

МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАДЫН СҮЛД ДУУ

Нарнаас илчийг нь авч болох уу
Сарнаас гэрлийг нь салгаж болох уу
Багш та юу гэж заасан бэ
Багын нөхөд маань санаж байна уу
Тоо тоогоо тоолон бодъёо
Томъёогоор задлан бодъёо
Олуулаа уралдан бодъёо
Олимпиаддаа оролцож бодъёо

Орчлонгийн удмыг туулж болох уу
Одол эрхсийг тоолж болох уу
Эвклид юу гэж хэлсэн бэ
Эрхэм нөхөд минь санаж байна уу
Дахилт

Эрдмийн оргилд хүрч болох уу
Энгүй далайг хэмжиж болох уу
Суут эрдэмтэн Мянгат өвөөгийн
Сургаалт үгийг санаж байна уу
Дахилт

Гэрлийн хурдыг давж болох уу
Тэнгэрийн хаяанд хүрч болох уу
Дэлхийд алдартай эрдэмтэн Гауссын
Дэлгэж нээсэн онолыг саная даа
Дахилт



2000 оны Сэлэнгийн
олимпиадыг зохион
байгуулагчдын бүтээл

1 ММО-45-ын дүнгийн тухай тайлан

Ц.Дашдорж

Эрхэм хүндэт математикч багш сурагчид аа!

ММОХорооны гишүүдээ!

Эрдэм ухаанд гүн шүтлэгтэй Дорноговьчуудаа аа !

Дорноговь аймгийн засаг дарга ноён П.Ганхуягаа!

Эрдэмт профессор Х.Гэндэнжамцын гэр бүл үр хүүхэд, ач зээ нар аа,

Дорноговь нутгийн унаган хүү манай нэрт математикч, доктор, профессор Хандын Гэндэнжамцын нэрэмжит Монголын Математикийн 45-р Олимпиад эх орны минь үүд, энгүй говийн голомт Сайншанд хотноо 2009 оны 05 сарын 09-14 ны хооронд Дорноговь аймгийн Сайншанд сумын Ерөнхий боловсролын 1 дүгээр сургууль дээр амжилттай явагдаж дүнгээ гаргаж байна. Их говийн Догшин Ноён Хутагтын мэлмий гийж, онгод хийморь оргилж байсан энэ ариун дагшин газар шорооноо, Хутагтын номын үнэнч шавь, нэрт математикч Хандын Гэндэнжамцын нэрэмжит ММО-45-р олимпиад нар хур тэгширсэн энэ сайхан налгар өдрүүдэд болж өнгөрч байгааг дээд тэнгэрийн таалал, ивээл, хайр хүндэтгэл гэж үзэхээс өөр арга алга.

Энэ удаагийн олимпиадад 21 аймаг, Улаанбаатар хотын нийт 22 багийн 65 бага дундын багш, 219 сурагч нийт 284 хүн оюун ухаан, эрдэм мэдлэгээрээ өрсөлдлөө. Монголын математикийн 45 дугаар олимпиадыг зохион байгуулах, бэлтгэл ажлыг хангахад Дорноговь аймгийн Засаг даргын Тамгын газар, Боловсрол Соёлын газар, Сайншанд сумын Ерөнхий боловсролын 1 дүгээр сургуулийн захиргаа ихээхэн хүчин чармайлт гарган идэвхи ажиллалаа. Тус аймгийн Засаг захиргааны зүгээс Монголын математикийн 45 дугаар олимпиадыг говь нутгийнхаа унаган хүү манай нэрт математикч, профессор Хандын Гэндэнжамцын нэрэмжит болгон Их соён гэгээрүүлэгч Говийн догшин ноён хутагт Дулдуйтын Равжаагийн өлгий нутагтаа зохион байгуулж, Аймгийн засаг даргын захирамжаар 10 сая төгрөгийг

төсөвт тусгаж өгсөн явдал нь Математикийн шинжлэх ухааныг хөгжүүлэхэд хувь нэмрээ оруулан говь нутгийн болон бусад аймаг хотын математикч сурагчдын сэтгэлгээний хөгжилтөнд маш том оюуны хөрөнгө оруулалт хийж байгааг тэмдэглэн хэлэхэд таатай байна. Монголын математикийн 45-р олимпиадыг зохион явуулахад санхүүгийн дэмжлэг үзүүлсэн Б.Мөнхбаяр захиралтай Ерөнхий Боловсролын 1-р сургууль (2000'000 төг), нэрт математикч доктор профессор Хандын Гэндэнжамц агсны үеэл Өлзийцоогийн гэр бүл (500000 төг), "Time shop" цагны сүлжээ дэлгүүрийн эзэн Б.Мөнхжаргал 2 жил дараалан (6 цаг, 100000 төг), "Их говийн соён" ХХК Т.Тогтохбаяр (245000 төг), "Нарны эрчим" ХХК Б.Зоригтбаатар (75000 төг), "Тулгат говь" ХХК Ж.Отгонцэцэг (300000 төг), "Амт трейд" ХХК Ж.Амаахүү (112.500 төг), "Зүүн хөөвөр" ХХК О.Мөнхцэцэг (700000 төг), багш А.Ганбаатар (100000 төг), багш А.Булган (100 \$), 1990 оны төгсөгч Л.Бямбасүрэн (500000 төг), 1990 оны төгсөгч н.Анхбаяр (100 \$) иргэн Б.Дэлгэрсайхан, түүний гэр бүл ЕБ-ын 2-р сургуулийн математикийн багш Ц.Алтанцэцэг нар (75000 төг), Замын-Үүд сумын "Эхлэл" сургууль Г.Мөнхбат (100000 төг), "Мишээл" ресторан Б.Амаржаргал (500000 төг), шавь "Соёмбо принтик" Лувсандорж, "Өнөөдөр" сонины Нандинтүшиг, ММОХорооны удирдах Зөвлөлийн гишүүн Бүүвэйбаатар нарын оюун ухааныг дээдлэгч, тал шигээ уужим сэтгэлтэй гэгээн хутагтын ард иргэд, шавь нарт нь ММОХороны гишүүд, олимпиадад оролцогч математикч багш, сурагчдынхаа өмнөөс баярласнаа илэрхийлэхийн ялдамд Төр, түмэн олныхоо төлөө бүтээх их үйлсэд нь өндөр амжилт хүсэн ерөөж байна. Монголын математикийн 45-р олимпиадад 8-р ангийн 62 сурагч оролцсоноос 1-р сургуулийн Б.Баатархүү 21 оноогоор 1-р байр эзэлж, 8-р ангийн аварга сурагч боллоо. Дархан-Уул аймгийн Х.Ариунболд 17.5 оноо, 1-р сургуулийн Ч.Золбоо 15 оноогоор 2-р байыг, 1-р сургуулийн Б.Билэгт-Очир 13 оноо, Хөвсгөл аймгийн Б.Зоригтбаатар 12 оноо, 1-р сургуулийн Ч.Заяа 11.5 оноогоор 3-р байрыг тус тус эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медаль хүртэцгээлээ. Монголын математикийн 45-р олимпиадад 9-р ангийн 54 сурагч оролцсоноос Олонлог сургуулийн О.Бямбадорж 36 оноогоор 1-р байр эзэлж, 9-р ангийн аварга сурагч боллоо. 1-р сургуулийн Б.Батхуяг 32 оноо,

мөн сургуулийн Б.Төгөлдөр 29.5 оноогоор 2-р байрыг, Олонлог сургуулийн Б.Билгүүн 27.5 оноо, мөн сургуулийн Г.Лувсангомбо 24.5 оноо, Сэлэнгэ аймгийн Э.Төрбат 23 оноогоор 3-р байрыг тус тус эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медаль хүртлээ. Монголын математикийн 45-р олимпиадад 11-р ангийн 41 сурагч оролцсоноос 1-р сургуулийн О.Зоригоо 28 оноогоор 1-р байр эзэлж, 11-р ангийн аварга сурагч боллоо. Олонлог сургуулийн Э.Энхзаяа 23.5 оноо, Дархан-Уул аймгийн Б.Ганбат 19 оноогоор 2-р байрыг, 1-р сургуулийн И.Цогбаяр 16 оноо, Хөвсгөл аймгийн О.Өсөхбаатар 14.5 оноо мөн аймгийн Н.Мөнхжаргал 13 оноогоор 3-р байрыг тус тус эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медаль хүртлээ. Улсын математикийн 45-р олимпиадад амжилттай оролцсон дээрх нэр бүхий болон нийт сурагчид, олимпиадад сурагчдаа амжилттай бэлтгэж оролцуулсан багш нартаа Монголын нийт математикчдын нэрийн өмнөөс чин сэтгэлийн талархал илэрхийлье. Багш нарын олимпиадыг бага, дунд гэсэн 2 ангилалаар явуулан бага ангийн математикийн 28 багш оролцсоноос Сант сургуулийн багш М.Отгонжаргал 29 оноогоор түрүүлэн Улсын математикийн олимпиадад 5 дахь удаагаа тэргүүлж байна. Хөвсгөл аймгийн багш Н.Даваа 24.5 оноогоор 2-р байр, Дархан-Уул Аймгийн Ч.Эрдэнэчимэг 22 оноогоор 3-р байрыг эзэллээ. Дунд ангийн багш нарын олимпиадад нийт 37 багш оролцсоноос 1-р сургуулийн багш Д.Бат-Орших 15.5 оноогоор тэргүүн байр эзэлж, мөн сургуулийн багш Э.Батзаяа 14 оноогоор 2-р байр, Олонлог сургуулийн багш Б.Ганбилэг 13 оноогоор удаах байранд шалгарсан амжилттайгаар оролцлоо. Багийн дүнгээр аймаг, хотуудыг байр эзлүүлэхэд Ч.Даваадорж ахлагчтай Улаанбаатар хот 14.28 дундаж оноогоор тэргүүн байр, Г.Адъяахүү ахлагчтай Хөвсгөл аймаг 13.83 дундаж оноогоор 2-р байр, О.Эрдэнэчимэг ахлагчтай Дархан-Уул аймаг 11.83 дундаж оноогоор 3-р байранд шалгарлаа. "ММО-45"-д 1-р сургууль 13 медаль, Олонлог сургууль 6 медаль, Хөвсгөл аймаг 4 медаль, Дархан-Уул аймаг 3 медаль, Дорноговь, Сэлэнгэ аймаг, Сант, Монтурк сургууль тус тус 1 медаль авч олимпиадад оролцогчдоо хошуучлан оролцсон байна. Сэлэнгэ аймгийн 9-р ангийн сурагч Төрбатад П.Энхболдын нэрэмжит

уран бодлогын шагнал олголоо. Улаанбаатар хотын Олонлог сургуулийн 9-р ангийн сурагч О.Бямбадорж Х.Гэндэнжамцын нэрэмжит математикийн 45-р олимпиадын үнэмлэхүй аварга сурагчаар тодорлоо. "Бокс" тэмцээнийг Сайншандын 1 дүгээр 11 жилийн сургуулийн математикийн ЗАН хамт олон ивээн тэтгэн явууллаа.

I байрыг оюутан баг 28 оноогоор, II байрыг олонлог 21, III байрыг Комисс 14 оноогоор эзэллээ. Энэ жилийн 7-р сард ХБНГерман улсад болох ОУМО-50-ийн Бэлтгэлд 1-р сургуулийн 11-р ангийн аварга сурагч О.Зориггоо, Олонлог сургуулийн Э.Энхзаяа, Дархан-Уул аймгийн Б.Ганбат, 1-р сургуулийн И.Цогбаяр, Хөвсгөл аймгийн О.Өсөхбаатар, Н.Мөнхжаргал, Монтурк сургуулийн 10-р ангийн сурагч Б.Лувсанбямба нарыг үлдээхээр Олимпиадын хороо шийдвэрлэлээ. ОУМО-50-ийн бэлтгэлд багтаж шалгарсан та бүхэндээ амжилт хүсэн, Монголынныхоо нэрийг дэлхийн тавцанд дуурсгах хүндтэй бөгөөд хариуцлагатай үйл хэргийн төлөө идэвхи чармайлт гарган сайн бэлтгэж амжилттай оролцохыг Монголын нийт Математикчдын нэрийн өмнөөс даалгаж байна. Эрдэмт их багшдаа гүн хүндэтгэл үзүүлж байгаагийнхаа илэрхийлэл болгон аавынхаа математикч гэр бүлийн уламжлалыг залгаж авсан аавын хайртай хүү математикч Г. Бум-Эрдэнэ таны ММО-45-ыг зохион явуулах үйл хэрэгт оруулсан хүчин зүтгэлийг тань үнэлэн 2011 оны Голланд, 2012 оны Аргентины ОУМО-ын аль нэгийг нь сонгож Монголын багийн орлогч удирдагчаар явах эрхээр шагнаж байна.

Эрдэм оюун дэлгэрч Монголд математикчдын оюун ухаан улам хөгжин дэлгэрэх болтугай. Нутгийн эрдэмт хүү Хандын Гэндэнжамцынхаа нэрэмжит Монголын математикийн-45-р Олимпиадад хуран цугларсан Монголын оюуны сор манлай охид, хөвгүүдийг нар хуртай, налгар зунаараа угтаж авсан Догшин Ноён Хутагтын нутгийн бурхан тэнгэрт, найрсаг зочломтгой наргианч зангаараа угтан авсан Догшин Ноён Хутагтын нутгийн түмэн олонд Монголын бүх математикчдын нэрийн өмнөөс гүнээ талархаж байгаагаа илэрхийлье. Анхаарал тавьсан та бүхэнд баярлалаа.

2 Багшаа дурсан санахад

Хандын Гэндэнжамцын товч намтар (1932-2001)

- 1932 Дорноговь аймгийн Агаруут, одоогийн Хатанбулаг сумын Хар Толгой гэдэг газар ээж Дуламын Хандын гэрт төрсөн. Малчин гаралтай.
- 1941-51 Дорноговь аймгийн ЕБДС төгссөн.
- 1951-55 МУИС-ийн физик математикийн салбарыг багш мэргэжлээр төгссөн.
- 1955-56 Булган аймгийн төвийн 10 жилд математикийн багшаар ажилласан.
- 1956-2001 МУИС-д багш, тэнхимийн эрхлэгчээр ажилласан.
- 1959 гэрлэсэн. Эхнэр Дамбийн Цэрэндулам багш мэргэжилтэй. 5 хүүхэд төрүүлсэн. Тэд геологич, орчуулагч, багш мэргэжилтэй.
- 1965-69 Москвагийн Их Сургуулийн дифференциаль геометрийн салбарт аспирантурт суралцаж төгссөн.
- 1973 ЗХУ-ын Сурган Хүмүүжүүлэх Ухааны Академийн харъяа Агуулга Арга Зүйн Эрдэм Шинжилгээний Институтэд "Геометрийн онол - олонлогийн суурь төлөвшүүлэх" сэдвээр СХУ-ны дэд эрдэмтний зэрэг хамгаалсан.
- 1996 "Дунд сургуулийн геометрийн шинжлэх ухаан, арга зүйн үндэс" сэдвээр Шинжлэх Ухааны Докторын зэрэг хамгаалсан.
- 1955-2001 ЕБС-ийн геометрийн сурах бичгүүд болон багш нарт зориулсан гарын авлагуудыг орчуулах, зохиох, сорилт туршилт явуулах, сурталчилгааны илтгэл, олон тооны өгүүлэл бичих ажилд бие сэтгэлээ зориулсан.
- 1997-1999 7-10-р ангийн Геометрийн иж бүрдэл зохиосон.
- 2000-2001 Геометрийн иж бүрдлээ хэрэгжүүлэх багш нарын семинар зохион байгуулсан.

Гавъяа, шагнал:

- 1974 Ардын Боловсролын Тэргүүний Ажилтан

- 1987 Дэд профессор /доцент/
1995 МУИС-ийн хүндэт профессор
1999 Шинжлэх Ухааны Тэргүүний Ажилтан
1999 Монголын Математикийн БНА-ийн жинхэнэ гишүүний
өргөмжлөл хүртсэн.
1978 Засгийн Газрын Хүндэт Жуух
1981 Хөдөлмөрийн Хүндэт Медаль
1991 Хөдөлмөрийн Гавьяаны Улаан Тугийн Одонгоор шагнагд-
сан.

Хийж бүтээсэн гол гавъяа:

Х. Гэндэнжамц нь эхнэр Д. Цэрэндулам, хүү Г.Бум-Эрдэнэ нарын хамт сүүлийн 30 жилийн уйгагүй бүтээлч хөдөлмөрөөрөө, түүний дотор 70-аад онд зохиосон сурах бичгүүд, 80-90-ээд онд явуулсан эрдэм шинжилгээний ажлуудад дэвшүүлсэн, туршсан, боловсруулсан үзэл бодлоо өөрсдийн олон жилийн багшлах ажлын туршлага дээр тулгуурлан өнөөгийн мөрдөж байгаа агуулга, стандартад тохируулан геометрийн хичээлийн иж бүрдлийг дүгнэн бичсэн. Энэхүү иж бүрдэл нь мэдлэгт суурилсан боловсролыг халж ухамсарт суурилсан боловсролыг хөгжүүлэх боловсролын цоо шинэ тогтолцоог хэрэгжүүлэхэд үнэтэй хувь нэмэр болно гэж үр хүүхдүүд нь бид үзэж байна. Энэхүү иж бүрдлийн тухай зохиогчдын өөрсдийн нь болон Монголын нэр хүндтэй эрдэмтэн мэргэдийн тодорхойлолтыг ард хавсаргав.?

Х.Гэндэнжамцын бүтээлийн жагсаалт

1. Зохиосон сурах бичиг, гарын авлага

1. Гэндэнжамц Х. нар, 9-10-р ангийн Геометр, 10хх, УБ, 1965
2. Гэндэнжамц Х. нар, Манай орны математик сургалтын зарим асуудалд, УБ, 1965
3. Гэндэнжамц Х. нар, 9-р ангийн Геометр, сурах бичиг. 10хх, УБ, 1967
4. Гэндэнжамц Х. нар, 9-10-р ангид үзэх Геометрийн шинэчилсэн сурах бичиг, 10хх, УБ, 1969

5. Гэндэнжамц Х., 6-р ангийн Геометрийн сурах бичиг, 12хх, УБ, 1974
6. Гэндэнжамц Х. нар, 9-р ангид үзэх Геометрийн сурах бичиг /шинэ программаар/, 12,5хх, УБ, 1975
7. Гэндэнжамц Х. нар, 8-р ангид Геометр заах аргын зөвлөмж, 8хх, УБ, 1975
8. Гэндэнжамц Х., Геометрийн шинэ программаар төлөвшигдөх зарим мэдлэг чадвар, 8,2хх, УБ, 1976
9. Гэндэнжамц Х., Буулгалт, 4хх, УБ, 1972
10. Гэндэнжамц Х., 9-р ангид вектор огторгуйн тухай сургаалийг төлөвшүүлэх арга зүй, 6хх, УБ, 1976
11. Гэндэнжамц Х., 7-р ангид шинэ программаар заах геометрийн сурах бичиг, 17хх, УБ, 1976
12. Гэндэнжамц Х. нар, 10-р ангийн Геометрийн сурах бичиг, 13хх, УБ, 1976
13. Гэндэнжамц Х. нар, 6-р ангид алгебр-геометр заах аргын зөвлөмж, 6хх, УБ, 1976
14. Гэндэнжамц Х. нар, 7-р ангид алгебр-геометр заах аргын зөвлөмж, 7хх, УБ, 1977
15. Гэндэнжамц Х. нар, 6-р ангид математик заах арга зүй, 3хх, УБ, 1977
16. Гэндэнжамц Х. нар, Орос хэл дээр математикийн ном судлагчдад зориулсан тусламж, 3хх, УБ, 1977
17. Гэндэнжамц Х. нар, 8-р ангийн геометрийн сурах бичиг, шинэчилсэн хэвлэл, 9хх, УБ, 1979
18. Гэндэнжамц Х. нар, Ахлах ангийн геометрийн багш нарт тусламж, 6хх, УБ, 1979
19. Гэндэнжамц Х., Математик заах аргын лекцүүд, 8хх, УБ, 1984
20. Гэндэнжамц Х. нар, 9-р ангид геометр заах арга зүй, 4хх, УБ, 1987
21. Гэндэнжамц Х. нар, 10-р ангид геометр заах арга зүй, 8хх, УБ, 1988

22. Гэндэнжамц Х. нар, Формирование теоретико-множественного фундамента геометрии. Кандидатын диссертаци. 1973
23. Гэндэнжамц Х. нар, Формирование теоретико-множественного фундамента геометрии. Автореферат, Москва, 1973
24. Гэндэнжамц Х. нар, Дээд математикийн сурах бичгийн 2-р дифференциал геометрийн үндсүүд, 4хх, УБ, 1989
25. Гэндэнжамц Х. нар, Геометр 9, математик мэдээлэл зүй, тооцоолох техникийн үндэс, физикийн төрөлжсөн сургалттай ангид зориулсан сурах бичиг. 4хх, УБ, 1995
26. Геометр 7, 1997
27. Геометр 8, 1998
28. Геометр 9-10, 1999
29. Геометр заах арга зүй, 7-р анги, 1997
30. Геометр заах арга зүй, 8-р анги, 1998
31. 9-10-р ангийн геометрийн багш нарт зориулсан заах арга зүйн зөвлөмж, 1999
32. Сурагчийн дэвтэр, 7-р анги, 1999
33. Сурагчийн дэвтэр, 8-р анги, 1999
34. Сурагчийн дэвтэр, 9-р анги, 1999
35. Сурагчийн дэвтэр, 10-р анги, 1999

2. Бичсэн өгүүлэл товхимлууд

36. Гэрийн даалгавар. Багш сэтгүүл, ?3, 1 хуудас, 1956
37. Сурагчдын математикийн бэлтгэл хангалтгүй байгаагийн зарим шалтгаан, тэдгээрийг арилгах нь, СХ сэтгүүл N4, 5 тал хуудас, 1962
38. Математикаар мэргэжигчдийн анхааралд, СХ сэтгүүл N3, 4 тал хуудас, 1964
39. Багасч барагдахгүй хэмжигдэхүүний тоолол, СХ сэтгүүл N5, х83-90, 1964
40. Оройн дунд сургууль төгсөгчдийн математикийн мэдлэгийн чанарын тухай, СХ N6, 1964
41. Математикийн курс ба амьдралын холбоог сайжруулах тухай, Үнэн N7, 1964

42. Бодлого яаж бодох вэ? Математикийн тухай товхимолд. 1хх, 1965
43. Математикийн мөн чанар. Залуучуудын үнэн, 1970
44. Олонлог ба буулгалт. СХ N2, 5тал хуудас
45. Программчилсан сургалтын тухай. СХ N6, х35-42, 1972
46. Хийсвэрлэлт ба сургалт, СХ N2, х106-108, 1972
47. Математик сургалтын ээлжит зорилтууд. СХУХ-ийн эрдэм шинжилгээний бичигт, х22-30
48. 6-р ангийн геометрийн хичээлүүд. СХ N4, х55-61, 1974
49. 6-р ангийн геометрийн хичээлүүд. СХ N5, х 36-46, 1974
50. Ухагдахуун ба түүнийг төлөвшүүлэх тухай. СХ N3 х75-78, 1975
51. Дидактикийн зарчмууд ба математик сургалтын шинэ систем. СХ N1, х56-60, 1976
52. Дидактикийн зарчмууд ба математик сургалтын шинэ систем. СХ N2, х65-70, 1976
53. Шинэ программаар 7-р ангид дөрвөн өнцөгт сэдвийг заах асуудалд. СХ N6, х91-97, 1980
54. Математик сургалтын шинэ системээр хичээллэсэн анхны дүнгээс. МУИС, ЭШ бичиг, х21-23, N4 (80), 1982
55. 6-р ангид геометр заахад. СХ N4, х27-31, 1977
56. 6-р ангид геометрийн материал заах асуудалд. СХ ?5, х42-47, 1976
57. Геометр ба харьцангуйн онол, МУИС, ЭШ бичиг, 4хуудас, 1972
58. Тулгуур конспект. МУИС, ЭШ бичиг (хэвлэлд)
59. Бодлого бодох чадвар. МУИС, ЭШ бичиг, хэвлэлд

3. Орчуулсан ба редакторлосон ном зохиолууд

60. Геометр VI-VIII, 1963, ред.
61. Геометр VI, 1964, ред.
62. Геометр VII, 1976, ред.
63. Геометр VIII, 1979, ред.
64. Геометр IX, 1975, ред.

