

МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАДЫН ЦУВРАЛ

№33

**ПРОФЕССОР Ц. ЛХАМСҮРЭНГИЙН НЭРЭМЖИТ
МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН
XLIV ОЛИМПИАД**

Улаанбаатар хот
2009 он

Өмнөх үг

Улсын болон олон улсын математикийн олимпиадад бэлтгэгчид, математикийн төрөлжсөн сургалттай ангийн сурагч, оюутан, багш нар, математик сонирхогч өргөн олонд зориулсан цувралын ээлжит дугаар таны гар дээр очиж байна. Тус гарын авлагыг бэлтгэхэд ММО-ын Зохион байгуулах хорооны гишүүд, МУИС-ын математикийн ангийн оюутнууд идэвхтэй оролцлоо. Зарим бодлогын бодолтыг сайжруулах, засах зэргээр тусалж байсан В. Адъяасүрэн, Б. Баяржаргал, Т. Хулан багш нарт онцгойлон талархал илэрхийлье. Түүнчлэн олон улсын олимпиадын сорил болон ОУМО-ын 49 олимпиадын тухай бичиж ирүүлсэн Б. Батцэнгэл багшид ч мөн талархалаа илэрхийлье. Ялангуяа ММО-44-ийн 4-р давааны бодлогын бодолтыг бичихэд Б. Батцэнгэл багшийн бэлтгэсэн "44th Mongolian Mathematical Olympiad" номыг ашигласан нь тус гарын авлагыг та бүхэнд хүргэх ажлыг ихээхэн хөнгөвчилснийг тэмдэглэе.

Зарим бодлогын зохиогчид буруу бодолт өгөх, бодолтоо өгөхгүй байх зэргээр хүндрэл учруулж байсныг дурдахгүй өнгөрч болохгүй нь. Зохиогчид болон тухайн ангийг хариуцсан даамлууд цаашид энэ тал дээр илүү хариуцлагатай хандвал зохих болов уу.

Зарим бодлогыг бодолтын хамт англи хэл дээр оруулсан нь та бүхний англи хэлний мэдлэгийн тусын тулд болой. Үүнийг та бүхэн болгооно уу.

Уг номын талаарх аливаа санал хүсэлтээ МУИС-ийн Алгебрийн тэнхимд, эсвэл www.integral.edu.mn веб хуудсаар дамжуулж ирүүлнэ үү.

Тус номыг А. Энхжаргал захиралтай "Эхлэл" сургууль ивээн тэтгэн хэвлүүлэв.

© ММОЗБХороо, 2009 он.

Монголын математикийн XLIV олимпиад.

Экимто хэвлэлийн үйлдвэрт 500 хувь хэвлэв.

Редактор: Балхүүгийн Батбаясгалан.

Хэвлэлийн эхийг Л^AT_EX ашиглан бэлтгэсэн: Б. Батбаясгалан,

П. Наранжаргал,

Д. Эрдэнэжаргал.

Гарчиг

Монголын Математикийн 44-р Олимпиадын дүнгийн тухай тайлан	6
Монголын математик сэтгэлгээний хөгжилтийн тухай	9
Проф. Ц. Лхамсүрэнгийн бүтээлийн тойм, товч танилцуулга	13
1 Монголын математикийн XLIV олимпиад	18
1.1 ММО-44, VII ангийн III даваа	18
1.2 ММО-44, VII ангийн III даваа бодолт	18
1.3 ММО-44, VIII ангийн III даваа	21
1.4 ММО-44, VIII ангийн III даваа бодолт	22
1.5 ММО-44, VIII ангийн IV даваа	24
1.6 ММО-44, VIII ангийн IV даваа бодолт	25
1.7 ММО-44, IX ангийн III даваа	29
1.8 ММО-44, IX ангийн III даваа бодолт	30
1.9 ММО-44, IX ангийн IV даваа	33
1.10 ММО-44, IX ангийн IV даваа бодолт	34
1.11 ММО-44, X ангийн III даваа	37
1.12 ММО-44, X ангийн III даваа бодолт	37
1.13 ММО-44, X ангийн IV даваа	40
1.14 ММО-44, X ангийн IV даваа бодолт	41
1.15 ММО-44, XI ангийн III даваа	44
1.16 ММО-44, XI ангийн III даваа бодолт	45
1.17 ММО-44, XI ангийн IV даваа	48
1.18 ММО-44, XI ангийн IV даваа бодолт	49
1.19 ММО-44, Багын багшийн III даваа	53
1.20 ММО-44, Багын багшийн III даваа бодолт	54
1.21 ММО-44, Багын багшийн IV даваа	54

1.22	ММО-44, Багын багшийн IV даваа бодолт	55
1.23	ММО-44, Дундын багшийн III даваа	58
1.24	ММО-44, Дундын багшийн III даваа бодолт	58
1.25	ММО-44, Дундын багшийн IV даваа	63
1.26	ММО-44, Дундын багшийн IV даваа бодолт	63
2	Mongolian IMO team selection tests	68
2.1	Test 1, 2008.05.12	68
2.2	Test 2, 2008.05.17	71
2.3	Test 3, 2008.05.22	73
2.4	Test 4, 2008.05.27	75
3	Олон улсын математикийн 49-р олимпиад	81
3.1	Дүнгийн тухай	81
3.2	Бодлогууд	82
3.3	Бодлогуудын бодолт	83
4	49th International Mathematical Olympiad	93
4.1	Some selected solutions	93
5	Монголын Их дээд сургуулиудын Оюутны математикийн XVII олимпиад	95
5.1	Эчнээ давааны бодлогууд	95
5.2	Үндсэн давааны бодлогууд	97
5.3	Багийн тэмцээний бодлогууд	98

Үг Н.Сүхдорж

Ая Ц.Буян-Орших

Математикийн олимпиадын сүлд дуу

Нарнаас илчийг нь авч болох уу
Сарнаас гэрлийг нь салгаж болох уу
Багш та юу гэж заасан бэ
Багын нөхөд маань санаж байна уу
Тоо тоогоо тоолон бодъёо
Томъёогоор задлан бодъёо
Олуулаа уралдан бодъёо
Олимпиаддаа оролцож бодъёо

Орчлонгийн удмыг туулж болох уу
Одод эрхсийг тоолж болох уу
Эвклид юу гэж хэлсэн бэ
Эрхэм нөхөд минь санаж байна уу

Дахилт

Эрдмийн оргилд хүрч болох уу
Энгүй далайг хэмжиж болох уу
Суут эрдэмтэн Мянгат өвөөгийн
Сургаалт үгийг санаж байна уу

Дахилт

Гэрлийн хурдыг давж болох уу
Тэнгэрийн хаяанд хүрч болох уу
Дэлхийд алдартай эрдэмтэн Гауссын
Дэлгэж нээсэн онолыг саная даа

Дахилт



2000 оны Сэлэнгийн
олимпиадыг зохион
байгуулагчдын бүтээл

Монголын Математикийн 44-р Олимпиадын дүнгийн тухай тайлан

Ц.Дашдорж

Эрхэм хүндэт математикч багш, сурагчид аа!

ММОХорооны гишүүдээ!

Эрдэм ухаанд гүн шүтлэгтэй Завханчууд аа,

Проф. Ц.Лхамсүрэнгийн гэр бүл үр хүүхэд, ач зээ нар аа,

Монголын Математикийн 44-р Олимпиад Завхан нутгаас төрсөн манай нэрт математикч профессор Ц.Лхамсүрэнгийн нэрэмжит болон 2008 оны 05 сарын 01–06-ны хооронд “МУИС-ийн Математик Компьютерийн Сургууль” дээр амжилттай явагдаж дүнгээ гаргаж байна. Энэ удаагийн олимпиадад 21 аймаг, Улаанбаатар хотын нийт 22 багийн 77 бага, дундын багш, 276 сурагчид оролцож нийт 343 хүн оюун ухаан, авъяас чадвараа сорин уралдлаа. Энэ удаагийн олимпиадыг зохион байгуулах, бэлтгэл ажлыг хангахад Завхан аймгийн төр захиргаа, боловсролын байгууллага, Завхан аймгийн Улаанбаатар хот дахь нутгийн зөвлөл ихээхэн хүчин чармайлт гаргаж анхаарал хандуулсныг зориуд тэмдэглэх ёстой. Үүний дотор Улаанбаатар хот дахь нутгийн зөвлөлийн дарга Д.Раднаарагчаа, аймгийн засаг даргын тамгын газрын Нийгмийн бодлого зохицуулалтын хэлтсийн дарга Б.Буяндалай, БСГ-ын мэргэжилтэн Д.Оюундулам, Н.Мөнхбат, “Тэгшхэм” сургуулийн захирал Б.Ширвэд мөн хэвлэлийн эхийг бэлтгэсэн М.Нямгэрэл нарт гүн талархаж байна. Мөн энэхүү олимпиадыг зохион явуулахад санхүүгийн дэмжлэг үзүүлсэн доорх хүмүүст олимпиадад оролцогчид болон нийт математикч нарынхаа өмнөөс баяр хүргэж ажлын амжилт хүсч байна. Үүнд: Ерөнхий ивээн тэтгэгч “Скайтел” компаны ерөнхий захирал Р.Ганболд (2.820.000 төг), УИХ-ын гишүүн Ү.Содномцэрэн (500.000 төг), Анод банкны дэд захирал Э.Гүр-Аранз (500.000 төг), Монгол шуудан банкны дэд захирал З.Нарантуяа (500.000 төг), Магнай трейд ХХК-ын гүйцэтгэх захирал Б.Шинэбаатар (500.000 төг), Отгон-тэнгэр Их сургуулийн ерөнхийлөгч Д.Оюунхорол (500.000 төг), “Уулс трейд” ХХК-ийн захирал Т.Галбадрах (500.000 төг), “Ялгуусан” ХХК-ийн захирал Л.Санжаадорж (300.000 төг), ГЕГ-ын хэлтсийн дарга С.Алтангэрэл (200.000 төг), Улаанбаатар зочид буудал ХК-ийн ерөнхий инженер Б.Баярмагнай (100.000 төг), аймгийн, БСГ-аас (200.000 төг) тус тус баярлалаа.

Олимпиадын бэлтгэл ажлыг хангах, санхүүгийн дэмжлэгийг бүрдүүлэхэд ХХЗХ-ны дарга Б.Болдбаатар, МУБИС-ын багш док.проф Д.Чимэд-Очир болон МУБИС-ын Математикийн сургуулийн багш нар, МУИС-МКС-ийн багш нар цаг зав бүхий л бололцоогоо дайчлан ажилласныг зориуд цохон тэмдэглэж байна. Завхан аймгийн ард иргэд оюуны өндөр чадавхтай төдийгүй оюун ухааныг дээдэлсэн хүмүүс байдаг гэдгийг энэхүү олимпиадыг зохион байгуу-

лахад үзүүлсэн та бүхний дэмжлэг туслалцаа харуулж байна. Олимпиадад 8-р ангийн 84 сурагч оролцсоноос 1-р сургуулийн сурагч Б. Батхуяг (багш нь Энхбаатар, Баянбат) 42 оноогоор 1-р байр эзэлж 8-р ангийн аварга боллоо. 1-р сургуулийн Г.Халиун, 31.5 оноо, мөн 1-р сургуулийн Э.Оргил-Эрдэнэ 25.5 оноогоор, 2-р байрыг, 1-р сургуулийн сурагч Б.Төгөлдөр 21.5 оноогоор, 1-р сургуулийн Б.Баатархүү 20.5 оноогоор, мөн Сэлэнгэ аймгийн Э.Төрбат 19.5 оноогоор, 11-р сургуулийн Э.Мишээл 19,5 оноогоор тус тус 3-р байрыг тус тус эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

Олимпиадад 9-р ангийн 83 сурагч оролцсоноос 1-р сургуулийн Н.Эрдэнэ (З.Бат-Эрдэнэ) 18 оноогоор 1-р байр эзэлж 9-р ангийн аварга сурагч боллоо. 11-р сургуулийн Л.Мөнх-Од 16.5 оноогоор, 11-р сургуулийн З.Болор-Эрдэнэ 16 оноогоор, 2-р байрыг, 11-р сургуулийн Б.Батзоригт 15.5 оноогоор, 1-р сургуулийн сурагч Л.Энхжаргал 15.5 оноогоор "Олонлог" сургуулийн О.Бямбадорж 14 оноогоор тус тус 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

Олимпиадад 10-р ангийн нийт 60 сурагч оролцсоноос "Олонлог" сургуулийн сурагч Э.Энхзаяа 29.5 оноогоор 1-р байр эзэлж Улсын математикийн 44-р олимпиадын 10-р ангийн аварга сурагч боллоо. 1-р сургуулийн О.Зориггоо Хөвсгөл аймгийн Д.Өсөхбаатар нар тус бүр 15 оноогоор 2-р байрыг, 1-р сургуулийн Г. Нямхүү 14 оноогоор, "Олонлог" сургуулийн О.Соёлмаа 11 оноогоор, "Олонлог" сургуулийн О.Өлзийбаяр 9 оноогоор тус тус 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

Олимпиадад 11-р ангийн нийт 49 сурагч оролцсоноос 1-р сургуулийн Э.Тэмүгэ (багш нь Энхбаатар, Баянбат) 28.5 оноогоор 1-р байр эзэлж Улсын математикийн 44-р олимпиадын 11-р ангийн аварга сурагч боллоо. 1-р сургуулийн Б.Мягмаржав 21 оноогоор, 1-р сургуулийн Н.Бямбажав 15 оноогоор 2-р байрыг "Олонлог" сургуулийн Б.Билгүүн 14.5 оноогоор 1-р сургуулийн Г.Оюундарь 14.5 оноогоор "Олонлог" сургуулийн Чингүнжав 14 оноогоор тус тус 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

Улсын Математикийн 44-р олимпиадад амжилттай оролцсон дээрх нэр бүхий сурагчид, олимпиадад сурагчдаа амжилттай бэлтгэж оролцуулсан багш нарт Монголын нийт математикчдын нэрийн өмнөөс чин сэтгэлийн талархал илэрхийлье.

Багш нарын олимпиадыг бага, дунд гэсэн хоёр ангилалаар явуулсны дотроос бага ангийн математикийн 31 багш оролцсоноос, "Сант" сургуулийн багш М.Отгонжаргал 35 оноогоор түрүүлж, Баян-Өлгий аймгийн багш Хайрол 28 оноогоор, Завхан аймгийн багш Бямбасүрэн 26 оноогоор удаах байруудад орлоо. Бага ангийн багш нараас энэ жил төрж буй аварга Отгонжаргал бол

манай ганц дархан аварга багш бөгөөд энэ жил 4 дөхөө түрүүлж далай даян дархан аварга гэсэн эрхэм цолыг хүртэж байгаа бөгөөд Отгонжаргал бол П.Энхболдын уралдааны удаа дараагийн аварга юм.

Дунд ангийн багш нарын олимпиадад нийт 36 багш оролцсоноос "Олонлог" сургуулийн багш Б.Ганбилэг 20 оноогоор түрүүлж, "Дэлгэрэх" сургуулийн багш М.Гантөгс 14 оноогоор, "Олонлог" сургуулийн багш Б.Баяржаргал 14 оноогоор II байр, 11-р сургуулийн багш Э.Батзаяа 13.5 оноогоор III байрыг эзэллээ. Багш Б.Ганбилэг дархан аварга гэсэн эрхэм цолыг хүртэж байгаад ММОХороо тусгайлан баяр хүргэх ёстой байхаа. Ийнхүү профессор Ц.Лхамсүрэнгийн нэрэмжит ММО-44 олимпиадаас хос дархан аварга төрөх од гаригийн барилдлагатай байжээ. Багийн дүнгээр аймаг хотуудыг байр эзлүүлэхэд Ч.Даваадорж ахлагчтай УБ хот дундаж оноо 13.05-аар 1-р байр, Г.Адъяахүү ахлагчтай Хөвсгөл аймаг дундаж оноо 11.08-ээр 2-р байр, Р.Одгэрэл ахлагчтай Увс аймаг дундаж оноо 9.17-оор 3-р байр, Д.Мөнхдэлгэр ахлагчтай Завхан аймаг дундаж оноо 6.75-оор 4-р байранд шалгарлаа.

ММО-44-д 1-р сургууль 13 медаль, "Олонлог" сургууль 8 медаль, 11-р сургууль 5 медаль Сант, Дэлгэрэх сургууль, Баян-Өлгий, Завхан, Сэлэнгэ, Хөвсгөл тус тус 1, 1 медаль авч олимпиадад оролцогчдоо хошуучлан сайхан амжилт гаргалаа.

УБ хотын 1-р сургуулийн 8-р ангийн сурагч Б.Батхуяг Ц.Лхамсүрэнгийн нэрэмжит ММО-44-ын үнэмлэхүй аваргаар шалгарлаа.

Энэ жилийн 7-р сард Испанийн Мадрид хотод болох ОУМО-49-ийн бэлтгэлд 1-р сургуулийн 11-р ангийн аварга сурагч Э.Тэмүгэ, Б.Мягмаржав, Г.Оюундарь, Н.Бямбажав, "Олонлог" сургуулийн Б.Билгүүн, Чингүнжав, "Олонлог" сургуулийн 10-р ангийн сурагч Э.Энхзаяа нарыг үлдээхээр Олимпиадын хороо шийдвэрлэлээ.

ОУМО-49-ийн бэлтгэлд багтаж шалгарсан та бүхэндээ амжилт хүсч, Монголынхоо нэрийг дэлхийн тавцанд дуурсгах хүндтэй бөгөөд хариуцлагатай үйл хэргийн төлөө идэвх чармайлт гарган сайн бэлтгэж амжилттай оролцохыг Монголын нийт Математикчдын нэрийн өмнөөс даалгаж байна.

Эрдэм оюун дэлгэрч Монголд математикчдын оюун ухаан улам хөгжин дэлгэрэх болтугай. Анхаарал тавьсан та бүхэнд баярлалаа.

Монгол Эх орны ба МУИС-ийн математик сэтгэлгээний хөгжилтийн тухай

Профессор Ц.Лхамсүрэн

Европ цаг улирал тооллын XX зууны эхэнд, үндсэндээ, дөрвөн аргын тооны мэдлэгтэй байсан Монголын өргөн олон нийт бид, шинэ, XXI зуунтай золгож яваа энэ цаг үедээ, орчин цагийн математик мэдлэгийн хүрээнд асар том алхам хийж, математикийн ертөнцөд өөрийн хэр хэмжээнд таарсан тодорхой орон зайг баттай эзлэж, математикийн шинжлэх ухааны хэд-хэдэн салбарт дэлхийн түвшний бүтээл туурвих чадвартай судлаач-эрдэмтэдтэй болж чадсан явдал бол манай нийгмийн оюун санаа, сэтгэлгээнд гарсан түүхэн гайхамшигт дэвшил юм.

Орчин цагийн математик сургалтын үйл ажиллагаа 1942 онд нээгдсэн МУИС-ийн бүрэлдэхүүнд Багш нарын факультетийн Физик-математикийн салбар байгуулагдсанаар эхэлсэн бөгөөд тэр цаг үеийн математик сургалтыг ЗХУ-ын шилдэг их, дээд сургуулиудын сургалтын төлөвлөгөө, хичээлийн хөтөлбөрөөр зөвлөлтийн эрдэмтэн багш нар гардан явуулж байсан нь манай мэргэжлийн математик сургалт анхнаасаа хөгжингүй орны түвшинд эхлэлээ тавьж чадсан ба энэ нь манай математик сэтгэлгээний хөгжлийн анхны дорвитой алхам байлаа.

Улмаар, зогсолтгүй эргэх түүхэн хөгжлийн үйл явцаар Монголын нийгмийн тодорхой хэсгийн хүрээнд, тодорхой цаг хугацаанд, тодорхой хүмүүсийн идэвхтэй, бүтээлч үйл ажиллагааны үр дүнд хүрсэн математик сэтгэлгээний өнөөгийн хөгжилтөд манай орны нийт судлаач математикчид, МУИС-д дөчин хэдэн жил нэг факультет, нэг тэнхимд хамтран зүтгэж байгаа ахмад, дунд ба залуу үеийн эрдэмтэн багш нар, бүх шатны сургуулийн сурган хүмүүжүүлэгч багш нарын оруулсан асар их хүч хөдөлмөр, бүтээл туурвилыг бахархан хүндэтгэж, баярлан биширч байдгаа энэ ялдамд илэрхийлэхийн зэрэгцээ Эх орны математик сэтгэлгээний хөгжилтөд шинэ үеийн эхлэлийг тус тус тавьсан манай математикчдын ахмад үеийн гол төлөөлөгч болох Монгол Улсын Ардын багш (1991 он), Гавъяат багш (1981 он), Профессор (1966 он), Доктор (1954 он) Лувсанцэрэнгийн Шагдар багш ба залуу үеийн төлөөлөл болох Шинжлэх Ухааны доктор (1990 он), Профессор (1996 он) Цагааны Болдсүх агсаны тухай сэтгэлд хоногшсон гэгээн дурсамжаас товчхон дурдъя.

Манай анхны эрдэмтэн-математикч Л.Шагдар багштай миний бие анх 1959 оны 6-р сарын нэгэн сайхан нарлаг өдөр МУИС-ийн хичээлийн Төв байрны ар дахь цэцэрлэгт хүрээлэнд (тэр үед уг цэцэрлэг дотор буга, согоо хоёр идээшлээд явдаг байсан юм) өөрийн хоёр залуу нөхдийн хамт багшийн дуудсанаар очиж уулзсан бөгөөд тэгэхэд маш цэвэрхэн хувцасласан, цэмцгэр ца-

гаан хүн ЗХУ-ын М.В.Ломоносовын нэрэмжит Москвагийн УИС-д математикийн мэргэжлээр суралцуулахаар явуулах хүүхдүүдийн тоонд биднийг оруулж байгаа тухай хэлээд математикийн сургалт ба математикийн шинжлэх ухааны ололт амжилт, хөгжил дэвшил, ирээдүйн тухай нэлээд ярьж өгч билээ. Тэгээд 1965 онд миний бие сонгосон мэргэжлээр уг сургуулиа төгсөөд МУИС-ийн Физик-математикийн факультетийн Математик анализын тэнхимд багшаар томилогдон ирэхэд Л.Шагдар багш маань нүдний хүнд өвчний улмаас хараагүй шахам болчихсон ч тэнхимдээ багшлаж байсан бөгөөд надад маш их халамжтай хандаж, би багштай хамтран математик анализын лекц, семинарын хичээлийг заах бэлтгэлээ хангадаг байлаа. Тэгэхдээ багш маань бүх материалыг сэдэв бүрээр холбогдох ном, зохиолуудаас сонгон авч, надаар уншуулж магнитофонд бичиж аваад дараа нь өөрөө дахин дахин сонсож, тунгаан бясалгаж, бүх баталгаа тайлбарыг маш нарийн нямбай гүйцэтгэж нягталдаг сайхан заншлыг надад өвлүүлж өгсөн юм.

Л.Шагдар багш маань хүний бүтээл, хөдөлмөрийг маш өндрөөр үнэлж хүндэтгэдэг оюунлаг, өгөөмөр сэтгэлтэй хүн бөгөөд миний гүйцэтгэж хамгаалсан дипломын ажлын нэг хэсэг нь "Вестник Московского Университета" сэтгүүлд 1967 онд нийтлэгдсэнийг олж үзчихээд маш халуун дотно баяр хүргэж, уг ажлын агуулгаар илтгэл бэлтгүүлэн, тэр үед манай тэнхимд ЗХУ-аас мэргэжилтнээр уригдан ирж ажиллаж байсан доцент И.А.Парадоксова багштай хамт зориуд цаг зав гарган яриулж байж билээ. Энэ мэт сайхан дурсамжууд Л.Шагдар багшийн бүх шавь нар, хамтран ажиллаж байсан бүх хүний сэтгэл оюунд дүүрэн байгаа гэдэгт би эргэлзэхгүй байна.

Одоо, манай үе үеийн математикчдын дотроос миний бие онцгойлон хүндэтгэж явдаг доктор Ц.Болдсүх агсаны тухай товч дурсамж толилуулъя. Ц.Болдсүхийн аав Монгол Улсын Гавъяат багш С.Цагаан гуайг Монгол даяар сайн мэддэг байсан. Харин хүү Ц.Болдсүхийг тэр үеийн БНАГУ-ын Дрездений Техникийн Их сургуульд суралцахаар очиход Германы нөхдүүд нэлээд гайхаж байсан гэдэг. Яагаад гэвэл, тэр цаг үед Германд манай сайд, дарга, өндөр албан тушаалтны хүүхдүүд л очиж сурдаг байснаас биш, дунд сургуулийн багшийн хүүхэд ер очдоггүй байж л дээ! Мэдээж, Ц.Болдсүх маань эрт илэрсэн математикийн төрөлхийн авъяас, аав ээжээсээ өвлөсөн саруул ухаан, суралцах чин эрмэлзэлтэй байсан учраас сургууль, багш нар нь түүний хэн болохыг дорхноо ойлгосон гэнэ билээ.

Ц.Болдсүх маань Их сургуулийн төгсөлтийн (манайхаар, дипломын) ажлаасаа эхлээд орчин цагийн математик анализын гол салбарын нэг болох Шредингерийн операторын спектрал онолын хүрээнд онолын өндөр түвшний хэд хэдэн томоохон бүтээл туурвиж, дэд доктор, Шинжлэх ухааны докто-

рын зэргийг дэс дараалан хамгаалсан, Монголын анхны Шинжлэх Ухааны Доктор-математикч байсан юм.

Эрдмийн зэргүүдээ хамгаалж Эх орондоо ирж ажилласан цөөхөн жилийн хугацаанд доктор Ц.Болдсүх маань эрдэм судалгааны зэрэгцээ ШУА, МУИС зэрэг байгууллагуудад удирдах албан тушаалд асар их ачаалалтай ажиллаж байсны улмаас манай тэнхимд багшлах ихээхэн сонирхолтой байсан ч ажлын зав боломжгүй байдаг байлаа. Гэхдээ шинжлэх ухааны докторын зэрэг хамгаалсан бүтээлийн агуулгаараа манай тэнхимийн семинарт нэг биш удаа илтгэл тавьж байсан ба уг ажлын талаар ОХУ-ын М.В.Ломоносовын нэрэмжит Москвагийн УИС-ийн функционал анализын тэнхимийн профессор, доктор А.Г.Костюченко гуайн маш өндөр үнэлгээ бүхий шүүмж бичиж өгснийг бидэнд үзүүлж байсан.

Профессор Ц.Болдсүх маань математикаас гадна хэлний маш их авъяастай хүн байсан бөгөөд нэг суурин дээр Герман, Англи, Орос хэлээр алинаар нь ч шууд, чөлөөтэй ярьж чаддаг байлаа.

Авъяаслаг математикч Ц.Болдсүхийн өгөөмөр сэтгэлийн ач буянаар манай математикчид ХБНГУ, Японы математикчидтай ажил төрлийн холбоотой болж, сургалт, судалгааны ажлаа шинэ хүрээнд, шинэ түвшинд хийх боломжтой болсныг зориуд тэмдэглэе.

Гоц авъяастай хүнийг Бурхан Тэнгэр хүртэл өөрийнхөө дэргэд эртхэн авахыг хүсдэг жамаар Ц.Болдсүх маань ид туурвиж бүтээх цэл залуу насандаа 2004 оны 7-р сарын 19-ний 23 цаг 40 минутад МУИС-ийн хээрийн судалгааны суурин "Хонин нуга" хэмээх газарт гэнэтийн өвчний улмаас Тэнгэрт халин одож, Монголын математикийн ертөнцөд хүнд гарз учирсан билээ. Энэ гунигт явдлаас хойш эргээд бодож байхад эрдэмтэн Ц.Болдсүхийн эрдэм мэдлэг, авъяас чадварын ихэнх хэсгийг Эх орон, Монголын математикийн хамт олон маань ашиглаж, эдлэж чадалгүй Бурхны оронд нь явуулж дээ гэдэг сэтгэлийн үзүүр дэх эмзэглэлийн зэрэгцээ доктор Ц.Болдсүхийн эрдмийн бүтээлийг үнэлж урамшуулах, өвлүүлж хөгжүүлэх талаар дорвитой алхам хаанаас ч, хэнээс ч бараг хийгдээгүй байгааг "хэзээ нэгэн цагт, хэн нэгэн ухаантан заавал хийнэ" гэсэн сэтгэлийн минь угт оршдог ариухан цагаан бодлоо хамгийн дотно-мэргэжлийн хамт олондоо нээхийн зэрэгцээ манай хойч үеийнхэн дотроос Монголын тал нутаг шигээ уужим чөлөөт сэтгэлгээний ачаар Монгол Эх орон, өөрийн алдар нэрийг даян дэлхийд дуурсгасан гарамгай эрдэмтэн-математикч төрөхийн итгэл айлгаж, тооны ухаан ба зурхайн эзэн — Дүйнхор Бурханд залбирал үйлдэж явдаг билээ, би.

Чин сэтгэлийн талархал

Улсын математикийн XLIV олимпиадыг миний нэрэмжит болгон явуулсан Олимпиадын Хороонд чин сэтгэлийн талархал илэрхийлье.

Түүнчлэн, монгол түмний Оройн Дээд Очирваань шүтээн оршсон Отгон-тэнгэр Хайрханаар овоглосон төрөлх Завхан аймгийн төрийн ба хувийн хэвшлийн байгууллагууд, хувь хүн болон, Улсын хэмжээний энэ чухал арга хэмжээг нэр төртэй зохион явуулахад тал бүрийн дэмжлэг туслалцаа үзүүлсэн сайн санаат бүх хүнд мэхийн ёслоё.

Эх сурвалжууд:

1. Монгол Улсын Шинжлэх ухаан, 80 жил. Ерөнхий редактор Акад. Р.Гончигдорж, УБ, 2001.
2. Жамц.Ө, Монгол Улсын Их сургуулийн түүхэн хөгжил, (1942-2004 он), УБ, 2004.
3. Лхамсүрэн Ц., Ичинхорлоо Ч., Манай Эх орны орчин цагийн математикч эрдэмтдийн Намтарын товчоон (монгол, англи хэлээр), МУИС, 2002

**Математикийн ухааны доктор, профессор Цэнд овогтой
Лхамсүрэнгийн бүтээлийн тойм, товч танилцуулга**

Манай эх орны орчин цагийн ууган математикч-эрдэмтэдийн тоонд зүй ёсоор багтдаг Профессор Ц. Лхамсүрэн 1960-аад оны дундуур ОХУ-д М. В. Ломоносовын нэрэмжит Москвагийн УИС-ийн оюутан ахуй үеэс сонгомол спектрал онолын судалгаагаар дэлхийд нэр нь алдаршсан Доктор, Профессор Б.М.Левитан ба түүний шавь Доктор В.В.Жиков нарын удирдлагын дор курс, дипломын ажлын хүрээнд судалгааны ажлыг гүйцэтгэж эхэлсэн бөгөөд улмаар 1969-72 онд мөн сургуулийн аспирантурт суралцах хугацаандаа функционал анализ, функцийн онол, абстракт ба тухайн уламжлалт дифференциал тэгшитгэлийн салбарт хамаарах хэд хэдэн чиглэлийн асуудлаар эрчимтэй ажиллаж «Хоёрдугаар эрэмбийн параболлиг тэгшитгэлийн шийдийн төлөв байдлын зарим асуудлууд» нэртэй нэг сэдэвт диссертацийн зохиолоос гадна нийт 20 гаруй нэрийн математикийн онолын судалгааны өгүүлэл гадаад, дотоодын хэвлэлд нийтлүүлсэн байна.

Ц.Лхамсүрэн «Вестник Московского Университета» (1967 он), сэтгүүлд «Шугаман бус гишүүн бүхий параболлиг тэгшитгэлийн үет шийд оршин байх тухай теорем» нэртэй анхны бүтээлийг нийтлүүлснээр гадаадын хэвлэлд математикийн эрдэм шинжилгээний ажил хэвлүүлсэн хоёр дахь Монгол хүн болсон юм. (Анхных нь, Ардын Багш, Монголын ууган математикч-эрдэмтэн профессор Л.Шагдар, «Доклады АН СССР, №5, 1954 он»).

1.1 Профессор Ц.Лхамсүрэн дээр дурдсан анхны ажил болон түүнтэй холбогдсон зарим ажлаараа:

1-рт. Гильберт огторгуй дахь абстракт шугаман бус дифференциал тэгшитгэлийн

$$x'(t) = -A \cdot x(t) + \Theta(x(t), t)$$

үет өргөтгөсөн шийд оршин байхыг тогтоосон. Энэ нь төгсгөлөг хэмжээст огторгуйн тохиолдолд Латвийн математикч П.Г.Боль, ОХУ-ын математикч Б.П.Демидович, М.А.Красносельский болон А.И.Перов нарын үр дүнгүүдийн өргөтгөл болсон.

2-рт. Шугаман бус гишүүн бүхий параболлиг тэгшитгэлийн үет шийд оршин байх асуудалд эерэг хариулт өгсөн.

3-рт. $y' + k \cdot y = Q(y, t)$ хэлбэрийн тогтмол коэффициенттой шугаман бус гишүүн бүхий 1-р эрэмбийн абстракт дифференциал тэгшитгэл $Q(y, t)$ оператор t аргументаар бараг үет-функц бөгөөд түүний Фурьегийн илтгэгчүүд нь зөвхөн төгсгөлгүй алсад цор ганц хязгаарын цэгтэй нөхцөлд өмнөх үр дүн зөөгдөх боломжтойг тогтоожээ.

4-рт. H гильберт огторгуйд бага параметр агуулсан

$$x' + A \cdot x = \varepsilon \cdot Q(y, t)$$

тэгшитгэл тодорхой нөхцөлийг хангах тохиолдолд цор ганц бараг-үет шийдтэй байхаар тийм $\varepsilon^* > 0$ оршин байхыг тогтоосон.

5-рт. Профессор Ц.Лхамсүрэнгийн энэ цаг үеийн бас нэгэн сонирхолтой үр дүн бол Н.Bohr-ын бараг-үет функцийн S.Bochner-ийн шинжүүртэй холбогдсон асуудал юм.

(S.Bochner). Бүх тоон шулуун дээр жигд тасралтгүй $f(t)$ функц Bohr-ын утгаар бараг-үет байх нөхцөл бол $\{f(t+h)\}$, $(-\infty < h < +\infty)$, бүл бүх тоон шулуун дээрх жигд нийлэлтийн утгаар компактлиг байхад оршино.

Бүх тоон шулуун дээр жигд тасралтгүй $f(t)$ функцийн хувьд, $\{f(t+\alpha_n)\}$ хэлбэрийн дарааллуудын тоон шулууны төгсгөлөг хэрчим бүр дээрх жигд нийлэлтийн хязгаарын олонлогийг $H(f)$ гэж, $\hat{f}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t+\alpha_n) = M_\alpha f$ гэж тус тус тэмдэглэе.

