{k\pi}{n+1} = -2 \cos \left(\pi - \frac{\pi(2t+1)}{m} \right)$ буюу $\cos \frac{k\pi}{n+1} + \cos \frac{2\pi t}{m} = \frac{1}{2}$ болно.

$$\begin{vmatrix}
x & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\
1 & x & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 1 & x & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & x
\end{vmatrix} = 0$$

тэгшитгэл $|x| > 2$ байх шийдгүй гэдэг $x = 2 \cos \frac{2t\pi}{m}$ эсвэл $x = 2 \cos \frac{(2t+1)\pi}{m}$ тоонууд нь давхар язгуур болно гэдгээс хялбархан харагдана.

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН НИЙГЭМЛЭГИЙН ТОВЧ ТАНИЛЦУУЛГА

Монголын Математикийн Нийгэмлэг нь 1994 оны 11 дүгээр сарын 12-нд байгуулагдсан. Нийгэмлэгийн ерөнхийлөгч нь академич А.Мекей, нарийн бичгийн дарга нар нь доктор Б.Батцэнгэл, доктор А.Галтбаяр. 1996 онд тус нийгэмлэг нь Америкийн математикийн нийгэмлэгт гишүүнээр элссэн. АНУ, Герман, Орос, Японы математикийн нийгэмлэгүүдтэй хамтын ажиллагаатай ажилладаг. Эгнээндээ дотоодын 50, гадаадын 4 гишүүнтэй. Нийгэмлэг гишүүдийн татвар, хандивын тусламжтайгаар өөрийгөө санхүүжүүлдэг. Монголын Математикийн Нийгэмлэгийн сэтгүүлийг жил бүр англи хэл дээр гаргадаг.

Одоогоор сэтгүүлийн 3 дугаарыг гаргасан бөгөөд сэтгүүлд гадаад, дотоодын математикчидын онолын бүтээлийг хэвлэдэг.

Нийгэмлэгийн цаашдын зорилт нь санхүүгийн хувьд бэхжих, гадаад харилцаагаа өргөтгөх, авьяаслаг математикчидыг дэмжих зэрэгт оршино.

Жич: Манай нийгэмлэг одоо математикийн зарим чухал сэтгүүлийг захиалж авах, олон улсын математикийн бага хурлыг зохион байгуулах, гадаад гишүүддээ тусгай үнэмлэх олгох, өөрийн сэтгүүлийг тогтмол хэвлэдэг болох зэрэг олон ажил гүйцэтгэх шаардлагатай байгаа бөгөөд эхний хэдэн жил гишүүдээсээ сард 50-100 төгрөгийн татвар авч байсан боловч, дээрх үйл ажиллагаануудыг явуулахад хүрэлцэхгүй байгаа билээ. Иймд тус нийгэмлэг нь санхүүгийн хувьд баталгаатай болох үүднээс гишүүд та бүгдийг нийгэмлэгтээ амьдралдаа ганц удаа тодорхой хэмжээний хандив өргөхийг урийлж байна. Энэ тухай мэдээллийг олимпиадын цувралаар дамжуулан тогтмол мэдээлж байх болно.

Нийгэмлэгийн дотоод данс:

Валютын данс:

Голомт банк (I салбар)
2250704 Р.Энхбат

Голомт банк (I салбар)
2270409 Р.Энхбат

	Нэрс	Албан газар	Утас	Хэдэн онд хаана ямар сургууль, мэргэжлээр төгссөн	Хандивын хэмжээ	Хэзээ өгсөн
27.	С.Чимэд	Гэртээ		ХААДС, 1968 он	4.000₮	2000.12
28.	Л.Эрдэнэсоёл	МУИС, МТСур. Х анги			5.000₮	2001.01
29.	С.Чимэдцэрэн	МУИС, Мат. анализ тэнхимийн багш		МУИС, Мат, 1958 он	5.000₮	2001.06
30.	Б.Батбаасан	"Космо" компаний ерөнхий захирал	99115561	МУИС, Мат, 1987 он	1.000.000₮	2003.11
31.	Б.Баясгалан, Б.Баяржаргал	"Олонлог төв" сургууль	324010	Урал ИС, 1978 он УБИС, 1990 он	1.000.000₮	2003.11

50.000-аас доошгүй төгрөг хандивласан хүмүүс ба байгууллагад ММО-ын болоод ММН-ийн жил бүрийн цувралуудыг үнэгүйгээр авч байх болно.