65. Геометр Х, 1976, ред.
66. Физик-математикийн факультетийн сургалт заах арга зүйн бичиг. 1977, ред.
67. Геометрийн бодлогын хураамж, 1976, ред.
68. Атом аврага, ред. 1962
69. Статилатав С.И., Тригонометрийн бодлогын хураамж. 1958, 1963, 1967, ред. ?

Ж.Ухнаа, "Хутагтын нутгийн алдартнууд", 2005 номноос

Математикч эрдэмтэн

Хандын Гэндэнжамц 1932 онд Дорноговь аймгийн Хатанбулаг (Агаруут) сумын нутагт төрсөн, малчин гаралтай хүн билээ. Түүний эцэг нт Толийн зуу хэмээн олноо алдаршсан томоохон хийдийн унзад лам Балган гэгч хүн байсан тухай нутгийн хууч-цуул ярилцдаг юм. Хүний учрал тавилангаар тэр эрдэмт хүний үр нь болж хорвоод мэндэлсэн ч цагийн аясыг дагаад арга буюу эхээрээ овоглож явсан юм. Гэсэн ч ухаант мэргэн ардын маань " сайн хүний үр, суут гүүний унага" гэж ярьдагчлан түүний сэтгэн бодох онцгой чадвар ой ухаан нь эцгээсээ удамтай байж ч болох юм. Тэрээр 1941-51 онд Дорноговь аймагт ерөнхий боловсролын дунд сургууль, дараа нь 1951-55 онд МУИС-ийн физик математикийн салбарыг дараалан онцсайн дүнтэй төгссөн билээ.

МУИС төгссөний дараа Булган аймагт нэг жил багшлаад, төгссөн сургуульдаа багшлах урилга авч, 1956 оноос МУИС-ийн багш тэнхимийн эрхлэгчээр 46 жил ажиллажээ. Энэ хугацаанд Х.Гэндэнжамц багш 1962-63 онд Ленинград (одоогийн Санкт Петербург) хотноо Улсын Их Сургуулийн геометрийн тэнхимд мэргэжил дээшлүүлэн, 1965-69 онд Москвагийн улсын их сургууль (МГУ)-д дифференциал геометрийн тэнхимд аспирантурт нь сурч төгсчээ. Үүний дараа 1972 онд Москвад сурган хүмүүжүүлэх ухааны дээд курс төгсөөд 1973 онд Сурган Хүмүүжүүлэх Ухааны Академийн Агуулга Арга Зүйн Эрдэм Шинжилгээний Институт дээр "Геометрийн онол - олонлогийн суурь төлөвшүүлэх нь" сэдвээр сурган хүмүүжүүлэх ухааны дэд эрдэмтний зэрэг хамгаалжээ.

Тэрээр 1968 оныг хүртэл геометр, тригонометрийн сурах бичиг, бодлогын хураамжийг орчуулах талаар ихэд анхаарч ирсэн бол 1968 оноос хойш геометрийн сурах бичгүүдээ зохиож, мөн олон ном зохиол эрдэм шинжилгээ судалгааны шинжтэй өгүүлүүд бичиж нийтлүүлсээр байв.

Ялангуяа геометрийн арга зүй, сургалтанд орчин үеийн сэтгэл зүйн ололтуудыг тусгаж, улмаар 7-10-р ангийн геометрийн хичээлээр судлах бүх курсийн агуулгыг олонлог - логикийн тэмдэглэлд үндэслэн хориодхон тулгуур конспектод багтаан эмхэлсэн нь математик сургалтын маш том ололт байлаа. Ахлах ангийн сурагчид геометрийн бодлогыг өөрсдөө задлан шинжилж, бодох аргачлалаа сонгож авах, түүндээ анализ хийх, дүрсийн хэлхээний арга хэрэглэх зэрэг бүтээлч эрэлхийлэл хийх нэгдмэл ерөнхий алгоритм боловсруулжээ. Ингэснээр тэдний сэтгэн бодох хүрээг тэлж өгөх арга зүйн ач холбогдолтой шинэчлэлийг хийсэн гэж үздэг. Улмаар үүнийгээ шинээр төгсч байгаа оюутнуудад тусгай курс семинараар аргачлан тайлбарлаж, мөн энэ чиглэлээр дипломын ажил удирдан, гарын авлага материал хэвлүүлэх, жил бүр хот хөдөөгийн багш нарын төрөлжсөн семинарыг зохион байгуулах зэргээр завсар чөлөөгүй ажилласаар байв.

Тэрээр эрдэм шинжилгээ, сургалт арга зүйн бүхэл бүтэн цогц нэгдмэл үйл ажиллагааг хөтлөн удирдаж, цаглашгүй их хөдөлмөрөөр шинэ санаа дэвшүүлж, шинэ бүтээл туурвин гаргасаар байсан юм. Сүүлийн жилүүдэд түүний бичсэн гол гол бүтээлийг хурайнгуулан авч үзвэл ЕБДС - ийн 7 - 10 -р ангийн геометрийн сурах бичгүүд, тэдгээрийг заах арга зүйн зөвлөмжүүд, (багш нарт зориулсан 3 товхимол) мөн сурах бичгээр сурагчдын үйл ажиллагааг анги тус бүрээр чиглүүлж өгсөн аргачлал зөвлөмж бүхий дасгалын дэвтрүүд (4 ном) зэрэг 10 гаруй ном бүтээл хэвлүүлэн гаргажээ. Үүнээс онцлон авч үзвэл зохих зүйл бол ерөнхий боловсролын сургуулиудад анх удаа нэг төрлийн хичээлээр ийм иж бүрэн, залгамж уялдаа бүхий цогц хэрэглэгдэхүүн зохиосон нь үлэмж ач холбогдолтой юм. Үүнийг үнэхээр нэг хүн хийж бүтээсэн гэхэд арай л ахадмаар санагддаг. Яах аргагүй Гэндэн багшийн өөрийнх нь олон жил-

ийн туршид хуримтлуулсан мэдлэг туршлага, бүтээлч эрэлхийллийн үр дүн байлаа. Үүнийг магадгүй түүнээс өөр хэн ч байсан өдгөө хараахан хийж амжихгүй, эсвэл ийм цогц бүтээл гарах хугацааны хувьд хэдэн жилээр хойшлогдсон байхыг үл үгүйсгэнэ. Түүнчлэн ийм бүтээл турвин гаргаад, тэдгээрийн аргачлал зөвлөмжийг боловсруулж, дараа нь түүнийгээ гардан хариуцдаг багш сурган хүмүүжүүлэгч нарт зааж зөвлөн, семинар хийх зэргээр дэс дараатай, зохион байгуулалтын их ажил өрнүүлж байсан нь түүний цуцашгүй бүтээлч, санаачлагатайг илтгэн харуулж байв. МУИС-ийн математик компьютерийн сургуулийн геометр сургалтын дидактикийн тэнхимийн багш, профессор У.Доёд: "Манай Гэндэнжам маш чадварлаг, бүтээлч, өндөр боловсролтой хүн байсан" гэж тодорхойлсон билээ. Мөн энэ тэнхимийн багш, Гэндэн багшийн гарын шавь нарын нэг доктор, дэд профессор Дэнсмаа: "Дайчин шаардлагатай, гадаад хэлний боловсрол сайтай, ямар ч юмыг хийхдээ пизайн талаас нь их анхаардаг, нягт нямбай хүн байсан" гэсэн билээ. Х.Гэндэнжамц багш их ажлын дараах амралт, чөлөөт цагаараа дуу хөгжим сонирхдог, ер нь хөгжмийн их авъяастай байсан юм. Түүнтэй хамт дунд сургуулийн 1-р ангиасаа эхлээд хамт суралцаж, дараа нь олон жилийн туршид нэг тэнхимд ажилласан У.Доёд багш хоёулаа мондалинаас эхлээд шанз хуучир, хөөргөн хөгжим гээд хоршин тоглоогүй зэмсэг бараг үгүй ажээ. Нэгэн удаа тэдний хамтран тоглосон "Мартагдангүй хөгжмийн эгшиг" сэдэвт нэгэн сайхан нэвтрүүлэг телевизийн фондод хадгалагдан байдаг юм. Төр засгаас Гэндэнжамц багшийн хөдөлмөр зүтгэлийг үнэлж 1972 онд Засгийн газрын хүндэт жуух бичиг, 1981 онд хөдөлмөрийн хүндэт медаль, 1991 онд хөдөлмөрийн гавъяаны улаан тугийн одонгоор шагнаж байв.

Түүний сургалт арга зүйн хийгээд эрдэм шинжилгээ судалгааны ажлын үр дүнг үнэлж, ардын боловсролын тэргүүний ажилтан (1974), Доцент (1978), Залуу үеийг халамжлан хүмүүжүүлэгч, арга зүйч (1989), МУИС-ийн хүндэт профессор цолоор удаа дараа шагнаж байжээ. Тэрээр 1996 онд "Дунд сургуулийн геометр сургалтын шинжлэх ухаан, арга зүйн үндэс" сэдвээр

шижлэх ухааны докторын зэрэг амжилттай хамгаалав. Докторын диссертацид хавсаргасан зохиогчийн нийт 52 бүтээлийн жагсаалт орсны дотор манай орны математик сургалтын зарим асуудал, геометрийн шинэчилсэн сурах бичиг (1969), формирование теоретическо - множественного фундамента геометрий (1973) зэрэг асуудал дэвшүүлсэн гол гол томоохон бүтээл орсон байлаа. Түүнийг 1999 онд Шинжлэх ухааны тэргүүний ажилтан цол тэмдгээр шагнаж, Монголын математикийн багш нарын Академийн жинхэнэ гишүүний өргөмжлөл хүртээсэн юм.

Х.Гэндэнжамц багшийн санаж бодож явсан эрмэлзэл, хүсэл зорилго түүний гарын шавь нар, эхнэр хүүхдийн хамтын хүчин зүтгэл сааршгүй их хөдөлмөрийн ачаар хэрэгжин бүтлээ. Эгэл жирийн, тайван амгалан, дөлгөөн сайхан, сод ухаантай энэ хүн, зорьж явсан үйл болох дунд сургуулийн геометрийн сургалтын шинэчлэлийг иж бүрэн цогцоор нь хийж хэрэгжүүлээд 2001 оны зуны тэр нэг сайхан өглөө бурхныхаа оронд явсан билээ. Түүний хань доктор профессор Д.Цэрэндулам гуай дурсан ярихдаа: "Тал-ийгаач маань хүнийхээ хувьд зөөлөн тайван, хүнлэг сайхан сэтгэлтэй, мөс чанар, ноён нуруу сайтай, маш бүтээл, чадварлаг хүн байв" гэсэн юм. Монгол улсын соёлын гавъяат зүтгэлтэн, сэтгүүлч Л.Гүнсэн: " Шинэ эриний хөгжил дэвшлийн хэл, хөл, зүтгүүр нь математик гэж үзвэл Монгол Улс энэ ид шидийн ухааны нэгэн хөгчөө алдлаа " гэж сэтгэлээсээ харамсан халаглаад, түний тухай нүдэнд харагдтал зурж бичсэн нь: "Математик бичиглэлийн утга санааг тайлахдаа сунайсан их тэгшитгэлийн урт цувааг багш маань цэрдтэй гараараа үе үе төөлж, бас заримдаа атгаж байгаа ч юм шиг, хэсэг бүлгээр нь зөөж, зааж үзүүлэх нь сэхээтэй хүний ой тоонд нь яг л атгаж аваачаад хүртээх шиг болдогсон" гээд, "Тэрээр аналитик геометр тэр дундаа хавтгайн хэмжил зүйгээр Монголдоо хаан нь байсан юм" гэж дурсан өгүүлжээ. (Зууны мэдээ, 2001 оны 188 дугаарт)

Х.Гэндэнжамц багшийнх гэр бүлээрээ математикч, эрдэм судлалын хүмүүс юм. Гэргий Д.Цэрэндулам гуай математикч мэргэжилтэй, 1963 оноос эхлэн Улсын Багшийн Их Сургуульд 30 гаруй жил багшилж байна. Боловсролын доктор, УБИС-ийн

хүндэт профессор (2002) хүн юм. Тэдний бага хүү Г.Бум-Эрдэнэ бас математикийн багш, аав ээжийнхээ мэргэжлийг өвлөн авсан хүн билээ. Харин бусад хүүхдүүд нь геологич, эдийн засагч мэргэжилтэй хүмүүс бий. Энэ их хүний суу алдар эргэх үеийн тоолонд улам бүр тодорч, хойч үеийнхний өмнө мөнхийн гэрэлт бамбар адил мандан бадарч байг.

Эмхэтгэсэн Г.Ариуна, 2010-04-20

Эрхэм андаа эргэн дурсахуйд

Толийн Зуугийн Балган Умзадын хүү агсан Гэндэнжамц (Хуврагийн далай) бид хоёр нэг нутгийн андууд 1941-45 онд Агаруут сумын бага сургууль, 1945-48 онд Хөвсгөл сумын 7 жилийн сургууль, 1948-51 онд Сайн-Шандын бүрэн дунд сургууль 1951-55 онд МУИС-ийг хамт суралцаж төгссөн 1962-2001 онд МУИС-ийн математикийн тэнхимд мөн л хамт ажиллаж байлаа. Бид ийнхүү хүүхэд ахуй цагаасаа нэг айлийн хүүхдүүд шиг хамт хичээлээ давтаж, тоглож, наадаж, дуулж, бүжиглэж хөгжимдөж, хэрэлдэхдээ хэрэлдэж, хэлэлцэхдээ хэлэлцэж энэ хорвоод ганцхан туулах насныхаа ихэнхийг хамт өнгөрүүлсэн хоёрдоо.

Талийгч анд маань бусдын тусын тулд өөрийгөө хичнээнч золиослохоос буцдаггүй бурхан чанартай хүн байсандаа. Эл нандин чанар нь түүний эрдэм шинжилгээний олон бүтээлд нэвт шингэсэн байдаг нь санаанаас ер гардаггүй юм.

Хүн бүхэн бие махбодын, сэтгэл санааны, оюун ухааны, амин орны гэсэн 4 зүйлийн эрч хүчтэй бөгөөд түүгээрээ амьдралын хэрэгцээт бүхнээ туурвин бүтээж байдаг. Аливаа орны нийт иргэний дээрх 4 зүйлийн эрч хүч бол тухайн нийгмийн үл шавхагдах баялаг - дотоод нөөц болж байдаг.

Боловсролын тогтолцоо нь, энэ дотоод нөөцийг үлэмж хөг-жүүлж байгаа орон бүр бие даан хөгжих сацуу бусад оронтой хөгжлөөрөө өрсөлдөх чадвар нь түргэн өсдөг болсноор олон орон хүн төвт хөгжлийн бодлого барих болсон. Нийгмийн шинэчлэл

бүхэн боловсролын шинэчлэлд суурилж, боловсролын шинэчлэл нь боловсролын шинэ стандартад суурилдаг болжээ. Боловсролын шинэ стандартын гол агуулга нь суралцагсадад цогц чадамж төлөвшүүлэхэд чиглэх болсон. Иймээс ЮНЕСКО аливаа боловсролын зорилго нь суралцагсдад мэдэх арга ухааны, бүтээх арга ухааны, бие дааж оршин тогтнох арга ухааны, нийгэмшин иргэнших арга ухааны 4 зүйл цогц чадамж төлөвшүүлэхэд оршвоос зохилтой гэж зөвлөмжилсөн билээ.

Талийгч анд минь дэлхий дахины боловсрол шинэчлэлийн эдгээр үзэл санааг эх орныхоо нөхцөлд тохируулан бүтээлчээр хэрэгжүүлэхийн чухлыг гүн гүнзгий ухаарч дунд сургуулийн геометр сургалтын онол арга зүйн иж бүрэн тогтолцоо боловсруулаад дунд сургуулийн 6-10 дугаар ангид туршин хэрэгжүүлсэн юм. Түүний бүтээлч сургалт, судалгааны дүн болж гарсан олон шинэ сурах бичиг, дидактикийн чухал багц зөвлөмж, бодлого бодуулж сургах өвөрмөц арга зүйн лавлах зэрэг нь одоо манай орны бүх дунд, дээд сургуулийн сурагч, оюутан, багш нарт чухал хэрэгцээт гарын авлага болсоор байна. Ганц энэ баримт гэхэд л түүний бусдын тусын тулд гэсэн бурханлаг санаа нь амьдралд хэрэгжиж түмэн олонд ач тусаа хайралсаар байгааг нь тод илтгэн харуулж байна.

МУИС, МКС-ийн багш Монгол Улсын Гавъяат багш, дэд проф. У.Доёд

Х.Гэндэнжамц багшийн судалгаа аргазүйн ажлын ач холбогдолын тухайд.

Францын нэрт математикчид 19-р зууны дунд үеэр Математик уу? Математикууд уу? гэсэн асуулт дэвшүүлж, Никола Бурбаки хэмээх нэрийн дор нэгдэж Математикийн олон салбарласан ухаануудыг нэг үзэл санаагаар тайлбарлах /судлах / зорилгоор олон боть ном бичиж "Орчин үеийн математик" гэсэн нэр томъёог дэлгэрүүлсэн байна. Тэд анхны бүтээл "Олонлогийн онол" /Теория множеств/ -номдоо математикийн анхдагч ухагдахуунаар Терм /объект-олонлог/ Соотношение/харьцаа /

хоёрыг авч, эдгээр ухагдахуунд тулгуурлан математикийн үндсэн тогтоцуудыг байгуулах үзэл санаа, зорилт дэвшүүлжээ. Энэ үзэл санааг Олон улсын математикч-эрдэмтэд сайшаан дэмжиж Н.Бурбакийн бүтээлүүдийг эх хэлэндээ хөрвүүлэхийн зэрэгцээ энэ үзэл санааг сургалт, судалгааны ажилд хэрэгжүүлэх, олон бүтээл туурвих замаар дэлгэрүүлсэн байна. Энэ үзэл санааг Монгол орноо дэлгэрүүлэн хөгжүүлэх үйл хэрэгт 1960-аад оны дундаас ЗХУ-ын Москва хотноо сурч байсан бидний багш

Х.Гэндэнжамц ихээхэн үүрэг гүйцэтгэж, тодорхой амжилт үзүүлсэн юм. Тэрээр 1969 онд Д.Ламжав, бид хоёрт Н.Бурбакийн "Общая топология" ном ирүүлсэн нь орчин үеийн математик-ийн үзэл санааг дэлгэрүүлэх болон бидний гадаадын нэр хүндтэй сургуулийн аспирантурт ерөнхий топологийн чиглэлээр сурахад үнэтэй хувь нэмэр болсон юм.