Тэгэхэд, хэрэв

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t+\alpha_n) = M_\alpha f, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(t+\beta_n) = M_\beta f$$

тус тус биелэгдэж байхад

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t+\alpha_n+\beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} f(t+\alpha_n+\beta_m)$$

тэнцэтгэл оршин байвал $f(t)$ нь Н.Bohr-ын бараг-үет функц байна гэсэн дүгнэлт баталсан байна.

1.2 Одоо профессор Ц.Лхамсүрэнгийн докторын диссертацийн үр дүнг авч үзье:

Докторын диссертац нь «Хоёрдугаар эрэмбийн параболлиг тэгшитгэлийн шийдийн төлөв байдлын зарим асуудлууд» сэдэвтэй 2 бүлэгтэй. Нэгдүгээр бүлэгт Боголюбов-Крыловын дундажлалын алдарт зарчмыг (x, t) хувьсагчуудын бүх огторгуйд өгөгдсөн 2-р эрэмбийн шугаман параболлиг тэгшитгэлийн тохиолдолд өргөтгөн тогтоосон.

Диссертацийн хоёрдугаар бүлгийн гол үр дүн нь эерэг бараг-үет шийд оршин байх тэгшитгэлийн тодорхой ангийг ялган авч болохыг тогтоосонд оршино.

Уг диссертацийг 1973 оны 2-р сард ОХУ-ын М.В.Ломоносовын нэрэмжит Москвагийн УИС-ийн Механик-Математикийн факультетийн Эрдмийн Зөвлөл дээр амжилттай хамгаалсан байна.

Доктор Ц.Лхамсүрэнгийн диссертацийн ажлын нэгдүгээр бүлгийн үндсэн хэсэг нь түүний багш нарын туурвисан «Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения» монографид багтан орж нийтлэгдсэн ба уг зохиолыг Англи хэлнээ орчуулан Кембриджийн Их Сургуулиас эрхлэн хэвлэн гаргасан байдаг.

Харин хоёрдугаар бүлгийн материалууд хэд хэдэн өгүүлэл хэлбэрээр Орос, Монгол хэлээр нийтлэгджээ.

1.3 Диссертацийн сэдвийн хүрээнд Ц.Лхамсүрэнгийн судалсан нэгэн томоохон асуудал бол B -огторгуй дахь абстракт дифференциал тэгшитгэлийн бараг-үет шийдийн тухай бодлогууд байсан. Энэ чиглэлийн судалгаанд түлхэц өгсөн гол баримт бол Италийн эрдэмтэн L.Amerio, Украины эрдэмтэн М.И.Кадец нарын тогтоосон абстракт бараг-үет функцийн тодорхой биш интегралын бараг-үет байх нөхцөлийн тухай шинэ теоремууд байсан юм.

B -огторгуйд дараах абстракт дифференциал тэгшитгэл авч үзье.

$$y^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} A_k(t)y^{(k)}(t) = f(t), \quad t \in (-\infty; +\infty) = J, \quad (*)$$

энд байгаа $A_k(t)$, ($k = 0, 1, \dots, n-1$), тасралтгүй, t аргументаар (ерөнхий ω) үет, төгс тасралтгүй оператор-функцүүд (B -огторгуйд үйлчилдэг), $f(t)$ -бараг-үет (эсвэл рекуррент) функц болно.

Энэ тэгшитгэлийн бүх тоон шулуун дээр зааглагдсан шийдийн бараг-үет (эсвэл рекуррент) байх асуудал тавигдсан.

Тогтмол коэффициенттой n -эрэмбийн ердийн дифференциал тэгшитгэлийн зааглагдсан шийд бараг-үет байх тухай теоремыг Bohr-Neugebauer нар баталсан бөгөөд үет коэффициенттой тэгшитгэлийн тохиолдолд Казахстаны В.Х.Харасахал судалсан байна.

Ажлын гол үр дүнг томъёолохын тулд дараах зөвшилцөл тогтооё: Хэрэв B -огторгуй нь (тэг рүү нийлдэг тоон дарааллын) c_0 огторгуйтай изоморф бөгөөд изометр хэсгийг өөртөө агуулаагүй байвал $B \ni c_0$ гэж тэмдэглэн бичнэ. Жишээ нь, аливаа сул гүйцэд (тухайн тохиолдолд, рефлексив) огторгуй бүр энэ чанарыг хадгалдаг.

Тэгвэл, хэрэв $B \ni c_0$ байвал (*) тэгшитгэлийн зааглагдсан шийд бүр бараг-үет (эсвэл рекуррент) функц байна гэсэн гол дүгнэлт батлагдсан.

Энэ ажлын бараг-үет байх хэсгийг Ц.Лхамсүрэн, рекуррент байх хэсгийг Египет математикч Б.Болес тус тусдаа баталсан бөгөөд агуулгын хувьд ижил төстэй, арга техникийн хувьд онцын ялгаагүй учраас тэдний хамтын бүтээл болж ОХУ-ын Бүх Холбоотын хэмжээний «Дифференциальные уравнения» (т.VIII. №6, 1972), сэтгүүлд нийтлэгдсэн байна. Улмаар, Америкийн Мате-

матикийн Нийгэмлэг уг сэтгүүлийг Англи хэлнээ орчуулан АНУ-д хэвлэсэн байдаг.

1.4 Функционал анализын сонгомол асуудал-янз бүрийн огторгуй дахь олонлог компактлог байх нөхцөлийн талаар Ц.Лхамсүрэн хэд хэдэн чухал үр дүнг Орос, Монгол хэлээр гадаад, дотоодод нийтлүүлсний дотроос Соболевийн огторгуйнууд

$$L_p^{r_1, \dots, r_n}(R^n) = L_p^{(r)}, \quad (1 \leq p < \infty, r = (r_1, \dots, r_n))$$

болон Гельдерын өргөтгөсөн

$$H_p^{(r)}(R^n), \quad B_{p\theta}^{(r)}(R^n)$$

огторгуйнууд дахь зааглагдсан олонлог компактлог байх шинжүүрүүдийг багтаасан ихээхэн ерөнхий дүгнэлтийг олж тогтоосон байна.

1.5 Доктор Ц.Лхамсүрэн Хоёрдугаар эрэмбийн эллипсэн операторуудын, мөн параболлиг операторын тохиолдолд, эхний хувийн функцүүдийг сөрөг бус функцүүдийн конусын утгаар жиших боломж, түүнчлэн B -огторгуй дахь нэгэн утгат бус агшаалтын хөдөлгөөнгүй цэгийн тухай теоремыг нийтлүүлснээс гадна үет ба бараг-үет тоон дарааллуудын огторгуйнуудын өвөрмөц чанаруудыг тогтоож, эдгээр огторгуйнуудын хосмог огторгуйнуудыг судлан нийтлүүлжээ.

1.6 Профессор Ц.Лхамсүрэнгийн сүүлийн үеийн судалгааны бүтээлүүдээс нэрлэвэл, абстракт бүлэг дээрх бараг-үет функцүүдийн монотон дарааллын тухай теорем, мөн абстракт аналитик бараг-үет функцүүдийн бүл компактлог байх шинжүүрүүд зэргийг дурдаж болно.

2. Профессор Ц.Лхамсүрэн сүүлийн жилүүдэд Монгол орон дахь орчин цагийн математик сэтгэлгээний үүсэл, хөгжлийн түүх, дэвшлийн үйл явцын асуудлаар судалгааны агуулгатай хэд хэдэн өгүүлэл нийтлүүлж, математикийн түүхийн судалгаанд өөрийн орны олон нийтийн анхаарлыг хандуулах алхмуудыг амжилттай хийж байна.

3. Профессор Ц.Лхамсүрэн МУИС-д олон жил ажиллаж байгаа хугацаанд хуримтлуулсан туршлагадаа тулгуурлан их, дээд сургууль, коллежийн оюутан, багш нарт зориулсан гарын авлага, сурах бичиг, сургалтын материал нэлээд олныг боловсруулж нийтлүүлсэний дотор «Дээд математикийн язгуур үндэс» (2 боть), «Дээд математикийн дасгал бодлого», «Функционал анализын дээж бичиг», «Математик анализын шилмэл бодлогын эмхэтгэл», «Математик анализ-2», «Математик анализ-3», «Математик анализ-4», «Математик анализын бодлогын хураамж-I», «Математик анализын бодлогын хураамж-II» зэрэг дорвитой бүтээлүүд байгааг нэрлэж болно.

Профессор Ц.Лхамсүрэн их, дээд сургуулийн математик сургалтын зэрэгцээ ЕБС-ийн математик сургалтад нэлээд анхаарч ажилладаг бөгөөд 2000 онд төрсөн нутаг-Завхан аймагт зохиогдсон түүний нэрэмжит математик-физикийн багш, сурагчдын олимпиадад зориулан нийтлүүлсэн бүтээлийн эмхтгэлд математик сургалт, сурталчилгааны агуулгатай гол бүтээлүүдийг нь оруулсан байна.

Мөн суралцагчид ба элсэгчдийн математик мэдлэгийг шалгах үйл ажиллагааг боловсронгуй болгох зорилгоор МУИС-ийн МКС-ийн хэсэг нөхдийн хамт «Математикийн нөхөх тест» нэртэй томоохон эмхтгэлийг БСШУЯ-ны Боловсролын Үнэлгээний Төвийн захиалгаар хоёр хувилбараар боловсруулах ажлыг удирдан зохион байгуулж нийтлүүлэн гаргаад байгаагийн зэрэгцээ Монголын их, дээд сургуулиудын оюутны математикийн олимпиадын үйл ажиллагааг тогтмолжуулан эрчимжүүлэхэд ихээхэн анхаарч байдаг юм.

4. Профессор Цэндийн Лхамсүрэн 1959-1965 онд М.В.Ломоносовын нэрэмжит Москвагийн УИС-ийн Механик-математикийн факультетийн математикийн салбарыг дүүргэсэн анхны Монгол математикч. 1969-1972 онд мөн сургуулийн аспирантурт суралцаж “Хоёрдугаар эрэмбийн параболлиг тэгшитгэлийн шийдийн төлөв байдлын зарим асуудлууд” сэдэвт бүтээлээр физик-математикийн шинжлэх ухааны дэд эрдэмтний зэрэг хамгаалж, функционал анализын чиглэлээр манай улсын анхны эрдэмтэн болжээ. Судалгааны гол бүтээлүүд нь функционал анализ, функцийн онол, абстракт ба тухайн уламжлалт дифференциал тэгшитгэлийн салбарт хамаардаг, эрдэм шинжилгээ, сургалт, сурталчилгааны агуулгатай 90 гаруй нэрийн бүтээлийг гадаад, дотоодын хэвлэлд нийтлүүлж, их, дээд сургуульд суралцагчдад зориулсан сурах бичиг, гарын авлага нэлээд олныг бичсэн.

Ц.Лхамсүрэн 1966 оноос МУИС-д багш, Эрдмийн Зөвлөлийн эрдэмтэн нарийн бичгийн дарга, хичээл ангийн эрхлэгч, сургалт хүмүүжил эрхэлсэн I проректор, мөн тус улсаас ЗХУ-д суугаа ЭСЯ-ны II нарийн бичгийн даргаар томилогдон ажиллаж байсан. 1988 оноос МУИС-ийн Математик анализын тэнхимийн эрхлэгч, “МУИС” Хөгжлийн сангийн Гүйцэтгэх захирлаар ажиллаж байгаа, манай дээд боловсролын системийн туршлагатай мэргэжилтэн бөгөөд 1973-2006 онд МУИС-ийн Эрдмийн Зөвлөлийн гишүүнээр сонгогдон ажиллаж ирсэн ба Доцент (1981 он), Профессор (1993 он), АБТА (1981 он), ШУТА (2001 он), «Алтан гадас» одон (1981 он), ойн медалиуд зэрэг шагнал цол хүртсэн, Монголын Үндэсний Шинжлэх Ухааны Академийн жинхэнэ гишүүн (Академич), ММБА-ийн Академич, Математикаар Эрдмийн зэрэг хамгаалуулах зөвлөлийн гишүүнээр тус тус сонгогдсон.

Тоймыг эмхтгэсэн: Доктор, дэд профессор В.Адъяасүрэн

Монголын математикийн XLIV олимпиад

1.1 ММО-44, VII ангийн III даваа

Б.Сандагдорж (МУБИС), Э.Азжаргал (МУБИС)

VII-A1 (Б.Сандагдорж). 34-өөр төгсдөг, 34-д хуваагддаг, цифрүүдийнх нь нийлбэр 34 байх хамгийн бага тоог ол.

VII-A2 (Н.Аргилсан). $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{101} < 5050$ байх дурын $a_1, a_2, \dots, a_{101}$ натурал тоонуудаас $5050 \mid (a_k + a_l - a_m - a_n)$ байх a_k, a_l, a_m, a_n гэсэн ялгаатай дөрвөн натурал тоог ямагт сонгон авч болох уу? Яагаад.

VII-A3 (Л.Даваажаргал). ABC адил хажуут гурвалжны AC суурь дээр D цэгийг авав. E, F цэгүүдийг DE хэрчмийн дундаж цэг AB тал дээр, DF хэрчмийн дундаж цэг BC тал дээр байхаар авсан ба $\angle EDA = \angle FDC$ болно. EF хэрчмийн дундаж цэг K нь ABC гурвалжин дотор оршдог бол $\angle DBA = \angle CBK$ гэж батал.

VII-B1 (Б.Сандагдорж).
$$\begin{cases} x^3 + y^3 + x^2y + y^2x = 40 \\ x^2 + y^2 + x + y = 14 \end{cases}$$
 тэгшитгэлийн системийн бодит тоон шийдийг ол.

VII-B2 (Ч.Гантөмөр). 8×8 хүснэгтийн нүд бүрд 1 эсвэл -1 тоонуудын аль нэгийг дурын аргаар бичээд k -р мөрийн тоонуудын үржвэрийг A_k -аар, k -р баганын тоонуудын үржвэрийг B_k -аар тус тус тэмдэглэв. Тэгвэл $A_1 + A_2 + \dots + A_8 + B_1 + B_2 + \dots + B_8$ нийлбэр 4-т хуваагдахыг батал.

VII-B3 (Б.Сандагдорж). $ABCD$ квадратын BC ба CD талуудын дундаж цэг E ба F байг. AE ба BF хэрчмүүд K цэгт огтлолцоно. AKF гурвалжны талбай ба $KECF$ дөрвөн өнцөгтийн талбайнуудыг жиш.

1.2 ММО-44, VII ангийн III даваа бодолт

VII-A1. Энэ тооны сүүлчийн хоёр орны цифрээс бусад цифрүүдийн нийлбэр нь 27 болно. Ийм тоо нь дор хаяж таван оронтой бөгөөд таван оронтой тоо

нь ганц 99934 байна. 99934 нь 34-д хуваагдахгүй. Иймээс хамгийн бага n тоог 6 оронтой хайя. Эдгээрээс хамгийн бага нь 189934 тоо бөгөөд 34-д хуваагдахгүй, харин 198934 нь 34-д хуваагдана. Иймд хамгийн бага n тоо нь 198934 болно.

VII-A2. Хэрэв ялгаатай k, ℓ, m, n тоонуудын хувьд $a_k + a_\ell$ ба $a_m + a_n$ тоонууд нь 5050-д ижил үлдэгдэл өгдөг бол $5050 \mid a_k + a_\ell - a_m - a_n$ болно. Иймд эсрэгээс нь ялгаатай үлдэгдэл өгдөг гэе. Түүнчлэн $a_k \not\equiv a_\ell \pmod{5050}$ тул $a_k + a_m \not\equiv a_\ell + a_n \pmod{5050}$ байна. Иймд

$$\underbrace{(a_1 + a_2), (a_1 + a_3), \dots, (a_1 + a_{101}), (a_2 + a_3), \dots, (a_{100} + a_{101})}_{5050}$$

тоонууд нь 5050-д ялгаатай үлдэгдлүүд өгнө. Иймд нийлбэр нь

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_2) + (a_1 + a_3) + \dots + (a_{100} + a_{101}) \equiv \\ & \equiv 0 + 1 + \dots + 5049 = 5049 \cdot 2525 \pmod{5050} \end{aligned}$$

буюу

$$(a_1 + a_2) + (a_1 + a_3) + \dots + (a_{100} + a_{101}) \equiv 1 \pmod{2}$$

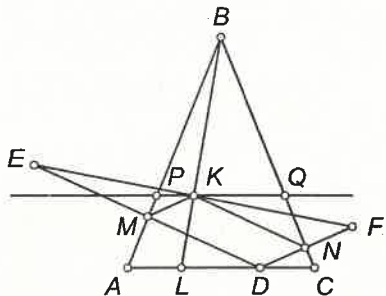
болно. Гэтэл нөгөө талаас

$$(a_1 + a_2) + (a_1 + a_3) + \dots + (a_{100} + a_{101}) = 100(a_1 + \dots + a_{101}) \equiv 0 \pmod{2}$$

тул зөрчилд хүрч

$$5050 \mid (a_k + a_\ell - a_m - a_n)$$

байх ялгаатай k, ℓ, m, n тоонууд олдох нь батлагдав.



VII-A3. K цэгийг дайруулж AC суурьтай параллель шулуун татаж, түүний AB ба BC талуудыг огтлох цэгүүдийг харгалзан P ба Q гэе. ED, FD -ийн дундаж цэгүүд нь харгалзан M ба N байг. Тэгвэл MK ба KN нь EFD гурвалжны дундаж шугамууд учир

$$MK \parallel DF, NK \parallel DE$$

буюу $\angle ADM = \angle QKN, \angle CDN = \angle PKM, \triangle ABC$ адил хажуут тул

$$\angle MPK = \angle NQK,$$

түүнчлэн $\angle EDA = \angle FDC$ тул

$$\triangle MPK \sim \triangle NQK \Rightarrow \frac{PK}{KQ} = \frac{MK}{NK},$$

$$\triangle CND \sim \triangle AMD \Rightarrow \frac{DC}{AD} = \frac{ND}{MD}$$

болно. BK шулуун AC талыг L цэгт огтолдог гэе. $AD = LC$ гэж батлахад хангалттай. $\frac{AC}{LC} = \frac{PQ}{KQ} = \frac{PK + KQ}{KQ} = 1 + \frac{PK}{KQ} = 1 + \frac{MK}{NK} = 1 + \frac{ND}{MD} = 1 + \frac{DC}{AD} = \frac{AD + DC}{AD} = \frac{AC}{AD}$ гэдгээс $LC = AD$ болж $\angle ABD = \angle CBL$ болох нь батлагдав.

VII-B1. Эхний тэгшитгэлийг хувиргавал

$$\begin{cases} (x+y) \cdot (x^2+y^2) = 40 \\ x^2+y^2+x+y = 14 \end{cases}$$

болно. $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=b \end{cases}$ гэж орлуулъя.

$$\begin{cases} a \cdot b = 40 \\ a+b=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(14-a)=40 \\ b=14-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-7)^2-9=0 \\ b=14-a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a-10)(a-4)=0 \\ b=14-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=10 \end{cases} \text{ эсвэл } \begin{cases} a=10 \\ b=4. \end{cases}$$

Эндээс $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$ эсвэл $\begin{cases} x+y=10 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ болно. Эхний тэгшитгэлийн системийг бодъё.

$$\begin{cases} y=4-x \\ x^2+(4-x)^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ x^2-4x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=4-x \\ (x-2)^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ (x-3)(x-1)=0 \end{cases}$$

$(1,3); (3,1)$ шийдтэй болно. Харин II тэгшитгэл систем бодит тоон шийдгүй болно.

VII-B2. Хүснэгтэд байгаа бүх тоонуудын үржвэр нэг талаас $A_1 A_2 \dots A_8$ -тэй, нөгөө талаас $B_1 B_2 \dots B_8$ -тэй тэнцүү. Иймээс эхний үржвэрт p ширхэг -1 , хоёр дахь үржвэрт q ширхэг -1 байгаа гэвэл $p \equiv q \pmod{2}$ болно. Иймд $p + q$ нь тэгш тоо байна.

$$A_1 + A_2 + \dots + A_8 + B_1 + B_2 + \dots + B_8 = (-1) \cdot p + 1 \cdot (8 - p) + (-1) \cdot q + 1 \cdot (8 - q) = 16 - 2(p + q) \equiv 0 \pmod{4}$$

болох тул 4-т хуваагдах нь батлагдав.

VIII-B3. $ABCD$ квадратын талбайг a гэе. $S_{BCF} = S_{ADF} = S_{ABE} = \frac{a}{4}$ болох нь илэрхий $S_{KECF} < S_{BCF} = \frac{a}{4}$. Харин $S_{ABK} < S_{ABE} = \frac{a}{4}$, $S_{BFA} = \frac{a}{2}$ ба $S_{BFA} = S_{BKA} + S_{AKE}$ гэдгээс $S_{AKE} > \frac{a}{4}$ болно. Иймд $S_{KECF} < \frac{a}{4} < S_{AKE}$.

1.3 ММО-44, VIII ангийн III даваа

Б.Сандагдорж (МУБИС), Ш.Батхишиг (МУБИС)

VIII-A1 (Эрдэнэбаяр). Сөрөг биш бодит a, b, c тоонуудын хувьд

$$4(a + b + c) \geq 3(a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc})$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал. Тэнцэлдээ хүрэх нөхцөлийг тогтоо.

VIII-A2 (Ч.Гантөмөр). $n \times n$ ($n \geq 2$) шатрын хөлөг ба түүн дээр байрлах нэг шатрын хүү өгөгдөв. Шатрын хүү байгаа нүдтэйгээ ерөнхий талтай дурын нүдэнд нүүж чадах ба ийм нүүдлийг «шулуун» нүүдэл гээ. Түүнчлэн байгаа нүдтэйгээ цор ганц ерөнхий цэгтэй дурын нүдэнд ч нүүж чадна. Ийм нүүдлийг «диагонал» нүүдэл гээ. Шатрын хүү анх «диагонал» нүүдлээр эхлэн нүүж хөлгийн нүд бүрд яг нэг нэг удаа очиж бүх нүдийг дуустал нүүж болдог байх n -ийн бүх утгыг ол. (Хүү «диагонал» болон «шулуун» нүүдлээр ээлжлэн нүүнэ).

VIII-A3 (Б.Сандагдорж). $ABCD$ трапец AB хажуу талын урт нь AD ба BC сууриудын уртуудын нийлбэртэй тэнцүү байг. Тэгвэл A ба B өнцгийн биссектрисүүд CD тал дээр огтлолцохыг батал..

VIII-B1 (Ч.Гантөмөр). N -ээр 1 ба 2-ийн цифр тус бүр 1004 удаа орсон бүх 2008 оронтой ялгаатай натурал тоонуудын тоог тэмдэглэв. M -ээр 1, 2, 3, 4 цифрүүдээс оролцсон (өөр цифр орохгүй) бөгөөд 1 ба 2-ийн цифр тэнцүү тоотой орсон 1004 оронтой ялгаатай натурал тоонуудын тоог тэмдэглэв. N ба M -ийг жиш.

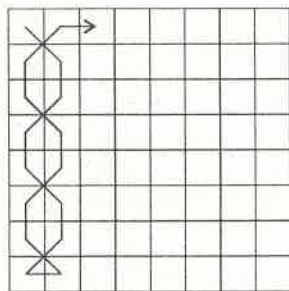
VIII-B2 (Б.Сандагдорж). Самбарт бичигдсэн n тоог арилгаад оронд нь $2n - 4$; $3n - 8$; буюу $8 - n$ тоонуудын нэгийг бичих үйлдэл зөвшөөрөгдсөн болог. Самбарт анх 41-ийн тоо бичигдсэн бол зөвшөөрөгдсөн үйлдлийн тусламжтайгаар $10'000'000$ -аас их, $10'000'020$ -оос бага тоог самбарт бичиж чадах уу?

VIII-B3 (Н.Аргилсан). ABC гурвалжны A өнцгийн биссектрис BC талтай D цэгээр огтлолцоно. A -г дайрсан, BC талыг D цэгт шүргэх тойрог AC талыг M цэгээр огтлох ба MB талыг P цэгээр огтолдог бол AP шулуун BD хэрчмийг хагаслан хуваана гэж батал.

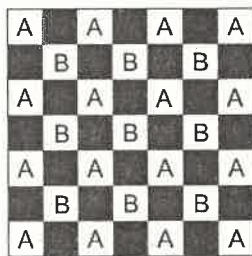
1.4 ММО-44, VIII ангийн III даваа бодолт

VIII-A1. $4a + 4b + 4c = 3a + (\frac{3a}{4} + 3b) + (\frac{a}{4} + b + 4c) \stackrel{\text{Коши}}{\geq} 3a + 2\sqrt{\frac{3a}{4} \cdot 3b} + 3\sqrt{\frac{a}{4} \cdot b \cdot 4c} = 3a + 3\sqrt{ab} + 3\sqrt{abc} = 3(a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc})$ болно. $c = \frac{b}{4} = \frac{a}{16}$ үед тэнцэтгэл биш тэнцэлдээ хүрнэ.

VIII-A2. Бид эхлээд n дурын тэгш натурал тоо байхад нүүдэл боломжтойг харуулъя. Шатрын хүүг хөлгийн аль нэг буланд тавья. Эндээс «диагональ» нүүдлээр эхлэн $n \times 2$ тэгш өнцөгтийн бүх нүдээр нүүж болно. Үүнийг $n = 8$ тохиолдолд зураг 1-д үзүүлэв. Иймд n тэгш тоо байхад бодлогын нөхцөл биелсэн байхаар нүүж болох нь батлагдав. (Шатрын хүү заасан чиглэлийн дагуу нүүнэ).



Зураг 1



Зураг 2

Одоо $n \geq 3$ ба n сондгой үед нүүдэл боломжгүйг баталъя. Эсрэгээс нь ямар нэг сондгой n -ийн хувьд нүүж болдог гэж үзье. Тийм $n \times n$ хөлгийг шатрын хөлгийн адилаар өнгө ялган булангийн 4 нүд цагаан өнгөтэй байхаар будсан гэе. (Зураг 2-т $n = 7$ үед будсан байна). Түүнчлэн цагаан нүднүүдэд A

ба B цэгүүдийг, яг нэг ерөнхий цэгтэй хоёр цагаан нүдэнд ижил үсэг бичигдээгүй байхаар бичье. Хэрэв булангийн цагаан нүдэнд A үсэг бичигдсэн бол нийт бичигдсэн A үсгийн тоо нь B үсгийн тооноос n -ээр их байх нь илэрхий. Шатрын хүү анх байсан нүдийг 1-ээр дугаарлан, нүүсэн нүд бүрийг нь дэс дараалан $2, 3, \dots, n^2$ тоонуудаар дугаарлая. Хэрэв 1 дугаартай нүд цагаан өнгөтэй байсан бол цагаан нүднүүд $1, 2, 5, 6, 9, 10, \dots$ дугааруудаар дугаарлагдах ба $1 \rightarrow 2, 5 \rightarrow 6, 9 \rightarrow 10, \dots$ гэсэн «диагональ» нүүдлүүд ялгаатай үсэг бичигдсэн цагаан нүднүүдийн тооны зөрөө нь 1 болж зөрчилд хүргэнэ. Үүнтэй адилаар 1 дугаартай нүд хар өнгөтэй байсан бол цагаан нүднүүд $3, 4, 7, 8, 11, 12, \dots$ дугааруудаар дугаарлагдах ба $3 \rightarrow 4, 7 \rightarrow 8, 11 \rightarrow 12, \dots$ гэсэн «диагональ» нүүдлүүд ялгаатай үсэг бичигдсэн цагаан нүднүүдээр дамжин хийгдэж мөн A ба B үсэг бичигдсэн цагаан нүдний нүднүүдийн тооны зөрөө нь 1 болоход хүрнэ. Энэ нь $n \geq 3$ ба n сондгой тоо байхад нүүдэл боломжгүйг батална.

VIII-A3. K цэгийг AB тал дээр $BK = BC$ байхаар авав. $AB = AD + BC$ эндээс $AK = AD$ болно. $\angle BKC = \angle BCK = x$, $\angle DKA = \angle KDA = y$ гэе. $\angle KAD = 180^\circ - 2x$, $\angle KBC = 180^\circ - 2y$ ба $\angle KBC + \angle KAD = 180^\circ$ гэдгээс $x + y = 90^\circ$ болно. $\Theta.x \triangle CKD$ -гурвалжин тэгш өнцөгт байна. A -өнцгийн биссектрис AM нь AKD гурвалжны өндөр болох тул $AM \parallel KC$ ба M нь KD хэрчмийн дундаж цэг гэдгээс AM шулуун CD талын дундаж цэгийг дайрна. Үүнтэй адилаар B өнцгийн биссектрис CD талын дундаж цэгийг дайрна. Иймээс A ба B өнцгийн биссектрисүүд CD талын дундаж цэг дээр огтлолцоно.

VIII-B1. A -аар 1 ба 2-ийн цифр тус бүр n удаа орсон $2n$ оронтой ялгаатай натурал тоонуудын олонлогийг, B -ээр 1, 2, 3, 4 цифрүүдээс оролцсон (өөр цифр орохгүй) бөгөөд 1 ба 2 цифр тэнцүү тоотой орсон n оронтой ялгаатай натурал тоонуудын олонлогийг тус тус тэмдэглэв. $\forall a \in A, a$ тоог эхнээс нь хоёр, хоёр оронгоор тасалж дараа нь $11 \rightarrow 1, 12 \rightarrow 3, 21 \rightarrow 4, 22 \rightarrow 2$ гэж сольж тавихад 1, 2, 3, 4 цифрүүдээс оролцсон бөгөөд 1 ба 2 цифр тэнцүү тоотой орсон n оронтой тоо үүснэ. Ж.нь 112122122211 тооноос 142321 тоо үүснэ. Нөгөө талаас $\forall b \in B, b$ тооны цифр бүрийг $1 \rightarrow 11, 2 \rightarrow 22, 3 \rightarrow 12, 4 \rightarrow 21$ гэж сольж тавихад 1 ба 2-ийн цифр тус бүр n удаа орсон $2n$ оронтой тоо үүснэ. Иймээс $|A| = |B|$ ба $M = N$ болно.

VIII-B2. Самбарт бичигдсэн A тоог арилгаад оронд B бичигдсэн гэдгийг $A \rightarrow B$ гэж тэмдэглэе.

$$n - 4 \mid (2n - 4) - 4, n - 4 \mid (3n - 8) - 4, n - 4 \mid (8 - n) - 4$$

тул хэрвэ $A \rightarrow B$ бол $A - 4 \mid B - 4$ байх нь инвариант юм. $A \rightarrow B \rightarrow C$ бол $A - 4 \mid B - 4$ ба $B - 4 \mid C - 4$ гэдгээс $A - 4 \mid C - 4$ болно. Анх 41-ийн тоо бичигдсэн учир үйлдэл бүрийн дараа самбарт бичигдсэн тооноос 4-г хасахад гарах тоо 37 хуваагдах болно. Нөгөө талаас 10000000-аас их 10000020-с бага тоог 37-д хуваахад гарах үлдэгдэл нь 10-аас их 30-аас бага болно.

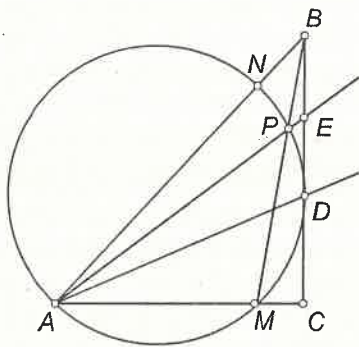
VIII-B3. $(AP) \cap BD = E$ гae. $BE = DE$ гэж баталъя. $\omega \cap (AB) = N$ гae. AD биссектрис учир $MD = DN$ байна.

$$\angle NAP = \frac{\overset{\frown}{NP}}{2} = \frac{\overset{\frown}{DN} - \overset{\frown}{DP}}{2} = \frac{\overset{\frown}{MD} - \overset{\frown}{DP}}{2} = \angle MBD.$$

$\angle NAP = \angle MBD$ ба $\angle AEB$ -ерөнхий учир

$$\triangle BEP \sim \triangle AEB \Rightarrow \frac{EB}{AE} = \frac{PE}{BE} \Rightarrow BE^2 = AE \cdot PE.$$

Нөгөө талаас шүргэгч огтлогчийн теорем ёсоор $EP \cdot AE = DE^2 \Rightarrow EB^2 = DE^2$ буюу $EB = ED$ болж батлагдлаа.



1.5 ММО-44, VIII ангийн IV даваа

Ч.Гантөмөр (МУБИС)

VIII-A1 (Э.Чойсүрэн). $a, b, c, d > 0$ ба $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ бол

$$\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c} + \sqrt{1-d} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

VIII-A2 (Ч.Гантөмөр). Дэс дараалсан 8 натурал тоог тус бүрдээ дөрөв дөрвөн тоо агуулсан 2 ангид хуваав. Хэрэв анги тус бүрийн тоонуудын квадратуудын нийлбэр тэнцүү бол анги тус бүрийн тоонуудын нийлбэр тэнцүү гэж батал.

VIII-A3 (Э.Азжаргал). $AB > BC$ ба ABC гурвалжны AB тал дээр K цэгийг $\angle BCK = \angle BAC$ байхаар авав. AC талын дундаж цэг M ба ACK гурвалжны биссектрис CN болно. MN ба CK шулуунууд L цэгт огтлолцдог бол BL ба CN шулуунууд параллель болохыг батал.

VIII-B1 (Б.Сандагдорж). $1, 2, \dots, 44$ натурал тоонуудыг 11 ангид дурын аргаар хуваав. Хуваалтын аль нэг хэсгээс гурвалжны тал болох гурван тоог сонгон авч чадахыг батал.

VIII-B2 (С.Баярсайхан). Хэрэв m ба n нь сөрөг биш бүхэл тоонууд ба $m > 1$, $2^{2m+1} \geq n^2$ бол $2^{2m+1} \geq n^2 + 7$ гэж батал.

VIII-B3 (Э.Азжаргал, Э.Чойсүрэн). $n \times n$ квадрат хүснэгт өгөгдөв. Хэрэв n тэгш бол $\frac{n^2}{2} + 1$ ширхэг нүдийг, n сондгой бол $\frac{n(n+1)}{2}$ нүдийг хар өнгөөр дурын аргаар будахад хар өнгөтэй холбоост 3 нүд үргэлж олдохыг батал.

1.6 ММО-44, VIII ангийн IV даваа бодолт

VIII-A1. Энэ бодлого нь 8-р ангийн төвшинд таарахгүй хүнд бодлого байсан. Энэ бодлогын засалтад алдаа гарсан тул нийт сурагчдаас хүлцэл өчиж байна. Адъяасүрэн багшийн бодолтыг дор оруулав.

