

МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАДЫН ЦУВРАЛ
№ 32

ЭХЛЭЛ СУРГУУЛИЙН НЭРЭМЖИТ
МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН
ХЛШ ОЛИМПИАД

Улаанбаатар хот
2008 он

ӨМНӨХ ҮГ

Улсын болон Олон улсын математикийн олимпиадад бэлтгэгчид, математикийн төрөлжсөн сургалттай ангийн сурагч, оюутан, багш нар, математик сонирхогч өргөн олонд зориулсан цувралын ээлжит дугаар уншигч Таны гар дээр очиж байна. Тус гарын авлагыг бэлтгэхэд ММО Зохион Байгуулах Хорооны гишүүд, Эхлэл сургуулийн хамт олон, МУИС-ийн математикийн ангийн оюутнууд идэвхтэй оролцлоо.

Уг номын талаархи аливаа санал хүсэлтээ МУИС-ийн Алгебрийн тэнхимд ирүүлнэ үү.

Монголын Математикийн XLII олимпиад

Редактор: Цэрэндоржийн Дашдорж

Хэвлэлийн эхийг бэлтгэсэн: Пүрэв-Очирын Наранжаргал

2008 оны 04-р сард 1500 хувь хэвлэв.

МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАДЫН СҮЛД ДУУ

Нарнаас илчийг нь авч болох уу
Сарнаас гэрлийг нь салгаж болох уу
Багш та юу гэж заасан бэ
Багын нөхөд маань санаж байна уу
Тоо тоогоо тоолон бодъёо
Томъёогоор задлан бодъёо
Олуулаа уралдан бодъёо
Олимпиадаа оролцож бодъёо

Орчлонгийн удмыг туулж болох уу
Одод эрхсийг тоолж болох уу
Эвклид юу гэж хэлсэн бэ
Эрхэм нөхөд минь санаж байна уу

Дахилт

Эрдмийн оргилд хүрч болох уу
Энгүй далайг хэмжиж болох уу
Суут эрдэмтэн Мянгат өвөөгийн
Сургаалт үгийг санаж байна уу

Дахилт

Гэрлийн хурдыг давж болох уу
Тэнгэрийн хаяанд хүрч болох уу
Дэлхийд алдартай эрдэмтэн Гауссын
Дэлгэж нээсэн онолыг саная даа

Дахилт



2000 оны Сэлэнгийн
олимпиадыг зохион
байгуулагчдын бүтээл

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН 43-Р ОЛИМПИАДЫН ДҮНГИЙН ТУХАЙ ТАЙЛАН

Ц.Дашдорж

Эрхэм хүндэт математикч багш сурагчид аа!

Эхлэл сургуулийн хамт олон!

Монголын Математикийн 43-р Олимпиад математикаар тэргүүлэх сургуулиудын нэг болох “Эхлэл” сургуулийн нэрэмжит болон 2007 оны 05 сарын 3-наас 05 сарын 08-ны хооронд “Эхлэл” сургууль дээр амжилттай явагдаж дүнгээ гаргаж байна. Энэ удаагийн олимпиадад 21 аймаг, Улаанбаатар хот ба “Эхлэл” сургуулийн нийт 23 багийн 67 бага, дундын багш, 251 сурагчид оролцож нийт 318 хүн оюун ухаан, авъяас чадвараа сорин уралдлаа. Энэ удаагийн олимпиадыг зохион байгуулахад “Эхлэл” сургуулийн хамт олны оруулсан хувь нэмэрийг үнэлж бараашгүй юм, тухайлбал тус сургуулийн захирал Монгол Улсын аврага математикч багш А.Энхжаргал түүний эхнэр Энхтуул, тус сургуулийн сургалтын албаны дарга Лхамноржмаа, ахлах багш Адилбиш, Пүрэвжав, багш Орхонбаатар, Наранбат, Ариунболд нар хамт олноо хошуучлан ажилласныг онцлон тэмдэглээ. Мөн сэтгэл санаагаар дэмжиж, санхүүгийн туслалцаа үзүүлсэн 1997 онд 11-р сургуулийг төгссөн А.Энхжаргал багштай 10а ангийн хамт олон 550,000төг 30.000иен, 1981 онд 41-р сургуулийг төгссөн М.Адилбиш багштай 10в ангийн хамт олон 300.000төг, “Эхлэл” сургуулийн эцэг эхчүүд 400,000төг, “Номун” клиникийн эмнэлгийн захирал Д.Энхцэцэг 350,000төг, 1991оны 1-р сургуулийн математикийн ангийг төгсөгчид OLLOO. mn-компьютер 4 ширхэг, бугуйн цагны төрөлжсөн дэлгүүр “Time Shop”-ын эзэн Б.Мөнхжаргал (1992 онд УБИС-ийн тооны ангийн төгсөгч) 9цаг, 40.000 төгрөг “Номуун” сургуулийн захирал Эрдэнээ 100,000төг, “Гэгээрэл” сургуулийн захирал Батсайхан 100,000төг, “Эхлэл” сургууль 3,500,000 төг Нэрмөнх 120,000 төг, Чимэдцэрэн 100,000төг тус тус хандивлалаа. Дээрх нэр бүхий нийт хамт олон, сайн санаат дэмжигчиддээ Монголын нийт Математикчдын нэрийн өмнөөс талархал илэрхийлье.

Олимпиадад 8-р ангийн 89 сурагч оролцсоноос 11-р сургуулийн сурагч Н. Батзоригт (багш Х.Нармандах) 29 оноогоор 1-р байр эзэлж 8-р ангийн аварга боллоо. 11-р сургуулийн З.Болор-Эрдэнэ (Х.Нармандах), 28.5 оноо, мөн 11-р сургуулийн М.Молор-Эрдэнэ (Х.Нармандах) 27 оноогоор, 2-р байрыг, 1-р сургуулийн сурагч Л.Энхжаргал (Наранхүү) 23 оноогоор, 1-р сургуулийн Б.Зулсар (Бат-Эрдэнэ) 22.5 оноогоор, мөн 1-р сургуулийн Г.Мөнхболд (Бат-Эрдэнэ) 21 оноогоор тус тус 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

Олимпиадад 9-р ангийн 57 сурагч оролцсоноос “Олонлог” сургуулийн О.Өлзийбаяр (багш Ганболд) 22 оноогоор 1-р байр эзэлж 9-р ангийн аварга сурагч боллоо. Өвөрхангай аймгийн Б.Лувсанбямба() 21 оноогоор, 1-р сургуулийн О.Зориггоо (Самданпэрэнлэй) 20.5 оноогоор, 2-р байрыг, Б.Билгүүн (Самданпэрэнлэй) 15.5 оноогоор, 1-р сургуулийн сурагч И.Цогбаяр (Самданпэрэнлэй) 13.5 оноогоор “Олонлог” сургуулийн О.Соёлмаа (Ганболд) 12.5 оноогоор тус тус 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

Олимпиадад 10-р ангийн нийт 59 сурагч оролцсоноос 1-р сургуулийн сурагч Э.Тэмүгэ (багш Баянбат) 33.5 оноогоор 1-р байр эзэлж Улсын математикийн 43-р олимпиадын 10-р ангийн аварга сурагч боллоо. “Олонлог” сургуулийн Э.Энхзаяа (Ганболд), 1-р сургуулийн Г.Оюундарь (Баянбат) нар тус бүр 24 оноогоор 2-р байрыг, 11-р сургуулийн Г. Жавхлан-Очир (Батзаяа) 21.5 оноогоор, 11-р сургуулийн Г.Бямбасүрэн (Буянтогтох) 19 оноогоор, 84-р сургуулийн П.Чинзориг () 18 оноогоор тус тус 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

Олимпиадад 11-р ангийн нийт 46 сурагч оролцсоноос “Олонлог” сургуулийн Б.Сумъяа (багш Ганбилэг) 23 оноогоор 1-р байр эзэлж Улсын математикийн 43-р олимпиадын 11-р ангийн аврага сурагч боллоо. 1-р сургуулийн Н.Бямбажав (Баянбат) 17.5 оноогоор, Увс аймгийн Н.Балжинням (Р.Одгэрэл) 17 оноогоор 2-р байрыг 1-р сургуулийн Н.Гансоронзон (Бат-Эрдэнэ) 15 оноогоор Хөвсгөл аймгийн Б.Цэнд-Аюуш (Адъяахүү) 9.5 оноогоор “Мон-Турк” сургуулийн Б.Хүдэр (Дашдорж) 8.5 оноогоор тус тус 3-р

байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

Улсын Математикийн 43 дугаар олимпиадад амжилттай оролцсон дээрх нэр бүхий сурагчид, олимпиадад сурагчдаа амжилттай бэлтгэж оролцуулсан багш нар болон сургуулиудын олимпиадыг зохион байгуулах хороо болон нийт математикчдын нэрийн өмнөөс чин сэтгэлийн талархал илэрхийлье.

Багш нарын олимпиадыг бага, дунд гэсэн хоёр ангилалаар явуулсны дотроос бага ангийн математикийн 30 багш оролцсоноос, “Олонлог” сургуулийн багш П.Чимэг 30 оноогоор түрүүлж, Сэлэнгэ аймгийн багш Г.Түмэндэлгэр 25 оноогоор, “Эхлэл” сургуулийн багш Т.Наранбат 22 оноогоор удаах байруудад орлоо.

Дунд ангийн багш нарын олимпиадад нийт 37 багш оролцсоноос “Олонлог” сургуулийн багш Б.Ганбилэг 29.5 оноогоор түрүүлж, “Эхлэл” сургуулийн багш Т.Хулан 24.5 оноогоор, Увс аймгийн багш Р.Одгэрэл 23 оноогоор удаах байруудыг эзлэв. Олимпиадад олон жил тогтмол амжилттай оролцож буй 11-р сургуулийн багш Сүрэнхорлоод ММО-43-ын тусгай шагналыг олгох нь зүйтэй гэж ММОХороо үзлээ.

Багийн дүнгээр аймаг хотуудыг байр эзлүүлэхэд Ч.Даваадорж ахлагчтай УБ хот дундаж оноо 16,15-аар 1-р байр, Р.Одгэрэл ахлагчтай Увс аймаг дундаж оноо 15,42-ээр 2-р байр, Т.Хулан ахлагчтай “Эхлэл” сургуулийн дундаж оноо 11,92-оор 3-р байр, Г. Адъяахүү ахлагчтай Хөвсгөл аймаг дундаж оноо 11,17-оор 4-р байранд шалгарлаа.

ММО-43-д 1-р сургууль 10 медаль, “Олонлог” сургууль 6 медаль, 11-р сургууль 5 медаль, “Эхлэл” сургууль 2 медаль Увс 2 медаль, Сэлэнгэ, Хөвсгөл, Өвөрхангай, УБ-ын Монгол-Турк сургууль, 84-р сургууль тус бүр 1 медаль авч олимпиадад оролцогчдоо хошуучлан сайхан амжилт гаргалаа.

УБ хотын 1-р сургуулийн 10-р ангийн сурагч Энхбаатарын Тэмүгэ “Эхлэл” сургуулийн нэрэмжит ММО-43-ын үнэмлэхүй аваргаар шалгарлаа.

“Эхлэл” сургуулийн нэрэмжит ММО-43-ын П.Энхболд уран бодолтын шагналтнаар Өвөрхангай аймгийн 9-р ангийн сурагч Б.Лувсанбямба, УБ 1-р сургуулийн 10-р ангийн сурагч Э. Тэмүгэ,

Э.Энхзаяа "Олонлог" сургуулийн 11-р ангийн сурагч Б.Сумъяа нар шалгарлаа.

Энэ жилийн 7-р сард Вьетнам улсын Ханой хотод болох ОУМО-48-ийн бэлтгэлд "Олонлог" сургуулийн 11-р ангийн сурагч Б.Сумъяа 1-р сургуулийн Н.Бямбажав, Увсын Н.Балжинням 1-р сургуулийн Н.Гансоронзон, Хөвсгөлийн Б.Цэнд-Аюуш "Мон-турк" сургуулийн Б.Хүдэр, 1-р сургуулийн 10-р ангийн сурагч Э.Тэмүгэ нарыг үлдээхээр Олимпиадын хороо шийдвэрлэлээ.

ОУМО-48-ийн бэлтгэлд багтаж шалгарсан та бүхэндээ амжилт хүсч, Монголынхоо нэрийг дэлхийн тавцанд дуурсгах хүндтэй бөгөөд хариуцлагатай үйл хэргийн төлөө идэвхи чармайлт гарган сайн бэлтгэж амжилттай оролцохыг Монголын нийт Математикчдын нэрийн өмнөөс даалгаж байна.

Эрдэм оюун дэлгэрч Монголд математикчдын оюун ухаан улам хөгжин дэвших болтугай. Анхаарал тавьсан та бүхэнд баярлалаа.

Улаанбаатар хот, 2007.05.08

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН XLIII ОЛИМПИАДЫН
БАГИЙН НЭГДСЭН ДҮН

№	Аймгийн нэр	VIII	IX	X	XI	Бага	Дунд	нийт	дундаж оноо	Байр
1	Улаанбаатар	207.5	106	173	103.5	83	134.5	807.5	16.15	I
2	Увс	20.5	7.5	17.5	17	7	23	92.5	15.42	II
3	Өхлэл	16.5	3.5	5	0	22	24.5	71.5	11.92	III
4	Хөвсгөл	8	10	16	9.5	18	5.5	67	11.17	IV
5	Орхон	7.5	2	9	7.5	15	17	58	9.67	V
6	Өвөрхангай	10	21	7	0.5	8	1	47.5	7.92	
7	Ховд	11	3.5	14	0	13	1.5	43	7.17	
8	Сэлэнгэ	3	0.5	9	1	25	1.5	40	6.67	
9	Архангай	16	2	7	7	4	3	39	6.50	
10	Дархан-Уул	5.5	7.5	9	8	8	0.5	38.5	6.42	
11	Дорноговь	17.5	3	3	0.5	7	0.5	31.5	5.25	
12	Дундговь	8.5	7	4.5	0.5	3	0	23.5	3.92	
13	Баян-Өлгий		0	16.5	0	4	2	22.5	3.75	
14	Дорнод	0.5	8.5	1.5	1.5	8	1	21	3.50	
15	Өмнөговь	1.5	0	0.5	0	16	2	20	3.33	
16	Завхан	5	1	2	0	8	1	17	2.83	
17	Төв	0	0.5	4	0	9	0.5	14	2.33	
18	Хэнтий	0.5	1	4	1	5	0	11.5	1.92	
19	Говьсүмбэр	0	0.5	2	7	1	1	11.5	1.92	
20	Сүхбаатар		2		0	2	7	11	1.83	
21	Баянхонгор		0		7	4		11	1.83	
22	Булган		0.5		0.5			1	0.17	
23	Говь-Алтай		0.5		0	0	0	0.5	0.08	

Манай сургууль

Миний бие Улаанбаатар хотын Физик-Математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай 11-р сургуульд математикийн багш, тэнхимийн эрхлэгчээр 1992-1999 он хүртэл ажиллаж байгаад тэр үед математикийн сургалтаар тэргүүлж байсан I, XI сургуулиудтай өрсөлдөх хэмжээний сургууль байгуулахаар шийдэж 1999 оны намар анхны хувийн хэвшлийн 10 жилийн сургуулийг 100-гаад сурагч, 5 багштайгаар байгуулж анхныхаа хичээлийн жилийг эхлүүлж байлаа. Ийнхүү Монгол улсад анхны хувийн хэвшлийн сургуулийг байгуулсан билээ.

Сургуулийг хичээлийн эрхлэгч, математикийн багшаар миний багш АБТА, магистр, зөвлөх багш М.Адилбиш багш маань ажиллаж байв. Одоо манай сургууль 340-өөд сурагч, 22 багш ажилчидтай, цагаар хичээл заадаг багшгүй хамт олон болон өргөжжээ. Сургууль байгуулагдаад 8 дахь хичээлийн жилтэй золгож байгаа бөгөөд сургалтын үйл ажиллагаагаа амжилттай, чанарын өндөр түвшинд явуулж ирсэн төдийгүй дүүрэг, хот, улс болон мэргэжлийн байгууллагуудаас ирсэн үзлэг шалгалтад сайн дүнтэй шалгагдаж ирлээ.

Манай сургууль математик, физик, англи хэлний хичээлүүдийг гүнзгийрүүлсэн програмаар явуулж тухайн хичээлүүдийн дүүрэг, хот, улсын олимпиадуудад амжилттай оролцож эхний дөрвөн байрт тогтмол орж байна. Мөн сургуулийнхаа математикийн хичээлүүдийг өөрсдийн зохиосон сурах бичгүүдээр хангаж, сургуулийн материаллаг бааз жилээс жилд сайжирч ирсний дээр сургуулийн зориулалт бүхий 16 танхим, 1 хурлын заал, нэг ээлжинд 50 гаруй хүн хооллох цайны газартай гурван давхар тохилог хичээлийн байртай болж, сургуулийн сурагчид бүгд нэг ээлжинд хичээллэж, үдээс хойш секц, дугуйлан болон давтлага зэрэг хичээл ээс гадуур зохиогдох ажлууд явагдах бүрэн боломжтой боллоо. Хүүхдүүдийн оюун ухааныг задлан хөгжүүлэх зорилгоор 2002 оны хичээлийн хөтөлбөрт шатар даамны хичээлийг оруулж ирснээр 30 гаруй зэрэгтэй тамирчид төрөн гарсан байна.

2007 оны 4-р сарын эхээр болсон өсвөр үеийн Азийн аварга

шалгаруулах 64 буудалт даамын тэмцээнд 4-р ангийн сурагч Ц.Отгонбилэг оролцож Азийн аваргын цом, алтан медаль, түргэн тоглолтын тэмцээнээс мөнгөн медальтай ирлээ. Энэ нь шатар даамны багш спортын мастер Л.Цогтын ажлын үр дүн юм.

Манай сургуулийн бүх багш нар мэдлэг, хичээл заах ур чадвараар тэргүүний багш нар байдаг төдийгүй, нэг нь нийтийн төлөө, нийт нь нэгийн төлөө гэсэн сэтгэлээр ажилладаг маш эвсэг, халуун дулаан уур амьсгалтай хамт олон юм. Сурагчдыг олимпиад уралдаан тэмцээнд сайн оролцуулдагаас гадна сурагчдын суурь мэдлэгийн түвшинг онцгой анхаарч ажилладаг. Жил бүрийн хавар, намар шинээр элсч орсон сурагчдаас түвшин тогтоох шалгалт авч, зарим нэг хичээлийн хоцрогдол байвал 45 хоногийн “гүйцээх сургалт” явуулж хоцрогдлыг арилгадаг. Мэдээллийн технологийн шинэ эрин үеийг интернетгүйгээр төсөөлөх аргагүй билээ. Иймээс интернетэд холбогдсон иж бүрэн компьютерийн кабинет хичээллэж байна. Манай сургуулийг төгссөн сурагчид хүссэн сургуульдаа орж тэр сургуулийнхаа хамт олныг манлайлж, оны шилдэг оюутнууд төрөн гарсаар байна. Одоогоор манай сургуулийг төгссөн 7 сурагч Япон улсын их дээд сургууль, коллежид уралдаант шалгаруулалтаар тэнцэж суралцаж байгаагаас гадна АНУ, Герман, Польш, Солонгос, Хятад, Англи зэрэг орнуудын их дээд сургуульд 20 гаруй хүүхэд суралцаж байна.

Олимпиадын талаар товчхон

Манай сургуулийн сурагчид дүүрэг, хот, улс, П.Энхболдын нэрэмжит улсын уралдаан болон бусад нэрэмжит олимпиадуудаас 400 гаруй медаль хүртсэн бөгөөд тэр болгоныг бичсэнгүй зөвхөн дүүргийн олимпиадын дүн, Улаанбаатар хотын олимпиад, Улсын олимпиад, П.Энхболдын нэрэмжит улсын уралдаанд оролцсон амжилтуудаас товчхон хүргэе.

Байгуулагдсаны анхны хичээлийн жилдээ буюу 2000 онд 10А ангийн сурагч Б.Батбаатар Улсын мэдээлэл зүйн олимпиадаас хүрэл медаль хүртэж улмаар Бээжин хотод болсон Олон улсын мэдээлэл зүйн олимпиадад амжилттай оролцсон. Мөн онд 4А ангийн сурагч Д.Мөнхсүх П.Энхболдын нэрэмжит ул-

сын уралдаанаас алтан медаль, 8А ангийн сурагч М.Билгүүнтөгс хүрэл медаль хүртэж байсан бол 2001 онд 2А ангийн сурагч Д.Энхзаяа П.Энхболдын нэрэмжит улсын уралдаанаас алтан медаль, 9А ангийн сурагч Алтангэрэл Улсын математикийн олимпиадаас мөнгөн медаль хүртэж тухайн үеийн хувийн сургуулиудаас П.Энхболд болон Улсын математикийн олимпиадуудаас анхны медалиуд хүртэж байлаа.

Улмаар 2002 онд Улсын математикийн олимпиадаас 10А ангийн сурагч Б.Алтангэрэл, М.Билгүүнтөгс нар мөнгөн медаль, 9А ангийн сурагч А.Баярхүү, 8А ангийн сурагч Д.Барбаяр нар хүрэл медаль хүртэж медалийнхаа тоогоор улсад I сургуулийн дараа II байранд орсон нь манай сургуулийн оргил амжилт байлаа. 2004 онд П.Энхболдын нэрэмжит улсын уралдаанаас 9А ангийн сурагч Ч.Гансүх мөнгөн медаль, багш М.Отгонжаргал алтан медаль, 2005 онд Улаанбаатар хотын математикийн олимпиадаас 5А Д.Энхзаяа, 3А Б.Баатархүү, багш М.Отгонжаргал нар алтан медаль, 2006 онд багш М.Отгонжаргал алтан медаль, 4А Б.Баатархүү алтан медаль хүртсэн байна. Улмаар 2007 оны П.Энхболдын нэрэмжит улсын уралдаанаас багш Т.Наранбат алтан медаль хүртсэн сайхан амжилт үзүүлээ. Түүнчлэн бусад хичээлүүдийн олимпиадуудад амжилттай оролцдогос зөвхөн энэ жилийн амжилтыг дурьдвал 2007 онд дүүргийн англи хэлний олимпиадаас 3 алт, 1 мөнгө мэдээлэл зүйн дүүргийн олимпиадаас 1 мөнгө, 1 хүрэл, физикийн дүүргийн олимпиадаас 2 алт, 2 мөнгө, 3 хүрэл, Улаанбаатар хотын математикийн олимпиадаас бага болон дундын багш нарын ангилалд Т.Наранбат, Ш.Доржсэмбэ нар аварга болсон нь (бага, дундын багш нарын ангиллын аваргыг нэг сургуулийн багш зэрэг авч байгаагүй) өмнө нь тохиолдож байгаагүй амжилтыг үзүүлээ. Мөн мэдээлэл зүйн хотын олимпиадад багш О.Орхонбаатар, 10А ангийн сурагч Ж.Билгүүн нар хүрэл медаль хүртжээ.

Дээрх амжилт нь манай сургуулийн багш нарын уйгагүй хөдөлмөрийн үр дүн билээ.

Улсын математикийн 43-р олимпиадыг манай сургууль зохион байгуулахыг дэмжсэн Улсын математикийн олимпиадыг зо-

хион байгуулах хорооны дарга доктор, профессор Монгол Улсын Гавъяат Багш Ц.Дашдорж багшдаа баярлалаа.

Математикийн олимпиадыг зохион байгуулахад санхүүгийн болон сэтгэл санааны гүн дэмжлэг туслалцаа үзүүлсэн 1986 оны МУИС-ийн математикийн ангийг төгссөн найз нөхөд, 41-р сургуулийг 1981 онд төгссөн Ц.Адилбиш багштай 10В ангийн хамт олон, математикийн сургалтыг өндөр түвшинд гаргаж яваа “Гэгээрэл”, “Номуун” сургууль болон 1997 онд XI сургууль төгссөн шавь нартаа баярлалаа.

Дүүргийн математикийн олимпиадад

	1999– 2000	2000– 2001	2001– 2002	2002– 2003	2003– 2004	2004– 2005	2005– 2006	2006– 2007	2007– 2008
Алт	3	5	4	4	6	6	2	5	5
Мөнгө	3	4	2	2	1	2	3	3	4
Хүрэл	2	1		1	2	4	5	2	5
Эзэлсэн байр	III	I	III	I	I	I	I	I	I

“Эхлэл” бүрэн дунд сургуулийн захирал МУ-ын аврага математикч А.Энхжаргал

ММО-43, VII АНГИЙН III ДАВААНЫ БОДЛОГО

Б.Сандагдорж (МУБИС), Э.Азжаргал (МУБИС)

VII-A1 (Б.Сандагдорж). $\frac{469}{1998}$ бутархайн таслалаас хойших 2007 дахь цифрийг ол.

VII-A2 (Б.Сандагдорж). x, y бодит тоонуудын хувьд $x^2 + xy + y^2 = 4$ ба $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 8$ байдаг бол $x^6 + x^3y^3 + y^6$ илэрхийлэлийн утгыг ол.

VII-A3 (Б.Сандагдорж). 9×9 тавлицад 1-ээс 81 хүртэлх тоог бичив. Тоонуудыг яаж ч байрлуулсан бичигдсэн тоонуудын ялгавар нь 6-аас багагүй байх хөрш хоёр нүд олдохыг батал. (Ерөнхий талтай нүднүүдийг хөрш нүд гэнэ.)

VII-B1 (Ч.Гантөмөр). $x+y+z+xy+yz+zx+xyz$ илэрхийллийн утга $\overline{xyz}$ гэсэн 3 оронтой тоо гарав. Уг гурван оронтой тоонуудыг ол.

VII-B2 (Б.Сандагдорж). Ангийн нийт сурагчдын 95,5 хувиас багагүй, 96,5 хувиас хэтрэхгүй дугуйланд хичээллэдэг бол анги хамгийн цөөндөө хэдэн сурагчтай вэ?

VII-B3 (Ч.Гантөмөр). 100-аас 10000 хүртлэх натурал тоонууд дотор яг гурван цифр нь ижил тоо хичнээн байх вэ?

VII-A1. $\frac{469}{1998} = 469 : 1998 = 0,2347347\dots$ гэж бичигдэх буюу таслалаас хойш 2-ын цифр, 347 гэсэн гурван оронтой тоо давтагдана.

$2006 = 3 \cdot 668 + 2$ буюу 2007 дахь цифр нь 4 байна.

VII-A2. $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 8$ -ийг хувиргая.

$$\begin{aligned} 8 &= x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 = \\ &= (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = 4 \cdot (x^2 - xy + y^2) \end{aligned}$$

буюу $x^2 - xy + y^2 = 2$ болно.

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x^2 - xy + y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 3; xy = 1$$

гэж гарна.

$$\begin{aligned} x^6 + x^3y^3 + y^6 &= (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) + x^3y^3 = \\ &= 3(x^4 - x^2y^2 + y^4) + 1 = 3((x^2 + y^2)^2 - 3x^2y^2) + 1 = \\ &= 3(3^2 - 3) + 1 = 19 \end{aligned}$$

болно.

VII-A3. a_{ij} -аар i -р мөр, j -р багананд бичигдсэн тоог тэмдэглэе. Эсрэгээс нь үзье, тэгвэл хөрш хоёр нүдэнд бичигдсэн тоонуудын ялгавар 5-аас хэтрэхгүй өөрөөр хэлбэл $|a_{ij} - a_{ij+1}| \leq 5$ гэх мэт байна. $a_{nm} = 1$; $a_{kl} = 81$ гэвэл $80 = |a_{mn} - a_{kl}| \leq 5|m-k| + 5|n-l| \leq 5 \cdot 8 + 5 \cdot 8 = 80$. Эндээс $|m-k| = |n-l| = 8$ буюу 1 ба 81 нь нэг диагоналийн төгсгөлүүд дээр байрлана. $2 = a_{st}$ гээ. $79 = |a_{kl} - a_{st}| \leq 5|k-s| + 5|\ell-t| = 80$ -аас $|k-s| \vee |\ell-t| \leq 7$ гэж заавал гарах тул $79 \leq 7 \cdot 5 + 8 \cdot 5 = 75$ болж зөрчилд хүрнэ.

VII-B1. $\overline{xyz} = x + y + z + xy + yz + zx + xyz$ тэнцлийг $100x + 10y + z = x + y + z + xy + yz + zx + xyz$ буюу $99x + 9y - xy = yz + zx + xyz$ хэлбэрт бичье. Эндээс

$$z = \frac{99x + 9y - xy}{y + x + xy} \quad (*)$$

болох ба $z \leq 9$ гэдгээс $99x + 9y - xy \leq 9y + 9x + 9xy$ өөрөөр хэлбэл, $90x \leq 10xy$ буюу $y \geq 9$ болно. Иймд $y = 9$ бол $(*)$ -оос

$$z = \frac{99x + 9 \cdot 9 - 9x}{9 + x + 9x} = \frac{90x + 81}{10x + 9} = 9$$

гэж гарна.

$y = z = 9$ үед $x + y + z + xy + yz + zx + xyz = x + 9 + 9 + 9x + 81 = x + 9 + 9 + 9x + 81 + 9x + 81 = 100x + 99 = \overline{x99}$ болох бөгөөд манай бодлогын хариу, 199, 299, 399, 499, 599, 699, 799, 899 ба 999 гэж гарна.

VII-B2. n -ангийн нийт сурагчдын тоо, k -дугуйланд явдаггүй сурагчдын тоо ($k \geq 1$) байг.

Бодлогын нөхцөлөөр $95,5 \leq \frac{n-k}{n} \cdot 100 \leq 96,5$ буюу

$$\frac{191}{2} \leq \frac{n-k}{n} \cdot 100 \leq \frac{193}{2}$$

Эндээс $191n \leq 200n - 200k \leq 193n$ буюу $200k \leq 9n \leq 2n + 200k$ болно. Эндээс n -ийг олбол $22k + \frac{2k}{9} \leq n \leq 28k + \frac{4k}{7}$ гэж гарна. $k = 1$ үед $22 < n < 29$ гэж гарах ба n -ийн хамгийн бага утга $n = 23$ болно.

VII-B3. Яг гурван цифр нь ижил 3 оронтой тоо $\overline{aaa}$ хэлбэртэй ($1 \leq a \leq 9$) тул 9 ширхэг байна.

Яг гурван цифр нь ижил 4 оронтой тоо

1) $\overline{baaa}$, Энд $b \neq 0, 1 \leq a \leq 9, a \neq b$ хэлбэртэй бол үржих зарчимаар $9 \cdot 9 = 81$ ширхэг байна.

2) $\overline{abaa}, \overline{aaba}, \overline{aaab}$ ($a \neq 0; a \neq b$) тоо тус бүр үржих зарчимаар $9 \cdot 9 = 81$ тул нийт бодлогын нөхцөлийг хангах тоо $9 + 4 \cdot 9 = 333$ ширхэг байна.

ММО-43, VIII АНГИЙН III ДАВАА

Б.Сандагдорж, Ш.Батхишиг

VIII-A1 (Ч.Гантөмөр). $n \geq 3$ байх натурал n тооны хувьд $2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1$ тоо нэгээс их гурван бүхэл тооны үржвэрт задарна гэдгийг батал.

VIII-A2 (Ш.Батхишиг). a, b, c, d - эсрэг бодит тоонууд ба $a + b + c + d = 8$ бол $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1}$ илэрхийлэлийн хамгийн их утгыг ол.

VIII-A3 (Л.Даваажаргал). ABC гурвалжинд $АН$ өндөр, BE биссектрис татав. Хэрэв $\angle BEA = 45^\circ$ бол $\angle AHE = 45^\circ$ гэж батал.

VIII-B1 (Ш.Батхишиг). m ба n натурал тоонууд ба

$$mn \mid m^2 + n^2 + m$$

бол m тоо натурал тооны квадрат болохыг батал.

VIII-B2 (Б.Сандагдорж). Бүх натурал k тооны хувьд $1 \times k$ тэгш өнцөгтийг тууз гээ. Ямар натурал n хувьд $2007 \times n$ тэгш өнцөгтийг харилцан ялгаатай туузуудаар хучиж чадах вэ?