Манай орны ЕБС-ийн геометрийн сургалтын агуулга, арга зүйг орчин үеийн математикийн үзэл санааг хэрэгжүүлэх байдлаар боловсруулж, бодит үр дүнд хүргэхэд маш их хүч чармайлт гаргаж судалгаа, аргазүйн үнэтэй олон бүтээл туурвисан юм. Тэрээр судалгааны ажлынхаа үр дүнд тулгуурлан олонлог, логик, буулгалт, харьцааны хэлээр ЕБС-ийн геометрийн сурах бичиг, зөвлөмж, дасгал ажлын дэвтрийг удаа дараа өөрөө, гэр бүлээрээ бичиж сургалтын практикт нэвтрүүлсэн юм. Түүний судалгааны ажлын үр дүнгүүд нь дотоод, гадаадын нэрт эрдэмтэд, судлаачид өндрөөр үнэлж шинжлэх ухааны доктор зэрэг олгосон билээ. Манай улсын ЕБС-д математик хэмээх нэг хичээл судалж буй өнөө үед, математикийн бага, дунд боловсролын стандартыг хэрэгжүүлэх, ялангуяа уламжлалт агуулгыг бага цагт, нэг үзэл санаагаар хэрэгжүүлэхэд Гэндэн багшийн судалгааны үр дүн чухал ач холбогдолтой боловч судлаачдаа хүлээж байна.

МУБИС-ийн Монгол Улсын Гавъяат багш Ж.Баатар

Манай ангийн Хандын Гэндэнжамц

Бид МУИС-ийн тоо - физикийн ангийг 1951 - 1955 онд нэг ангид хамт суралцаж төгссөн билээ.

Х. Гэндэнжамц уншсан зүйлийнхээ учрыг олж ухаарч ойлгодог, бодлого бодохдоо тал бүрээс сэтгэж оновчтой арга олж боддог хурц ухаантай, ой сэтгэгц сайн оюутан байв. Уншиж мэдсэн зүйлээ бусад нөхөддөө гарамгай сайн ярьж өгдөг, тусч, орос, монгол хэлэнд тэгш сайн оюутан байв. Мэдсэн зүйлээ бусдад зааж тайлбарлах чадвар сайтай оюутан байв.

Манай ангид Х. Гэндэнжамц, У. Доёд, Л. Дамба, Г. Додон, И.Тарханов, Н. М. Асеев гэсэн тогтмол онц сурдаг оюутнууд байсан. Эдний дотроос Х. Гэндэнжамц хичээл сурлага, зан харилцаа авъяас билгээр тодрон шалгарч 3-р курсээс эхлэн Х. Чойбалсангийн нэрэмжит тэтгэлэг авдаг байв.

Х. Гэндэнжамц хөгжимдэх, дуулах, бүжиглэх авъяастай. Ямар ч юманд хүнийг сайн муу гэж ялгаварлахгүй найзлах нөхөрлөх туслаж, дэмжихийг эрмэлздэг олон нийтэч тусч хүү байв.

Биднийг төгсдөг жил Их сургуулийн 200 гаруй оюутан мэргэжилтэн болж гарсан бөгөөд бүгдийг нь хөдөө орон нутагт ажиллуулах уриалга гарч Гэндэнжамц нь Булган аймагт тоо физикийн багшаар хувиарлагдаж явахад Дорноговь аймгаас өндөр настай ээж Ханд нь ирэн үдэж албанд мордуулж байж билээ. Булган аймагт нэг жил багшласны дараа МУИС татан авч багшлуулснаас хойш энэ сургуульдаа насан турш ажиллаж олон мянган оюутны хайртай, нэр хүндтэй багш нь байсан билээ. Энд ажиллахын зэрэгцээ ном сурах, бичиг товхимол зохиох, арга туршлагаа хэвлүүлэх ажлыг их хийсэн.

Ангийн анд найз нөхөд У. Доёд, Ц. Амарсанаа, Д. Цэдэндамба, А. В. Лошенко нарыг дагуулж хамтарч ном, сурах бичиг бичих судалгаа шинжилгээний ажилд сургахад үлгэрлэн дагуулж туслагч, зөвлөгч нь байсан билээ. Өөрийн идэвхтэй судлаж, бүтээсэн бүтээлээ нэгтгэж сурган хүмүүжүүлэх ухааны дэд эрдэмтэн, докторын зэргүүдийг амжилттай хамгаалсан юм. Мөн Их сургуулийн хүндэт профессор цол хэргэм хүртсэн тэргүүний

үлгэр жишээ ч багш байв. Манай ангийн оюутнууд хоорондоо эв нэгдэл сайн хичээлээ хамтарч давтдаг. Ойлгосон сэдвээ бусад нөхөддөө хэлж тусладаг, математик - физикийн бодлогыг хамтарч боддог байсан. Энэ нөхөрсөг тусч ажиллагаанд Х. Гэндэнжамцын нөлөө тус маш их байдаг байлаа. Ажил алба хашиж байх үед ч УБ хотод амьдарч байсан хүмүүс уулзах, бие биенээ дурсан санаж ажил амьдарлаа танилцуулж хөөрөлдөхөд Х. Гэндэнжамц бид бүгдийн санаа сэтгэлд мөнхөрсөн сайн найз нөхөр маань билээ, Бидний хойч үе Х. Гэндэнжамц шиг сэргэлэн сурч мэдэхийн төлөө цаг заваа зөв зарцуулж эрдэм номтой, их бүтээлтэй хүн болохын төлөө тэмцэн ажилладаг байгаасай гэдгийг хүсч байна.

Ангийн анд, ахмад багш Д. Баатар
А. В. Лошенко

Их говийн тооч-сэтгэгч

Эхлэл

Гэндэнжамц багшийн үйл, амьдралыг дурсан тэмдэглэх санаатай ажиллаж байна гэж Далайжамц над руу утас цохиод,

-Та багшийн тухай сэтгэгдлээ бичиж өгнө үү гэхэд нь мунгинуухан байсандаа болоод зав муутай л... гэх зуур

- Багшийг аспирантурт сурч байхад та Дубнад сууж холбоотой байсан биз дээ гэхэд нь яалт ч үгүй аль хэдийнэ туулсан амьдрал тэмцлийн бараа, бодолд зэрэглээ мэт сүүмэлзэн сайн нөхрийн минь ямагт сэргэлэн цовоо, нөхөрсөг зан, хол ойр, эерэг сөргийг шүтэлцүүлэн гүн санаа ургуулдаг авъяас билиг нь тодров. Тэгээд

- За би жаахан бодож мартснаа сэргээгээд, номын анд нөхрөө дурсан чухам юу зориулан хэлэхээ болгоогоод хэдэн мөр тэрлүүлье гэсэн юм.

Сургуульд орсны 9 дэх жил. Г. Додон багш их сургуулийн тоо-физикийн анги төгсч ирлээ. Тоо бодлого намайг багш руу хөтөлж шавь оруулсан билээ. Багшийгаа дагаж хорхойсон зүтгэсээр чамгүй л юм сурч байсан цаг. Математик тооны шидийг

бахдахдаа, багш маань надтай хамт Гэндэнжамц гэж нэг ухаантай тооч төгссөн юм. Төгсч очоод танилцаж, мэдэхгүй юмаа асууж байгаарай гэж зөвлөж байсныг санаж байна. Их сургуульд суралцах хугацаанд бид тулж тааралдалгүй өнгөрлөө. Харин жараад оны төгсгөл рүү тоо-физикийн зам биднийг айлсуулсан юм. Тэр цагаас бидний эрдэм, сэтгэлгээний зүс, зүг нийлж, уулзаж учрах бүрийд санаа сэдэл төвөггүй найран ном хаялцан нэг нэгэндээ эрч илч хайрладаг байсан.

Харьцангуй буюу хоосон чанар

Сайн анд, багш минь Тэнгэрийн орондоо хэдийнэ буцжээ. Мөнхийн юм огтхон ч үгүй. Орчлон бүхэлдээ математикийн хэлээр бол шугаман бус үйлийн үрийг туулна. Энэ нь нүүдэлчний төсөөллөөр хэлбэл аливаа юмс хуйлран уймрах буюу луу унжих лугаа төс төрх бүхий үйлийн үрийг туулна гэсэн үг. Тэрхүү хуйлрал аяндаа цэгцрэхүй төөргийн цэгт хүрч төрөл, төрх олдог юм бололтой. Гэвч төрөл олох бол "эгшин" төдий зуурдын төлөв билээ. Тэгэхлээр юуны ч, хэний ч бай бие цогцос бол миний буюу тэрний юм биш, ерөөсөө Орчлонгийн мах боди хувилахуйн зуурдын бүрэлдэл мөн. Аху юмс, бүрэлдэл хоосон буюу харьцангуй зуурдын чанартай. Энэ харьцангуй чанарыг нүүдэлч монголчууд "цаг цагаараа байдаггүй, цахилдаг хөхөөрөө байдаггүй" хэмээн тэнгэр- этүгэн- бие- сэтгэлийн шүтэлцэхүйн гүн билиг ухаанаар "теорем"-лон томъёолсон байдаг юм.

Хүмэнэй цогцос буюу эх нутгийн атгахан эрдэс шороо бол Орчлонгийн оюун ухааныг тээж, тэтгэсэн дээдийн гэгээн заяатай билээ. Байгаль ертөнцийн хувьсал бол хаос хэмээх хуйлрал-уймрал аж. Уймарлаас уужирч ухаан орж онгойх нь жам. Энэ нь бүр Орчлонгийн жам байж. Аливаа юмс байгаль хаос үйлийн үрийг туулахаараа ирээдүйг сонгодог юм байж. Сонгох бол мэдээж ухаарал мөн. Чингэхүй их хувьсал Орчлонгийн ухаарлыг бүтээжээ. Тиймээс ухаан бол минийх ч, түүнийх ч биш Орчлонгийн төгс туйл бүтээл юм. Харин гагцхүү бодол санаа л бол "минийх" гэх бүтээгдэхүүн аж. Гэндэн багш маань сэт-

гэл ариун бөгөөд эрчтэй санаа сэдэлтэй хүн байсан юм. Амьсгал бол амьдралын чанар, хөтлүүр, хэмжүүр байдаг юм байна. Энд ийн томъёо хийгээд хууль томъёоллоос хөндийрөн өгүүлэхийн учир нь багш бид чинь тал хээр, говь нутагтаа шилбүүрээ орхиод номд нэгэн үед зүтгэх зууртаа эрдмийн билчээрт тааралдаж, санаа бодлоо уралдуулж явсны өнгө аясыг тусгасан дурсгал буюу.

Нар гарна

Жараад оны сүүл хирд бидний тоо, физикийн хэдэн залуус гэр бүлээрээ Дубнад сууж ажиллав. Бид чинь "малчин" бүрэгхэн "хөдөөнийхөн" л байлаа. Одооны залуус даяаршилд дасч, дэлхий тэдэнд ойрхон болжээ. Гэндэн багш хааяа нэг Дубнад ирэх. Тэгэхэд бидний "нар" гардаг байлаа. Тэнгэрийн орондоо буцсан багш Цэдэндамба, Жаргалын манайхан багшийн хөгжилтэй яриа, төрх зангий нь бахдан бөөнөөрөө дагадаг байсан юм. Багш маань их говийн хүн болохоороо ч тэгдэг юм уу уужуу, яриа шог хөгжөөн нь "хөнгөн" зөөлөн хөлтэй морины явдал мэт байсан нь санагдана. Архийг сэтгэлийг баясан бадраахын хэрэглүүр төдий хэрэглэнэ. Эвлэг хөгжилтэй дуулах нь их говьдоо дуу аялгуугаараа өнгөрсөн, өнөө, өнө ирээдүйхэнтэйгээ учран сэтгэлээр баян хүмүүжснийх нь илрэл юм болов уу ч гэмээр байдаг юм. Тэр цагийг дурсахуйяа

Сулин хээрийн хүрэн нь

Сарын холдоо жонжоотой

Саруул говийн Гэндэн багш

Сансар айлсам сэтгэлтэй

хэмээн дөрвөн мөр зориулмаар санагдлаа.

Өндөр цамхагт

Нэг намар Москва ороод буцаж чадалгүй оройтоод багш руу МГУ-ийн өндөр цамхагт очлоо. Багш номондоо улайж зүтгээд нилээд ядарч, ганцаардаж, гэрээ ч санасан бололтой. Намайг очсонд учиргүй баярлаж, борцтой хоол хийлээ. Хоёул аятайхан баясан амраатхая гэнэ. Над ганцхан "четвертинк" байснаа гар-

гав. Тэгээд хатуу юм чамлалтай, зорилго том байсан учир ар-вижуулахаар шийдэж, тавганд хийчихээд цайны халбагаар ууж их ярилцлаа. Багш нэрт эрдэмтэн П. К. Рашевскийд шавь орсон юм байж. Бид огторгуйн муруй геометрээс яруу найраг зохиомж, гүн ухаан хүртэл л ярьсандаа. Би ч баясан их тааламж авсан юм. Тэгж суухдаа хань Цэрэндулам, хүүхдүүддээ бичсэн захидлаа уншсан нь их л яруу үгтэй, уянга, гүн ухааны сэдэлтэй сонсогдож байсан даа. Тэр үдэш бидний санаа бодолд найраг нөхөрсөл бат үлдээсэн ажээ.

Шинжлэх ухааны доктор

1995 онд намайг ШУ доктор хамгаалсанд баяр хүргэж ирэхэд нь геометр сэтгэлгээнийхээ сэдэл бүтээлийг эмхлэн ШУ докторын зэрэг хамгаалж болмоор юм бишүү гэсэн санааг өлгөж шийдэмгий ажилласнаар эрдмийн дээд зэрэг горилох бүтээлээ туурвисан юм. Шүүмжид нь: "Хандын Гэндэнжамцын: "Дунд сургуулийн геометр сургалтын шинжлэх ухаан, арга зүйн үндэс" сэдэвт диссертацид мэдлэгийг дамжуулж дүрс томъёог "нүдлүүлдэг" зуршмал хэвшлээс зориглон салж суралцагсын бүтээлч сэтгэлгээг хөгжүүлэх арга барил төдийгүй заах арга зүйн системийг нь боловсруулсан үр дүнг эмхлэн нэгтгэжээ. Судалгааны үр дүнг 6-10 ангид туршиж сургалтанд нэвтрүүлсэн байна. Диссертац нь орчин цагийн математикийн үзэл санаа, сэтгэлгээ болон сурган хүмүүжүүлэх ухааны заагт өргөн цар хүрээтэй асуудлыг онол арга зүйн өндөр төвшинд шийдсэн дорвитой бүтээл" болсныг тэмдэглэн үнэлсэн байна.

Хорвоогийн гэрэлт наран доор нэгэн үе тааралдаж эгэл ахуйгаас эрдмийн өндөрлөг тийш сэтгэлд сэвгүй санаа эрчлүүлэн аяншин мацаж явахдаа Гэндэн багш бол теорем хийгээд томъёоллоос суларч геометр огторгуйн хэц хэцүүгээс наашлуулаад гэр аху, гэнэн багачуудын ой тойнд төвөггүй буух танихуйн эгэл сэдэл түлхүүрийг атгасан хүмэнэй нэгэн гэдгийг мэдэрч хүндэлсэн билээ.

Х. Гэндэнжамц багшийн сэдсэн санаа бүтээл эрдмийн тэнгэрт мөнх оршино.

Физмат ухааны : доктор, проф.
физикч онолч, математикч, ШУ гавьяат зүтгэлтэн
Шугаман бус эрдмийн ОУ академийн жинхэнэ гишүүн,
Нью-Йоркийн ШУ академийн жинхэнэ гишүүн,
ХХ зууны дэлхийн 2000 шилдэг хүний дипломт,
Дэлхийд хэний хэн бэ? Нэвтэрхий тольд данстай,
Монголын оюуны өндөр чадавхитай хүний нэг, (IQ)
МУИСОХ-ны 2007 оны шилдэг багш цолтой,
МУИС,их сургуулиудын холбооны 2008 оны шилдэг багш

О.Лхагва

Багшаа хүндэтгэн дурсахуй

Миний оюутан байх хугацаанд Х.Гэндэнжамц багш маань аспирантурт суралцаж байсан учир би энэ их хүнээс оюутан ахуйдаа юм сонсож чадаагүйдээ харамсаж явдаг байлаа. Гэвч нэг тэнхимд хамт ажиллах их завшаан надад тохиосон юм.

Манай багш маш их мэдлэгтэйн гадна их гоё бичнэ, дуулна, бүжиглэнэ, их цэгцтэй сул үггүй ярина, хүн чанар сайтай, оросоор маш сайн ярьдаг хүн байсан.

Би багштай хамт математик өгүүлбэр батлах төлөвлөгөө дүрсийн ба томъёоны хэлхээ зохиох, 9, 10-р ангийн геометрийн хичээл заах гарын авлага бичих, 9, 10-р ангийн геометрийн зурган конспект хийх, 6-р ангийн геометрийг буулгалтын хэл дээр заахаар бичсэн номыг нь турших ажлыг хийж, хөдөөгийн багш нарт дээрх боловсруулсан зүйлээ турших ажлыг хамтран хийж багшаас их юм сурсандаа. Ингэж хамт ажиллахад зарим үед инээдтэй юм шиг зүйл гардаг байсан. Би их муухай бичнэ. Тэхээр багш маань эмэгтэй хүн байж даан ч дээ гээд ураад хаяна. Тэгэхээр нь би айгаад юу ч бичиж чадахаа больдогсон. Үүнийг багш маань ойлгосон юм уу? тэгвэл би чамайг хоолонд даая даа гээд Улаанбаатар ресторонд орно гэдэгсэн.

МУИС, МКС-ийн багш , дэд проф. М.Дэнсмаа

1958 онд МУИС-д оюутнаар элсэж, намрын ажилд явж ирээд хичээлд ороход нэг муухай мөртлөө ойлгомжтой яриатай бор парайтай багш хичээл заасан нь миний сэтгэлд нэг насаар хоногшиж үлдэх учиртай Гэндэнжамц багш минь байсан юм билээ.

Хожмоо бид Гээнээ багш гэж дотносон нэрэлдэг болж билээ. Бидэнд уурлаж, биднийг загнана гэж байхгүй боловч хичээвэл, хийвэл сурдаг л юм гэдгийг мэдрүүлээд байдаг өвөрмөц харьцаатай хүн байлаа. Өөрөө их ч ажилсаг, байнга уншиж судалж шинийг сурч, мэдэж байдаг байсан.

Эрдмийн зэрэг хамгаалахын хамт үр хүүхдээ өсгөх, өсвөр үеийнхнээ сургах ажлын алийг нь ч орхилгүй явсаар ертөнцийн жамыг дагасан юм.

Тэр хүний бичсэн ном, ялангуяа дунд сургуулийн геометрийн сурах бичгүүдээр нь олон хүүхэд, олон багш геометр гэдэг ертөнцөд хөл тавьж замаа олох үүд болсон гэдэгт эргэлзэх хэрэггүй юмаа.

Гагцхүү манай зарим эмчийн хүнлэг сэтгэл, чин эрмэлзлэл дутсаных гэмээр харамсалтай явдал болж бид эрхэм хүнээсээ эрт салсанд харамсаж явдаг даа.

Энэ бодлоо хэлэх боломж олгосон улсын математикийн олимпиадыг зохион байгуулж, удирддаг нөхөд болон бурхан болооч багшийнхаа гэр бүлийхэнд, хойч үед нь урт насалж удаан жаргаж, үйлсийг нь үргэлжлүүлэхийг ерөөе.

МУИС, МКС-ийн багш, дэд проф. А.Хашбаатар

Хандын Гэндэнжамц миний багш

С.Намжилдорж намайг 1958 онд Мандалговь хотын 10-н жилийн сургуулийг төгсөөд МУИС-ийн Байгалын Ухааны Факультет-ийн математикийн салбарт элсэн орж оюутан болсон тэр цагаас эхлэн багш, шавь болж хожмоо нэг тэнхимд багшаар хамтран ажилласан билээ. Тэр үед монгол багш нар цөөн байсан учир

залуухан багш нар маань ачаалал ихтэй ажилладаг. Тухайлбал Х.Гэндэнжамц багш бидэнд "Математик анализ" хичээлийг дөрвөн бүтэн улирал, Комплекс хувьсагчийн функцийн онол, Дифференциал болон Проектив геометр. Геометрийн үндэслэл зэрэг хичээлүүдийг тэр үеийн онолын өндөр түвшинд зааж биднийг математикаар суралцах хүсэл сонирхлыг улам хөгжүүлэн суралцах арга барилд сургасан ачтан багш минь байлаа.

Түүнээс гадна манай анги удирдсан багшаар бүтэн дөрвөн жил ажилласан бөгөөд бидэнд суралцах арга барил, шинжилгээ судалгааны ажил хийх, мэргэжилдээ үнэнч байж монгол улсад математикийн шинжлэх ухааныг хөгжүүлэхэд чармайн ажиллахыг цаг ямагт зөвлөж сургадаг байсан. Ийм ч учраас манай төгсөгчдөөс 5-нь их дээд сургуульд, нэг төгсөгч тэр үеийн техникумд багшаар ажиллаж байна. Х.Гэндэнжамц багш монголд математикийн шинжлэх ухааныг хөгжүүлэх, хүүхэд залуучуудыг математикт дур сонирхолтой болгохын төлөө өөрийн бүх авъяас чадлыг дайчлан ажиллаж их, дээд, дунд сургуулийн олон арван сурах бичиг, гарын авлага зохион бичиж, орчуулж олны хүртээл болгосон манай нэрт сурган хүмүүжүүлэгч байлаа. Түүнээс ерөнхий боловсролын дунд сургуулийн геометрийн хичээлийн заах аргыг сайжруулах зорилгоор багш нарт зориулан VI-XI-ангийн геометрийн сурах бичгийг зохиож нийтийн хүртээл болгосон бөгөөд энэ сурах бичгүүдийг манай онолын мэдлэг сайтай тэргүүний багш сурган хүмүүжүүлэгч нар ашигласаар байна. Түүнээс гадна ялангуяа геометрийн хичээлийг заах багш нарт зориулсан хэд хэдэн зөвлөмжийг бичиж хэвлүүлсэн. Х.Гэндэнжамц багш маань монголд математикийн шинжлэх ухааныг хөгжүүлэх талаар өөрийн бүх авъяас чадлаа дайчилж заах аргыг сайжруулахын тулд сэтгэл зовон хичээнгүйлэн ажиллаж, заах аргаар шинжлэх ухааны докторын зэрэг хамгаалсан агуу их сурган хүмүүжүүлэгч билээ.