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ ба Кошийн тэнцэтгэл бишийг ашиглавал

$$\begin{aligned}(a + b + c + d)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \leq \\ &\leq 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 4\end{aligned}$$

тул $a + b + c + d \leq 2$.

$$\begin{aligned}\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c} + \sqrt{1-d} &\geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} \Leftrightarrow \\ 2(\sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1-b} + \sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1-c} + \sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1-d} + \sqrt{1-b} \cdot \sqrt{1-c} + \\ &+ \sqrt{1-b} \cdot \sqrt{1-d} + \sqrt{1-c} \cdot \sqrt{1-d}) \geq \\ &\geq 2(a + b + c + d) + 2(\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd} + \sqrt{cd}) - 4\end{aligned}$$

буюу

$$\begin{aligned} A &= (\sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1-b} + \sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1-c} + \sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1-d} + \\ &\quad + \sqrt{1-b} \cdot \sqrt{1-c} + \sqrt{1-b} \cdot \sqrt{1-d} + \sqrt{1-c} \cdot \sqrt{1-d}) \geq \\ &\geq (a+b+c+d) + (\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd} + \sqrt{cd}) - 2 \end{aligned}$$

гэж баталбал бодлого бодогдоно. Коши-Буняковскийн тэнцэтгэл бишээр

$$\begin{aligned} \sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1-b} &= \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+1}{2}} - a \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+1}{2}} - b = \\ &= \sqrt{\frac{(a-1)^2+b^2+c^2+d^2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{(b-1)^2+a^2+c^2+d^2}{2}} \geq \\ &\frac{(a-1)(b-1)+ab+c^2+d^2}{2} = \frac{2ab+c^2+d^2-a-b+1}{2} \end{aligned}$$

тул

$$\begin{aligned} A &\geq (ab+ac+ad+bc+bd+cd) + \frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2) - \frac{3}{2}(a+b+c+d) + \frac{6}{2} = \\ &= (ab+ac+ad+bc+bd+cd) - \frac{3}{2}(a+b+c+d) + \frac{9}{2} \\ &= ((ab+\frac{1}{4})+(ac+\frac{1}{4})+(ad+\frac{1}{4})+(bc+\frac{1}{4})+(bd+\frac{1}{4})+(cd+\frac{1}{4})) - \frac{3}{2}(a+b+c+d) + 3 \geq \\ (\text{Коши}) &\geq (\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd} + \sqrt{cd}) - \frac{3}{2}(a+b+c+d) + 3 = \\ &= (a+b+c+d) + (\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd} + \sqrt{cd}) - \frac{5}{2}(a+b+c+d) + 3 \geq \\ &\geq (a+b+c+d) + (\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd} + \sqrt{cd}) - 2 \end{aligned}$$

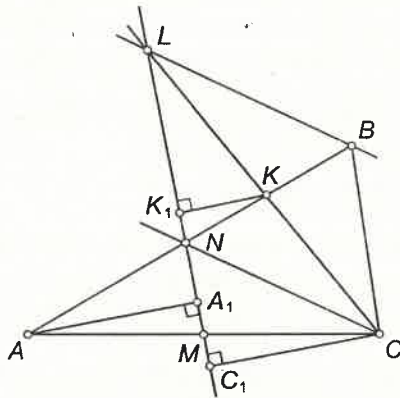
болов. Сүүлд $a+b+c+d \leq 2$ болохыг ашиглав. Мэдээж тэнцэтгэл биш $a=b=c=d=1/2$ үед тэнцэлдээ хүрнэ.

VIII-A2. $a, a+1, a+2, \dots, a+7$ нь өгөгдсөн тоонууд болог. $a^2 + (a+1)^2 + \dots + (a+7)^2 = 8a^2 + 5a + 140 \Rightarrow$ аль ч ангийн тоонуудын квадратуудын нийлбэр $4a^2 + 28a + 70$ болно. $X = \{a+7, a+i, a+j, a+k\}$ ангийг сонирхье. $3a^2 + 2a(i+j+k) + i^2 + j^2 + k^2 = 4a^2 + 28a + 70 - (a+7)^2 = 3a^2 + 14a + 21$ буюу $2a(i+j+k-7) = 21 - (i^2 + j^2 + k^2)$ болно. Батлах зүйл нь $i+j+k=7$ гэдгийг харуулахтай адил. Эсрэгээс нь баталъя.

(a) $i + j + k \geq 8$ байг. Тэгвэл $i^2 + j^2 + k^2 \geq \frac{(i + j + k)^2}{3} \geq \frac{64}{3} > 21$ болж зөрчилд хүрнэ.

(b) $i + j + k \leq 6$ байг. $21 - (i^2 + j^2 + k^2)$ нь тэгш тоо. $\Rightarrow i^2 + j^2 + k^2$ сондгой буюу $i + j + k$ сондгой. Иймд $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$ эсвэл $\{0, 1, 4\}$ эсвэл $\{0, 2, 3\}$ байхаас өөрцгүй. Аль ч тохиолдолд $21 - (i^2 + j^2 + k^2) > 0 > 2a(i + j + k - 7)$ болж зөрчилд хүрнэ. Иймд $i + j + k = 7$ буюу анги тус бүрийн тоонуудын нийлбэр тэнцүү ажээ.

VIII-A3. $\triangle ABC$ -ийн өнцгүүд нь α, β, γ ; A, C, K цэгүүдээс ML шулуунд буулгасан перпендикуляруудын суурийг харгалзан A_1, C_1, K_1 гээ.



$CM = MA$ тул $CC_1 = AA_1$. $\triangle KKLK_1 \sim \triangle CLC_1$ тул $\frac{CL}{KL} = \frac{CC_1}{KK_1}$,
 $\triangle NAA_1 \sim \triangle NKK_1$ тул $\frac{NA}{KN} = \frac{AA_1}{KK_1}$ болно. Иймд $\frac{CL}{KL} = \frac{AN}{KN}$ байна.
 $\angle BCN = \alpha + \frac{\gamma - \alpha}{2} = \frac{\gamma + \alpha}{2}$ ба $\angle BNC = \pi - \beta - \frac{\gamma + \alpha}{2} = \frac{\gamma + \alpha}{2}$ тул
 $\triangle CBN$ -адил хажуут гурвалжин ба $BC = BN$ болно. $\triangle CBK \sim \triangle ABC$ тул
 $\frac{BC}{BK} = \frac{AC}{CK}$ буюу $\frac{CK}{BK} = \frac{AC}{BC}$ болно.

$$\frac{CL}{KL} = \frac{AN}{KN} = \frac{AC}{CK} = \frac{BC}{BK} = \frac{BN}{BK}$$

тул $\frac{CL}{KL} = \frac{BN}{BK}$ болох ба эндээс $\frac{CK}{KL} = \frac{CL}{KL} - 1 = \frac{BN}{BK} - 1 = \frac{KN}{BK}$ болох
 тул $\triangle CKN$ ба $\triangle BKL$ гурвалжнууд т.ө.т шинжээр $\triangle CKN \sim \triangle LKB$ болж
 $CN \parallel BL$ болно.

VIII-B1. 22, 23, 24, ..., 44 гэсэн 23 тоог сонирхоё. Эдгээрийн аль ч хоёрынх нь нийлбэр үлдсэн тоонуудаас их учир аль ч гурав нь гурвалжны тал болж чадна. 11 ангид хуваасан тул ($23 = 11 \cdot 2 + 1$) Дирихлейн зарчмаар эдгээр 23 тооноос нэг ангид орох 3 тоо олдох болж бодлого бодогдов.

VIII-B2. $m > 1$ тул $2^{2m+1} = n^2 + k$ $k = 0, 1, \dots, 6$ үед шийдгүйг баталъя. $k = 0$ үед $2^{2m+1} = n^2$ шийдгүй болох нь илэрхий. $m > 1$ үед $2^{2m+1} \equiv 0 \pmod{8}$ ба $k = 1, 3, 5$ үед n сондгой тоо буюу $n^2 \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow k = 2^{2m+1} - n^2 \equiv -1 \pmod{8}$ болж зөрчилд хүрнэ. (1, 3, 5-ийн аль нь ч 8-д -1 үлдэгдэл өгөхгүй). $k = 2$ эсвэл $k = 6$ үед n тэгш тоо гэдгээс $k = 2^{2m+1} - n^2 \equiv 0 \pmod{4}$ болно. Гэтэл 2 ба 6-нь 4-д хуваагдахгүй. Харин $k = 4$ үед $n = 2n_1$ ба $2^{2m-1} = n_1^2 + 1$ болох тул $m > 2$ үед $k = 1$ тохиолдолтой ижил ба $m = 2$ үед $2^3 \neq n_1^2 + 1$ тул $k > 6$ болох нь батлагдав.

VIII-B3. (а) n -тэгш байг. $n \times n$ квадратыг $\frac{n^2}{4}$ ширхэг 2×2 квадратуудад хуваая. Бид $\frac{n^2}{2} + 1$ ширхэг нүд будсан гэдгээс Дирихлейн зарчмаар ямар нэг 2×2 квадратын 3 нүд хараар будагдсан байна. Энэ нь хар өнгөт холбоост 3 нүд юм.

(б) $n = 3$ үед 3×3 хүснэгтийн 6 нүдийг хараар будсан гэе.



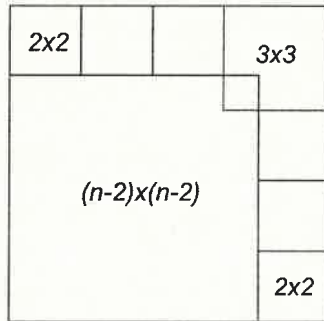
Эсрэгээс нь холбоост 3 хар нүд олддоггүй гэвэл аль ч багана ба аль ч мөр бүтнээрээ будагдсан байж таарахгүй. Иймд аль ч мөр, багана будагдсан нүд яг 2 ширхэг байна. Дээд талын 2×3 тэгш өнцөгтөд будагдсан нүд яг 4 ш байна. Иймд уг тэгш өнцөгтөд дор хаяж 1 багана (2×1) бүтнээрээ будагдсан.



Тэр нь голын багана байж таарахгүй (Учир нь түүний 2 талын багануудад нэг ч нүд хараар будагдахгүйд хүрнэ).

Иймд уг тэгш өнцөгтийн захын 2 багана бүтнээрээ будагдана. Тэгвэл доод мөрний зөвхөн голын нүд будагдах ба ахин нэг нүд будагдсан байх ёстой. Сондгой n -ийн хувьд индукцэлье. Бодлогыг $(n-2) \times (n-2)$ хүснэгт ба 3×3 хүснэгтийн хувьд үнэн байдаг гэе. Дараах байдлаар $n \times n$ хүснэгтэд шилжинэ. $(n-2) \times (n-2)$ зурагт үзүүлсний адилаар $(n-3)$ ширхэг 2×2 квадрат ба 1 ширхэг 3×3 квадратыг «наая» (Анхны $(n-2) \times (n-2)$

хүснэгт сүүлийн 3×3 квадрат хүснэгттэй 1 ерөнхий нүдтэй).



Нийт будагдсан нүдний тоо нь:

$$\frac{n^2 + n}{2} = 2(n - 3) + 5 + \frac{(n - 2)(n - 1)}{2}$$

Энэ нь индукцийн шилжилт юм.

1.7. ММО-44, IX ангийн III даваа

Б.Батцэнгэл (Математикийн хүрээлэн)

IX-A1 (Б.Батцэнгэл). $n^2 + 4m, m^2 + 7n$ тоонууд нь бүтэн квадрат байх бүх натурал m, n тоонуудыг ол.

IX-A2 (Б.Батцэнгэл). x, y, z нь $x + y + z = 1$ байх эерэг тоонууд бол

$$\frac{x}{x + yz} + \frac{y}{y + zx} + \frac{z}{z + xy} \leq \frac{9}{4}$$

байхыг батал.

IX-A3 (Б.Батцэнгэл). O төвтэй, R радиустай тойрогт $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ зургаан өнцөгт багтсан бөгөөд $A_1 A_2 = A_3 A_4 = A_5 A_6 = R$ байв. $OA_2 A_3, OA_4 A_5, OA_6 A_1$ гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд хос хосоороо O цэгээс ялгаатай B_1, B_2, B_3 цэгүүдээр огтлолцоно. B_1, B_2, B_3 цэгүүд R талтай зөв гурвалжин үүсгэхийг батал.

IX-B1 (Б.Батцэнгэл). 4-өөс цөөнгүй тооны чихрийг 4 уутанд хувааж хийсэн байв. Нэг үйлдлээр аль нэг 2 уутнаас 1, 1 чихэр сонгон авч, үлдсэн 2 уутны нэгэнд сонгосон 2 чихрээ нэмж хийж болно. Энэ үйлдлийн тусламжтайгаар бүх чихрийг нэг уутанд ямагт цуглуулж чадах уу?

IX-B2 (Б.Батцэнгэл). Гадаад байдлаар шүргэлцсэн ω_1, ω_2 тойргууд байв. Тэдгээрийн ерөнхий шүргэгч ℓ шулуун ω_1, ω_2 тойргуудыг харгалзан A, B цэгүүдээр шүргэнэ. ω_1 тойргийн ℓ шулуунтай параллель өөр нэг шүргэгч шулуун нь ω_2 тойргийг C, D цэгүүдээр огтолдог бол $BA = BC = BD$ байхыг батал.

IX-B3 (Б.Батцэнгэл). Натурал a, b, n тоонуудын хувьд

$$(3 + 2\sqrt{2})^n = a + b\sqrt{2}$$

бол b тоо нь бүтэн квадрат биш гэдгийг батал.

1.8 ММО-44, IX ангийн III даваа бодолт

IX-A1. $n^2 + 4m \neq n^2 + 2n + 1$ тул $n^2 + 4m \geq (n+2)^2$ буюу $m \geq n+1$ болно. Иймд $m^2 + 4n \leq m^2 + 7(m-1) < (m+4)^2$ болно. Эндээс $m^2 + 7n = (m+1)^2$, $m^2 + 7n = (m+2)^2$, $m^2 + 7n = (m+3)^2$ л байх боломжтой. Иймд дараах 3 хувилбар боломжтой:

а) $7n = 2m + 1$. Энэ тохиолдолд $n^2 + 4m = n^2 + 2(7n-1) = n^2 + 14n - 2 < (n+7)^2$. Түүнчлэн $14n - 2$ тэгш тул $n^2 + 14n - 2 = (n+2)^2 \vee (n+4)^2 \vee (n+6)^2$. Эндээс $(n, m) = (3, 10)$, $(n, m) = (19, 66)$ гэсэн шийдүүд гарна.

б) $7n = 4n + 4$. Энэ тохиолдолд $n^2 + 4m = n^2 + 7n - 4 < (n+4)^2$. Иймд $n^2 + 7n - 4 = (n+1)^2 \vee (n+2)^2 \vee (n+3)^2$ болно. Энэ нөхцөлийг хангах шийд олдохгүйг хялбар шалгаж болно.

в) $7n = 6m + 9$. Энэ тохиолдолд $n^2 + 4m = n^2 + \frac{2}{3}(7n-9) < (n+3)^2$. Иймд $n^2 + \frac{2}{3}(7n-9) = (n+1)^2 \vee (n+2)^2$ болно. Эндээс $n = 15$, $m = 16$ гэсэн шийд гарна.

Иймд

$$(n, m) = (3, 10); (19, 66); (15, 26)$$

гэсэн гурван шийдтэй.

IX-A2. $x = 1 - y - z$, $y = 1 - z - x$, $z = 1 - x - y$ тул

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+yz} + \frac{y}{y+zx} + \frac{z}{z+xy} &= \\ &= \frac{x}{1-y-z+yz} + \frac{y}{1-z-x+zx} + \frac{z}{1-x-y+xy} \\ &= \frac{x}{(1-y)(1-z)} + \frac{y}{(1-z)(1-x)} + \frac{z}{(1-x)(1-y)} \\ &= \frac{x}{(x+z)(x+y)} + \frac{y}{(x+y)(y+z)} + \frac{z}{(y+z)(x+z)} \end{aligned}$$

болно. Иймд

$$\frac{x(y+z) + y(x+z) + z(x+y)}{(x+y)(x+z)(y+z)} \leq \frac{9}{4}$$

тэнцэтгэл бишийг батлах шаардлагатай.

$$4(x+y+z)(x(y+z) + y(x+z) + z(x+y)) \leq 9(x+y)(x+z)(y+z)$$

Хаалт задлан эмхтгэвэл

$$6xyz \leq x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y$$

болно. Энэ тэнцэтгэл биш нь Кошийн тэнцэтгэл бишээс шууд мөрдөн гарна. Тэнцэтгэл биш $x = y = z = 1/3$ үед тэнцэлдээ хүрнэ.

IX-A3. $\angle OA_2A_3 = \angle OA_3A_2 = \alpha$, $\angle OA_4A_5 = \angle OA_5A_4 = \beta$, $\angle OA_6A_1 = \angle OA_1A_6 = \gamma$ гэж тэмдэглэе. $OA_2A_3, OA_4A_5, OA_6A_1$ гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ бөгөөд $\omega_1 \cap \omega_2 = \{O, B_3\}$, $\omega_2 \cap \omega_3 = \{O, B_1\}$, $\omega_3 \cap \omega_1 = \{O, B_2\}$ болог. $OA_2A_3B_3, OA_3A_2B_2$ дөрвөн өнцөгтүүд тойрогт багтана гэдгээс $\angle OB_3A_3 = \angle OB_2A_2 = 180^\circ - \alpha$ болох ба үүнтэй нэгэн адилаар $\angle OB_3A_4 = \angle OB_1A_5 = 180^\circ - \beta$ ба $\angle OB_1A_6 = \angle OB_2A_1 = 180^\circ - \gamma$ гэдгийг харуулж болно. Цаашилбал $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ тул эндээс

$$\angle A_5B_1A_6 = 180^\circ - \alpha, \angle A_1B_2A_2 = 180^\circ - \beta, \angle A_3B_3A_4 = 180^\circ - \gamma$$

гэж гарна. Зөв гурвалжны дотор талуудыг тодорхой өнцгүүдээр харах цэг цор ганц байх тул OB_3A_3, A_2B_2O гурвалжнууд тэнцүү байна. Иймд $B_2OA_2 = \angle OA_3B_3$ бөгөөд ижил нумд тулсан өнцгүүд тул $\angle OA_3B_3 = \angle OA_2B_3$ юм. Энэ нь $OB_2 \parallel A_2B_3$ буюу $OB_2A_2B_3$ адил хажуут трапец гэдгийг үзүүлнэ. Иймд $B_2B_3 = OA_2 = R$ юм. Үүнтэй нэгэн адилаар $B_3B_1 = B_1B_2 = R$ гэдгийг харуулна.

IX-B1. Чадна. Эхлээд хамгийн цөөн чихэртэй 2 уутнаас 1, 1 чихэр авсаар хамгийн цөөн чихэртэй 1 уутыг хоосолж чадна. Дараа нь үлдсэн 3 уутны хамгийн цөөн чихэртэй 2 уутнаас 1, 1 чихэр авсаар хамгийн цөөн чихэртэй 1 уутыг бас хоосолж чадна. Одоо үлдсэн 2 уутанд a, b тооны чихэр үлдсэн гэж үзье. Өгсөн нөхцөл ёсоор $a + b \geq 4$ тул $a \geq 2$ юм. Хэрэв $a = 2$ бол $b = 2$ байх ба энэ тохиолдолд $2, 2, 0, 0 \rightarrow 1, 1, 2, 0 \rightarrow 0, 0, 4, 0$ гэж чихрүүдийг нэг уутанд цуглуулж чадна. $a \geq 3$ тохиолдолд

$$\begin{aligned} a, b, 0, 0 &\rightarrow a-1, \overline{b-1}, 2, 0 \rightarrow a-2, \underline{b+1}, 1, \overline{0} \rightarrow \overline{a-3}, \underline{b}, 1, \underline{2} \rightarrow \\ &\rightarrow \overline{a-1}, b-1, \underline{1}, \underline{1} \rightarrow a+1, b-1, 0, 0 \end{aligned}$$

үйлдлийг дахин давтан хийснээр 2-р уутыг хоосолж чадна.

IX-B2. ω_1 тойргийн A цэгийн диаметрийн эсрэг цэгийг E гэж тэмдэглэе. ω_1, ω_2 тойргууд P цэгт шүргэлцдэг бол B, P, E цэгүүд нэг шулуун дээр оршино. CD хэрчмийн дундаж цэг M бол $ABME$ нь тэгш өнцөгт байна. Огтлогч шүргэгчийн чанар ёсоор $BA^2 = BP \cdot BE$ тул $EP \cdot EB = EB^2 - BP \cdot BE = EB^2 - AB^2 = AE^2$ юм. Мөн тойргийн 2 огтлогчийн чанар ёсоор $EP \cdot EB = EC \cdot ED = (EM - CM)(EM + CM) = EM^2 - CM^2$ байна. Эндээс $AE^2 = EM^2 - CM^2$ буюу $BC^2 = BM^2 + CM^2 = AE^2 + CM^2 = EM^2 = BA^2$ гэж гарна. Иймд $BC = BA$ юм. $BC = BD$ гэдэг нь илэрхий.

IX-B3. $(3 + 2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ гэж тэмдэглэе. m сондгой үед $a_m \equiv 3 \pmod{4}$ бөгөөд $b_m \equiv 2 \pmod{4}$ гэдгийг индукцлэн хялбархан харуулж болно. Үнэхээр $a_m \equiv 3 \pmod{4}$ ба $b_m \equiv 2 \pmod{4}$ бол $a_{m+2} = 17a_m + 24b_m \equiv 3 \pmod{4}$ ба $b_{m+2} = 34a_m + 12b_m \equiv 2 \pmod{4}$ юм. Одоо дурын натурал n тоог ямар нэгэн сондгой m тооны хувьд $n = 2^k m$ гэж үзвэл $(a_m + b_m\sqrt{2})^{2^k} = a_n + b_n\sqrt{2}$ болно. $b_{2m} = 2a_m b_m$ томъёог дахин дахин хэрэглэж $b_n = 2^k a_{n/2} a_{n/4} \dots a_m b_m$ гэдгийг гаргаж болох бөгөөд нэгэнт $(a_m, b_m) = 1$ тул $a_{2m} = a_m^2 + 2b_m^2, a_{4m} = a_{2m}^2 + 2b_{2m}^2 = a_{2m}^2 + 8a_m^2 b_m^2 \dots$ тоонууд мөн b_m -тэй харилцан анхны байна. Иймд $b_m \equiv 2 \pmod{4}$ тоо бүтэн квадрат биш учраас $b_n = 2^k a_{n/2} a_{n/4} \dots a_m b_m$ тоо бүтэн квадрат байж болохгүй. Мөн өөрөөр уг бодлогыг $(3 + 2\sqrt{2})^n = a + b\sqrt{2}$ бол a, b тоонууд нь $a^2 - 2b^2 = 1$ тэгшитгэлийн шийд мөн гэдгийг ажиглан $x^2 - 2y^4 = 1$ тэгшитгэл нь натурал тоон шийдгүй гэдгийг баталж бодож болно.

1.9 ММО-44, IX ангийн IV даваа

Б. Батцэнгэл (Математикийн хүрээлэн)

IX-A1 (Н.Аргилсан). k нь натурал тоо бол

$$\sqrt{k^2 + 1} + \sqrt{k^2 + 2} + \dots + \sqrt{k^2 + 2k - 1} + \sqrt{k^2 + 2k}$$

тооны бүхэл хэсгийг ол.

IX-A2 (Ш.Батхишиг). $A = \{1, 2, \dots, 2008\}$ олонлогоос аль ч 2 нь харилцан анхны байх ялгаатай n ширхэг тоог яаж ч сонгоход эдгээр тоонуудын аль нэг нь ямагт анхны тоо байв. n -ийн авч болох хамгийн бага утгыг ол.**IX-A3 (Б.Батцэнгэл).** ABC гурвалжинд багтсан тойрог гурвалжны BC , CA , AB талуудыг харгалзан D , E , F цэгүүдэд шүргэнэ. A , B цэгүүдийг дайрсан, D , E цэгүүдийг дотроо агуулах ω тойрог татав. DE шулуун ω тойргийг P , Q цэгүүдэд огтлоно. AB талын дундаж цэг M бол P , Q , M , F цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.**IX-B1 (Б.Батцэнгэл, Г.Батзаяа).** Хурц өнцөгт ABC гурвалжны AD , BE , CF өндрүүдийг татав. DE шулуун AB , CF шулуунуудыг харгалзан N , Q цэгүүдээр огтлоно. BE өндрийн дундаж цэг M бөгөөд MN шулуун BC шулуунтай P цэгт огтлолцоно. PQ шулуун BE өндөртэй параллель гэдгийг батал.**IX-B2 (Б.Батцэнгэл).** a, b, c нь $a \cdot b \cdot c = 1$ байх ялгаатай эерэг тоонууд бөгөөд $k \geq 2$ натурал тоо бол

$$\frac{a^k}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^k}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^k}{(c-a)(c-b)} > \frac{k(k-1)}{2}$$

байхыг батал.

IX-B3 (Б.Батцэнгэл). 7 сурагч төрөл бүрийн дугуйланд хамрагддаг байжээ (Нэг сурагч хэдэн ч дугуйланд хамрагдаж болно). Аль ч 2 дугуйланг сонгон авахад, тэдгээрийн яг нэгд нь хамрагддаг сурагчийн тоо 3-аас олон байсан бол дугуйлангийн тоо хамгийн ихдээ хэд байж болох вэ?

1.10 ММО-44, IX ангийн IV даваа бодолт

IX-A1. Өгөгдсөн $1 \leq m \leq 2k$ байх m тооны хувьд $\sqrt{k^2 + m} - k = \frac{m}{\sqrt{k^2 + m} + k}$ ялгаврыг авч үзье. Нэгэнт $1 \leq m \leq 2k$ тул

$$\frac{1}{2k+1} < \frac{1}{\sqrt{k^2 + m} + k} \leq \frac{1}{2k}.$$

Иймд

$$k + \frac{m}{2k+1} < \sqrt{k^2 + m} < k + \frac{m}{2k}.$$

Эдгээр тэнцэтгэл бишүүдийг бүх $1 \leq m \leq 2k$ байх m -ээр нийлбэрчилбэл

$$\begin{aligned} 2k \cdot k + \frac{1+2+\dots+2k}{2k+1} &= 2k^2 + k < \sum_{m=1}^{2k} \sqrt{k^2 + m} \\ &< 2k \cdot k + \frac{1+2+\dots+2k}{2k} = 2k^2 + k + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

тул нийлбэрийн бүхэл хэсэг нь $2k^2 + k$ болно.

IX-A2. Эхлээд $n \geq 16$ болохыг харуулъя. Үнэндээ

$$S_0 = \{1, 2^2, 3^2, 5^2, \dots, 41^2, 43^2\}.$$

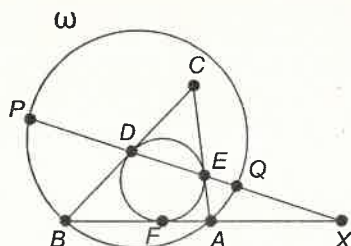
Энд S_0 -ийн 1-ээс ялгаатай гишүүд нь 43-аас хэтрэхгүй анхны тоонуудын квадрат байна. Тэгвэл $S_0 \subseteq S$, $|S_0| = 15$, S_0 -ийн элементүүд нь хос хосоороо харилцан анхны бөгөөд S_0 нь анхны тоо агуулахгүй. Иймд $n \geq 16$.

Одоо $S \subseteq A$, $|S| = 16$ ба S -ийн аль ч 2 элемент нь харилцан анхны гэвэл S нь анхны тоо агуулахыг харуулъя. Эсрэгээр нь $S = \{a_1, a_2, \dots, a_{16}\}$ нь анхны тоо агуулдаггүй гэе. Тэгвэл S -ийн дор хаяж 15 элемент нь анхны зохиомол тоо байх тул тэдгээрийг нь $a_1, \dots, a_{15}$ гэе. p_i -ээр a_i -ийн хамгийн бага анхны тоон хуваагчийг тэмдэглэе. $a_1, \dots, a_{15}$ тоонууд нь хос хосоороо харилцан анхны тул $p_1, \dots, p_{15}$ тоонууд ялгаатай. Бид $p_1 < p_2 < \dots < p_{15}$ гэж үзэж болох тул

$$a_1 \geq p_1^2 \geq 2^2, a_2 \geq p_2^2 \geq 3^2, \dots, a_{15} \geq p_{15}^2 \geq 47^2 > 2008$$

болж зөрчилд хүрэв. Иймд хамгийн бага n тоо нь 16.

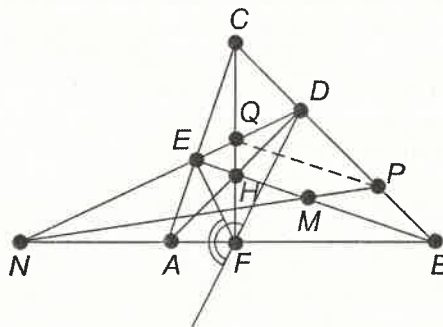
IX-A3. $AB \cap ED = X$ гэе. Хэрэв бид $XP \cdot XQ = XM \cdot XF$ гэж баталбал P, Q, M, F цэгүүд нэг тойрог дээр оршино.



$XP \cdot XQ = XA \cdot XB$ тул $XA \cdot XB = XM \cdot XF$ гэж харуулахад хангалттай. Менелайн теоремоор

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

$CD = CE$, $BD = BF$, $AE = AF$ тул
 дээрх харьцаанаас $XA \cdot BF = XB \cdot AF$.
 $AF = XF - XA$, $BF = XB - XF$ -г орлуулбал $2XA \cdot XB = (XA + XB) \cdot XF$
 буюу $XA \cdot XB = XM \cdot XF$.



IX-B1. Менелайн теоремоор

$$\frac{DP}{PB} \cdot \frac{BM}{ME} \cdot \frac{EN}{ND} = 1$$

ба $BM = ME$ түл

$$\frac{DP}{PB} = \frac{DN}{NE}.$$

AD , BE , CF нь өндрүүд тул FC , FN нь харгалзан EFD -ийн дотоод ба гадаад өнцгийн биссектриссүүд

болно. Түүнчлэн биссектриссийн чанар ёсоор

$$\frac{DQ}{QE} = \frac{DF}{FE} = \frac{DN}{NE}.$$

Иймд $\frac{DP}{PB} = \frac{DQ}{QE}$ болох тул $PQ \parallel BE$ болно.

IX-B2. Тэнцэтгэл бишийн зүүн талыг дараах хэлбэртэй бичье.

$$\begin{aligned} \frac{a^k(c-b) + b^k(a-c) + c^k(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} &= \frac{(a^k - b^k)(c-a) - (c^k - a^k)(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{1}{b-c} (a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + b^{k-1} - a^{k-1} - a^{k-2}c - \dots - c^{k-1}) \\ &= a^{k-2} + a^{k-3} \frac{b^2 - c^2}{b-c} + \dots + \frac{b^{k-1} - c^{k-1}}{b-c}. \end{aligned}$$

Нэмэгдэхүүн бүрийг нь задалж бичвэл

$$\sum_{i+j+l=k-2} a^i b^j c^l$$

нийлбэрт шилжих ба энд нэмэгдэхүүний тоо $\frac{k(k-1)}{2}$ байна. Арифметик ба геометр дунджийн тухай тэнцэтгэл бишийг хэрэглэвэл

$$\sum_{i+j+l=k-2} a^i b^j c^l \geq \frac{k(k-1)}{2} a^m b^m c^m = \frac{k(k-1)}{2}$$

$$\text{энд } m = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}.$$

IX-B3. Дугуйлангийн тоог m , i -р дугуйланд хамрагддаг хүүхдийн тоог A_i ($1 \leq i \leq m$) гэе. Бодлогын нөхцөл ёсоор дурын $i < j$ -ийн хувьд

$$|A_i \setminus A_j| + |A_j \setminus A_i| = |A_i| + |A_j| - 2|A_i \cap A_j| \geq 4.$$

Эдгээрийг $i < j$ байх бүх i, j -ээр нийлбэрчилбэл

$$\begin{aligned} \sum_{i < j} (|A_i| + |A_j| - 2|A_i \cap A_j|) &= (m-1) \sum_i |A_i| - 2 \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| \geq \\ &\geq 4 \binom{m}{2} = 2m(m-1). \end{aligned}$$

a сурагчийн хамрагддаг нийт дугуйлангийн тоог m_a гэе. Тэгвэл

$$\sum_i |A_i| = \sum_a m_a, \quad \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| = \sum_a \binom{m_a}{2} = \sum_a \frac{m_a(m_a-1)}{2}.$$

Иймд

$$\sum_a (m \cdot m_a - m_a^2) = \sum_a \left(\frac{m^2}{4} - \left(\frac{m}{2} - m_a \right)^2 \right) \geq 2m(m-1).$$

Эндээс $\frac{7m^2}{4} \geq 2m(m-1)$ буюу $0 \geq m^2 - 8m$ болно. Иймд $m \leq 8$. Дараах 8 олонлог бодлогын нөхцөлийг хангана гэдгийг хялбархан шалгаж болно.

$$A_1 = \{a, b, c\}, \quad A_2 = \{a, d, e\}, \quad A_3 = \{a, f, g\}, \quad A_4 = \{b, d, f\}$$

$$A_5 = \{b, e, g\}, \quad A_6 = \{c, d, g\}, \quad A_7 = \{c, e, f\}, \quad A_8 = \{a, b, c, d, e, f, g\}.$$

1.11 ММО-44, X ангийн III даваа

Б. Баяржаргал (МУИС)

X-A1. n оройтой гүйцэд графын ирмэг болон оройнуудыг

- 1) 1 оройгоос гарсан ирмэгүүд ондоо өнгөтэй
- 2) орой нь түүнээс гарсан ирмэгээс ондоо өнгөтэй байхаар будав. Тэгвэл хамгийн багадаа хэдэн өнгө хэрэгтэй вэ?

X-A2. ABC гурвалжин ба хавтгайн P цэгийн хувьд BCP, ACP, ABP гурвалжнуудыг багтаасан тойргуудын төвүүдийг харгалзан O_a, O_b, O_c гэвэл

$$\frac{O_a O_b}{AB} = \frac{O_a O_c}{AC} = \frac{O_b O_c}{BC}$$

байх P цэгийн геометр байрыг ол.**X-A3.** Дурын $x, y \in \mathbb{R}$ хувьд $f(x^5 - y^5) = x^2 f(x^3) - y^2 f(y^3)$ нөхцөлийг хангах бүх $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцүүдийг ол.**X-B1.** M нь ABC гурвалжны дотоод цэг ба AM, BC -ийн огтлолцол E, CM, AB -ийн огтлолцол F байг. Хэрэв EF -ийн дундаж цэгийн хувь дахь B цэгийн тэгш хэмтэй цэгийг N гэвэл M нь ABC гурвалжны дотор хөдөлж байхад MN шулуун бэхлэгдсэн цэгтэй гэж батал.**X-B2.** α, β, γ нь хурц өнцөгт гурвалжны өнцгүүд бол

$$2 \operatorname{ctg} \alpha + 3 \operatorname{ctg} \beta + 4 \operatorname{ctg} \gamma \geq \sqrt{23}$$

гэж батал.