VIII-B3 (Б.Сандагдорж). $ABCD$ трапецийн AD ба BC хажуу талууд дээр M ба N цэгүүдийг $\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NB}$ байхаар авчээ. MN шулуун AC ба BD диагоналиудтай харгалзан P ба Q цэгээр огтлолцов. Тэгвэл $MP = QN$ гэж батал.

VIII-A1. $a^4 + a^2 + 1 = (a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$ адилтгал ашиглая.

$$\begin{aligned} 2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1 &= (2^{2^{n-1}})^4 - (2^{2^{n-1}})^2 + 1 = \\ &= \left((2^{2^{n-1}})^2 + 2^{2^{n-1}} + 1 \right) \left((2^{2^{n-1}})^2 - 2^{2^{n-1}} + 1 \right) = \\ &= (2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1) (2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1) = \\ &= \left((2^{2^{n-2}})^4 + (2^{2^{n-2}})^2 + 1 \right) (2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1) = \\ &= \left((2^{2^{n-2}})^2 + 2^{2^{n-2}} + 1 \right) \left((2^{2^{n-2}})^2 - 2^{2^{n-2}} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$(2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1) = (2^{2^{n-1}} + 2^{2^{n-2}} + 1) \times \\ \times (2^{2^{n-1}} - 2^{2^{n-2}} + 1)(2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1), \quad n \geq 3.$$

VIII-A2. $A = \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1}$
Коши-Буняковскийн тэнцэтгэл биш хэрэглэвэл:

$$A^2 = (\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1})^2 \leq \\ \leq (1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)(4a+1 + 4b+1 + 4c+1 + 4d+1) = \\ = 4(4(a+b+c+d) + 4) = 144$$

$a = b = c = d = 2$ үед A хамгийн их утга нь 12 болно.

VIII-A3. E цэгийг дайруулан, AC -талд перпендикуляр EK шулуун татъя. $\angle BEA = 45^\circ \Rightarrow \angle BEK = 45^\circ$ болно. Иймээс $\triangle AEB = \triangle KEB$ ба $\triangle AEK$ нь адил хажуут тэгш өнцөгт гурвалжин болно. $\angle KAE = \angle KEA = 45^\circ$. AK хэрчим дээр диаметртэй тойрог дээр H, E цэгүүд орших ба $AKHE$ дөрвөн өнцөг тойрогт багтана.

$\angle AHE = \angle AKE = 45^\circ$ болно.

VIII-B1. $(m, n) = d$ гээ.

$$\begin{cases} m = d \cdot m_1 \\ n = d \cdot n_1 \end{cases}, \quad (m_1, n_1) = 1, \quad m_1, n_1 \in \mathbb{N},$$

$m \cdot n \mid m^2 + n^2 + m \Rightarrow d^2 \mid m^2 + n^2 + m \Rightarrow d^2 \mid m \Rightarrow m = d^2 \cdot m_2, \quad m_2 \in \mathbb{N},$
 $(m_2, n_1) = 1, mn \mid m^2 + n^2 + m \Rightarrow m \mid n^2 \Rightarrow m_2 \mid n_1^2 \Rightarrow m_2 = 1; \quad m = d^2$
болно.

VIII-B2. Хоёр тохиолдолд авч үзье.

1-рт: $n \leq 2007$ байг. Тэгвэл $2007 \times n$ тэгш өнцөгтөд хамгийн уртдаа 1×2007 тууз л орно. Иймээс туузуудын талбайн нийлбэр хамгийн ихдээ $2007 + 2006 + \dots + 2 + 1 = \frac{2007 \cdot 2008}{2} = 2007 \cdot 1004$ байна. Тэгш өнцөгтийн талбайгаас багагүй $2007 \cdot 1004 \geq 2007 \cdot n$ өөрөөр хэлбэл $n \leq 1004$ үед $2007 \times n$ тэгш өнцөгтийг эхнийх

нь 2007 урттай тууз. Хоёрдугаар нь 1 ба 2007 урттай тууз, гуравдугаар нь 2 ба 2005 урттай тууз ... гэх мэт хучина.

2-рт: $n > 2007$ байг. Тэгвэл хамгийн урт тууз нь $1 \times n$ буюу туузуудын талбайн нийлбэр $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ нь $2007 \cdot n$ -ээс багагүй байна. Өөрөөр хэлбэл $\frac{n(n+1)}{2} \geq 2007 \cdot n$ гэдгээс $n \geq 4013$ болно. Хучин арга нь өмнөхтэй адилаар эхнийхийг n урттай, туузаар 2 дахийг 1 ба $(n-1)$ урттай туузаар, ..., 2007 дахийг 2006 ба $n-2006$ урттай туузаар хучина. $n \geq 4013$ үед тэд бүгд ялгаатай.

VIII-B3. Трапцийн CD суурь дээр E цэгийг $\frac{CE}{ED} = \frac{AM}{MD}$ байхаар авъя. Тэгвэл $ME \parallel AC$ ба $NE \parallel BD$ болно. Трапцийн диагоналиудын огтлолцолын цэг ба $NE \cap AC = L$ гэвэл $\frac{MP}{PN} = \frac{EL}{LN} = \frac{DO}{OB} = \frac{CD}{AB}$ болох нь хялбар гарна. Үүнтэй адилаар $\frac{LN}{NQ} = \frac{OB}{CD}$ болно. Эндээс батлагдав.

Ч.Гантөмөр

VIII-A1 (Б.Сандагдорж). Ялгаатай m ширхэг тэгш, ялгаатай n ширхэг сондгой натурал тоонуудын нийлбэр 2007 байв. $(5m + 7n)$ илэрхийллийн авч болох хамгийн их утгыг ол.

VIII-A2 (Н.Аргилсан). Ялгаатай бүхэл тоон талуудтай гурвалжны нэг тал нь 6 ба периметр нь талбайн хэмжээтэй тэнцүү бол энэ гурвалжны талуудыг ол.

VIII-A3 (Ч.Гантөмөр). $x^3 + y^4 = 2^{23}$ тэгшитгэл натурал тоон шийдтэй юу?

VIII-B1 (Ч.Гантөмөр). $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{2007^2}{4013 \cdot 4015}$ нийлбэрийг ол.

VIII-B2 (Н.Аргилсан, Ц.Чинзориг). $ABMC$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн $AB = BC$ ба $\angle BAM = 30^\circ$, $\angle ACM = 150^\circ$ бол AM нь $\angle BMC$ өнцөгийн биссектрисс гэж батал.

VIII-B3 (Б.Эрдэнэбаяр). a, b, c нь эерэг бодит тоонууд бол

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}$$

тэнцэл биш биелэхийг батал.

VIII-A1. $(5m + 7n)$ илэрхийлэл хамгийн их утгатай байхын тулд m, n аль болох их утгатай байх ёстой. Иймд m ширхэг тэгш n ширхэг сондгой тоонуудаа аль болох бага бөгөөд дэс дараалсан тоонууд байхаар сонгоно.

$$2007 = (2 + 4 + \dots + 2m) + (1 + 3 + \dots + 2n - 1) = 2 \cdot \frac{m(m+1)}{2} + n^2$$

$$\text{буюу } m^2 + m + n^2 = 2007 \Leftrightarrow \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + n^2 = 2006,75 \text{ болно.}$$

$$\text{Нөгөө талаас } 5m + 7n = 5\left(m + \frac{1}{2}\right) + 7n - 2,5 \text{ ба } \left(5\left(m + \frac{1}{2}\right) + 7n\right)^2 \leq$$

$$(5^2 + 7^2)\left(\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + n^2\right) = 74 \cdot 2006,75 \text{ гэдгээс } 5m + 7n \leq$$

$\sqrt{74 \cdot 2006, 75} - 2, 5$ буюу $m, n \in \mathbb{N}$ учир $5m + 7n \leq 382$ гэж гарна. Иймд $5m + 7n$ илэрхийлэлийн утга хамгийн ихдээ 382 байна. $5m + 7n = 382, m^2 + m + n^2 = 2007$ байхаар m ширхэг сондгой, n ширхэг тэгш тоо олдохгүй хялбархан харуулж болно. Эндээс $5m + 7n = 381$ байх тохиолдолыг авч үзнэ. Энэ тохиолдолд ч мөн дээрх чанартай тоонууд олдохгүй. Харин $5m + 7n = 380$ байхад нийлбэр нь 2007 байх m ширхэг сондгой, n ширхэг тэгш ялгаатай натурал тоонууд олдоно. Жишээ нь: $m = 27, n = 35$ ба $(1 + 3 + \dots + 69) + (2 + 4 + \dots + 52 + 80) = 2007$ болно.

VIII-A2. Уг гурвалжны талууд нь a, b, c ба $a = 6, b \leq c$ байг. $p = \frac{1}{2}(a + b + c), S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 2p. \Rightarrow (p-a)(p-b)(p-c) = 4p^2$ буюу $(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) = 32p = 16(a+b+c) \Rightarrow (b+c-6)(36-(c-b)^2) = 16((b+c-6)+12)$ ба $(b+c-6)(20-(c-b)^2) = 16 \cdot 12 = 192, b+c-6 > 0$ учир $20-(c-b)^2 > 1$ эндээс $0 \leq c-b \leq 4$ болно.

(а) Хэрэв $(c-b) \in \{0, 1, 3\}$ байвал $20-(c-b)^2 \in \{20, 19, -11\} \Rightarrow 192$ -ийн хуваагч биш гэж гарна.

(б) Хэрэв $c-b = 2$ бол $b+c-6 = 12 \Rightarrow (a, b, c) = (6, 8, 10)$

(в) Хэрэв $c-b = 4$ бол $b+c-6 = 48 \Rightarrow (a, b, c) = (6, 25, 29)$ болно.

VIII-A3. $2^{12} \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 2^{23} \equiv 2^{11} \equiv 7 \pmod{13}$ юм. $m \in \mathbb{Z}$ бол $m^3 \equiv 0, 1, 5, 8, 12 \pmod{13}$ ба $m^4 \equiv 0, 1, 3, 9 \pmod{13}$ болохыг шууд шалгаж болно. Эндээс $x, y \in \mathbb{N}$ үед $x^3 + y^4 \equiv 0, 1, 5, 8, 12, 3, 9, 2, 6, 11 \pmod{13}$ байх л боломжтой. Өөрөөр хэлбэл $x^3 + y^4 \not\equiv 7 \pmod{13}$ болно. Эндээс өгөгдсөн тэгшитгэл натурал шийдгүй гэж гарна.

VIII-B1.
$$\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{k}{2k-1} + \frac{k}{2k+1} \right) \text{ учир}$$

$$S = \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{2007^2}{4013 \cdot 4015} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{2007} \left(\frac{k}{2k-1} + \frac{k}{2k+1} \right)$$

буюу

$$4S = \sum_{k=1}^{2007} \left(\frac{k}{2k-1} + \frac{k}{2k+1} \right) = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{2007}{4013} + \frac{2007}{4015}$$

болно. $\frac{k}{2k-1} + \frac{k}{2k+1} = 1$ учир

$$4S = 1 + 2006 + \frac{2007}{4015} = \frac{8058105}{4015} \Rightarrow S = \frac{1611621}{3212}$$

болно.

VIII-B2. B цэгийг AM -ийн хувьд тэгш хэмтэй хувиргая. $\angle BAB' = 60^\circ$ ба ABB' нь адил талт гурвалжин. Түүнчлэн A, B', C цэгүүд B цэгт төвтэй нэг тойрог дээр оршино. $\angle ABB'$ нь энэ тойргийн төв өнцөг гэдгээс $\angle ACB' = 30^\circ$ болно. Иймд $\angle ACB' + \angle ACM = 180^\circ$ болж C цэг MB' шулуун дээр оршино гэж гарна. Эндээс AM шулуун BM ба $B'M$ хэрчмүүдийн тэгш хэмийн тэнхлэг өөрөөр хэлбэл $\angle BMB'$ -ийн биссектрисс болох нь батлагдав.

VIII-B3. Батлах тэнцэтгэл бишийг $(1+abc)$ -ээр үржээд хоёр талд нь 3-ийг нэмж өгөө. Тэгвэл батлах тэнцэтгэл бишийн зүүн тал:

$$\begin{aligned} & \frac{1+a+ab+abc}{a(1+b)} + \frac{1+b+bc+abc}{b(1+c)} + \frac{1+c+ac+abc}{c(1+a)} = \\ &= \frac{(1+a)+ab(1+c)}{a(1+b)} + \frac{(1+b)+bc(1+a)}{b(1+c)} + \frac{(1+c)+ac(1+b)}{c(1+a)} = \\ &= \frac{(1+a)}{a(1+b)} + \frac{b(1+c)}{(1+b)} + \frac{(1+b)}{b(1+c)} + \frac{c(1+a)}{(1+c)} + \frac{(1+c)}{c(1+a)} + \frac{a(1+b)}{1+a} \geq \\ &\geq 6 \cdot \sqrt[6]{\frac{(1+a)b(1+c)(1+b)c(1+a)(1+c)a(1+b)}{a(1+b)(1+b)b(1+c)(1+c)c(1+a)(1+a)}} = 6 \end{aligned}$$

болж батлах зүйл гарна. Тэнцэлдээ хүрэх нөхцөл нь:

$$\frac{(1+a)}{a(1+b)} = \frac{a(1+b)}{(1+a)} \Leftrightarrow (1+a)^2 = a^2(1+b)^2 = a^2b^2(1+c)^2 =$$

$a^2b^2c^2(1+a)^2$ болно. Эндээс $abc = 1$
 Нөгөө талаас $\frac{1+a}{a(1+b)} = \frac{bc(1+a)}{1+b} = \frac{bc(1+a)}{b(1+c)} \Rightarrow 1+b = b+bc =$
 $b + \frac{1}{a} \Rightarrow a = b = c = 1$ гэж гарна.

ММО-43, IX АНГИЙН III ДАВАА

Б.Сандагдорж, Э.Азжаргал

IX-A1 (). $a^3 + 6ab + 1$ ба $b^3 + 6ab + 1$ тоонууд нэгэн зэрэг бүхэл тооны куб болох бүх a, b эерэг бүхэл тоог ол.

IX-A2 (Ч.Гантөмөр). $xyz = 1$ байх эерэг бодит x, y, z тоонуудын хувьд

$$\frac{1}{(x+1)^2 + y^2 + 1} + \frac{1}{(y+1)^2 + z^2 + 1} + \frac{1}{(z+1)^2 + x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$$

тэнцэтгэл биелнэ гэж батал.

IX-A3 (Б.Сандагдорж). ABC гурвалжин өгчээ. C оройн доотод ба гадаад өнцгийн биссектрис AB шулууныг харгалзан L ба M цэгүүдээр огтлов. Хэрэв $CL = CM$ бол $AC^2 + BC^2 = 4R^2$ болохыг батал.

Энд R нь ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн радиус.

IX-B1 (Ч.Гантөмөр). (x, y, z, t) бүхэл тоон дөрөвтөөс

(1). (z, t, x, y) (2). (y, x, t, z) (3). $(x + nz, y + nt, z, t)$

(4). $(x + ny, y, z + nt, t)$ бүхэл тоон дөрөвтүүдийн аль нэгийг гарган авч болно. Энэ үйлдлийг хэдэн удаа хийсний дараагаар (3, 4, 5, 7) дөрөвтөөс (1, 2, 3, 4) дөрөвтийг гарган авч болох уу? (Энд n дурын бүхэл тоо.)

IX-B2 (Ч.Гантөмөр). $A = \{1; 3; 5; \dots; 2n - 1\}$ олонлогийг 12 дэд олонлогт, дэд олонлог бүрийн элементүүдийн нийлбэрүүд тэнцүү байхаар хувааж болох n -ийн бүх эерэг бүхэл утгуудыг ол. (Энд дээрх 12 дэд олонлогуудын нэгдэл нь A ба аль ч хоёр дэд олонлогийн огтлолцол нь хоосон байна.)

IX-B3 (Б.Сандагдорж). AE ба CD нь ABC гурвалжны биссектрисүүд байг. Хэрэв $\angle BDE : \angle EDC = \angle BED : \angle DEA$ бол ABC гурвалжныг адил хажуут гэж батал.

IX-A1. $a \leq b$ гэж үзье. $b^3 < b^3 + 6ab + 1 < (b+2)^3$ болохыг хялбар шалгаж болно. Иймээс $b^3 + 6ab + 1 = (b+1)^3$ болох ба $2a = b+1$ болно. $a^3 + 6ab + 1 = a^3 + 12a^2 - 6a + 1 < (a+4)^3$ болно. Эндээс $a^3 + 6ab + 1$ тоо $(a+1)^3, (a+2)^3, (a+3)^3$ -тоонуудтай тэнцэх боломжтой. $a^3 = 1, b = 1$ болох ба өөр a, b эерэг бүхэл тоо олдохгүй.

IX-A2.

$$\frac{1}{(x+1)^2 + y^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + y^2 + 2x + 2} \leq \frac{1}{2xy + 2x + 2}$$

ба $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$ орлуулга хийвэл

$$\frac{1}{2(xy + x + 1)} = \frac{bc}{2(ab + bc + ca)}$$

болно. Бусад нэмэгдэхүүнүүдийн хувьд адил хувиргалт хийж хэлбэл батлах тэнцэтгэл биш гарна. Тэнцэлдээ хүрэх нөхцөл нь $a = b = c = 1$ болно.

IX-A3. Гурвалжны дотоод ба гадаад өнцгийн биссектрисүүд перпендикуляр байна.

$$\frac{\gamma}{2} + \left(\frac{180 - \gamma}{2} \right) = 90^\circ.$$

$|CL| = |CM|$ тул $\triangle CLM$ - адил хажуут тэгш өнцөгт. Иймээс $\angle CLM = \angle LMC = 45^\circ$. Мөн $\triangle ALC, \triangle CLB$ хувьд

$$\begin{cases} \alpha + \frac{\gamma}{2} = 45^\circ \\ \beta + \frac{\gamma}{2} = 135^\circ \end{cases} \quad (*)$$

байна. ABC гурвалжныг багтаасан тойрог дээр $\angle ACD = 90^\circ$ байхаар D цэгийг авъя. Тэгвэл $AD = 2R$ диаметр болно. Одоо

$BC = CD$ гэдгийг харуулъя. $ABCD$ багтсан 4 өнцөгтийн хувьд $\angle ADC = 180^\circ - \beta$, $\angle DAC = 90^\circ - \angle ADC = \beta - 90^\circ$. Тэгвэл (*)-оос $\beta - 90^\circ = 45^\circ - \frac{\gamma}{2} = \alpha$ болох ба $BC = CD$ байна.

IX-B1. Ямар ч үйлдлийн хувьд захын тоонууд болон дундах тоонуудын үржвэрүүдийн ялгаварын абсалют хэмжигдэхүүн инвариант болохыг хялбархан шалгаж болно. $(3, 4, 5, 7)$ хувьд $21 - 20 = 1$ ба $(1, 2, 3, 4)$ хувьд $4 - 6 = -2$ гарч байгаа учраас $(3, 4, 5, 7)$ дөрөвтөөс $(1, 2, 3, 4)$ дөрөвтийг гарган авч чадахгүй.

IX-B2. $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$ ба $\frac{n^2}{12} \in \mathbb{N}$ байна гэе. Энэ нь дэд олонлогийн элементүүдийн нийлбэр болно. $n = 6k, k \in \mathbb{N}$ ба дэд олонлогийн элементүүдийн нийлбэр $3k^2$ байх ёстой. $2n - 1 = 12k - 1 \leq 3k^2 \Leftrightarrow 3(k - 2)^2 \geq 11 \Rightarrow k \geq 4, k \neq 5$ гэж харуулъя.

$k = 5$ үед $A = \{1, 3, 5, \dots, 59\}$, $|A| = 30$ ба дэд олонлог бүрийн элементүүдийн нийлбэр 75 гарна. Дэд бүр дор хаяж 1 элементтэй ба элементүүдийн нийлбэр нь сондгой тоо гэдгээс дэд бүр дор хаяж 3 элемент агуулна. Энэ нь $|A| = 30$ гэдэгт зөрчинө. $k = 4, 6, 7, 9$ үед байгуулалт хийе.

$k = 4$ үед $A = \{1, 3, \dots, 47\}$, $B_i = \{2i - 1, 49 - 2i\}, i = 1, 2, \dots, 12$

$k = 6$ үед $A = \{1, 3, \dots, 79\}$, $B_i = \{35 + 2i, 73 - 2i\}$,
 $i = 1, 2, \dots, 9$ ба $B_{10} = \{23, 25, 29, 31\}$, $B_{11} = \{19, 21, 23, 35\}$ ба
 $B_{12} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 27\}$ нийлбэр 108

$k = 7$ үед $A = \{1, 3, \dots, 83\}$, $B_i = \{4i - 3, 65 - 2i, 85 - 2i\}$,
 $i = 1, \dots, 10$. $B_{11} = \{8, 27, 35, 39, 43\}$, $B_{12} = \{4, 11, 15, 19, 23, 31, 41\}$
 нийлбэр 147.

$k = 9$ үед $A = \{1, 3, 5, \dots, 107\}$, $B_i = \{23 + 8i, 109 - 4i, 111 - 4i\}$,
 $i = 1, 2, 3, \dots, 7$. $B_8 = \{1, 11, 65, 67, 69\}$, $B_9 = \{3, 15, 73, 75, 77\}$,
 $B_{10} = \{29, 37, 57, 59, 61\}$, $B_{11} = \{5, 9, 17, 23, 25, 33, 51, 53\}$,
 $B_{12} = \{7, 11, 13, 19, 21, 35, 43, 45, 49\}$ нийлбэр 243.

Одоо $k = k_0$ үед хуваалт олдох бол $k = k_0 + 4$ үед хуваалт олдоно.
 $B_i, i = 1, 2, \dots, 12$ нь $A = \{1, 3, 5, \dots, 12k_0 - 1\}$ -ийн хуваалт байг.

$$A' = \{1, 3, 5, \dots, 12k_0 + 4 - 1\}$$

бол

$$B'_i = B_i + \{12k_0 - 1 + 2i, 12k_0 + 49 - 2i\}, i = 1, 2, \dots, 12$$

нь A' -ийн бодлогын нөхцөл хангах хуваалт юм.

Эндээс $k \in \{4 + 4m, 6 + 4m, 7 + 4m, 9 + 4m\}$ ба $k \neq 1, 2, 3, 5$ байхад хуваалт олдоно гэж гарна.

IX-B3. $\frac{\angle BDE}{\angle EDC} = \frac{\angle BED}{\angle DEA} = \lambda$ байг. $\angle CDE = x, \angle AED = y$ гэвэл $\angle BDE = \lambda x, \angle BED = \lambda y$ байна.

Нөгөө талаас $\lambda x + \lambda y + \angle ABC = 2\alpha + 2\beta + \angle ABC = 180^\circ$ буюу $\lambda(x + y) = 2(\alpha + \beta)$ байна.

$\angle DOE = 180^\circ - x - y = 180^\circ - (x + y) = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ тул $x + y = \alpha + \beta$ болж гарах ба $\lambda = 2$ болно. Одоо O цэгийн DE хэрчмийн хувьд тэгш хэмтэй цэгийг O_1 гэвэл $\triangle DOE = \triangle DO_1E$ болно.

Нөгөө талаас DO_1, EO_1 нь DBE гурвалжны биссектрисүүд болоход хүрнэ. Иймээс BO_1 биссектрис байна. BO мөн биссектрис учир B, O_1, O цэгүүд нэг шулуун дээр оршино. $OO_1 \perp DE$ учир BO_1 биссектрис $BO_1 \perp DE$ гэдгээс $\angle BDE = \angle BED$ болно. Өөрөөр хэлбэл $\triangle DBE$ адил хажуут. ӨТӨ шинжээр $\triangle BDC = \triangle BEA$ учир $AB = BC$ болж батлагдана.

Ш. Батхишиг (МУБИС)

IX-A1 Ялгаатай натурал тоонуудаас тогтох A олонлогийн аливаа хоёр элементийн нийлбэр нь ялгавартаа бүхлээр хуваагдана. Дурын натурал n тооны хувьд n ширхэг элементтэй дээрх чанарыг хангах A олонлог олдох уу?

IX-A2 (Н.Аргилсан). A өнцөг нь хурц байх ABC гурвалжны B ба C оройгоос эсрэг талуудад буулгасан өндрийн суурь нь харгалзан D ба E байг. AB талаар диаметрээ хийсэн тойрог EC өндрийг M цэгээр, AC талаар диаметрээ хийсэн тойрог BD өндрийг N цэгээр огтолсон бөгөөд M ба N нь гурвалжны дотор орших бол $AM = AN$ гэж батал.

IX-A3 (Б.Хоролдагва). x, y, z нь $x + y + z = 1$ байх эерэг бодит тоонууд бол

$$(xy + yz + zx) \left(\frac{x}{y^2 + y} + \frac{y}{z^2 + z} + \frac{z}{x^2 + x} \right) \geq \frac{3}{4}$$

болохыг батал.

IX-B1 (А.Ганбат). $n \mid xy + 1$ байх дурын натурал x ба y тоонуудын хувьд $n \mid x + y$ биелдэг байх бүх натурал n ($2 \leq n$) тоог ол.

IX-B2 (Э.Азжаргал, Д.Мөнхбаатар). ABC ($AB \neq BC$) гурвалжны AA_1, BB_1, CC_1 биссектрисүүд ба $C_1A_1 \cap CA = M$ бол ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн B цэгт татсан шүргэгч шулуун B_1M хэрчмийг хагаслан хуваахыг батал.

IX-B3 (Б.Батбаясгалан). Бүжгийн шилдэг хос шалгаруулах тэмцээнд ангийн сурагчид хос бүрдүүлж оролцов. Эрэгтэй эмэгтэй хоёр сурагч нэг хос болох бөгөөд нэг сурагч хэдэн ч хосод орж болно. Хэрэв хос бүр нэг бүжиг бүжиглэх ёстой ба сурагч бүр тэгш тооны бүжиг бүжиглэхээр байсан бол хэсэг хугацааны дараа сурагч бүр өөрийн бүжиглэх ёстой бүжгүүдийн яг хагасыг нь бүжиглэсэн байхаар хувиарь зохиож болохыг батал.

IX-A1. Олдоно.

Уг олонлогийг индукцээр байгуулъя. $n = 3$ үед $A = \{1, 2, 3\}$ олонлог бодлогын нөхцлийг хангана. $n = k$ үед бодлогын нөхцлийг хангадаг $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ олонлог олддог гэе. Тэгвэл $a_i - a_j \mid a_i + a_j$ ба $a_i - a_j \mid a_i - a_j$ гэдгээс $a_i - a_j \mid 2a_i$ ба $a_i - a_j \mid 2a_j$ гэж мөрдөнө. $p = a_1 a_2 \cdots a_k$ гэвэл $A = \{p, p + a_1, p + a_2, \dots, p + a_k\}$ олонлог бодлогын нөхцлийг хангахыг хялбар шалгаж болно.

IX-A2. BM ба NC хэрчим татъя. $\triangle ACE \sim \triangle ABD$ болох нь илэрхий. Иймд $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$ (1) байна. Мөн $\angle AMB = \angle AEM = 90^\circ$ ба $\angle EAM$ ерөнхий учир $\triangle BMA \sim \triangle MEA$ болох ба $\frac{AM}{AE} = \frac{AB}{AM}$, $AM^2 = AE \cdot AB$ (2) болно.

$\angle ANC = \angle ADN = 90^\circ$ ба $\angle NAD$ ерөнхий учир $\triangle CNA \sim \triangle NDA$ болох ба $\frac{AN}{AD} = \frac{AC}{AN}$, $AN^2 = AC \cdot AD$ (3) болно. (2) -ыг (3) -д харьцуулбал $\frac{AM^2}{AN^2} = \frac{AE \cdot AB}{AC \cdot AD}$ болох ба (1) -ийг ашиглавал $\frac{AM^2}{AN^2} = 1$ болно. Эндээс $AM = AN$ болно.

IX-A3. Өгсөн тэнцэтгэл бишийг батлахын өмнө харгалзан Коши-Буняковский болон Кошийн тэнцэтгэл биш ашиглан гарах дараах хоёр хялбар тэнцэтгэл бишийг авч үзье.

$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ -нь эерэг бодит тоонууд бол

$$\frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta} + \frac{c^2}{\gamma} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\alpha+\beta+\gamma} \quad (1)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 \quad (2)$$

тэнцэтгэл бишүүд биелнэ. $\frac{x}{y^2+y} + \frac{y}{z^2+z} + \frac{z}{x^2+x} = \frac{x^2}{y^2} \cdot$

$$\frac{y}{x(y+1)} + \frac{y^2}{z^2} \cdot \frac{z}{y(z+1)} + \frac{z^2}{x^2} \cdot \frac{x}{z(x+1)} =$$

$$= \left(\frac{x}{y}\right)^2 \cdot \frac{1}{x + \frac{x}{y}} + \left(\frac{y}{z}\right)^2 \cdot \frac{1}{y + \frac{y}{z}} + \left(\frac{z}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{z + \frac{z}{x}}$$

гэж бичээд (1) тэнцэтгэл бишийг хэрэглэвэл

$$\frac{x}{y^2+y} + \frac{y}{z^2+z} + \frac{z}{x^2+x} \geq \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}}$$

болно. (2) тэнцэтгэл бишийг ашиглавал

$$\frac{1 + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}}{\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}} = \frac{1}{\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}} + 1 \leq \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

болно. Иймд

$$\frac{x}{y^2 + y} + \frac{y}{z^2 + z} + \frac{z}{x^2 + x} \geq \frac{3}{4} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) = \frac{3}{4} \left(\frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{yz} + \frac{z^2}{zx} \right)$$

болох бөгөөд дахин (1) тэнцэтгэл бишийг хэрэглэвэл бидний батлах тэнцэтгэл биш гарна.

Баталгааны хэрэглэсэн тэнцэтгэл бишүүдээс харвал дээрх тэнцэтгэл биш $x = y = z$ үед тэнцэлдээ хүрнэ.

IX-B1 Эхлээд хоёр тооны үржвэр тогтмол үед хоёр тоо холдоход нийлбэр ихэснэ гэдгийг тэмдэглэе. $24 < n$ байг.

Хэрэв $n - 1 = xy$, $1 < x \leq y < n - 1$, $x, y \in \mathbb{Z}$ бол $1 < x + y \leq 2 + \frac{n-1}{2} < n$ болох ба эндээс $n \nmid x + y$. Иймд $n - 1$ анхны тоо.

Хэрэв $2n - 1 = xy$, $1 < x \leq y < n - 1$, $x, y \in \mathbb{Z}$ бол $x \neq 2$ болно. Эндээс $1 < x + y \leq 3 + \frac{2n-1}{3} < n$ болох ба $n \nmid x + y$. Иймд $2n - 1$ анхны тоо.

$3n - 1 = xy$, $1 < x \leq y < n - 1$, $x, y \in \mathbb{Z}$ байг. Хэрэв $x = 2$ бол $n - 1$ анхны тоо байж чадахгүй. Иймд $x \neq 2$ байна. Мөн $n - 1, 2n - 1$ анхны тоонууд гэдгээс $3 \mid n$ байна. $x \neq 3$ тул $1 < x + y \leq 4 + \frac{3n-1}{4} < n$ болох ба $n \nmid x + y$. Иймд $3n - 1$ анхны тоо.

$4n - 1 = xy$, $1 < x \leq y < n - 1$, $x, y \in \mathbb{Z}$ байг. $x \neq 2, 4$ байна. $3 \mid n$ байх тул $x \neq 3$ байна. Эндээс $1 < x + y \leq 5 + \frac{4n-1}{5} < n$ болох ба $n \nmid x + y$. Иймд $4n - 1$ анхны тоо.

$24 \leq n - 1, 2n - 1, 3n - 1, 4n - 1$ анхны тоонууд бол $5 \mid n$.