Х.Гэндэнжамц багш маань хөгжмийн асар их мэдлэг, мэдрэмж туршлагатай хөгжимд, ялангуяа үндэсний хөгжмийг оюутан, залуучуудад сурталчлахад ихээхэн үүрэг гүйцэтгэсэн хүн байлаа.

Манай Гэндэнжамц багш маань маш их ажилсаг, даруу төлөв зантай шавь нарыгаа үргэлж хүндэтгэн хайрладаг энэрэнгүй манай нэрт математикч, сурган хүмүүжүүлэгч байлаа.

Ид бүтээх үедээ аюулт өвчний улмаас нас барсанд одоо хүртэл олон арван шавь нар чинь харамсан гашуудаж таныг цаг үргэлж санан дурсаж байдаг билээ.

МУИС, МКС-ийн багш , С.Намжилдорж

Миний бие эрдэм номын эрхэм хүндэт их багш өөдрөг гэгээлэг хүн Х.Гэндэнжамц багш агсны ажил, амьдрал, амжилт бүтээл, ач буяныг дурсан санахгүй байх аргагүй, мэдэхгүй байх эрхгүй нэгэн шавь нь билээ.

Багшийнхаа гэгээн дурсгалыг хүндэтгэн, багшийгаа дурсан бичих сайхан боломж, аз тохиож байгаа явдалд баяртай байна. Багш манай ангид "Дээд геометр"-ийн ерөнхий курс хичээлийг мөн багшлах мэргэжлийн тусгай курс хичээлүүдийг зааж, Вейлийн аксиоматикт тулгуурлан туурвисан IX ангийн геометрийн хичээлийн сурах бичгийн агуулга, аргагүйг нийслэлийн V сургууль дээр туршин зааж байсан тэр үеэс бид хоёр багш шавийн барилдлагатай болсон юм. Энэ их хүмүүний сурган хүмүүжүүлэх, шинжлэн судлах, туурвин бүтээх, удирдан зохион байгуулж, манлайлах, урлаг уран сайхан гээд л өргөн хүрээт үйл ажиллагааг аль болох олон талаас бичиж байж багшийн үнэн бодит, дүр төрх бүрэн гүйцэд тодрон гарч ирэх учиртай. Гэвч энэ нь бичгийн хэлээр , миний илэрхийлэн бичих чадвараас давсан хэрэг болно. Иймээс багшийнхаа эрдэм ухаан авъяас чадал, хийсэн бүтээсэн их үйл хэргээр бахархах нэгэн үзүүрт сэтгэлдээ хөтлөгдөн зөвхөн хичээл, сургалт судалгааны ажилд холбогдох талаас цухас дурьдан бичье.

Дорнын гүн ухааны мэргэд, ертөнцийн дотоод гүний нэгдлийг танин барьсан хүний оюун ухаан хөгжиж, сэтгэл санаа ариусан, энэрэнгүй нигүүлсэнгүй сэтгэлтэй болдог гэж сургасан байдаг. Багш маань орчин үеийн математикийг онолын өндөр түвшинд шимтэн судалж, хүн математикт амжилттай суралцах

арга ухааныг нээн илрүүлснийхээ ачаар чухам энэхүү чадамжийг эзэмшсэн нэгэн байсан.

Хийсвэрлэх, ерөнхийлөх, тусгайлах, зүйрлэх гэх мэт онолын сэтгэхүйн барилуудыг чадамгай ашиглан, ярьж буй зүйлийнхээ агуулгын шинжлэх ухааны төвшинг өндөрт өргөж чадахын сацуу утга санааг нь хүний ой тойнд буутал хялбар энгийн бөгөөд прагматик шинжтэй болгон элементарчилж чаддаг, бас хүмүүсийн анхаарлыг өөртөө татаж өвөрмөц сонирхолтой үг хэллэг жишээ баримтаар баяжуулан яруу сайхан ярьж хичээлээ заадаг, ярих илтгэх урлагт маш сайн суралцсан сурган хүмүүжүүлэгч байжээ. Бичиж боловсруулах ажлыг хийхдээ цүнхнээсээ цаас гаргаж ирээд ямарч засваргүй шууд л маш өндөр бүтээмжтэй бичиж байгаа байдал ажиглагддаг байлаа. Ийм учраас нас нилээд ахисан үедээ 1 жилийн дотор ЕБС-ийн геометрийн сурах бичиг, сурагчдын дадлага ажлын дэвтэр, багш нарт өгөх арга зүйн зөвлөмж гэх мэт 10 гаруй ном, гарын авлагыг биччихсэн байсныг санаж байна.

Ярианы болон бичгийн орос хэлийг их сайн эзэмшсэн эрдэмтэн багш байсан. Энэ нь юунаас мэдэгдэж байсан бэ? гэвэл манай ангид "Дээд геометр"-ийн хичээлийг багш оросоор заасан юм. Тэр үед хичээлээ орос хэлээр заахыг багш нараас шаарддаг байсан юм билээ. Уг хичээлийн агуулга, оюутны хувьд хангалттай хүнд байсан боловч бидэнд хэлний бэрхшээл харьцангуй бага гарч байсан санагддаг. Энэ бол багшийн хэлний боловсрол сайн байсантай холбоотой болов уу.

Х.Гэндэнжамц багшийн дэд эрдэмтний зэрэг хамгаалж бичсэн диссертацийг орос хэл дээр уншиж байхад төвөггүй ойлгогдож байсан нь миний орос хэлд сайных биш, харин энэхүү гадаад хэлийг багш маань эх хэл шигээ л эзэмшсэний гэрч бизээ. Аливаа бичиг баримтыг орос хэл дээр боловсруулан бичихдээ огт түүртэлгүй шууд бичээд тавьчихдаг байсан юм.

Байнга шинэ соргог үзэл санаа, арга зүйг сэдэж олох, математикийн багш нарын математикийн онолын болон мэргэжлийн дидактик ур чадварыг дээшлүүлэх асуудлаар маш тууштай ажиллаж тодорхой амжилтад хүрч байсныг дурсан санахад сайхан

байна. Тухайн үедээ сургалтын шинэ арга зүй боловсруулахын онолын нэг үндэс болон хэрэглэгдэж эхэлж байсан тогтолцооны шинжилгээний аргыг дунд сургуулийн геометр сургалтын практикт нэвтрүүлэн хэрэглэсний тодорхой нэг үр дүн нь стереометрийн аливаа бодлогыг бодох үйлийн гүйцэд ерөнхий баримжаа болох дүрсийн хэлхээний аргыг боловсруулсан явдал юм. Ахлах ангид үзэх геометрийн хичээлийн бүхэл бүтэн агуулгыг цөөн тооны тулгуур хүрдээр илэрхийлэн үйлийн ерөнхий баримжаа таниулах хэрэглэгдэхүүн болгон ашиглаж ЕБС-ийн багш нарын мэрэгжил дээшлүүлэх сургалтыг зохион байгуулсан нь маш их үр дүнтэй ажил болсныг дунд сургуулийн зарим ахмад багш нар өнөө хүртэл дурсан ярьсаар байдаг нь хэдийгээр тэр цагаас хойш хугацаа нилээд өнгөрсөн боловч энэхүү үйл ажиллагаа нь үнэ цэнээ алдаагүй эдүгээг хүрсний тод илрэл юм.

Математик сургалт, ялангуяа Геометр сургалтын арга зүй технологийг тухайн үеийнхээ онолын хамгийн шинэлэг үзэл баримтлалд тулгуурлан шинэчлэн хөгжүүлэх замаар үр дүнг дээшлүүлэх асуудалд байнга анхаарч, энэ талаар өөрийн бүтээлч сэтгэхүй, сэтгэл санаагаа ямагт дайчлан ажиллаж байсныг дурсан санахад сайхан байдаг.

Тухайн хичээл сургалтын агуулга, арга зүй үнэлгээний асуудалд байнга санаа тавин ажиллаж, шийдвэр гаргадаг байгууллагаар орж, эрх мэдэл бүхий хүмүүстэй уулзаж, тэдэнд өөрийн үзэл бодлоо хэлж ойлгуулах, гарах шийдвэрт нь нөлөөлөх эзэнтэй байх нь уг сургалтын технологийг шинэчилж, үр дүнг дээшлүүлэхэд чухал ач холбогдолтой байдаг нь:

багшийн тухайн үед явуулж байсан үйл ажиллагааг эргэн дурсах энэхүү мөчид мэдрэгдэж байна. Багшийг сэрүүн байх тэр үед ямар ч байсан Геометрийн хичээл алгебрийн хичээлээс тусдаа заагддаг цагтай, сурах бичигтэй байсан. Одоо бол тоо тоолол, алгебр, геометр, магадлал статистик гэсэн 4 айг хамтатган "Математик" гэсэн ерөнхий нэрийн дор ЕБС-д үзэж судалж байгаа нь геометрийн хичээлийг зарим сурагч огт үзэлгүй өнгөрөх нэг шалтгаан болж буй нь ажиглагддаг болж. Геометрийн хичээлийн, хүүхдийн оюун ухаан, сэтгэлгээг илүүтэй

хөгжүүлдэг тэр ач холбогдлыг сайтар ухаарч энэхүү хичээлийн сурах бичиг, сурагчийн дадлага ажлын дэвтэр, багшид өгөх арга зүйн зөвлөмж зэрэг хэрэглэгдэхүүнийг бичиж боловсруулах, орчин цагийн хамгийн тэргүүний үзэл баримтлалд тулгуурлан геометрийн хичээл заах багш нарын мэдлэг мэрэгжлийг дээшлүүлэх ажлыг өөрийн үүрэг, хариуцлага мэтээр ухамсарладаг байсан. Багш угаас ухаан сэргэлэн нэгэн байсан болохоор бодол санаагаа их ойлгомжтой, уран хошин байдлаар илэрхийлж байдагсан.

Тухайлбал. Бид нэг удаа манай нийгэмд байгаа болохгүй бүтэхгүй байгаа зүйлийг тоочин ярилцаж байхад орж ирээд та нар болохгүй байгааг нь тоолсноос болж байгааг тоолбол хамаагүй цөөн, амар бишүү гэж байж билээ. Энэ нь асуудлыг нэг талаас нь авч үзэж шийдэх нь хүнд байвал нөгөө талаас нь авч үзэж шийддэг математик аргыг амьдралд хэрэгжүүлж буй явдал байж. Харин амьдралынхаа сүүлийн жилүүдэд хүмүүс таны бие тэнхээ сайн уу? гэж асуухад удовлетворительно-(дунд зэрэг) юмуу та нар намайг гаднаас хараад таниад байх юм, дотроо бол шал өөр хүн болчихоод байна гэж олонтоо хэлдэг болсон байж билээ. Энэ нь өөрийнхөө биеийг нэг л тааруу байсныг товч тодорхой илэрхийлж байсан нь тэр байж дээ. Ирээдүй хойч үеийнхнээ оюун сэтгэлгээний болон ёс суртахууны эрхэм дээд төлөвшилтэй, эх орноо цэцэглүүлэн хөгжүүлэх үйл хэрэгт бодитой хувь нэмрээ оруулах чадамжтай бүтээлч иргэд болгон хөгжүүлэхийн төлөө насан туршдаа тэмцсэн их үйл хэрэг тань сэтгэлчлэн бүтэх сайхан ирээдүй байгаа гэдэгт итгэлтэй байдаг.

шавь МУИС, МКС-ийн МДГТ-ийн эрхлэгч доктор, дэд проф. Ц.Далайжамц

Багшаа дурсахуй

Ахлах ангид байхдаа багшийнхаа зохиосон геометрийн шинэ сурах бичгийн тухай мэдэж, үзсэн ч гэлээ. Харамсалтай нь манай сургууль дээрх хуваарь ёсоор би тэр сурах бичгийг судлах ангид хуваарилагдаагүй азгүй нэгэн. Харин их сургуулийн 3-р

ангид ордог намар Гэндэнжамц багшаараа Проектив геометрийн хичээл заалгасан азтай хүмүүсийн нэг.

Одоо багшийнхаа зааж байсан хичээлүүдийг зааж байхдаа "Тухайн хичээлийг бидэнд ойлгуулах гэж" хэрхэн хөдөлмөрлөдөг байсныг нь ухаардаг даа.

Намайг их сургуульд дөнгөж багш болсон 1983 оны тэртээх намар

- Чи Гончигдорж багшийнхаа (ШУ-ы гавъяат ажилтан доктор Р.Гончигдорж) зааж байсан "Тасралтгүй бүлэг" гэдэг нарийн мэргэшилийн хичээлийг математикийн 4-р ангийханд ороорой гэлээ.

Би бага зэрэг имээсхийн - Багшаа би судалж байгаагүй сэдэв байна. Тэгээд Гончигоо багшийн зааж байсан хичээлийг дагаж заана гэдэг. Яах бол? гэж хэлтэл.

- Бүгд л судалж байгаагүй хичээлээ судалж, бас мэргэжилдээ өсдөг юм. Заах хичээлээ оюутнуудаасаа 3-аас 5-н сэдэв түрүүлээд судалчих дараа жил гэхэд жигдэрчихнэ гээд "намуухан харцаар" харах нь итгэл бас даалгавар байлаа . . . Ингээд бидний яриа дууслаа гэсний дохио.

Багш маань маш энгийн бараг уурлахгүй. Үнэхээр эрдмийн хүн тул зарим үед амьдралд тохиолддог ердийн бэрхшээл бол мань хүний хувьд бараг байж боломгүй үзэгдэл мэт болчихно. Гэвч за тийм л юм байлгүй дээ гээд л хүлээгээд авчихна.

Залуу багш нар 3-н жил 5-н жил болоод шалгалт өгдөг. Багш ажлын тайланг сонсоод сууж байснаа за хүү минь чи ямар ямар хичээл орж байна гэж асууснаа. Тухайн хичээлүүдийн нилээд гол хэсэг болох сэдвүүдийг нэрлээд хүү минь наад сэдвүүдээ самбарт шохой аваад яриатах гэлээ. Энэ нь багш шавийн харьцаа хичнээн найрсаг байлаа ч "зарчим бол зарчим" гэдгийг залуу хойч үедээ мэдрүүлж байгаа нь тэр. Хичээл нэг бүрийг яавал үр дүнтэй болгох вэ? нийт багш нарын хөдөлмөрийг яаж хөнгөвчлөх вэ? гэхэд судалгаа шинжилгээний гол асуудлыг туурвисан хүн. Лекц семинар бүрийн хичээлийг төлөвлөж, конспектийг нэг бүрчлэн бичиж орно. Амьдралын сүүлийн жилүүддээ ч тийм л байсан.

Хааяахан гэрт нь очиход ер нь л ном бариад сууж байдагсан. Заримдаа заасан хичээлээ санаандаа хүртэл "ойлгуулж чадаагүй" бол бага зэрэг бухимдалтайгаар тэнхимдээ орж ирнэ. Тэгсэнээ би л зааж чадаагүй юм байх даа гэж бурууг нь өөртөө л хүлээнэ. Багшийн маань энэ зан чанар манай орны мянга мянган багш нар, залууст сургамжтай бас "замнууштай" зам учир тодотгон дурслаа.

Гэнээ багшийнхаа энэ их эрдэм хөдөлмөрч чанар, өгөөмөр сайхан сэтгэл өчүүхэн ч гэсэн хүртэж явснаа би аугаа их хувь заяа гэж бодож явдаг даа.

МУИС, МКС-ийн ахлах багш А.Булган

Багшаа дурсахуй

Гэ багшийнхаа тухай бодох бүр хайрлах хүндэтгэх, шүтэх бишрэх мэдрэмж зэрэг зэрэг төрж бидний өмнөх үеийн ах нарт маань Бурхан багш оюун ухаан, авъяас билгийг арай илүү хайрлаа юу даа гэж бодогдох үе байсныг нуух юун.

Жараад оны сүүл рүү МУИС-ийн Алгебр-Геометрийн тэнхим-ийн семинарыг нэг үе Гэ багш маань "гомолог алгебр" -аар хөтлөн явуулж, орчин үеийн алгебрийн нэг хүчтэй аргыг Монгол нутагтаа суурьшуулахын төлөө тун ч санаачлагатай ажиллаж залуучууд бидэндээ сайхан үлгэр дууриал үзүүлэн Монголынхоо математикийг нэг шат ахиулахад голлох үүрэг гүйцэтгэснийг дурсахгүй байхын аргагүй. Гомолог алгебрын онолын тэр нарийн асуудлыг ярихаараа багшийн цог хийморь илтэд сэргэж, онгод нь орсон яруу найрагч шүлгээ уншиж байна уу гэлтэй ер бусын үзэсгэлэнтэй харагддагсан.

Багшийн бас нэг томоохон авъяас бол дуу хөгжим юм. Гэ багш (лимбэ, мандолин), Доёд багш (лимбэ, мандолин), алдарт хуурч Балдан (мэргэжлийн хөгжимчин, хуучир), манай эхнэр Оюунбат (мэргэжлийн хөгжимчин, шанз) нар амралтын өдөр Балдан гуайнд очиж дандаа ардын сайхан дуунуудыг хөгжимдөж, дуулж хуучлах их дуртай байдагсан. Энэ үнэгүй концертын ганц үзэгч нь ардын дуунд нугасгүй миний бие байх.

Гэ багшийн бурхан болсныг сонсоод эхнэр маань одоо бидний нийлэлт утгагүй боллоо. Хөгжмийн ховорхон мэдрэмж, авъяастай ахыг минь арай л эрт аваад явчихлаа гээд нулимсаа барьж чадахгүй байж билээ.

Гэ багшийн нэрэмжит Монголын Математикийн 45-р Олимпиад түүний төрсөн нутагт зохиогдоход хангай газар ч ховорхон тохиолдох нар хур тэгширсэн хонхор хотгор болгонд нь нуур тойрон цэлэлзсэн хаврын налгар сайхан өдрүүд байсан нь эртний ерөөлийг өгүүлэх мэт, нэгийг бодогдуулж, хоёрыг санагдуулж байлаа. Дорноговийн БСГазарын дарга Чойбаатар "Би жаран хэд наслахдаа 5 сарын эхэнд ингэж хэд хэд бороо орохыг, заримдаа бүр хэд хоногоор зүсэрч орохыг үзсэнгүй, манай энд чинь 7 сар гарч байж л ганц хоёр юм дусах энүүхэнд газар шүү дээ" гэж байхав.

Их багштан маань буян хишгээ хайрлаж Монголынхоо оюун сэтгэлгээний охь манлай болсон олон сайхан охид хөвгүүдийг Ноён хутагтынхаа дэлхийн энергийн төвөөр аялуулж, од хийморийг нь сэргээх учиртай байж дээ . . .

Түм түмэн шавь нарынхаа хайр хүндэтгэл, ерөөл буянаар багштан маань Бурхны орноо лавтайяа залрахдаа, өчүүхэн муу дүү-шавь нь чармайн хичээж, эмхэтгэн гаргаж буй энэ номоороо нэгэн зул өргөн барьж байгааг минь болгоон соёрхох буй заа.

МУИС, МКС-ийн МУГБ, проф. Ц.Дашдорж

3 Монголын математикийн XLV олимпиад

3.1 ММО-45, VII ангийн III даваа

Б.Сандагдорж (МУБИС), Э.Азжаргал (МУБИС)

VII-A1. (Ш.Батхшиг) $\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = \frac{3}{7}$ тэгшитгэлийн бүх
бүхэл тоон шийдийг ол.

VII-A2. (Б.Сандагдорж) Анх самбарт “512” тоо бичигджээ. Минут тутамд бичигдсэн тооны оронд, тэр тооны цифрүүдийн үржвэрийг эсвэл уг тоон дээр нэмж, эсвэл уг тооноос хассан ялгаврыг самбарт бичнэ (бичигдсэн тооны оронд самбарт бичих юм). “512” тоо дахин самбарт бичигдэхгүй гэж батал.

VII-A3. (Ч.Гантөмөр) Хоёр сурагч ээлжлэн хавтгай дээр цэг тэмдэглэнэ. Эхний сурагч нэг улаан цэг тэмдэглэсний дараа хоёр дугаар сурагч 1000 хөх цэг тэмдэглэнэ. Дараа нь эхний сурагч дахин нэг улаан цэг тэмдэглэх ба хоёрдугаар сурагч мөн 1000 хөх цэг тэмдэглэнэ. Гэх мэтээр цааш үргэлжилнэ (өмнө тэмдэглэсэн цэгийг дахин тэмдэглэхгүй). Тэгвэл эхний сурагч зөв гурвалжны орой болох 3 улаан цэг тэмдэглэж чадахыг батал.

VII-B1. (Ц.Нямдаваа) Цифрүүдийнх нь квадратуудын нийлбэрийг уг тоонд харьцуулсан харьцаа хамгийн их байх хоёр оронтой тоог ол.