X-B3. $x_1 = -1, y_1 = 1$ ба дурын $n \in \mathbb{N}$ хувьд $x_{n+1} = -2x_n^2 - 2x_n y_n + 8y_n^2, y_{n+1} = 2x_n^2 + 3x_n y_n - 2y_n^2$ байх $\{x_n\}, \{y_n\}$ дарааллууд өгөгдөв. Тэгвэл $x_p + y_p$ нь p -д хуваагдахгүй байх бүх p анхны тоог ол.

1.12 ММО-44, X ангийн III даваа бодолт

X-A1. Дор хаяж n өнгө хэрэгтэй нь ойлгомжтой. n өнгө хангалттай болохыг харуулъя. Оройнуудаа $1-n$ тоонуудаар дугаарлаад i -р оройг $k_i \equiv 2i \pmod{n}$ байх k_i өнгөөр, ij ирмэгийг $k_{ij} \equiv i + j \pmod{n}$ байх k_{ij} өнгөөр будъя. Дурын $i \neq j, j_1 \neq j_2$ -ийн хувьд $2i \not\equiv i + j \pmod{n}$ ба $i + j_1 \not\equiv i + j_2 \pmod{n}$ тул $k_i \neq k_{ij}$ ба $k_{ij_1} \neq k_{ij_2}$ болж энэ будалт бодлогын нөхцөлийг хангах нь батлагдав.

X-A2. 1) P нь ABC гурвалжин доторх цэг байг. H нь гурвалжны орто төв байг. Нөхцөлөөс

$$\triangle ABC \sim \triangle O_A O_B O_C \Leftrightarrow \alpha = \angle CAB = \angle O_C O_A O_B,$$

$$\beta = \angle ABC = \angle O_A O_B O_C, \gamma = \angle BCA = \angle O_B O_C O_A$$

байх ёстой. O_A нь BP , CP -ийн дундаж перпендикуляруудын огтлолцол буюу $O_C O_A$, $O_B O_A$ -ийн огтлолцол тул $\angle BPC = 180 - \alpha$ болно. Үүнтэй адилаар $\angle APC = 180 - \beta$, $\angle APB = 180 - \gamma$ болно. $\angle BHC = 180 - \alpha$ ба $\angle BPC = 180 - \alpha$ тул P цэг $\triangle BHC$ гурвалжныг багтаасан тойрог дээр байна. Үүнтэй адилаар P цэг $\triangle CHA$, $\triangle AHB$ гурвалжнуудыг багтаасан тойрог дээр байна. Эдгээр тойргуудын ерөнхий цэг нь H тул $P \equiv H$ болж байна.

2) P нь ABC гурвалжны гаднах цэг байг. Нөхцөлөөс $\triangle ABC \sim \triangle O_A O_B O_C \Leftrightarrow \alpha = \angle BAC = \angle O_B O_A O_C$ байх ёстой гэдгээс $\angle BPC = 180 - \alpha$ болж $ABPC$ нь тойрогт багтана.

Иймд P нь ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн дурын цэг болно.

X-A3. Өгсөн нөхцөлд $x = 0$ гэвэл

$$f(-y^5) = -y^2 \cdot f(y^3),$$

$y = 0$ гэвэл

$$f(x^5) = x^2 f(x^3) \quad (1)$$

учир f нь сондгой функц.

$y = -a$ гэвэл $f(x^5 + a^5) = x^2 \cdot f(x^3) + a^2 \cdot f(a^3)$ ба $f(y^5) = y^2 \cdot f(y^3)$ тул $f(x^5 + a^5) = f(x^5) + f(a^5)$ болно. $c = x^5$, $d = a^5$ гэвэл $f(c + d) = f(c) + f(d)$ буюу f нь Кошийн функционал тэгшитгэлийн нөхцөлийг хангана. Иймд

$$f(nx) = nf(x), \quad n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

нөхцөл биелнэ. $x = z + 1$, $a = z - 1$ орлуулга хийвэл

$$f((z+1)^5 + (z-1)^5) = (z+1)^2 \cdot f((z+1)^3) + (z-1)^2 \cdot f((z-1)^3).$$

Кошийн нөхцөл болон (2)-ийг ашиглавал

$$\begin{aligned} f(2z^5 + 20z^3 + 10z) &= (z^2 + 2z + 1) \cdot [f(z^3) + 3f(z^2) + 3f(z) + f(1)] + \\ &+ (z^2 - 2z + 1)[f(z^3) - 3f(z^2) + 3f(z) - f(1)]. \end{aligned}$$

Үүнийг эмхтгэвэл

$$f(2z^5 + 20z^3 + 10z) = 2z^2 f(z^3) + 2f(z^3) + 12zf(z^2) + (6z^2 + 6)f(z) + 4zf(1)$$

буюу

$$\begin{aligned} 2f(z^5) + 20f(z^3) + 10f(z) &= \\ &= 2z^2 f(z^3) + 2f(z^3) + 12zf(z^2) + (6z^2 + 6)f(z) + 4zf(1). \end{aligned}$$

Эндээс (1) нөхцөлийг ашиглавал

$$18f(z^3) - 12zf(z^2) + (4 - 6z^2)f(z) - 4zf(1) = 0 \quad (3)$$

$x = z + 2$, $a = z - 2$ орлуулга хийж эмхтгэвэл

$$f(2z^5 + 80z^3 + 160z) = (z + 2)^2 f((z + 2)^3) + (z - 2)^2 f((z - 2)^3)$$

буюу

$$72f(z^3) - 48zf(z^2) + (64 - 24z^2)f(z) - 64zf(1) = 0 \quad (4)$$

болно. (3)-г (-4) -өөр үржүүлж (4)-дээр нэмбэл:

$$48f(z) - 48zf(1) = 0$$

буюу $f(z) = zf(1)$ болно. Энд $c = f(1)$.

X-B1. N цэг $NFBE$ гэсэн параллелограмм үүсгэнэ. $DABC$ нь параллелограмм байхаар D цэгийг авъя $FN \cap DC = K$ гээ. A , M , E шулуун дээр оршино гэдгээс Менелайн теорем ёсоор

$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CM}{MF} \cdot \frac{FA}{AB} = 1 \quad (*)$$

байна. $\frac{BE}{EC} = \frac{FN}{NK}$ ($BE = FN$, $EC = NK$) $\frac{FA}{AB} = \frac{KD}{DC}$ ($FA = KD$, $AB = DC$) гэдгээс $(*)$ -оос $\frac{FN}{NK} \cdot \frac{KD}{DC} \cdot \frac{CM}{MF} = 1$ болно. Энэ нь $\triangle KFC$ -ийн хувьд M , N , D цэгүүд нэг цэгт орших нөхцөл болно. (Менелайн теорем) D цэг нь M цэгийн сонголтоос үл хамаарах тул MN шулуунууд бүгд D цэгт огтлолцоно.

X-B2. α, β, γ нь гурвалжны өнцгүүд учир $\text{ctg } \alpha \geq 0$, $\text{ctg } \beta \geq 0$, $\text{ctg } \gamma \geq 0$.

$$\text{ctg } \alpha \cdot \text{ctg } \beta + \text{ctg } \alpha \cdot \text{ctg } \gamma + \text{ctg } \beta \cdot \text{ctg } \gamma = 1$$

байдгийг ашиглая.

$\operatorname{ctg} \alpha = a$, $\operatorname{ctg} \beta = b$, $\operatorname{ctg} \gamma = c$ гэе. $ab + ac + bc = 1$ бол $2a + 3b + 4c \geq \sqrt{23}$ батлахтай ижил.

$$(2a + 3b + 4c)^2 \geq 23 \iff 4a^2 + 9b^2 + 16c^2 + 12ab + 16ac + 24bc \geq 23(ab + ac + bc).$$

учир $4a^2 + 9b^2 + 16c^2 - 11ab - 7ac + bc \geq 0$ гэж батлахад хангалттай.

$$4a^2 + 9b^2 + 16c^2 - 11ab - 7ac + bc = \left(2a - \frac{11b}{4} - \frac{7c}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}(b - 3c)^2 \geq 0$$

учир бодлого батлагдав.

1.13 ММО-44, X ангийн IV даваа

Б. Баяржаргал (МУИС)

X-A1 (А.Ганбат). ABC гурвалжны BC тал дээр дурын P цэг, AP хэрчим дээр дурын O цэг авав $BO \cap AC = B_1$, $CO \cap AB = C_1$ гэе. P -г дайруулан BB_1 -тэй параллелиар татсан шулуун AC -г R цэгт, P -г дайруулан CC_1 -тэй параллелиар татсан шулуун AB -г Q цэгт тус тус огтолно. BB_1 -ийн дундаж M , CC_1 -ийн дундаж N бол MN нь RQ -г хагаслан хуваана гэж батал.

X-A2 (В.Адъяасүрэн). a, b, c нь $a + b + c = 1$ байх сөрөг биш тоонууд бол $a^5b + b^5c + c^5a \leq \frac{5^5}{6^6}$ гэж батал.

X-A3 (Б.Батцэнгэл). p анхны тоо ба бүхэл тооны квадратуудыг p -д хуваахад гарах үлдэгдлүүдээс ялгаатай хамгийн бага натурал тоо нь a бол $a < 1 + \sqrt{p}$ гэж батал.

X-B1 (Б.Сумъяа). Дурын $n \geq 1$ тооны хувьд $a_n + a_{n+1} = a_{n+2} \cdot a_{n+3} - 2008$ байх бүх натурал тоон $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ дарааллыг ол.

X-B2 (Б.Батцэнгэл). Хурц өнцөгт ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн төв O ба AA' нь уг тойргийн диаметр байв. A' цэгт татсан багтаасан тойргийн шүргэгчийг BC шулуун D цэгт огтолно. OD шулуун гурвалжны AB, AC талуудыг харгалзан P, Q цэгт огтолдог бол $OP = OQ$ гэдгийг батал.

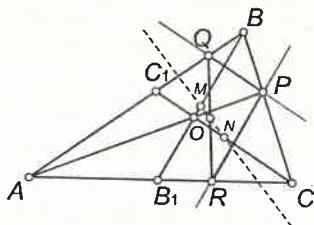
X-B3 (У.Батзориг). $P(x^2) = P(x)P(x+1)$ байх бүх бүхэл коэффициенттой $P(x)$ олон гишүүнтүүдийг ол.

1.14 ММО-44, X ангийн IV даваа бодолт

X-A1. $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{QR}$ хэрчмүүдийн дундаж цэгүүдийг харгалзан M , N , K гэе. $\overrightarrow{BP} = \lambda \cdot \overrightarrow{PC}$ гэе. Тэгвэл $\overrightarrow{BQ} = \lambda \cdot \overrightarrow{QC_1}$ ба $\overrightarrow{B_1R} = \lambda \cdot \overrightarrow{RC}$. Иймд $\vec{Q} = \frac{\vec{B} + \lambda \cdot \vec{C_1}}{1 + \lambda}$ ба $\vec{R} = \frac{\vec{B_1} + \lambda \cdot \vec{C}}{1 + \lambda}$. Эндээс

$$\vec{K} = \frac{1}{2}(\vec{Q} + \vec{R}) = \frac{1}{1 + \lambda} \left(\frac{\vec{B} + \vec{B_1}}{2} + \lambda \cdot \frac{\vec{C} + \vec{C_1}}{2} \right) = \frac{\vec{M} + \lambda \cdot \vec{N}}{1 + \lambda}.$$

Энэ нь K цэг MN хэрчим дээр орших бөгөөд түүгийг λ харьцаагаар хуваахыг харуулж байна.



X-A2. $f(a, b, c) = a^5b + b^5c + c^5a$ гурван хувьсагчийн функц авч үзье. Энэ тэнцэтгэл биш a, b, c хувьсагчдын хувьд цикл тул $c = \min\{a, b, c\}$ гэхэд явцуурахгүй. $a, b, c \geq 0$ ба $a, b \geq c$ тул (IX-B2 бодлогын техникийг ашигла.)

$$f(a, b, c) \geq f(b, a, c) \Leftrightarrow (a - b)(a - c)(b - c) \left(\sum_{i+j+k=3} a^i b^j c^k \right) \geq 0 \Leftrightarrow a \geq b$$

Иймд $f(a, b, c)$ нь $a \geq b \geq c$ үед л хамгийн их утгаа авах боломжтой. $a \geq b \geq c$ үед $f(a + c, b, 0) \geq f(a, b, c)$ болохыг харах хэцүү биш. Иймд $f(a, b, c)$ нь $a \geq b$ ба $c = 0$ үед л хамгийн их утгаа авах боломжтой. $b = 1 - a$ гэвэл $f(a) = a^5(1 - a)$ функцийн хамгийн их утгаа авах бодлогод шилжинэ. Ердийн уламжлал авах аргаар хамгийн их утгыг олбол

$$\max_{a \in [\frac{1}{5}, 1]} f(a) = f\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5^5}{6^5}$$

болно.

X-A3. Бодлогын нөхцөлөөс $1, 2, \dots, a - 1$ нь p модулиар квадрат бөгөөд a нь биш. Эсрэгээр нь $a > 1 + \sqrt{p}$ гэе. Тэгвэл $p < (a - 1)^2 < a(a - 1)$ байна. $a(b - 1) < p < ab$ байх b тоог авч үзье. $b - 1 < a - 1$ буюу $b < a$ тул b нь p модулиар квадрат болно. a нь квадрат биш ба b нь квадрат тул ab квадрат

биш болно. Нөгөө талаас $0 < ab - p < a$ тул $ab - p$ буюу ab нь p модулиар квадрат болоход хүрнэ. Иймд зөрчил үүсч $a < 1 + \sqrt{p}$ болох нь батлагдав.

X-B1. $a_n + a_{n+1} = a_{n+2} \cdot a_{n+3} - 2008$, $a_{n+1} + a_{n+2} = a_{n+3} \cdot a_{n+4} - 2008$ харьцаануудыг хасвал

$$a_{n+2} - a_n = a_{n+3}(a_{n+4} - a_{n+2}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Эндээс

$$a_3 - a_1 = a_4(a_5 - a_3) = a_4a_6(a_7 - a_5) = \dots \quad (1)$$

$$a_4 - a_2 = a_5(a_6 - a_4) = a_5a_7(a_8 - a_6) = \dots \quad (2)$$

Хэрэв $a_1 > a_3$ бол $a_1 > a_3 > a_5 > \dots$ болж зөрчил үүснэ. Харин $a_3 > a_1$ бол (1)-ээс ямар нэг гишүүнээс хойш $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ дарааллын гишүүд бүгд 1-тэй тэнцүү байх шаардлагатай. Түүнчлэн (2)-оос ямарч $n \geq 1$ -ийн хувьд $a_{2n} = 1$ болох нь гарна. Үүнийг өгөгдсөн харьцаанд орлуулбал $a_{2n+1} - a_{2n-1} = 2009$ харьцаа $n \geq 1$ бүрийн хувьд биелнэ. Өөрөөр хэлбэл $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ дараалал 2009 ялгавартай арифметик прогресс болно. Өмнөхийн адилаар $a_2 > a_4$ боломжгүй бөгөөд $a_4 > a_2$ бол $\forall n$ -ийн хувьд $a_{2n-1} = 1$ ба $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ нь 2009 ялгавартай арифметик прогресс байна.

Одоо $a_1 = a_3$, $a_2 = a_4$ байх тохиолдол үлдлээ. (1) ба (2)-оос $a = a_1 = a_3 = a_5 = \dots$ ба $b = a_2 = a_4 = a_6 = \dots$. Рекуррент харьцаанаас $a + b = ab - 2008$ буюу $(a - 1)(b - 1) = 2009$ болно. Энэ тэгшитгэлийн натурал шийдүүд нь:

$$(a, b) = (2, 2010); (8, 288); (42, 50); (50, 42); (288, 2); (2010, 2).$$

Иймд бодлогын нөхцөлийг хангах дарааллууд нь:

$$1) a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ сондгой} \\ a_2 + 2009 \cdot \frac{n-2}{2}, & n \text{ тэгш} \end{cases}, \text{ энд } a_2 \text{ нь дурын натурал тоо.}$$

$$2) a_n = \begin{cases} a_1 + 2009 \cdot \frac{n-2}{2}, & n \text{ сондгой} \\ 1, & n \text{ тэгш} \end{cases}, \text{ энд } a_1 \text{ нь дурын натурал тоо.}$$

$$3) a_n = \begin{cases} a, & n \text{ сондгой} \\ b, & n \text{ тэгш} \end{cases}, \text{ энд } a, b \text{ нь дээр дурдсан тэгшитгэлийн шийдүүд.}$$

тул хэрэв x_0 нь $Q(x)$ -ийн язгуур бол $(x_0 - 1)^2$ тоо ч бас $Q(x)$ -ийн язгуур болно. Иймд $x_0 - 1$ нь нэгжийн язгуур болно. Түүнчлэн $(x_0 - 1)^4$ нь $Q(x)$ -ийн язгуур тул $x_0 + 1$ нь нэгжийн язгуур болно. Гэтэл $x_0 - 1$ ба $x_0 + 1$ тоонууд нэгжийн язгуурууд байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $x_0 = 0$. Энэ нь $x_0 \neq 0$ -д зөрчиж байна.

$Q(x)$ нь тогтмол гэвэл тэгшитгэлээс $Q(x) = 1$ болно. Иймд бодлогын нөхцөлийг хангах 0 биш олон гишүүнтүүд нь $P(x) = x^n(x-1)^n$ болно. Энд n нь сөрөг биш бүхэл тоо байна.

1.15. ММО-44, XI ангийн III даваа

Б. Батбаясгалан (МУИС)

XI-A1. $(x^2 + x + 1)^n$ олон гишүүнтийн x^n -ийн өмнөх коэффициентийг a_n гэе. Хэрэв $p > 3$ анхны тоо бол $p^2 \mid a_p - 1$ гэж батал.

XI-A2. $1 = a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{2008} = \sqrt{2008}$ ба дурын $n \in \{1, 2, \dots, 2007\}$ дугаарын хувьд $a_{n+1} \leq 2a_n$ бол

$$\frac{a_2^3}{a_1} + \frac{a_3^3}{a_2} + \dots + \frac{a_{2008}^3}{a_{2007}} < \sum_{i=2}^{2008} a_i^2 + 2676$$

болохыг батал.

XI-A3. Тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийг багтаасан тойргийн дурын M цэгээс AB, BC, CD, DA талуудыг агуулах шулуунууд руу харгалзан MR, MP, MQ, MS перпендикуляруудыг буулгав. AC, PR, SQ шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.

XI-B1. $P(x), Q(x)$ квадрат гурван гишүүнтүүд өгөгдөв. Дурын x бодит тооны хувьд "хэрвээ $P(x)$ бүхэл тоо бол $Q(x)$ нь бүхэл тоо" гэсэн чанар биелэдэг бол $Q(x) = a \cdot P(x) + b$ байх a, b тоонууд олдохыг батал.

XI-B2. O цэгт төвтэй ω тойргийн гадна орших ω_1 ба ω_2 тойргууд түүнийг A ба B цэгт шүргэнэ. Хэрэв ω_1, ω_2 тойргууд M ба N цэгүүдэд огтлолцох ба $\angle OMN = 90^\circ$ бол $\angle MAB = \angle MOB$ гэж батал.

XI-B3. Теннисний тойргийн тэмцээнд n тамирчин оролцов. Тэмцээнд 1-р тамирчин 2-р тамирчныг, 2-р тамирчин 3-р тамирчныг гэх мэтчилэн $n - 1$ -р тамирчин n -р тамирчныг хожсон бөгөөд n -р тамирчин 1-р тамирчныг хожсон байв. Тэгвэл ямар нэг байдлаар бие биеэ тойрч хожоогүй дөрвөлийн тоо $\frac{(n+3)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}$ -ээс хэтрэхгүй гэж батал.

1.16 ММО-44, XI ангийн III даваа бодолт**XI-A1.** $x^2 + x + 1$ олон гишүүнтийн язгуурууд $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ гэе. Тэгвэл

$$(x^2 + x + 1)^p = (x - \varepsilon_1)^p (x - \varepsilon_2)^p = (x^p - C_p^1 x^{p-1} \varepsilon_1 + \\ + C_p^2 x^{p-2} \varepsilon_1^2 - \dots - \varepsilon_1^p)(x^p - C_p^1 x^{p-1} \varepsilon_2 + C_p^2 x^{p-2} \varepsilon_2^2 - \dots - \varepsilon_2^p)$$

 x^p -ийн өмнөх коэффициент буюу a_p нь

$$-\varepsilon_1^p - C_p^1 C_p^{p-1} \varepsilon_1 \varepsilon_2^{p-1} - C_p^2 C_p^{p-2} \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^{p-2} - \dots - C_p^{p-1} C_p^1 \varepsilon_1^{p-1} \varepsilon_2 - \varepsilon_2^p$$

болно. Эндээс $\varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p = -1$ -г тооцвол

$$a_p - 1 = - \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} C_p^k C_p^{p-k} \varepsilon_1^k \varepsilon_2^k (\varepsilon_1^{p-2k} + \varepsilon_2^{p-2k})$$

 $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$ ба $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = -1 \vee 2, 1 \leq k < p$ үед $p \mid C_p^k$ ба $p \mid C_p^{p-k}$ тул

$$p^2 \mid C_p^k C_p^{p-k} \varepsilon_1^k \varepsilon_2^k (\varepsilon_1^{p-2k} + \varepsilon_2^{p-2k}) \in \mathbb{Z}$$

байна. Эндээс батлах зүйл хялбар мөрдөнө.

XI-A2. Бодлогын нөхцөл ёсоор

$$(a_{i+1} - a_i)(a_{i+1} - 2a_i) \leq 0$$

байна. Хаалтыг задалж эмхтгэвэл

$$a_{i+1}^2 - 3a_{i+1}a_i + 2a_i^2 \leq 0$$

болох бөгөөд үүнийг $\frac{a_{i+1}}{a_i} + \frac{2}{3} \geq 0$ тоогоор үржвэл

$$\frac{a_{i+1}^3}{a_i} - \frac{7}{3}a_{i+1}^2 + \frac{4}{3}a_i^2 \leq 0$$

болно. $i \in \{1, 2, \dots, 2007\}$ бүрийн хувьд дээрх тэнцэтгэл бишийг бичээд хооронд нь нэмбэл

$$\frac{a_2^3}{a_1} + \frac{a_3^3}{a_2} + \dots + \frac{a_{2008}^3}{a_{2007}} - \sum_{i=2}^{2008} a_i^2 + \frac{4}{3}a_{2008}^2 - \frac{4}{3}a_1^2 \leq 0$$

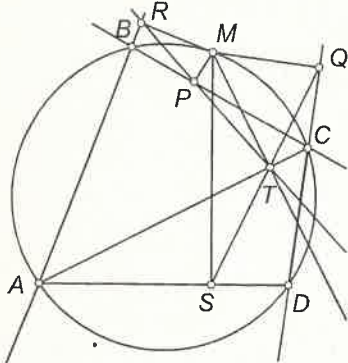
болно. Бүх тэнцэтгэл биш нэгэн зэрэг тэнцэлдээ хүрэх боломжгүй ба

$$\frac{4}{3}a_{2008}^2 - \frac{4}{3}a_1^2 = 2676$$

гэдгийг тооцвол

$$\frac{a_2^3}{a_1} + \frac{a_3^3}{a_2} + \dots + \frac{a_{2008}^3}{a_{2007}} < \sum_{i=2}^{2008} a_i^2 + 2676$$

болж батлагдав.



XI-A3. M цэгээс AC талд буулгасан өндрийн суурийг T гэе. ACD гурвалжныг багтаасан тойрог дээр M цэг байрлах тул M цэгт харгалзах Симсоны шулуун¹ дээр R, P, T цэгүүд оршино. Нөгөө талаас ABC гурвалжныг багтаасан тойрог дээр M цэг байрлах тул M цэгт харгалзах Симсоны шулуун дээр Q, S, T цэгүүд оршино. Эндээс $T = AC \cap PR \cap SQ$ болж батлагдав.

XI-B1. $y = P(x) = px^2 + qx + r$ нь дээшээ харсан парабол гээд бодолтыг хийе.

Нөгөө тохиолдол нь яг адил батлагдана. $P(x)$ нь дээшээ харсан парабол тул $P(x)$ нь тодорхой нэг n_0 бүхэл тооноос их бүх бүхэл утгууд буюу $n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, n_0 + k, \dots$ утгуудыг бүгдийг авах боломжтой. Параболын баруун салаа дээр орших бөгөөд дээрх утгуудыг авдаг хувьсагчийн утгуудыг $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ гэе. Мэдээж $k \rightarrow \infty$ үед $x_k \rightarrow \infty$ байна.

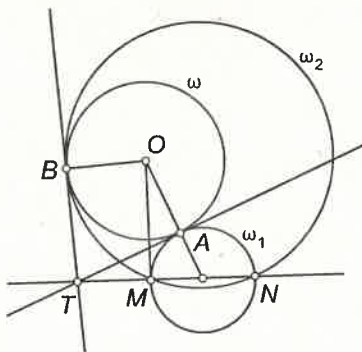
$Q(x) = a \cdot P(x) + mx + n$ гэе. $m = 0$ гэж батлах шаардлагатай. $\mathbb{Z} \ni Q(x_{k+1}) - Q(x_k) = a[P(x_{k+1}) - P(x_k)] + m(x_{k+1} - x_k)$ тул $\forall k \in \mathbb{Z}$ -ийн хувьд $a + m(x_{k+1} - x_k) \in \mathbb{Z}$ байна. Нөгөө талаас $1 = P(x_{k+1}) - P(x_k) = p(x_{k+1}^2 - x_k^2) + q(x_{k+1} - x_k)$ тул

$$x_{k+1} - x_k = \frac{1}{px_{k+1} + px_k + q}$$

Иймд $k \rightarrow \infty$ үед $x_{k+1} - x_k \rightarrow 0$ байна. Эндээс зөвхөн $m = 0$ үед л $\forall k \in \mathbb{Z}$ -ийн хувьд $a + m(x_{k+1} - x_k) \in \mathbb{Z}$ байх боломжтой.

¹Гурвалжныг багтаасан тойргийн дурын цэгээс уг гурвалжны талууд юмуу талуудын үргэлжлэл рүү татсан перпендикулярруудын сууриуд нэг шулуун дээр оршдог бөгөөд энэ шулууныг Симсоны шулуун гэж нэрлэдэг.

XI-B2. ω , ω_1 , ω_2 тойргуудын радикал төв нь ω тойргийг A , B цэгүүдэд шүргэсэн шүргэгч шулуунууд болон MN шулууны огтлолцлын цэг байна. Учир нь дээрх шулуунууд нь өгөгдсөн тойргуудаас үүсэх радикал тэнхлэгүүд болно. Радикал төвийг нь T гэвэл $\angle OMN = 90^\circ$, $\angle OBT = 90^\circ$, $\angle OAT = 90^\circ$ тул O , A , B , M , T цэгүүд нь OT диаметртай тойрог дээр орших нь харагдаж байна. $OAMB$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтах тул $\angle MAB = \angle MOB$ байна.



XI-B3. Тэмцээнийг чиглэлт графаар дүрсэлье. Цаашид $n+1$ орой нь 1-тэй, $n+2$ орой нь 2-той ижил гэх мэтчилэн үзэх бөгөөд $a \rightarrow b$ -ээр a оройгоос b оройд чиглэлт ирмэг очсон гэдгийг тэмдэглэе.

Ямар нэг байдлаар бие биенээ тойрч хожсон дөрвөл дотор бие биенээ тойрч хожсон гурвал (цаашид цикл гэнэ) олдохыг хялбархан шалгаж болно. Иймд цикл агуулсан дөрвөлийн тоо

$$C_n^4 - \frac{(n+3)(n-2)(n-3)(n-4)}{24} = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

-өөс цөөнгүй гэж харуулахад хангалттай.

Үүнийг индукцээр баталъя. $n=4$ үед өгүүлбэр үнэн байна. $n=k$ үед үнэн гээд $n=k+1$ үед үнэн болохыг баталъя. Хэрэв ямар нэг дараалсан $i, i+1, i+2$ оройнуудын хувьд $i \rightarrow i+2$ бол $i+1$ оройг агуулаагүй цикл агуулсан дөрвөлийн тоо дор индукцээр $\frac{(k-2)(k-3)}{2}$ -оос цөөнгүй. $i+1$ оройг агуулсан цикл олдохыг баталъя. $i+1 \rightarrow i+2$, $i+2 \rightarrow i+3$ тул $i+3 \rightarrow i+1$ бол цикл олдоно. Иймд $i+1 \rightarrow i+3$ гэж үзье. Үүнтэй адилаар $i+1 \rightarrow i+4$, $i+1 \rightarrow i+5, \dots, i+1 \rightarrow i-1$ гэж үзэж болно. Гэтэл энэ үед $i-1, i, i+1$ нь цикл үүсгэнэ. Иймд $i+1$ агуулсан цикл агуулсан дөрвөлийн тоо дор хаяж

$k - 2$ болно. Иймд цикл агуулсан дөрвөлийн тоо дор хаяж

$$k - 2 + \frac{(k-2)(k-3)}{2} = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$$

болно.

Одоо ямар ч $i, i+1, i+2$ оройнуудын хувьд $i+2 \rightarrow i$ гэж үзье. Тэгвэл дурын $1 \leq i \leq k+1$ -ийн хувьд $i, i+1, i+2$ -г агуулсан $k-2$ ширхэг цикл агуулсан дөрвөл оршин байна. $i, i+1, i+2, i+3$ хэлбэрийн дөрвөлүүд 2 дахин тоологдох тул дор хаяж

$$(k+1)(k-2) - (k+1) = k^2 - 2k - 3$$

ширхэг цикл агуулсан дөрвөл оршин байна. $k \geq 4$ үед

$$k^2 - 2k - 3 > \frac{(k-1)(k-2)}{2}$$

буюу $k^2 - k - 8 > 0$ тул индукцийн шилжилт хийгдлээ. Бодлого бодогдов.

1.17 ММО-44, XI ангийн IV даваа

Б. Батбаясгалан (МУИС)

XI-A1 (Г.Батзаяа). $ABCDEF$ гүдгэр 6 өнцөгтийн $AB = DE, BC = EF, AF = CD$ байг. Хэрэв AC, BD, CE, DF, EA, FB -ийн дундаж цэгүүд нь харгалзан $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ бол A_1D_1, B_1E_1, C_1F_1 шулуунууд нэг цэгт огтлолцохыг батал.

XI-A2 (Б.Баяржаргал). a, b, c, d нь $ac = bd$ ба $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 4$ байх ялгаатай бодит тоонууд бол $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} - \frac{abcd}{(ab+cd)^2}$ илэрхийллийн хамгийн их утгыг ол.

XI-A3 (Б.Батбаясгалан). Координатын хавтгайд оройнууд нь бүхэл координаттай тойрогт багтсан гүдгэр n өнцөгт өгөгдөв. Энэ олон өнцөгттэй төсөөтэй бөгөөд оройнууд нь мөн адил бүхэл координаттай байх хамгийн бага талбайтай гүдгэр n өнцөгтийг багтаасан тойргийн төвийн координат бүхэл биш гэж батал.

XI-B1 (Б.Сумъяа). Хавтгайд $ABCD$ параллелограмм ба M_0 цэг өгөгдөв. $R_A^{90^\circ}(M_0) = M_1, R_B^{90^\circ}(M_1) = M_2, R_C^{90^\circ}(M_2) = M_3, R_A^{90^\circ}(M_3) = M_4, \dots$ гэж

мэт $\{M_1, M_2, \dots\}$ цэгүүдийн олонлог тодорхойлжээ. $M_0 = M_{2008}$ бол $ABCD$ квадрат гэж батал. (R_0^p -нь O цэгт төвтэй цагийн зүүний эсрэг φ өнцгөөр эргүүлэх эргүүлэлт)

XI-B2 (Ч.Гантөмөр). $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ бол

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{2n}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{2\pi}{2n}} + \dots + \frac{1}{\cos^2 \frac{(n-1)\pi}{2n}} = \frac{2}{3}(n^2 - 1)$$

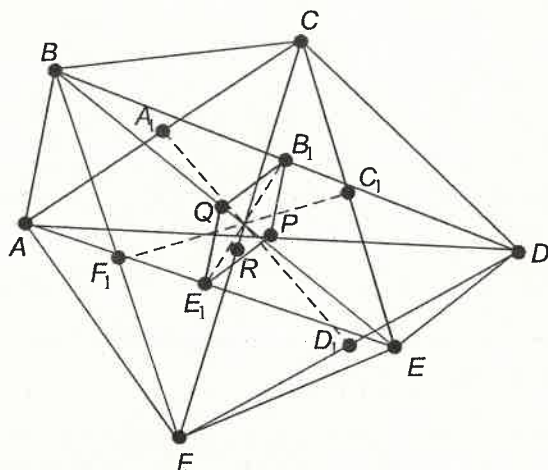
гэж батал.

XI-B3 (Б.Батцэнгэл). $p \mid 2^q - 1$, $q \mid 2^p - 1$ байх төгсгөлгүй олон ялгаатай анхны тоонууд олдоно гэж батал.

1.18 ММО-44, XI ангийн IV даваа бодолт

XI-A1. Дараах хялбар чанарыг ашиглая:

“ $XYZT$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн хувьд XZ, YZ, YT, XT хэрчмүүдийн дундаж цэгүүд параллелограмм үүсгэх бөгөөд $XY = ZT$ бол энэ параллелограмм нь ромбо байна.”



AD, BE, CF хэрчмүүдийн дундаж цэгүүдийг харгалзан P, Q, R -ээр тэмдэглэе. $AB = DE$ ба BD, EA -ийн дундаж цэгүүд B_1, E_1 гэвэл өмнө дурдсан чанар ёсоор PB_1QE_1 нь ромбо бүр тодруулбал B_1E_1 нь PQ -ийн дундаж цэгийг дайрах бөгөөд PQ -д перпендикуляр байна. Тестэйгөөр A_1D_1 нь PR -ийн

дундаж цэгийг дайрах бөгөөд PR -д перпендикуляр, C_1F_1 нь QR -ийн дундаж цэгийг дайрах бөгөөд QR -д перпендикуляр гэж гарна. Энэ нь A_1D_1 , B_1E_1 , C_1F_1 хэрчмүүд PQR гурвалжныг багтаасан тойргийн төвд огтлолцохыг харуулж байна.