$p \equiv 2 \pmod{5}$ ба $\text{ХИЕХ}(p, n) = 1$ байх анхны тоо p -г сонгож авъя. Тэгвэл $p \cdot 1 + 1, p \cdot 2 + 1, \dots, p \cdot n + 1$ тоонууд дотор n -д хуваагдах тоо бий. Уг тоог $p \cdot k + 1$ гээ. Тэгвэл $n \mid p \cdot k + 1$ тул $5 \mid p \cdot k + 1$ гэдгээс $k \equiv 2 \pmod{5}$ байна. Эндээс $5 \nmid p + k$ тул $n \nmid p + k$. Иймд $24 < n$ үед бодлогын нөхцлийг хангах n тоо олдохгүй.

$n \leq 24$ үед $n - 1$ анхны тоо байх ёстой бөгөөд үүнийг тооцож шалгавал $n = 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ гэж гарна.

IX-B2. Эхлээд AA_1 , BB_1 ба CC_1 -ууд нь ABC гурвалжины биссектрисүүд ба $A_1C_1 \cap AC = M$ цэгт огтлолцох бол BM шулуун B оройн гадаад өнцгийн биссектрис болохыг харуулъя. ABC гурвалжин ба A_1C_1 огтлогчийн хувьд Менелейн теорем бичвэл $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$ болно. Биссектрисийн чанар ёсоор $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{CB}$, $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA}{AC}$ байна. Иймээс $\frac{CM}{MA} = \frac{A_1C}{BA_1} \cdot \frac{C_1B}{AC_1} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{CB}{AC} = \frac{CB}{AB}$ болно. Нөгөө талаас C цэгийг дайрах AB -тэй параллель шулуун BM шулуун K цэгээр огтлох бол $\triangle AMB \sim \triangle CMK$ гэдгээс $\frac{CM}{MA} = \frac{CK}{AB} \Rightarrow CK = AB \cdot \frac{CM}{MA} = AB \cdot \frac{CB}{AB} = CB$ байна. Эндээс $\angle CBK = \angle CKB$ болох ба AB шулуун CK шулуунууд параллель тул BM нь B оройн гадаад өнцгийн биссектрис болно.

Одоо үндсэн бодлогоо авч үзье. ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн B цэгт татсан шүргэгч шулуун B_1M хэрчмийг N цэгт огтолно гэж үзье. BM нь B оройн гадаад өнцгийн биссектрис гэдгээс $\angle B_1BM = 90^\circ$ болно. Улмаар $\angle CBN = \frac{\angle C}{2} = \angle BAC$ ба $\angle NBB_1 = \angle CAB + \frac{\angle ABB_1}{2} = \angle BB_1N$ болно. Иймд $BN = B_1N$ болно. Мөн $BN = NM$ болохыг хялбар харуулж болно.

IX-B3. Ангийн сурагчдыг графийн орой гээд бүжиглэх хосуудыг уг графийн ирмэгүүд гэе. Ангийн эрэгтэй сурагчдын олонлогийг A , эмэгтэй сурагчдын олонлогийг B гэвэл граф маань A , B туйлуудтай 2 туйлт граф болох ба хүн бүр тэгш тооны бүжиг бүжиглэх ёстой тул оройн зэргүүд бүгд тэгш байна. Орой бүрийн зэрэг нь тэгш байдаг холбоост граф Эйлерийн циклтэй тул манай графийн холбоост компонент бүрт бүх ирмэгийг нь агуулсан цикл олдоно. Эдгээр циклүүдийн ирмэгүүдийг улаан, хөх өнгүүдээр сөөлжлүүлэн будаж болно. Учир нь 2 туйлт графийн цикл бүр нь тэгш тооны ирмэг агуулдаг. Ингэж будахад орой бүрээс гарсан улаан ба хөх ирмэгийн тоо тэнцүү байх нь ойлгомжтой. Одоо улаанаар будагдсан ирмэгт харгалзах хосуудыг эхний ээлжинд бүжиглүүлэхэд бидний хүссэн хуваарь болж чадна.

X-A1 Дурын $1 \leq m \leq n$ натурал тоонуудын хувьд:

$$m \mid (C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^{m-1} C_n^{m-1}) \cdot n$$

болохыг батал.

X-A2 Хэсэг хүн цугларахад бусдыгаа бүгдийг таньдаг хүн ба бусдыгаа бүгдийг нь таньдаггүй хүн олддоггүй бол “холимог цугларалт” гее. Тэгвэл 5-аас олон хүнтэй холимог цугларалтаас холимог цугларалт үүсгэх 4 хүн сонгож болохыг батал. Танилууд нь бие биенээ таньдаг гэж үз.

X-A3 $\triangle ABC$ -ийн $\angle B$ -ийн биссектрисс AC талыг P цэгт, $\angle C$ -ийн биссектрисс AB талыг Q цэгт огтлоно. BP ба CQ -ийн огтлолцол I ба $IQ = IP$, $AB \neq AC$ бол $\angle OIB$ -г ол. O нь $\triangle ABC$ -г багтаасан тойргийн төв.

X-B1 Нэгэн хот n , ($n > 4$) ширхэг метроны шугамтай бөгөөд нэг буудал дээр хамгийн ихдээ 3 метроны шугам огтлолцоно. Хэрэв метроны аль ч 2 шугамыг холбосон гурав дахь шугам олддог бол уг хотод дор хаяж $\frac{5}{6}(n-5)$ ширхэг метроны буудал бий гэдгийг батал.

X-B2 Дартсын тэмцээнд 10 тамирчин оролцов. Тамирчид өөрсдийн дугаартай ижил дугаартай сумыг шидэх ба бүгд эхний шидэлтээ хийсний дараа 1 дугаартай тамирчин өөрийн сумыг байнаас авч 2, 3, 4 дугаартай сумаар үүсэх гурвалжны хүндийн төв рүү шидэж онов. Энэ мэтчилэн тамирчин бүр өөрийн ээлжинд сумаа байнаас авч өөрийнхөө дараа шидэх 3 тамирчины дугаартай ижил дугаартай сумнуудаар үүсэх гурвалжны хүндийн төв рүү шидэж онож байв. Хэзээ нэгэн цагт бүх сум 1 радиустай дугуй дотор орно гэж батал. Тамирчид өөрсдийн дугаарын дагуу тойргоор сумаа шиднэ.

X-B3 Хавтгайд нэгж талтай $ABCD$ квадрат ба P цэг өгөгдөв.

$$3AP + 5CP + \sqrt{5}(BP + DP) \geq 6\sqrt{2}$$

болохыг батал.

X-A1. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ -ийг ашиглан

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^{m-1} C_n^{m-1} = (-1)^{m-1} C_{n-1}^{m-1}$$

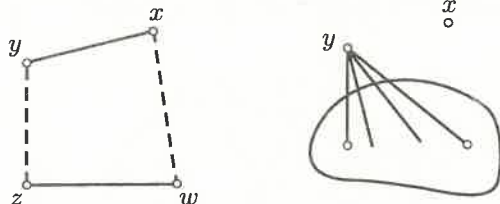
болохыг хялбархан батлаж болох тул $m \mid n \cdot C_{n-1}^{m-1}$ гэж харуулахад хангалттай. Нөгөө талаас

$$n \cdot C_{n-1}^{m-1} = \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} = m \cdot \frac{n!}{m!(n-m)!} = m \cdot C_n^m$$

тул батлах зүйл батлагдав.

X-A2. Хамгийн цөөн хүн таньдаг хүн дор хаяж нэг хүн таньдаг байна. Хамгийн цөөн хүнийг таньдаг хүнийг x гээ.

а) x нь яг нэг хүн таньдаг ба түүнийг нь y гээ. y нь бүх хүнийг таних боломжгүй тул түүний таньдаггүй z хүн олдоно. z нь бүх хүнийг таньдаггүй байх боломжгүй тул түүний таньдаг w хүн олдоно. x нь нэг хүн л таньдаг тул w байж чадахгүй иймд x , y , z , w хүмүүс холимог цугларалт үүсгэнэ. (1 дэх зураг).



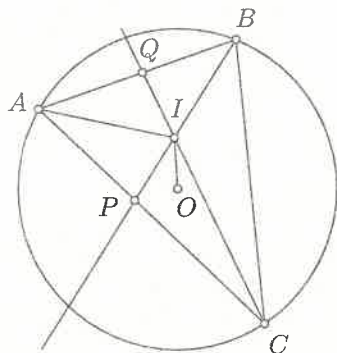
б) x нь дор хаяж 2 хүн таньдаг гээ. Тэгвэл хүн бүр дор хаяж 2 хүн танина. x -ийг хасахад үлдэх хүмүүс нь холимог цугларалт үүсгэдэг бол индукцээр холимог цугларалт үүсгэх 4 хүн олдоно. Иймд үлдэх хүмүүс нь холимог цугларалт үүсгэдэггүй гээ. Хэрэв үлдэх хүмүүс дунд бусдыгаа бүгдийг нь таньдаггүй хүн олвол түүний нийт танилын тоо 1-ээс хэтрэхгүй. (x -ийг л таних боломжтой). Энэ нь хүн бүр дорж хаяж 2 танилтай гэдэгт зөрчинө. Иймд үлдэх хүмүүс дунд бусдыгаа бүгдийг нь таньдаг y хүн олдоно (2 дахь зураг). Одоо y -ийг хасахад үлдэх хүмүүс нь холимог цугларалт үүсгэнэ гэж батлая. Хүн бүр анх 2-оос цөөнгүй хүн таньдаг байсан тул нэг хүн хасагдахад танилын

тоо дор хаяж 1 байна. Иймд үлдэх бүх хүнийг таньдаггүй хүн олдохгүй. Нөгөө талаас x -ээс ялгаатай ямар нэг хүн бусдыгаа таньдаг гэвэл тэр нь y -тэй ч мөн адил танил тул анх холимог цугларалт үүсгээгүй болоход хүрнэ. Хэрэв x нь y -ээс бусад бүх хүнийг таньдаг гэвэл бүх хүн нэгээс бусад бүх хүнийг таньдаг болно. Энэ тохиолдолд холимог цугларалт үүсгэх 4 хүн олдох нь ойлгомжтой.

Х-А3. $\triangle AQI$ ба $\triangle API$ -ийн хувьд синусын теорем бичвэл

$$\frac{\sin(\angle IPA)}{AI} = \frac{\sin(\angle IAP)}{IP} = \frac{\sin(\angle IAQ)}{IQ} = \frac{\sin(\angle AQI)}{AI}$$

учир $\sin \angle IPA = \sin \angle AQI$, $AB \neq AC$ тул $\angle B \neq \angle C$ учир $\angle IPA \neq \angle AQI$ иймд $\angle IPA = \pi - \angle AQI$, $\angle IPA = \beta/2 + \gamma$, $\angle AQI = \beta + \gamma/2$ -г тооцвол $\beta/2 + \gamma = \pi - \beta - \gamma/2$ буюу $\frac{3}{2}(\beta + \gamma) = \pi \Rightarrow \beta + \gamma = 120^\circ$ тул $\angle A = 60^\circ$. $\angle BOC = 120^\circ$, $\angle CIB = \pi - \beta/2 - \gamma/2 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Иймд $IBCO$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. $\angle OIB = 120^\circ + \angle OIC = 120^\circ + \angle OBC = 120^\circ + \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 150^\circ$.



Х-В1. Метроны шугамууд тус бүр $l_1, \dots, l_n$ ширхэг буудалтай ба нийт буудлын тоог l гэе. Шугам ба түүний буудал гэсэн хосын тоо нь нэг талаас $l_1 + \dots + l_n$ болох ба нөгөө талаас $3l$ -ээс хэтрэхгүй. Иймд

$$\frac{l_1 + \dots + l_n}{3} \leq l$$

байна. Шугам бүр дор хаяж 3 буудалтай гэвэл $n \leq l$ болно. Иймд 1-р шугам нь 2 буудалтай гэе (шугам бүр нь дор хаяж 2 буудалтай гэдгийг харуулахад төвөггүй). Тэгвэл энэ шугамтай өөр дөрвөн л буудал огтлолцох боломжтой (буудал бүрт нь 2-оос хэтрэхгүй). Бусад шугамуудаас 1-р шугам руу дамжихийн тулд дээрх 4 шугамтай огтлолцдог байх ёстой. Нэг буудал дээр 3-аас олон шугам огтлолцох боломжгүй тул үлдэх $n - 5$ буудал нь дээрх 4 шугамтай дор хаяж $\frac{n-5}{2}$ ширхэг буудлаар огтлолцоно. Өөрөөр хэлбэл дээрх 4 шугамд дор хаяж $\frac{n-5}{2}$ буудал бий. Үлдэх $n - 5$ буудал нь тус бүрдээ ядаж хоёр буудалтай тул

$$\frac{n-5}{2} + 2(n-5) + 2 \leq l_1 + \dots + l_n$$

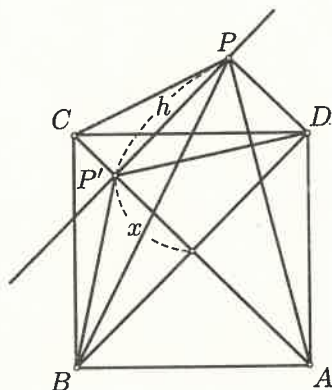
болно. Иймд $\frac{5}{6}(n-5) < l$ болов.

Х-В2. XI ангийн В2 бодлогыг үз.

Х-В3. P цэгийн AC шулуун дээр проекцийг P' ба $PP' = h$, квадратын төвөөс P' хүртэлх зайг x гэе. Эхлээд

$$3AP + 5CP + \sqrt{5}(BP + DP) \geq 3AP' + 5CP' + \sqrt{5}(BP' + DP')$$

болохыг батлая. $AP \geq AP'$, $CP \geq CP'$ байх нь илэрхий.



$BP + DP \geq BP' + DP'$ гэж харуулъя.

$$BP + DP = f(h) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + h\right)^2} + \sqrt{x^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - h\right)^2}$$

гэвэл $f'(h) = 0 \Rightarrow h = 0$ тул $\min f = f(0) = 2\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}} = BP' + DP'$ болно.

Иймд AC диагональ дээр орших P цэгийн хувьд буюу $P = P'$ үед тэнцэтгэл бишийг батлахад хангалттай.

$g(x) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + x\right) + 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right) + 2\sqrt{5}\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}}$ функцийг авч үзье ($P = P'$ үед тэнцэтгэл бишийн зүүн тал ингэж бичигдэнэ).

$$g'(x) = -2 + \frac{2\sqrt{5}x}{\sqrt{x^2 + 0.5}} = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

тул $\min g = g\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = 6\sqrt{2}$ болж батлах тэнцэтгэл биш батлагдав.

X-A1 (Ч.Гантөмөр). a, b, c нь эерэг бодит тоонууд бол

$$\frac{1}{a+b+c} \cdot \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq \frac{1}{ab+ac+bc} + \frac{1}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

тэнцэл биш биелэхийг батал.

X-A2 (Э.Азжаргал, Д.Мөнхбаатар). ABC гурвалжинд багтсан тойрог AB талыг D цэгт шүргэдэг. E нь AC тал дээр орших цэг бол ADE, BDE, BCE гурвалжнуудад багтсан тойргуудад нэг ерөнхий шүргэгч олдохыг батал.

X-A3 (У.Батзориг). $A \subset \{1, 2, \dots, 2n\}$ байг. $|A| = n$ ба $a, b \in A$ хувьд $a \nmid b$ байдаг байг. X -дэд олонлогийн хамгийн бага элементийг m_X гэе. Тэгвэл m_A -ийн хамгийн бага утгыг ол? (Дээрх нөхцлийг хангах бүх A -ийн хувьд).

X-B1 (У.Батзориг, Э.Азжаргал). a, n нь $a|2n^2$ байх натурал тоонууд бол $n^2 + a$ нь бүтэн квадрат биш гэж батал.

X-B2 (Д.Батнасан, У.Батзориг). Хавтгай дээр A_1, A_2, A_3, A_4, P цэгүүд өгөгджээ. B_1, B_2, B_3, B_4 цэгүүд нь харгалзан PA_1, PA_2, PA_3, PA_4 хэрчмүүд дээр оршиж байг. $C_{12} = A_1B_2 \cap A_2B_1, C_{13} = A_1B_3 \cap A_3B_1, C_{14} = A_1B_4 \cap A_4B_1, C_{23} = A_2B_3 \cap A_3B_2, C_{24} = A_2B_4 \cap B_2A_4, C_{34} = A_3B_4 \cap B_3A_4$ гэж тус тэмдэглэе. $C_{12}C_{34}, C_{13}C_{24}, C_{14}C_{23}$ -ууд нь нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.

X-B3 (Ш.Батхишиг). Таван асуулттай, асуулт бүр дөрвөн сонголттой байх тестээр 2008 оюутныг шалгажээ. Оюутан бүр асуулт тус бүрийн нэг сонголтыг сонгоно. Тестийг хурааж авсны дараа дурын n оюутны дотроос аль ч хоёр оюутан ядаж хоёр асуултанд ялгаатайгаар хариулсан байх дөрвөн оюутныг сонгож болохыг ажиглажээ. Тэгвэл n -ын хамгийн бага утгыг ол.

X-A1. (С.Дөлгөөний бодолт)

$$A = \frac{1}{a+b+c} \cdot \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq \frac{1}{ab+ac+bc} + \frac{1}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

$$A \geq \frac{1}{2(ab+ac+bc)} + \frac{1}{2(ab+ac+bc)} + \frac{1}{2(a^2+b^2+c^2)} \quad (a \geq b \geq c)$$

гэж эрэмбэлэе.

$$\alpha_1 = (a+b+c)(a+b) \quad \beta_1 = 2(ab+ac+bc)$$

$$\alpha_2 = (a+b+c)(a+c) \quad \beta_2 = 2(ab+ac+bc)$$

$$\alpha_3 = (a+b+c)(b+c) \quad \beta_3 = 2(a^2+b^2+c^2)$$

гэж сонгоод, $f(x) = \frac{1}{x}$ функц хотгор тул Караматын тэнцэтгэл биш ёсоор $f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + f(\alpha_3) \geq f(\beta_1) + f(\beta_2) + f(\beta_3)$ болно. Одоо Караматын нөхцөл биелэх эсэхийг шалгая, биелвэл манай бодлого бодогдоно.

$$\alpha_1 \geq \beta_1 : (a+b+c)(a+b) \geq 2(ab+ac+bc)$$

$$a^2 + b^2 + 2ab + ac + bc \geq 2ab + 2ac + 2bc$$

$$a^2 + b^2 \geq ac + bc \quad a^2 \geq ac$$

$$b^2 \geq bc \quad \blacktriangle$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq \beta_1 + \beta_2 : (a+b+c)(a+b) + (a+b+c)(a+c) \geq 4(ab+ac+bc)$$

$$2a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3ac + 2bc \geq 4ab + 4ac + 4bc$$

$$2a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + 2bc \quad b^2 + c^2 \geq 2bc$$

$$a^2 + a^2 \geq ab + ac \quad a^2 \geq ab \quad a^2 \geq ac \quad \blacktriangle$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 :$$

$$(a+b+c)((a+b)+(a+c)+(b+c)) = 4(ab+bc+ca) + 2(a^2+b^2+c^2)$$

$$2(a+b+c)^2 = 2(a+b+c)^2 \quad \blacktriangle$$

$$f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + f(\alpha_3) \geq f(\beta_1) + f(\beta_2) + f(\beta_3) :$$

$$\left(\frac{1}{(a+b+c)(a+b)} + \frac{1}{(a+b+c)(b+c)} + \frac{1}{(a+b+c)(c+a)} \right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2(ab+ac+bc)} + \frac{1}{2(ab+ac+bc)} + \frac{1}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

$$\frac{1}{a+b+c} \cdot \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq \frac{1}{ab+ac+bc} + \frac{1}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

Тэнцэлдээ хүрэх нөхцөл нь $a = b = c$.

Х-А2. (Энхзаяагийн бодолт:) $\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ нь харгалзан ABC, AED, DEB, BEC гурвалжнуудад багтсан тойргууд байг. $\ell(\omega_1, \omega_2)$ нь ω_1, ω_2 тойргуудын B_2A_3 -ээс ялгаатай дотоод ерөнхий шүргэгч байг. $\ell(\omega_1, \omega_2) = |B_2A_3|$ $\ell(\omega_2, \omega_3)$ нь ω_2, ω_3 тойргуудын B_3C_1 -ээс ялгаатай дотоод ерөнхий шүргэгч байг. $\ell(\omega_2, \omega_3) = |B_3C_1|$ $\ell(\omega_3, \omega_1)$ нь ω_3, ω_1 тойргуудын A_2C_2 -ээс ялгаатай дотоод ерөнхий шүргэгч байг. $\ell(\omega_3, \omega_1) = |A_2C_2|$ болно. $\ell(\omega_1, \omega_2) + \ell(\omega_2, \omega_3) = \ell(\omega_1, \omega_3)$ батлахад хангалттай. $B_3C_1 + B_2A_3 = A_2C_2$ гэж харуулъя.

$B_2A_3 + B_3C_1 = DA_3 - DB_2 + BC_1 - B_3B = DA_1 - B_1D + BC_3 - BB_1 = A_2M - B_1D + BN + NC_3 - BB_1 = A_2M + NC_3 + BN - B_1D - B_1B = A_2M + MC_2 + BD - DB = A_2C_2$ болно.

Х-А3. $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ олонлогийг $P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$ гэсэн n ширхэг олонлогт хуваая. P_a нь $a \in \mathbb{N}, 2^b(2a-1)$ (b -сөрөг биш бүхэл тоо) хэлбэрийн бүх тоонуудаас тогтоно гэе. $\forall i \neq j, i, j \in \mathbb{N} \Rightarrow 2^m(2i-1) \neq 2^n(2j-1)$ ($m \neq n$) байх тул $P_i \cap P_j = \emptyset$ болно. Мөн A нь нэг хэсгээс хоёр элемент агуулахгүй. Эсрэг тохиолдолд нэг нь нөгөөгөө хуваадаг хоёр элемент олдоход хүрнэ. Иймд A нь олонлог бүрээс яг нэг нэг элемент агуулна. t_a -аар A -ийн P_a -д ордог элементийг тэмдэглэе.

Мөн

$$3^k < 2n < 3^{k+1} \quad (1)$$

байдаг гэе. ($k \in \mathbb{N}$) тэгвэл $t_{\frac{3^0+1}{2}}, t_{\frac{3^1+1}{2}}, \dots, t_{\frac{3^k+1}{2}}$ гэсэн $k+1$ ширхэг элементүүдийг авч үзье. Эдгээр нь зөвхөн 3 ба 2-ийн зэрэгтээс тогтоно гэдэг нь t_a -ийн хэлбэрээс харагдаж байна. $t_{\frac{3^0+1}{2}}$ -ийг хуваадаг 2-ийн хамгийн их зэрэг нь $t_{\frac{3^1+1}{2}}$ -ийг хуваадаг 2-ийн хамгийн их зэрэгтээс их байх ёстой. (Учир нь $t_{\frac{3^0+1}{2}} \mid t_{\frac{3^1+1}{2}}$ -д хүрж бодлогийн нөхцөлд харшилна.) $x \in \mathbb{N}$ -ийг хуваадаг 2-ийн хамгийн их зэрэгтийг $v(x)$ гэе. $\Rightarrow v(t_{\frac{3^0+1}{2}}) > v(t_{\frac{3^1+1}{2}}) > \dots > v(t_{\frac{3^k+1}{2}}) \geq 0 \Rightarrow v(t_{\frac{3^0+1}{2}}) \geq k \Rightarrow t_{\frac{3^0+1}{2}} \geq 2^k$ болох юм. Мөн адилаар,

хэрэв $\frac{2n}{3} < 3^b(2a-1) < 2n$ бол

$$t_a \geq 2^b(2a-1) \quad (2)$$

байхыг харж болно. (Учир нь $(2a-1)$ -ыг 3-ын зэрэгтээр үржүүлсэн хэлбэрийн сондгой хуваагчтай гишүүдийг авч үзье. Эдгээр тоонууд нь $3^0(2a-1), 3^1(2a-1), \dots, 3^b(2a-1)$ гэсэн хуваагчидтай ба тухайлбал $2^t \cdot 3^0(2a-1), 2^s \cdot 3^1(2a-1)$ тоонуудын хувьд $t > s$ байх л боломжтой юм. Иймд дээрх тоонуудыг хуваах 2-ийн хамгийн их зэрэг нь эрс буурах дараалал болно. $\Rightarrow v(t_a) \geq b \Rightarrow t_a \geq 2^b(2a-1)$).

Одоо $t_a < 2^k$ байг. $\Rightarrow \frac{2n}{3} < 3^b(2a-1) \stackrel{(2)}{\leq} \left(\frac{3}{2}\right)^b t_a < 2^k \left(\frac{3}{2}\right)^b \Rightarrow \frac{2n}{3} < 2^k \left(\frac{3}{2}\right)^b$ болно. $\Rightarrow 2^k \left(\frac{3}{2}\right)^b > \frac{2n}{3} \stackrel{(1)}{>} 3^{k-1} \Rightarrow$

$$2^{k-b} > 3^{k-b-1} \quad (3)$$

болно. Хэрэв $k > b$ бол (3) худал болно. $\Rightarrow b \geq k-1$ гэж гарна. $\Rightarrow 2^k > t_a = 2^b(2a-1) \geq 2^{k-1}(2a-1)$ гэсэн давхар тэнцэтгэл биш гарна. Эндээс $2^k \geq 2^{k-1}(2a-1) \Rightarrow 2 \geq 2a-1 \Rightarrow \frac{3}{2} \geq a \Rightarrow a=1$ болно. $\Rightarrow t_a = 2^b$ гэвч $2^b < 2^k$ болоход хүрч $b \geq k-1$ -д зөрчив. Иймд A -ийн дурын элемент нь 2^k -аас багагүй.

$m_A = 2^k$ болохыг харуулъя. $t_a = 2^{f(a)}(2a-1)$ (Энд $f(a)$ нь $\frac{2n}{3} < 3^{f(a)}(2a-1) < 2n$ байх натурал тоо) байхаар байгуулъя. Энэ нь бодлогын нөхцөл хангахыг харуулъя.

Эсрэгээс нь $x, y \in \mathbb{N} : 2^{f(x)}(2x-1) \mid 2^{f(y)}(2y-1)$ байг $\Rightarrow$
 $\begin{cases} f(y) \geq f(x) \\ 2x-1 \mid 2y-1 \end{cases} \quad (4) \quad \text{байх ёстой.} \Rightarrow 2y-1 \geq 3(2x-1)$
 $\Rightarrow 3^{f(x)+1}(2x-1) > 2n > 3^{f(y)}(2y-1) \geq 3^{f(y)+1}(2x-1) \Rightarrow f(x) > f(y)$ болж (4)-д зөрчив. Иймд хариу: $3^k < 2n < 3^{k+1}$ ($k \in \mathbb{N}$) байх k -ийн хувьд 2^k байна. ▼

X-B1. a - сондгой үед $a \mid n^2 \Rightarrow n^2 = ak \Rightarrow a + n^2 = a + ak = a(k+1)$. Хэрэв ямар нэг p -ийн a -г хуваадаг хамгийн их зэрэг нь сондгой бол $\Rightarrow ak = n^2 \Rightarrow p \mid k \Rightarrow p \nmid k+1 \Rightarrow a(an+1)$ нь бүтэн

квадрат биш.

$$a = 2b \text{ гэе. } \Rightarrow b \mid n^2 \Rightarrow n^2 = b \cdot s \Rightarrow a + n^2 = 2b + bs = b(s + 2).$$

Өмнөхтэй адилаар ямар нэг сондгой p анхны тооны хувьд b -г хуваадаг хамгийн их зэрэг нь тэгш $\Rightarrow b = 2^m \cdot c^2 \Rightarrow b$

b нь бүтэн квадрат байж болохгүй тул $2 \nmid m \Rightarrow b = 2 \cdot \ell^2 \Rightarrow s = 2 \cdot r^2 \Rightarrow 2\ell^2(2r^2 + 2) = 4\ell^2(r^2 + 1)$ нь бүтэн квадрат биш.

$$\text{X-B2. } a_1 = \frac{PB_1}{B_1A_1}, a_2 = \frac{PB_2}{B_2A_2}, a_3 = \frac{PB_3}{B_3A_3}, a_4 = \frac{PB_4}{B_4A_4}$$

гэе. Хавтгайн $\vec{OX}, \vec{OY}, \vec{OZ}$ (Энд O, X, Y, Z дурын цэгүүд) хувьд $\vec{OX} = \lambda \cdot \vec{OY} + \mu \cdot \vec{OZ} \quad \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ болдгийг санаж. Үүнийг цаашид

хялбараар $X = \lambda \cdot Y + \mu \cdot Z$ гэж бичье. $a_1 = \frac{PB_1}{B_1A_1} \Rightarrow B_1 =$

$$\frac{a_1A_1 + P}{a_1 + 1}, \frac{a_1A_1 + a_2A_2 + P}{a_1 + a_2 + 1} \text{ цэгийг авч үзье.}$$

$$\frac{a_1A_1 + a_2A_2 + P}{a_1 + a_2 + 1} = \frac{(a_1 + 1) \cdot \frac{a_1A_1 + P}{a_1 + 1} + a_2A_2}{a_1 + a_2 + 1} = \frac{(a_1 + 1)B_1 + a_2A_2}{(a_1 + 1) + a_2}$$

$\Rightarrow \frac{a_1A_1 + a_2A_2 + P}{a_1 + a_2 + 1}$ цэг нь B_1A_2 дээр оршино. Үүнтэй адилаар:

уг цэг нь A_1B_2 дээр оршихыг харж болно.

Иймд $\frac{a_1A_1 + a_2A_2 + P}{a_1 + a_2 + 1}$ цэг нь A_2B_1 ба A_1B_2 -ийн огтлол дээр оршино.

Иймд $C_{12} = \frac{a_1A_1 + a_2A_2 + P}{a_1 + a_2 + 1}$ болно. Үүнтэй адилаар

$$C_{34} = \frac{a_3A_3 + a_4A_4 + P}{a_3 + a_4 + 1} \text{ болно.}$$

$$Q = \frac{a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + a_4A_4 + 2P}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 2}$$

-ийн хувьд

$$\begin{aligned} Q &= \frac{(a_1A_1 + a_2A_2 + P) + (a_3A_3 + a_4A_4 + P)}{(a_1 + a_2 + 1) + (a_3 + a_4 + 1)} = \\ &= \frac{(a_1 + a_2 + 1)C_{12} + (a_3 + a_4 + 1)C_{34}}{(a_1 + a_2 + 1) + (a_3 + a_4 + 1)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{C_{12}Q}{QC_{34}} = \frac{a_3 + a_4 + 1}{a_1 + a_2 + 1} \right) \quad Q \in C_{12}C_{34} \text{ болно.}$$

Үүнтэй адилаар $Q \in C_{13}C_{24}$ ба $Q \in C_{14}C_{23}$ гэж баталж болно.

$$\Rightarrow Q = C_{12}C_{34} \cap C_{13}C_{24} \cap C_{14}C_{23} \quad \blacktriangle$$

Х-ВЗ. n - ын хамгийн бага утга нь 25.