VII-B2. (Н.Аргилсан) Сонгон авсан тоонуудын үржвэр нь үлдсэн тоонуудынхаа үржвэртэй тэнцүү байхаар дараалсан 28 натурал тооноос хэдэн тоог сонгон авч чадах уу?

VII-B3. (Э.Азжаргал) Адил талт ABC гурвалжны AC тал дээр орших M цэгээс AB, BC талууд руу MP, MQ перпендикуляруудыг харгалзан татав. O нь ABC гурвалжны хүндийн төв бол OM шулуун PQ хэрчмийг таллан хуваана гэдгийг батал.

3.2 ММО-45, VII ангийн III даваа бодолт

$$\text{VII-A1. } \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow \frac{x+y}{(x+y)^2+3(x-y)^2} = \frac{3}{28}$$

$\left. \begin{array}{l} x+y=p \\ x-y=q \end{array} \right\}$ гэж орлуулбал $\frac{p}{p^2+3q^2} = \frac{3}{28} \Leftrightarrow 28p = 3(p^2+3q^2)$ болно. $p > 0$ тул $3 \mid p$ гэдгээс $p = 3k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Эндээс $28k = 3(3k^2+q^2)$ болно. $k > 0$ тул $3 \mid k$ гэдгээс $k = 3m$ ($m \in \mathbb{Z}$) болно. Иймд $28m = 27m^2+q^2$ гэдгээс $28m - 27m^2 = q^2 \leq 0$ тул $m = 1$ болно. Эндээс $k = 3$, $p = 9$, $q = \pm 1$ гэж гарна. $\begin{cases} x+y=9 \\ x-y=\pm 1 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (4;5) = (5;4)$ гэсэн бүхэл тоон шийдтэй.

VII-A2. Эхлээд дараах чанарыг баталъя.

4-т хуваагдахгүй тэгш тооны цифрүүдийн үржвэр 4-т хуваагдана

$\nabla x = \overline{\dots ab}$ тэгш тоо ба $4 \nmid x$ байг. Тэгвэл b нь тэгш цифр ба $4 \nmid \overline{ab}$ болно. Хэрэв b нь 4-т хуваагдах цифр бол x тооны үржвэр цифрүүдийн үржвэр 4-т хуваагдана. Хэрэв b нь 4-т хуваагдахгүй цифр бол $4 \nmid \overline{ab} = 10a + b$ гэдгээс a нь тэгш цифр болно. Иймээс $a \cdot b$ тоо 4-т хуваагдана гэдгээс x тооны цифрүүдийн үржвэр 4-т хуваагдана. $\triangle$

Анх самбарт 512 гэсэн тоо өгөгдөв. Энэ тооны оронд 502 ба 522 гэсэн хоёр тооны аль нэг нь бичигдэх болно. Энэ хоёр тоо нь 4-т хуваагдахгүй тэгш тоо учир цифрүүдийн үржвэр нь 4-т хуваагдана. Тэгэхээр цаашид самбарт бичигдэх тоо үргэлж 4-т хуваагдахгүй тэгш тоо байна.

VII-A3. Эхний сурагч n ширхэг улаан цэг тэмдэглэсэн гээ. Өмнө тэмдэглэсэн 2 улаан цэг дээр оройтой зөв гурвалжин хоёрыг байгуулж болно. Өөрөөр хэлбэл эхний сурагч n цэг тэмдэглэсний дараа ахин нэг цэг тэмдэглээд зөв гурвалжин үүсгэх бололцоотой байрлал $n(n-1)$ болно. Тэгэхээр эхний сурагч нэг шулуун дээр n ширхэг улаан цэг тэмдэглэе. (Энэ нь 2-р сурагчийн үйлдлээс ердөө ч хамаарахгүй.) Ингээд зөв гурвалжин үүсгэж болох байрлал $n(n-1)$ болно. Энэ үед $1000n$ ширхэг хөх цэг тэмдэглэгдсэн байх юм. Бид $n(n-1) > 1000n$ байх

n -ийг төвөггүй олчихно. ($n > 1001$) Жишээлбэл $n = 1002$ болог. Ингэхэд 2-р сурагч, эхний сурагчийн зөв гурвалжин үүсгэж болох байрлалуудыг яаж ч хаагаад эхний сурагчид зөв гурвалжин үүсгэх байрлал ямагт үлднэ. Тэдгээрийн аль нэг дээрэхний сурагч улаан цэгээ тэмдэглэн бүх орой нь улаан өнгөтэй зөв гурвалжнаа байгуулах болно.

Нэмэлт Энэ бодлогод 2-р сурагч 10000, 100000, ... хичнээн ч их байх тооны хөх цэг тэмдэглээд 1 улаан цэг тэмдэглэх 1-р сурагчид хожигдоно. Энэ бодлогыг огторгуйд яаж өргөтгөх вэ?

VII-B1. $\overline{ab}$ хоёр оронтой тооны хувьд $\frac{a^2 + b^2}{\overline{ab}} = \frac{a^2 + b^2}{10a + b}$ харьцааг авч үзье.

$$\frac{a^2 + b^2}{10a + b} < \frac{a^2 + (b+1)^2}{10a + (b+1)}$$

учир $\frac{a^2 + 9^2}{10a + 9}$ нь бусдаасаа их. Харин $2 \leq a \leq 8$ үед

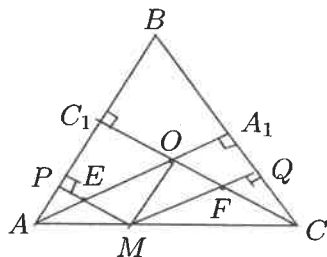
$$\frac{a^2 + 9^2}{10a + 9} < \frac{(a-1)^2 + 9^2}{10(a-1) + 9}$$

учир хамгийн их нь $\frac{1^2 + 9^2}{10 + 9} = \frac{82}{19}$ болно. ($a = 9$ үед $\frac{9^2 + 9^2}{90 + 9} < \frac{82}{19}$)

Иймд $\overline{ab} = 19$.

VII-B2. Зохиогч бодолтоо хийж чадаагүй байгаа учир уучлалт хүсэж байна. Бодолтын талаар жич мэдээлэх болно.

VII-B3.



ABC гурвалжинд CC_1 , AA_1 өндөр татав. $E = AA_1 \cap PM$, $F = CC_1 \cap QM$ гэж тэмдэглэе. $PM \parallel CC_1$ ба $MQ \parallel AA_1$ гэдгээс $FMEO$ дөрвөн өнцөгт нь параллелограмм болно. EF ба OM нь параллелограммын диагоналиуд учир огтлолын цэгээрээ хагаслан хуваагдана.

Мөн $\triangle AA_1C \sim \triangle MQC$ ба $\triangle CC_1A \sim \triangle MPA$ гэдгээс

$\frac{MF}{FQ} = \frac{AO}{OA_1} = \frac{2}{1}$ ба $\frac{ME}{EP} = \frac{CO}{OC_1} = \frac{2}{1}$ болно. Тэгвэл $\frac{MF}{FQ} = \frac{ME}{EP}$ гэдгээс $FE \parallel PQ$ болно. OM нь EF хэрчмийг хагаслан хуваана гэдгээс OM нь PQ хэрчмийг хагаслан хуваана.

3.3 ММО-45, VIII ангийн III даваа

Ч.Гантөмөр, Ш.Батхишиг

VIII-A1. (Ц.Нямдаваа) $\frac{a^2 + b}{b^2 - a}$ ба $\frac{b^2 + a}{a^2 - b}$ тоонууд нэгэн зэрэг бүхэл байх бүх эерэг бүхэл a, b тоонуудыг ол.

VIII-A2. (Ч.Гантөмөр) $a, b, c, d, e, f > 0$ бол

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d} + \frac{ef}{e+f} \leq \frac{(a+c+e)(b+d+f)}{a+b+c+d+e+f}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

VIII-A3. (Н.Аргилсан) O_1 цэгт төвтэй γ_1 -тойрог, O_2 цэгт төвтэй γ_2 тойргууд A ба B цэгээр огтлолцоно. O_1B ба O_2B шулуунууд харгалзан γ_2 ба γ_1 тойргийг F ба E цэгээр огтлоно. B цэгийг дайрсан EF -тэй параллель шулуун тойргуудыг M ба N цэгээр огтолдог бол AEF гурвалжны периметр $MN + EF$ -тэй тэнцүү гэж батал.

VIII-B1. (Б.Сандагдорж) Самбарт $1, 2, 3, \dots, 2008$ тоонууд бичигджээ. Хоёр тоглогч ээлжлэн дараах дүрмээр тоглоно. Дурын a ба b тоонуудыг арчаад оронд нь a^b тоог бичнэ. Хэсэг хугацааны дараа самбарт нэг тоо үлдэнэ. Хэрэв үлдсэн тоо 2, 7 буюу 8-аар төгсвөл 1-р тоглогч хожно, бусад тохиолдолд 2-р тоглогч хожно. Зөв тогловол хэн нь хожих вэ?

VIII-B2. (Ш.Батхишиг) $x^3 + y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2$ тэгшитгэл эерэг бүхэл тоон шийдтэй байх бүх натурал n -ийн утгыг ол.

VIII-B3. (Э.Азжаргал) A, B, C цэгүүд тойрог дээр оршино.

Тойргийг A, B цэгүүдэд шүргэх шүргэгчүүд P цэгт огтлолцно. C цэгт шүргэх шүргэгч AB шулууныг Q цэгт огтлох бол $PQ^2 = PB^2 + QC^2$ болохыг батал.

3.4 ММО-45, VIII ангийн III даваа бодолт

VIII-A1. Тэгш эрхтэй учир $a \geq b$ гэж үзье. $\frac{b^2 + a}{a^2 - b}$ нь бүхэл байхын тулд $b^2 + a \geq a^2 - b$ байх ёстой. Эндээс $b^2 - a^2 + a + b \geq 0 \Leftrightarrow (a + b)(b - a + 1) \geq 0$, $a + b > 0$ тул $b - a + 1 \geq 0 \Rightarrow b + 1 \geq a$ байна. Иймд $b \leq a \leq b + 1$ болно. Эндээс

а) $b = a$ үед $\frac{a^2 + a}{a^2 - a} = 1 + \frac{2a}{a^2 - a}$ болно. Эндээс $2a \geq a^2 - a \Leftrightarrow a^2 - 3a \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 3$ буюу $a = 0, 1, 2, 3$ $a^2 - a \neq 0$ тул $a = 2; 3$ болно. $(a; b) = (2; 2) = (3; 3)$

б) $b + 1 = a$ үед $\frac{(b + 1)^2 + b}{b^2 - (b + 1)} = 1 + \frac{4b + 2}{b^2 - b - 1}$ бутархайн хуваарь сондгой тул $2b + 1$ нь $b^2 - b - 1$ -д хуваагдах болно. Иймд $2b + 1 \geq b^2 - b - 1 \Leftrightarrow b^2 - 3b - 2 \leq 0 \Rightarrow b = 1, 2, 3$.

Иймд $(a; b) = (2; 1) = (3; 2)$

Хариу: $(2; 2), (3; 3), (2; 1), (3; 2), (1; 2), (2; 3)$ гэсэн шийдтэй.

VIII-A2. Эхлээд $\frac{xy}{x + y} + \frac{zt}{z + t} \leq \frac{(x + z)(y + t)}{x + y + z + t}$ тэнцэтгэл бишийг баталъя.

$$\frac{xy}{x + y} + \frac{zt}{z + t} \leq \frac{(x + z)(y + t)}{x + y + z + t} \Leftrightarrow$$

$$(xy(z + t) + zt(x + y))(x + y + z + t) \leq (x + y)(z + t)(x + z)(y + t)$$

задлаад эмхэтгэвэл $2xyz t \leq x^2 t^2 + y^2 z^2$ болж илэрхий тэнцэтгэл биш үүсгэв. ▽

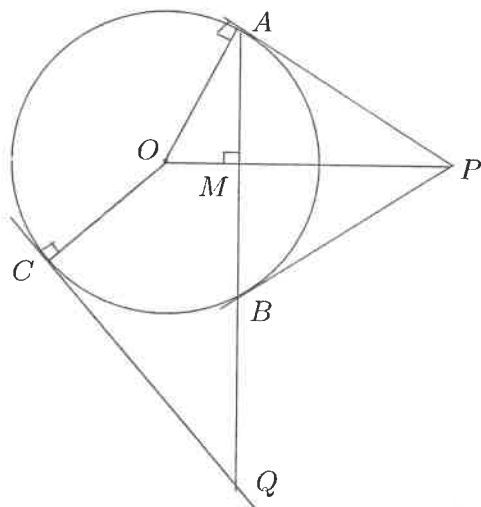
$$\frac{ab}{a + b} + \frac{cd}{c + d} + \frac{ef}{e + f} \leq \frac{(a + c)(b + d)}{a + b + c + d} + \frac{ef}{e + f} \leq$$

$(nx^2y^2 - (x+y))^2$ болно. Эндээс $n^2x^4y^4 \leq 2nx^2y^2(x+y) + x^3 + y^3$ ба $xy < 2\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{nx^3} + \frac{1}{ny^3}$ болно.

$x \geq 2$ үед энэ тэнцэтгэл биш биелэх боломжгүй. Иймд $x = 1$ байна. Эндээс $y < 2 + \frac{2}{y} + \frac{1}{n} + \frac{1}{ny^3}$ болно.

$y \leq 3$ үед тэнцэтгэл биш биелэх боломжтой. Иймд $y = 1$, $z = 1$ буюу $y = 2$, $z = 3$ үед тэгшитгэл шийдтэй байна. Эндээс $n = 3$ буюу 1 үед л тэгшитгэл эерэг бүхэл тоон шийдтэй байна.

VIII-B3.



Тойргийн төв O ба $OP \cap AB = M$ гэж үзье. $AM = BM$, $AB \perp OP$ болно. Шүргэгч огтлогчийн теорем ёсоор

$$\begin{aligned} CQ^2 &= BQ \cdot AQ = (QM - MB)(QM + MA) = QM^2 - AM^2 = \\ &= (PQ^2 - PM^2) - AM^2 = PQ^2 - (PM^2 + AM^2) = PQ^2 - AP^2 \end{aligned}$$

болно. Эндээс $PQ^2 = CQ^2 + AP^2$ болж батлагдав.

3.5 ММО-45, VIII ангийн IV даваа

Н.Аргилсан

VIII-A1 (Н.Аргилсан). $x_n = \frac{4n + 2\sqrt{n^2 + 2n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}}$ ерөнхий гишүүнтэй $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ тоон дарааллын эхний 2009 гишүүний нийлбэрийг ол.

VIII-A2 (Г.Батзаяа). a, b, c, d нь эерэг бодит тоонууд бөгөөд $a + b + c + d \geq ab^2 + bc^2 + cd^2 + da^2$ тэнцэл биш биелдэг бол $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq a + b + c + d$ тэнцэл биш биелэхийг батал.

VIII-A3 (Н.Дайвий-Од). $r = \sqrt{\frac{1}{2(1 - \cos 8^\circ)}}$ радиустай тойргийн цэгүүдийг хоёр өнгөөр яаж ч будсан нэгж зайтай нэг өнгийн хоёр цэг ямагт олдохыг харуул.

VIII-B1 (Н.Аргилсан). Аливаа p -анхны тоо ($p > 2$) бүрийн хувьд $(p^{2^{2009}} - 1)$ нь 2^k -д хуваагддаг байх k -натурал тооны авч болох хамгийн их утгыг ол.

VIII-B2 (Т.Хулан). ABC адил хажуут гурвалжны $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$ байна. ABC гурвалжны гадна D цэгийг $\angle DBC = \angle DCB = \alpha$ байхаар авав. D цэгийг дайрсан шулуун нь AC талыг M цэгт, AB талын үргэлжлэлийг N цэгт огтолно. Тэгвэл BM ба CN шулуунуудын хоорондох өнцөг нь α гэж батал.

VIII-B3 (Б.Батцэнгэл). Анги 15 сурагчтай. Нэг зурагт ангийн 3 эсвэл 4 сурагч зургаа хамт авахуулна. Ангийн аль ч хоёр сурагч ядаж нэг зурагт хамт зургаа авахуулсан бол тэд хамгийн цөөндөө хэдэн зураг авахуулсан бэ?

3.6 ММО-45, VIII ангийн IV даваа бодолт

VIII-A1. Эхлээд x_n -ерөнхийг гишүүний хүртвэр, хуваарийг хуваарийн хосмогоор нь үржүүлэн хялбарчлая.

$$x_n = \frac{4n + 2\sqrt{n}\sqrt{n+2}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\sqrt{n}(2\sqrt{n} + \sqrt{n+2})(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})}{\sqrt{n+2}^2 - \sqrt{n}^2} = \\
&= \frac{2\sqrt{n}(\sqrt{n} + (\sqrt{n} + \sqrt{n+2}))(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})}{n+2-n} = \\
&= \frac{2\sqrt{n}(\sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) + (\sqrt{n+2}^2 - \sqrt{n}^2))}{2} = \\
&= \sqrt{n}(\sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) + 2) = n(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) + 2\sqrt{n} = \\
&= n\sqrt{n+2} - \sqrt{n}(n-2) \text{ болно.}
\end{aligned}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \cdot \sqrt{3} - 1 \cdot (-1) \\ x_2 = 2 \cdot \sqrt{4} - \sqrt{2} \cdot 0 \\ x_3 = 3 \cdot \sqrt{5} - \sqrt{3} \cdot 1 \\ x_4 = 4 \cdot \sqrt{6} - \sqrt{4} \cdot 2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_{2009} = 2009 \cdot \sqrt{2011} - \sqrt{2009} \cdot 2007 \end{array} \right.$$

Эдгээрийг нэмбэл x_n ба x_{n+2} гишүүдийн эсрэг тэмдэгтэй нэмэгдэхүүнүүд нь хураагдаад

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2009} = 2008 \cdot \sqrt{2010} + 2009 \cdot \sqrt{2011} + 1 \text{ болно.}$$

VIII-A2. (Энэ бодлогыг нийт оролцогчдоос 2 л сурагч бүрэн бодолт хийсэн ба Коши-Буняковскийн тэнцэл биш ашиглаж бодсон байна. Иймд Кошийн тэнцэл биш ашиглаж бодсон бодолтыг авч үзье).

Өгсөн $a + b + c + d \geq ab^2 + bc^2 + cd^2 + da^2$ тэнцэл бишийн 2 талд $(a + b + c + d)$ -г нэмж өгвөл $2(a + b + c + d) \geq (ab^2 + a) + (bc^2 + b) + (cd^2 + c) + (da^2 + d)$ болох ба хаалт тус бүрд Кошийн тэнцэл биш хэрэглэвэл $2(a + b + c + d) \geq 2ab + 2bc + 2cd + 2da \Rightarrow a + b + c + d \geq ab + bc + cd + da$ (1) тэнцэл биш биелнэ.

Одоо $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} + ab + bc + cd + da$ илэрхийллийн хувьд Кошийн тэнцэл биш хэрэглэвэл $(\frac{a}{b} + ab) + (\frac{b}{c} + bc) + (\frac{c}{d} + cd) + (\frac{d}{a} + da) \geq 2(a + b + c + d)$ болно. Энэ тэнцэл бишид (1)-г хэрэглэн $(ab + bc + cd + da)$ -г $(a + b + c + d)$ -ээр солин ихэсгэвэл $2(a + b + c + d) \leq$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} + (ab + bc + cd + da) \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} + a + b + c + d$$

болох буюу $a + b + c + d \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}$ гэсэн батлах тэнцэл биш маань гарч ирнэ. Копийн тэнцэл биш дэх тэнцэх нөхцлийг санавал $a = b = c = d = 1$ үед тэнцэлдээ хүрнэ.

VIII-A3. (Энэ бодлогыг Олонлог сургуулийн 8-р ангийн сурагч Н.Санчир ганцаараа бүрэн бодсон байлаа. Түүний бодолт-

ыг авч үзье.) $r = \sqrt{\frac{1}{2(1 - \cos 8^\circ)}}$ радиустай тойргийн төв O -цэг дээр оройн 8° -ын өнцөг байх, суурийн оройнууд нь тойрог дээр орших адил хажуут гурвалжныг авч үзье.

Косинусын теоремоор AB талын уртыг олвол $A_1A_2^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 8^\circ = 2r^2(1 - \cos 8^\circ) = 2 \cdot \frac{1}{2(1 - \cos 8^\circ)} \cdot (1 - \cos 8^\circ) = 1 \Rightarrow A_1A_2 = 1$ болно. Энэ r -радиустай дугуйг ийм адил хажуут гурвалжнуудад хуваавал $360^\circ : 8^\circ = 45$ ширхэг гурвалжинд хувааж болох ба суурийн оройнуудыг $A_3, A_4, \dots, A_{45}$ гэж үргэлжлүүлэн тэмдэглэе. Тэгвэл эдгээр 45 цэгийн аль ч зэрэгцээ 2 цэгийн хоорондох зай нь 1-тэй тэнцүү байна.

Бодлогын батлах зүйлийг эсрэгээс нь хоорондох зай нь 1 байх ижил өнгийн 2 цэг олддоггүй гэе. A_1 -цэгээс эхлэн (аль ч цэгээс эхэлсэн ялгаагүй) 45 цэгийг 2 өнгөөр ээлжлэн будвал A_{45} ба A_1 нь ижил өнгөөр будагдахад хүрч зөрчил үүснэ. Өөрөөр хэлбэл хоорондох зай нь 1 байх ижил өнгийн 2 цэг олдохгүй гэж үзсэнтэй зөрчиж байна. Иймд нэгэн зайтай ижил өнгийн хоёр цэг олдоход хүрч батлах зүйл батлагдлаа.

VIII-B1.