XI-A2. Хамгийн их утга нь $-11\frac{3}{4}$. $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$ гэе. $ac = bd$ тул $\frac{c}{d} = \frac{b}{a} = \frac{1}{x}$ ба $\frac{d}{a} = \frac{c}{b} = \frac{1}{y}$. Иймд бодлогын нөхцөл ёсоор

$$x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = 4$$

Цаашид $u = x + \frac{1}{x}$, $v = y + \frac{1}{y}$ гэе. Тэгвэл арифметик ба геометр дунджуудын тэнцэтгэл бишээс $|u| \geq 2$, $|v| \geq 2$ болох нь гарна. $x = 1$, $y = 1$ үед $u = 2$, $v = 2$ байна. Гэтэл a , b , c , d тоонууд ялгаатай тул $u \neq 2$, $v \neq 2$ байна. $u + v = 4$ нөхцөлөөс дараах 2 тохиолдол боломжтой: $v \leq -2$ ба $u \geq 6$ эсвэл $v \geq 6$ ба $u \leq -2$.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} = xy + \frac{y}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} = uv$$

ба

$$\frac{(ab + cd)^2}{abcd} = \frac{ab}{cd} + \frac{cd}{ab} + 2 = y^2 + \frac{1}{y^2} + 2 = v^2$$

Тул бид $f(v) = (4-v)v + \frac{1}{v^2}$ функцийн $(-\infty; -2]$ ба $[6; \infty)$ муж дахь хамгийн их утгыг олох шаардлагатай. Эхний тохиолдолд $v \leq -2$, $4-v \geq 6$ тул $(4-v)v \leq -12$ ба $\frac{1}{v^2} \leq \frac{1}{4}$. Иймд $f(v) \leq -11\frac{3}{4}$. Хоёр дахь тохиолдолд $v \geq 6$, $4-v \leq -2$ тул $(4-v)v \leq -12$ ба $\frac{1}{v^2} \leq \frac{1}{36}$. Иймд $f(v) \leq -11\frac{35}{36}$. Эндээс хамгийн их утга нь $-11\frac{3}{4}$ байх боломжтой. Энэ утгыг $a = 3 + 2\sqrt{2}$, $b = 1$, $c = -1$, $d = -3 - 2\sqrt{2}$ үед авна.

XI-A3. Өгөгдсөн олон өнцөгттэй төсөөтэй бөгөөд оройнууд нь бүхэл координаттай хамгийн жижиг олон өнцөгтийг авч үзье. Уг олон өнцөгтийг багтаасан тойргийн төвийг (a, b) , аль нэг оройг $(0, 0)$ гэж үзэхэд явцуурахгүй. Багтаасан тойргийн радиусыг R бусад оройнуудыг (a_1, b_1) , (a_2, b_2) , $\dots$, (a_{n-1}, b_{n-1}) координаттай гэе. Тэгвэл

$$R^2 = a^2 + b^2 = (a_1 - a)^2 + (b_1 - b)^2 = \dots = (a_{n-1} - a)^2 + (b_{n-1} - b)^2$$

Энд хэрэв a, b бүхэл тоонууд гэж үзвэл

$$a_1^2 + b_1^2 \equiv a_2^2 + b_2^2 \equiv \dots \equiv a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 \equiv 0 \pmod{2} \quad (*)$$

болно.

$(0, 0)$ цэгт төвтэй $\frac{1}{\sqrt{2}}$ коэффициенттой 45° -ийн эргүүлэлттэй гомотет авч үзье. Энэ хувиргалтаар (x, y) цэг $\left(\frac{x-y}{2}; \frac{x+y}{2}\right)$ цэгт бууна. $(*)$ нөхцөлөөс дурын i -ийн хувьд $a_i - b_i \equiv a_i + b_i \equiv 0 \pmod{2}$ гэж гарах тул дурын i -ийн хувьд (a_i, b_i) -ийн дүр

$$\left(\frac{a_i - b_i}{2}; \frac{a_i + b_i}{2}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

нь бүхэл координаттай цэгүүд болно. Энэ нь хамгийн жижиг олон өнцөгтийг сонгон авсан гэдэгт зөрчинө. Иймд багтаасан тойргийн төв нь бүхэл координаттай байх боломжгүй.

XI-B1. Цэгүүдээ комплекс хавтгайн тоонууд гэж үзье. $\forall k \in \mathbb{N}$ хувьд

$$\begin{aligned} M_{4k+1} &= A + (M_{4k} - A)e^{\frac{i\pi}{2}} \\ M_{4k+2} &= B + (M_{4k+1} - B)e^{\frac{i\pi}{2}} \\ M_{4k+3} &= C + (M_{4k+2} - C)e^{\frac{i\pi}{2}} \\ M_{4k+4} &= D + (M_{4k+3} - D)e^{\frac{i\pi}{2}} \end{aligned}$$

тул $M_{4k+4} = (D + C \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} + B \cdot e^{i\pi} + A e^{\frac{3i\pi}{2}})(1 - e^{\frac{i\pi}{2}}) + M_{4k}$ гэсэн рекуррент томъёо гарна.

$$M_{2008} = 502 \cdot (D + C \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} + B \cdot e^{i\pi} + A e^{\frac{3i\pi}{2}})(1 - e^{\frac{i\pi}{2}}) + M_0$$

$M_0 = M_{2008}$ тул $D + C \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} + B \cdot e^{i\pi} + A e^{\frac{3i\pi}{2}} = 0 \Rightarrow B - D = e^{\frac{i\pi}{2}}(C - A)$.
Комплекс хавтгайн $O = 0$ цэг нь $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн диагоналиудын огтлолцлын цэг гэвэл $B = -D, A = -C$ болно. Иймд $e^{\frac{i\pi}{2}} \cdot C = B$ буюу $OB = OC, \angle BOC = 90^\circ$ болж $ABCD$ нь квадрат болох нь харагдаж байна.

XI-B2. Чебышевын $f(x) = U_{2n-1}(x)$ олон гишүүнтийг авч үзье. (ММК-II, 14-р хуудас²).

$$U_{2n-1}(x) = \frac{\sin 2n\theta}{\sin \theta} = (-1)^{n+1} \left[2n \cos \theta - \frac{2^3 n(n^2 - 1)}{3!} \cos^3 \theta + \dots \right], \quad x = \cos \theta$$

²ММК-II номонд $U_n(x) = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}$ гэж авсан боловч өөр бусад ном зохиолд тэмдэглэсэн тэмдэглэгээг харгалзан $U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$ гэж авлаа.

буюу

$$f(x) = (-1)^{n+1} 2n \left[1 - \frac{2^2(n^2-1)}{3!} x^2 + \frac{2^4(n^2-1)(n^2-2^2)}{5!} x^4 - \dots \right].$$

$f(x)$ олон гишүүнт нь $2n-1$ зэргийн олон гишүүнт бөгөөд $1 \leq k \leq 2n-1$ байхад $x_k = \cos \frac{k\pi}{2n}$ гэсэн язгууруудтай. $\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$ -д $y = \frac{1}{x^2}$ орлуулга хийе. Тэгвэл

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2n}{y^{n-1}} g(y)$$

болно.

$$g(y) = y^{n-1} - \frac{2^2(n^2-1)}{3!} y^{n-2} + \frac{2^4(n^2-1)(n^2-2^2)}{5!} y^{n-3} - \dots$$

$g(y)$ -ийн язгуурууд нь $y_k = \frac{1}{\cos^2 \frac{k\pi}{2n}}$, ($1 \leq k \leq n-1$) болно. Виетийн теоремоор

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\cos^2 \frac{k\pi}{2n}} = \frac{2^2(n^2-1)}{3!} = \frac{2}{3}(n^2-1)$$

болж батлагдав.

XI-B3. n -р Фермагийн анхны тоо авч үзье. $F_n = 2^{2^n} + 1$. Дараах чанарыг ашиглая:

Хэрэв $p \mid F_n$ бол $p \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$ байна. (ММК-I номыг үзнэ үү).

Бид ямарч F_n , $n > 1$ тоонд ядаж нэг нь F_n -ийн хуваагч бөгөөд бодлогын нөхцөлийг хангах p , q анхны тоон хосыг харгалзуулъя. Фермагийн анхны тоонууд харилцан анхны байдаг тул энэ нь төгсгөлгүй олон p , q анхны тоон хос олдохыг харуулах болно. $F_n = 2^{2^n} + 1 = p^k$ ба $p \in \mathbb{P}$, $k \geq 2$ гэе. Тэгвэл

$$\begin{cases} p-1 = 2^u \\ \frac{p^k-1}{p-1} = 2^v \end{cases}$$

болно. $p-1 < \frac{p^k-1}{p-1}$ тул $u < v$ байна.

$$2^v = p^{k-1} + p^{k-2} + \dots + 1 \equiv k \pmod{2^u}$$

тул k нь 2^u -д хуваагдана. Иймд $k \geq 2^u$. Дээр дурдсан чанараас $u \geq n+1$ болно. Иймд

$$p^k \geq p^{2^u} \geq p^{2^{n+1}} \geq 2^{2^{n+1}} > F_n$$

болж зерчилд хүрнэ. Иймд F_n нь эсвэл анхны тоо эсвэл дор хаяж 2 ялгаатай анхны тоон хуваагчтай байна. Эхний тохиолдолд $p = F_n$ ба F_{n+1} -ийн ямар нэг анхны тоон хуваагч q -ийн хувьд бодлогын нөхцөл биелнэ. Чанар ёсоор $q - 1 = 2^{n+2} \cdot m$ болох тул

$$2^{q-1} = (2^{2^n})^{4m} \equiv (-1)^{4m} = 1 \pmod{p},$$

$$2^{p-1} = 2^{2^{2^n}} = (2^{2^{n+1}})^{2^{2^n-n-1}} \equiv (-1)^{2^{2^n-n-1}} = 1 \pmod{q}$$

Энд $n > 1$ үед $2^n > n + 1$ -г ашиглав.

Хоёр дахь тохиолдолд F_n -ийн ялгаатай p, q анхны хуваагчид нь бодлогын нөхцөлийг хангана. Чанар ёсоор $q - 1 = 2^{n+1} \cdot m$, $p - 1 = 2^{n+1} \cdot k$ тул

$$2^{q-1} = (2^{2^n})^{2m} \equiv (-1)^{2m} = 1 \pmod{p},$$

$$2^{p-1} = (2^{2^n})^{2k} \equiv (-1)^{2k} = 1 \pmod{q}.$$

1.19 ММО-44, Багын багшийн III даваа

Д.Ганзориг (ШУТИС)

ББ-А1. $n = 2^{31} \cdot 3^{19}$ -бол n -ээс бага n^2 -ын хуваагчдын тоог ол.

ББ-А2. $p = 3k + 2$ хэлбэрийн анхны тоо ба $p \mid a^2 + ab + b^2$ бол $p \mid a$ ба $p \mid b$ батал.

ББ-А3. $p(n)$ -нь n -ийн тэгээс ялгаатай цифрүүдийн үржвэр бол $p(1) + p(2) + \dots + p(999)$ -ийн хамгийн их анхны хуваагчийг ол.

ББ-В1. 27000001-нь яг 4 анхны тоон хуваагчтай бол тэдгээрийн нийлбэрийг ол.

ББ-В2. А багийн болон В багийн төвүүд харгалзан 100 ба 50 хүнтэй. Эдгээр багийн төвийг холбосон замын аль хэсэгт байрлах дэлгүүрийн хувьд нийт 150 хүний дэлгүүр ирж очих зам хамгийн богино байх вэ?

ББ-В3. 2001 ширхэг бүхэл тооны хоёр мянган зэргүүдийн нийлбэрт 100-аас цөөнгүй янзаар тавигдах тоо оршин байхыг батал.

1.20 ММО-44, Багын багшийн III даваа бодолт

ББ-А1. $n^2 = 2^{62} \cdot 3^{38}$ тул нийт хуваагчдын тоо нь $(62+1)(38+1)$. $n^2 = a \cdot b$ ба $a < b$ гэвэл $a < n$ ба $b > n$ байна. Тэгэхээр n^2 -ийн n -ээс ялгаатай хуваагчдын хагас нь n -ээс бага, хагас нь n -ээс их болно. Иймд бодлогын нөхцөлийг хангах хуваагчдын тоо $\frac{63 \cdot 39 - 1}{2}$.

ББ-А2. $p \nmid a$ гэе. $p \mid a^2 + ab + b^2 \Rightarrow a^3 \equiv b^3 \pmod{p} \Rightarrow a^{3k} \equiv b^{3k} \pmod{p}$.
 $a^{p-1} \equiv b^{p-1} \pmod{p}$, $a^{3k+1} \equiv b^{3k+1} \pmod{p}$, $(a, p) = 1 \Rightarrow a \equiv b \pmod{p} \Rightarrow$
 $a^2 + ab + b^2 \equiv 3a^2 \equiv 0 \pmod{p}$ зөрчил.

ББ-А3. $(000 + 001 + \dots + 999) - 000 = (0 + 1 + 2 + \dots + 9)^3 - 0$. $0 \rightarrow 1$ соливол $S = 46^3 - 1 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 103$.

ББ-В1. $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$, $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) \Rightarrow$
 $27000001 = 300^3 + 1 = (300 + 1)(300^2 - 300 + 1) = (300^2 + 2 \cdot 300 + 1 - 900) =$
 $301[(300 + 1)^2 - 30^2] = 7 \cdot 43 \cdot 271 \cdot 331$. Иймд нийлбэр нь 652.

ББ-В2. $S = |AB|$ гэе. A багийн 50 хүн, B багийн 50 хүний хамт нийт $50S$ буюу тогтмол зам туулна. Тэгэхээр A багийн үлдэх 50 хүн хамгийн бага зам туулахын тулд дэлгүүр A -д байрлах шаардлагатай.

ББ-В3. $A = 1^{2000} + 2^{2000} + \dots + 2001^{2000}$ тоо нь $A = (\pm 1)^{2000} + (\pm 2)^{2000} + \dots + (\pm 2001)^{2000}$ буюу дор хаяж $2^{2001} > 100$ янзаар бүхэл тоонуудын 2000 зэргийн нийлбэрт тавигдана.

1.21 ММО-44, Багын багшийн IV даваа

Д.Ганзориг (ШУТИС)

ББ-А1 (Д.Ганзориг, Д.Батнасан). $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{16} = n$ гэсэн 16 хуваагчтай $d_6 = 18$, $d_9 - d_8 = 17$ байх бүх натурал n -г ол.

ББ-А2 (Н.Аргилсан). $a_1 + 2a_2 + \dots + 18a_{18} \geq 2109$ байх аливаа бодит $a_1, \dots, a_{18}$ -тоонуудын хувьд $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{18}^2 > 2008$ гэж батал.

ББ-А3 (Д.Батнасан, Д.Ганзориг). Дурын ялгаатай 14 ширхэг натурал тоог хэсэг тус бүрийн тоонуудын урвуугуудын нийлбэрийн зөрүү нь 0.001-ээс бага байхаар 7, 7-оор нь үл огтлолцох хоёр хэсэгт хувааж болохыг батал.

ББ-В1 (Д.Ганзориг). A нь 100-аас хэтрэхгүй натурал тоонуудын олонлог а) $\forall x, y \in A$ хувьд $(x, z) = (y, z) = 1$ байх $z \in A$.

б) $\forall x, y \in A$ хувьд $(x, z) > 1, (y, z) > 1$ байх $z \in A$.

олдох бол A -олонлог хамгийн ихдээ хэдэн элементтэй вэ?

ББ-В2 (Н.Аргилсан). $n \in \mathbb{N}$ тоо нь $a^2 < n$ байх бүх сондгой a -д хуваагддаг бол n -ийн авч болох бүх утгыг ол.

ББ-В3 (Д.Ганзориг). $2^x \cdot 3^y - 5^z \cdot 7^w = 1$ тэгшитгэлийн бүх сөрөг бус шийдийг ол.

1.22 ММО-44, Багын багшийн IV даваа бодолт

ББ-А1. $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}, p_1, \dots, p_m$ -анхны тоонууд. n -нь $(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_m + 1)$ ширхэг хуваагчтай. $18 = 2 \cdot 3^2 \Rightarrow 1, 2, 3, 6, 9, 18$ -хуваагчид болно. Иймд $n = 2 \cdot 3^3 \cdot p$ эсвэл $n = 2 \cdot 3^7$ болно. Хэрэв $n = 2 \cdot 3^7$ бол $d_8 = 54, d_9 = 81, d_9 - d_8 \neq 17$. Иймд $n = 2 \cdot 3^3 \cdot p, p > 18$. Хэрэв $p < 27$ бол $d_7 = p, d_8 = 27, d_8 = p, d_9 = 54 = d_8 + 17 \Rightarrow p = 37$. Хэрэв $p > 54$ бол $d_7 = 27, d_8 = 54, d_9 = d_8 + 17 = 71$. Иймд бодлого $2 \cdot 3^3 \cdot 37 = 1998, 2 \cdot 3^3 \cdot 71 = 3834$ гэсэн 2 шийдтэй.

ББ-А2. $a_1, a_2, \dots, a_{18}$ нь $a_1 + 2a_2 + \dots + 18a_{18} \geq 2109$ байх бодит тоонууд бол $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{18}^2 \geq 2(a_1 + 2a_2 + \dots + 18a_{18}) - (1^2 + 2^2 + \dots + 18^2) \geq 2 \cdot 2109 - 2109 = 2109 > 2008$.

ББ-А3. Худлаа гэдгийг хялбархан харуулж болно. Жишээ нь 1, 100000, 100001, ..., 100013 тоонуудын хувьд бодлогын өгүүлбэр биелэхгүй нь ойлгомжтой.

ББ-В1. A нь өгөгдсөн чанартай олонлог байг. $1 \notin A$ нь ойлгомжтой. Хэрэв ямар нэг $p, q \in A$ анхны тоонуудын хувьд $pq > 100$ бол б) нөхцөлөөр $(p, z) > 1, (q, z) > 1$ буюу $p \mid z, q \mid z$ байх $z \in A$ оршин байна. Эндээс $pq \mid z$ тул $100 < pq \leq z$ болж зөрчил үүснэ. Иймд 10-аас их анхны тоо A -д нэгээс илүү байж болохгүй.

$T(p_1, p_2, \dots, p_k)$ -аар $p_1, p_2, \dots, p_k$ анхны тоонуудын ядаж нэгд нь хуваагддаг 100-аас хэтрэхгүй натурал тоонуудын олонлогийг тэмдэглэе.

Тэгвэл ямар нэг p анхны тооны хувьд

$$A \subseteq T(2, 3, 5, 7) \cup \{p\}$$

байна. Энд $p \geq 11$ байх анхны тоо.

Хэрэв $p \notin A$ бол $A \subseteq T(2, 3, 5, 7)$ байна. $\{3, 2 \cdot 5 \cdot 7\}, \{5, 2 \cdot 3 \cdot 7\}, \{5^2, 2^2 \cdot 3 \cdot 7\}, \{7, 2 \cdot 3 \cdot 5\}, \{7^2, 2^2 \cdot 3 \cdot 5\}, \{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7\}, \{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7\}, \{2^2 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 7\}, \{2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5\},$

$\{2^2 \cdot 7, 3^2 \cdot 5\}$, $\{2^3 \cdot 7, 3 \cdot 5^2\}$ олонлогуудаас нэг, нэг л элемент A -д орох боломжтой. Үнэндээ а) нөхцөлийг хангах $z > 1$ нь өгөгдсөн хоёр тооны үржвэртэй харилцан анхны байх ёстой. Гэтэл эдгээр хосуудын үржвэр нь $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ -д хуваагдах тул z нь $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ -тэй харилцан анхны буюу 7-оос их анхны хуваагчтай болж зөрчил үүснэ. Иймд энэ тохиолдолд $|A| \leq |T(2, 3, 5, 7)| - 11 = 78 - 11 = 67$.

$p \in A$ гэе. Энэ үед $|A| \leq 72$ болохыг баталъя. Дараах тохиолдлуудыг авч үзье.

1. $11 \leq p \leq 13$. Энэ тохиолдолд $\{5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot p\}$, $\{2 \cdot 5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot p\}$; $\{2 \cdot 3 \cdot 5, 7 \cdot p\}$, $\{2^2 \cdot 3 \cdot 5, 7 \cdot p\}$, $\{2 \cdot 3^2 \cdot 5, 7 \cdot p\}$; $\{2 \cdot 3 \cdot 7, 5 \cdot p\}$, $\{2^2 \cdot 3 \cdot 7, 5 \cdot p\}$; $\{2 \cdot 5 \cdot 7, 3 \cdot p\}$ олонлогуудаас нэг, нэг л элемент A -д орох боломжтой.

Хэрэв $35, 3p, 5p, 7p \in A$ бол $66, 70, 30, 60, 90, 42, 84 \notin A$ тул $|A| \leq 79 - 7 = 72$.

$35 \notin A$ гэе. $5, 7 \in A$ бол б)-ээр $70, 5p, 7p \in A$ болно. Иймд $3p, 6p, 42, 84, 30, 60, 90 \notin A$. Иймд $|A| \leq 79 - 8 = 71$. $25, 7 \in A$; $5, 49 \in A$; $25, 49 \in A$ тохиолдлууд өмнөхтэй ижил. Иймд $5, 25 \notin A$ эсвэл $7, 49 \notin A$ байх тохиолдлууд үлдлээ. $5, 25 \notin A$ бол $p \in A$ тул а)-аар $2 \cdot 3 \cdot 7 \notin A$ ба $g\{2 \cdot 3, 7 \cdot p\}$, $\{2 \cdot 7, 3 \cdot p\}$, $\{3 \cdot 7, 2 \cdot p\}$, $\{3^2 \cdot 7, 2^2 \cdot p\}$ хосуудаас нэг нь л A -д орох боломжтой тул $|A| \leq 79 - 8 = 71$. $7, 49 \notin A$ бол $p \in A$ тул а)-аар $2 \cdot 3 \cdot 5 \notin A$ ба $\{2 \cdot 3, 5 \cdot p\}$, $\{2 \cdot 5, 3 \cdot p\}$, $\{3 \cdot 5, 2 \cdot p\}$, $\{3^2 \cdot 5, 2^2 \cdot p\}$ хосуудаас нэг нь л A -д орох боломжтой тул $|A| \leq 79 - 8 = 71$.

$3p \notin A$ гэе. $3 \in A$ гэвэл $p \in A$ тул б)-ээр $6p \in A$ эсвэл $9p \in A$ ($p = 11$ үед) болно. Иймд $35, 70 \notin A$ болох тул өмнөх тохиолдолтой ижил байна. $9 \in A$, $27 \in A$, $81 \in A$ байх тохиолдлууд өмнөхтэй ижилхэн. Иймд $3, 9, 27, 81 \notin A$ гэе. Энэ тохиолдолд $\{2 \cdot 5, 7 \cdot p\}$, $\{2 \cdot 7, 5 \cdot p\}$, $\{5 \cdot 7, 2 \cdot p\}$ хосуудаас нэг нь л A -д орох тул $|A| \leq 79 - 8 = 71$ болно.

$5p \notin A$ гэе. Хэрэв $5 \in A$ эсвэл $25 \in A$ бол $p \in A$ тул б)-ээр $5p \mid z \neq 5p$ байх $z \in A$ олдоно. Гэтэл энэ тохиолдолд $z > 100$ тул зөрчил үүснэ. Иймд $5, 25 \in A$ гэе. Энэ үед дээр баталсантай төстэйгөөр батлагдана.

$7p \notin A$ гэе. Хэрэв $7 \in A$ эсвэл $49 \in A$ бол $p \in A$ тул б)-ээр $7p \mid z \neq 7p$ байх $z \in A$ олдоно. Гэтэл энэ тохиолдолд $z > 100$ тул мөн адил зөрчил үүснэ. Иймд $7, 49 \in A$ гэе. Энэ үед мөн л дээр баталсантай төстэйгөөр батлагдана.

2. $17 \leq p \leq 19$. Энэ тохиолдолд $7 \in A$ эсвэл $49 \in A$ гэвэл б)-ээр $7p \mid z \neq 7p$ байх $z \in A$ олдоно. Энэ үед $z > 100$ болох тул $7, 49 \notin A$ гэе. $\{2 \cdot 3, 5 \cdot p\}$, $\{2 \cdot 5, 3 \cdot p\}$, $\{3 \cdot 5, 2 \cdot p\}$, $\{3^2 \cdot 5, 2^2 \cdot p\}$, $\{2 \cdot 3 \cdot 5, p\}$ олонлогуудаас тус бүр нэг л элемент A -д орох тул $|A| \leq 79 - 7 = 72$.

3. $23 \leq p \leq 31$. Энэ тохиолдолд 5, 25, 7, 49 $\notin A$ болно. Энэ тохиолдолд $\{2, 3 \cdot p\}, \{3, 2 \cdot p\}, \{2 \cdot 3, p\}$ хосуудаас нэг нь л A -д орох тул $|A| \leq 79 - 7 = 72$.

4. $37 \leq p$. Энэ тохиолдолд 3, 9, 27, 81, 5, 25, 7, 49 $\notin A$ тул $|A| \leq 79 - 8 = 71$.

Одоо $|A| = 72$ байх жишээ гаргахад л хангалттай.

$$A = (T(2, 3, 5, 7) \cup \{11\}) \setminus \{66, 70, 30, 60, 90, 42, 84\}$$

олонлог бодлогын нөхцөл хангахыг шалгаж болно.

ББ-В2. $a^2 < n \leq (a+2)^2$ байх n -үүдийг авч үзье. $a = 1$ бол $1^2 < n \leq 3^2$ ба $1 \mid n$ гэдгээс $n = 2, 3, \dots, 9$ утгуудыг авна.

$a = 3$ бол $2^2 < n \leq 5^2 = 25$ ба $3 \mid n$ гэдгээс $n = 12, 15, 18, 21, 24$. утгыг авна.

$n = 5$ бол $5^2 < n \leq 7^2 = 49$ ба $5 \mid n$ гэдгээс $n = 30, 45$ утгуудыг авна. Одоо $a \geq 7$ үед бодлогын нөхцөлийг хангах n тоо олдохгүйг харуулъя.

$a^2 < n \leq (a+2)^2$ байх n нь $a, a-2, a-4$ гэсэн сондгой тоонуудад хуваагдана. Энэ дараалсан 3-н сондгой тоон нь харилцан анхны учир $a(a-2)(a-4) \mid n$ байх ёстой. Одоо $a(a-2)(a-4) - (a+2)^2$ -г авч үзье. $a(a^2 - 6a + 8) - (a^2 + 4a + 4) = a^3 - 6a^2 + 8a - a^2 - 4a - 4 = a^3 - 7a^2 + 4a - 4 = a^2(a-7) + 4(a-1) > 0$ учир $a^2 < n \leq (a+2)^2$ байх бодлогын нөхцөлийг хангах n тоо олдохгүй. Иймд n нь $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 30, 45\}$ олонлогоос утгаа авна.

ББ-В3. $5^z \cdot 7^w + 1$ тэгш гэдгээс $x \geq 1$.

$y = 0$ байг $2^x - 5^z \cdot 7^w = 1$ хэрэв $z \neq 0$ бол $2^x \equiv 1(5)$ ($4 \mid x$) $\Rightarrow 3 \mid 2^x - 1$ болно энэ нь $2^x - 5^z \cdot 7^w = 1$ зөрчинө. Хэрэв $z = 0$ бол $2^x - 7^w = 1$ $x = 1, 2, 3$ үед $(x, w) = (1, 0), (3, 1)$ шийдтэй. $x \geq 4$ үед $7^w \equiv -1(16)$ боломжгүй. Иймд $y = 0$ үед $(x, y, z, w) = (1, 0, 0, 0), (3, 0, 0, 1)$ гэсэн шийдтэй.

$y > 0, x = 1$ байг. $2 \cdot 3^y - 5^z \cdot 7^w = 1$. $-5^z \cdot 7^w \equiv 1(3)$ ө.х $(-1)^z \equiv -1(3)$ эндээс z сондгой. $2 \cdot 3^y \equiv 1(5) \Rightarrow y \equiv 1(4)$. Хэрэв $w \neq 0$ бол $2 \cdot 3^y \equiv 1(7)$ буюу $y \equiv 4(6)$ болно. Энэ нь $y \equiv 1(4)$ -д зөрчинө. Эндээс $w = 0$ буюу $2 \cdot 3^y - 5^z = 1$. Хэрэв $y = 1$ бол $z = 1$. Хэрэв $y \geq 2$ бол $5^z \equiv -1(9)$ буюу $z \equiv 3(6)$. Эндээс $5^3 + 1 \mid 5^z + 1$ мөн $7 \mid 5^z + 1$ нь $5^z + 1 = 2 \cdot 3^y$ -д зөрчинө. Эндээс энэ тохиолдол нь $(1, 1, 1, 0)$ гэсэн шийдтэй.

$y > 0, x \geq 2$ бол $5^z \cdot 7^w \equiv -1(4)$ ба $7^w \cdot 5^z \equiv -1(3)$ энэ нь $(-1)^w \equiv -1(4)$, $(-1)^z \equiv -1(3)$ буюу z, w сондгой. Иймд $2^x \cdot 3^y = 5^z \cdot 7^w + 1 \equiv 35 + 1 \equiv 4(8)$. Эндээс $x = 2$ ба $4 \cdot 3^y - 5^z \cdot 7^w = 1$. (z, w -сондгой)(*). $4 \cdot 3^y \equiv 1(5)$ ба $4 \cdot 3^y \equiv 1(7)$ болно. Эндээс $y \equiv 2(12)$. $y = 12m + 2$ $m \geq 2$ гэвэл $5^z \cdot 7^w = 4 \cdot 3^y - 1 = (2 \cdot 3^{6m+1} - 1)(2 \cdot 3^{6m+1} + 1) \cdot 2 \cdot 3^{6m+1} + 1 \equiv 6 \cdot 2^{3m} + 1 \equiv 6 + 1 \equiv 0(7)$ ба $(2 \cdot 3^{6m+1} + 1, 2 \cdot 3^{6m+1} - 1) = 1$ гэдгээс $5 \mid 2 \cdot 3^{6m+1} - 1$ буюу

$2 \cdot 3^{6m+1} - 1 = 5^z$, $2 \cdot 3^{6m+1} + 1$, $2 \cdot 3^{6m+1} - 1 = 5^z$, $2 \cdot 3^{6m+1} + 1 = 7^w$. (**).
Хэрэв $m \geq 1$ бол $(**) \Rightarrow 5^z \equiv -1(9)$ болохгүй. ($y > 0$.) Хэрэв $m = 0$ бол
 $y = 2$, $z = 1$, $m = 1$. Энэ тохиолдолд $(2, 2, 1, 1)$ гэсэн ганц шийдтэй.

Иймд өгсөн тэгшитгэл $(1, 0, 0, 0)$; $(3, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(2, 2, 1, 1)$ гэсэн 4-н шийдтэй.

1.23 ММО-44, Дундын багшийн III даваа

Ц.Дашдорж

ДБ-А1. G нь $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн хүндийн төв ба $GA \perp GD$ бол AD хэрчим нь AD ба BC талуудын дунджыг холбосон хэрчимтэй тэнцүү гэж батал.

ДБ-А2. $\frac{1}{25} \sum_{k=0}^{2001} \left[\frac{2^k}{25} \right]$ бүхэл тоо гэж батал.

ДБ-А3. $S = \{1, 2, \dots, n\}$ олонлогийн цэгүүдийг дараах нөхцөл биелж байхаар 2 өнгөөр будаж болдог байх бүх $n \in \mathbb{N}$ -ийг ол, үүнд $S^3 = S \times S \times S$ олонлог

1) x, y, z адил өнгөтэй

2) $n \mid x + y + z$ байх яг 2007 ширхэг (x, y, z) гурвалыг агуулдаг.

ДБ-В1. $\triangle ABC$ -ны талуудын гадна тал дээр $ABMM'$, $ACNN'$, $BCPP'$ квадратуудыг байгуулав. $M'N'$, $P'M$, PN хэрчмүүдийн дундаж цэгүүд нь A' , B' , C' бол $\triangle ABC$ ба $\triangle A'B'C'$ -ийн хүндийн төвүүд давхцахыг батал.

ДБ-В2. $n \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$, $1 < a, b \in \mathbb{N}$ байг. p, q нь $a^{6^n} + b^{6^n}$ -ийн 1-ээс их сондгой хуваагчид бол $p^{6^n} + q^{6^n}$ -ийг $6 \cdot (12)^n$ -д хуваахад гарах үлдэгдлийг ол.

ДБ-В3. $k \geq 2$ бол $C_{2^{k+1}}^{2^k} - C_{2^k-1}^{2^k}$ тоо 2^{3k} -д хуваагдах ба 2^{3k+1} -д хуваагдахгүйг батал.

1.24 ММО-44, Дундын багшийн III даваа бодолт

ДБ-А1. $A(a), \dots, G(g)$, $a, \dots, g \in \mathbb{C}$ гэе. Скаляр үржвэрийн чанараар

$$GA \perp GD \Leftrightarrow (a - g, d - g) = 0,$$

ө.х

$$\left(a - \frac{a+b+c+d}{4}, d - \frac{a+b+c+d}{4} \right) = 0,$$

буюу

$$\begin{aligned} 0 &= (3a - b - c - d, 3d - a - b - c) = \\ &= (a - b - c + d + 2(a - d), a - b - c + d - 2(a - d)) \Leftrightarrow (a + d - b - c, a + d - b - c) = \\ &= 4(a - d, a - d) \Leftrightarrow \left| \frac{a + d}{2} - \frac{b + c}{2} \right|^2 = |a - d|^2 \end{aligned} \quad (1)$$

M ба N нь AD ба BC -ийн дундчууд гэвэл $M\left(\frac{a+d}{2}\right), N\left(\frac{b+c}{2}\right)$ болох тул (1)-ээр $MN = AD$.