Сонгох хариуг 1,2,3,4 гэе. Оюутны тестийг хариулсан хариуг (a, b, c, d, e) гэж тэмдэглэе. Энд $a, b, c, d, e \in \{1, 2, 3, 4\}$ байна.

$$\{(1, b, c, d, e), (2, b, c, d, e), (3, b, c, d, e), (4, b, c, d, e)\},$$

$$b, c, d, e \in \{1, 2, 3, 4\}$$

дөрвөн элементтэй дэд олонлогуудыг авч үзье. Ийм чанартай ялгаатай дэд олонлогууд нийт 256 ширхэг байна. $2008 > 256 \times 7 = 1792$ байх тул ямар нэгэн A дэд олонлогт бүгд орох найман ширхэг 5-т олдоно. Эдгээр 5-тууд нь оюутны тестийн сонголтыг илэрхийлэх тул $A_1, A_2, \dots, A_8$ оюутнуудын хариулт гэе. Энэ найман оюутныг хасахад үлдэх 2000 оюутны хувьд тестийн сонголт нь ямар нэгэн B дэд олонлогт бүгд орох $B_1, B_2, \dots, B_8$ оюутнууд олдоно. Дээрхтэй адилаар тестийн сонголт нь ямар нэг C олонлогт орох $C_1, C_2, \dots, C_8$ оюутнууд олдоно. Эдгээр 24 оюутнуудаас дурын дөрвөн оюутныг сонгоход аль нэг хоёр оюутны тестийн сонголт нь A, B ба C дэд олонлогуудын нэгэнд орно. Тэдгээр оюутнууд нь A_1 ба A_2 гэж үзэж болно. Тэгвэл A_1 ба A_2 оюутны тестийн сонголт зөвхөн эхний асуултын хувьд л ялгаатай байж болно. Энэ нь бодлогын шаардлагыг хангахгүй. Иймд $n \geq 25$ болно.

$$D = \{(a, b, c, d, e) \mid a + b + c + d + e \equiv 0 \pmod{4},$$

$$a, b, c, d, e \in \{1, 2, 3, 4\}\}$$

байх тестийн хариултуудын олонлогийн авч үзье. $|D| = 256$ ба D олонлогийн аливаа хоёр 5-т бүр ядаж хоёр байраараа ялгагдана. D олонлогоос таван элементийг хасахад үлдэх 251 ширхэг хос бүрт харгалзах тестийн сонголтыг сонгосон найман оюутан байсан гэе ($251 \times 8 = 2008$ оюутан). Тэгвэл $25 = 3 \times 8 + 1$

байх тул дурын 25-н оюутнуудаас тестийн сонголтууд нь (5-тууд) өөр хоорондоо ялгаатай байх дөрвөн оюутныг сонгож чадна. Энэ ялгаатай 5-тууд нь ядаж хоёр байраараа ялгагдана. Иймд $n = 25$ байна.

ММО-43, XI АНГИЙН III ДАВАА

Б. Батбаясгалан

XI-A1 Тус бүрдээ n сурагчтай гурван сургуулийн сурагч бүр нөгөө хоёр сургуулиас нийт $n + 1$ сурагчтай найз. Тэгвэл аль ч хоёр нь хоорондоо найз, өөр өөр сургуульд сурдаг гурван сурагч олдоно гэж батал.

XI-A2 x , y эерэг бодит тоонуудын геометр дундаж нь g байг. Хэрэв $g \geq 3$ бол

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} \geq \frac{2}{\sqrt{1+g}},$$

харин $g \leq 2$ бол

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+g}}.$$

болохыг тус тус батал.

XI-A3 P нь $\triangle ABC$ гурвалжны багтаасан тойргийн BC нум дээр орших дурын цэг (A ба P нь BC талын 2 талд оршино). $\triangle PAB$ ба $\triangle PCA$ -д багтсан тойргийн төвүүд ба P цэгийг дайрсан тойргууд (P цэг BC нум дээгүүр хөдлөхөд олон тойрог үүснэ) бүгд ерөнхий цэгтэй гэж батал.

XI-B1 $k \geq 3$ натурал тоо бөгөөд $n > C_k^3$. a_i , b_i , c_i , ($1 \leq i \leq n$) нь $3n$ ширхэг ялгаатай бодит тоонууд байг. Тэгвэл $a_i + b_i$, $a_i + c_i$, $b_i + c_i$ тоонуудаас $k + 1$ ялгаатай тоо сонгож болохыг батал. $n = C_k^3$ тохиолдолд дээрх өгүүлбэр биелэх албагүйг харуул.

XI-B2 Дартсын тэмцээнд n , ($n \geq 4$) тамирчин оролцов. Тамирчид өөрсдийн дугаартай ижил дугаартай сумыг шидэх ба бүгд эхний шидэлтээ хийсний дараа 1 дугаартай тамирчин өөрийн сумыг байнаас авч 2, 3, 4 дугаартай сумаар үүсэх гурвалжны хүндийн төв рүү шидэж онов. Энэ мэтчилэн тамирчин бүр өөрийн ээлжинд сумаа байнаас авч өөрийнхөө дараа шидэх 3 тамирчины дугаартай ижил дугаартай сумнуудаар үүсэх гурвалжны хүндийн төв рүү шидэж онож байв. Хэзээ нэгэн цагт бүх сум 1 радиустай дугуй дотор орно гэж батал. Тамирчид өөрсдийн дугаарын дагуу тойргоор сумаа шиднэ.

XI-B3 l нь $\triangle ABC$ -ийн BC талын дундажийг дайрсан периметрийг хагаслан хуваах шулуун байг. $AB < AC$ ба l -тэй параллель, $\triangle ABC$ -ийн талбайг хагаслан хуваах шулуун BC талыг E цэгт огтолдог бол

$$\frac{CE}{EB} = \frac{AC}{\sqrt{2(AC + AB)AC} - AC}$$

байна гэж батал.

XI-A1. I сургуулийн ямар нэг x сурагч авч үзье. x нь II сургуулийн k сурагчтай, III сургуулийн $n - k + 1$ сурагчтай найз гээ. x -тэй найз II сургуулийн y сурагчийг авч үзье. Энэ сурагч маань x -ийн ямар нэг найзтай найз бол бие биеэ таньдаг 3 сурагч олдоно. Иймд ийм биш гээ. Тэгвэл y нь III сургуулиас хамгийн ихдээ $n - (n - k + 1) = k - 1$ сурагч л таних боломжтой. Эндээс хэрэв бие биеэ таньдаг 3 сурагч олдохгүй бол сурагчдын аль нэг сургуулиас таньдаг сурагчдийн тоог багасгаад байх боломжтой болж байна. Гэтэл энэ нь боломжгүй юм.

XI-A2. Тэнцэтгэл бишид ерөнхий хувиар өгч хоёр талыг нь квадрат зэрэгт дэвшүүлбэл

$$(1 + g)(2 + x + y + 2\sqrt{(1 + x)(1 + y)}) \text{ ба } 4(1 + x)(1 + y)$$

илэрхийллүүдийг жиших хэрэгтэй болно.

$$a = \frac{x+y}{2} \text{ ба } t = \sqrt{(1+x)(1+y)} = \sqrt{1+2a+g^2}$$

$a \geq g$ тул $t \geq \sqrt{1+2g+g^2} = 1+g$ (*) байна.

$g \geq 3$ үед $(1+g)(1+a+t) \geq 2t^2$ тэнцэтгэл бишийг батлах шаардлагатай.

(*)-оос $(1+g)t \geq (1+g)^2$ болох тул

$$(1+g)(1+a) + (1+g)^2 \geq 2 + 4a + 2g^2$$

гэж батлахад хангалттай. Хаалтыг задлаад эмхтгэвэл $-g^2 + ag - 3a + 3g = (g-3)(a-g) \geq 0$ болно. Сүүлийн тэнцэтгэл биш $g \geq 3$ үед үнэн тул тэнцэтгэл биш батлагдав.

$g \leq 2$ бол $(1+g)(1+a) + (1+g)t \leq 2t^2$ (**) тэнцэтгэл бишийг батлах шаардлагатай. Өмнөхтэй төстэйгээр $(2-g)(a-g) \geq 0$ тэнцэтгэл бишийг гаргаж авч үзье. Үүнийг задлаж эмхтгэвэл $t^2 \geq 1+2g+ag$ болно. Үүнийг ашиглан (**) -ийн баруун талыг доороос нь үнэлбэл $t^2 + (1+2g+ag) \leq 2t^2$ болно. Иймд (**) -ийн оронд

$$(1+g)(1+a) + (1+g)t \leq t^2 + 1 + 2g + ag \quad (**)'$$

тэнцэтгэл бишийг батлахад хангалттай. Үүнийг хялбарчилбал

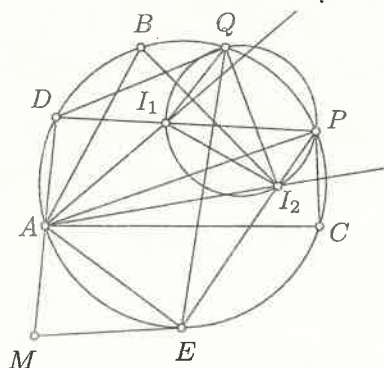
$$(1+g)t \leq t^2 - a + g = 1 + a + g + g^2 \quad (***)$$

болно. Үүнийг Кошийн тэнцэтгэл биш ашиглан хялбархан баталж болно.

$$(1+g)t \leq \frac{(1+g)^2 + t^2}{2} = 1 + a + g + g^2$$

Бодолтоос зөвхөн $x = y$ үед тэнцэл биелэх нь гарна.

XI-A3. D ба E нь харгалзан AB ба AC нумын дундаж, I_1 ба I_2 нь харгалзан $\triangle ABP$ ба $\triangle ACP$ -д багтсан тойргийн төвүүд байг. Q нь $\triangle ABC$ -г багтаасан тойрог ба $\triangle PI_1I_2$ ийг багтаасан тойргийн P ээс ялгаатай огтлолцолын цэг нь байг. M нь AD ийн үргэлжлэл дээр авсан $AD = AM$ байх цэг байг.



$\angle I_1 Q I_2 = \angle I_1 P I_2 = \angle D P E = \angle D Q E$ байна. Мөн PQ нумд тулсан өнцгүүд тул $\angle Q E I_2 = \angle Q D I_1$. Эндээс $\triangle Q E I_2 \sim \triangle Q D I_1$ болно. Иймд $\frac{Q I_2}{Q I_1} = \frac{Q E}{Q D}$ болно. Мөн $\angle I_1 Q I_2 = \angle D Q E$ болохыг тооцвол $\triangle I_1 Q I_2 \sim \triangle D Q E$ болно.

$\angle E A I_2 = \frac{\angle A P C + \angle P A C}{2} = \angle A I_2 E$ тул $A E = E I_2$ байна. Үүнтэй адилаар $D I_1 = D A = A M$ болно. $\frac{Q I_2}{Q I_1} = \frac{E I_2}{D I_1} = \frac{A M}{A E}$ Мөн $\angle M A E = \angle D P E = \angle I_1 Q I_2$ учраас $\triangle I_1 Q I_2 \sim \triangle D Q E \sim \triangle M A E$ болно.

P цэг BC нумаар гүйхэд D, E, M цэгүүд тогтмол байна. $\triangle D Q E \sim \triangle M A E$ тул Q цэг ч тогтмол байна. Энэ нь $I_1 P I_2$ -г багтаасан тойргууд бүгд Q гэсэн тогтмол цэгт огтлолцоно гэсэн үг.

XI-B1. Эсрэгээс нь $a_i + b_i, a_i + b_i, b_i + c_i$ хэлбэрийн тоонуудаас хамгийн ихдээ k ялгаатай тоо сонгож болдог гээд эдгээр тоонуудын олонлогийг T гэе. Дурын $1 \leq i \leq n$ -ийн хувьд $a_i + b_i, a_i + b_i, b_i + c_i$ тоонууд хос хосоороо ялгаатай тул T -ийн ямар нэг 3 элементтэй дэд олонлогийг үүсгэнэ. Нөгөө талаас $a_i + b_i = x, a_i + c_i = y, b_i + c_i = z$ гэвэл $a_i = (x + y - z)/2, b_i = (x + z - y)/2, c_i = (y + z - x)/2$ болох тул $\{x, y, z\}$ дэд олонлог нь $\{a_i, b_i, c_i\}$ олонлогийг нэг утгатай тодорхойлно. Иймд

$$C_{|T|}^3 \leq C_k^3 < n$$

болох тул $\{a_i, b_i, c_i\} = \{a_j, b_j, c_j\}$ байх $1 \leq i < j \leq n$ индексүүд олдох болж зөрчил үүсэв.

Нөгөө талаас $T = \{4, \dots, 4^k\}$ ба $n = C_k^3$ гэе. T -ийн 3 элементтэй дэд олонлогууд нь $T_1, T_2, \dots, T_n$ ба $T_i = \{4^u, 4^v, 4^w\}$, $1 \leq u < v < w \leq k$ гэвэл $\{a_i, b_i, c_i\} = \{(4^u + 4^v - 4^w)/2, (4^u + 4^w - 4^v)/2, (4^v + 4^w - 4^u)/2\}$ болох ба натурал тоонууд нь 4-тийн тооллын системд нэг утгатай бичигдэнэ гэдгээс эдгээр тоонууд нь хоорондоо ялгаатай гэдэг нь гарна.

XI-B2. Хавтгайд тэгш өнцөгт координатын систем сонгож авбал. (x_l, y_l) -ээр l дэх удаад шидэгдсэн сумны байрлалыг тэмдэглэе. (x_A, y_A) , (x_B, y_B) , (x_C, y_C) цэгүүд дээр оройтой гурвалжны хүндийн төвийн координат нь:

$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

тул x_m , $m = 1, 2, \dots$ дарааллын хувьд $3x_{m+n-1} = x_{m+2} + x_{m+1} + x_m$ (*) гэсэн рекурент харьцаа биелэнэ. Энэ харьцааны характеристик тэгшитгэл нь:

$$3x^{n-1} - x^2 - x - 1 = 0$$

болно. Энэ тэгшитгэлийн дурын 1-ээс ялгаатай шийд α -ийн хувьд $|\alpha| < 1$ болохыг хялбархан харж болох бөгөөд 1 нь давхар язгуур болохгүй (Математикийн мэргэжлийн курс II, 60-р хуудас өгүүлбэр 1). Нөгөө талаас $g(m)\alpha^m$, $|\alpha| < 1$ хэлбэрийн дарааллын хязгаар 0 (үүнд $g(m)$ нь дурын олон гишүүнт бөгөөд α нь комплекс байж болно) байдаг.

(*) рекурент харьцааны ерөнхий шийд нь онол ёсоор:

$$x_m = \sum g_i(m)\alpha_i^m$$

хэлбэртэй байна (Математикийн мэргэжлийн курс II, 100-р хуудас теорем 1-ийг үзнэ үү). 1 нь характеристик олон гишүүнтийн давхардаагүй язгуур тул үүнийг

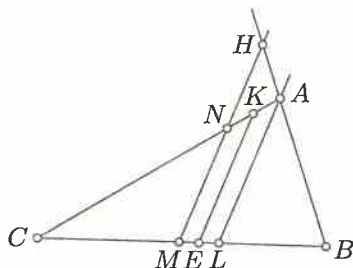
$$x_m = a + \sum p_i(m)\alpha_i^m, |\alpha_i| < 1$$

хэлбэртэй бичиж болох тул x_m дараалал a хязгаартай болж байна. y_m дарааллын хувьд төстэйгээр:

$$y_m = b + \sum q_i(m)\beta_i^m, |\beta_i| < 1$$

болох бөгөөд эндээс (x_m, y_m) цэгүүд нь (a, b) цэг рүү нийлэх нь харагдаж байна. Өөрөөр хэлбэл тодорхой нэг N дугаараас хойш сумнууд маань (a, b) цэгт төвтэй 1 радиустай дугуй руу шидэгдэнэ.

XI-B3. BC талын дундажыг дайруулан $\angle CAB$ -ийн биссектрисстэй параллел шулуун татъя. Уг шулууны AC -тэй огтлолцсон цэг N , AB -тэй огтлолцсон цэг H гээ. Тэгвэл $\angle NHA = \angle HNA$ болно.



$\triangle MHB$ ба $\triangle CMN$ -ийн хувьд синусын теорем бичвэл

$$\frac{\sin(\angle HMB)}{HB} = \frac{\sin(\angle MHB)}{MB} = \frac{\sin(\angle CNM)}{MC} = \frac{\sin(\angle CMN)}{CN}$$

$\sin(\angle HMB) = \sin(\angle CMN)$ тул $HB = CN$, $AN = AH$ учраас MN шулуун маань M дундажыг дайрсан периметрийг хагаслан хуваах шулуун болно. Тийм шулуун зөвхөн нэг орших тул MH шулуун нь l шулуун болно. EK талбайг хагаслан хуваах шулуун маань биссектрисстэй параллел болно. $S_{CEK} = S_{EKA}$ учир

$$\frac{CE}{BC} \cdot S \cdot \frac{CE}{CL} = \frac{EB}{BC} \cdot S + \frac{CE}{BC} \cdot S \left(1 - \frac{CE}{CL}\right)$$

болно. Энд S нь ABC гурвалжны талбай. Эндээс $2 \cdot \frac{CE^2}{BC \cdot CL} = \frac{EB}{BC} + \frac{CE}{BC} = 1$ буюу $CE^2 = \frac{BC \cdot CL}{2}$ болно.

$$\frac{BC^2}{CE^2} = \frac{2BC}{CL} = \frac{2BC}{(AC/(AC+AB))BC} = \frac{2(AC+AB)}{AC}$$

$$\text{Эндээс } \frac{EC}{EB} = \frac{AC}{\sqrt{2(AC+AB)AC} - AC} \text{ болно.}$$

ММО-43, XI АНГИЙН IV ДАВАА

Б. Батбаясгалан

XI-A1 (У. Батзориг) ABC гурвалжны BC талын дундаж цэг M . A оройн гадаад өнцгийн биссектрис BC -г D цэгт огтолдог байг. $\triangle ADM$ -г багтаасан тойрог AB , AC шулуунуудыг харгалзан E ба F цэгт огтолдог байг. Хэрэв N нь EF -ийн дундаж бол $MN \parallel AD$ гэж батал.

XI-A2 (Г. Батзаяа) $n \geq 2$ натурал тооны хувьд n -ээс бага түүнтэй харилцан анхны тоонуудын үржвэрийг a_n гэе.

a) $n \mid a_n + 1 \iff n = 2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha$ гэж батал.

b) $n \mid a_n - 1 \iff n \neq 2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha$ гэж батал.

(Энд p -сондгой анхны тоо ба $\alpha \in \mathbb{N}$).

XI-A3 (С. Төмөрбат) Хавтгайд ABC гурвалжин ба түүний гадна орших P цэг өгөгдөв. Хэрэв P цэгийг AB , AC , BC шулуунуудын хувьд тэгш хэмтэй цэгт шилжүүлж болох бол уг үйлдлүүдийн тусламжтайгаар ABC гурвалжин дотор (хүрээн дээр байж болно) оруулж чадахыг батал.

XI-B1 (У. Батзориг) $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a, b, c > 0$ бол

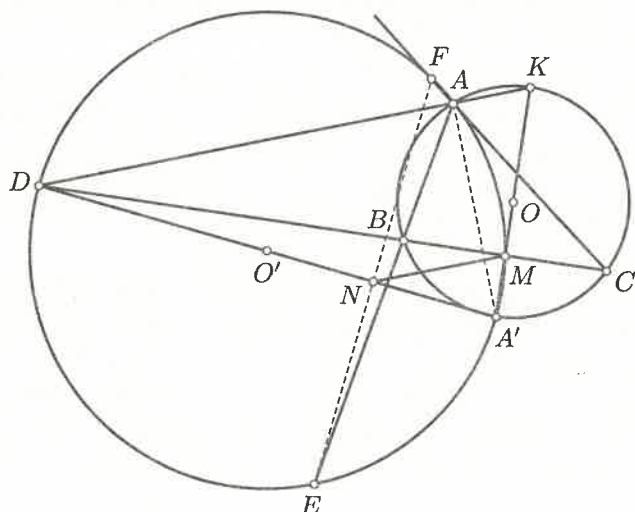
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + ac + bc}}$$

гэж батал.

XI-B2 (А. Ганбат) $n \times n$ хүснэгтийг аль ч мөр, аль ч багана дахь тоонуудын нийлбэр хоорондоо тэнцүү байхаар сөрөг биш тоонуудаар бөглөв. Аль ч 2 нь нэг мөр, нэг баганад үл орших n ширхэг тоог аваад бүгдээс нь нэгэн ижил тоог сөрөг тоо гарахгүй байхаар хасах үйлдэл зөвшөөрөгдөв. Энэ үйлдлийн тусламжтайгаар хүснэгтийн бүх тоог 0 болгож болох уу?

XI-B3 (Г. Батзая) Нэгэн зэрэг тойрогт багтсан ба тойрог багтаасан $ABCD$ дөрвөн өнцөгт өгөгдөв (аль ч диагональ ба тал нь багтаасан тойргийн диаметр биш). A ба C оройнуудын гадаад өнцгийн биссектрисүүд P цэгт, B ба D оройнуудын гадаад өнцгийн биссектрисүүд Q цэгт огтлолцоно. J , O нь багтсан ба багтаасан тойргийн төвүүд бол $OJ \perp PQ$ гэж батал.

XI-A1. Багтаасан тойргийн төвийг O гэе. $\triangle ABC$ -ийн $\angle A$ -ийн биссектрисс нь ABC -г багтаасан тойрогтой A' цэгт огтлолцдог байг.



$MA' \perp MD$ ба $AA' \perp AD$ тул $ADA'M$ нь ADM -ийг багтаасан тойрогт багтана. Энэ тойргийн төвийг O' гэе. DA -г үргэлжлүүлэхэд O төвтэй огтлолцоход үүсэх цэгийг K гэе. Тэгвэл K нь O төвтэй тойргийн A' цэгийн хувьд тэгш хэмтэй цэг болохыг хялбар харж болно. $\angle EAA' = \angle A'AF$ юмуу $\angle EAA' = 180^\circ - \angle A'AF$ тул синусын теоремоор $A'F = A'E$ болох тул DA' диаметр дээр N цэг оршино. Иймд $\triangle DEF \sim \triangle KBC$ гэж хялбар хэлж болно. Учир нь

$$\angle EFD = \angle EAD = \angle CAK = \angle CBK$$

$$\frac{DN}{NA'} = \frac{KM}{MA'}. \text{ Иймд } MN \parallel AD.$$

XI-A2. 1) $n = 2^\alpha$ байг. $\alpha = \overline{1, 3}$ үед илэрхий. $S = \{1, 2^{\alpha-1} - 1, 2^{\alpha-1} + 1, 2^\alpha - 1\}$ ба $\alpha \geq 4$ үед $A = \mathbb{Z}_{2^\alpha}^* \setminus S$ гэе. $a^{-1} = a$ эсвэл $a^{-1} \in S$ байх $a \in A$ -ийн хувьд $a \in S$ тул $a \in A \Rightarrow a^{-1} \in A$ байна. Иймд $\prod_{a \in A} a \equiv 1 \pmod{2^\alpha}$ болох тул

$$a_n \equiv 1(2^{\alpha-1} - 1)(2^{\alpha-1} + 1)(2^\alpha - 1) \prod_{a \in A} a \equiv 1 \pmod{2^\alpha}$$

2) $n = p^\alpha$, $p > 2 \in \mathbb{P}$ байг. $S = \{1, p^\alpha - 1\}$ ба $A = \mathbb{Z}_{p^\alpha}^* \setminus S$ гэе. $a^{-1} = a$ эсвэл $a^{-1} \in S$ байх $a \in A$ -ийн хувьд $a \in S$ тул өмнөхийн адил $a \in A \Rightarrow a^{-1} \in A$ байна. Иймд $\prod_{a \in A} a \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$ болох тул

$$a_n \equiv 1(p^\alpha - 1) \prod_{a \in A} a \equiv -1 \pmod{p^\alpha}$$

3) $n = 2p^\alpha$, $p > 2 \in \mathbb{P}$ байг. $S = \{1, 2p^\alpha - 1\}$ ба $A = \mathbb{Z}_{2p^\alpha}^* \setminus S$ гэе. $a^{-1} = a$ эсвэл $a^{-1} \in S$ байх $a \in A$ -ийн хувьд $a \in S$ тул өмнөхийн адил $a \in A \Rightarrow a^{-1} \in A$ байна. Иймд $\prod_{a \in A} a \equiv 1 \pmod{2p^\alpha}$ болох тул

$$a_n \equiv 1(2p^\alpha - 1) \prod_{a \in A} a \equiv -1 \pmod{2p^\alpha}$$

$$4) n \neq 2^\alpha, p^\alpha, 2p^\alpha \text{ үед } N = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s} \text{ гэе. } \frac{n}{2^\alpha} \geq 3 \text{ ба } \frac{n}{p_j^{\alpha_j}} \geq 3$$

тул $\varphi(n/2^\alpha)$, $\varphi(n/p_j^{\alpha_j})$ нь тэгш (1) байна.

ЛЕММА $(n, n') = 1$ бол $\forall r \in \mathbb{Z}_n^*$, $\forall r' \in \mathbb{Z}_{n'}^*$ -ийн хувьд

$$\begin{cases} x \equiv r & (n) \\ x \equiv r' & (n') \end{cases}$$

тэгшитгэл нь $x \in \mathbb{Z}_{nn'}^*$ байх цор ганц шийдтэй.

Леммээс “ $\mathbb{Z}_{nn'}^*$ -олонлогийн элементүүдийг n модулиар жишиг хэд $\mathbb{Z}_n^*$ -ийн элемент бүр нь $\varphi(n')$ удаа давтагдана” (2) өгүүлбэр мөрдөн гарна. Иймд

$$\prod_{a \in \mathbb{Z}_n^*} a \equiv^{(2)} \left(\prod_{a \in \mathbb{Z}_{p_i}^*} a \right)^{\varphi(n/p_i^{\alpha_i})} \equiv (-1)^{\varphi(n/p_i^{\alpha_i})} \equiv^{(1)} 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

МӨН

$$\prod_{a \in \mathbb{Z}_n^*} a \equiv^{(2)} \left(\prod_{a \in \mathbb{Z}_{2^\alpha}^*} a \right)^{\varphi(n/2^\alpha)} \equiv (\pm 1)^{\varphi(n/2^\alpha)} \equiv 1 \pmod{2^\alpha}$$

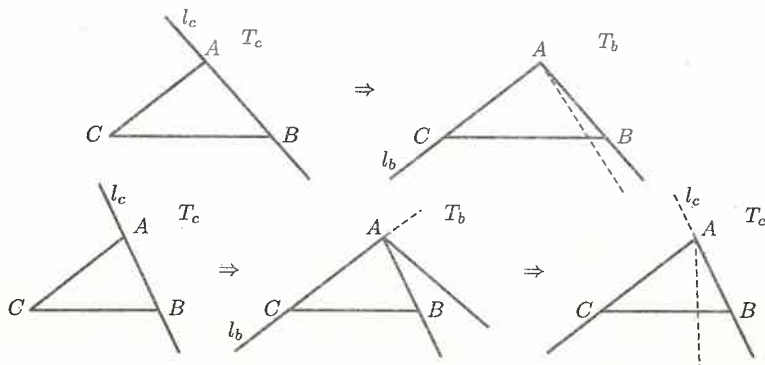
тул $n \mid a_n - 1$.

1) - 4)-өөс зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл болох нь харагдана.

XI-A3. ABC гурвалжны BC , CA , AB талуудыг агуулсан шулуунууд нь харгалзан l_a , l_b , l_c ба A орой дахь өнцөг хамгийн их гэе. T_x -ээр l_x шулууны хувь дахь тэнхлэгийн тэгш хэмийг тэмдэглэе.

ЛЕММА 1 *Хавтгайн дурын цэгийг зөвхөн l_b ба l_c шулуунуудын хувьд тэгш хэмтэй цэгт шилжүүлэх үйлдлүүдээр A өнцөгт багтааж болно.*

Баталгаа. Хэрэв $\angle A \geq 90^\circ$ бол T_b , $T_b \circ T_c$ үйлдлүүдийн аль нэгээр, $60^\circ \leq \angle A < 90^\circ$ бол T_b , $T_b \circ T_c$, $T_c \circ T_b \circ T_c$ үйлдлүүдийн аль нэгээр $\angle A$ -д багтана.



ЛЕММА 2 Хавтгайн дурын P цэгийг уг цэгээс гурвалжны A орой хүртэлх зай нь өөрчлөгдөхгүй байхаар $\angle A$ -д багтаах φ_P гэсэн тэгш хэмүүдийн композици олдоно.

Баталгаа. Өмнөх леммээс шууд мөрдөнө.

Лемма 1-ээс зөвхөн A өнцөгт багтсан цэгүүдийг л ABC гурвалжны дотор оруулж болно гэдгийг л харуулахад хангалттай болох нь харагдаж байна.

A' нь l_a -ийн хувьд A -тай тэгш хэмтэй цэг гээ. A' -ийг дайруулан BC -тэй параллель шулуун татаад түүний AB , AC талуудын үргэлжлэлийг огтлох цэгүүдийг B_1, C_1 гээ.

ЛЕММА 3 $\angle A$ -ийн AB_1C_1 гурвалжны гадна орших P цэгээс A хүртэлх зайг r_1 , A' хүртэлх зайг r_2 гэвэл $r_1 - \frac{2h^2}{r_1} \geq r_2$ байна. Энд h нь гурвалжны A оройгоос буулгасан өндрийн урт.

Баталгаа. $\triangle AA'P$ -ийн A' нь мохоо ба $AA' = 2h$ тул $r_1^2 \geq r_2^2 + 4h^2$ болно. Эндээс $r_1 - r_2 \geq \frac{4h^2}{r_1 + r_2} \geq \frac{2h^2}{r_1}$ болж батлагдав.

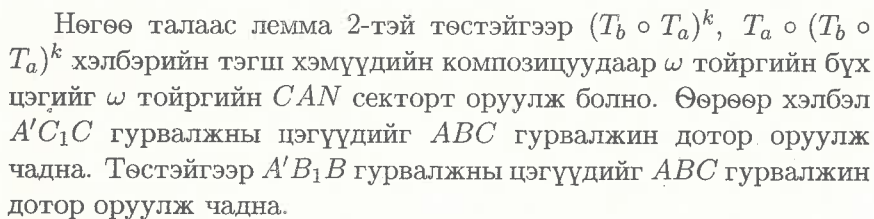
Лемма 3-аас бид A -ийн AB_1C_1 гурвалжны гадна орших дурын P цэгийг AB_1C_1 гурвалжинд багтааж болох нь харагдаж байна.

Учир нь T_a -аар P нь A цэгт дор хаяж $\frac{2h^2}{r_1}$ хэмжээгээр ойртох ба дараа нь түүнийг φ_P -ээр A -д буцааж багтаана. Энэ үйлдлийг давтахад $r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq \dots$ тул n алхамын дараа P нь A -д дор хаяж

$$\frac{2h^2}{r_1} + \dots + \frac{2h^2}{r_n} \geq n \cdot \frac{2h^2}{r_1}$$

хэмжээгээр ойртоно. Энэ үйлдэл хязгааргүй үргэлжлэх боломжгүй тул P цэг AB_1C_1 гурвалжин дотор орно. Одоо $\triangle AB_1C_1$ дотор байгаа цэгийг $\triangle ABC$ -д оруулж чадахыг харуулахад хангалттай. T_a тэгш хэмээр $A'BC$ гурвалжны цэгүүд $\triangle ABC$ -д орох тул $A'B_1B$, $A'C_1C$ гурвалжны цэгүүдийг $\triangle ABC$ -д оруулж чадахыг батлая. B ба C цэгүүдэд төвтэй харгалзан AB ба AC диаметр-тэй тойргуудыг авч үзье. C -д төвтэй тойргийг ω , ω -ийн BC -тэй огтлолцох цэгийг N гээ.

Хэрэв $\angle A \geq 90^\circ$ бол эдгээр тойргууд нь AB , AC талуудын үргэлжлэлтэй огтлолцоно.



52

AL сегмент $\triangle CAL$ -д орно. Үүнтэй адилаар $A'B_1B$ гурвалжны цэгүүдийг ABC гурвалжин дотор оруулж чадна. Эндээс батлах зүйл батлагдав.

XI-B1. Цикл тэнцэтгэл биш тул a -г хамгийн их гэе. Нөгөө талаас $a \geq b \geq c$ үед

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) - \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \leq 0$$

тул $a \geq b \geq c$ гэж үзээд тэнцэтгэл бишээ батлахад явцуурахгүй.