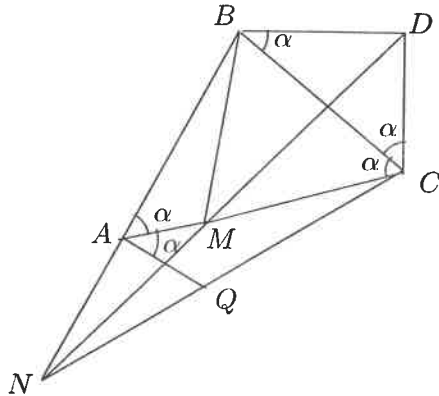
$$p^{2^{2009}} - 1 = (p - 1)(p + 1)(p^2 + 1)(p^{2^2}) \dots (p^{2^{2008}} + 1)$$

гэж задарна. $p > 2$ байх анхны тоо гэдгээс p -сондгой тоо болох тул жишлэг ёсоор $p \equiv \pm 1 \pmod{4}$ байна. Жишлэгийн чанар ёсоор $p^{2^n} \equiv (\pm 1)^{2^n} \pmod{4}$ болох буюу $p^{2^n} \equiv 1 \pmod{4}$ байна. Эндээс $p^{2^n} + 1 \equiv 2 \pmod{4}$ тул $(p^{2^n} + 1)$ нь 4-д хуваагдахгүй харин 2-т хуваагдана. Иймд

$$(p^2 + 1)(p^{2^2} + 1) \dots (p^{2^{2008}} + 1) = 2^{2008} \cdot (2m + 1)$$

хэлбэрт болох буюу 2^{2008} -д хуваагдана. Харин $p = \pm 1 \pmod{4}$ тул $(p-1)(p+1) \equiv 0 \pmod{8}$ буюу 2^3 -д хуваагдана. Иймд $(p-1)(p+1)(p^2+1) \dots (p^{2^{2008}}+1)$ нь $2^{2008+3} = 2^{2011}$ -д хуваагдана. Иймд $k = 2011$ байна.

VIII-B2.



Бодлогын нөхцөлөөс $AC \parallel BD$ болох нь илэрхий. $(BM)^\wedge(CN) = \alpha$ болохыг батлахын тулд $\angle CAQ = \alpha$ байх Q цэгийг CN хэрчим дээр авъя. Хэрэв $\triangle QAC \sim \triangle MAB$ гэж баталбал хангалттай (Учир нь A цэг дээрх α -өнцгийн эргүүлэлтээр $BM \parallel QC$ байхаар эргүүлэлт хийж болох тул $(BM)^\wedge(QC) = \alpha$ болно) $\angle QAC = \angle MAB = \alpha$ тул одоо $\frac{AQ}{AM} = \frac{AC}{AB}$ гэж батлахад хангалттай. $\angle BCA = \angle CAQ$ тул $AQ \parallel BC$ байна. Эндээс $\triangle NAQ \sim \triangle NBC$ болох учир $\frac{AQ}{BC} = \frac{NA}{NB}$ болно. Мөн $AC \parallel BD$ учир $\triangle NAM \sim \triangle NBC$ тул $\frac{AM}{BD} = \frac{NA}{NB}$ болно. Иймд $\frac{AQ}{BC} = \frac{NA}{NB} = \frac{AM}{BD}$ буюу $\frac{AQ}{BC} = \frac{AM}{BD}$ болно. $\Rightarrow \frac{AQ}{AM} = \frac{BC}{BD}$. Нөгөө талаас $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ учир $\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AB}$ болох учир өмнөх тэнцлээс $\frac{AQ}{AM} = \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AB}$ буюу $\frac{AQ}{AM} = \frac{AC}{AB}$ болж батлах зүйл батлагдлаа.

3.7 ММО-45, IX ангийн III даваа

Б.Батцэнгэл

IX-A1. (Б.Батцэнгэл) Хурц өнцөгт ABC гурвалжны AD, BE өндрүүд дээр харгалзан P, Q цэгүүдийг $\angle BPC = \angle AQC = 90^\circ$ байхаар сонгон авав. $PC = QC$ болохыг батал.

IX-A2. (Б.Батцэнгэл) $1 \leq k \leq 9$ байх k бүрийн хувьд,

хэрэв a_k цифр тэгш бол $a_k < a_{k+1}$,

хэрэв a_k цифр сондгой бол $a_k > a_{k+1}$,

байх 10 оронтой $\overline{a_1 a_2 \dots a_9 a_{10}}$ тоог "сайн" тоо гэж нэрлэе.

Бүх сайн тоонуудын тоог ол.

IX-A3. (Б.Батцэнгэл) a, b, c, d нь эерэг тоонууд бол

$$a^4 b + b^4 c + c^4 d + d^4 a \geq abcd(a + b + c + d)$$

байхыг батал.

IX-B1. (Б.Батцэнгэл) Натурал a, b тоонуудын хамгийн их ерөнхийлөн хуваагчийг (a, b) гэж тэмдэглэе.

$$(1, n) + (2, n) + \dots + (n-1, n) + (n, n) = 2009 \cdot n$$

байх ямар нэгэн натурал n -ийг ол.

IX-B2. (Б.Батцэнгэл) Гүдгэр $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн хувьд

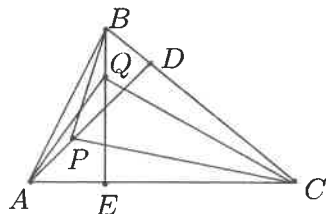
$$\angle CBD = 15^\circ, \angle CAD = 30^\circ, \angle BDC = 50^\circ, \angle BAC = 75^\circ$$

байв. Дөрвөн өнцөгтийн диагоналиуд P цэгт огтлолцдог бол $\angle APB$ өнцгийг ол.

IX-B3. (Б.Батцэнгэл) 1000 ширхэг тэгээс ялгаатай цифрийг нэг эгнээнд бичсэн байв. Эгнээний эхнээс нь уншихад гарах тус бүр $1, 2, \dots, 999, 1000$ оронтой 1000 ширхэг тоонууд дотор 20-оос цөөн квадрат (бүхэл тооны квадрат) байна гэж батал.

3.8 ММО-45, IX ангийн III даваа бодолт

IX-A1. Тэгш өнцөгт BPC , PDC гурвалжнууд төсөөтэй тул $\frac{BC}{PC} = \frac{PC}{DC}$ юм. Эндээс $PC^2 = BC \cdot DC$ гэж гарна.



Мөн төсөөтэй AQC , QEC гурвалжнууд $QC^2 = AC \cdot EC$ гэж гарна. Эцэст нь ерөнхий C тэгш өнцөгт ADC , BEC гурвалжнууд төсөөтэй тул $\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC}$ юм. Иймд $AC \cdot EC = BC \cdot DC$ буюу $QC^2 = PC^2$ болох нь батлагдав.



IX-A2. Хариу: $\frac{5^{11} - 2}{3} = 16276041$ ширхэг. n оронтой сайн тоонуудын тоог f_n гэж тэмдэглэе. Бодлогын нөхцөл ёсоор ямарч цифрийн өмнө түүнээс бага тэгш цифр, эсвэл түүнээс их сондгой цифр бичигдэх ёстой. Ямар ч цифрийн хувьд түүнээс бага тэгш цифр, түүнээс их сондгой цифр яг 5 ширхэг бий гэдгийг харж болно. n оронтой сайн тооны сүүлийн цифр 10 боломжтой, түүний өмнөх цифр 5 боломжтой, түүний өмнөх цифр 5 боломжтой гэх мэтчилэн тооцвол, комбинаторикийн үржүүлэх дүрмээр сайн тоо нь $10 \cdot 5^{n-1}$ боломжтой гэж гарна. Гэвч ингэж тоолоход сайн тоо 0 цифрээр эхлэх боломжтой гарах тул бид 0 цифрээр эхэлсэн сайн тооны 2-р цифр 0-ээс ялгаатай байх тул уг тооны эхний 0 цифрийг арилгахад $n - 1$ оронтой сайн тоо гарна. Тэгэхлээр $f_n = 10 \cdot 5^{n-1} - f_{n-1}$ юм. $f_1 = 9$ гэдгийг тооцвол, энэ рекуррент харьцаанаас

$$f_n = 10 \cdot (5^{n-1} - 5^{n-2} + 5^{n-3} - \dots + (-1)^{n-2} \cdot 5) + (-1)^{n-1} \cdot 9 = 50 \cdot \frac{5^{n-1} - (-1)^{n-1}}{5 - (-1)} + (-1)^{n-1} \cdot 9 = \frac{5^{n+1} + (-1)^{n-1} \cdot 2}{3}$$

гэж олдоно. ▼

IX-A3. Эхлээд

$$m \cdot a^4 b + n \cdot b^4 c + k \cdot c^4 d + l \cdot d^4 a \geq (m + n + k + l) \cdot a^2 b c d \quad (*)$$

тэнцэтгэл биш биелэх сөрөг биш m, n, k, l тоонуудыг хайя. Кошийн тэнцэтгэл биш ёсоор

$$m \cdot a^4 b + n \cdot b^4 c + k \cdot c^4 d + l \cdot d^4 a \geq (m + n + k + l) \cdot$$

$$\sqrt[m+n+k+l]{a^{4m+l} b^{4n+k} c^{4k+n} d^{4l+k}}$$

юм. Тэгэхлээр хэрэв $\sqrt[m+n+k+l]{a^{4m+l} b^{4n+k} c^{4k+n} d^{4l+k}} = a^2 b c d$ буюу

$$\begin{cases} 4m + l = 2(m + n + k + l) \\ 4n + m = m + n + k + l \\ 4k + n = m + n + k + l \\ 4l + k = m + n + k + l \end{cases}$$

бол (*) тэнцэтгэл биш биелнэ. Энэ тэгшитгэлийн системийн нэг шийд нь $m = 23, n = 7, k = 11, l = 10$ юм. Энэ тоонуудын хувьд биелэх (*) тэнцэтгэл бишэд (a, b, c, d) хувьсагчдыг тэдгээрийн цикл орлуулга болох $(b, c, d, a); (c, d, a, b); (d, a, b, c)$ орлуулгаар сольж бичвэл,

$$23 \cdot a^4 b + 7 \cdot b^4 c + 11 \cdot c^4 d + 10 \cdot d^4 a \geq 51 \cdot a^2 b c d$$

$$23 \cdot b^4 c + 7 \cdot c^4 d + 11 \cdot d^4 a + 10 \cdot a^4 b \geq 51 \cdot b^2 c d a$$

$$23 \cdot c^4 d + 7 \cdot d^4 a + 11 \cdot a^4 b + 10 \cdot b^4 c \geq 51 \cdot c^2 d a b$$

$$23 \cdot d^4 a + 7 \cdot a^4 b + 11 \cdot b^4 c + 10 \cdot c^4 d \geq 51 \cdot d^2 a b c$$

болно. Эдгээр тэнцэтгэл бишийг хооронд нь нэмж 51-д хуваавал, батлах ёстой тэнцэтгэл биш гарна. ▼

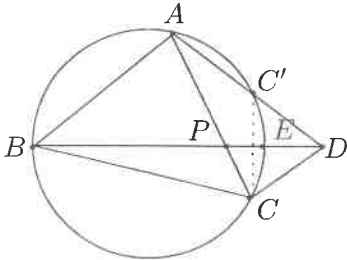
IX-B1. n тоог $n = 2^m$ хэлбэртэйгээр хайя. $1 \leq k \leq n$ байх ямар ч k тооны хувьд (k, n) хамгийн их ерөнхийлөн хуваагч нь 2-ын ямар нэгэн зэрэг байна. Тодруулбал, $k = 2^l \cdot k_0$ бөгөөд k_0 нь сондгой тоо бол $(k, n) = 2^l$ байна. $l < m$ үед $(k, n) = 2^l$ байх бүх $1 \leq k \leq n$ тоонууд нь $k = 2^l, 2^l \cdot 3, \dots, 2^l \cdot (2^{m-1} - 1)$ тоонууд бөгөөд нийт 2^{m-l-1} ширхэг байна. Иймд

$$(1, n) + (2, n) + \dots + (n-1, n) + (n, n) = 2^{m-1} \cdot 2^0 + 2^{m-2} \cdot 2^1 + \dots$$

$$+ 2^0 \cdot 2^{m-1} + 2^m = (m+2) \cdot 2^{m-1}$$

юм. Тэгэхлээр $n = 2^m$ тоо бодлогын нөхцөлийг хангахын тулд $m + 2 = 2009 \cdot 2$ буюу $m = 4016$ байх ёстой. Энэ аргаар бодлогын нөхцлийг $n = 3^{3012}, 5^{2510}, 503^{2012}$ тоонууд мөн хангана гэдгийг харуулж болно. ▼

IX-B2. Хариу: 80° . ABC гурвалжныг багтаасан ω тойргийг авч үзье.



ω тойрог AD хэрчмийг C' цэгээр, BD хэрчмийг E цэгээр огтлодог болог (зураг). Ижил нумд тулсан өнцгүүд тэнцүү тул $\angle BEC = \angle BAC = 75^\circ$ ба өгсөн нөхцлөөр $\angle CBE = \angle CBD = 15^\circ$ тул BCE гурвалжин нь тэгш C өнцөгтэй тэгш өнцөгт гурвалжин юм.

Иймд BE хэрчим нь ω тойргийн диаметр мөн. Цаашилбал, $\angle CAD = 30^\circ$ ба $\angle CAE = \angle CBE = 15^\circ$ гэдгээс $\angle C'AE = \angle CAD - \angle CAE = 15^\circ$ гэж гарна. Иймд $C'E = CE$ буюу C, C' цэгүүд нь BE диаметрын хувьд тэгш хэмтэй цэгүүд юм. Тэгэхлээр $\angle ADB = \angle BDC = 50^\circ$ юм. Эндээс $\angle APD = \angle PAD + \angle ADP = \angle CAD + \angle ADB = 30^\circ + 50^\circ = 80^\circ$ гэж олдоно. ▼

IX-B3. Эгнээний эхнээс уншихад гарах $1, 2, \dots, 1000$ оронтой тоонуудыг $A_1, A_2, \dots, A_{1000}$ гэж тэмдэглэе. Мөн цаашид A тооны бичлэгийн араас B тоог залгахад үүсэх тоог AB гэж тэмдэглэе.

Лемм: A, B нь харгалзан n, m оронтой тоонууд бөгөөд A, AB тоонууд бүтэн квадрат болог. Хэрэв m тэгш бол $m \geq n$ байна.

Баталгаа. $A = x^2, AB = y^2$ болог. Нэгэнт AB тоо нь $m + n$ оронтой тоо тул $AB \geq 10^{m+n-1}$ буюу $y \geq 10^{(m+n-1)/2}$ байна. $B = AB - A \cdot 10^m = y^2 - x^2 \cdot 10^m$ болох ба m тэгш үед эндээс

$$B = (y - x \cdot 10^{m/2})(y + x \cdot 10^{m/2})$$

гэж гарна. Иймд $B \geq y + x \cdot 10^{m/2} > y \geq 10^{(m+n-1)/2}$ юм. Нөгөө талаас, $B < 10^m$ тул эндээс $m > \frac{m+n-1}{2}$ буюу $m \leq n$ гэж гарна. Үүгээр лемм батлагдав.

Энэ леммээс ямарч k тооны хувьд $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_{2k}$ тоонууд дотор хамгийн олондоо 2 ширхэг бүтэн квадрат байна гэж гарна.

Үнэхээр $k < p < q < r \leq 2k$ үед A_p, A_q, A_r тоонууд бүтэн квадрат бол дээрхи лемм ёсоор $q - p, r - p, r - q$ ялгаварууд бүгд сондгой байх ёстой. Гэтэл $q - p, r - q$ ялгаварууд сондгой бол $r - p = (r - q) + (q - p)$ ялгавар тэгш байх болно.

Одоо энэ дүгнэлтийг $k = 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$ үед бичвэл

$A_5, A_6, \dots, A_8$ $A_9, A_{10}, \dots, A_{16}$ $A_{17}, A_{18}, \dots, A_{32}$

$A_{33}, A_{34}, \dots, A_{64}$ $A_{65}, A_{66}, \dots, A_{128}$ $A_{129}, A_{130}, \dots, A_{256}$

$A_{257}, A_{258}, \dots, A_{512}$ $A_{513}, A_{514}, \dots, A_{1024}$

гэсэн хэсэг бүрт хамгийн олондоо 2 ширхэг бүтэн квадрат байна.

A_1, A_2, A_3, A_4 тоонууд бүгд бүтэн квадрат байж болохгүй гэдгийг хялбархан шалгаж болно. Жишээ нь $A_1 = 1$ үед $A_2 = 16$, $A_3 = 169$ гэж бүтэн квадратууд үргэлжлэх боловч A_4 нь бүтэн квадрат болж чадахгүй. Тэгэхлээр $A_1, A_2, \dots, A_{1000}$ тоонууд дотор хамгийн олондоо $8 \cdot 2 + 3 = 19$ ширхэг бүтэн квадрат байна.



3.9 ММО-45, IX ангийн IV даваа

Б.Батцэнгэл

IX-A1 (Г.Оюундарь). a, b, c нь $a + b + c = 1$ байх эерэг тоонууд бол

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}} + \sqrt{\frac{bc}{bc+a}} + \sqrt{\frac{ca}{ca+b}} \leq \frac{3}{2}$$

гэж батал.

IX-A2 (Ираны олимпиад 2008). Тэгш өнцөгт ABC гурвалжны BC гипотенузын дундаж цэг M бөгөөд AC катет дээр D цэгийг $AD = AM$ байхаар сонгон авав. AMC ба BDC гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд C цэгээс ялгаатай P цэгт огтлолцдог бол CP шулуун нь BCA өнцгийн биссекрисс гэж батал.

IX-A3 (Б.Батцэнгэл). $b^2 - 1$ нь a тоонд хуваагддаг, $c^2 - 1$ нь b тоонд хуваагддаг, $a^2 - 1$ нь c тоонд хуваагддаг 1-ээс их натурал a, b, c тоонууд төгсгөлгүй олон олдono гэж батал.

IX-B1 (Б.Батцэнгэл). 17×42 хэмжээтэй хүснэгтийн зарим нүдэнд нэг, нэг бөмбөг байрлуулав. Дараа нь, бөмбөг байрлаагүй хоосон нүд бүрт уг нүдтэй ерөнхий оройтой хөрш нүднүүдэд байрласан бөмбөгний тоог бичив. Хоосон бүх нүдэнд бичигдсэн тоонуудын нийлбэр хамгийн ихдээ хэд байх вэ?

IX-B2 (Н.Аргилсан). $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн AB, CD талууд хоорондоо параллель биш бөгөөд тэнцүү урттай байв. Дөрвөн өнцөгтийн AC, BD диагоналиудын дундаж цэгүүдийг холбосон хэрчим дээр орших дурын цэгээс AB, CD талууд хүртлэх зайнуудын нийлбэр тогтмол гэж батал.

IX-B3 (Б.Батцэнгэл). h дурын натурал тоо. m -ээс хэтрэхгүй, m -тэй харилцан анхны бүх натурал тоонуудыг, хэсэг бүрт байгаа тоонуудын нийлбэр нь хоорондоо тэнцүү байх h хэсэгт хувааж болдог байх натурал m тоо олдono нэж батал.

3.10 ММО-45, IX ангийн IV даваа бодолт

IX-A1.

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}} = \sqrt{\frac{ab}{ab+c(a+b+c)}} = \sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}$$

хувиргалд Кошийн тэнцэтгэл бишийг хэрэглэвэл

$$\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} \right)$$

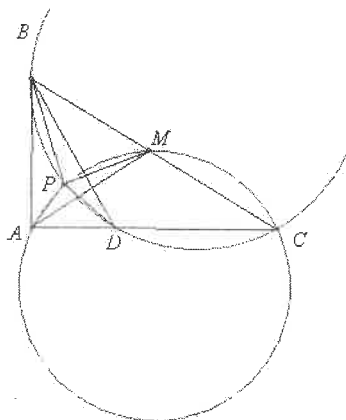
болно. Үүнтэй нэгэн адилаар

$$\sqrt{\frac{bc}{bc+a}} = \sqrt{\frac{bc}{(b+a)(c+a)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+a} \right)$$

$$\sqrt{\frac{ca}{ca+b}} = \sqrt{\frac{ca}{(c+b)(a+b)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{c}{c+b} + \frac{a}{a+b} \right)$$

байна. Энэ гурван тэнцэтгэл бишийг хооронд нь нэмбэл батлах ёстой тэнцэтгэл биш гарна.

IX-A2.



$APMC$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтсан тул $\angle PMB = \angle PAD$ юм. Мөн $BPDC$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтсан тул $\angle PBM = \angle PDA$ юм. Өгсөн нөхцөл ёсоор $AD = AM = BM$ тул өнцөг-тал-өнцөг шинжүүрээр $\triangle PMB = \triangle PAD$.

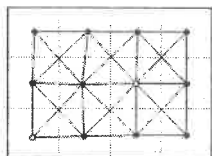
Иймд $PM = PA$ буюу AMC гурвалжныг багтаасан тойргийн PM, PA шулуунууд ижил урттай болж CP нь MCA өнцгийн биссектрис болно.

$$\text{IX-A3. } n \text{ натурал тоо бол } \begin{cases} a = 2n + 1 \\ b = 4n + 1 \\ c = 4n \end{cases} \text{ тоонууд бодлогын}$$

нөхцөлийг хангана.

IX-B1 Хариу: 2009.

Хүснэгтийн нүднүүдийг графын оройгоор сонгон авч, ерөнхий оройтой хорин нүднүүдэд харгалзах оройнуудыг холбож граф үүсгэе. Жишээ болгон 3×4 хэмжээтэй хүснэгтийн графыг зурагт дүрслэв.