ДБ-А2. $2^k = 25 \left\lfloor \frac{2^k}{25} \right\rfloor + r_k$ гэвэл $2^k \equiv r_k \pmod{25}$, $r_k \in Z_{25}^*$.

$$A \Rightarrow 25 \sum_{k=0}^{2001} \left\lfloor \frac{2^k}{25} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{2001} (2^k - r_k) = 2^{2002} - 1 - \sum_{k=0}^{2001} r_k \quad (1)$$

Хэрэв $(n, 2) = 1$ бол $2^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, $\varphi(25) = 20$ тул $2^{20} \equiv 1 \pmod{25}$, $2^{2000} \equiv 1 \pmod{25}$, $2^{2001} \equiv 2 \pmod{25}$ буюу $r_{2000} = 1$, $r_{2001} = 2$.

k дараалсан 20 утгыг авахад $r_k \in Z_{25}^*$ буюу $\sum_{i=1}^{25} i - (5 + 10 + 15 + 20 + 25) = 250$. Иймд

$$\sum_{k=0}^{2001} r_k = r_{2000} + r_{2001} + \sum_{k=0}^{1999} r_k = 1 + 2 + \frac{2000}{20} \cdot 250 \equiv 3 \pmod{625} \quad (2)$$

$\varphi(625) = 500$ тул $2^{2002} \equiv 4 \pmod{625}$. Иймд (1), (2)-оос $A \equiv 4 - 1 - 3 \equiv 0 \pmod{625}$. Эндээс $A \in \mathbb{N}$

ДБ-А3. Г. Батзаяагийн бодолт:

Улаан ба хөх элементүүдийн олонлогийг харгалзан (R, B) гээд $|R| = r$, $|B| = b$ ($r + b = n$) гэвэл нөхцөлийг хангах яг $n^2 - 3rb$ ширхэг гурвал байдаг гэж баталъя.

$f(t) = \sum_{i=1}^n t^i$, $h(t) = \sum_{a \in R} t^a$, $g(t) = \sum_{a \in B} t^a$ ба $F(t) = h(t)^3 + g(t)^3 = \sum_{i \geq 0} a_i t^i$ гэе. Тэгвэл нөхцөлийг хангах гурвалын тоо $a_n + a_{2n} + \dots$ болно.

$$\begin{aligned} F(t) &= h(t)^3 + (f(t) - h(t))^3 = h(t)^3 + f(t)^3 - \\ &- 3f(t)h(t)(f(t) - h(t)) - h(t)^3 = f(t)^3 - 3f(t)h(t)g(t) \end{aligned}$$

болно. Эндээс $f(t)^3$ -ийн зэрэг нь n -д хуваагддаг коэффициентийн нийлбэр n^2 , $3f(t)h(t)g(t)$ -ийн зэрэг нь n -д хуваагддаг коэффициентуудын нийлбэр $3br$ байна гэдгээс олбол зохих гурвалын тоо $n^2 - 3br$ болно.

Одоо бодлогоо бодъё. $\begin{cases} 2007 = n^2 - 3br \\ n = b + r \end{cases} \Rightarrow 9|n^2 - 3br \Rightarrow 3|n = r + b, 3|rb$

ба $3|r, b \Rightarrow r = 3s, b = 3c$ гэвэл. $s \geq c$ гэж үзвэл $s^2 - sc + c^2 = 223$ болно.
 $892 = 4(s^2 - sc + c^2) = (2c - s)^2 + 3s^2 \geq 3s^2 \geq 3s^2 - 3s(s - c) = 3(s^2 - sc + c^2) =$
 669 ө.х $297 \geq s^2 \geq 223$ ба $17 \geq s \geq 15$.

Хэрэв $s = 15$ бол $c(15 - c) = c(s - c) = s^2 - (s^2 - sc + c^2) = 15^2 - 223 = 2$
 гэдгээс зөрчил үүснэ.

Хэрэв $s = 16$ бол $c(16 - c) = 33$ гэдгээс зөрчил үүснэ.

Хэрэв $s = 17$ бол $c(17 - c) = 66$ ба $c = 6, c = 11$ ө.х $(r, b) = (51, 18) \vee (51, 33)$
 гэдгээс $n = 69, 84$ болно.

Бодолт 2. Улаан ба хөх тоонуудын олонлогийг харгалзан R ба B -ээр тэмдэглэе. Түүнчлэн $r = |R|, b = |B|$ гэе.

ϵ нь нэгжийн n -зэргийн анхдагч язгуур. Бид ϵ тооны дараах чанарыг ашиглана:

$$\frac{1}{n} \sum_{u=0}^{n-1} \epsilon^{ku} = \begin{cases} 1 & \text{хэрэв } n \mid k \\ 0 & \text{хэрэв } n \nmid k. \end{cases} \quad (1)$$

$p(t) = \sum_{x \in R} x^t$ гээд дараах илэрхийллийг авч үзье.

$$\begin{aligned} N_R &= \frac{1}{n} \sum_{u=0}^{n-1} p^3(\epsilon^u) = \frac{1}{n} \sum_{u=0}^{n-1} \left(\sum_{x \in R} \epsilon^{xu} \right) \left(\sum_{y \in R} \epsilon^{yu} \right) \left(\sum_{z \in R} \epsilon^{zu} \right) \\ &= \sum_{x \in R} \sum_{y \in R} \sum_{z \in R} \left(\frac{1}{n} \sum_{u=0}^{n-1} \epsilon^{(x+y+z)u} \right). \end{aligned}$$

(1)-ээр сүүлийн илэрхийлэл нь $n \mid x + y + z$ үед 1, $n \nmid x + y + z$ үед 0 утга авна. Иймд N_R нь $x + y + z \equiv 0 \pmod{n}$ жишлэгийн улаан шийдийн тоотой тэнцүү байна.

Төсөөтэйгөөр $q(t) = \sum_{x \in B} t^x$ гэвэл хөх шийдийн тоо нь $N_B = \frac{1}{n} \sum_{u=0}^{n-1} q^3(\epsilon^u)$ болно.

Иймд нийт нэг өнгийн шийдийн тоо нь

$$\begin{aligned} N_R + N_B &= \frac{1}{n} \sum_{u=0}^{n-1} (p^3(\epsilon^u) + q^3(\epsilon^u)) \\ &= \sum_{u=0}^{n-1} \frac{p(\epsilon^u) + q(\epsilon^u)}{n} (p^2(\epsilon^u) - p(\epsilon^u)q(\epsilon^u) + q^2(\epsilon^u)). \end{aligned}$$

$p(t) + q(t) = t + t^2 + \dots + t^{n-1} + t^n$ тул (1) чанараар

$$\frac{p(\varepsilon^u) + q(\varepsilon^u)}{n} = \begin{cases} 1 & \text{хэрэв } u = 0 \\ 0 & \text{хэрэв } 1 \leq u < n. \end{cases}$$

Иймд

$$N_R + N_B = p^2(1) - p(1)q(1) + q^2(1) = r^2 - rb + b^2.$$

$r^2 - rb + b^2 = 2007$ -ийг өмнөх бодолтын адилаар бодож n -г олно.

ДБ-В1. $A(a), \dots, N'(n'), a, \dots, n' \in \mathbb{C}$ гэе. Эргүүлэлтийн томъёогоор

$$\begin{aligned} n' &= a + (c - a)i, \quad m' = a + (b - a)(-i), \quad a' = \frac{m' + n'}{2} = \frac{2a + (c - b)i}{2}, \\ b' &= \frac{2b + (a - c)i}{2}, \quad c' = \frac{2c + (b - a)i}{2} \end{aligned}$$

тул $a' + b' + c' = \frac{2a + 2b + 2c + (c - b + a - c + b - a)i}{2} = a + b + c$ эндээс $G = G'$.

ДБ-В2. Өгүүлбэр1. $(a, b) = 1$ ба d нь $a^{6^n} + b^{6^n}$ -ийн сондгой анхны тоон хуваагч бол $d \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$ байна. (ММКI, 1.18-10а)-аас гарна.

Өгүүлбэр2. $x \equiv 1 \pmod{c^k}$ бол $x^{c^m} \equiv 1 \pmod{c^{m+k}}$ байна.

$$x^{c^m} = (tc^k + 1)^{c^m} = s \cdot c^{m+k} + 1 \equiv 1 \pmod{c^{m+k}}$$

p, q нь $a^{6^n} + b^{6^n}$ -ийн сондгой хувьсагчид бол Өгүүлбэр1-ээс $p^{3^n} \equiv q^{3^n} \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$ гэж гарна. Иймд Өгүүлбэр2-оор

$$p^{6^n} \equiv q^{6^n} \equiv 1 \pmod{2^{n+1}} \quad (1)$$

Мөн ММКI, 1.8-9а) -ээс $d \neq 3$ гэж гарна, ө.х $(p, 3) = (q, 3) = 1$ болно. Иймд $p^{2^n} \equiv q^{2^n} \equiv 1 \pmod{3}$ болно. Иймд Өгүүлбэр2-оор

$$p^{6^n} \equiv q^{6^n} \equiv 1 \pmod{3^{n+1}} \quad (2)$$

(1) ба (2)-оос $p^{6^n} \equiv q^{6^n} \equiv 1 \pmod{6 \cdot 12^n}$ Үүгээр $p^{6^n} + q^{6^n} \equiv 2 \pmod{6 \cdot 12^n}$

ДБ-В3. $(2n - 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n - 1), (2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n = 2^n \cdot n!$

$$(2n)! = 2^n n! (2n - 1)!! \quad (1)$$

$$C_{4n}^{2n} = \frac{2^{2n}}{(2n)!} (4n-1)!!, \quad C_{2n}^{2n} = \frac{2^{2n}}{(2n)!} ((2n-1)!!)^2 \text{ тул}$$

$$\binom{2^{k+1}}{2^k} - \binom{2^k}{2^{k-1}} = \frac{2^{2^k} (2^k - 1)!!}{(2^k)!} [(2^k + 1)(2^k + 3) \dots (2^k + 2^k - 1) - (2^k - 1)(2^k - 3) \dots (2^k - 2^k + 1)] \quad (2)$$

Энэ 2 үржигдэхүүн тус бүрд орох 2-ын зэргийг тооцоолъё. Эхлээд n -ээр индукцэлж $2^n!$ -д орох 2-ийн зэрэг $2^n - 1$ гэдгийг харуулъя. $n = 1$ үед илэрхий. $2^n! = 2^{2^n-1} (2d+1)$ гээ. Тэгвэл

$$2^{n+1}! = (2 \cdot 2^n)! \stackrel{(1)}{=} 2^{2^n} \cdot (2^n!) \cdot (2^{n+1} - 1)!! =$$

$$\stackrel{\text{индукц}}{=} 2^{2^n} \cdot 2^{2^n-1} (2d+1) (2^{n+1} - 1)!! = 2^{2^{n+1}-1} (2q+1).$$

Иймд (2)-ийн I үржигдэхүүнд буй 2-ын зэрэг $2^k - (2^k - 1) = 1$ (2)-ийн II үржигдэхүүнийх

$$P(x) = (x+1)(x+3) \dots (x+2^k-1) - (x-1)(x-3) \dots (x-2^k+1) \quad (3)$$

о/г-ийн $x = 2^k$ дээрх утга гэж үзэж чадна. $k \geq 2$ учир $P(-x) = -P(x)$ буюу $P(x)$ сондгой функц тул $P(x) = x^3 Q(x) + cx$, $Q(x) \in \mathbb{Z}$ тэгш о/г гэж бичиж чадна. c -д орох 2-ийн зэргийг бодъё:

$$c = 2(2^k - 1)!! \sum_{i=1}^{2^k-1} \frac{1}{2i-1} = (2^k - 1)!! \sum_{i=1}^{2^k-1} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2^k - 2i + 1} \right) =$$

$$= (2^k - 1)!! \sum_{i=1}^{2^k-1} \frac{2^k}{(2i-1)(2^k - 2i + 1)} = 2^k \sum \frac{(2^k - 1)!!}{(2i-1)(2^k - 2i + 1)} = 2^k \cdot S$$

$i = 1, \dots, 2^{k-1}$ байх i бүрийн хувьд $(2i-1)^{-1} \pmod{2^k} = a_{2i-1}$ гэж тэмдэглэе. $\{2i-1 | i = 1, 2^{k-1}\} \pmod{2^k} \equiv \{a_{2i-1} | i = 1, 2^{k-1}\}$ байх нь илэрхий тул

$$S \equiv - \sum \frac{(2^k - 1)!!}{(2i-1)^2} \equiv - \sum (2^k - 1)!! a_{2i-1}^2 =$$

$$= -(2^k - 1)!! \sum (2i-1)^2 = -(2^k - 1)!! \frac{2^{k-1}(2^{2k} - 1)}{3} \pmod{2^k}.$$

Иймд $c = 2^k S = 2^{2k-1} (2t+1)$ буюу $P(2^k) = 2^{3k} Q(2^k) + 2^k c = 2^{3k} Q(2^k) + 2^{3k-1} (2t+1)$. Иймд (2)-д байх 2-ийн зэрэг $1 + (3k-1) = 3k$.

1.25 ММО-44, Дундын багшийн IV даваа

Ц. Дашдорж

ДБ-А1 (Ц.Батхүү). $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \sqrt{\frac{a_n^2}{4} + \frac{1}{a_n}}, n \geq 1$ рекуррент харьцаагаар өгөгдсөн дарааллын a_{21295} гишүүнийг 44-тэй жиш.

ДБ-А2 (У.Батзориг). $n \geq 3$ натурал тооны хувьд $\{a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(n)}\}$ -нь n -ээс бага n -тэй харилцан анхны тоонууд бол

$$\left| \prod_{k=1}^{\varphi(n)} \cos\left(\frac{a_k \pi}{n}\right) \right| = \frac{1}{2^{\varphi(n)}} \text{ гэж батал.}$$

ДБ-А3 (А.Ганбат). $a_0 = 2, a_k = 2a_{k-1}^2 - 1, k \geq 1$ дараалал өгөгдөв. $p \mid a_n$ байх анхны тооны хувьд $12 \mid p - 1$ байвал $p \equiv 1 \pmod{2^{n+2}}$ гэж батал.

ДБ-В1 (М.Батбилэг). $\triangle ABC$ -ны AB, BC, CA талууд дээр харгалзан C_1, A_1, B_1 цэгүүдийг $\triangle ABC \sim \triangle C_1 A_1 B_1$ байхаар авав. Тэгвэл

$$\frac{AC_1}{C_1 B} = \frac{BA_1}{A_1 C} = \frac{CB_1}{B_1 A}$$

гэж батал.

ДБ-В2 (М.Батбилэг). $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ тоонууд нь гүдгэр n өнцөгтийн орой болно. Тэгвэл түүний дотор орших аливаа $z_0 \in \mathbb{C}$ ба $\forall \varepsilon > 0$ тооны хувьд $|a_1(z_1 - z_0) + \dots + a_n(z_n - z_0)| < \varepsilon$ байх $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ олдоно гэж батал.

ДБ-В3 (У.Батзориг). $\forall n \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд $2^n a + b \mid c^n + 1$ байх бүх $a, b, c \in \mathbb{N}$ -г ол.

1.26 ММО-44, Дундын багшийн IV даваа бодолт

ДБ-А1. Өгөгдсөн рекуррент харьцаанаас $a_n < a_{n+1} < a_n + \frac{1}{a_n^2}, n \geq 1$ болно. Үүнийг ашиглан $a_n^3 \leq 4n$ болохыг индукцээр хялбархан баталж болно. Үнэндээ ямар нэг $n \geq 2$ -ийн хувьд $a_n^3 \leq 4n$ бол $2 = a_2 \leq a_n \leq \sqrt[3]{4n}$ гэе. $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ функц $[2, \infty)$ мужид өсөх тул

$$a_{n+1} < f(a_n) \leq f(\sqrt[3]{4n}) = \frac{4n+1}{(\sqrt[3]{4n})^2}.$$

Түүнчлэн

$$(4n+1)^3 = 64n^3 + 48n^2 + 16n + 1 < 64n^3 + 64n^2 = (4n)^2(4n+4)$$

тул $a_{n+1} < \sqrt[3]{4n+n}$. $n = 21295$ үед

$$a_{21295} \leq \sqrt[3]{4 \cdot 21295} < 44.$$

ДБ-А2. $\zeta = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ гэе. Тэгвэл дурын a бүхэл тооны хувьд

$$|1 + \zeta^a| = 2 \left| \cos \frac{\pi a}{n} \left(\cos \frac{\pi a}{n} + i \sin \frac{\pi a}{n} \right) \right| = 2 \left| \cos \frac{\pi a}{n} \right|.$$

Иймд

$$2^{\varphi(n)} \left| \prod_{i=1}^{\varphi(n)} \cos \left(\frac{a_i \cdot \pi}{n} \right) \right| = \left| \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (1 + \zeta^{a_i}) \right|.$$

n дүгээр дугуй олон гишүүнт $\Phi_n(x) = \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - \zeta^{a_i})$ -г авч үзье. Дугуй олон гишүүнтийн хувьд $|\Phi_n(-1)| = 1$ (ММК-II, §10.6-г үз) чанар биелэх тул батлах зүйл батлагдав.

ДБ-А3. $a_n = \frac{1}{2}((2 + \sqrt{3})^{2^n} + (2 - \sqrt{3})^{2^n})$ болохыг индукцээр хялбархан харуулж болно. g нь нэгжийн n зэргийн анхны язгуур ба $x = g^{(p-1)/2}$ гэе. Тэгвэл

$$x^{12} - 1 = (x^6 - 1)(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

$x^6 \equiv -1 \pmod{p}$, $x^2 \not\equiv -1 \pmod{p}$ тул $x^4 - x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Үүнийг $4x^6$ -аар үржүүлбэл

$$(2x^5 - x^3)^2 = x^6 \cdot (2x^2 - 1)^2 \equiv (-1) \cdot (-3) = 3 \pmod{p}.$$

$m = 2x^5 - x^3$ гэвэл

$$2a_n = (2 + \sqrt{3})^{2^n} + (2 - \sqrt{3})^{2^n} \equiv (2 + m)^{2^n} + (2 - m)^{2^n} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Үүнийг $(2 + m)^{2^n}$ -ээр үржүүлбэл

$$(2 + m)^{2^{n+1}} \equiv -4(4 - m^2)^{2^n} \equiv -1 \pmod{p}$$

Иймд $2 + m$ -ийн p модулиарх эрэмбэ нь 2^{n+2} болно. Иймд $2^{n+2} \mid (p - 1)$.

ДБ-В1. Бодлого алдаатай болохыг хялбархан шалгаж болно. Зохиогчийн зүгээс нийт багш нараас хүлцэл өчиж байна.

ДБ-В2. Лемм. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ бол аливаа $\varepsilon_0 > 0$ тоо бүрийн хувьд

$$\{n\alpha\}, \{n\beta\} \in [0, \varepsilon_0] \cup [1 - \varepsilon_0, 1)$$

байх $n \in \mathbb{N}$ тоо олдоно.

Баталгаа. $\alpha \in \mathbb{R}^+$ бүрийн хувьд $\{n\alpha\} \in [0, \varepsilon_0/2] \cup [1 - \varepsilon_0/2, 1)$ байх $n \in \mathbb{N}$ тоо төгсгөлгүй олон олдоно гэж баталъя. $\varepsilon_0/2 > \frac{1}{m}$ байх $m \in \mathbb{N}$ олдох ба $[0, 1)$ завсрыг $[0, \frac{1}{m}) \cup [\frac{1}{m}, \frac{2}{m}) \cup \dots \cup [\frac{m-1}{m}, 1)$ гэсэн m ширхэг завсруудад хуваая. Дирихлейн зарим ёсоор $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{(m+1)\alpha\}$ тоонуудыг ядаж хоёр нь хуваалтын хэрчмүүдийн нэгд нь зэрэг харъяалагдана. Тэдгээр нь $\{k\alpha\}$ ба $\{s\alpha\}$ байг. ($k > s$). Тэгвэл $\varepsilon_0 > |\{k\alpha\} - \{s\alpha\}|$ тул $\{(k-s)\alpha\} \in [0, \varepsilon_0/2] \cup [1 - \varepsilon_0/2, 1)$ болно. Одоо аль ч хоёрынх нь ялгавар $k-s$ -ээс ялгаатай байх $n_1, \dots, n_{m+1}$ тоонуудын хувьд өмнөх санааг давтвал нөхцөлийг хангах өөр натурал дугаарыг сонгож чадна. Иймд индукцээр $\{m_k\alpha\} \in [0, \varepsilon_0/2] \cup [1 - \varepsilon_0/2, 1)$ байх хангалттай олон $m_k \in \mathbb{N}$ натурал тоонууд олдоно. Одоо леммийн баталгааг хийе. $m_1, \dots, m_k, \dots \in \mathbb{N}$ -үүд нь $\{m_k\alpha\} \in [0, \varepsilon_0/2] \cup [1 - \varepsilon_0/2, 1)$ байх натурал тоонууд байг. Тэгвэл $\{n_1\beta\}, \dots, \{n_{m+1}\beta\}$ тоонуудын дотор Дирихлейн зарим ёсоор хуваалтын нэг хэрчимд орох 2 дугаар олдох ба дээрхийн адилаар (тэр нь n_s, n_k болог) $\{(n_s - n_k)\beta\} \in [0, \varepsilon_0/2] \cup [1 - \varepsilon_0/2, 1)$ байх ба $\{(n_s - n_k)\beta\} \in [0, \varepsilon_0] \cup [1 - \varepsilon_0, 1)$ байх нь ойлгомжтой юм. Лемм батлагдав. $\square$

Одоо бодлогоо бодъё. $z_0 \equiv 0$ буюу координатын эх гэе. Юуны өмнө өгөгдсөн n цэгийг 3 болтол цөөрүүлж болно гэдгийг баталъя. Θ -х өгөгдсөн цэгүүдийг ашиглан

$$\begin{cases} m_1 z_1 + \dots + m_s z_r = a \\ m_{r+1} z_{r+1} + \dots + m_{r+s} z_{r+s} = b \\ m_{r+s+1} z_{r+s+1} + \dots + m_n z_n = c \end{cases}$$

цэгүүд нь координатын эхийг дотроо агуулдаг байхаар хувааж болно гэж баталъя. (Энд $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$). Гүдгэр олон өнцөг нь координатын эхийг агуулах тул координатын эх ямар нэгэн $A'B'C'$ гурвалжны дотор оршино. $\overrightarrow{OB'}$ ба $\overrightarrow{OC'}$ векторуудын хооронд орших векторуудын натурал шугаман эвлүүлэг нь $\overrightarrow{OA'}$ -тэй бараг коллинеар байхаар натурал тоон коэффициентуудыг сонгож болно. (Баталгааг индукцээр хялбархан батлагдана) уг нийлбэрийг $\overrightarrow{OA}$ гэе. Үүний адилаар $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ векторуудыг ABC гурвалжны дотор O цэгийг агуулсан байхаар олж чадна. O нь гурвалжны дотоод цэг тул

$$\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \quad (1)$$

байхаар $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ тоонууд олдоно. Лемм ёсоор $\{n\alpha\} \{n\beta\} \in [0, \varepsilon_0) \cup [1 - \varepsilon_0, 1)$ байх $n \in \mathbb{N}$ тоо олдоно. (1)-ын хоёр талыг n -ээр үржүүлбэл

$$n\alpha \overrightarrow{OA} + n\beta \overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

болох ба

$$\begin{aligned} & |[[n\alpha]]\overrightarrow{OA} + [[n\beta]]\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OC}| = \\ & = |([n\alpha] - n\alpha)\overrightarrow{OA} + ([n\beta] - n\beta)\overrightarrow{OB}| \leq \varepsilon_0(OA + OB) < \varepsilon \end{aligned}$$

байхаар ε_0 -г сонгож болно. Иймд бодлого батлагдав. (Энд $[[x]]$ -ээр x тоонд хамгийн ойрхон бүхэл тоог тэмдэглэлээ.)

ДБ-ВЗ. Эхлээд $a+b$ нь 2-ийн зэрэг болохыг баталъя. $p \mid a+b$ байх p сондгой анхны тоо байдаг гэе. Тэгвэл $2^{p-1}a + b \equiv a + b \equiv 0 \pmod{p}$ болох ба эндээс $c^{p-1} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ болж зөрчил үүснэ.

Одоо $b = 2^r \cdot b_1$, b_1 сондгой гэе. $b_1 = 1$ гэж харуулъя. $c^{2^m} + 1$ тооны сондгой анхны хуваагч p -ийн хувьд $p \equiv 1 \pmod{2^{m+1}}$ нөхцөл биелдэг. Иймээс $2^{2^m-r}a + b_1 \equiv 1 \pmod{2^{m+1}}$ буюу хангалттай том m -ийн хувьд $b_1 \equiv 1 \pmod{2^{m+1}}$. Иймд $b_1 = 1$ болов. Хэрэв $b = 2^r$ бол $a+b$ нь 2-ийн зэрэг тул a нь 2^r -д хуваагдана. Иймд $b = 1$ тохиолдлыг авч үзэх хэрэгтэй болж байна.

Хэрэв $b = 1$ бол $a = 1$ гэж харуулъя. $p > c+1$ байх p анхны тоо авч үзье. $c^p + 1$ тооны q гэсэн анхны хуваагч нь эсвэл $c+1$ -ийн хуваагч эсвэл $q \equiv 1 \pmod{p}$ болохыг харуулахад хүнд биш. Иймд

$$\frac{2^pa + 1}{(2^pa + 1, c+1)} \equiv 1 \pmod{p}$$

буюу $(2^pa + 1, c+1) \equiv 2^pa + 1 \equiv 2a + 1 \pmod{p}$ байна.

Нөгөө талаас $(2^pa + 1, c+1) \leq c+1 < p$ болох ба $(2a+1) \mid (c+1)$ учраас $2a+1 \leq c+1 < p$. Иймд $(2^pa + 1, c+1) = 2a+1$ ба $(2a+1) \mid (2^pa + 1)$ болно.

$$2^pa + 1 = (2a+1)2^{p-1} - 2^{p-1} + 1$$

гэж бичвэл $(2a+1) \mid (2^{p-1} - 1)$ болно. $(2^{p-1} - 1, 2^{q-1} - 1)$ байх q гэсэн том анхны тоо олдохыг хялбархан харж болно. Жишээ нь $q \equiv 3 \pmod{p-1}$ гэж авахад хангалттай. Иймд $2a+1 = 3$ буюу $a = 1$ болно.

Лемм. c, d бүхэл тоонууд нь дурын натурал n -ийн хувьд $d^n + 1$ нь $c^n + 1$ -г хуваадаг гэсэн чанарыг хангадаг бөгөөд $c, d > 1$ бол ямар нэг сондгой k -ийн хувьд $c = d^k$ байна.

Баталгаа. (Marius Cavachi)

$$r_{0,n} = \frac{c^n + 1}{d^n + 1}$$

ба $\{r_{k,n}\}$ дарааллыг дараах рекуррент харьцаагаар тодорхойлъё:

$$r_{k+1,n} = d^{k+1} \cdot r_{k,n+1} - c \cdot r_{k,n}.$$

$r_{0,n}$ нь бүхэл учир дарааллын ямар ч гишүүн нь бүхэл байна. Дарааллын эхний гишүүд дараах хэлбэртэй байна.

$$r_{1,n} = \frac{c^{n+1}(d-1) + d(d^n+1) - c(d^{n+1}+1)}{(d^{n+1}+1)(d^n+1)},$$

$$r_{2,n} = \frac{c^{n+2}(d-1)(d^2-1)}{(d^{n+1}+1)(d^n+1)}.$$

Ерөнхий тохиолдолд дараах тэнцлийг индукцээр баталж болно.

$$r_{k,n} = \frac{c^n p_k + Q_k(d^n)}{(d^{n+k}+1)(d^{n+k-1}+1) \dots (d^n+1)},$$

энд $p_k = c^k(d-1)(d^2-1) \dots (d^k-1)$ ба $Q_k(x)$ нь дараах рекуррент харьцаагаар тодорхойлогдоно.

$$Q_{k+1}(x) = d^{k+1}Q_k(d \cdot x)(x+1) - cQ_k(x)(d^{k+1}x+1).$$

$Q_k(x)$ -ийн зэрэг k -аас хэтрэхгүй. Эхлээд ямар нэг k -ийн хувьд $c = d^k$ гэж баталъя. Эсрэгээс нь ямар нэг k -ийн хувьд $d^k < c < d^{k+1}$ гэж үзье. Ерөнхий тохиолдолд олсон тэнцлээс

$$|r_{k,n}| < \left| \frac{c^n p_k + Q_k(d^n)}{d^{n(k+1)}} \right| \leq p_k \left(\frac{c}{d^{k+1}} \right)^n + \left| \frac{Q_k(d^n)}{(d^n)^{k+1}} \right|.$$

$c < d^{k+1}$ учир $n \rightarrow \infty$ үед $\left(\frac{c}{d^{k+1}} \right)^n \rightarrow 0$ байна. Түүнчлэн $\deg Q_k \leq k$ учраас $\frac{Q_k(d^n)}{(d^n)^{k+1}}$ нь 0 рүү тэмүүлнэ. Иймд хангалттай том n -ийн хувьд $r_{k,n} = 0$ болох ба энэ нь $c^n p_k + Q_k(d^n) = 0$ буюу

$$p_k \left(\frac{c}{d^k} \right)^n + \frac{Q_k(d^n)}{(d^n)^k} = 0.$$

Гэвч $c > d^k$ тул $n \rightarrow \infty$ үед $\left(\frac{c}{d^k} \right)^n \rightarrow \infty$ ба $\frac{Q_k(d^n)}{(d^n)^k}$ нь тогтмол тоо руу тэмүүлнэ. Эндээс $p_k = 0$ болж зөрчилд хүрнэ. Хэрэв $c = d^k$ бол $d^{n^k} + 1 \equiv (-1)^k + 1 \equiv 0 \pmod{d^n + 1}$ болох ба k нь сондгой болно. $\square$

Леммээс $b = 1$ үед $c = 2^k$ (k -сондгой) болох ба c тэгш учир $b = 2^r$, $r \geq 1$ үед шийдгүй болно.

Mongolian IMO team selection tests

2.1 Test 1, 2008.05.12

TST.1.1 Let ABC be an acute-angled triangle. Let O be the circumcenter, H is orthocenter and D is the foot of its altitude CH . The perpendicular line to OD at D meet the side BC at E . Prove that, $\angle DHE = \angle ABC$.

(IMO 1996 shortlist problem)

TST.1.2 $a > b > c > d$ are positive integers, such that $a + b - c + d$ divides $ac + bd$. Prove that, if m and n are positive integers and n is odd, then $a^n b^m + c^m d^n$ is not prime.

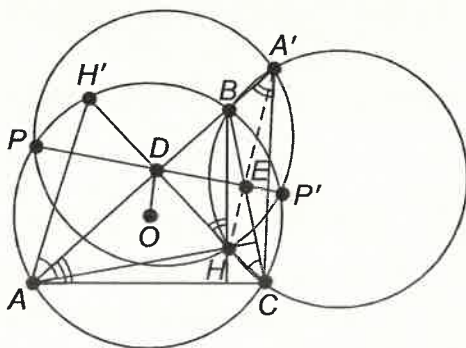
(proposed by G. Batzaya, inspired by IMO 2001 problem)

TST.1.3 Given a circumscribed trapezium $ABCD$, with circumcircle ω and 2 parallel sides $BC < AD$. Tangent line of circle ω , at the point C , meets the line AD at point P . Let PE is another tangent line of circle ω and $E \in \omega$. The line BP meets circle ω at point K . The line passing through the point C , parallel to line AB , intersects with AE and AK by points N and M respectively. Prove that, M is mid-point of segment CN .

(proposed by B. Battsengel)

TST.1.1 Denote by $\omega(XYZ)$, the circumcircle of triangle XYZ . Suppose that, the line AB meets the circle $\omega(BHC)$ at another point A' , the line CH meets the circle $\omega(ABC)$ at another point H' and the line perpendicular to OD , passing through point D meets the circle $\omega(ABC)$ at points P, P' . Then, one has $\angle BA'C = \angle BHD = \angle BAC$ and since $CD \perp AA'$, we get $AD = A'D$. Also $\angle H'AB = \angle H'CB = \angle HAD$ and $CD \perp AA'$ imply that, $HD = H'D$. Hence, points P, A, H', P' are symmetric to points P', A', H, P with respect to point

D. Since P, A, H', P' are cyclic points, P', A', H, P are cyclic too.



Now consider 3 circles $\omega(ABC)$, $\omega(BHC)$ and $\omega(PHP')$. Radical axis of circles $\omega(ABC)$ and $\omega(BHC)$ is the line BC , radical axis of circles $\omega(ABC)$ and $\omega(PHP')$ is the line PP' and these 2 radical axes intersect at the point E . By the notion of radical center of 3 circles, radical axis HA' of circles $\omega(BHC)$ and $\omega(PHP')$ should pass through the point E . Thus, points H, E, A' are collinear. Now from $\angle CBA' = \angle CHA'$, we get $\angle CBA = \angle DHA' = \angle DHE$.

TST.1.2 Denote $N = a + b - c + d$. It is obvious that $N > 1$. Since $a + b \equiv c - d \pmod{N}$, one has

$$ab + cd = c(a + b) - b(c - d) \equiv (a + b)(c - b) \pmod{N},$$

which shows that, $(a + b)(b - c)$ is divisible by N . Since

$$a + b - N = c - d > 0$$

and

$$a + b - 2N = 2c - b - a - 2d < 0,$$

we have $N \nmid (a + b)$. This shows that, $(N, b - c) > 1$. Let us choose a prime number p such that $p \mid N$ and $p \mid (b - c)$. From the congruence $a + d \equiv c - b \pmod{N}$, we get prime p also divide $a + d$. So, we have

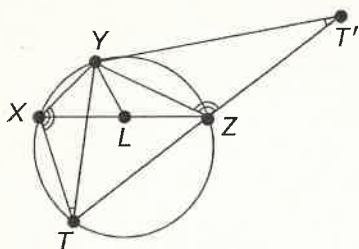
$$b \equiv c \pmod{p}, a \equiv -d \pmod{p}.$$

Hence,

$$b^n \equiv c^n \pmod{p}, a^n \equiv -d^n \pmod{p}$$

because n is odd. Thus, $a^n b^n + c^n d^n$ is divisible by prime p and it is obvious, that $p \leq b - c < a^n b^n + c^n d^n$.

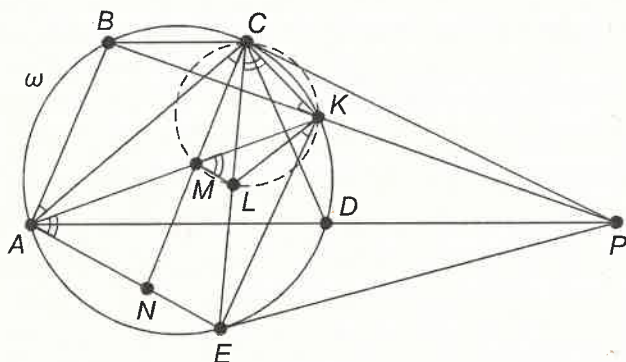
TST.1.3 We need following fact:



Lemma: Given a circumscribed quadrilateral $XYZT$. If $XY \cdot ZT = YT \cdot TX$, then for midpoint L of diagonal XZ , one has $\angle XYL = \angle TYZ$.