Квадрат зэрэгт дэвшүүлбэл:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{2b}{a} + \frac{2a}{c} + \frac{2c}{b} \geq \frac{9(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca}$$

гэж батлах шаардлагатай.

$$1^\circ. \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} - 3 = \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(a-b)(a-c)}{ac};$$

$$2^\circ. \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} - 3 = \frac{(b-c)^2(b+c)^2}{b^2c^2} + \frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{a^2b^2};$$

$$3^\circ. a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = (b-c)^2 + (a-b)(a-c) \text{ гэдгийг}$$

тус тус ашиглавал батлах тэнцэтгэл биш нь:

$$(b-c)^2M + (a-b)(a-c)N \geq 0$$

тэнцэтгэл бишид шилжинэ. Энд

$$M = \frac{2}{bc} + \frac{(b+c)^2}{b^2c^2} - \frac{9}{ab+bc+ca}$$

$$N = \frac{2}{ac} + \frac{(a+b)(a+c)}{a^2b^2} - \frac{9}{ab+bc+ca}$$

1) $b-c \geq a-b$ байг. Тэгвэл $2(b-c)^2 \geq (a-b)(a-c)$ (*) байна.

$$\begin{aligned} M &\geq \frac{2}{bc} + \frac{4bc}{b^2c^2} - \frac{9}{ab+bc+ca} = \\ &= \frac{6}{bc} - \frac{9}{ab+bc+ca} = \frac{6(ab+ac) - 3bc}{bc(ab+bc+ca)} > 0 \end{aligned}$$

$$M + 2N \geq \frac{6}{bc} - \frac{18}{ab + bc + ca} = \frac{6(ab + ac) - 12bc}{bc(ab + bc + ca)} \geq 0$$

(*)-оос

$$(b - c)^2 M + (a - b)(a - c)N \geq \frac{1}{2}(a - b)(a - c)(M + 2N) \geq 0$$

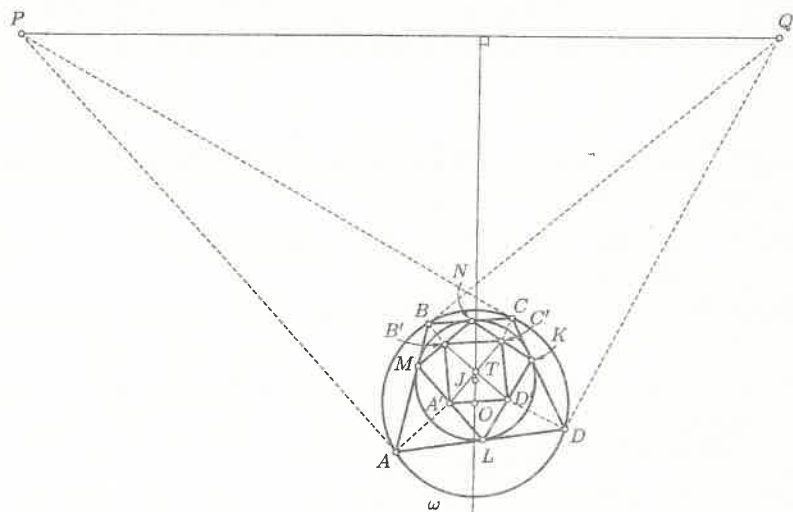
2) $b - c \leq a - b$ байг. $2b \leq a + c$ (**) ба $M \geq 0$ байх нь илт.

$$N \geq \frac{2}{ac} + \frac{a + b + c}{ab^2} \stackrel{(**)}{\geq} \frac{2}{ac} + \frac{3}{ab} \geq \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2}{ac + ab} > \frac{9}{ab + bc + ca}$$

Тэнцэл зөвхөн $a = b = c$ үед л биелэнэ.

XI-B2. Мөрүүд ба баганууд гэсэн 2 туйлтай граф авч үзье. Хэрэв i -р мөр j -р баганын элемент тэг биш бол ij нь ирмэг, эсрэг тохиолдолд ij нь ирмэг биш гээ. Энэ граф нь ядаж нэг ирмэгтэй бол тэр нь Холлын теоремийн (ОУ-ын сорилын бодлого харна уу) нөхцлийг биелүүлдэг гэдгийг харуулъя. Дурын k ширхэг мөрийг сонгож авсан гээ. Хэрэв мөр ба баганын тоонуудын нийлбэрийг $s > 0$ гэвэл эдгээр k ширхэг мөрийн тоонуудын нийлбэр sk болно. Одоо эдгээртэй ирмэгээр холбогдсон багануудыг $B_1, \dots, B_l$ гээ. B_i баганы сонгогдсон мөрийн тоонуудын нийлбэрийг s_i гээ. Мэдээж $s_i \leq s$ ба $sk = s_1 + \dots + s_l$ байх нь ойлгомжтой. Эндээс $k \leq l$ болж байна. Иймд Холлын теорем ёсоор мөр бүрийг ялгаатай багануудад ирмэгээр холбогдсон байхаар харгалзуулж болно. Өөрөөр хэлбэл аль ч 2 нь нэг мөр, нэг баганад оршихгүй байхаар тэг биш n тоо олж чадаж байна. Эдгээрийг хамгийн багаар нь багасгахад хүснэгтийн 0-ийн тоо нэмэгдэнэ. Мэдээж хүснэгтийн бүх тоо 0 болсон үед л дээрх үйлдлийг хийж чадахгүй нь ойлгомжтой.

XI-B3. Дөрвөн өнцөгтөд багтсан тойрог AB, BC, CD, DA талуудыг харгалзан M, N, K, L цэгүүдэд шүргэдэг. MN, NK, KL, ML талуудын дундаж цэгүүд харгалзан B', C', D', A' ба багтсан тойргийн хувьд P цэгийн поляр шулууныг l_P гэж тус тус тэмдэглэе. ($A \in l_b \Leftrightarrow B \in l_A$ байдаг).



Иймд $Q \in l_{B'}$, $Q \in l_{D'} \Rightarrow B' \in l_Q$, $D' \in l_Q$ буюу $l_Q \equiv B'D'$. Үүнтэй адилаар $l_P \equiv A'C'$ болох ба $(B'D' \cap A'C') = T$ гэвэл $T \in l_Q$, $T \in l_P \Rightarrow Q \in l_T$, $P \in l_T$ буюу $l_T \equiv PQ$ болно. Мөн $JT \perp PQ$ болно. Иймд бид O , J , T цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж баталвал хангалттай. Багтаасан тойргийг ω гээд багтсан тойргоор инверс авъя. $A, B, C, D \rightarrow A', B', C', D'$ ба $\omega \rightarrow \omega'$ гэе. $A'B'C'D'$ нь параллелограмм ба тойрогт багтах тул тэгш өнцөгт болно. Иймд T нь ω' тойргийн төв болох ба инверсээр O, J, T цэгүүд нэг шулуун дээр оршино.

ММО-43, БАГЫН БАГШИЙН III ДАВАА

Д.Ганзориг

ББ-А1. p анхны тооны хувьд $\sqrt{m} + \sqrt{m+p}$ натурал тоо байх m -тоо олддог байх бүх p -г ол.

ББ-А2. Натурал тооноос түүний цифруудийн нийлбэрийг хасаж 2007 гарсан бол уг тоог ол.

ББ-А3. Гүдгэр 5-өнцөгтийн бүх орой болон диагоналийн огтлолуудыг цэнхэр өнгөөр будав. Аль нэг тал эсвэл аль нэг диагональ дээрх будагдсан цэгүүдийг цэнхэр эсвэл улаанаар сольдог (цэнхэр $\rightarrow$ улаан, улаан $\rightarrow$ цэнхэр) үйлдлээр бүх цэгүүдийг улаан болгож болох уу?

ББ-В1. Бүх хуваагчдын нь сүүлчийн цифруудийн нийлбэр 33 байх 500-аас их 1000-аас бага сондгой натурал тоонуудыг ол.

ББ-В2. x, y, z нь бодитой тоонууд бол

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}\right)^2 \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6}$$

байна гэж батал, хэдийд тэнцэлдээ хүрэх вэ?

ББ-В3. Огторгуй цэг бүрийг 5-өнгийн аль нэгээр, аль ч өнгөөр дор хаяж 1 цэг будагдсан байхаар будахад дор хаяж 4 өнгөөр бүх цэгүүд нь будагдсан хавтгай олохыг батал.

ББ-А1. $p = 2t + 1$ бол $m = t^2$ гэж авна. $p = 2$ бол $\sqrt{m} + \sqrt{m+2} \in \mathbb{N}$ байх m олддог байг.

$$\sqrt{m+2} = y - \sqrt{m} \Rightarrow \sqrt{m} = \frac{2-y^2}{2y} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{m} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{m+2} \in \mathbb{Z}$$

байх ёстой байна. Иймд p -нь бүх сондгой анхны тоо.

ББ-А2. $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$.

$$1000a + 100b + 10c + d - (a + b + c + d) = 9(111a + 11b + c) = 2007$$

$$111a + 11b + c = 223$$

a -ийн боломж

$$a > 1, \quad a < 3 \Rightarrow \quad a = 2.$$

$$11b + c = 1 \quad b = 0, \quad c = 1$$

d -ямар ч тоо байж болно. [2010, 2019]-бүх тоо.

ББ-А3. Диагоналиудын огтлолд үүсэх бөгөөд 5-өнцөгтийг авч үзье. Өгсөн үйлдэл нь энэ 5-өнцөгтийн яг 2 оройн өнгийг өөрчлөнө эсвэл үгүй.

ББ-В1. Нийлбэр нь 33 тэнцүү тул хуваагчдын тоо нь сондгой байна. $\Rightarrow$ тооны квадрат $\Rightarrow$ [500, 1000]-ын квадратуудыг шалгана. (729)

ББ-В2.

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6} - \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}\right)^2 = \frac{1}{6}(x-y)^2 + \frac{1}{12}(x-z)^2 + \frac{1}{18}(y-z)^2 \geq 0$$

ба тэнцэлдээ $x = y = z$ үед хүрнэ.

ББ-В3. Бүх цэгүүд нь 3 өнгөөр будагдсан шулуун олдох бол илэрхий. Гурав ба түүнээс олон өнгөөр будагдсан шулууны хувьд түүнийг агуулсан уг шулууныхаас ялгаатай өнгөтэй цэгийг дайрсан хавтгайг татна. Одоо бүх шулуунууд 2-оос олонгүй өнгөөр будагдсан гэж үзье. 5 ялгаатай шулуун дээрх 5 ялгаатай цэг авъяа. Эдгээрийн аль ч дөрөв нь 1 хавтгай дээр оршихгүй. Эдгээрийг хос хосоор нь холбосон 10 шулуун нь эдгээртэй паралель биш ямар нэг хавтгайг 10 цэгт огтолно. Эдгээр 10 цэг нь дор хаяж 4 өнгөөр будагдсан байна гэдэг нь илэрхий.

Д.Ганзориг

ББ-А1 (Д.Ганзориг). 43-оройтой графын ирмэгүүдийг 3 өнгөөр аль ч ижил өнгийн бүх ирмэгүүдийг хасахад холбоост граф үүсдэг байхаар будаж болдог бол уг граф хамгийн багадаа хэдэн ирмэгтэй байх вэ?

ББ-А2 (Н.Дайвий-Од, П.Ренчинбал). Хавтгай дээр дараахи нөхцөлүүд зэрэг биелдэг 12 цэг тэмдэглэж болохыг харуул. Үүнд

а) Тэдгээр дээр оройтой 3 ялгаатай квадрат олддог.

а) Тэдгээр дээр оройтой 16 ялгаатай зөв гурвалжин олддог.

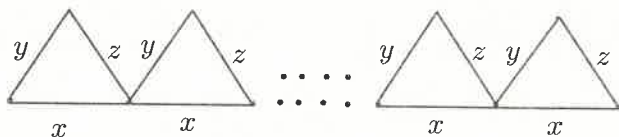
ББ-А3 (А.Хашбаатар). $ABCD$ паралелограммын хурц өнцгийн орой A цэгийг дайрч AB, AD хоёр тал болон AC диагоналийг огтолсон тойргийг B_1, C_1, D_1 цэгт шүргэсэн гурван шулуун харгалзан B, C, D оройг дайрчээ. Хэрэв BB_1, CC_1, DD_1 - хэрчмүүдээр гурвалжин байгуулж болдог бол ямар гурвалжин байх вэ?

ББ-В1 (Д.Ганзориг). N -нь нэг шулуун дээр орших хос хосоороо үл огтлолцох k ширхэг хэрчмүүдийн олонлог. Дурын 1-ээс ихгүй урттай хэрчмийг түүний төгсгөлүүд нь N -д харьяалагдаж байхаар байрлуулж болдог бол N -ийн хэрчмүүдийн уртуудын нийлбэр $\frac{1}{k}$ -аас хэтрэхгүй гэж үзүүл.

ББ-Б2 (Д.Батнасан, У.Батзориг). $2 \times n$ хүснэгтэд эерэг бодит тоонууд бичигдсэн ба багана бүр дэх тоонуудын нийлбэр 1 байв. Тэгвэл мөр бүрийн тоонуудын нийлбэр $\frac{n+1}{4}$ -ээс хэтрэхгүй байхаар багана бүрээс нэг нэг тоог сонгож чадна гэж батал.

ББ-Б3 (Д.Ганзориг). 2007 оройтой холбоост графын орой бүрээс дор хаяж 93 ирмэг гардаг бол аль ч 2 оройг нь хамгийн дөт зам нь хамгийн ихдээ 62 орой дайрна гэж үзүүл.

ББ-А1. x, y, z нь харгалзан хар, цагаан, улаан ирмэгүүдийн тоо бол мод графын чанар ёсоор $x + y \geq 42, x + z \geq 42, y + z \geq 42$ болно. Эндээс $x + y + z \geq \frac{3 \cdot 42}{2} = 63$. Одоо яг 63 ирмэгтэй өгсөн нөхцөл хангах граф байгуулъя.



Үүнээс өөрийг ч байгуулж болно.

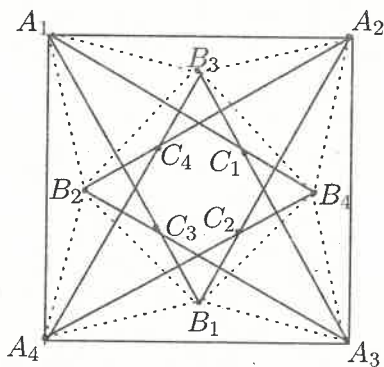
ББ-А2. $A_1A_2A_3A_4$ квадратын талууд дээр дотор талд нь

$$A_1A_2B_1; \quad A_2A_3B_2; \quad A_3A_4B_3; \quad A_4A_1B_4$$

зөв гурвалжнууд байгуулав. Энэ тохиолдолд

$$A_1B_3B_2; \quad A_2B_4B_3; \quad A_3B_1B_4; \quad A_4B_2B_1$$

гурвалжнууд зөв гурвалжин болохыг харуулъя.



$B_1A_2A_3; \quad B_4A_4A_3; \quad B_1A_1B_4$ гурвалжнууд нь харгалзан A_2, A_4, A_1 оройнуудад 30° бүхий ижил урттай хажуу талууд бүхий адил хажуут гурвалжнууд болох учир $B_1A_3; \quad B_4A_3; \quad B_1B_4$ суриуд нь тэнцүү байх учир $A_3B_1B_4$ зөв гурвалжин болно. Бусад гурвалжингуудын хувьд аналогоор харуулна. $B_1B_2B_3B_4$ квадрат болох нь илэрхий. Энд 8 зөв гурвалжин 2 квадрат үүснэ. $A_1A_2A_3A_4$ квадрат дээр байгуулсан дээрх 4-н цэгийг

$B_1B_2B_3B_4$ квадратын дотор дээрхтэй адилаар байгуулснаар 16 зөв гурвалжин 3-н квадрат бүхий 12 цэг олдож байгаа юм.

Дашрамд дурдахад A_1B_4 ба $A_3B_3; \quad A_2B_1$ ба $A_4B_4; \quad A_3B_2$ ба $A_1B_1; \quad A_4B_3$ ба A_2B_2 хэрчмүүдийн огтлолын цэгүүдийг харгалзан

$C_1; C_2; C_3; C_4$ гэж тэмдэглэвэл эдгээр нь сүүлчийн байгуулагдах цэгүүдтэй давхцдаг зүй тогтолтойг мөн хялбархан харуулж болно.

$$\text{ББ-А3. } 1) \angle BCA = \angle CAD = \angle FAG = \frac{1}{2} \widetilde{GF} = \angle GEF;$$

$$2) \angle CAB = \angle FAE = \frac{1}{2} \widetilde{EF} = \angle FGE \text{ болоход } \triangle EFG \sim \triangle CBA:$$

$$\frac{EF}{BC} = \frac{FG}{AB} = \frac{EG}{CA} \quad (1)$$

AEF -д багтсан дөрвөн өнцөгт болохоор $AG \cdot EF + AE \cdot GF = AF \cdot EG$ (1)-г ашиглахад

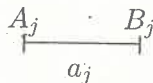
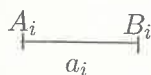
$$AG \cdot BC + AE \cdot AB = AF \cdot AC \quad (2)$$

$AG = AD - DG, AE = AB - BE, AF = AC - CF$ болохоор (2)-д орлуулаад эмхтгэсний дараа (Энд $BC = AD$ гэдгийг санах хэрэгтэй) $AD^2 - AD \cdot DG + AB^2 - AB \cdot BC = AC^2 - AC \cdot CF$

$$AD \cdot DG + AB \cdot BE - AC \cdot CF = AD^2 + AB^2 - AC^2$$

ABC гурвалжны $\angle ABC$ -мохоо учраас $AD \cdot DG + AB \cdot BE - AC \cdot CF < 0$ Огтлогч, шүргэгчийн теорем ёсоор $AD \cdot DG = DD_1^2, AB \cdot BE = BB_1^2, AF \cdot AC = CC_1^2$ гэдгийг санавал $DD_1^2 + BB_1^2 - CC_1^2 < 0$ Ийнхүү DD_1, BB_1, CC_1 хэрчмээр гурвалжин байгуулж болдог байвал CC_1 талаас хүндий орших өнцөг мохоо байна.

ББ-В1. $a_1, \dots, a_k$ урттай хэрчмүүд байсан гэе. a_i, a_j дээр нэг, нэг төгсгөл нь орших хэрчмүүдийн уртыг авч үзье. Түүнийг x гэе.



$A_j B_i \leq x \leq A_i B_j$ болно.

Төгсгөлүүд нь a_i, a_j дээр байх хэрчмүүдийн уртын утгын мужийг I_{ij} гэвэл

$I_{ij} = [|A_j B_i|, |A_i B_j|]$ хэрчим болох ба $|I_{ij}| = |A_i B_j| - |A_j B_i| = a_i + a_j$ болно. Төгсгөлүүд нь a_m дээр байх хэрчмүүдийн уртын авч болох утгын мужийг I_m гэвэл $I_m = [0, a_m]$ хэрчим болно. Иймд төгсгөлүүд нь эдгээр хэрчим дээр байх хэрчмүүдийн авч

болох утгын муж нь $I = \left(\bigcup_{i < j} I_{ij} \right) \cup \left(\bigcup_{m=1}^k I_m \right)$ болно. Бодлогын

өгөгдсөн ёсоор $I \supset [0; 1]$ байх ёстой. $\Rightarrow |I| \geq |[0; 1]| = 1 \Rightarrow |I| =$
 $\left| \left(\bigcup_{i < j} I_{ij} \right) \cup \left(\bigcup_{m=1}^k I_m \right) \right| \geq \sum_{i < j} |I_{ij}| + \sum_{m=1}^k |I_m| = \sum_{i < j} (a_i + a_j) + \sum_{m=1}^k a_m =$
 $k(a_1 + \dots + a_k) \geq 1 \Rightarrow a_1 + \dots + a_k \geq \frac{1}{k}$ боллоо.

ББ-В2.▲ Эхний мөрөн дэх тоонуудыг $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ гэе. Энд $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ гэж үзэхэд явцуурах зүйл байхгүй. Тэгвэл хоёр дахь мөрөн дэх тоонууд нь $1 - a_1 \geq 1 - a_2 \geq \dots \geq 1 - a_n$ болно. k нь $a_1 + a_2 + \dots + a_k \leq \frac{n+1}{4}$ байх хамгийн их индекс байг. Тэгвэл $a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1} > \frac{n+1}{4}$ байх нь илэрхий. (Ийм k олдохгүй гэвэл $a_1 + a_2 + \dots + a_k \leq \frac{n+1}{4}$ болоход хүрч бодлого бодогдоно.) Эндээс бид $(1 - a_{k+1}) + (1 - a_{k+2}) + \dots + (1 - a_n) \leq \frac{n+1}{4}$ гэж батлах ёстой болно.

$$\frac{a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_n}{n - k} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}}{k + 1}$$

$\Rightarrow a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_n \geq (n - k) \cdot \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}}{k + 1} \geq$
 $\geq (n - k) \cdot \frac{\left(\frac{n+1}{4}\right)}{k + 1} = \frac{(n + 1) \cdot (n - k)}{4(k + 1)}$ болно. Иймд $(1 - a_{k+1}) + \dots +$
 $(1 - a_n) = (n - k) - (a_{k+1} + \dots + a_n) \leq (n - k) - \frac{(n + 1) \cdot (n - k)}{4(k + 1)}$ болно.
 $(n - k) - \frac{(n + 1) \cdot (n - k)}{4(k + 1)} \leq \frac{n + 1}{4}$ гэж батлахад хангалттай. Энэ илэрхий юм. ▼

ББ-В3. Эсрэгээс нь дөт замуудын максимум нь $n \geq 63$ оройг замдаа дайрдаг, тэр нь $AA_1 \dots A_n B$ гэе. Графын бүх оройг бүлгүүдэд хуваая:

A оройгоос C орой хүртлэх дөт зам нь замдаа k ирмэг буюу $k - 1$ орой дайрдаг бол C оройг G_k бүлэгт оруулая. Ингэвэл $A \in G_0, A_1 \in G_1, \dots, A_n \in G_n, B \in G_{n+1}$ болно. Иймд графын бүх орой яг $n + 2$ бүлэгт хуваагдаж орно, өөрөөр хэлбэл яг 65 бүлэг байна гэж үзэж болно.

Нөгөө талаас $X \in G_k$ нь зөвхөн G_{k-1}, G_{k+1} -ийн зарим оройтой л шууд холбогдоно. Иймд $|G_{k-1} \cup G_k \cup G_{k+1}| \geq 94$, мөн $|G_0 \cup G_1| \geq 94$. $\{0, 1\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6, 7\}, \dots, \{62, 63, 64\}$ гэсэн дугаарууд бүхий 22 бүлэгт нийтдээ дор хаяж $94 \cdot 22 = 2068$ орой байх болж зөрчилд хүрэв. ▼

ММО-43, Дундын багшийн III даваа

Ц.Дашдорж

ДБ-А1 (Ц.Дашдорж). $3 \leq n \in \mathbb{N}, 0 \neq a \in \mathbb{R}$ өгсөн байг.

$x^n + ax + 1 = 0$ тэгшитгэлийн комплекс язнуур z нь $|z| \geq \sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}$ -г хангана гэж батал.

ДБ-А2 (Ц.Дашдорж). $1 < n \in \mathbb{N}$ өгсөн байг. $1 \leq i \leq n$ байх $i \in \mathbb{N}$ бүрийн хувьд $a_1 + \dots + a_n |a_1^i + \dots + a_n^i|$ байх хос хосоороо ялгаатай бөгөөд харилцан анхны байх бүх натурал n -үүд $(a_1, \dots, a_n)$ -г ол.

ДБ-А3 (Ц.Дашдорж). $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ бол $\sum_{i,j=1}^n |x_i + x_j| \geq n \sum_{i=1}^n |x_i|$ гэж батал.

ДБ-В1 (Ц.Дашдорж). $a = 4k - 1 \in \mathbb{N}$ бол $\forall n \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд $2^{n-1} |s_n| = C_n^0 - C_n^2 a + C_n^4 a^2 - C_n^6 a^3 + \dots$ гэж батал.

ДБ-В2 (Ц.Дашдорж). $k \in \mathbb{Z}$ байг. $\{a_n\}_0^\infty$ дараалал нь $a_0 = 0, a_1 = 1, n \geq 2$ үед $a_n = 2ka_{n-1} - (k^2 + 1)a_{n-2}$ гэж өгөгдсөн ба p нь $4m + 3$ хэлбэрийн анхны тоо байг.

а) $a_{n+p^2-1} \equiv a_n(p)$

б) $a_{n+p^3-p} \equiv a_n(p^2)$ гэж батал.

ДБ-В3 (Ц.Дашдорж). $A_1, \dots, A_{35}$ өгсөн олонлогуудын хувьд $|A_i| = 27, i = \overline{1, 35}$ ба эдгээрийн аль ч гурвын огтлолцол яг нэг ерөнхий элементтэй бол $\bigcap_{i=1}^{35} A_i$ -хоосон биш гэж батал.

ДБ-А1. $z = re^{i\alpha}$, $\alpha \neq 0, \pi$ байг

$$r^n \cos n\alpha + ra \cos \alpha + 1 + i(r^n \sin \alpha + ra \sin \alpha) = 0$$

$$r^n \cos \alpha + ra \cos \alpha + 1 = 0, r^n \sin \alpha + ra \sin \alpha = 0.$$

I-ийг $\sin \alpha$, II-ийг $\cos \alpha$ -аар үржүүлж хасвал:

$$r^n \sin(n-1)\alpha = \sin \alpha, \quad r^n |\sin(n-1)\alpha| = |\sin \alpha|.$$

$\kappa \in N$ үед $|\sin k\alpha| \leq k |\sin \alpha|$ -ийг индукцээр баталж болох тул

$$|\sin \alpha| \leq r^n (n-1) |\sin \alpha|, \quad |z|^n = r^n \geq \frac{1}{n-1}$$

ДБ-А2. $s_k = a_1^k + \dots + a_n^k$ гэвэл $s_1 | s_2, \dots, s_n$ байна $i > n$ бол $s_1 | s_i$ гэж батлая. МК II, хуудас 93-ын (8')-д $k = n+1, n+2, \dots$ гэж, мэт дараалан тавих замаар $k > n$ бол $s_1 | s_k$ болох нь гарна. Үүгээр

$$\forall m, s_1 | s_m \quad (1)$$

$p^k | s_1$ байг $k < m$ ба $\varphi(p^k) | m$ бол (1)-ээр

$$p^k | s_m \quad (2)$$

Хэрэв $\exists a_i, p | a_i$ бол $p^k | a_i^m$

Иймд Эйлерийн теоромоор $s_m \equiv n \vee n-1 (p^k)$
Эндээс 2-оор $n \equiv 0 (p^k)$ эсвэл $n-1 \equiv 0 (p^k)$

Үүгээр $n(n-1) \equiv 0 (s_1)$. Эндээс

$$s_1 | n(n-1) \quad (3)$$

s_1 нь эхний $n-1$ анхны тооны нийлбэр дээр 1-ийг нэмснээс багагүй $n > 5$ бол $s_1 \geq 1+2+3+5+7+11+13+15+17+\dots+(2n-1)$, энд 9 ороогүй Ийнхүү $s_1 \geq n^2 - 9 + 2 = n^2 - 7$ ба $n > 7$ бол $s_1 \geq n^2 - 7 > n^2 - n = n(n-1) \geq s_1$ буюу энэ үед зөрчилд хүрнэ. $n = 4, 6$ үед эхний $n-1$ анхны тооны нийлбэр дээр 1-ийг нэмбэл $n(n-1) - 1$ болно. Энэ тоо мөн (3)-тай зөрчилдөнө, гэх мэт үлдэх тохиолдлууд (3)-д зөрчилдөхийг шалгана.

$$\text{ДБ-А3. } f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n |x_i + x_j|, g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

гэе. Эерэг x_i -үүдийг тэдгээрийн арифметик дунджаар сольвол f -д өсөхгүй гэдгийг харуулая. Ингэснээр g үл өөрчлөгдөх нь тодорхой

$x_1, \dots, x_k > 0$ гэж үзье. Тэгвэл $\sum_{i,j=1}^k |x_i + x_j|$ мөн үл өөрчлөгдөнө.

$i > k$ байг. $f_i(x_1, \dots, x_k) = \sum_{j=1}^k |x_i + x_j|$ гэе. $|x_i + x|$ хотгор функц тул $x_1, \dots, x_k$ -үүдийн арифметик дунджаар нь сольвол Йенсений тэнцэл бишээр $\sum_{j=1}^k |x_i + x_j|$ мөн өсөхгүй.

$$f = \sum_{i,j=1}^k |x_i + x_j| + \sum_{i,j=k+1}^n |x_i + x_j| + 2 \sum_{i=k+1}^n f_i(x_1, \dots, x_k)$$

тул f өсөхгүй байна. Сөрөг x_i -үүдийн хувьд мөн ийм зүйлийг хэлж чадна. Иймд $x_1 = x_2 = \dots = x_k = -a$, $x_{k+1} = \dots = x_n = b$, $a, b > 0$ гэж үзэж чадна. Тэгвэл $2k^2a + 2(n-k)^2b + 2k(n-k)|a-b| \geq kna + (n-k)nb$ гэж батлах хэрэгтэй.

$a \geq b$ гэж үзвэл $(2k^2 + 2k(n-k) - kn)a + (2(n-k)^2 - 2k(n-k) - (n-k)n)b \geq 0$, $kna + (n^2 + 4k^2 - 5nk)b \geq 0$ гэж батлах хэрэгтэй болов. $a \geq b$ тул $kna + (n^2 + 4k^2 - 5nk)b \geq (kn + n^2 + 4k^2 - 5nk)b = (n - 2k)^2b \geq 0$

ДБ-В1.

$$(1 + i\sqrt{a})^n = s_n + i\sqrt{a}t_n \quad (1)$$

$$(1 - i\sqrt{a})^n = s_n - i\sqrt{a}t_n \quad (2)$$

$$s_n = \frac{1}{2}[(1 + i\sqrt{a})^n + (1 - i\sqrt{a})^n] \quad (3)$$

$z_1 = 1 + i\sqrt{a}$, $z_2 = 1 - i\sqrt{a}$ язгууртай квадрат тэгшитгэл нь $z^2 - 2z + (a + 1) = 0$ тул

$$s_{n+2} = 2s_{n+1} - (1 + a)s_n \quad (4)$$

(3)-аас $s_1 = 1$, $s_2 = 1 - a = 2 - 4k = 2(1 - 2k)$ тул $n = 1, 2$ үед (*) биелэгдэв. $2^{n-1}|s_n$ ба $2^n|s_{n+1}$ гэвэл $1 + a = 4k$ ба $2^{n+1}|(1 + a)s_n$ тул (4)-өөс $2^{n+1}|s_{n+2}$ гэж гарна.

ДБ-В2. 1). §10,11 Теором 2-оор p нь энгийн G тоо болно. $p \nmid k+i$, $p \nmid k-i$ байх нь илэрхий. §10.17-9-өөр $\mathbb{Z}p[i]^* \setminus \{0\}$ буюу $|\mathbb{Z}p[i]^*| = p^2 - 1$ болно. Иймд $\alpha \in \mathbb{Z}[i]^*$ бол $\alpha^{p^2-1} \equiv 1(p)$ болно. $((\mathbb{Z}p[i]^*, \cdot)$ бүлэгт Лагранжийн теоромыг хэрэглэв). Нөгөө талаас $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$, $A, B \in \mathbb{Z}p[i]$, α, β нь $x^2 - 2kx + k^2 + 1 = 0$ тэгшитгэлийг язгуур буюу $\{\alpha, \beta\} = \{k+i, k-i\}$ Иймд $a_{n+p^2-1} = A\alpha^{n+p^2-1} + B\beta^{n+p^2-1} \equiv A\alpha^n + B\beta^n \equiv a_n \pmod{p}$

2). $(a, p) = 1$ бола $\alpha^{p^3-p} \equiv 1 \pmod{p^2}$: 1)-ээр $\alpha^{p^2-1} \equiv 1(p)$ тул 1.6-4а-аар $\alpha^{p^3-p} \equiv 1(p^2)$ болно.

Иймд $a_{n+p^3-p} \equiv A\alpha^{n+p^3-p} + B\beta^{n+p^3-p} \equiv A\alpha^n + B\beta^n \equiv a_n(p^2)$

ДБ-В3. Лемм. 8-аас цөөнгүй A_i -ийн огтлолцолд орох α элемент олдоно.