Нийгэмлэгийн дотоод данс:

Голомт банк (1 салбар)

2250704 Р.Энхбат

Валютын данс:

Голомт банк (1 салбар)

"Төгс Тоо" төвийн тухай

Манай орны математик боловсролын хөгжилд мэдэгдэхүйц амжилт гарч математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай сургууль, ангиуд олноор байгуулагдаж байгааг харгалзан үзэж, тэднийг нэгдсэн удирдлага, үйл ажиллагаагаар хангах зорилгоор БСШУЯ-ны санаачилга дэмжлэгтэйгээр Монгоолын Математик Олимпиадын Хорооны дэргэд математикийн багш нарын мэргэжил дээшлүүлэх "Төгс тоо" төв байгуулагдсаар хэдэн жил болж байна. Тус төв нь математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийн багш нарын мэргэжлийг системтэйгээр дээшлүүлэх ажлынхаа хүрээнд дунд ангийн багш нарын дунд тус бүр 90 цагийн багтаамжтай, 90000 төгрөгийн төлбөртэй I ба II шатны дамжааг 15 хоногоор; бага ангийн багш нарын дунд 60 цагийн багтаамжтай, 60000 төгрөгийн төлбөртэй сургалтыг 12 хоногоор хичээллүүлж, дамжааг амжилттай дүүргэсэн хүмүүст харгалзах сертификат олгон төгсгөдөг юм. Жил бүрийн хичээлийг МУИС, хичээлийн III байрны 306, 308 тоотод 6 сарын 23-24-нд бүртгэж, хичээл 6 сарын 25-аас эхлэн явагддаг. Төлбөрийг "Төгс тоо" төв дансанд хийж, төлбөрийн баримтаа үзүүлээд бүртгүүлж болно, эсвэл бэлнээр авчирна.

"Төгс тоо" төвийн данс:

Лавлах утас:

Голомт банк
2119483, "Төгс тоо" төв
312383 (гэр)
99879779 (Ц.Дашдорж)

ГАРЧИГ

Математикийн олимпиадын сүлд дуу.....	3
Олимпиадын дүнгийн тухай /Ц.Дашдорж/.....	4
Монгол Улсын Гавъяат багш С.Цагааны тухай зарим дурсамж	8
VII ангийн III даваа /Б.Сандагдорж, Ч.Гантөмөр/	35
VIII ангийн III даваа /Б.Сандагдорж, Ч.Гантөмөр/	40
VIII ангийн IV даваа /Б.Сандагдорж, Ч.Гантөмөр/	43
IX ангийн III даваа /Б.Баяржаргал/	48
IX ангийн IV даваа /Б.Баяржаргал/	50
X ангийн III даваа /Б.Батбаясгалан/	54
X ангийн IV даваа /Б.Батбаясгалан/	59
Багын багшийн III даваа /В.Адъяасүрэн/	63
Багын багшийн IV даваа /Ц.Батхүү/	65
Дундын багшийн III даваа /Ц.Дашдорж/	67
Дундын багшийн IV даваа /Ц.Дашдорж/	72
ОМУО-46, I сорил /Б.Баяржаргал (Олонлог)/	78
ОМУО-46, II сорил /Б.Баяржаргал (Олонлог)/	80
ОМУО-46, III сорил /Б.Баяржаргал (МУИС)/	83
ОМУО-46, IV сорил /Ц.Дашдорж/	85
ОМУО-46, V сорил /Ц.Дашдорж/	87
Монголын Оюутны Математикийн XIII Олимпиад	89
П. Энхболдын нэрэмжит улсын Математикийн VIII уралдаан /Ган-Уяа/	101
Чөлөөт ангилал /Ц.Дашдорж/	104
ММН-ийн товч танилцуулга	110
ММН-т хандив өгсөн хүмүүсийн жагсаалт	111
"Төгс тоо" төвийн тухай	114