Proof of lemma: Choose a point T' on the opposite ray of $[ZT)$, such that $\angle YT'Z = \angle YTX$. Since $\angle YZT' = \angle YXT$, the triangles $\triangle YZT'$, $\triangle YXT$ are similar. Hence,

we have $\frac{YZ}{ZT'} = \frac{YX}{XT}$ and the condition given in the lemma implies that $\frac{YZ}{ZT} = \frac{YX}{XT}$ or $ZT' = ZT$. Furthermore, from $\angle YXZ = \angle YTZ = \angle YTT'$ and $\angle YZX = \angle YTX = \angle YT'T$, the triangles $\triangle YXZ$, $\triangle YTT'$ are similar. Since the points L and Z are midpoints of sides XZ and TT' of these triangles, the triangles $\triangle XYL$, $\triangle TYZ$ are also similar. This implies $\angle XYL = \angle TYZ$.



Since CP is tangent to the circle ω , the triangles $\triangle BCP$, $\triangle CKP$ are similar. Hence, we have $\frac{BC}{CK} = \frac{BP}{CP}$. Similarly, we can show that, $\frac{BE}{EK} = \frac{BP}{EP}$. From this 2 relation, we get $\frac{BC}{CK} = \frac{BE}{EK}$, because $CP = EP$. Thus, quadrilateral $EKCB$ satisfies the condition of lemma. By the lemma, $\angle EKL = \angle BKC$ for the midpoint L of the segment EC . $\angle BKC = \angle BAC$, because points A, B, C, K are cyclic. $\angle BAC = \angle ACN$, because lines AB, CN are parallel. Since $\angle ACE = \angle AKE$, this gives us

$$\angle MCL = \angle NCE = \angle ACE - \angle ACN = \angle AKE - \angle LKE = \angle AKL = \angle MKL$$

or points M, C, K, L are cyclic. Hence, $\angle KML = \angle KCL = \angle KCE = \angle KAE$,

and this implies that, the lines ML , AE are parallel and M is midpoint of segment CN .

2.2 Test 2, 2008.05.17

TST.2.1. Find all functions $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfying

$$f(x+y-z) + f(2\sqrt{xz}) + f(2\sqrt{yz}) = f(x+y+z)$$

for every $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ such that $x+y \geq z$.

(proposed by A. Ganbat)

TST.2.2. Given positive integers $m < n$. In an array of size $n \times n$ the numbers $1, 2, \dots, n^2$ are arranged. In each row, cells with m large numbers are colored in red. In each column, cells with m large numbers are colored in blue. Find the minimum number of cells that colored both in red and blue.

(proposed by B. Battsengel, inspired by Chinese test problem)

TST.2.3. Find the maximal possible value of constant C such that

$$x^3 + y^3 + z^3 + C(xy^2 + yz^2 + zx^2) \geq (C+1)(x^2y + y^2z + z^2x)$$

holds for every non-negative real numbers x, y, z .

(proposed by B. Battsengel)

TST.2.1 Substituting $x = y = z = 0$ in the functional equation, we get $3f(0) = f(0)$ or $f(0) = 0$. Now substituting $y = 0$, we get

$$f(x-z) + f(2\sqrt{xz}) = f(x+z)$$

for all $x, z \geq 0$ such that, $x \geq z$. It is easy to show that, for each $a, b \geq 0$ there exist x, z such that, $x-z = a$ and $2\sqrt{xz} = b$. Note that, for such x, z , one has $x+y = \sqrt{a^2+b^2}$. Hence, we get

$$f(a) + f(b) = f(\sqrt{a^2+b^2})$$

for all $a, b \geq 0$. Now consider the function $g(x) = f(\sqrt{x})$. Then, we have

$$g(a) + g(b) = g(a+b)$$

for all $a, b \geq 0$. It is well known that, if $g(a) \geq 0$ for all $a \geq 0$, then this Cauchy functional equation has solutions only $g(x) = C \cdot x$ for some constant $C \geq 0$. Thus, solutions of our functional equation are $f(x) = C \cdot x^2$ for some constant $C \geq 0$.

TST.2.2. Call red and blue cell "purple" and denote the number of purple cells in the table A by $m(A)$. We will show that, $m(A) \geq m^2$. Order the numbers in j -th column as $a_1^{(j)} > a_2^{(j)} > \dots > a_n^{(j)}$ and without loss of generality, assume that,

$$x = a_{m+1}^{(1)} = \max_{1 \leq j \leq n} a_{m+1}^{(j)}.$$

Suppose that, there is at least one blue but not red cell in 1-st column. Let $a = a_k^{(1)}$ be the number, written in that cell. Note that, $k \leq m$. Consider m -th largest number $b = a_e^{(t)}$, written in the same row with a . Since the cell with a is not red, we have $b > a$. Let $y = a_{m+1}^{(t)}$. Then by assumption, we have $b > a > x > y$. Now exchange the position of a with b and denote the resulting table by A' . $b > a > x > y$ implies that, cells with x, y remain non blue by the exchange. Also, it implies that, the cells with b are purple in A and A' . Hence, we get $m(A') = m(A)$. Repeating this process, we get a table A'' such that, its blue cells in 1-st column are all purple and $m(A'') = m(A)$.

Now delete 1-st column from table A'' and do the same procedure to new table...so on. Finally, we arrive to a table such that, its blue cells in first m column are all purple. This shows $m(A) \geq m^2$. It is easy to construct a table A , with exactly $m(A) = m^2$ purple cells. For example, one can write the numbers $(i-1)n+1, (i-1)n+2, \dots, in$ in i -th row in increasing order.

TST.2.3 Suppose that, $\min\{x, y, z\} = x$ and $y = x + p, z = x + q$ for some $p, q \geq 0$. Substituting this into given inequality, one gets the inequality

$$2(p^2 - pq + q^2)x + p^3 + q(q^2 - p^2) + Cpq(q - p) \geq 0$$

satisfied for all $x, p, q \geq 0$. Note that, $p^2 - pq + q^2 > 0$ for all p, q . So,

$$p^3 + q(q^2 - p^2) + Cpq(q - p) \geq 0$$

holds for all $p, q \geq 0$. When $q \geq p$, this inequality holds for all non-negative C . In the case when $p < q$, we find

$$C \leq \frac{p^3 + q(q^2 - p^2)}{pq(p - q)} \text{ or } C \leq \frac{u^3 - u^2 + 1}{u(u - 1)}$$

for $u = \frac{q}{p}$. Thus, C is bounded by the minimal value of function $f(u) = \frac{u^3 - u^2 + 1}{u(u - 1)}$ in the interval $(1, \infty)$. One can calculate this minimal value

$$\min_{u \in (1, \infty)} f(u) = f\left(\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}\right) = \frac{\sqrt{13 + 16\sqrt{2}} - 1}{2} = 2,4844 \dots$$

in the usual manner: taking derivative of function $f(u)$ and finding its extremal values.

2.3 Test 3, 2008.05.22

TST.3.1. An integer number a is divisible by prime p such that $p \equiv \pm 3 \pmod{8}$. Show that the sequence $a_n = 2^n + a$ for $n \geq 0$ has only finitely many perfect squares.

(proposed by B. Battsengel)

TST.3.2. A quadrilateral $ABCD$ is inscribed in a circle with diameter BD . Let A' be the point symmetric to A with respect to line BD and B' be the point symmetric to B with respect to line AC . Prove that the line connecting points $P = A'C \cap BD$ and $Q = A'B \cap CD$ is perpendicular to line AC .

(proposed by G. Batzaya)

TST.3.3. Prove that the equation

$$(x+1)^n + (x+2)^n + \cdots + (x+m)^n = (y+1)^{2n} + (y+2)^{2n} + \cdots + (y+m)^{2n}$$

has only finitely many positive integer solutions for each integers $m, n > 1$.

(proposed by B. Battsengel)

TST.3.1. Suppose that, $2^n + a = x^2$. If n is an odd number, then restricting this equation modulo p , one gets $2 \equiv y^2 \pmod{p}$ for some integer y . This contradicts to the fact, that 2 is non-quadratic residue modulo prime p such that $p \equiv \pm 3 \pmod{8}$. Hence, n can be only even number. In this case, we can rewrite the equation in the form

$$a = (x - 2^{n/2})(x + 2^{n/2}).$$

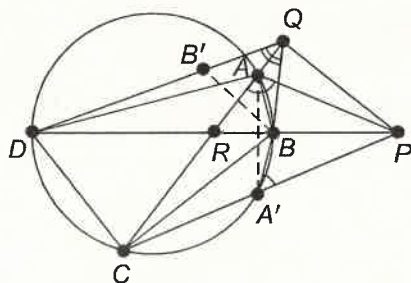
In particular, this equation implies $|a| \leq 2^{n/2}$, that n is bounded.

TST.3.2. We will use following well known property of Apollonius circles:

Given a points A, B, C, D lying on the line l in this order and a point X not lying on l . If two of following 3 statements are true then the third is also true:

- (1) Points (A, B, C, D) are harmonic,
- (2) $\angle AXB = \angle BXC$,

(3) $\angle BXD = 90^\circ$.



Let $R = AC \cap BD$. Since quadrilateral $ABA'C$ is cyclic, we have $\angle BAR = \angle BAC = \angle BA'P = \angle BAP$. By the fact noted before, points (P, B, R, D) are harmonic because of $\angle BAD = 90^\circ$. Since B, B' are symmetric points with respect to line AC , we have $\angle BQR = \angle B'QR = \angle DQR$. Again by the fact noted before, we get $\angle RQP = 90^\circ$, that is $PQ \perp AC$.

TST.3.3. First, we note following elementary fact:

For a polynomial $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, if its coefficient of leading term is positive then there exist only finitely many positive integers x such that $f(x) \leq 0$.

By arithmetic mean and n -th degree mean inequality, one has

$$\sqrt[n]{\frac{(y+1)^{2n} + \dots + (y+m)^{2n}}{m}} > \frac{(y+1)^2 + \dots + (y+m)^2}{m}$$

$$= y^2 + (m+1)y + \frac{(m+1)(2m+1)}{6}$$

If we denote $A = \frac{(m+1)(2m+1)}{6}$, then this inequality implies that, $x + m > y^2 + (m+1)y + A$ for any solution (x, y) of the equation. Now we show that, the number of solutions of the equation such that $x > y^2 + (m+1)y + B$ is finite for $B = \frac{(n+1)(m^2-1)}{6} + 1$. If (x, y) is solution of the equation such that $x > y^2 + (m+1)y + B$, then we have

$$(y+1)^{2n} + \dots + (y+m)^{2n}$$

$$> (y^2 + (m+1)y + B + 1)^n + \dots + (y^2 + (m+1)y + B + m)^n$$

First 3 terms of left hand side polynomial are

$$my^{2n} + \binom{2n}{1} \frac{m(m+1)}{2} y^{2n-1} + \binom{2n}{2} \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} y^{2n-2}$$

and first 3 terms of right hand side polynomial are

$$my^{2n} + \binom{n}{1} m(m+1)y^{2n-1} + \left(\binom{n}{1} \left(mB + \frac{m(m+1)}{2} \right) + \binom{n}{2} m(m+1)^2 \right) y^{2n-2}.$$

Terms containing y^{2n} , y^{2n-1} cancel from both sides and our assumption $B > \frac{(n+1)(m^2-1)}{6}$ implies that, the coefficient of terms with y^{2n-2} in right hand side polynomial is larger. Hence, from the fact noted before, we can say that, the number of positive integers y satisfying the inequality is finite. For each such y , there exist at most n number of x satisfying the equation. The rest, we have to prove is the equation has only finitely many solutions such that $x + m \geq y^2 + (m+1)y + A$ and $x \leq y^2 + (m+1)y + B$. Substituting $x = y^2 + (m+1)y + C$ in the equation, we get for each C such that $A - m \leq C \leq B$, the equation has at most $2n - 2$ solutions.

2.4 Test 4, 2008.05.27

TST.4.1. Someone wants to fill the table 4×4 by nonnegative integers in such way that, the sum of the numbers in each row and column is equal to 3. How many ways of doing this?

(proposed by B. Battsengel)

TST.4.2. For a permutation $a_1, a_2, \dots, a_n$ of numbers $1, 2, \dots, n$ we call a pair (a_i, a_j) is *inversed pair* if $i < j$ and $a_i > a_j$.

a) Show that there exist $(n-1)!$ exactly permutations of numbers $1, 2, \dots, n$ those number of inversed pair is divisible by n .

b) If $n = 4k + 3$ for some non negative integer k , then show that there exist exactly $\frac{(n-1)!}{2}$ permutations of numbers $1, 2, \dots, n$ those number of inversed pair is divisible by $2n$.

(proposed by B. Battsengel)

TST.4.3. Given a circle $\Omega(O, R)$ and a circle $\omega(I, r)$, lying inside of the circle Ω . For a point X lying on the circle ω , tangent line to the circle ω , at point X , meets the circle Ω at points A and B . A line passing through point X and perpendicular to line AI meets the circle Ω at another point Y . Denote by C the symmetric point of I with respect to line XY . Find the locus of circumcenter of triangle ABC , when the point X varies on the circle ω .

(proposed by G. Batzaya)

TST.4.1 We will count tables satisfying given property, considering case by case. First, consider a table filled only by numbers 0 and 1. In this case, we must choose one cell in each row and each column to write over it 0. First cell has 16 possible choice, then second cell has 9 possible choice. . . , so, number of such table is $\frac{16 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 1}{4!} = 24$.

Consider a table that contains at least one 2 and having no 3's.

2	a	b	c
d			
e			
f			

a) Suppose that, such table contains only one 2. The cell containing 2 has 16 possible choice. Each set of cells $\{a, b, c\}$ and $\{d, e, f\}$ shown in figure contains one 1's and other part of the table is filled out uniquely. This 2 cells have $3 \cdot 3 = 9$ possible choices. Thus, there is $16 \cdot 9 = 144$ number of such table.

2	a		
b	2	c	d
	e		
	f		

b) Suppose that, table contains exactly two 2's. Since cells containing 2 do not lie in the same column and row, these two cells have $\frac{16 \cdot 9}{2!} = 72$ possible choices. It is easy to check that, cells a and b shown in figure contain only 0's. Hence, each set of cells $\{c, d\}$ and $\{e, f\}$ should contain one 1's and other part of table is filled out uniquely. So, number of tables in this case is $72 \cdot 2 \cdot 2 = 288$.

2	a	b	
c	2	d	
e	f	2	

c) Suppose that, table contains exactly three 2's. These 3 cells have $\frac{16 \cdot 9 \cdot 4}{3!} = 96$ possible choices. It is easy to check that, cells $\{a, b, c, d, e, f\}$ shown in figure contain at most one 1's and other part of table is filled out uniquely. So, number of tables in this case is $96 \cdot 7 = 672$.

2	a	b	c
d	2		
e		2	
f			2

d) Suppose that, table contains exactly four 2's. These 4 cells have $\frac{16 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 1}{4!} = 24$ possible choices. Each set of cells $\{a, b, c\}$ and $\{d, e, f\}$ shown in figure contains one 1's and other part of table is filled out uniquely. So, number of tables in this case is $24 \cdot 3 \cdot 3 = 216$.

Finally, consider a table that contains at least one 3.

a) Suppose that, table contains only one 3. The cell containing 3 has 16 possible choices. If we delete row and column containing this cell, then resulting 3×3 table has no 3's and its sum of each row and column is 3. There is one such table all cells filled by 1's.

2	a	b
	2	
		2

Otherwise, it is easy to check that, such table contains at least two 2's. If this 3×3 table contains exactly two 2's, then cells containing 2 have $\frac{9 \cdot 4}{2!} = 18$ possible choices and other part of the table is filled out uniquely. If this 3×3 table contains exactly three 2's, then cells containing 2 have $\frac{9 \cdot 4 \cdot 1}{3!} = 6$ possible choices. Set of cells $\{a, b\}$ shown in figure should contain one 1's and other part of table is filled out uniquely. So, in total, number of tables in this case is $16(1 + 18 + 6 \cdot 2) = 496$.

b) Suppose that, table contains exactly two 3's. Two cells containing 3 have

a	b

$\frac{16 \cdot 9}{2!} = 72$ possible choices. If we delete 2 rows and 2 columns containing these cells, then resulting 2×2 table has no 3's and its sum of each row and column is 3. Set of cells $\{a, b\}$ shown in figure should contain one 2's and other part of table is filled out uniquely. So, the number of tables in this case is $72 \cdot 2 \cdot 2 = 288$.

c) Suppose that, table contains more than three 2's. It is easy to check that, such table must contain four 3's. These 4 cells have $\frac{16 \cdot 9 \cdot 41}{4!} = 24$ possible choices.

Thus, in total, we have $24 + 288 + 672 + 216 + 496 + 288 + 24 = 2008$ different tables satisfying the property.

TST.4.2. a) We will show that, there is one-to-one correspondence f between the set of permutations of numbers $1, 2, \dots, n-1$ and the set of permutations of numbers $1, 2, \dots, n$ those number of inversed pair is a multiple of n . Let $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ be a permutation of numbers $1, 2, \dots, n-1$ and let m be its number of inversed pair. Let $m = qn + r$ for some $0 \leq r \leq n-1$. Define

$$f(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = \begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, n & \text{if } r = 0, \\ n, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} & \text{if } r = 1, \\ a_1, \dots, a_{r-1}, n, a_r, \dots, a_{n-1} & \text{if } r < 1. \end{cases}$$

Then number of inversed pair of $f(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ is qn or $q(n+1)$, respectively when $r = 0$ or $r > 0$. This map has obvious inverse map, that forgets about number n .

b) Let $a_1, a_2, \dots, a_n$ be a permutation of numbers $1, 2, \dots, n$. For an index i such that $1 \leq i \leq n-1$, let m_i be the number of inversed pair (a_i, a_j) with

$j > i$. Then, we have $m_i \leq n - i$ for all i . It is well known that, permutation $a_1, a_2, \dots, a_n$ is uniquely determined by $(n - 1)$ -tuple $(m_1, m_2, \dots, m_{n-1})$. By this interpretation, we have to count $(n - 1)$ -tuples $(m_1, m_2, \dots, m_{n-1})$, such that $m_i \leq n - i$ for all i and the sum $m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}$ is divisible by $2n$. Let

$$P(x) = (1 + x + \dots + x^{n-1}) \dots (1 + x + x^2)(1 + x)$$

be the generating function of $(n - 1)$ -tuples $(m_1, m_2, \dots, m_{n-1})$ such that $m_i \leq n - i$ for all i . Then, desired number is equal to the sum of coefficients of terms containing x^k with k is divisible by $2n$ of the polynomial $P(x)$ or equivalently to the sum

$$\frac{1}{2n} \sum_{\xi^{2n}=1} P(\xi)$$

where ξ runs over all roots of unity of degree $2n$. If $\xi^n = 1$ and $\xi \neq 1$, then we have

$$1 + \xi + \dots + \xi^{n-1} = 0,$$

hence $P(\xi) = 0$. Now assume that, $\xi^n = -1$. Note $\left(\frac{1}{\xi}\right)^n = -1$ and

$$P\left(\frac{1}{\xi}\right) = \xi^{\frac{n(n-1)}{2}} P(\xi).$$

Since $n \equiv 3 \pmod{4}$, we have

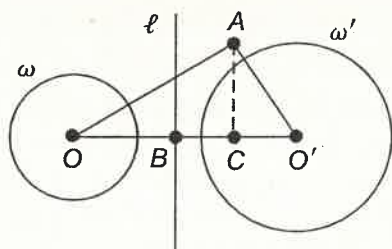
$$\xi^{\frac{n(n-1)}{2}} = (\xi^n)^{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} = -1.$$

Thus, $P(\xi) + P\left(\frac{1}{\xi}\right) = 0$ and desired sum is

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} \sum_{\xi^{2n}=1} P(\xi) &= \frac{1}{2n} \left(P(1) + \sum_{\xi^n, \xi \neq 1} P(\xi) + \frac{1}{2} \sum_{\xi^n=-1} \left(P(\xi) + P\left(\frac{1}{\xi}\right) \right) \right) \\ &= \frac{(n-1)!}{2}. \end{aligned}$$

TST.4.3 Denote by $P_\omega(A)$, the power of point A with respect to circle ω .

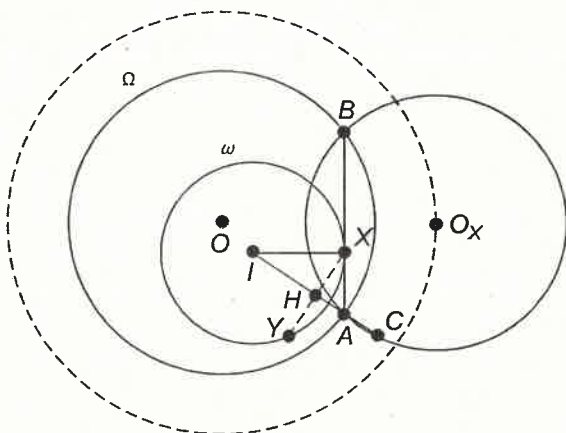
Lemma: Given 2 non-concentric circles. If distance from a point to the radical axis of the circles is then one has $|P_\omega(A) - P_{\omega'}(A)| = 2h \cdot OO'$.



Proof of lemma: Let l be the radical axis of circles. Suppose that $B = l \cap OO'$ and let C be the foot of perpendicular from A to line OO' . Further assume that, the point C lies on the segment $O'B$, which implies $P_\omega(A) \geq P_{\omega'}(A)$. Other cases can be treated similarly. By definition, we have

$$P_\omega(A) - P_{\omega'}(A) = (OA^2 - R^2) - (O'A^2 - R'^2) = (OA^2 - O'A^2) - (R^2 - R'^2)$$

Since $OA^2 - O'A^2 = OC^2 - O'C^2$ and $R^2 - R'^2 = OB^2 - O'B^2 = (OC - h)^2 - (O'C + h)^2$, we get desired result. $\square$



Denote by ω_X the circumcircle of triangle ABC and let O_X be its center. Since $P_\Omega(I) < 0 < P_{\omega_X}(I)$, by lemma one has

$$P_{\omega_X}(I) - P_\Omega(I) = 2 \cdot IX \cdot OO_X.$$

Let H be foot of perpendicular from X to line AI . Triangles $\triangle IXH$, $\triangle IAX$ are similar, hence we have $IH \cdot IA = IX^2$ and

$$P_{\omega_X} = IC \cdot IA = 2 \cdot IH \cdot IA = 2 \cdot IX^2.$$

From this, we can find

$$OO_X = IX - \frac{P_\Omega(I)}{2 \cdot IX} = r + \frac{R^2 - OI^2}{2r},$$

that shows the point O_X lies on the circle centered at O with radius $r + \frac{R^2 - OI^2}{2r}$.

Conversely, any point O' lying on the circle centered at O , with radius $r + \frac{R^2 - OI^2}{2r}$ can be circumcenter of triangle ABC for some point $X \in \omega$. Let us draw a chord of the circle Ω tangent to ω and perpendicular to the line OO' . There is 2 possible choices of such chord and we choose a chord AB , which is close to the point O' . Denote $X = AB \cap \omega$ and let H be foot of perpendicular from X to line AI . Then, we have $IH \cdot IA = r^2$.

Draw a circle ω' centered at O' with radius $O'A = O'B$. Let C be the second intersection point of ω' with the line AI . By the lemma, we have $2r \cdot OO' = P_{\omega'}(I) - P_{\Omega}(I)$. Since $OO' = r - \frac{P_{\Omega}(I)}{2r}$, it implies $P_{\omega'}(I) = 2r^2$ or $IC \cdot IA = 2r^2$. Thus, we have $IC = 2 \cdot IH$. With the fact that $P_{\omega'}(I) > 0$ or the point I lies outside of circle ω' ; this shows that C is symmetric point of I , with respect to point H .

Олон улсын математикийн 49-р олимпиад

Б.Батцэнгэл

Олон улсын математикийн 49-р олимпиад Испани улсын Мадрид хотноо 2008 оны 7 сарын 14–22-ны өдрүүдэд болж өнгөрлөө. Тус олимпиадад манай улсыг төлөөлөн Э.Тэмүгэ, Г.Оюундарь, Н.Бямбажав, Б.Мягмаржав (бүгд 1-р сургууль, 11-р анги), Э.Энхзаяа ("Олонлог" сургууль, 10-р анги), Ө.Зориггоо (1-р сургууль, 10-р анги) нар оролцож, багийн ахлагчаар Ц.Дашдорж, багийн дэд ахлагчаар миний бие оролцсон болно. Манай сурагчид уг олимпиадад харьцангуй сайн оролцож, нийт 106 оноо авч албан бус багийн дүнгээр 97 орноос 29-р байр эзэлсэн юм. Сурагчдын тус олимпиадад хэрхэн оролцсон талаар дараахь хүснэгтээс харна уу.

	A1	A2	A3	B1	B2	B3	Нийт оноо	
Г.Оюундарь	6	5	0	7	7	0	25	Мөнгөн медаль
Э.Тэмүгэ	7	4	0	7	0	0	18	Хүрэл медаль
Н.Бямбажав	7	7	1	7	7	0	29	Мөнгөн медаль
Э.Энхзаяа	7	7	0	0	0	0	14	Шагналт байр
Б.Мягмаржав	5	1	0	3	0	0	9	
Ө.Зориггоо	7	0	0	4	0	0	11	Шагналт байр



Манай багийн сурагчид
Гонгконгийн багийн сурагчидтай
хамт



Сурагч Г.Оюундарь олон
улсын математикийн
олимпиадын 2 удаагийн
алтан медальт Ju Gang Nam
(Өмнөд Солонгос)-ын хамт

Энд сурагч Н.Бямбажав, Э.Энхзаяа нар тус бүр алт, хүрэл медаль авахад ганц хоёрхон оноо дутсан гэдгийг тэмдэглэе. Мөн сурагч Г.Оюундарийн 25 оноогоор мөнгөн медаль хүртсэн амжилт нь манай үе үеийн математикч охидуудын гаргасан хамгийн өндөр амжилт гэдгийг тэмдэглэе.

Бодлогууд

A1. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын цэг H байв. BC талын дундаж цэг дээр төвтэй H цэгийг дайрсан тойрог нь BC шулууныг A_1 ба A_2 цэгүүдэд огтолно. Мөн адилаар CA талын дундаж дээр төвтэй H цэгийг дайрсан тойрог нь CA шулууныг B_1, B_2 цэгүүдэд, AB талын дундаж дээр төвтэй H цэгийг дайрсан тойрог нь AB шулууныг C_1, C_2 цэгүүдэд огтолно. $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал. (ОХУ)

A2. а) $x, y, z = 1$ байх 1-ээс ялгаатай бодит x, y, z тоонуудын хувьд

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

байхыг батал.

б) $x, y, z = 1$ ба дээрхи тэнцэтгэл биш тэнцэлдээ хүрдэг байх 1-ээс ялгаатай рационал тоонуудын төгсгөлгүй олон (x, y, z) гурвал олдохыг батал. (Австри)

A3. $n^2 + 1$ тоо $2n + \sqrt{2n}$ -ээс их анхны тоон хуваагчтай байх төгсгөлгүй олон натурал n тоо олдохыг батал. (Литва)

B1. $w, x, y, z = 1$ байх ямар ч эерэг бодит w, x, y, z тоонуудын хувьд

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

байх бүх $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ (эерэг бодит тоонууд дээр тодорхойлогдсон, эерэг бодит тоон утга авдаг) функцийг ол. (Өмнөд Солонгос)

B2. Натурал n, k тоонууд нь $k \geq n$ ба $k - n$ ялгавар тэгш байх тоонууд. $1, 2, \dots, 2n$ гэж дугаарлагдсан $2n$ ширхэг чийдэнгийн аль нь ч ассан эсвэл унтарсан төлвийн аль нэгэнд байна. Анх бүх чийдэн унтарсан байв. Нэг удаагийн үйлдлээр, яг нэг чийдэнгийн төлөвийг эсрэгээр

сольж болно (ассан байвал унтарсан болгож, унтарсан байвал ассан болгоно).

Анхны байрлалаас 1-ээс n хүртэл дугаартай чийдэнгүүд ассан, $(n + 1)$ -ээс $2n$ хүртэл дугаартай чийдэнгүүд унтраатай байх байрлалд хүргэх k ширхэг үйлдлийн дарааллын тоог N -ээр, харин $(n + 1)$ -ээс $2n$ хүртэл дугаартай чийдэнгүүд төлөвөө огт өөрчлөхгүйгээр 1-ээс n хүртэл дугаартай чийдэнгүүд ассан, $(n + 1)$ -ээс $2n$ хүртэл дугаартай чийдэнгүүд унтраатай байх байрлалд хүргэх k ширхэг үйлдлийн дарааллын тоог M -ээр тэмдэглэе. N/M харьцааг ол. (Франц)

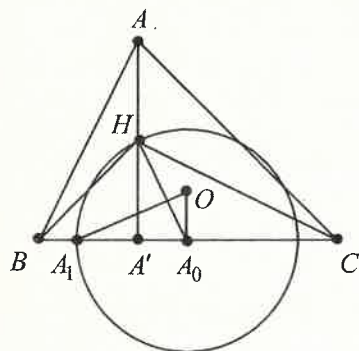
В3. $BA \neq BC$ байх гүдгэр $ABCD$ дөрвөн өнцөгт өгөгдөв. ABC ба ADC гурвалжинд багтсан тойргийг харгалзан ω_1 ба ω_2 гэж тэмдэглэе. AD ба CD шулууныг шүргэдэг ямар нэгэн ω тойрог BA цацрагийг A оройгоос цаана, BC цацрагийг C оройгоос цаана шүргэдэг байв. ω_1 ба ω_2 тойргуудын гадаад шүргэгч шулуунууд ω тойрог дээр огтлолцоно гэдгийг батал. (ОХУ)

Бодлогуудын бодолт

A1. ABC гурвалжны BC, CA, AB талуудын дундаж цэгүүдийг харгалзан A_0, B_0, C_0 гэж, багтаасан тойргийн төвийг O гэж тэмдэглэе. Юуны өмнө $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ цэгүүд эсвэл A_1, A_2, B_1, B_2 цэгүүд нэг тойрог дээр оршдог бол уг тойргийн төв нь гурвалжны талуудын дундаж перпендикуляр шулуунуудын огтлолцлын цэг буюу O цэг байна гэдгийг тэмдэглэе.

1-р бодолт. ABC гурвалжны өнцгүүд α, β, γ бөгөөд багтаасан тойргийн радиус R бол

$$\begin{aligned} OA_1 = OA_2 = OB_1 = OB_2 = OC_1 = OC_2 \\ = R\sqrt{2\cos^2\alpha + 2\cos^2\beta + 2\cos^2\gamma - 1} \end{aligned}$$



байна гэдгийг сурагч Н.Бямбажав, Г.Оюундарь, Э. Тэмүгэ нар дараахь аргаар тооцож баталсан юм. Пифагорын теорем ёсоор

$OA_1^2 = OA_0^2 + A_0A_1^2 = OA_0^2 + HA_0^2$ байх ба $OA_0^2 = R^2 - \frac{1}{4}BC^2$ юм. HA_0 хэрчим нь BHC гурвалжны медиан гэдгээс $HA_0^2 = \frac{1}{4}(2HB^2 + 2HC^2 - BC^2)$ гэж гарна. Иймд

$$OA_1^2 = R^2 + \frac{1}{2}(HB^2 + HC^2 - BC^2)$$

юм.

Гурвалжны A оройгоос татсан өндрийн суурь A' болог. Тэгвэл $BA' = AB \cdot \cos \beta$ бөгөөд $\angle BHA' = \gamma$ тул $HB = \frac{BA'}{\sin \gamma} = \frac{AB}{\sin \gamma} \cdot \cos \beta = 2R \cdot \cos \beta$ байна. Үүнтэй нэгэн адилаар $HC = 2R \cdot \cos \gamma$ болно. Иймд

$$\begin{aligned} OA_1^2 &= R^2 + \frac{1}{2}(HB^2 + HC^2 - BC^2) = R^2(1 + 2 \cos^2 \alpha + 2 \cos^2 \beta - 2 \sin^2 \gamma) \\ &= R^2(2 \cos^2 \alpha + 2 \cos^2 \beta + 2 \cos^2 \gamma - 1) \end{aligned}$$

юм. Бусад хэрчмүүдийн урт нь мөн адил аргаар тооцогдоно.

2-р бодолт. Уг бодлогыг сурагч Э.Энхзаяа, Ө.Зориггоо, Б. Мятмаржав нар дараахь аргаар бодсон юм. Бодлогын нөхцөлд өгөгдсөн харгалзан A_0, B_0, C_0 цэгүүдэд төвтэй, H цэгийг дайрсан 3 тойргийг $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ гэж тэмдэглэе. Нэгэнт $AB \parallel A_0B_0$ ба $CH \perp AB$ тул $CH \perp A_0B_0$ юм. Иймд CH шулуун нь ω_1, ω_2 тойргуудын радикал тэнхлэг юм. Тэгэхлээр эдгээр тойргуудын хувьд C цэгийн зэргүүд хоорондоо тэнцүү $CA_1 \cdot CA_2 = CB_1 \cdot CB_2$ байна. Энэ тэнцэл нь A_1, A_2, B_1, B_2 цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэдгийг харуулж байна. Өмнө харуулснаар тэр тойргийн төв нь ганцхан O цэг байх боломжтой билээ. ■

A2. а) 1-р бодолт. $a = \frac{x}{x-1}, b = \frac{y}{y-1}, c = \frac{z}{z-1}$ гэж тэмдэглэвэл батлах ёстой тэнцэтгэл биш нь $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$ болно. $x = \frac{a}{a-1}, y = \frac{b}{b-1}, z = \frac{c}{c-1}$ тул өгсөн хуыз $= 1$ нөхцөл нь $(a-1)(b-1)(c-1) = abc$ буюу $a + b + c - 1 = ab + bc + ca$ гэсэн нөхцөлд шилжинэ. Эндээс

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) \\ &= (a + b + c)^2 - 2(a + b + c) + 2 = (a + b + c - 1)^2 + 1 \end{aligned}$$

болж $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$ гэдэг нь батлагдана.