$C_i = A_i \cap A_{35}$, $1 \leq i \leq 34$ гэвэл $|C_i \cap C_i| = |A_i \cap A_{35} \cap A_j| = 1$, $i \neq j$. $C_i \cap C_j = \{x_{ij}\}$ -ийн тоо C_{34}^2 ба x_{ij} элементүүдийн тоо $|A_{35}| = 27$ -оос үл хэтэрнэ.

Иймд $\exists \alpha \in A_{35}$, α элемент $\lceil C_{34}^2/27 \rceil = 21$ -ширхэг $C_i \cap C_j$ -д орно. $C_7^2 = 21$ тул α элемент хамгийн цөөндөө 7 C_i -д орно. $\alpha \in A_{35}$ тул α элемент 8 A_i -д орох болов. Лемма батлагдлаа. $\alpha \in A_1, \dots, A_r$, $\alpha \notin A_{r+1}, \dots, A_n$ $35 > r \geq 8$ гэж үзье. $1 \leq i < j \leq r$ байх i, j -ийн хувьд $B_{ij} = A_i \cap A_j \cap A_{r+1}$ гэе. B_{ij} бүр ганц элементтэй ба B_{ij} -ийн тоо $C_8^2 = 28$ -аас цөөнгүй ба $|A_{r+1}| = 27$ тул B_{ij} -үүдийн 2нь давхцана, тэр нь $B_{pq} = B_{rs} = \{b\}$ гэвэл $|\{p, q, r, s\}| \geq 3$ ба $b \in A_p, A_q, A_r, A_s, A_{r+1} \rightarrow \alpha = b \in A_{r+1}$ болж $\alpha \notin A_{r+1}$ -д зөрчив.

Ц.Дашдорж

ДБ-А1 (Ц.Батхүү). Элементүүдийнх нь нийлбэр 5-д хуваагддаг

$\{1, 2, \dots, 5n\}$ олонлогийн дэд олонлогуудын тоог ол.

ДБ-А2 (Д.Батнасан). Шулуун дээр дурын байршилтай 101ш хэрчим өгөв. Эсвэл ерөнхий цэгтэй 11 хэрчим, эсвэл аль ч 2-нь үл огтолцох 11 хэрчим олдохыг батал.

ДБ-А3 (А.Ганбат). p сондгой анхны тоо. g -нь түүний анхны язгуур байг. $A = \left\{ k^2 + 1 \mid 1 \leq k \leq \frac{p-1}{2} \right\}$ ба $B = \left\{ g^m \mid 1 \leq m \leq \frac{p-1}{2} \right\}$ олонлогууд p модулиар тэнцүү байх бүх p -г ол.

ДБ-В1 (Ц.Дашдорж). $x, y, z \in \mathbb{N}, xy = z^2 + 1$ бол $\exists a, b, c, d \in \mathbb{Z}, x = a^2 + b^2, y = c^2 + d^2, z = ac + bd$ гэж батал.

ДБ-В2 (А.Хашбаатар). ABC зөв гурвалжныг багтаасан тойрог дотор дурын P цэг авав. PA, PB, PC хэрчмүүдээр гурвалжин байгуулж болохыг батал. Хэрэв тойргийн радиус R, P цэгээс тойргийн төв хүртлэх зай d бол байгуулсан гурвалжны талбайг ол.

ДБ-В3 (Г.Батзаяа). $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s} \geq 2$ байг. Хэрэв $\alpha \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд $p_i - 1 \nmid \alpha, i = \overline{1, s}$ байдаг бол $n \mid \sum_{a \in \mathbb{Z}_n^*} a^\alpha$ гэж батал.

ДБ-А1. $f(x) = (1+x)(1+x^2) \dots (1+x^{5n})$ олон гишүүнт авч үзвэл түүний $x^{a_1} x^{a_2} \dots x^{a_m}$ гишүүнт бүрт $\{1, 2, \dots, 5n\}$ олонлогийн $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ дэд олонлогийг харилцан нэг утгатайгаар харгалзуулж болно. Иймд бид k эерэг тохиолдолд $f(x)$ олон гишүүнтийн x^{5k} хэлбэртэй гишүүдийн өмнөх коэффициентуудын нийлбэр S -ийг олоход хангалттай.

$\xi = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ нь нэгжийн 5 зэргийн язгуур болог. Тэгвэл $\xi^5 = 1$ ба $1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4 = 1$ тул

$$S = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 f(\xi^j)$$

Нөгөө талаас $\xi, \xi^2, \xi^3, \xi^4, \xi^5 = 1$ нь $g(x) = x^5 - 1$ олон гишүүнтийн язгуур буюу

$$g(x) = x^5 - 1 = (x - \xi)(x - \xi^2)(x - \xi^3)(x - \xi^4)(x - \xi^5)$$

$$g(-1) = -2 = (-1 - \xi)(-1 - \xi^2)(-1 - \xi^3)(-1 - \xi^4)(-1 - \xi^5).$$

Эндээс

$$(1 + \xi)(1 + \xi^2)(1 + \xi^3)(1 + \xi^4)(1 + \xi^5) = 2$$

тул $f(\xi) = 2^n$ ба $j = 2, 3, 4$ тоонуудын хувьд ч мөн $f(\xi^j) = 2^n$ ба $f(\xi^5) = f(1) = 2^{5n}$. Иймд

$$S = \frac{1}{5}(4 \cdot 2^n + 2^{5n}) = \frac{1}{5}(2^{n+2} + 2^{5n}).$$

ДБ-А2. Хэрчим бүрийн хувьд түүнтэй үл огтолцох, зүүн талд нь орших, хоорондоо үл огтолцох хамгийн олон тоотой олдох хэрчмүүдийн тоог $k - 1$ гэвэл, тухайн хэрчимд k гэсэн жин харгалзуулъя. $k \geq 11$ бол үл огтолцох 11 хэрчим олдоход хүрнэ. Иймд хэрчим бүрийн жин нь 10 хэтрэхгүй ($k \leq 10$) байг. 101 хэрчим байгаа тул Дрихлейн зарчмаар ижил жинтэй 11 хэрчим олдоно. Ижил жинтэй 2 хэрчим ерөнхий цэгтэй. Хэрэв тийм биш бол аль нэг нь нөгөөгийнхөө баруун талд оршиж, түүний жин нь нөгөөгийнхөөсөө их болоход хүрнэ.

Лемм. Шулуун дээр орших аль ч 2 нь ерөнхий цэгтэй хэрчмүүд бүгд ерөнхий цэгтэй.

Хэрчмүүдийн зүүн талын төгсгөлүүдийн хамгийн ихийг авч үзэхэд лемм батлагдана.

Иймд дээр олдох ижил жинтэй паралель хэрчим ерөнхий цэгтэй боллоо.

ДБ-А3. $K = \prod_{a \in A} a$, $P = \prod_{b \in B} b$ гэе.

$p = 3$ үед $A = B$ байна.

$p > 3$ гэе. Хэрэв $A = B$ бол $K = P$ байна. $\Rightarrow K^2 = P^2$ байх ёстой. g -анхны язгуур $\Rightarrow g^{p-1} \equiv 1(p) \Rightarrow g^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1(p)$ байна.

$$P^2 = \left(\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} g^k \right)^2 = \left(g^{1+2+\dots+\frac{p-1}{2}} \right)^2 = g^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}}(p)$$

байна. $\Rightarrow \begin{cases} p \equiv 1(4) & \text{үед } p^2 \equiv -1(p) \\ p \equiv 3(4) & \text{үед } p^2 \equiv 1(p) \end{cases}$ байна.

k^2 -г олгоё. $\forall k: k^2 + 1 \equiv (p - k)^2 + 1 \pmod{p}$ ба $p^2 + 1 \equiv 1(p)$ тул $k^2 \equiv \prod_{k=1}^p (k^2 + 1) \pmod{p}$ байна. k_p -талбар авч үзье:

$G = \{k_1 + k_2 i | k_1, k_2 \in k_p\}$ гэе. $\Rightarrow G$ нь талбар байна. G -дээр

$P(x) = \prod_{k=1}^p (x + k)$ олон гишүүнт авч үзье. $P(x) \equiv x^p - x$ гэж баталъя.

$x = 0$ үед $P(x) \equiv 0 \equiv 0^p - 0$.

$x \neq 0$ үед $x^{p-1} \equiv 1 \Rightarrow x^p - x \equiv 0$ ба $P(x) \equiv 0(p)$ байх нь тодорхой.

Иймд $1, 2, \dots, p$ нь $P(x) - x^p + x$ олон гишүүнтийн язгуур болох ба $\deg(P(x) - x^p + x) < p$ тул $P(x) \equiv x^p - x$. Иймд $k^2 = \prod_{i=1}^p (k^2 + 1) = \prod_{i=1}^p (k + i)(k - i) = \prod_{k=1}^p (k + i) \cdot \prod_{k=1}^p (k + i) \equiv P(i) \cdot P(-i) \equiv (i^p - i)((-i)^p + i) \equiv -(i^p - i)^2 \pmod{p}$ байна.

$\Rightarrow \begin{cases} p \equiv 1(4) & \text{үед } k^2 \equiv 0(p) \\ p \equiv 3(4) & \text{үед } k^2 \equiv 4(p) \end{cases}$ Иймд $k^2 \neq p^2(p)$ буюу $p > 3$ үед $A \neq B \Rightarrow p = \{3\}$.

ДБ-В1. Гауссын цагираг $G = \mathbb{Z}[i]$ -д авч үзье. Гауссын анхны тоо $\pi/xy = z^2 + 1$ бол $\pi/x \vee \pi/y$ байна. π/x бол $\bar{\pi}/\bar{x} = x$ буюу $N(\pi) = \pi\bar{\pi}/x$ болно. $N(\pi) = 2 \vee p = 4k + 1 \vee p^2 = 4k + 3$ (МКII, ж.47-48) ба $p = 4k + 3 \nmid z^2 + 1$ (МКI, х.) тул $N(\pi) = 2 \vee p = 4k + 1$ л байна.

Иймд $\exists \alpha \in \mathbb{Z}[a_i], x = N(\alpha) = a^2 + b^2$ болно. Мөн адилаар $y = N(\beta) = c^2 + d^2 = N(c + di) = N(c - di)$ энд $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. $xy = N(\alpha)N(\beta) = N(\alpha\beta) = z^2 + 1 = N(z + i)$. энд $\alpha\beta = z + i$ гэж авч болох тул $z = \text{Re}(a + bi)(c - di) = ac + bd$ болно.

Тэмдэглэл. Энэ бодолт нь $x_1 \dots x_k = y^2 + z^2$ байх натурал тоонуудын хувьд ч тохирно, өөрөөр хэлбэл тэдгээр нь $x_i = a_i^2 + b_i^2, i = \overline{1, k}, y = c^2 + d^2, z = m^2 + n^2$ хэлбэртэй л байна.

ДБ-В2. Зөв ABC гурвалжин багтаасан тойрог татаж өгсөн P болон ABC гурвалжингаар 60° өнцгөөр C оройг тойруулан эргүүлэхэд P цэг P' цэгт, харин B оройг B' цэгт буусан бол A орой нь B срейтой давхцана. Ингэхэд $PA = P'A' = P'B$ болно.

CPP' зөв гурвалжин болох учраас $CP = PP'$ ингэхээр PBP' гурвалжны талууд нь PC, PA, PB байна.

Одоо энэ гурвалжны талбайг $OP = d$ болон тойргийн R радиусаар илэрхийлье.

Тойргийн төв нь ABC гурвалжны хүндийн төв байгаа болохоор Лейбницийн теоремоор

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = a^2 + 3d^2 \quad (1)$$

ABC гурвалжны талын урт товчлохын тулд $PA = k, PB = \ell, PC = m$ гэхэд Героны томъёогоор, олох талбайг S гэвэл

$$\begin{aligned} 16S_1 &= (k + \ell + m)(k + \ell - m)(k - \ell + m)(-k + \ell + m) = \\ &= 2k^2\ell^2 + 2\ell^2m^2 + 2m^2k^2 - k^4 - \ell^4 - m^4 \end{aligned} \quad (2)$$

$\angle PAC = \alpha, \angle PAB = \beta$ гэвэл ерөнхийдөө $\alpha \pm \beta = 60^\circ$ байх бөгөөд манай тохиолдолд $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$ буюу $\cos \alpha \cos \beta - \frac{1}{2} = \sin \alpha \sin \beta$ Квадрат зэрэгт дэвшүүлээд хувиргахад

$$\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos \alpha \cos \beta + \frac{1}{4} = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta$$

PAC, PAB хоёр гурвалжнаас

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + k^2 - m^2}{2ak}, \quad \cos \beta = \frac{a^2 + k^2 - \ell^2}{2ak}$$

тул өмнөх тэнцлэд орлуулаад эмхтгэсний дараа

$$a^4 + k^4 + \ell^4 + m^4 = a^2(k^2 + \ell^2 + m^2) + k^2\ell^2 + \ell^2m^2 + m^2k^2 \quad (3)$$

(1), (2), (3) тэнцлүүдээс $9d^2 - 6a^2d^2 - 48S_1^2 + a^4 = 0$ гэж гарах учраас $(a^2 - 3d^2)^2 = 48S_1^2$ буюу $d = 3, R = 5$ гэснээр $a = \sqrt{3}\ell$ байдгийг санавал $S_1 = 4\sqrt{3}$ кв.нэгж болно.

ДБ-ВЗ. Эхлээд

$$\begin{cases} (n, N^\alpha - 1) = 1 \\ (n, N) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

байх N тоог байгуулая. $M = p_1 \dots p_s$ гээд $N = \sum_{j=1}^s g_j \left(\frac{M}{p_j} \right)^{p_j-1}$ гээ.

Энд g_j нь p_j -ийн анхны язгуур. Тэгвэл $N \equiv g_j \left(\frac{M}{p_j} \right)^{p_j-1} \equiv g_j(p_j)$

ба

$N^\alpha - 1 \equiv g_j^\alpha - 1(p_j)$ байна.

Хэрэв $1 < (n, N^\alpha - 1)$ бол $\exists p_j : 0 \equiv N^\alpha - 1 \equiv g_j^\alpha - 1(p_j) \Rightarrow p_j - 1 | \alpha$

зөрчил. $\Rightarrow n \mid \left(\sum_{a \in \mathbb{Z}_n^*} a^\alpha \right) (N^\alpha - 1)$ гэж батлахад хангалттай

$$0 \equiv \sum_{a \in \mathbb{Z}_n^*} (aN)^\alpha - \sum_{a \in \mathbb{Z}_n^*} a^\alpha = (N^\alpha - 1) \left(\sum_{a \in \mathbb{Z}_n^*} a^\alpha \right) \equiv 0(n)$$

ОУМО-48-ийн сорил 1

Б.Сандагдорж(МУБИС)

1 (Ч.Гантөмөр). $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ бол

$$\sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} + \sqrt{\frac{a+b}{c}} \geq \sqrt{6 \cdot \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}}$$

тэнцэл биш биелэхийг батал.

2 (Б.Сандагдорж). $\sin \alpha = \frac{29}{1997}$ байг. $1997^{43} \cdot \sin 43\alpha$ тоо бүхэл болохыг баталж, 5-д хуваахад гарах үлдэгдлийг ол.

3 (Б.Баясгалан). $P_1, P_2, \dots, P_n$ -хавтгайн цэгүүд.

1) Ямар нэг P_i -ийн хувьд $P_i P_j, i \neq j$ зайнууд нь дор хаяж

$$\sqrt{n - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}}$$

ялгаатай утгатай байхыг батал.

2) Минималь зай хамгийн олондоо хэдэн удаа үүсэх вэ?

1. (Олонлог төв сургууль IX ангийн сурагч Э.Энхзаяа, Хөвсгөл XI анги Б.Цэнд-Аюуш нарын бодолт)

$$A = \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} + \sqrt{\frac{a+b}{c}} = \left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} + 2\sqrt{\frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b}} + 2\sqrt{\frac{b+c}{a} \cdot \frac{a+b}{c}} + 2\sqrt{\frac{a+b}{c} \cdot \frac{c+a}{b}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

гэе.

Кошийн тэнцэл биш хэрэглэвэл

$$2\sqrt{\frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b}} = 2\sqrt{\frac{b+c}{b} \cdot \frac{c+a}{a}} = 2\sqrt{\left(1 + \frac{c}{b}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right)} \geq 2\sqrt{\frac{4c}{\sqrt{ab}}} = 4\frac{c^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}$$

болно. Үүнтэй адилаар

$$2\sqrt{\frac{b+c}{a} \cdot \frac{a+b}{c}} \geq 4\frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}c^{\frac{1}{4}}}, \quad 2\sqrt{\frac{a+b}{c} \cdot \frac{c+a}{b}} \geq 4\frac{a^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}$$

БОЛНО.

$$A \geq \left(\left(\frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{4c^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}} \right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{4b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}c^{\frac{1}{4}}} \right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{a}{b} + \frac{4a^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} = B$$

ба

$$\begin{aligned} \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{4c^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}} &= \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{c^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}} + \frac{c^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}} + \frac{c^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}} + \frac{c^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}} \geq \\ &\geq 6 \cdot \sqrt[6]{\frac{c^{\frac{1}{2}} \cdot 4c^2}{a^{\frac{1}{4}} \cdot 4 \cdot a \cdot b^{\frac{1}{4}} \cdot 4 \cdot b}} = 6 \frac{c^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}} = 6 \frac{c}{\sqrt[3]{abc}} \end{aligned}$$

гэдгийг харвал

$$A \geq B \geq \left(6 \frac{a}{\sqrt[3]{abc}} + 6 \frac{b}{\sqrt[3]{abc}} + 6 \frac{c}{\sqrt[3]{abc}} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6 \cdot \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}}$$

болж батлах зүйл гарна. Кошийн тэнцэл бишийн тэнцэлдээ хүрэх нөхцөлийг санавал өгөгдсөн тэнцэл биш тэнцэлдээ $a = b = c$ үед хүрнэ.

2. $1997^n \cdot \sin n\alpha = a_n$; $1997^n \cdot \cos n\alpha = b_n$ гэж тэмдэглэе. Нөхцөлөөр $p_1 = 29, b_1 = \pm \sqrt{3987168}$ гэж гарна. $\sin(n+1)\alpha = \sin \alpha \cdot \cos n\alpha + \cos \alpha \cdot \sin n\alpha$, $\cos(n+1)\alpha = \cos \alpha \cdot \cos n\alpha - \sin \alpha \cdot \sin n\alpha$ адилтгалаас

$$a_{n+1} = a_1 b_n + b_1 a_n \quad (1)$$

$$b_{n+1} = b_1 b_n - a_1 a_n \quad (2)$$

гэж гарна (1)-ээс $b_n = \frac{a_{n+1} - b_1 a_n}{a_1}$ гэж олдох түүнийг (2)-д оруулбал

$$\frac{a_{n+2} - b_1 a_{n+1}}{a_1} = b_1 \cdot \frac{a_{n+1} - b_1 a_n}{a_1} - a_1 a_n \Rightarrow$$

$$a_{n+2} - b_1 a_{n+1} = b_1 a_{n+1} - b_1^2 a_n - a_1^2 a_n \Leftrightarrow a_{n+2} = 2b_1 a_{n+1} - (b_1^2 + a_1^2) a_n (*)$$

гэж гарна. (*)-оос $a_{2n+1} = 2b_1 a_{2n} - 1997^2 \cdot a_{2n-1}$ буюу

$$2b_1 a_{2n} = a_{2n+1} + 1997^2 \cdot a_{2n-1} \quad (**)$$

байна. Мөн (*)-оос

$$a_{2n+2} = 2b_1 a_{2n+1} - 1997^2 a_{2n}$$

гэж гарах ба үүнийг $2b_1$ -ээр үржүүлбэл

$$2b_1 a_{2n+2} = 4b_1^2 a_{2n+1} - 1997^2 2b_1 a_{2n}$$

буюу (**) -ийг ашиглавал

$$a_{2n+3} + 1997^2 \cdot a_{2n+1} = 4b_1^2 \cdot a_{2n+1} - 1997^2 a_{2n+1} - 1997^4 a_{2n-1}$$

болно. Эндээс

$$a_{2n+3} = 2(1997^2 - 2 \cdot 29^2) a_{2n+1} - 1997^4 a_{2n-1}$$

байна.

$$a_1 = 29; a_3 = 1997^3 \cdot \sin 3\alpha = 1997^3 \cdot (3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha)$$

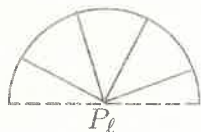
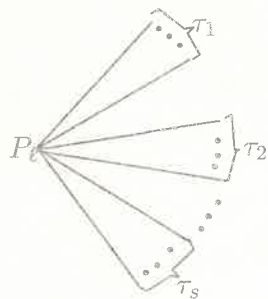
буюу a_3 -бүхэл тоо болно. Иймээс n -сондгой үед a_n -нь бүхэл тоо болно. Нөгөө талаас $a_1 \equiv -1(5), a_3 \equiv 2(5)$ буюу рекуррент дарааллаас $a_{2n+3} \equiv -(a_{2n+1} + a_{2n-1})(\text{mod } 5)$ гэж гарна. Иймд $a_1, a_3, a_5, \dots$ дарааллыг 5-аар жишихэд $-1, 2, -1, -1, 2, -1, \dots$ буюу 3-аар үелэнэ. Эндээс $a_{43} \equiv -1(5)$ байна.

3. 1) m -ямар нэг цэгээс бусад цэг хүртлэх ялгаатай зайнуудын максималь тоо байг.

P_ℓ -хамгийн зүүн захын цэг байг.

s - P_ℓ цэгээс бусад цэг хүртлэх ялгаатай зайнуудын тоо

t - P_ℓ цэгээс ижил зайд орших цэгүүдийн максималь тоо



$\max |\tau_i| = t$. Тэгвэл $s \cdot t \geq n - 1, m \geq s$ байна. Мөн $m \geq t - 1$. Учир нь P_ℓ -ээс ижил зайд орших t цэг нь тал тойрог дээр байрлах бөгөөд уг тал тойргийн хамгийн захын цэгээс бусад цэг хүртлэх зайнууд бүгд ялгаатай байна. Тийм учраас $m(m+1) \geq n - 1$ болж батлагдана. 2) Хэрэв цэгүүд хамгийн бага зайтай бол хооронд нь хэрчмээр холбоё. Тэгвэл эдгээр хэрчмүүд өөр хоорондоо үл огтлолцоно. Иймд n оройтой хавтгай граф үүснэ. Ирмэгийн тоо хамгийн олондоо $3n - 6$ (Bella Bollobas. The Art of Mathematics: Coffee Time in Memphis Cambridge 2006 page 156) байна.

*. Ер нь энэ нь Эрдешийн 1946 онд баталсан хэцүү үр дүнгүүдийн энгийн хэлбэр нь юм. Тэрээр энэ зайн тоо $3n - c\sqrt{n}, c > 0$ тогтмол гэж баталжээ.

ОУМО-48, II СОРИЛ

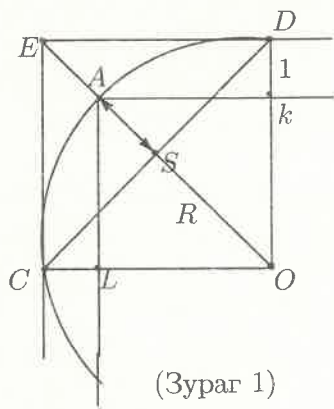
Б.Сандагдорж(МУБИС)

- 1 (Б.Баясгалан). Талуудын харьцаа $\sqrt{13}$ байх тэгш өнцөгт өгөгдөв. Уг тэгш өнцөгтөөс квадратыг тасалж тэгш өнцөгт үлдээв. Энэ үйлдлийг олон удаа давтав. Үүсэх тэгш өнцөгтүүдийн талуудын харьцааны дараалал үелэхийг батал.
- 2 (Н.Дайвий-Од). Нэгж өргөнтэй тэгш өнцөг үүсгэсэн коридорт d диаметртэй муруй багтан эргэж чаддаг байв. d -ийн хамгийн их утгыг ол (муруйн хамгийн хол орших хоёр цэгийн хоорондох зайг диаметр гэнэ). Муруйн зузааныг тооцохгүй бөгөөд муруйн хэлбэр дүрсээ өөрчлөхгүйгээр хавтгайгаараа коридорт өнцөгтэй хэсгээр нэвтрэн гарах боломжтой байхаар багтан эргэж чаддаг гэнэ.
- 3 (Б.Хоролдагва). $ABC(AB \neq BC)$ гурвалжны BH өндрөөр диаметрээ хийсэн тойрог AB, BC талуудыг харгалзан M, N цэгүүдэд огтолно. M, N цэгүүдэд татсан тойргийн шүргэгчүүд O цэгт огтлолцох бөгөөд (BO) шулуун AC талыг E цэгт огтолно. (BO) шулуун дээр $BE = EK$ байх K цэгийг тэмдэглэв.
Хэрэв AM, MN, NC, CK, KA хэрчимүүдийн дунджууд харгалзан T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 бол $(T_1T_4), (T_2K), (T_3T_5)$ шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.

1. Хялбар тооцоо хийж талуудын харьцааны дараалал 10-аар үелэхийг хялбар харуулж болно. Энэ бологыг ерөнхий тохиолдолд өөрөөр хэлбэл $\sqrt{n}$, n -нь квадратаас чөлөөт үед бодох нь сонирхолтой юм.

2. ▲

а) $2 + 2\sqrt{2}$ диаметртэй атлаа коридороор саадгүй эргэдэг муруй олдохыг харуулья. (1-р зураг)

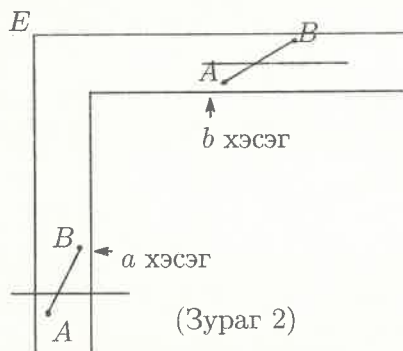


Коридорын өнцгийн дотор орой A -г шүргэдэг мөн гадна талуудыг C, D цэгүүдэд шүргэх тойргийн $\widehat{CD}$ нум нь энэ өнцгөөр чөлөөтэй эргэх бөгөөд энэ нумын диаметр нь CD хэрчмийн урттай тэнцэнэ. $AKOL$ квадрат ба түүний диагонал R учир $KO = \frac{R}{\sqrt{2}}$, нөгөө талаас $DO = R = \frac{R}{\sqrt{2}} + 1$ учир

$$R = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}; EDOC \text{ квадрат учир } CD = \sqrt{2}R = \sqrt{2}\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}-1} = 2 + 2\sqrt{2} \text{ болю.}$$

Нөгөө талаас $ES = CD : 2 = 1 + \sqrt{2}$; $AE = \sqrt{2}$ учир $AS = 1$ болж муруйн "өргөн" нь коридорын хананд багтах нь харагдлаа. Иймд $\overline{CD}$ муруй энэ коридороор чөлөөтэй эргэж багтана.

б) Одоо $d > 2 + 2\sqrt{2}$ байх диаметртай ямар ч муруй коридорт эргэхгүй гэж харуулая.



Аливаа муруй нь хэдэн ч диаметртай байж болно гэдгийг анзаараад уул муруйн аль нэг d диаметрийг үүсгэж байгаа A, B цэгүүдийг сонирхоё. Нэгэнт $AB = d > 2 + 2\sqrt{2}$ учир а)-хэсэгт байрлахдаа AB хэрчимийн L шулуунтай үүсгэх өнцөг 45° -аас эрс их,

b хэсэгт байрлахдаа үүсгэх өнцөг нь 45° -аас бага, эргэлтийн хөдөлгөөн тасралтгүй учир AB хэрчим KL -тэй 45° өнцөг үүсгэх эгшин олдоно (зураг 2). Энэ үед (зураг 3) коридороос 1 зайд орших KL -д 45° өнцөг үүсэх CD хэрчмийн урт $2 + 2\sqrt{2}$ байдгийг а)-хэсэгт харуулсан учир

гөөд энэ тэгшитгэлийг $(T_1T_4) \cap (T_3T_5) = S\left(\frac{2y-1}{\beta-1}, \frac{\beta+1}{4-(\alpha-1)(\beta-1)}\right)$ цэгийн координат хангахыг хялбархан шалгаж болно. Иймд $(T_1T_4), (T_3T_5), (KT_2)$ шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно.

ОУМО-48, III СОРИЛ

Ц.Дашдорж

1 (Б.Санчир). Эерэг a_i, w_i тоонуудын хувьд жинтэй $r \in \mathbb{R}$ зэрэгт дундаж гэдгийг

$$M_n^{[r]}(a; w) := \left(\frac{\sum_{i=1}^n w_i a_i^r}{\sum_{i=1}^n w_i} \right)^{\frac{1}{r}}$$

-ээр тэмдэглэе.

$r \geq s \geq 1$ гэсэн нөхцлийг хангах тоонуудын хувьд

1.)

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n w_i a_i^r}{\sum_{i=1}^n w_i a_i^s} \right)^{\frac{1}{r-s}} \geq M_n^{[1]}(a; w) \quad (1)$$

2.)

$$\left(\frac{M_n^{[r]}(a; w)}{M_n^{[0]}(a; w)} \right)^r + \left(\frac{M_n^{[0]}(a; w)}{M_n^{[s]}(a; w)} \right)^s \geq 2 \quad (2)$$

тэнцэтгэл бишүүд тус тус биелнэ гэж батал.

2 (Ц.Дашдорж). $F_0 = 0, F_1 = 1, n \geq 2$ үед $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ Фибоначчийн дараалал байг. $F_n^2 / F_m \Leftrightarrow nF_n \mid m$ гэж батал.

3 (Б.Батбаясгалан). Гольфийн талбайд тус бүр n хүнтэй 2 баг гарав. Тоглогч бүр эсрэг багийн яг r тоглогч руу цохилт хийх боломжтой. Талбайд нэг ширхэг бөмбөг байсан ба бөмбөг авсан тоглогч урьд нь бөмбөг цохиогүй, эсрэг багийн аль нэг тоглогч руу л цохиж болох байв. Хамгийн сүүлд цохилт хийж чадсан баг хожих бол бөмбөгийг тоглолтонд оруулсан баг хожих уу эсрэг баг нь хожих уу? Хэрэв A тоглогч B тоглогч руу цохих боломжтой бол B тоглогч A тоглогч руу цохих боломжтой гэж үз.

1.

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{M_n^{[r]}(a; w)}{M_n^{[1]}(a; w)} \right)^r \geq \left(\frac{M_n^{[s]}(a; w)}{M_n^{[1]}(a; w)} \right)^s$$

болох ба $f(x) = \left(\frac{M_n^{[x]}(a; w)}{M_n^{[1]}(a; w)} \right)^x$ гэсэн функц авч үзье.

Бид $f(r) \geq f(s)$, $(r \geq s)$ гэж баталбал хангалттай. Хялбар тооцоо хийж

$$f'(x) = \frac{1}{x \left(M_n^{[1]}(a; w) \right)^x} \left(\frac{\sum_{i=1}^n w_i a_i^x \ln a_i^x}{\sum_{i=1}^n w_i} - \frac{\sum_{i=1}^n w_i a_i^x}{\sum_{i=1}^n w_i} \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^n w_i a_i^x}{\sum_{i=1}^n w_i} \right)^x \right)$$

болохыг харж болох ба энэ нь $g(x) = x \ln x$ гэсэн хотгор функцийг хувьд жинтэй Йенсений тэнцэтгэл биш ёсоор

$$f'(x) \geq 0, \quad 0 < x$$

тул (1) батлагдлаа.