Бөмбөг байрласан нүдэнд харгалзах оройг хар өнгөөр, хоосон нүдэнд харгалзах оройг цагаан өнгөөр будая. Тэгвэл бүх хоосон нүдэнд бичигдэх тоонуудын нийлбэр нь оройнууд нь хар ба цагаан өнгөөр будагдсан хүснэгтийн графын эсрэг өнгөтэй оройнуудыг холбосон ирмэгийн тоотой тэнцүү байна. Энэхүү дүрслэлээр бодлого нь 17×42 хэмжээтэй хүснэгтийн графын оройнуудыг 2 өнгөөр будахад хамгийн олондоо хэдэн ширхэг эсрэг өнгөтэй оройг холбосон ирмэг үүсэх вэ? гэсэн бодлогод шилжинэ.

Лемм:  графын оройнуудыг 2 өнгөөр будахад эсрэг өнгөтэй оройг холбосон ирмэг 3-аас хэтрэхгүй тоотой, харин  графын оройнуудыг 2 өнгөөр будахад эсрэг өнгөтэй оройг холбосон ирмэг 4-аас хэтрэхгүй байна (Энэ дүгнэлт  графын хувьд мөн биелнэ).

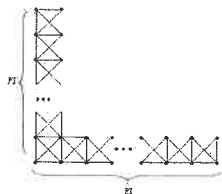
Баталгаа. 4 оройтой эдгээр графын оройнуудыг бүх боломжит аргаар 2 өнгөөр будаж үүнд болно.

Сүүлийн графын хувьд оройнуудыг зөвхөн  эсвэл  гэж будсан бүлд эсрэг өнгөтэй оройг холбосон ирмэг 4 байх болно.

Мөрдлөгөө:



а) $2n$ ширхэг оройтой графын оройнуудыг 2 өнгөөр будахад эсрэг өнгөтэй оройг холбосон ирмэг хамгийн олондоо $3n - 2$ ширхэг байна.

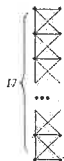


б) графын оройнуудыг 2 өнгөөр будахад эсрэг өнгөтэй оройг холбосон ирмэг хамгийн олондоо $6n - 8$ ширхэг байна.

Баталгаа. а) Үнэхээр энэ графыг ерөнхий ирмэгүүдгүй 1 ширхэг  граф, $n - 2$ ширхэг  графын нэгдэл гэж үзэж болох ба тэгэхлээр лемм ёсоор энэ графид эсрэг өнгөтэй оройг холбосон ирмэг $4 + 3(n - 2) = 3n - 2$ -оос хэтрэхгүй тоотой байна.

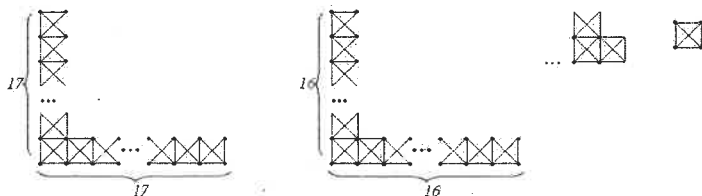
б) Энэ графыг ерөнхий ирмэгүүдгүй 1 ширхэг  граф, $n - 2$ ширхэг  графын нэгдэл гэж үзэж болно. Иймд ёсоор энэ графид эсрэг өнгөтэй оройг холбосон ирмэг $4 + 6(n - 2) = 6n - 8$ -аас хэтрэхгүй тоотой байна.

Одоо бодлогоо бодъёо. 17×42 хэмжээтэй хүснэгтийн графыг $42 - 17 = 25$ ширхэг.



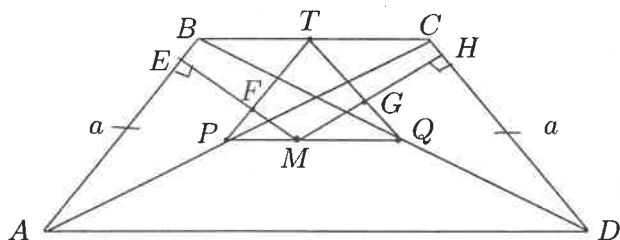
граф ба 17×17 хэмжээтэй квадрат хүснэгтийн графын нэгдэл гэж үзэж болно. Мөрдлөгөөний а) хэсэг ёсоор 25 ширхэг графид эсрэг өнгөтэй оройг холбосон ирмэг нийтдээ $25 \cdot (3 \cdot 17 -$

2) = 1225-оос хэтрэхгүй тоотэй байна. 17×17 хэмжээтэй квадрат хүснэгтийн графыг



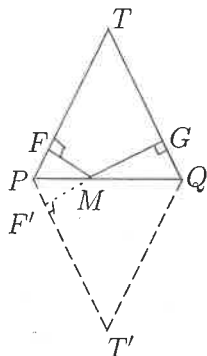
гэсэн графуудын нэгдэл гэж үзвэл мөрдлөгөөгийн б) хэсэг ёсоор түүнд эсрэг өнгөтэй оройг холбосон ирмэг $(6 \cdot 17 - 8) + (6 \cdot 16 - 8) + \dots + (6 \cdot 2 - 8) = 6 \cdot 152 - 8 \cdot 16 = 784$ -оос хэтрэхгүй тоотой байна. Иймд 17×42 хэмжээтэй хүснэгтийн графид эсрэг өнгөтэй оройнуудыг холбосон ирмэг $1225 + 784 = 2009$ -өөс хэтрэхгүй тоотой байх ба хэрэв графын сондгой дугаартай багананд байрлах оройнуудыг хар өнгөөр, тэгш дугаартай багананд байрлах оройнуудыг цагаан өнгөөр будвал түүнд яг 2009 гирхэг эсрэг өнгөтэй оройг холбосон ирмэг байх болно.

IX-B2. Энэ бодлогыг Сэлэнгэ аймгийн 9-р ангийн сурагч Төрбат зохиогчийн бодолтоос илүү хялбар аргаар бодсон бодолтыг дор сийрүүлэв (Медаль авсан сурагч)



$AB = CD = a$ гэе. BC талын дундаж дээр T цэг авъя. PT нь ABC гурвалжны, TQ нь BCD гурвалжны дундаж шугам болох тул $PT = \frac{1}{2}a = TQ$ буюу PTQ нь адил хажуут гурвалжин болно. PQ хэрчмээс $\forall M$ цэг авъя. M цэгээс AB талд ME -өндөр, CD талд MH -өндөр буулгая. Тэгвэл $EM + MH$ -г тогтмол гэж

батлах ёстой. PT -нь дундаж шугам тул $AB \parallel PT$. Мөн $TQ \parallel CD$ болно. AB ба PT гэсэн паралель шулуунуудын хоорондох зай тогтмол учир $EF = \ell$ гээ. Мөн үүнтэй адил $GH = m$ гээ. Тэгвэл m, ℓ хөдөлгөөнгүй тогтмол тоонууд болно. Иймд $EM + MH = (EF + FM) + (MG + GH) = (\ell + m) + FM + MG$ буюу $FM + MG$ -г тогтмол гэж харуулах хэрэгтэй.



Одоо PTQ гурвалжинг авч үзье. PQ -ээс $\forall M$ цэг авахад талуудад буулгасан өндрүүдийн нийлбэр нь тогтмол гэж харуулья. T -г PQ -ийн хувьд тэгш хэмтэй хувирган ромбо үүсгэе. F -ийн тэгш хэмтэй цэг нь F' гээ. $MF' \perp PT'$ ба $MG \perp TQ$, мөн $TQ \parallel PT'$ гэдгээс P, M, Q цэгүүд нэг шулуун дээр орших буюу $FM + MG = F'M + MG = F'G$ гэсэн $TQT'P$ ромбын өндөртэй тэнцүү тогтмол болох нь батлагдлаа.

IX-B3. Хэрэв $1 \leq k < m$ байх k тооны хувьд $(k, m) = 1$ бол $(m - k, n) = 1$ юм. Иймд m -тэй харилцан анхны m -ээс бага бүх тоонуудын нийлбэр нь m байх $(k, m - k)$ гэсэн $\frac{\varphi(m)}{2}$ ширхэг хосууд болгон хувааж болно. Тэгэхлээр $\frac{\varphi(m)}{2}$ нь n -д хуваагддаг байх m тоо олоход тэр тоо нь бодлогын нөхцөлийг хангах юм.

$n \geq 2$ үед $\frac{\varphi(n^2)}{2}$ нь n хуваагдана гэдгийг батална. ($\frac{\varphi(8)}{2}$ нь 2-д хуваагдана) $n = 2^k p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$ гэж анхны тоонуудын үржвэрт задардаг болог.

а). $k = 0$ буюу n тоо сондгой болог.

$$\frac{\varphi(n^2)}{2} = p_1^{2k_1-1} \dots p_s^{2k_s-1} \cdot \frac{(p_1-1) \dots (p_s-1)}{2}$$

ба i бүрийн хувьд $2k_i - 1 \geq k_i$ байх тул $\frac{\varphi(n^2)}{2}$ нь n -д хуваагдана.

б). $k \geq 1$ болог.
$$\frac{\varphi(n^2)}{2} = 2^{2k-2} p_1^{2k_1-1} \dots p_s^{2k_s-1} (p_1-1) \dots (p_s-1)$$

юм. i бүрийн хувьд $2k_i - 1 \geq k_i$ бөгөөд $p_i - 1$ нь тэгш тоо тул $\frac{\varphi(n^2)}{2}$ нь $2^{2k-2-s} p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$ тоонд хуваагдана. Тэгэхлээр $2k - 2 + s \geq k$ бол $\frac{\varphi(n^2)}{2}$ нь n -д хуваагдах ёстой. Энэ тэнцэтгэл биш нь зөвхөн $k + s = 1$ үед л биелэх боломжгүй бөгөөд $k \geq 1$ ба $n > 2$ тул $k + s = 1$ байх боломжгүй.

Жич: Бодлогын нөхцөлийг хангах m тоогоор $p \equiv 1 \pmod{2n}$ байх анхны p тоог, эсвэл $2^n - 1$ тоог сонгон авч болно. $2^n - 1$.

3.11 ММО-45, Х ангийн III даваа

Б.Баяржаргал

Х-А1. (Б.Баяржаргал) $a, b \in \mathbb{N}$, $x < 0$ байх тоонуудын хувьд $(1 + x^a + x^b)^2 = 3(1 + x^{2a} + x^{2b})$ нөхцөл биелдэг бол a, b -г тэгш болохыг баталж x -ийн авч болох утгуудыг ол.

Х-А2. (Б.Баяржаргал) Төгсгөлгүй шатарын хөлөгийн төгсгөлөг нүдүүдийг сонгож түүнийгээ "хөлөг" гее. Хэрэв уг "хөлөг" дээр өгсөн тэрэгнүүд бүгд бие биенээ заналхийлдэггүй бөгөөд харин үлдсэн бүх нүдээ заналхийлдэг бол тэдгээр тэрэгнүүдийг сайн гэдэг байг (заналхийлүүлнэ гэдэг нь уг тэрэгтэй нэг мөрөнд эсвэл нэг багананд байхийг хэлнэ. Энд нэг мөр багананд байгаа бүх нүднүүд "хөлөг"-т орж байх албагүй). Хэрэв ямар нэг "хөлөг"-т 2008 ба 2010-н ширхэг сайн тэрэг байрлуулж болдог бол 2009-н сайн тэрэг байрлуулж болохыг батал.

Х-А3. (Б.Баяржаргал) Тойрогт багтсан $ABCD$ 4-н өнцөгтийн хувьд AD талын дундаж нь M , BC талын дундаж нь N , диагоналиудын огтлолцол нь O ба $AB \cap CD = L$ байг. Тэгвэл LO шулуун MON гурвалжныг багтаасан тойргийг шүргэнэ гэж батал.

Х-В1. (Б.Баяржаргал) A, B, C, D ба C, E, F, K гэсэн параллелограммууд өгөгдөв. $BC \parallel CK$ ба $DC \parallel CE$ бол BE, AF, DK

шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.

X-B2 . (Б.Баяржаргал) $x + y + z = 1$, $x, y, z \geq 0$ бол

$$(1 - x^2)^2 + (1 - y^2)^2 + (1 - z^2)^2 \leq (1 + x)(1 + y)(1 + z)$$

тэнцэтгэл бишийг батал. Хэдийд тэнцэлдээ хүрэх вэ?

X-B3. (Б.Баяржаргал) 1-ээс их $(2n - 1)^2$ -аас бага бөгөөд хоорондоо харилцан анхны n ширхэг тоон дотор ядаж нэг анхны тоо бий гэж батал.

3.12 ММО-45, X ангийн III даваа бодолт

X-A1. $(1 + x^a + x^b)^2 = 3(1 + x^{2a} + x^{2b})$

$$1 + x^{2a} + x^{2b} + 2x^a + 2x^b + 2x^{a+b} = 3 + 3x^{2a} + 3x^{2b}$$

$$2x^a + 2x^b + 2x^{a+b} = 2 + 2x^{2a} + 2x^{2b}$$

$$x^{2a} - 2x^a + 1 + x^{2a} + x^{2b} - 2x^{a+b} + x^{2b} - 2x^b + 1 = 0$$

$$(x^a - 1)^2 + (x^b - 1)^2 + (x^a - x^b)^2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x^a - 1 = 0 \\ x^b - 1 = 0 \\ x^a = x^b \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x^a = 1 \\ x^b = 1 \\ x^a = x^b \end{array} \right\} b, a > 0 \text{ учир } |x| = 1 \text{ байх хэрэгтэй.}$$

$x < 0$ гэдгээс $x = -1$ ба a, b нь тэгш тоонууд.

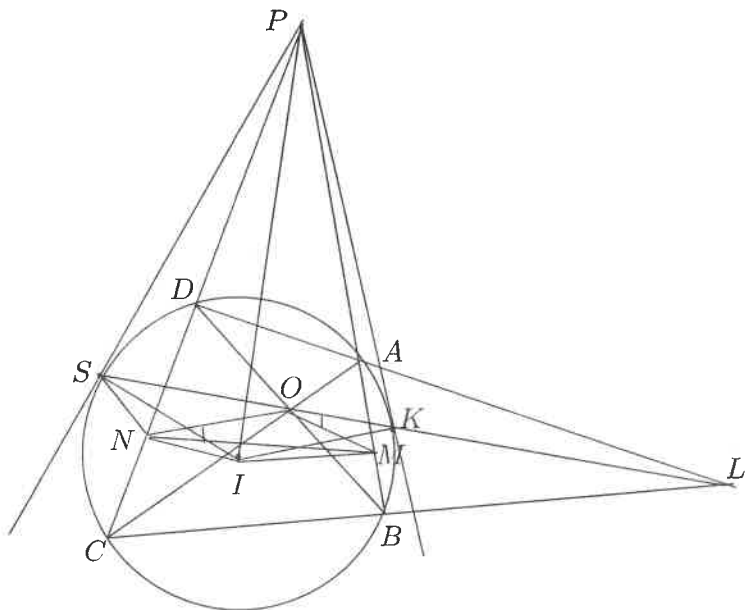
X-A2. 2008 сайн тэрэг байрлаж байг. Тэгвэл уг хөлгийн аль ч 2 мөр 2 баганыг хооронд нь солиход (дээр нь байгаа тэрэгтэй хамт) үүссэн хөлөг дээрх 2008 тэрэг маань сайн хэвээрээ байна. Иймд бид тэрэгнүүдээ зүүн дээд хэсгээс баруун доод хэсэг рүү чиглэсэн диагональ дээр байрласан болгож болно. Энд хийгдсэн үйлдлүүдийг (*) гее.

	1	2	3	...	2007	2008
1	T					
2		T				
3			T			
...				...		
2007					T	
2008						T

Ингэхэд зурагт үзүүлсэн 2008 мөр, 2008 баганад л бүх хөлгийн нүднүүд байна. (нэмэх хэлбэрийн дүрс дотор) Одоо анхны хөлөг дээрээ 2010 сайн тэргээ байрлуулаад (*) үйлдлийг хийхэд зурагт үзүүлсэн хөлөг үүсэх ба 2010 тэрэг байгаа гэдгээс дотор талын 2008×2008 хүснэгтийн гадна орших тэрэгнүүд заавал байна.

Ийм нэг тэргийг нь авахад j_1 -р багана дээр байдаг. Тэгвэл уг тэргийг авч (j_1, j_1) дээр тавья (Хэрэв j_1 -р мөрөнд тэрэг байхгүй бол 2008×2008 -ийн гадна орших тэрэг дахиад олдох ба түүний хувьд бодолтыг авч үзнэ). Хэрэв j_1 -р мөрөнд байгаа тэрэг 2008×2008 хүснэгтийн гадна байдаг бол тэрийг шууд авахад сайн тэрэгнүүд үүснэ. Хэрэв дотор нь j_2 -р багананд байдаг бол тэрийг (j_2, j_2) -т тавья. Тэгэхэд j_2 -р мөрөнд байх тэрэг 2008×2008 хүснэгтийн гадна байвал түүнийг шууд авчихад бодлого бодогдоно үгүй бол түүний орших баганы дугаартай диагоналийн нүд рүү шилжүүлэх замаар явахад хэзээ нэгэн цагт заавал 2008×2008 хүснэгтийн гадна байх тэргэнд очиж бодлого бодогдоно.

X-A3. ▲ $\angle MOK = \angle ONM$ гэж баталбал бодлого бодогдоно. $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийг багтаасан тойргийн төв I . $(AB) \cap (CD) = P$ гээд P цэгээс ω -руу 2 шүргэгч татаад шүргэлтийн цэгүүдийг нь S, K гэе. Тэгвэл P цэгийн поляр шулуун S, O, K, L -ийг дайрна.



Тэгвэл бүгд PI диаметртэй тойрог дээр байна гэдгээс P, K, M, I, N, S -цэгүүд нэг тойрог дээр оршино.

$$\angle SPN = \angle SIN = \alpha$$

$$\angle MPK = \angle KIM = \beta$$

$$\angle PSK = \angle PKS = \angle SIP = \angle PIK = \gamma \text{ гэе.}$$

$$\angle MNO = 90^\circ - \angle DNO - \angle INM = 90^\circ - \angle DNO - (90^\circ - \gamma - \beta) = \gamma + \beta - \angle DNO$$

$$\angle MOK = 180^\circ - \angle OMK - \angle OKM$$

$$\angle OMK = \angle PMK + \angle OMA = \gamma + \angle OMA$$

$$\angle OKM = 180^\circ - \angle PKS - \angle PIK = 180^\circ - \gamma - (\beta + \gamma)$$

$$\angle MOK = 180^\circ - \gamma - \angle OMA - (180^\circ - \gamma - (\beta + \gamma)) = \gamma + \beta - \angle OMA.$$

Одоо $\angle DNO = \angle OMA$ гэж батлахад хангалттай. $ABCD$ -

дөрвөн өнцөгт тойрогт багтсан тул $\triangle COD \sim \triangle BOA \Rightarrow \frac{DO}{OA} =$

$$\frac{CD}{BA} \Rightarrow \frac{DO}{\frac{1}{2} \cdot CD} = \frac{OA}{\frac{1}{2} \cdot BA} \Rightarrow \frac{DO}{DN} = \frac{OA}{AM} \text{ ба } \angle NDO = \angle OAM$$

тул $\triangle NDO \sim \triangle AOM \Rightarrow \angle OMA = \angle DNO$ болж батлах зүйл батлагдлаа. ▼

X-B1. EF -ийг үргэлжлүүлэн AB -тэй огтлолцох цэгийг M , $BE \cap KD = N$ гээ. $\triangle BCE$ -ийн хувьд K, D, N гурван цэг шулуун дээр оршино гэдгээс Менелайн теорем бичвэл

$\frac{BK}{KC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EN}{NB} = 1$, $CD = BA$, $DE = AM$, $BK = MF$, $KC = FE$ гэдгээс $1 = \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EN}{NB} = \frac{BA}{AM} \cdot \frac{MF}{FE} \cdot \frac{EN}{NB}$ буюу Менелайн теоремоор A, F, N нь нэг цэгт огтлолцоно.

X-B2.

$$\begin{aligned} & (1 - x^2)^2 + (1 - y^2)^2 + (1 - z^2)^2 = \\ & = (y + z)^2(1 + x)^2 + (x + z)^2(1 + y)^2 + (x + y)^2(1 + z)^2 = \\ & = (y + z)^2(2x + y + z)^2 + (x + z)^2(x + 2y + z)^2 + (x + y)^2(x + y + 2z)^2 \leq \\ & \leq (2x + y + z)(x + 2y + z)(x + y + 2z)(x + y + z) \end{aligned}$$

буюу

$$\begin{aligned} & (2x + y + z)(x + 2y + z)(x + y + 2z)(x + y + z) \geq \\ & \geq (y + z)^2(2x + y + z)^2 + (x + z)^2(x + 2y + z)^2 + (x + y)^2(x + y + 2z)^2 \end{aligned}$$

болохыг батлахад болно. Үүнийгээ задалж эмхэтгэвэл

$$x^3y + y^3x + y^3z + z^3y + x^3z + z^3z \geq 2xy^2z + 2x^2yz + 2xyz^2$$

болно.

$$\begin{aligned} & x^3y + y^3x + y^3z + z^3y + x^3z + z^3z \geq 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2x^2z^2 = \\ & x^2y^2 + y^2z^2 + x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + x^2z^2 \geq 2xy^2z + 2x^2yz + 2xyz^2 \end{aligned}$$

болж батлагдав.