2-р бодолт. Сурагч Э.Энхзаяа өгсөн тэнцэтгэл бишээс илүү ерөнхий " a, b, c нь ялгаатай бодит тоонууд бол дурын бодит m, n тоонуудын хувьд

$$\left(\frac{ma - nb}{a - b}\right)^2 + \left(\frac{mb - nc}{b - c}\right)^2 + \left(\frac{mc - na}{c - a}\right)^2 \geq m^2 + n^2 \quad (1)$$

байна" гэсэн тэнцэтгэл бишийг баталж бодсон юм. $\frac{ma - nb}{a - b} = m + \frac{(m-n)b}{a - b}$ ба $\frac{mc - na}{c - a} = n + \frac{(m-n)c}{c - a}$ гэж бичвэл, тэнцэтгэл бишийн зүүн гар талд байгаа илэрхийлэл нь

$$\begin{aligned} &\left(m + \frac{(m-n)b}{a - b}\right)^2 + \left(\frac{mb - nc}{b - c}\right)^2 + \left(n + \frac{(m-n)c}{c - a}\right)^2 \\ &= m^2 + n^2 + \left(\frac{mb - nc}{b - c}\right)^2 + 2(m-n)\left(\frac{mb}{a - b} + \frac{nc}{c - a}\right) \\ &\quad + (m-n)^2\left(\left(\frac{b}{a - b}\right)^2 + \left(\frac{c}{c - a}\right)^2\right) \end{aligned}$$

болно. Одоо энэ илэрхийллийн $m^2 + n^2$ -аас бусад нэмэгдхүүнүүд нийлээд бүтэн квадрат гэж харуулая.

$$\frac{mb}{a - b} + \frac{nc}{c - a} = (m-n)\frac{bc}{(a - b)(c - a)} - a\frac{mb - nc}{(a - b)(c - a)}$$

тул

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{mb-nc}{b-c}\right)^2 + 2(m-n)\left(\frac{mb}{a-b} + \frac{nc}{c-a}\right) + (m-n)^2\left(\left(\frac{b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{c}{c-a}\right)^2\right) \\
 &= \left(\frac{mb-nc}{b-c}\right)^2 - 2(m-n)a\frac{mb-nc}{(a-b)(c-a)} \\
 &+ (m-n)^2\left(\left(\frac{b}{a-b}\right)^2 + 2\frac{bc}{(a-b)(c-a)} + \left(\frac{c}{c-a}\right)^2\right) \\
 &= \left(\frac{mb-nc}{b-c}\right)^2 - 2(m-n)a\frac{mb-nc}{(a-b)(c-a)} \\
 &+ (m-n)^2\left(\frac{b}{a-b} + \frac{c}{c-a}\right)^2 \\
 &= \left(\frac{mb-nc}{b-c}\right)^2 - 2(m-n)a\frac{mb-nc}{(a-b)(c-a)} \\
 &+ (m-n)^2\left(\frac{a(c-b)}{(a-b)(c-a)}\right)^2 \\
 &= \left(\frac{mb-nc}{b-c} - (m-n)a\frac{b-c}{(a-b)(c-a)}\right)^2
 \end{aligned}$$

юм. Үүгээр (1) тэнцэтгэл биш батлагдав. Энэ ерөнхий тэнцэтгэл бишийн $m=1, n=0$ тухайн тохиолдолд

$$\left(\frac{a}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c-a}\right)^2 \geq 1$$

гэсэн тэнцэтгэл биш гарах ба энд $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$ гэж тэмдэглэвэл, батлах ёстой $\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$ гэсэн тэнцэтгэл биш гарна.

б) а) хэсгийн эхний бодолтоос уг тэнцэтгэл биш нь тэнцэлдээ $a+b+c=1$ ба $a^2+b^2+c^2=1$ үед хүрэх ёстой гэдэг нь харагдаж байна. Сүүлийн тэгшитгэлд $c=1-a-b$ гэж орлуулбал, $a^2+b^2+ab-a-b=0$ гэсэн тэгшитгэл гарах ба энд $b=\lambda \cdot a$ гэж орлуулбал $a^2(1+\lambda+\lambda^2)-a(1+\lambda)=0$ гэж гарна. Эндээс $a=\frac{1+\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}$ бөгөөд $b=\frac{\lambda+\lambda^2}{1+\lambda+\lambda^2}, c=-\frac{\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}$ гэж олдоно. Иймд тэнцэтгэл биш нь тэнцэлдээ

$$x = \frac{a}{a-1} = -\frac{1+\lambda}{\lambda^2}, y = \frac{b}{b-1} = -(\lambda+\lambda^2), z = \frac{c}{c-1} = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^2}$$

гэсэн утгуудад хүрнэ. Энд λ рационал тоо бол a, b, c утгууд мөн рационал тоонууд байх нь ойлгомжтой юм. ■

Жич: " a, b, c нь ялгаатай бодит тоонууд бол

$$\left(\frac{4a-3b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{4b-3c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{4c-3a}{c-a}\right)^2 \geq 25$$

тэнцэтгэл биш биелнэ гэдгийг батал" гэсэн бодлогыг би 2008 оны 3 сарын 16-нд болж өнгөрсөн 1-р сургуулийн нэрэмжит "Их сунгаа" уралдаанд бодуулж байсан болохоор энэ тэнцэтгэл биш нь манай сурагчдад хэдийнээ танил болсон тэнцэтгэл биш байсан юм. Төрөл бүрийн нэрэмжит математикийн уралдаан, тэмцээн, олимпиадууд дээр сурагчид оригинал санаатай бодлогуудыг бодож байх нь маш их ач холбогдолтой гэдгийг энэ жишээ харуулж байна.

A3. Вильсоны теорем ёсоор ямар ч анхны p тооны хувьд $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ байдаг билээ. Эндээс хэрэв $p \equiv 1 \pmod{4}$ бол $\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ гэдэг нь хялбархан батлагдана. $\left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv \pm 1 \pmod{p}$ бөгөөд $0 < n < \frac{p}{2}$ байх n тоог авч үзье. Тэгвэл $n^2 + 1 \equiv \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ байна.

$n < \frac{p}{2}$ тул ямар нэгэн сондгой натурал k тооны хувьд $n = \frac{p-k}{2}$ байх ёстой. Үүнийг өмнөх жишлэгт орлуулбал $\left(\frac{p-k}{2}\right)^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ буюу $(p-k)^2 + 4 \equiv k^2 + 4 \equiv 0 \pmod{p}$ гэж гарна. Энд эерэг $k^2 + 4$ тоо p -д хуваагдах тул $k^2 + 4 \geq p$ буюу $k \geq \sqrt{p-4}$ болно. Иймд $n = \frac{p-k}{2} \leq \frac{p-\sqrt{p-4}}{2}$ байх ба эндээс $p \geq 2n + \sqrt{p-4}$ гэж гарна. Цаашилбал, $p > 20$ гэсэн нэмэлт шаардлага тавьбал, $p-4 \geq 2n + \sqrt{p-4} - 4 > 2n$ болох ба иймд энэ тохиолдолд $p > 2n + \sqrt{2n}$ болж p, n тоонууд бодлогын нөхцөлд шаардсан нөхцийг хангах болно.

$p \equiv 1 \pmod{4}$ байх анхны $p > 20$ тоонууд төгсгөлгүй олон юм. Түүнээс гадна бэхлэгдсэн n тооны хувьд $n^2 + 1$ тоо нь зөвхөн төгсгөлөг

тооны анхны тоон хуваагчтай байна. Иймд дээрхи нөхцлийг хангах p анхны тоо бүрт харгалзуулж олсон натурал n тоонууд дотор төгсгөлгүй олон ялгаатай тоонууд байна. ■

В1. Энэхүү хялбар бодлогыг манай ихэнхи сурагчид зөв бодсон бөгөөд энд сурагч Э.Тэмүгэгийн бодолтыг сийрүүлэе. Өгсөн функционал тэгшитгэлд $w = x = y = z = 1$ гэж сонговол, $(f(1))^2 = f(1)$ буюу $f(1) = 1$ гэж гарна. $a > 0$ тооны хувьд $w = 1, x = a, y = z = \sqrt{a}$ гэж сонговол, функционал тэгшитгэлээс

$$\frac{1 + (f(a))^2}{2f(a)} = \frac{1 + a^2}{2a}$$

гэж гарна. Иймд $f(a)(1 + a^2) = a(1 + f(a)^2)$ буюу $(a \cdot f(a) - 1)(f(a) - a) = 0$ байна. Эндээс ямар ч $a > 0$ тооны хувьд $f(a)$ утга нь $\frac{1}{a}$ эсвэл a гэж гарч байна.

$f(x) = \frac{1}{x}$ ба $f(x) = x$ функцүүд нь өгсөн функционал тэгшитгэлийг хангана гэдэг нь ойлгомжтой. Одоо эдгээрээс өөр хариу байхгүй гэдгийг харуулая. Үүний тулд эсрэгээс, функционал тэгшитгэлийг хангадаг f функц нь ямар нэгэн $a, b \neq 1$ утгуудын хувьд $f(a) = a, f(b) = \frac{1}{b}$ байдаг гэж үзье. Функционал тэгшитгэлд $w = a, x = b, y = z = \sqrt{ab}$ гэж сонговол,

$$\frac{a^2 + \frac{1}{b^2}}{2f(ab)} = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$$

буюу $f(ab) = a \frac{(ab)^2 + 1}{b(a^2 + b^2)}$ гэж олдоно. Нөгөө талаас, бидний өмнө харуулснаар $f(ab) = \frac{1}{ab}$ эсвэл $f(ab) = ab$ байх ёстой. $a \frac{(ab)^2 + 1}{b(a^2 + b^2)} = \frac{1}{ab}$ бол $(ab)^2 = b^2$ буюу $a = 1$ болно. $a \frac{(ab)^2 + 1}{b(a^2 + b^2)} = ab$ бол $b^4 = 1$ буюу $b = 1$ болно. Энэ нь $a, b \neq 1$ гэж үзсэнд зөрчиж байна. ■

В2. Энэ бодлогыг сурагч Н.Бямбажав, Г.Оюундарь нар дараахь байдлаар бодсон юм. Бодлогын нөхцөлд өгөгдсөн харгалзан N, M ширхэг үйлдлүүдийн дарааллуудын олонлогийг $\mathcal{N}, \mathcal{M}$ гэж тэмдэглэе. Анхны байрлалаас 1-ээс n хүртэл дугаартай чийдэнгүүд ассан, $(n + 1)$ -ээс $2n$

хүртэл дугаартай чийдэнгүүд унтраатай байх байрлалд хүргэдэг үйлдлүүдийн дараалалд, $1 \leq i \leq n$ үед $(n+i)$ -р чийдэнд хийгдсэн үйлдлийг i -р чийдэнд хийсэн үйлдлээр сольё. Ингэж солих нь $\mathcal{N}, \mathcal{M}$ олонлогуудын хооронд $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ гэсэн харгалзааг тодорхойлох бөгөөд энэ харгалзаа сурьектив гэдэг нь ойлгомжтой (ямар ч солилт хийгдээгүй үед $\mathcal{M}$ -д тоологддог үйлдлүүдийн дараалал өөрөө өөртөө харгалзаж байна гэж үзнэ).

Одоо энэ харгалзаагаар, анхны байрлалаас $(n+1)$ -ээс $2n$ хүртэл дугаартай чийдэнгүүд төлөвөө огт өөрчлөхгүйгээр 1 -ээс n хүртэл дугаартай чийдэнгүүд ассан, $(n+1)$ -ээс $2n$ хүртэл дугаартай чийдэнгүүд унтраатай байх байрлалд хүргэх k ширхэг үйлдлийн ямар ч дараалалд яг 2^{k-n} ширхэг $\mathcal{N}$ олонлогийн дараалал харгалзана гэдгийг харуулая. Тэгвэл бидний байгуулсан харгалзаа 2^{k-n} :1 харгалзаа буюу $N/M = 2^{k-n}$ болох нь батлагдана. $1 \leq i \leq n$ үед i -р чийдэнд нийт $1+2k_i$ удаа үйлдэл хийгдсэн байх $\mathcal{M}$ олонлогийн ямар нэгэн дарааллыг авч үзье ($1+2k_1+1+2k_2+\dots+1+2k_n=k$ байх ёстой). Буцаж $\mathcal{N}$ олонлогийн үйлдлүүдийн дарааллыг гарган авахын тулд i -р чийдэнд хийгдсэн тэгш тоотой $2m$ ($0 \leq m \leq k_i$) удаагийн үйлдлийг $(n+i)$ -р чийдэнд хийгдсэн үйлдлээр солих ёстой. Ингэж солих боломжийн тоо

$$C_{1+2k_i}^0 + C_{1+2k_i}^2 + \dots + C_{1+2k_i}^{2k_i} = \frac{2^{1+2k_i}}{2} = 2^{2k_i}$$

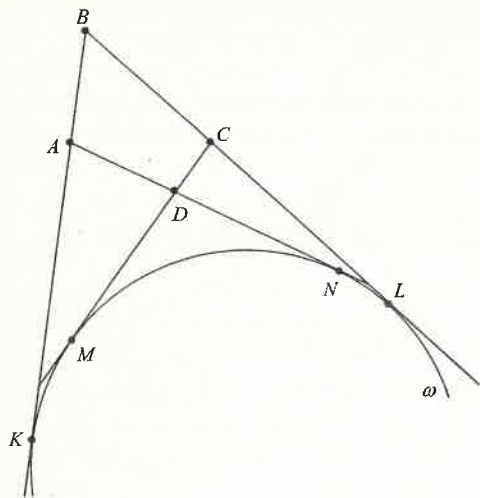
бөгөөд тэгэхлээр $\mathcal{M}$ олонлогийн энэ дараалалд үржүүлэх дүрмээр яг

$$2^{2k_1} \cdot 2^{2k_2} \cdot \dots \cdot 2^{2k_n} = 2^{(1+2k_1+1+2k_2+\dots+1+2k_n)-n} = 2^{k-n}$$

ширхэг $\mathcal{N}$ олонлогийн дараалал харгалзана. ■

Жич: Рекуррент харьцааг бодож уламжлагч функцийг нь тооцвол, M тоо нь $\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^n$ функцийн задаргааны $\frac{x^k}{k!}$ гишүүний өмнөх коэффициент, харин N тоо нь $\left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}\right)^n$ функцийн задаргааны $\frac{x^k}{k!}$ гишүүний өмнөх коэффициент гэдгийг харуулж болно.

В3. Эхлээд ω тойрог оршин байдаг гэдгээс ямар дүгнэлт гарах вэ? гэдгийг сонирхоё.



Лемм: $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн хувьд ABC өнцөгт багтсан, AD, CD талуудын үргэлжлэлийг шүргэдэг ω тойрог оршин байдаг бол $AB + AD = CB + CD$ байна.

Баталгаа. ω тойрог BA, BC, CD, AD цацрагуудыг харгалзан K, L, M, N цэгүүдэд шүргэдэг болог (зураг). Тэгвэл

$$\begin{aligned} BK &= BL, AK = AN, CM \\ &= CL, DM \\ &= DN \end{aligned}$$

байх ёстой. Иймд

$$\begin{aligned} AB + AD &= (BK - AK) + (AN - DN) = BK - DN = BL - DM \\ &= (BL - CL) + (CM - DM) = CB + CD \end{aligned}$$

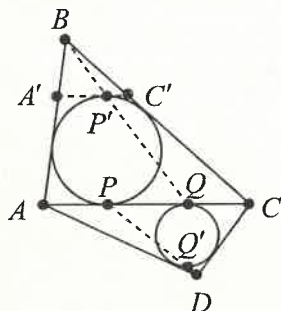
юм. Лемм батлагдав. ■

ABC гурвалжинд багтсан ω_1 тойрог гурвалжны AC талыг P цэгт, ABC гурвалжны B өнцөгт гадаад багтсан тойрог AC талыг Q цэгт шүргэдэг болог. Хялбархан тооцоогоор $AP = CQ =$

$$\frac{1}{2}(AB + AC - BC) \text{ гэдгийг харуулдаг билээ.}$$

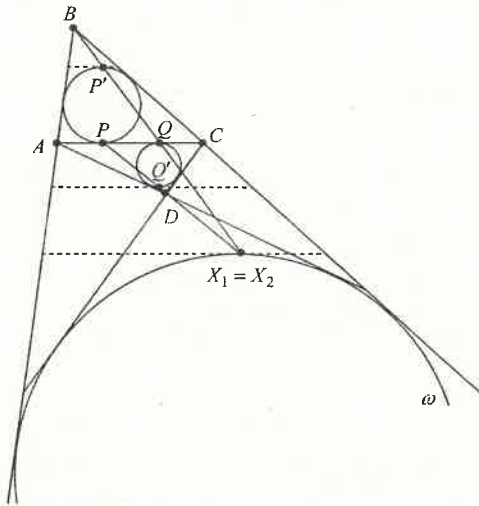
$$AB + AD = CB + CD \text{ тул эндээс } CQ = \frac{1}{2}(CD + AC - AD) \text{ гэж гарна. Энэ тэнцэл нь}$$

ADC гурвалжинд багтсан ω_2 тойргийн AC талыг шүргэх цэг нь Q цэг гэдгийг харуулж байна. Үүнтэй нэгэн адилаар



ADC гурвалжны D өнцөгт гадаад багтсан тойргийн AC талыг шүргэх цэг нь P цэг гэдгийг харуулна.

PP' нь ω_1 тойргийн диаметр болог. Тэгвэл P' цэгт татсан ω_1 тойргийн шүргэгч AC талтай параллель байх бөгөөд энэ шүргэгч нь ABC гурвалжны AB, BC талуудыг A', C' цэгүүдээр огтлодог гэж үзье. Нэгэнт $A'BC'$ гурвалжны B өнцөгт гадаад багтсан тойргийн $A'C'$ талыг шүргэх цэг нь P' болохоор $A'BC'$ гурвалжныг ABC гурвалжинд шилжүүлэх B оройд төвтэй гомотетоор P' цэг Q цэгт шилжинэ. Иймд B, P', Q цэгүүд нэг шулуун дээр оршино. Үүнтэй нэгэн адилаар, хэрэв QQ' нь ω_2 тойргийн диаметр бол D, Q', P цэгүүд нэг шулуун дээр орших бөгөөд Q' цэгт татсан ω_2 тойргийн шүргэгч AC талтай параллель гэдгийг харуулна. Нэгэнт $PP' \perp AC$ ба $QQ' \perp AC$ тул PP', QQ' диаметрүүд хоорондоо параллель юм. Тэгэхлээр ω_1 тойргийг ω_2 тойрогт шилжүүлэх эерэг коэффициенттэй гомотетоор P' цэг Q цэгт, P цэг Q' цэгт шилжих ёстой. Иймд тэр гомотетийн төв буюу ω_1, ω_2 тойргуудын гадаад шүргэгч шулуунуудын огтлолцлын цэг X нь $P'Q, PQ'$ шулуунуудын огтлолцлын цэг юм.



Эцэст нь, X цэг ω тойрог дээр оршино гэдгийг харуулая. $P'Q, PQ'$ цацрагуудын тойргийг огтлох эхний цэгүүдийг харгалзан X_1, X_2 гэж тэмдэглэе. Хэрэв бид X_1, X_2 цэгүүд давхцана гэж батлавал $X_1 = X_2 = P'Q \cap PQ' = X$ болж батлах ёстой зүйл батлагдана. Үнэхээр, P' цэгт татсан ω_1 тойргийн шүргэгч AC талтай параллель тул ω_1 тойргийг ω тойрогт шилжүүлэх B оройд төвтэй гомотетоор X_1

цэгт татсан ω тойргийн шүргэгч мөн AC талтай параллель гэж гарна.

Үүнтэй нэгэн адилаар, ω_2 тойргийг ω тойрогт шилжүүлэх D оройд төвтэй гомотетоор X_2 цэгт татсан ω тойргийн шүргэгч AC талтай параллель гэдгийг харуулж чадна. Гэтэл ω тойрог дээр татсан шүргэгч нь AC талтай параллель байх B оройд ойр орших цор ганц цэг олдоно. Иймд $X_1 = X_2$ юм. ■

Жич: Бусад бүх дүгнэлтүүдийг баталсан боловч эцсийн ганц дүгнэлтийг баталж хараахан амжаагүй сурагчдад шүүгчдийн зүгээс зөвхөн 2 оноо өгсөн явдалд олон багийн ахлагчид дургүйцэж, бодолт засалтын үеэр нилээдгүй маргаан гарсан билээ. Уншигч та бүхэн бас тэдэнтэй санал нийлнэ гэдэгт би итгэлтэй байна.

49th International Mathematical Olympiad

4.1 Some selected solutions

Problem 4. Find all functions $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ (so, f is a function from the positive real numbers to the positive real numbers) such that

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

for all positive real numbers w, x, y, z , satisfying $wx = yz$.

(South Korea)

Solution. For $y = z = \sqrt{wx}$, we get

$$f(w)^2 + f(x)^2 = f(wx) \frac{w^2 + x^2}{wx} \quad (1)$$

With $w = x = 1$ in (1) we get $f(1) = 1$.

With $x = \frac{1}{w}$ in (1) we get

$$f(w)^2 + f\left(\frac{1}{w}\right)^2 = w^2 + \left(\frac{1}{w}\right)^2 \quad (2)$$

With $x = 1$ in (1) we get $f(w)^2 - \frac{w^2 + 1}{w} f(w) + 1 = 0$, hence

$$f(w) = w \text{ or } f(w) = \frac{1}{w}.$$

Denoting $A = \{a \mid f(a) = a\}$, $B = \{b \mid f(b) = \frac{1}{b}\}$ we get then

$$A \cap B = \{1\}, \quad A \cup B = (0, \infty).$$

But clearly A and B are stable to multiplication and taking inverses (they are multiplicative subgroup of $(0, \infty)$), as seen from relations (1) and (2).

Assume $a \in A$, $b \in B$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, then $ab \notin A$, otherwise $b \in A$, and $ab \notin B$, otherwise $a \in B$, which is absurd. Hence one of A , B must be trivial (equal to $\{1\}$), and the other equal to the whole $(0, \infty)$.

Problem 5. Let n and k be positive integers with $k \geq n$ and $k - n$ an even number. Let $2n$ lamps labeled $1, 2, \dots, 2n$ be given, each of which can be either on or off. Initially all the lamps are off. We consider sequences of steps: at each step one of the lamps is switched (from on to off or from off to on).

Let N be the number of such sequences consisting of k steps and resulting in the state where lamps 1 through n are all on, and lamps $n + 1$ through $2n$ are all off.

Let M be the number of such sequences consisting of k steps, resulting in the state where lamps 1 through n are all on, and lamps $n + 1$ through $2n$ are all off, but where none of the lamps $n + 1$ through $2n$ is ever switched on.

Determine the ratio N/M .

(France)

Solution. Fix n , let N_k , M_k be the numbers for k .

M_k equals to the number of ways partitioning $\{1, \dots, k\}$ into n sets $A_1, \dots, A_n$ of odd size. (A_i —steps where we switch lamp i).

So the theory of exponential generating functions give,

$$M(x) = \sum_k M_k \frac{x^k}{k!} = \left(\frac{x^1}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right)^n = \left[\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right]^n.$$

Here $\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ is exponential generating function for

$$f(k) = \begin{cases} 0 & \text{if } \{1, \dots, k\} \text{ has even size} \\ 1 & \text{if } \{1, \dots, k\} \text{ has odd size} \end{cases}$$

Similarly

$$\begin{aligned} N(x) &= \sum_k N_k \frac{x^k}{k!} = \left(\frac{x^1}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right)^n \left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \right)^n \\ &= \left[\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right]^n \left[\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \right]^n = \frac{1}{2^n} \left[\frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}) \right]^n. \end{aligned}$$

So $N(x) = \frac{1}{2^n} M(2x)$, and comparing coefficients gives $N_k = 2^{k-n} M_k$.

Монголын Их дээд сургуулиудын Оюутны математикийн XVII олимпиад

Тус олимпиадыг профессор С.Тогмид агсаны нэрэмжит болгон зохион байгуулж явуулав.

I курсийн ангилалд

Б.Сумъяа I байр
А.Содбаатар II байр
Б.Цэнд-Аюуш III байр
Д.Батчунаг III байр

II-IV курсийн ангилалд

Г.Батзаяа I байр
Ч.Сугардорж II байр
А.Ганбат III байр
У.Батзориг III байр

тус тус эзлэв.

5.1 Эчнээ давааны бодлогууд

1. R нэгжтэй цагиргийн элемент нэгээс олон баруун урвуутай бол төгсгөлгүй олон баруун урвуу элементтэй гэж үзүүл.
2. R нэгжтэй цагиргийн a, b элементүүдийн хувьд $1 - ab$ урвуутай бол $1 - ba$ нь урвуу элементтэй гэж үзүүл.
3. R нь K -талбар дээрх нэгжтэй алгебр. Хэрвээ R нь дараахын
а), б) нөхцөлүүдийг хангадаг байг.
а) Энгийн алгебр
б) R -д дараах чанартай r гэсэн элемент байдаг. Үүнд r -ийн минимал олон гишүүнт нь

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) \quad (a_1, a_2, \dots, a_n \in K)$$

байдаг. Тэгвэл R нь K талбар дээрх алгебр утгаараа $M_n(K)$ -тай изоморф гэж үзүүл. Үүнд $M_n(K)$ нь K талбар дээрх n хэмжээстэй матрицан алгебр.

4. 15 хүү, 12 охиноос хэсэг хүү, хэсэг охин бүжигт явав. Хэрэв охидын тоо хөвгүүдийн тооноос хэтрэх ёсгүй гэвэл хэчнээн янзаар бүжигт явах боломжтой вэ?

5. a ба b үсгүүд зэрэгцэж ороогүй байхаар a, b, c, d үсгүүдээр зохиож болох n урттай үгийн тоог ол.

6. Хэрэв гүдгэр олон өнцөгтийн орой бүрээс ОҮ тэнхлэгийн сөрөг (эерэг) чиглэлд цацрагууд татахад эдгээр нь оройгоос өөр цэгээр олон өнцөгттэй огтлолцохгүй бол доошоо (дээшээ) гүдгэр гэе. Хавтгайн ерөнхий байршилтай $C_{p+q}^p + 1$ цэгээс эсвэл доошоо гүдгэр $(p+2)$ -өнцөгтийн орой болох цэгүүд, эсвэл дээшээ гүдгэр $(q+2)$ -өнцөгтийн орой болох цэгүүд сонгож болохыг батал. C_{p+q}^p цэгийн хувьд дээрх өгүүлбэр худал болохыг харуул.

7. A нь цагираг байг. $M(A)$ нь A дээрх зөвхөн төгсгөлөг тооны тэг биш элементтэй төгсгөлгүй матрицуудын цагираг байг.

а) $M(\mathbb{Z})$ -ийн дурын гомоморф дүр нь нэгжгүй гэж батал. $\frac{a}{b}$

б) $M(\mathbb{Z})$ -ийн дурын элементтэй байр сольдог элемент нь зөвхөн тэг матриц гэж батал.

с) Дурын $a \in M(\mathbb{Z})$ -ийн хувьд $a^n + \sum_{i=1}^m a_i [b_i, a] = 0$ байхаар $n \in \mathbb{N}$ ба $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m \in M(\mathbb{Z})$ -ууд олдоно гэж батал.

8. $f: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ функц $f(x, y, z) = \left\{ \frac{xyz}{xy + yz + zx} \right\}$ томъёогоор өгөгджээ. f функцийг утгын мужийг ол.

9. $E \subset \mathbb{R}$ ба $\forall x, y \in E: \frac{x+y}{2} \in E$ байг.

а) $[0; 1] \subset E$ ба $2001 \in E$ бол $[500, 1500] \subset E$ өгүүлбэр үнэн үү?

б) $\text{int}(E) \neq \emptyset$ бол E -г интервал гэж батал.

10. а) $\left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$, б) $\left\{ \frac{\sqrt{m} - \sqrt{n}}{\sqrt{m} + \sqrt{n}} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$

олонлогуудын бүх хязгаарын цэгийг ол.

11. 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3n/2}}{n!} \prod_{k=1}^n \sin \frac{k}{n^{3/2}}$ 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \prod_{k=1}^n \sin \frac{\pi k}{2n}$ хязгааруудыг ол.

12. $\forall x \in (0, +\infty): f\left(\frac{x^2}{f(x)}\right) = x$ байх эрс монотон бүх $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ функцийг ол.

13. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ -ийн хувьд $f(f(x+y)) = f(x) + f(y)$ бүх тасралтгүй $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол.

14. Аливаа эерэг $a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 3)$ тоонуудын хувьд

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > 0.4577996n$$

тэнцэтгэл биш биелнэ гэж батал.

15. $[a; b]$ хэрчим дээр тасралтгүй дифференциалчлагдах $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг хувьд $f(a) = -\frac{b-a}{2}, f(b) = \frac{b-a}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$ байв.

$f'(c_1)f'(c_2)f'(c_3) = 1$ байх ялгаатай c_1, c_2, c_3 тоонууд (a, b) завсраас олдоно гэж батал.

16. $f \in C^1([0, 2\pi])$, $f(0) = f(2\pi)$ ба $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$ байг. $\int_0^{2\pi} f^2(x)dx \leq \int_0^{2\pi} (f'(x))^2 dx$ болохыг батал.

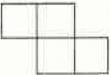
17. $A = \left\{ \frac{2x}{2y+1} \mid x, y \in \mathbb{Z} \text{ ба } (2x, 2y+1) = 1 \right\}$ цагираг ба $0 \neq I \triangleleft A$ өгөгджээ. Хэрэв $A[x]/I[x] \ni a$ бол $a^n = 0$ байх натурал тоо n олдоно гэж батал.

18. $\mathbb{Z}(p^\infty)$ -бүлэгт ямар нэг үржүүлэх үйлдэл тодорхойлж цагираг үүсгэдэг бол тэр нь зөвхөн тэг үржвэртэй л цагираг байна гэж батал.

Жич. 1, 2, 3-р бодлогуудыг Л.Оюунцэцэг, 4, 5, 6-р бодлогуудыг Б.Батбаясгалан., 7, 17, 18-р бодлогуудыг С.Төмөрбат, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16-р бодлогуудыг В.Адъяасүрэн дэвшүүлэв.

5.2 Үндсэн давааны бодлогууд

I курс

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \cos \sqrt{\frac{k}{n}}$ хязгаарыг ол.
- $\{f(x+y) - f(x) - f(y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{0; 1\}$ байх биектив $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ буулгалтыг байгуул.
- $x, y \in (0; +\infty)$ -ийн хувьд $f(x)f(yf(x)) = f(x+y)$ байх бүх $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол.
- Бодит коэффициенттой $a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \sin kx$ хэлбэртэй тригонометрийн олон гишүүнтийн олонлог ердийн нэмэх ба үржих үйлдлийн хувьд цагираг үүсэх үү?
- 17×101 хэмжээтэй хүснэгтийг 1-ээс 1717 хүртэлх натурал тоонуудаар, аль ч  хэлбэрийн дүрсэд бичигдсэн тоонуудын нийлбэр 17 буюу 101-д хуваагдаж байхаар бөглөж болох уу?
- $A = \{\sin n \mid n \in \mathbb{N}\}$ олонлогийн хязгаарын цэгүүдийг ол.

II-IV курс

- a, b -өгөгдсөн бодит тоонууд. $\{x_n : n \geq 0\}$ дараалал $x_0 = a, x_1 = b$, $x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)x_n + \frac{1}{2n}x_{n-1}, n \geq 1$ рекуррент томъёогоор өгөгджээ.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ хязгаар оршин байна гэж батлаад, түүнийг ол.

2. $f, g \in L_2([0; 1])$ ба $\int_0^1 f d\mu = 0$ байвал

$$\left(\int_0^1 f g d\mu \right)^2 \leq \left(\int_0^1 f^2 d\mu \right) \cdot \left(\int_0^1 g^2 d\mu - \left(\int_0^1 d\mu \right)^2 \right)$$

гэж батал.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (d_i 2n - e) \cdot e^{-n^2}$ цувааны нийлбэрийг ол.

4. $A = \frac{\pi}{4} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ байг. $A - \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{5!}A^5 - \frac{1}{7!}A^7 + \dots$ цувааны нийлбэрийг ол.

5. A цагираг, түүний идеал I, I нь нэгж бол I нь A -ийн гомоморф дүр гэж батал.

6. Коммутатив бүлгийн a, b элементүүдийн хувьд $a^6 = b^{10} = (ab)^{14} = e$ бол a ба b нь өөрөө өөрийнхөө урвуу гэж батал.

Жич. Бодлогуудыг С.Төмөрбат, В.Адъяасүрэн нар дэвшүүлэв.

5.3 Багийн тэмцээний бодлогууд

Багийн тэмцээнд А. Ганбат ахлагчтай ОМ-4 анги I байр, Г. Батзаяа ахлагчтай ОМ-3 анги II байр эзлэв.

1. a, b нь өгөгдсөн бодит тоонууд.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |ax + by| \cdot \frac{1}{e^{(x^2+y^2)/2}} dx dy$$

интегралыг тооцоол.

2. $a_1, a_2, \dots, a_n$ эерэг тоонууд.

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(x + \sum_{k=1}^n a_k\right) \cdot (\Gamma(x))^{n-1}}{\prod_{k=1}^n \Gamma(x + a_k)}$$

функц $(0; +\infty)$ завсар дээр үл өснө гэж батал.

3. $f \in C^1([0; 1])$ ба $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx = 1$ бол $f'(c) = 6$ байх $c \in (0; 1)$ олдоно гэж батал.

5.3. Багийн тэмцээний бодлогууд

Жич. 1, 2, 3-р бодлогуудыг В.Адъяасүрэн дэвшүүлсэн бөгөөд 4, 5-р бодлогууд нь алгебрийн чиглэлийн бодлогууд байсан боловч олж, оруулж чадаагүй тул та бүхнээс хүлцэл өчье.

“Төгс Тоо” төвийн тухай

Манай орны математик боловсролын хөгжилд мэдэгдэхүйц амжилт гарч математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай сургууль, ангиуд олноор байгуулагдаж байгааг харгалзан үзэж, тэднийг нэгдсэн удирдлага, үйл ажиллагаагаар хангах зорилгоор БСШУЯ-ны санаачилга дэмжлэгтэйгээр Монголын Математик Олимпиадын Хорооны дэргэд математикийн багш нарын мэргэжил дээшлүүлэх “Төгс тоо” төв байгуулагдсаар хэдэн жил болж байна. Тус төв нь математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийн багш нарын мэргэжлийг системтэйгээр дээшлүүлэх ажлынхаа хүрээнд дунд ангийн багш нарын дунд тус бүр 90 цагийн багтаамжтай, 120000 төгрөгийн төлбөртэй I ба II шатны дамжааг 15 хоногоор; бага ангийн багш нарын дунд 60 цагийн багтаамжтай, 80000 төгрөгийн төлбөртэй сургалтыг 12 хоногоор хичээллүүлж, дамжааг амжилттай дүүргэсэн хүмүүст харгалзах сертификат олгон төгсгөдөг юм. Жил бүрийн хичээлийг МУИС, хичээлийн III байрны 306, 308 тоотод 6 сарын 23-24-нд бүртгэж, хичээл 6 сарын 25-аас эхлэн явагддаг. Төлбөрийг “Төгс тоо” төв дансанд хийж, төлбөрийн баримтаа үзүүлээд бүртгүүлж болно, эсвэл бэлнээр авчирна.

“Төгс тоо” төвийн данс:

Лавлах утас:

Голомт банк

2119483, “Төгс тоо” төв

312383 (гэр)

99879779 (Ц.Дашдорж)