Дараах функцийг авч үзье.

$$\varphi(x) = \left(\frac{M_n^{[x]}(a; w)}{M_n^{[0]}(a; w)} \right)^x$$

Дээрхтэй адилаар

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x \left(M_n^{[0]}(a; w) \right)^x} \left(\frac{\sum_{i=1}^n w_i a_i^x \ln a_i^x}{\sum_{i=1}^n w_i} - \frac{\sum_{i=1}^n w_i a_i^x}{\sum_{i=1}^n w_i} \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^n w_i a_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \right)^x \right)$$

энэ нь $\varphi'(x) \geq 0$. Кошийн тэнцэтгэл биш бичвэл

$$\left(\frac{M_n^{[r]}(a; w)}{M_n^{[0]}(a; w)} \right)^r + \left(\frac{M_n^{[0]}(a; w)}{M_n^{[s]}(a; w)} \right)^s \geq \left(\frac{M_n^{[s]}(a; w)}{M_n^{[0]}(a; w)} \right)^s + \left(\frac{M_n^{[0]}(a; w)}{M_n^{[s]}(a; w)} \right)^s \geq 2$$

(2) гэж гарна. Тэнцэтгэл бишүүд зөвхөн $a_1 = \dots = a_n$ үед л тэнцэлдээ хүрнэ.

2. ▲ MKI, 1.12-5-д

$$F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n \quad (1)$$

$$(F_n, F_m) = F_{(m,n)} \quad (2)$$

гэж баталсан. (2)-оос $F_n \mid F_m$ бол $m = kn$ гэж гарна. Мөн $F_n \pmod{F_n^2} = F_n \neq 0$ байна. (1)-ээс

$$F_{2n} = F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n \equiv 2F_n F_{n+1} \pmod{F_n^2} \quad (3)$$

учир нь

$$F_n F_{n+1} \equiv F_n F_{n-1} \pmod{F_n^2} \quad (4)$$

Үүний адилаар

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2 \equiv F_{n+1}^2 \pmod{F_n^2} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} F_{3n} &= F_{2n+1} F_n + F_{2n} F_{n-1} \stackrel{(5),(3)}{\equiv} F_{n+1}^2 F_n + (2F_n F_{n+1}) F_{n-1} \\ &\stackrel{(4)}{\equiv} 3F_{n+1}^2 F_n \pmod{F_n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{3n+1} &= F_{2n+1} F_{n+1} + F_{2n} F_n \stackrel{(5),(3)}{\equiv} F_{n+1}^3 + (2F_n F_{n+1}) F_n \\ &\equiv F_{n+1}^3 \pmod{F_n^2} \end{aligned}$$

Индукцээр (k -аар)

$$F_{kn} \equiv kF_n F_{n+1}^{k-1}, \quad F_{kn+1} \equiv F_{n+1}^k \pmod{F_n^2} \quad (6)$$

гэж баталж болно. ($F_{n+1}, F_n = 1$ тул

$$F_{kn} \equiv 0 \pmod{F_n^2} \Leftrightarrow kF_n \stackrel{(6)}{\equiv} 0 \pmod{F_n^2} \Leftrightarrow k \equiv 0(F_n)$$

▼

3. Зөв тоглолтонд бөмбөг тоглолтонд оруулсан баг хожихийг батлая. Тоглогчдоо графын орой гээд бие бие рүүгээ цохих боломжтой тоглогчдийг ирмэгээр холбовол орой бүрийн зэрэг нь r байх, туйл бүрдээ n оройтой, 2 туйлт граф үүснэ. Бодолтонд дараах теоремийг ашиглая.

Холлийн теорем. V_1, V_2 туйлуудтай 2 туйлт графийн $\forall X \subseteq V_1$ -ийн хувьд

$$|X| \leq |\Gamma(X)|$$

нөхцөл биелэх бол V_1 -ийн орой бүрийг V_2 -ийн ялгаатай оройнуудад ирмэгээр харгалзуулж болно. Энд $\Gamma(X)$ нь X оройн олонлогтой ирмэгээр холбогдсон V_2 -ийн бүх оройнуудын олонлог юм.

Бодлогын нөхцөлөөс бидний авч үзэж байгаа граф Холлын теоремийн нөхцөлийг хангах нь илэрхий байна. Учир нь $X \cup \Gamma(X)$ оройнуудыг тэдгээрийг холбож байгаа ирмэгүүдийн хамт авахад үүсэх графын X -ийн орой бүрийн зэрэг r , $\Gamma(X)$ -ийн орой бүрийн зэрэг r -ээс хэтрэхгүй байна. Нөгөө талаас 2 туйлт граф тул X -ийн оройнуудын зэргүүдийн нийлбэр $\Gamma(X)$ -ийн оройнуудын зэргүүдийн нийлбэртэй тэнцүү тул $|X| \leq |\Gamma(X)|$ байна. Иймд бөмбөг тоглолтонд оруулсан багийн тоглогч бүрийг эсрэг багийн ялгаатай тоглогчид руу ирмэгээр дамжуулан харгалзуулж болно. Энэ тохиолдолд эхний багийн тоглогч бүр эсрэг багийн дээрх харгалзаагаар харгалзах тоглогч руу цохилт хийгээд байхад үргэлж цохилт хийж чадах тул бөмбөг тоглолтонд оруулсан баг ямар ч тохиолдолд хожино.

ОУМО-48, IV СОРИЛ

Ц.Дашдорж

1 (Д.Батнасан). Төгсгөлөг тооны натурал тоо өгөгдөв. Эдгээрээс дурын n ширхэг тоонууд сонгох бүрд нэг нь нөгөөгөө хуваадаг 2 тоо олддог байв. Тэгвэл эдгээр тоонуудыг $n - 1$ ширхэг өнгөөр ижил өнгийн дурын 2 тооны нэг нь нөгөөгөө хуваадаг байхаар будаж болохыг батал.

2 (Ц.Дашдорж). $P_0(x) = x, P_1 = 4x^3 + 3x$ $n \geq 1$ үед $P_{n+1}(x) = (4x^2 + 2)P_n(x) - P_{n-1}(x)$ ба $m \geq 1$ үед $A(m) = \{P_n(m) \mid n \in \mathbb{N}\}$ гэе. $A(m)$ ба $A(m+4)$ нь ерөнхий элементгүй гэж батал.

3 (У.Батзориг). Эерэг бүхэл $a, b, c \in \mathbb{N}$ тоонууд өгчээ. Тэгвэл $c \mid a^x + x + b$ байх $x \in \mathbb{N}$ тоо олдохыг батал.

1. Теорем(Дилуорс) M эрэмбэлэгдсэн олонлог байг. M олонлогт орших максимал (хамгийн их элементэй) антигинжний элементийн тоо n бол M олонлогийг n ширхэг гинжүүдэд хувааж болно.

M нь өгөгдсөн натурал тоонуудын олонлог байг. M -д эрэмбийн харьцааг $[(a \leq b) \Leftrightarrow (a \text{ нь } b\text{-г хуваана})]$ гэж тодорхойлбол M нь эрэмбэлэгдсэн олонлог болно. Бодлогын нөхцөл ёсоор максимал антигинжний элементийн тоо s гэвэл $s \leq n - 1$ болно.

Дилуорсын теорем ёсоор M -г s -өнгөөр (ижил өнгийн элементүүд гинж үүсгэнэ) түүгээр ч барахгүй $n - 1$ өнгөөр будаж болно. Нэг өнгийн элементүүд гинж үүсгэнэ. Өөрөөр хэлбэл нэг нь нөгөөгөө хуваана.

Жич Дилуорсын теоремийн тухай "Квант" сэтгүүлийн 2005 оны 05 дугаарын "Цепи и антицепи" өгүүлэлээс уншина уу.

2. Характеристик тэгшитгэл $q^2 - (4x^2 + 2)q + 1 = 0$ тул

$$P_n(x) = c_1(\sqrt{+x})^{2n} + c_2(\sqrt{-x})^{2n}, \quad c_1 = \frac{x + \sqrt{+x}}{2}, \quad c_2 = \frac{x - \sqrt{-x}}{2}.$$

Үүгээр

$$P_n(x) = \frac{1}{2}[(\sqrt{+x})^{2n+1} - (\sqrt{-x})^{2n+1}] = \sqrt{x^2 + 1} \cdot Q_n(x), \quad Q_n(x) \in \mathbb{Z}^+[x]$$

$$P_n^2(x) = (x^2 + 1)Q_n^2 \quad (1)$$

$\exists m, A(m) \cap A(m+4) \neq \emptyset$ гэж үзье. (1)-ээс

$$(m^2 + 1)Q_n^2(m) = [(m+4)^2 + 1]Q_n^2(m+4),$$

$$a = Q_n(m) \quad b = Q_n(m+4) \in \mathbb{Z}_+, (m^2 + 1)a^2 = [(m+4)^2 + 1]b^2$$

Иймд $\exists x, y, d \in \mathbb{N}, (x, y) = 1$

$$m^2 + 1 = dx^2 \quad (2)$$

$$(m+4)^2 + 1 = dy^2 \quad (3)$$

Эндээс $8m + 16 = d(y^2 - x^2), y > x$.

$s \in \mathbb{Z}$ бол $4 \nmid s^2 + 1$ учир (2) ба (3)-аас x, y сондгой тоонууд гэж гарав. Хэрэв $y \geq x+4$ бол $8m + 16 \geq d[(x+4)^2 - x^2] = 8d(x+2) \Rightarrow m+2 \geq d(x+2) = dx + 2d \geq dx + 2 \rightarrow m \geq dx \Rightarrow m^2 + 1 = dx^2 \geq d^2x^2 + 1 \rightarrow d(1-d)x^2 \geq 1$ зөрчил.

Иймд $y = x+2$ $2(m+2) = d(x+1) \Leftrightarrow m+2 = d \cdot \frac{x+1}{2} \Rightarrow d|m+2 \Rightarrow m \equiv -2 \pmod{d} \Rightarrow m^2 + 1 \equiv 5 \pmod{d}$. Гэтэл $m^2 + 1 \equiv 0 \pmod{d}$ тул $d/5$ гэж гарав. $d=1$ бол $x^2 = m^2 + 1$ зөрчил.

$d=5$ бол $5x = 2m-1, 21m^2 + 4m + 24 = 0$ зөрчил. Иймд

$$A(m) \cap A(m+4) = \emptyset$$

3. $a, a^2, a^3, \dots$ нь $(\text{mod } c)$ -ээр үелэх ба үеийн уртыг ℓ гээ. Эндээс $a^{i+\ell \cdot k} \equiv a^i \pmod{c} \quad (\forall k, i \in \mathbb{N} \text{ хувьд}) \quad (\ell, c) = d$ байг. Хэрэв $c > 1$ бол $d < c$ гэж баталъя. $d \mid c \Rightarrow d \leq c$ болно. Хэрэв $d = c$ бол $c \mid \ell$ Дараалалын дурын нэг үе дотор $(\text{mod } c)$ -ээр ижил 2 тоо байж болохгүйг тэмдэглэе. Учир нь: $a^i \equiv a^j \pmod{c} \Rightarrow a^{i+t} \equiv a^{j+t} \pmod{c} \Rightarrow \ell \mid i-j$ болж зөрчил үүсэв. Иймд $a, a^2, a^3, \dots$ дарааллын $(\text{mod } C)$ -ээрх үе c -ээс ихгүй болов. Иймд $c \mid \ell \Leftrightarrow c = \ell$. Эндээс $c \mid a^n$ байх n олдох ба n -ээс их k бүрийн хувьд $c \mid a^k$ болж $c=1, \ell=1$ болоход хүрнэ.

Одоо c -ээр индукцэлж баталъя.

$c=1$ үед үнэн.

$c > 1$ үед c -ээс бага бүх тооны хувьд үнэн байг.

$\Rightarrow d(d < c)$ үед үнэн. Иймд $a^{n_i} + n_i \equiv -i \pmod{d}$ байх
 $(i = 0, d-1) \quad n_0; n_1; \dots; n_{d-1}$ тоонууд олдоно. $b = qd + r$ байг.

$$a^{n_r} + n_r = -r + md \quad (*)$$

$$a^{n_r + \ell \cdot k} + n_r + \ell \cdot k = a^{n_r} + (n_r + \ell \cdot k) = -r + md + \ell \cdot k \quad (**)$$

k нь дурын тооны хувьд үнэн тул $\ell \cdot k$ нь d -ийн дурын давталт байхаар сонгож чадна. $\ell \cdot k \equiv (-q - m)d \pmod{\ell}$ байхаар сонгон $(**)$ -д оруулъя.

$$a^{n_r + \ell \cdot k} + n_r + \ell \cdot k \equiv r + md + (q - m)d \equiv -r - qd \equiv -b \pmod{c}$$

болж индукцын шилжилт хийгдлээ.

ОУ-ын Математикийн 48-р олимпиадад оролцсон тухай

Ц.Дашдорж

Б.Сандагдорж

ОУМО-48 2007 оны 7-р сарын 19-31-нд Вьетнамын Ханойд болж өнгөрлөө. Дэлхийн 95 орон оролцсон энэ Олимпиадад Орос 184, Хятад 181, Вьетнам 168, Өмнөд Солонгос 168, АНУ 155, Украин 154, Япон 154, Хойд Солонгос 151, Болгор 149, Тайван 149 оноогоор эхний 10 байранд шалгарлаа.

Манай улсаас:

1. Б.Сумъяа (Олонлог сургууль 11-р анги) 24 оноогоор мөнгөн медаль

2. Н.Бямбажав (1-р сургууль 10-р анги) 23 оноогоор мөнгөн медаль

3. Э.Энхзаяа (Олонлог сургууль 9-р анги) 14 оноогоор хүрэл медаль

4. Э.Тэмүгэ (УБ, 1-р сургууль 10-р анги) 12 оноо

5. Г.Оюундарь (1-р сургууль 10-р анги) 8 оноо

6. Н.Балжинням (Увс, 10-р анги) 7 оноо тус тус авч багийн дүнгээр 88 оноогоор 95 орноос 34-р байранд оров. Багийн орлогч удирдагчаар МУБИС-ийн Б.Сандагдорж явлаа.

ОУМО-49 нь 2008.07.10-22 нд Испанийн Мадридад болохоор төлөвлөгдлөө.

ОУ-1. $a_1, a_2, \dots, a_n$ өгөгдсөн бодит тоонууд ба $i (1 \leq i \leq n)$ бүрийн хувьд $d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$, $d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}$ гээ.

(а) ямарч $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ бодит тоонуудын хувьд

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2} \quad (*)$$

гэж батал.

(б) (*)-д тэнцэл биелж байх $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ бодит тоонуудын оршихыг үзүүл.

ОУ-2. $ABCD$ нь параллелограмм ба $BCED$ тойрогт багтсан дөрвөн өнцөгт байхаар A, B, C, D ба E цэгүүд өгчээ. A -г дайрсан ℓ шулуун нь DC хэрчмийг F цэгт, BC шулууныг G цэгт огтолдог ба $EF = EG = EC$ бол ℓ нь DAB өнцгийн биссектрис гэж батал.

ОУ-3. Математикийн тэмцээнд оролцогчдын зарим нь бие биеэ таньдаг танилууд байв. Аль ч хоёр нь танил байх оролцогчдын бүлгийг хамтлаг гэе. (Тухайлбал ганц хүн ч хамтлаг болно.) Хамтлагийн гишүүдийн тоог түүний хэмжээс гэе. Хамтлагийн хамгийн их хэмжээс нь тэгш тоо байсан бол хоёр өрөөн дэх хамтлагийн хамгийн их хэмжээсүүд нь тэнцүү байхаар бүх оролцогчдыг хоёр өрөөнд байрлуулж болохыг батал.

ОУ-4. ABC гурвалжны BCA өнцгийн биссектрис нь багтаасан тойргийг R цэгт, BC талын дундаж перпендикулярыг P цэгт, AC талын дундаж перпендикулярыг Q цэгт огтолдог. BC талын дундаж цэг K , AC талын дундаж цэг L гэвэл RPK ба RQL гурвалжнуудын талбай тэнцүү гэж батал.

ОУ-5. a ба b натурал тоонууд байг. $4ab - 1$ тоо $(4a^2 - 1)^2$ -г хуваадаг бол $a = b$ гэж батал.

ОУ-6. n нь натурал тоо байг.

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$$

гэсэн 3 хэмжээст огторгуйн $(n + 1)^3 - 1$ цэгээс тогтох олонлогийг авъя. Нэгдэл нь S -ийг агуулах боловч $(0, 0, 0)$ цэгийг үл агуулах хавтгайнуудын тоо хамгийн багадаа хэд байхыг ол.

ОУ-1. (a): $1 \leq p \leq q \leq r \leq n, d = d_q, a_p = \max\{a_j | 1 \leq j \leq q\}, a_r = \min\{a_j | q \leq j \leq n\}$ буюу $d = a_p - a_r$ байг (Энэ индексүүд нэг утгатай байх нь албагүй). Дурын $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ бодит тоонуудын хувьд $|x_p - a_p|, |x_r - a_r|$ -ийг авч үзье.

$$(a_p - x_p) + (x_r - a_r) = (a_p - a_r) + (x_r - x_p) \geq a_p - a_r = d$$

байх тул $a_p - x_p \geq \frac{d}{2}$ эсвэл $x_r - a_r \geq \frac{d}{2}$ байна. Иймд

$$\begin{aligned} \max\{|x_i - a_i| \mid 1 \leq i \leq n\} &\geq \max\{|a_p - x_p|, |x_r - a_r|\} \geq \\ &\geq \max\{a_p - x_p, x_r - a_r\} \geq \frac{d}{2} \end{aligned}$$

(в): (x_k) дарааллыг $x_1 = a_1 - \frac{d}{2}$, $x_k = \{x_{k-1}, a_k - \frac{d}{2}\}$, $2 \leq k \leq n$ гэж тодорхойлоё. Одоо (*)-д тэнцэл биелэхийг харуулъя. Тодорхойлолт ёсоор (x_k) дараалал үл буурах ба $1 \leq k \leq n$ байх k бүрийн хувьд $x_k - a_k \geq -\frac{d}{2}$ байгаа. Одоо $1 \leq k \leq n$ байх k бүрийн хувьд

$$x_k - a_k \leq \frac{d}{2} \quad (1)$$

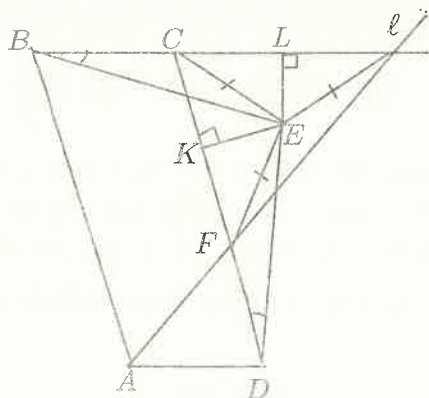
гэж харуулая. $1 \leq k \leq n$ байх k -г авъя. ℓ нь $x_k = x_\ell$ байх хамгийн бага индекс гээ. Эсвэл $\ell = 1$, эсвэл $\ell \geq 2$ ба $x_\ell > x_{\ell-1}$ байна. Аль ч тохиолдолд

$$x_k = x_\ell = a_\ell - \frac{d}{2} \quad (2)$$

байна. $a_\ell - a_k \leq \max\{a_j \mid 1 \leq j \leq k\} - \min\{a_j \mid k \leq j \leq n\} = d_k \leq d$ байх тул (2)-оос $x_k - a_k = a_\ell - a_k - \frac{d}{2} \leq d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}$ болж, (1) батлагдав. Үүгээр $\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \leq i \leq n\} \leq \frac{d}{2}$ боллоо.

$|x_1 - a_1| = \frac{d}{2}$ тул (в) батлагдав. Одоо (в) хэсгийн өөр нэг бодолт буюу (x_k) дарааллын өөр нэг байгуулалтыг толилуулая. $1 \leq i \leq n$ бүрийн хувьд $M_i = \max\{a_j \mid 1 \leq j \leq i\}$, $m_i = \min\{a_j \mid i \leq j \leq n\}$ гээ. Бүх $1 \leq i \leq n$ -ийн хувьд $M_i \leq M_{i+1}$, $m_i \leq m_{i+1}$, $m_i \leq a_i \leq M_i$ байна. (*)-д тэнцэл биелэхийн тулд $x_i = \frac{M_i + m_i}{2}$ гэж авъя. (x_i) үл буурах дараалал ба $d_i = M_i - m_i$ гэдгээс $-\frac{d_i}{2} = \frac{m_i - M_i}{2} = x_i - M_i \leq x_i - a_i \leq x_i - m_i = \frac{M_i - m_i}{2} = \frac{d_i}{2}$ тул $\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \leq i \leq n\} \leq \max\{\frac{d_i}{2} \mid 1 \leq i \leq n\} = \frac{d}{2}$. Иймд (а) ёсоор (*)-д тэнцэл биелэнэ.

OY-2.



EK ба EL нь харгалзан $\triangle ECF$, $\triangle EGC$ -уудын өндрүүд байг (зураг). $\triangle ADF \sim \triangle GCF$ тул:

$$\begin{aligned} \frac{AD}{GC} = \frac{DF}{CF} &\Rightarrow \frac{BC}{CG} = \frac{DF}{CF} \Rightarrow \frac{BC}{CL} = \frac{DF}{CK} \Rightarrow \frac{BC+CL}{CL} = \frac{DF+FK}{CK} \\ &\Rightarrow \frac{BL}{CL} = \frac{DK}{CK} \Rightarrow \frac{BL}{DK} = \frac{CL}{CK} \end{aligned} \quad (1)$$

болно. $\triangle BLE \sim \triangle DKE$ тул:

$$\frac{BL}{DK} = \frac{CL}{CK} \quad (2)$$

байна.

(1) ба (2)-оос $\frac{CL}{CK} = \frac{EL}{EK}$ Үндээс $\Delta CLE, \Delta CKE$ -ууд тэгсгээтэй

болно. Тиймээс $\frac{CL}{CK} = \frac{CE}{CE} = 1$. Өөрөөр хэлбэл $CL = CK$ буюу $GC = CF$ боллоо. Эндээс $FD = AD$ буюу $AB = BG$ болж бодлого бодогдов.

ОУ-3. Оролцогчыг байрлуулах алгоритмыг өгье. Room A , Room B гэсэн 2 өрөөтэй ба хугацааны дурын моментод Room X -д буй оролцогчдын олонлогийг X -ээр, тэнд буй хамтлагийн их хэмжээсийг $c(X)$ гье.

Алхам 1. Хамгийн их хэмжээстэй хамтлагийн нэг нь M ба $|M| = 2m$ байг. M -ийн бүх гишүүдийг Room A -д үлдэх бүх хүнийг Room B -д байрлуулъя. Тэгвэл $c(A) = |M| \geq c(B)$ байна.

Алхам 2. $c(A) > c(B)$ байвал Room A -аас 1 хүнийг Room B -д илгээе: $c(A) > c(B)$ тул $A \neq \emptyset$ байна. Алхам бүрт $c(A)$ нэгээр буурах ба $c(B)$ нэгээс ихгүйгээр өснө. Иймд

$$k = c(A) \leq c(B) \leq c(A) + 1 \quad (1)$$

байрлалд хүрч чадна: $c(A) = c(B) + 1$ байг.

$$c(A') = c(A) - 1 = c(B) \leq c(B') \leq c(B) + 1 = c(A) = c(A') + 1$$

Эндээс

$$c(A) = |A| \geq m \quad (2)$$

гэж гарна. $c(A) < m$ бол $c(B) \geq m + 1 = m - 1 + 2 \geq c(A) + 2$ нь (1)-д зөрчинө.

Алхам 3. Хэрэв $c(B) = k$ бол бодлого бодогдоно (∇).

Иймд $c(B) = k + 1$ -д хүрч ирнэ ((1) ёсоор).

(2)-оор $k = |A| = |A \cap M| \geq m$ тул

$$|B \cap M| \leq m \quad (3)$$

байна.

Алхам 4. Хэрэв $\exists x \in B \cap M, \exists C \subset B$ хамтлаг, $|C| = k + 1, x \notin C$ бол x -ийг Room A -руу илгээнэ, ингэхэд ∇ : x -ийг Room A -руу илгээсний дараа $c(A) = k + 1, c(B) = k + 1$ болно.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Хэрэв ийм биш бол Room } B\text{-ийн } k + 1 \\ \text{хэмжээстэй хамтлаг бүр } B \cap M\text{-г агуулна.} \end{array} \right] \quad (*)$$

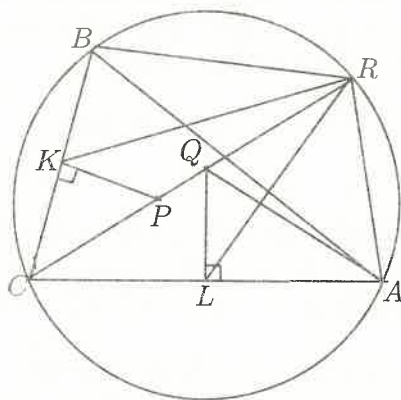
Алхам 5. $c(B) = k + 1$ үед $|C| = k + 1$ байх $B \supset C$ хамтлагийг сонгож $C \setminus M$ -ийн нэг элементийг Room A -руу илгээж болно: $|C| = k + 1 > m \geq |B \cap M|$ тул $C \setminus M \neq \emptyset$. Алхам 5-г хийх бүрт $c(B)$ нэгээс илүүгүйгээр буурна. Иймд эцэстээ $c(B) = k$ болно. Харин Room A -д $|A \cap M| = k$ байх $A \cap M$ хамтлаг бий тул $c(A) \geq k$. Одоо $c(A) > k$ байж болохгүйг баталъя. $A \supset Q$ дурын

хамтлаг байг. $|Q| \leq k$ гэж баталъя. Room A -д (тухайлбал Q -д) 2 төрлийн оролцогчид байгаа:

1) M -ийн гишүүд. M хамтлаг тул тэд $B \cap M$ -ийн бүх гишүүдтэй танил.

2) Алхам 5-аар Room A -д ирэгсэд. Тэд (*) ёсоор $B \cap M$ -ийн бүх гишүүдтэй танил. Иймд 1) ба 2)-оор Q -ийн гишүүд бүр $B \cap M$ -ийн бүх гишүүдтэй танил. Q ба $B \cap M$ -үүд нь тус бүрдээ хамтлаг тул $Q \cup (B \cap M)$ мөн хамтлаг болно. M хамгийн их хэмжээстэй хамтлаг тул $|M| \geq |Q \cup (B \cap M)| = |Q| + |B \cap M| = |Q| + |M| - |A \cap M|$ буюу $|Q| \leq |A \cap M| = k$. Иймд алхам 5-г хийсээр $c(A) = c(B) = k$ болно.

ОУ- 4.



$S_{RPK} = S_{RCK} - S_{PCK} = \frac{1}{2} \cdot S_{RBC} - \frac{1}{2} \cdot S_{BPC} = \frac{1}{2}(S_{RBC} - S_{BPC}) = \frac{1}{2}S_{RBP}$ байна. Үүнтэй адилаар $S_{RQL} = \frac{1}{2}S_{ARQ}$ болно. CR биссектрис учир $\angle BPR = \angle AQR = \gamma$ байна. $\angle PRB = \alpha$, $\angle QRA = \beta$ учир $\angle PBR = \beta$, $\angle QAR = \alpha$ болох бөгөөд $BR = AR$ тул $\triangle BPR = \triangle RQA$ болж бодлого бодогдов.

ОУ-5. $x \neq y$ боловч $4xy - 1 \mid (4x^2 - 1)^2$ бол $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ -ыг муу хос гээ.

а) $(x, y), x < y$ нь муу хос бол $\exists z < x, (x, z)$ муу хос оршихыг баталъя.

$$r \Leftrightarrow \frac{(4x^2 - 1)^2}{4xy - 1}$$

гэвэл

$$r = -r(-1) \equiv -r(4xy - 1) = -(4x^2 - 1)^2 \equiv -1 \pmod{4x}$$

тул $\exists z \in \mathbb{N}, r = 4xz - 1, x < y$ -ээс

$$4xz - 1 = \frac{(4x^2 - 1)^2}{4xy - 1} < 4x^2 - 1$$

буюу $z < x, 4xz - 1 \mid (4x^2 - 1)^2$ тул (x, z) муу хос

б) (x, y) муу хос бол (y, x) мөн муу хос байна.

$$1 = 1^2 \equiv (4xy)^2 \pmod{4xy - 1}$$

учир

$$(4y^2 - 1)^2 \equiv (4y^2 - (4xy)^2)^2 = 16y^4(4x^2 - 1)^2 \equiv 0 \pmod{4xy - 1}$$

учир $4xy - 1 \mid (4y^2 - 1)^2$ болно.

Муу хос оршдог гээ. $2x + y$ нь хамгийн бага байх муу хос нь (x, y) байг. Хэрэв $x < y$ бол а)-аар $\exists(x, z), z < x$ муу хос орших тул түүний хувьд $2x + z < 2x + y$ болно. Хэрэв $y < x$ бол б)-ээр (y, x) мөн муу хос ба $2y + x < 2x + y$ байна. Өөрөөр хэлбэл $x \neq y$ л бол аль ч тохиолдолд $2x + y$ хамгийн бага гэдэгт зөрчив. Иймд $x = y$ байна.

ОУ-6 Тийм $3n$ хавтгайг олох нь төвөггүй: $x = i, y = i, z = i, i = \overline{1, n}$ хавтгайнууд нь S -г бүрхэх ба эдгээрийн аль нь ч $(0, 0, 0)$ -г дайрахгүй. Өөр нэг жишээ гэвэл $x + y + z = k, k = \overline{1, 3n}$ -үүд юм. Одоо $3n$ нь хамгийн бага тоо гэдгийг баталъя.

Лемм 1. k хувьсагчийн $P(x_1, \dots, x_k) \not\equiv 0$ олон гишүүнтийг авъя. Хэрэв $x_1 + \dots + x_k > 0, x_1, \dots, x_k \in \{0, 1, \dots, n\}$ байх

$(x_1, \dots, x_k)$ цэг бүрийн хувьд $P(x_1, \dots, x_k) = 0$ ба $P(0, 0, \dots, 0) \neq 0$ бол $\deg P \geq kn$ байна.

▲ k -аар индукцлэе. $P \neq 0$ тул $k = 0$ тохиолдол илэрхий байна. $y = x_k$ гэж авбал эвтэй байна. $Q(y) = y(y-1) \dots (y-n)$ модулаарх $P(x_1, \dots, x_k)$ -ийн хаслагийг $R(x_1, \dots, x_{k-1}, y)$ (МКII, х.56, санамж 2) гэе, өөрөөр хэлбэл

$$P(x_1, \dots, x_{k-1}, y) = R(x_1, \dots, x_{k-1}, y) + Q(y) \cdot S(x_1, \dots, x_{k-1}, y).$$

Эндээс $y \in \{0, 1, \dots, n\}$ бүрийн хувьд

$$P(x_1, \dots, x_{k-1}, y) = R(x_1, \dots, x_k, y) \quad (1)$$

Иймд $R(0, \dots, 0) = P(0, \dots, 0) \neq 0$ тул $R \neq 0$ байх $R(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k) = R(x_1, \dots, x_{k-1}, y)$ олон гишүүнт мөн Лемм 1-ийн нөхцөлийг хангана. $\deg R \leq n$ байгаа $\deg R \leq \deg P$ байх нь илэрхий тул $\deg R \geq nk$ гэж баталбал болно.

$$R(x_1, \dots, x_{k-1}, y) = R_n(x_1, \dots, x_{k-1})y^n + \dots + R_0(x_1, \dots, x_{k-1}) \quad (2)$$

(*) [Одоо $R_n(x_1, \dots, x_{k-1})$ индукцийн нөхцөлд оршихыг харуулая.]

$T(y) = R(0, \dots, 0, y)$, $\deg T(y) \leq n$ ба $T(s) \stackrel{(1)}{=} 0$, $s = \overline{1, n}$ байна. Нөгөө талаас $T(0) \neq 0$ тул $T(y) \neq 0$ байна. Иймд $\deg T = n$ байх тул түүний ахмад коэффициент $R_n(0, \dots, 0) \neq 0$, тухайлбал $k = 1$ үед $R_n \neq 0$ гэж гарна.

$$a_1, \dots, a_{k-1} \in \{0, 1, \dots, n\}, a_1 + \dots + a_{k-1} > 0 \quad (3)$$

байг. $R(a_1, \dots, a_{k-1}, y) = S(y)$ гэвэл $S(k) = 0$, $k = 0, \dots, n$ ба $\deg S \leq n$ тул $S(y) \equiv 0$ буюу (3) нөхцөлд

$$R_i(a_1, \dots, a_{k-1}) = 0, \quad i = \overline{0, n} \quad (4)$$

болно. Эндээс тухайн нөхцөлд $R_n(a_1, \dots, a_{k-1}) = 0$. Үүгээр (*) биелэгдэж индукцэд үзэж буйгаар $\deg R_n \geq (k-1)n$ болох тул $\deg P \geq \deg R \geq \deg R_n + n \geq kn$ ▼

МОНГОЛЫН ОЮУТНЫ МАТЕМАТИКИЙН

XVI ОЛИМПИАД

Ц.Дашдорж

а) Эчнээ даваа

I хэсэг (ОМ1-ОМ4)

1 (В.Адьяасүрэн). $P(x)$ нь ялгаатай $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ язгууруудтай n зэргийн олон гишүүнт. b нь $2b < a_1 + a_2$ байх бодит тоо бол $2^{n-1} \cdot |P(b)| \geq |P'(a_1)(b - a_1)|$ гэдгийг батал.

2 (В.Адьяасүрэн). $f \in C'([0; 1])$ ба $\int_0^1 f(x) dx = 0$ байвал

$$2 \int_0^1 (f(x))^2 dx \leq \int_0^1 |f'(x)| dx \cdot \int_0^1 |f(x)| dx \text{ гэдгийг батал.}$$

3 (В.Адьяасүрэн). $\{x_n : n \geq 1\}$ нь $\left(\frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{n+x_n} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ гэж тодорхойлогдсон байг. $\{x_n\}$ дарааллыг нийлнэ гэж батлаад, хязгаарыг нь ол.

4 (В.Адьяасүрэн). $f(x)$ функц x_0 цэгийн ямар нэг орчинд дифференциалчлагдах бөгөөд $f'(x)$ нь x_0 цэг дээр тасралтгүй байвал $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (f(x_0 + \frac{k}{k^2+n^2}) - f(x_0)) = f'(x_0) \cdot \ln \sqrt{2}$ гэдгийг батал.

5 (Ц.Дашдорж). Хоёроос цөөнгүй элементтэй төгслөг коммутатив цагираг A байг. $2 \leq n$ байх n бүрийн хувьд A -д язгуургүй n зэргийн олон гишүүнт олдохыг харуул.

6 (Ц.Дашдорж). $G = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A = \pm 1\}$, $H = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$ бол $(G, \cdot)$ ба $(H, \cdot)$ -үүд нь изоморф биш бүлгүүд гэж батал.

7 (Ц.Дашдорж). $n, p \geq 2$ ба $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A^{p+1} = A$ бол

а) $\text{rank}(A) + \text{rank}(E_n - A^p) = n$ гэж батал.

б) $p \in \mathbb{P}$ бол $\text{rank}(E_n - A) = \text{rank}(E_n - A^2) = \dots = \text{rank}(E_n - A^{p-1})$ гэж батал.

- 8 (Ц.Дашдорж). $x > 0$ ба $A \in M_2(\mathbb{R})$, $\det(A^2 + xE_2) = 0$ бол $\det(A^2 + A + xE_2) = x$ гэж батал.
- 9 (Ц.Дашдорж). $\chi(A) = 5$ ба $\forall x, y \in A$, $x^4 y^3 = y^3 x^4$ бол A коммутатив цагираг гэж батал.
- 10 (Ц.Дашдорж). $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, $|\alpha| = 1$ бол $\mathbb{Z}[\alpha] = \{a + \alpha b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ -үүдээс яг 2 олонлог нь нэмэх ба үржих үйлдлийн хувьд цагираг болохыг батал.
- 11 (Ц.Дашдорж). $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ ба $X = AB + BC + CA$, $Y = BA + CB + AC$, $Z = A^2 + B^2 + C^2$ бол $\det(2Z - X - Y) \geq 3 \det(X - Y)$ гэж батал.
- 12 (Ц.Дашдорж). а) $P(x) = x^5 \in \mathbb{R}[x]$, $\forall 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ -ийн хувьд $P(x + \alpha) - P(x)$ бодит язгуургүй гэж батал.
б) $P \in \mathbb{R}[x]$ ялгаатай бодит язгууруудтай $2 \leq n$ зэргийн олон гишүүнт бол $\exists 0 \neq \alpha \in \mathbb{Q}$, $P(x + \alpha) - P(x)$ нь зөвхөн бодит язгууртай гэж батал.
- 13 (Ц.Дашдорж). Ямар ч төгслөг бүлэг нь A_n -д багтана гэдгийг батал ($\exists n$).
- 14 (Ц.Дашдорж). $n > 3$ ба $\pi \in S_n$ нь $\forall \tau$ -транспозицийн хувьд $\tau \pi \tau^{-1}$ -тэйгээ байр сольдог бол $|\pi| = 2$ гэж батал.
- 15 (Ц.Дашдорж). $M \triangleleft G$, P нь M -ийн Силовын p -дэд бүлэг бол $N_G(P) \cdot M = G$ гэж батал.
- 16 (Ц.Дашдорж). G төгслөг, P -Силовын дэд бүлэг, $N_G(P) \subseteq H \leq G$ бол $N_G(H) = H$ гэж батал.

II хэсэг (ОМ2–ОМ4)

- 1 (В.Адьяасүрэн). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ нь $[-1; 1]$ хэрчмийг агуулсан задгай интервал дээр 2 удаа дифференциалчлагдах функц байв. $0 < \alpha \leq \gamma$ ба $\forall x \in [-1; 1]$: $|f(x)| \leq \alpha$, $|f''(x)| \leq \gamma$ нөхцлүүд биелж байвал $\forall x \in [-1; 1]$: $|f'(x)| \leq 2\sqrt{\alpha\gamma}$ гэж батал.
- 2 (В.Адьяасүрэн). $\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \dots$ гэж батал.

3 (В.Адьяасүрэн). $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\left| \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{(n)} \right| \leq \frac{1}{n+1}$ гэж батал.

4 (В.Адьяасүрэн). $|a| > 1$ ба $n \in \mathbb{N}$ бол $\int_0^\pi \frac{\sin^{2n} x \, dx}{(1-2a \cos x + a^2)^n}$ тооцоол.

5 (Ц.Дашдорж). $\alpha = \sqrt{(2 + \sqrt{2})(3 + \sqrt{3})}$, $E = \mathbb{Q}(\alpha)$ бол $G(E/\mathbb{Q}) = ?$

6 (Ц.Дашдорж). $\sigma, \tau : F(x) \rightarrow F(x)$, $\forall f(x) \in F(x)$, $\sigma f(x) = f\left(\frac{1}{1-x}\right)$, $\tau f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ бол

а) $\sigma, \tau \in \text{Aut}(F(x) | F)$ ба $G = \langle \sigma, \tau \rangle = S_3$ гэж батал.

б) $t = \frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}$ гэвэл $\forall \pi \in G$ -ийн хувьд $\pi(t) = t$ гэж батал.

в) $F(t) = F(x)^G$, $F(x + \frac{1}{x}) = F(x)^{<\tau>}$, $F(x(1-x)) = F(x)^{<\tau\sigma^2>}$ гэж батал.

г) $F(x)^{<\tau\sigma>}$ ба $F(x)^{<\sigma>}$ -үүдийг тодорхойл.

7 (Ц.Дашдорж). $f(x) = x^8 - 2$ -ийн Галуагийн харгалзааг байгуул.

8 (Ц.Дашдорж). G төгслөг абелийн бүлэг бол $\exists K|\mathbb{Q}$, $G(K|\mathbb{Q}) = G$ гэж батал.

Зарим бодлогын бодолтууд

5. $\varphi : A \longrightarrow A$, $\varphi(x) = x^n - x$ гэвэл $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$ байх тул φ буулгалт нь харилцан нэгэн утгатай биш ба A төгслөг олонлог учир $\varphi(A) \neq A$. Иймд $\exists a \in A \setminus \varphi(A)$. Тэгвэл $f = x^n - x - a$ олон гишүүнт нь A -д язгуургүй.

6. $G \cong H$ бол $x^2 = E_2(1)$ тэгшитгэл нь энэ 2 бүлэгт тэнцүү тооны язгууртай байх ёстой. Гэтэл H -д $\pm E_2$ гэсэн яг 2 язгууртай: $X \in F_2$ бүр нь $X^2 - \text{tr} X \cdot X + \det X \cdot E_2 = 0_2$ -ийн язгуур болдог тул $X \in H$ бол $2E_2 = \text{tr} X \cdot X$ болох тул $X = \pm E_2$.

Нөгөө талаас $a \in \mathbb{R}^*$ бол $C_a = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ бүр нь (1)-ийн язгуур болох ба $C_a \in G$ өөрөөр хэлбэл (1) нь G -д төгсгөлгүй олон язгууртай, харин H -д яг 2 язгууртай болно. Иймд G ба H нь изоморф биш бүлгүүд юм.

7. а) $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ бол

$$r(A) + r(B) \leq r(AB) + n \quad (1)$$

гэсэн Сильвестрийн тэнцэл бишээр

$$r(A) + r(E_n - A^p) \leq r(A(E_n - A^p)) + n = n$$

Нөгөө талаас

$$r(A) + r(E_n - A^p) \geq r(A^p) + r(E_n - A^p) \geq r(A^p + E_n - A^p) = n$$

б) $k|m$ бол $r(E_n - A^k) \geq r(E_n - A^m)$: $m = kd$ бол $E_n - A^m = E_n - A^{k \cdot d} = E_n^d - A^{k \cdot d} = (E_n - A^k)B$ тул $r(E_n - A^m) = r((E_n - A^k)B) \leq r(E_n - A^k)$.

$k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq p-1$ байг. $\forall k, A^{kp+1} = A$ байна. $p \in \mathbb{P}$ тул $\{p+1, 2p+1, \dots, kp+1\} \pmod{k} = \mathbb{Z}_k$ байна гэдгээс $\exists t, k|t = qp+1$. Тэгвэл $r(E_n - A) \geq r(E_n - A^k) \geq r(E_n - A^t) = r(E_n - A^{pq+1}) = r(E_n - A)$.

8. $\det(A + i\sqrt{x'E_2}) \det(A - i\sqrt{x'E_2}) = 0$ байх учир $d = \det A, t = \text{tr} A$ гэвэл $d = x, t = 0$ гэж олно. Иймд $A^2 + xE_2 = 0$ буюу $\det(A^2 + A + xE_2) = \det A = x$

12. а) $(x + \alpha)^5 = x^5, x \neq 0 \Leftrightarrow (\frac{x + \alpha}{x})^5 = 1$. Эндээс

$$\frac{x + \alpha}{x} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

в) $x_1 < \dots < x_n$ -үүд нь P -ийн язгуурууд ба $y_k \in (x_k, x_{k+1})$ -үүд нь P' -ийн язгуурууд байг.

$$\beta = \min\{y_k - x_k, x_{k+1} - y_k / 0 \leq k \leq n-1\} \quad (x_k, x_{k+1})$$

интервал бүрт $0 < \alpha < \beta$ байх α бүрийн хувьд

$g(x) = P(x + \alpha) - P(x)$ -г авч үзье. y_k нь (x_k, x_{k+1}) дахь P -ийн ганц экстремумын цэг билээ, тухайлбал максимумын цэг гэвэл

$$g(x_k) = P(x_k + \alpha) - P(x_k) > 0, g(y_k) = P(y_k + \alpha) - P(y_k) < 0$$

тул $\exists \mathbb{Z}_k \in (x_k, x_{k+1}), g(\mathbb{Z}_k) = 0$. $\alpha \in (0, \beta) \cap \mathbb{Q}$ -г авахад бодлого бодогдоно.

13. S_n бүлэг A_{n+2} -д изоморфоор багтана гэж харуулбал болно. $S_n(1, \dots, n), A_{n+2}(1, 2, \dots, n, n+1, n+2), \pi = (n+1, n+2)$ гээ. $\sigma \in S_n$,

$$f(\sigma) = \begin{cases} \sigma, & \sigma \text{ тэгш орлуулга} \\ \sigma\pi, & \sigma \text{ сондгой орлуулга} \end{cases}$$

f мономорфизм гэдгийг шалгахад төвөггүй.

14. $\pi = \pi_1 \dots \pi_k$, энд π_i нь үл огтлолцох циклүүд ба $\exists i, \pi_i$ нь 3-аас багагүй урттай гэж үзэж чадна $\pi_i = (ijk\dots)$, $\tau = (k\ell)$ $\ell \neq i, j, k$ гэвэл $\tau\pi_i\tau^{-1} = (ij\ell\dots)$. Тэгвэл $\pi(\tau\pi_i\tau^{-1})(i) = k$, $(\tau\pi_i\tau^{-1})\pi(i) = \ell$. Иймд π ба $\tau\pi\tau^{-1}$ нь байр солихгүй. Эндээс π_i бүр нь 2 урттай транспозиц байна. Тэгвэл $|\pi| = 2$ болно.

15. $\forall g \in G$ бол $P^g \subseteq M^g = M$ буюу P^g, P нь M -ийн Силовын дэд бүлгүүд тул $\exists h \in M, P^g = P^h, P^{gh^{-1}} = P, gh^{-1} \in N_G(P) \Rightarrow g = (gh^{-1})h \in N_G(P) \cdot M$ буюу $G \subseteq N_G(P) \cdot M$.

16. $H \subseteq N_G(H)$ тул $N_G(H) \subseteq H$ гэж батлая. $\forall g \in N_G(H)$, $H^g = H$. $P \subseteq N_G(P) \subseteq H$ гэдгээс $P^g \subseteq H^g = H$. Эндээс P^g ба P -үүд нь H -ийн Силовын дэд бүлгүүд боллоо. Иймд $\exists h \in H, P^g = P^h, P^{gh^{-1}} = P, gh^{-1} \in N_G(P) \subseteq H$. Эндээс $g \in H$.

II хэсэг

5. а) α нь $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ -д квадрат биш: Хэрэв $\alpha = c^2, c \in F$ бол $\varphi \in G(F|\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$ -ийн хувьд $\alpha\varphi(\alpha) = (2 + \sqrt{2})^2 \cdot 6 = (c\varphi(c))^2$ болно. $c\varphi(c) = N_{F|\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(c) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ байх ёстой тул $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ зөрчилд хүрэв.

б) а)-аас $[F : \mathbb{Q}] = 8$ гэж гарна. $P(x) = P_{\alpha|\mathbb{Q}}(x)$ -ийн 8 язгуур нь $\pm\sqrt{(2 \pm \sqrt{2})(3 \pm \sqrt{3})}$ гэж батал.

в) $\beta = \sqrt{(2 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{3})}$ гээ. $\alpha\beta = \sqrt{2}(3 + \sqrt{3}) \in F$ болох тул

$\beta \in E$ болно. Бусад язгуурууд ч мөн E -д орно, иймд $E|\mathbb{Q} \in Gal$ болно. $G = G(E|\mathbb{Q})$ -ийн элементүүд нь α -ийг б)-д буй 8 элементийн аль нэгд буулгана.

г) $\sigma \in G, \sigma(\alpha) = \beta$ байг. $\sigma(\alpha^2) = \beta^2$ байх учир $\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, $\sigma(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ болно. $\alpha\beta = \sqrt{2}(3 + \sqrt{3})$ -аас $\sigma(\alpha\beta) = -\alpha\beta$. Эндээс $\sigma(\beta) = -\alpha$ $|\sigma| = 4$ гэж үзүүлж болно.

д) г)-тэй адилаар $\tau(\alpha) = \sqrt{(2 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{3})}$ гэвэл мөн $|\tau| = 4$ болно. $\langle \sigma, \tau | \sigma^4 = \tau^4 = 1, \sigma^2 = \tau^2, \sigma\tau = \tau\sigma^3 \rangle$ гэж баталж болно.

е) $G \cong Q_8$ -8 эрэмбийн кватернионы бүлэг гэж батална.

6. (Г.Батзаяагийн бодолт)

а)-г баталъя. σ, τ нь гомоморфизм гэдэг нь илэрхий

$\forall f(x) \in F(x) : \sigma' f(x) = f\left(\frac{x-1}{x}\right)$ гээ. Тэгвэл

$$(\sigma\sigma')f(x) = f\left(\frac{\frac{1}{1-x}-1}{\frac{1}{1-x}}\right) = f(x) \Rightarrow \sigma' \text{ нь } \sigma\text{-ийн урвуу болно}$$

$\Rightarrow \sigma \in \text{Aut}(F(x)|F)$. Яг адил $\tau^2 f(x) = f(x)$ тул

$\tau \in \text{Aut}(F(x)|F)$ боллоо. Одоо $G = \langle \tau, \sigma \rangle = S_3$ гэж баталъя.

$$\left[\sigma f(x) = f\left(\frac{1}{1-x}\right), \quad \sigma^2 f(x) = f\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}\right) = f\left(\frac{x-1}{x}\right), \right.$$

$$\sigma^3 = e, \quad \tau f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right), \quad \tau^2 = e, \quad (\tau\sigma)^2 = e,$$

$$(\tau\sigma)f(x) = f\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\right) = f\left(\frac{x}{x-1}\right),$$

$$(\tau\sigma^2)f(x) = f\left(\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}\right) = f(1-x) \quad (1)$$

болно.

б)-г баталъя. Зөвхөн $\sigma, \tau : \tau(t) = t$ гэж батлахад хангалттай.

$$\sigma(t) = \frac{\left(\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1-x)} + 1\right)^3}{\frac{1}{(1-x)^2} \left(\frac{1}{(1-x)} - 1\right)^2} = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(1-x)^2} = t$$

$$\tau(t) = \frac{\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1\right)^3}{\frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x-1)^2} = t$$

Лемм. $n = |G| < \infty$ ба $G \leq \text{Aut}(F(x)|F)$ -ийн дэд бүлэг байг. Хэрэв $p(y) = \prod_{\sigma \in G} (y - \sigma(x)) = y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n \in F(x)^G[y]$

гэвэл $k = F(a_1, \dots, a_n) = F(x)^G$ байна.

▲ Артиний теоремоор $F(x)|F(x)^G \in \text{Gal}$ ба

$$[F(x) : F^G(x)] = n \quad (2)$$

байна. $a_j \in F(x)^G$ тул $F(x)^G|F(a_1, \dots, a_n) = k$ ба x нь P -ийн

язгуур тул $[F(x) : k] = \deg P_{x/k} \leq n \Rightarrow n \stackrel{(2)}{\leq} [F(x) : F(x)^G][F(x)^G : k] = [F(x) : F] \leq n \Rightarrow [F(x)^G : k] = 1 \blacktriangledown$

Одоо леммээ ашиглаж в)-г баталъя.

$F(x) = F(x)^G$ -г баталъя. Леммээр

$$P(y) = \prod_{\sigma \in G} (y - \sigma(x)) \stackrel{(1)}{=} (y - x) \left(y - \frac{1}{(1-x)} \right) \left(y - \frac{(x-1)}{x} \right) \cdot \left(y - \frac{1}{x} \right) \left(y - \frac{x}{(x-1)} \right) (y - (1-x))$$

$$P(y) = (S(y) + x(1-x)) \left(S(y) - \frac{x}{(x-1)^2} \right) \left(S(y) + \frac{(x-1)}{x^2} \right) \in F(t)[y]$$

гэж батлахад хангалттай. Энд $S(y) = y^2 - y$ ба $S(y)^2, S(y)$ ба сул гишүүний коэффициентүүдийг t_1, t_2, t_3 гээ.

$$\begin{aligned} -t_1 &= x(x-1) + \frac{x}{(x-1)^2} - \frac{(x-1)}{x^2} = \frac{x^3(x-1)^3 + x^3 - (x-1)^3}{x^2(x-1)^2} = \\ &= \frac{(x(x-1))^3 + 3x(x-1) + 1}{x^2(x-1)^2} = t - 3 \in F(t) \end{aligned}$$

$$t_2 = \frac{x^2}{(x-1)} - \frac{1}{x(x-1)} - \frac{(x-1)^2}{x} = \frac{x^3 - 1 - (x-1)^3}{x(x-1)} =$$

$$= 3 \in F(t) \text{ Мөн } t_3 = -1 \in F(t) \Rightarrow \quad \blacktriangledown$$

$F(x + \frac{1}{x}) = F(x)^{<\tau>}$ -г баталъя.

$$\begin{aligned} P(y) &= \prod_{\sigma \in <\tau>} (y - \sigma(x)) \stackrel{(1)}{=} \left(y - \frac{1}{x} \right) (y - x) = \\ &= y^2 - \left(x + \frac{1}{x} \right) y + 1 \xrightarrow{\text{Лемм}} \quad \blacktriangledown \end{aligned}$$

$F(x(1-x)) = F(x)^{<\tau\sigma^2>}$ -г баталъя.

$$\begin{aligned} P(y) &= \prod_{\delta \in <\tau\sigma^2>} (y - \delta(x)) \stackrel{(1)}{=} (y - (1-x))(y - x) = \\ &= y^2 - y + (1-x)x \xrightarrow{\text{Лемм}} \quad \blacktriangledown \end{aligned}$$

г)-г баталъя. $F(x)^{<\sigma>} : P(y) = \prod_{\delta \in <\sigma>} (y - \delta(x)) \stackrel{(1)}{=} (y - x) \left(y - \frac{1}{(1-x)} \right) \left(y - \frac{(x-1)}{x} \right) = y^3 - sy^2 + s'y + 1$ гэе. $\Rightarrow s = \frac{(-x^2 + x + 1)}{(1-x)} + \frac{(x-1)}{x} = \frac{x^3 - 3x + 1}{x(x-1)}$, $s' = -\frac{1}{x} + \frac{x}{(1-x)} + (x-1) = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x(x-1)}$ тул леммээр $F(s, s') = F(x)^{<\sigma>}$ ба $s - s' = 3 \Rightarrow F(x)^{<\sigma>} = F(s, s') = F(s) = F\left(\frac{x^3 - 3x + 1}{x(x-1)}\right)$ болно.

$F(x)^{<\tau\sigma>} : P(y) = \prod_{\delta \in <\tau\sigma>} (y - \delta(x)) \stackrel{(1)}{=} (y - x) \left(y - \frac{x}{(x-1)} \right) = y^2 - \frac{x^2}{(x-1)}y + \frac{x^2}{(x-1)} \Rightarrow$ леммээр $F(x)^{<\tau\sigma>} = F\left(\frac{x^2}{(x-1)}\right)$ болно.

Мэдээлэл

**Монголын Оюутны математикийн 16-р Олимпиадын
"Онолын математик" ангиллын багуудын тэмцээн
2007.04.21-нд МУИС, МКС дээр боллоо.**

- 1). $x^{2n} + x^n + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ үл задарна. $\Leftrightarrow n = 3^k$ гэж батал. (оноо 4)
- 2). $p \in \mathbb{P}, \varepsilon = e^{i\frac{2\pi}{p}}$ байг. Хэрэв тэг биш бүхэл тоо $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ -үүдийн хувьд $a_0 + a_1\varepsilon + \dots + a_{p-1}\varepsilon^{p-1} = 0$ бол $a_0 = a_1 = \dots = a_{p-1}$ гэж батал. (оноо 4)
- 3). $f(x) \in F_q[x], \deg f = m \geq 1, f(0) \neq 0$ бол $\exists e \leq q^m - 1, f|x^e - 1$ (оноо 6).
- 4). S_5 -д 30 ба 40 эрэмбийн дэд бүлэг байхгүйг батал (оноо 4).
- 5). $|G| = 60$ ба G -ийн Силовийн 5-дэд бүлгийн тоо n_5 нь 1-ээс их бол G энгийн бүлэг гэж батал (оноо 8).

Бодлогуудыг дэвшүүлсэн Ц.Дашдорж

	I (4)	II (4)	III (6)	IV (4)	V (8)	байр
ОМ-I	2			2		4 оноо, III
ОМ-II	4	4	6			14 оноо, I
ОМ-III	2		6			8 оноо, II

Багууд авсан оноотойгоо пропорционалаар 80000 төгрөгийг хувааж авав.

I-байр эзэлсэн Г.Батзаяа ахлагчтай ОМII баг шилжин явах цом авлаа.

Бодолтууд

1. $\Leftarrow$: $\Phi_3(x) = x^2 + x + 1$ ба MKII, хуудас 23-ын (6)-аар

$$\Phi_{3^s}(x) = \Phi_3(x^{3^{s-1}})$$

ба MKII, хуудас 68-ын бодлого 6-аар $\Phi_{3^s}(x)$ үл задрах олон гишүүнт тул $x^{2 \cdot 3^k} + x^{3^k} + 1 = \Phi_{3^{k+1}}(x)$ $\mathbb{Q}$ дээр үл задарна, иймд $\mathbb{Z}$ дээр үл задарна.

$\Rightarrow$: $n = 3^k \cdot n_1, k \geq 1, (n_1, 3) = 1$ ба $n_1 > 1$ гэж үзье. Тэгвэл $x^{2n} + x^n + 1 = \Phi_3(x^n) = \Phi_3(x^{3^k \cdot n_1}) \Rightarrow \Phi_3(x^{3^k}) | \Phi_3(x^{3^k \cdot n_1}) = \Phi_3(x^n)$ учир нь $(m, n) = 1$ бол $\Phi_{mn}(x) | \Phi_n(x^m)$ байдаг. Иймд $n_1 = 1$.

2.

$$f = a_0 + a_1x + \dots + a_{p-1}x^{p-1}, \Phi_p(x) = 1 + x + \dots + x^{p-1},$$

$$f(\varepsilon) = \Phi_p(\varepsilon) = 0$$

тул $\deg(f, \Phi_p) > 1, (f, \Phi_p) | \Phi_p(x)$ ба 11.7-5-аар $\Phi_p(x)$ $\mathbb{Z}$ дээр үл задрах тул $(f, \Phi_p) = \Phi_p | f$ ба 11.1-ийн Санамж 2-оор $f = k \cdot \Phi_p(x), \exists k \in \mathbb{Z}$. Эндээс $a_0 = a_1 = \dots = a_{p-1} = k$ болов.

3. $F_q[x]/(f)$ фактор цагирагт тэг биш элемент $q^m - 1$ ширхэг бий ба $x^j + (f), j = 0, 1, \dots, q^m - 1$ гэсэн q^m ширхэг зэрэгцээ ангиуд нь фактор цагирагийн тэг биш элементүүд тул $\exists r, s \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < s \leq q^m - 1, x^s \equiv x^r \pmod{f(x)}$ ба $(x, f(x)) = 1$ гэдгээс $x^{s-r} \equiv 1 \pmod{f}$. Иймд $f(x) | x^{s-r} - 1, 0 < s - r \leq q^m - 1$.

4. $H \leq S_5$ ба $|H| = 30$ байг. $[S_5 : H] = 120/30 = 4$. Иймд $\exists \varphi$ -гомоморфизм: $S_5 \longrightarrow S_4, \ker \varphi \subseteq H$ ба $\ker \varphi \triangleleft S_5$ гэдгээс $\ker \varphi = \{e\}$ буюу S_5 нь S_4 -ийн дэд бүлэгтэй изоморф болоход хүрч зөрчил гарав.

5. $|G| = 60, n_5 > 1, H \triangleleft G, \{e\} \neq H \neq G$ гээ. $n_5 = 1 + 5k \mid 60$ гэдгээс $n_5 = 6$ болно.

$$P \in \text{Syl}_5(G), |P^G| = |\{P^x \mid x \in G\}| = 6 = [G : N_G(P)]$$

учир $|N_G(P)| = 10$. Хэрэв $5 \mid |H|$ бол H G -ийн Силовын 5 дэд бүлгийг (P -г) агуулах ба $H \triangleleft G$ тул P^G -г бүгдийг нь агуулна. Тэгвэл $|H| \geq 1 + 6 \cdot 4 = 25$ буюу $|H| = 30$ гэсэн ганц боломж байна. Гэтэл H нь ганц нормал Силовын 5-дэд бүлэгтэй гэдгийг шууд баталж болох тул ийм байж үл болно.

Хэрэв $|H| = 6 \vee 12$ бол $\exists M \triangleleft H$, M Силовын дэд бүлэг.

$M \triangleleft G : x \in G$ бол $M^x \triangleleft H^x = H$ ба M Силовын ганц дэд бүлэг тул $M^x = M$. Иймд $|H| = 2 \vee 3 \vee 4$ гэж үзье.

$\bar{G} = G/H$, $|\bar{G}| = 30, 20, 15$. Аль ч тохиолд $\bar{G}$ -д Силовын нормал 5-дэд бүлэг $\bar{P}$ бий. Түүний бүрэн эх бүр P нь G -д нормал хуваагч ба $5 \mid |P|$ байх тул эхний тохиолдлоор боломжгүй юм.

Иймд G энгийн бүлэг.

"Төгс Тоо" төвийн тухай

Манай орны математик боловсролын хөгжилд мэдэгдэхүйц амжилт гарч математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай сургууль, ангиуд олноор байгуулагдаж байгааг харгалзан үзэж, тэднийг нэгдсэн удирдлага, үйл ажиллагаагаар хангах зорилгоор БСШУЯ-ны санаачилга дэмжлэгтэйгээр Монгоолын Математик Олимпиадын Хорооны дэргэд математикийн багш нарын мэргэжил дээшлүүлэх "Төгс тоо" төв байгуулагдсаар хэдэн жил болж байна. Тус төв нь математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийн

багш нарын мэргэжлийг системтэйгээр дээшлүүлэх ажлынхаа хүрээнд дунд ангийн багш нарын дунд тус бүр 90 цагийн багтаамжтай, 90000 төгрөгийн төлбөртэй I ба II шатны дамжааг 15 хоногоор; бага ангийн багш нарын дунд 60 цагийн багтаамжтай, 60000 төгрөгийн төлбөртэй сургалтыг 12 хоногоор хичээллүүлж, дамжааг амжилттай дүүргэсэн хүмүүст харгалзах сертификат олгон төгсгөдөг юм. Жил бүрийн хичээлийг МУИС, хичээлийн III байрны 306, 308 тоотод 6 сарын 23-24-нд бүртгэж, хичээл 6 сарын 25-аас эхлэн явагддаг. Төлбөрийг "Төгс тоо" төв дансанд хийж, төлбөрийн баримтаа үзүүлээд бүртгүүлж болно, эсвэл бэлнээр авчирна.

"Төгс тоо" төвийн данс:

Лавлах утас:

Голомт банк

2119483, "Төгс тоо" төв

312383 (гэр)

99879779 (Ц.Дашдорж)

ГАРЧИГ

Математикийн олимпиадын сүлд дуу.....	3
Олимпиадын дүнгийн тухай /Ц.Дашдорж/.....	4
Эхлэл сургуулийн тухай	9
VII ангийн III даваа /Б.Сандагдорж, Э.Азжаргал/.....	13
VIII ангийн III даваа /Б.Сандагдорж, Ш.Батхишиг/.....	16
VIII ангийн IV даваа / Ч.Гантөмөр/.....	19
IX ангийн III даваа /Б.Сандагдорж , Э.Азжаргал/.....	22
IX ангийн IV даваа /Ш. Батхишиг/.....	26
X ангийн III даваа /Т. Хулан/.....	30
X ангийн IV даваа /Д.Батнасан/.....	35
XI ангийн III даваа /Б.Батбаясгалан/.....	41
XI ангийн IV даваа /Б.Батбаясгалан/.....	47
Багын багшийн III даваа /Д.Ганзориг/.....	56
Багын багшийн IV даваа /Д.Ганзориг/.....	58
Дундын багшийн III даваа /Ц.Дашдорж/.....	62
Дундын багшийн IV даваа /Ц.Дашдорж/.....	66
ОМУО-48, I сорил /Б.Сандагдорж/.....	71
ОМУО-48, II сорил /Б.Сандагдорж/.....	75
ОМУО-48, III сорил /Ц.Дашдорж/.....	78
ОМУО-48, IV сорил /Ц.Дашдорж/.....	82
Олон улсын математикийн 48-р олимпиад	85
Монголын Оюутны Математикийн XVI Олимпиад	93
“Төгс тоо” төвийн тухай	103