X-B3. Уг n ширхэг тоогоо $a_1, a_2, \dots, a_n$ гээ. a_i бүрийн хамгийн бага p_i гэсэн анхны тоон хуваагчыг авъя. Эсрэгээс нь a_i -үүд бүгд зохиомол тоонууд байг. $a_i = p_i \cdot d_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ гээ. Тэгвэл $p_i \leq d_i$ гэдгээс $p_i^2 \leq a_i < (2n - 1)^2 \Rightarrow p_i < 2n - 1$ болно. $\forall i \neq j$ хувьд $(a_i, a_j) = 1$ гэдгээс $\forall i \neq j$ бол $p_i \neq p_j$. Гэтэл p_i -үүд дотор нэг л тэгш тоо байж болох ба үлдсэн нь бүгд сондгой болно. Гэтэл $2n - 1$ -ээс бага 1 -ээс их сондгой тоо $n - 2$ учир зөрчил үүснэ. Иймд ядаж нэг нь анхны тоо байна.

3.13 ММО-45, X ангийн IV даваа

Б.Баяржаргал

X-A1. (У.Батзориг) Хурц өнцөгт ABC гурвалжинд CF ба BE өндрүүд татав. BC хэрчим дээр P цэгийг, BC шулуун дээр B нь C , Q цэгүүдийн хооронд байхаар Q цэгийг

$$BP^2 = BQ^2 = BF \cdot BA$$

байхаар авав. $QF \cap PE = S$ гэвэл $AFES$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана гэж батал.

X-A2. (Б.Баяржаргал)

$$x_1 = x_2 = 1; x_{n+2} = x_{n+1} + x_n + 2\sqrt{x_{n+1}x_n + 3}$$

гэсэн рекурент томъёогоор өгөгдсөн дарааллын бүх гишүүдийг бүхэл гэж батал.

X-A3. (Н.Дайвий-Од) $p \geq 5$ анхны тоо ба

$$S_n = 1^n + 2^n + \dots + (p-1)^n$$

байг. Тэгвэл $p^3 \mid S_n$; $p \mid S_{n-1}$ ба $p \mid S_{n-2}$ байх төгсгөлгүй олон $n \in \mathbb{N}$ тоо олдохыг харуул.

X-B1. (Г.Батзаяа) $a, b, c > 0$ бодит тоонуудын хувьд

$$\sqrt{\frac{3bc}{(a+b)(a+b+c)}} + \sqrt[4]{\frac{12a(a+b)}{(a+b+c)^2}} \leq 2.$$

гэж батал. Тэнцэлдээ хүрэх нөхцлийг тогтоо.

X-B2 . (Б.Баяржаргал) $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ ба $\forall x, y \in \mathbb{R}$ хувьд

$$f(xy) = f(x)f(y) + f(x+y) - 1$$

байх бүх функцийг ол.

X-B3. (М.Батбилэг) ABC гурвалжны дотор M цэг өгөгдөв. ABM, BCM, CAM гурвалжнуудыг багтаасан тойргийн төвүүд нь харгалзан C_1, A_1, B_1 бол AA_1, BB_1, CC_1 шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.

3.14 ММО-45, X ангийн IV даваа бодолт

X-A1. $BP^2 = BA \cdot BF = BQ^2$ гэдгээс A ба F цэгүүдийг дайрсан бөгөөд BC талыг Q ба P цэгүүдэд шүргэх хоёр тойрог гарна. Мөн орто төвийг H гээд AD өндөр татай. $C DFA$ ба $CDHE$ дөрвөн өнцөгтүд тойрогт багтсан гэдгээс $BA \cdot BF = BC \cdot BD = BE \cdot BH$ гэж гарна. Иймд $BP^2 = BE \cdot BH \Rightarrow \frac{BP}{BH} = \frac{BE}{BP}$ ба

$$\angle HBP = \angle EBP \quad (1)$$

гэдгээс $\triangle BPH \sim \triangle BEP$ гэж гарна. $\Rightarrow \angle BPE = \angle BHP$
 $BP^2 = BC \cdot BD$ гэдгээс P цэг нь D ба C -ийн хооронд оршино.

$$\begin{aligned} DP \cdot DQ &= (BP - BD)(BP + BD) = BP^2 - BD^2 = \\ &= BD \cdot (BC - BD) = BD \cdot DC \end{aligned} \quad (2)$$

$$\triangle BDH \sim \triangle ADC \Rightarrow$$

$$AD \cdot DH = BD \cdot DC \quad (3)$$

(2) ба (3) $AD \cdot DH = DP \cdot DQ \Rightarrow \frac{DH}{DP} = \frac{DQ}{DA} \Rightarrow \angle HDP \sim \angle QDA$
 $\Rightarrow \angle HPD = \angle QAD \Leftrightarrow \angle BPH = \angle BAD + \angle BAQ$ болно. BQ нь $\triangle FAQ$ -ийн шүргэгч тул

$$\angle BQF = \angle BAQ = \angle BPH - \angle BAD \quad (4)$$

(1) ба (4)-өөс

$$\angle BPE + \angle BQF = (\angle BHP + \angle BPH) - \angle BAD =$$

$$(180^\circ - \angle PBH) - \angle BAD = (90^\circ + \angle BCA) - (90^\circ - \angle ABC) =$$

$$= \angle BCA + \angle ABC = 180^\circ - \angle CAB \Rightarrow$$

$$\angle PSQ = 180^\circ - (\angle BPE + \angle BQF) = \angle CAB = \angle EAF$$

$\Leftrightarrow \angle FAE = \angle FSE$ болж $ESAF$ тойрогт багтана. Хэрэв S нь P ба E -ийн хооронд байвал $\angle PSQ = 180^\circ - \angle ESF$, хэрэв E нь P ба S -ийн хооронд байвал $\angle PSQ = \angle ESF$ болно.

ГЭЖ СОНГОЁ.

$$\begin{aligned}
 2S_n &= \sum_{k=1}^{p-1} (k^n + (p-k)^n) = \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{m=0}^{n-1} C_n^m (k-p)^m p^{n-m} \equiv \\
 &\equiv \sum_{k=1}^{p-1} \left((-1)^{n-2} \cdot C_n^{n-2} \cdot (p-k)^{n-2} p^2 + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \cdot (p-k)^{n-1} \cdot p \right) \equiv \\
 &\equiv (-1)^{n-2} \cdot C_n^{n-2} S_{n-2} p^2 + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} S_{n-1} p (p^3)
 \end{aligned}$$

БОЛНО.

$$S_{n-2} = 1^{n-2} + 2^{n-2} + \dots + (p-1)^{n-2} \stackrel{(*)}{\equiv} S_1 = \frac{p(p-1)}{2} \equiv 0(p)$$

$$S_{n-1} = 1^{n-1} + 2^{n-1} + \dots + (p-1)^{n-1} \stackrel{(*)}{\equiv} S_2 = \frac{p(p-1)(2p+1)}{6} \equiv 0(p)$$

p сондгой, $(p, 6) = 1$ болох тул $S_{n-1} \equiv 0(p)$ [$(*)$: $n = (p-1)(pm + 3) + 3$ тул Фермагийн бага теорем ёсоор $k^{n-1} \equiv k^2(p)$, $k^{n-2} \equiv k(p)$ тул $S_{n-2} \equiv S_1(p)$, $S_{n-1} \equiv S_2(p)$ байна.] Иймд $2S_n \equiv (-1)^{n-1} \cdot n \cdot S_{n-1} p \equiv 0(p^3)$ болж батлагдав. Энд $p|n$, $p|S_{n-1}$ гэдгийг ашиглав.

Х-В1. $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ үед тэнцүү болно. Эндээс Кошийн тэнцэл бишийг хэрэглэвэл

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{4} \left(2\sqrt{\frac{3b}{a+b} \cdot \frac{4c}{a+b+c}} + 4\sqrt[4]{\frac{3a}{a+b} \left(\frac{2(a+b)}{a+b+c} \right)^2 \cdot 1} \right) \leq \\
 &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{3b}{a+b} + \frac{4c}{a+b+c} + \frac{3a}{a+b} + \frac{2(a+b)}{a+b+c} + \frac{2(a+b)}{a+b+c} + 1 \right) = \\
 &= \frac{1}{4} (3 + 4 + 1) = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{Энд тэнцэл биелэх} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3b}{a+b} = \frac{4c}{a+b+c} \\ \frac{3a}{a+b} = \frac{2(a+b)}{a+b+c} = 1 \end{cases} \text{ юм} \Rightarrow 3a = \\
 &a+b \Rightarrow 2a = b, 2(a+b) = a+b+c \Rightarrow a+b = c \Rightarrow c = 3a. \text{ Энэ}
 \end{aligned}$$

үед $\frac{3b}{a+b} = \frac{6a}{3a} = \frac{4c}{a+b+c}$ тэнцэтгэл биш тэнцэлдээ хүрэх $\Leftrightarrow$
 $a > 0, b = 2a, c = 3a$.

X-B2. $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{Q}$ хувьд

$$f(xy) = f(x)f(y) + f(x+y) - 1 \quad (*)$$

(*)-д $x = y = 0$ гэвэл $f(0) = f^2(0) + f(0) - 1 \Rightarrow f(0) = \pm 1$ гэж гарна.

$f(0) = 1$ үед (*)-д $y = 0$ гэвэл $f(0) = f(x) \cdot f(0) + f(x) - 1$ буюу $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{Q}$ гэсэн шийд гарна.

$f(0) = -1$ байг. $x = y = 2$ гэвэл $f(4) = f^2(2) + f(4) - 1 \Rightarrow f(2) = \pm 1$.

1. $f(2) = -1$ гээ.

$x = y = 1$ гэвэл $f(1) = f^2(1) + f(2) - 1 \Rightarrow f(1) = -1$ эсвэл $f(1) = 2$ болно.

$f(1) = 2$ бол (*)-д $y = 1$ гэвэл $f(x) = f(x)f(1) + f(x+1) - 1 \Rightarrow f(x+1) = -f(x) + 1$ буюу $f(x+2) = -f(x+1) + 1 = f(x)$ болно.

(*)-д $y = 2$ гэвэл $f(2x) = f(x)f(2) + f(x+2) - 1 = -f(x) + f(x) - 1 = -1$ болно. $x = \frac{1}{2}$ гэж авбал $f(2 \cdot \frac{1}{2}) = -1 = f(1) = 2$ болж зөрчил үүснэ.

Иймд $f(1) = -1$ болно. (*)-д $y = 1$ гэвэл $f(x) = f(x) \cdot f(1) + f(x+1) - 1$ буюу $f(x+1) = 2f(x) + 1$ болно. Эндээс индукцээр $\forall n \in \mathbb{Z}$ хувьд $f(n) = -1$ гэж гарна. Мөн $f(x+n) = 2^n f(x) + 2^n - 1$ гэж гарна.

(*)-д $x = n \in \mathbb{Z}, y = \frac{1}{n}$ гэвэл $f(1) = f(n)f(\frac{1}{n}) + f(n + \frac{1}{n}) - 1$
 $-1 = -1 \cdot f(\frac{1}{n}) + 2^n f(\frac{1}{n}) + 2^n - 1 - 1, f(\frac{1}{n})(2^n - 1) = -(2^n - 1)$
 буюу $n \neq 0$ бол $f(\frac{1}{n}) = -1$ гэж гарна.

(*)-д $x = m, y = \frac{1}{n}$ гэвэл $f(\frac{m}{n}) = f(m)f(\frac{1}{n}) + f(m + \frac{1}{n}) - 1 =$

$(-1) \cdot (-1) + 2^m f\left(\frac{1}{n}\right) + 2^m - 1 - 1 = 1 + (-2^m) + (2^m) - 2 = -1$
буюу $\forall x \in \mathbb{Q}$ хувьд $f(x) = -1$ болно.

2. $f(2) = 1$ байг.

(*)-д $x = y = 1$ гэвэл $f(1) = f^2(1) + f(2) - 1$ буюу $f(1) = 0$
эсвэл $f(1) = 1$ гэж гэрнэ. $f(1) = 1$ бол (*)-д $y = 1$ гэвэл
 $f(x) = f(x) \cdot f(1) + f(x+1) - 1$ буюу $\forall x \in \mathbb{Q}$ хувьд $f(x+1) = 1$
болно. Гэтэл $f(0) = -1$ учир зөрчил. Иймд $f(1) = 0$ болно.

(*)-д $y = 1$ гэвэл $f(x) = f(x) \cdot f(1) + f(x+1) - 1 \Rightarrow$
 $f(x+1) = f(x) + 1$ буюу $\forall x \in \mathbb{Z}$ хувьд $f(n) = n - 1$,
 $f(x+n) = f(x) + n$ гэж гарна.

(*)-д $x = n, y = \frac{1}{n}$ гэвэл $f(1) = f(n) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(n + \frac{1}{n}\right) - 1 =$
 $(n-1)f\left(\frac{1}{n}\right) + n + f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = nf\left(\frac{1}{n}\right) + n - 1 = f(1) = 0.$
 $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1-n}{n} = \frac{1}{n} - 1$ болно.

(*)-д $x = m \in \mathbb{Z}, y = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ гэвэл $f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) +$
 $f\left(m + \frac{1}{n}\right) - 1 = (m-1) \cdot \left(\frac{1}{n} - 1\right) + m + \frac{1}{n} - 1 = \frac{m}{n} - m + m - 1 = \frac{m}{n} - 1$
болж $x \in \mathbb{Q}$ хувьд $f(x) = x - 1$ болно.

Иймд $f(x) = x - 1, f(x) = 1, f(x) = -1$ гэж 3-н хариутай.

Х-В3. $BC \cap AA_1 = A_2, AC \cap BB_1 = B_2, AB \cap CC_1 = C_2$ гэе.

$$\begin{aligned}\angle ACB_1 &= \angle CAB_1 = \frac{180^\circ - \angle AB_1C}{2} = \\ &= \frac{180^\circ - (360^\circ - 2\angle AMC)}{2} = \angle AMC - 90^\circ\end{aligned}$$

гэдгээс

$$\begin{aligned}\frac{S_{ABB_1}}{S_{BCB_1}} &= \frac{AB \cdot AB_1 \cdot \frac{1}{2} \sin(\angle A + \angle AMC - 90^\circ)}{BC \cdot B_1C \cdot \frac{1}{2} \sin(\angle C + \angle AMC - 90^\circ)} = \\ &= \frac{AB \sin(\angle A + \angle AMC - 90^\circ)}{BC \sin(\angle C + \angle AMC - 90^\circ)}\end{aligned}$$

Мөн ижил талд налсан гэдгээсээ

$$\frac{S_{ABB_1}}{S_{BCB_1}} = \frac{AB_2}{B_2C}$$

учир

$$\frac{AB_2}{B_2C} = \frac{AB \cos(\angle A + \angle AMC)}{BC \cos(\angle C + \angle AMC)} = \frac{AB \cos(\angle A + 2\angle B)}{BC \cos(\angle C + 2\angle B)} \quad (1)$$

болно. Мөн ижил аргаар

$$\frac{CA_2}{A_2B} = \frac{CA \cdot \cos(\angle C + 2\angle A)}{AB \cdot \cos(\angle B + 2\angle A)} \quad (2)$$

$$\frac{BC_2}{C_2A} = \frac{BC \cdot \cos(\angle B + 2\angle C)}{CA \cdot \cos(\angle A + 2\angle C)} \quad (3)$$

гэж гарна. Иймд

$$\begin{aligned} & \frac{AB_2}{B_2C} \cdot \frac{CA_2}{A_2B} \cdot \frac{BC_2}{C_2A} = \\ & = \frac{\cos(\angle A + 2\angle B)}{\cos(\angle C + 2\angle B)} \cdot \frac{\cos(\angle C + 2\angle A)}{\cos(\angle B + 2\angle A)} \cdot \frac{\cos(\angle B + 2\angle C)}{\cos(\angle A + 2\angle C)} \stackrel{(*)}{=} 1. \end{aligned}$$

$$[\cos(\angle A + 2\angle B) = \cos(180^\circ + \angle B - \angle C) = \cos(180^\circ + \angle C - \angle B) = \cos(\angle A + 2\angle C)]$$

$$\cos(\angle C + 2\angle A) = \cos(180^\circ + \angle A - \angle B) = \cos(180^\circ + \angle B - \angle A) = \cos(\angle C + 2\angle B)$$

$$\cos(\angle B + 2\angle C) = \cos(180^\circ + \angle C - \angle A) = \cos(180^\circ + \angle A - \angle C) = \cos(\angle B + 2\angle A)] \quad (*)$$

ММО-45, XI анги III даваа

XI-A1. Шатрын багийн тойргоор тоглосон тэмцээнд тус бүр 10 хүн-тэй 45 баг оролцов. Багийн гишүүд өөрийн эрэмбээр 1–10 дугаартай ширээнд сууж тоглоно. Хамгийн өндөр эрэмбэтэй тамирчин 1-р ширээнд, дараах нь 2-р ширээнд гэх мэтчилэн суух бөгөөд тэмцээний явцад тамирчны эрэмбэ өөрчлөгдөхгүй. Түүнчлэн нэг багт ижил эрэмбэтэй тамирчин байхгүй байв. Хэрвээ тэмцээний явцад эрэгтэй шатарчин, эмэгтэй шатарчинтай таарсан тохиолдол бүрт эмэгтэй нь хожсон, бусад тохиолдолд тэнцээ гарсан бөгөөд аль ч 2 багийн хооронд гарсан өргүүдийн талаас илүүгүй нь тэнцээ байсан гэвэл эмэгтэй шатарчны тоо 258-аас хэтрэхгүй гэж батал.

XI-A2. Хурц өнцөгт ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн төв O . AO ба BC -ийн огтлолцол D ба AB тал дээр E , AC тал дээр F цэгийг $AFDE$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтсан байхаар сонгон авав. E , F цэгүүдээс BC рүү буулгасан перпендикулярын суурь нь харгалзан E_1 , F_1 бол E_1F_1 хэрчмийн урт E , F -ийн сонголтоос үл хамааран тогтмол гэж батал.

XI-A3. n натурал тоог 3-т үл хуваагдах натурал тоонуудын нийлбэрт задлах боломжийн тоо нь n -ийг нэг натурал тоог 2-оос олонгүй удаа ашиглан нийлбэрт задлах боломжийн тоотой тэнцүү болохыг батал. Нэмэгдэхүүний байр солигдохыг ялгаатай задаргаа гэж үзэхгүй.

XI-B1. $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ дарааллын дурын n дугаартай гишүүн a_n -ийн хувьд $b \mid a_n - 2n \cdot a^n$ байх $a < b$ натурал тоонуудыг ол.

XI-B2. ABC гурвалжны AB ба AC талууд дээр харгалзан M ба N цэгүүд оршино. BN ба CM диаметртэй тойргууд P , Q цэгт огтлолцдог ба H нь AMN гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын цэг бол P , Q , H цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

XI-B3. $2 < n \in \mathbb{N}$ байг.¹ $I(\pi)$ -ээр $1, 2, 3, \dots, n$ тоонуудын π сэлгэмлийн инверсийн тоо буюу $1 \leq i < j \leq n$ боловч $\pi(i) > \pi(j)$ байх бүх (i, j) хосуудын тоог тэмдэглэе. Түүнчлэн a_k -аар $I(\pi) = k$ байх бүх π сэлгэмлүүдийн тоог тэмдэглэе. Тэгвэл

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{3i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} a_{3i+2}$$

гэж батал.

¹ $n \neq 2$ нөхцөлийг орхигдуулсан тул бодлогыг зохиогчийн зүгээс та бүхнээс уучлал хүсч байна. Энэ тохиолдолд бодлого худал болохыг харуулахад төвөгтэй биш.

3.16 ММО-45, XI ангийн III даваа бодолт

XI-A1. k -р ширээнд тоглосон эмэгтэй шатарчдын тоог a_k гэе. Тэгвэл нийт хожлын тоо нэг талаас

$$\sum_{k=1}^{10} a_k(45 - a_k)$$

болох ба нөгөө талаас аль ч хоёр багын тоглолтод дор хаяж 5 хожил гарах тул нийт хожлын тоо $5C_{45}^2$ -оос цөөнгүй байна. Иймд

$$\sum_{k=1}^{10} a_k(45 - a_k) \geq 5C_{45}^2$$

болно. Коши Буняковскийн тэнцэтгэл бишээр

$$\sum_{k=1}^{10} a_k(45 - a_k) = 45 \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} a_k^2 \leq 45 \sum_{k=1}^{10} a_k - \frac{\left(\sum_{k=1}^{10} a_k\right)^2}{10}$$

болох ба эмэгтэй шатарчдын нийт тоог M гэвэл

$$45M - \frac{M^2}{10} \geq 5C_{45}^2$$

болно. $M^2 - 450M + 49500 \leq 0$ тул

$$\begin{aligned} 191 &< \frac{450 - \sqrt{450^2 - 4 \cdot 49500}}{2} \leq M \leq \\ &\geq \frac{450 + \sqrt{450^2 - 4 \cdot 49500}}{2} < 259 \end{aligned}$$

M бүхэл тул $M \leq 258$ болж батлах зүйл батлагдав.¹

¹Зарим сурагчид бодлогын нөхцөлд таарах тэмцээнийг шинжлэх замаар энэ үнэлгээг сайжруулсан боловч ерөнхий тохиолдолд тохиромжгүй тул энэ бодолтыг оруулав. Ер нь бодлогын нөхцөлд таарах тэмцээн явагдсан байх боломжтой эсэх нь тодорхойгүй байгаа.

XI-A2. AO -ийн багтаасан тойрогтой огтлолцох цэгийг A_1 гээ. AA_1 диаметр тул $\angle ABA_1 = \angle ACA_1 = 90^\circ$. Иймд $\angle DBA_1 = \angle DAC = 90^\circ - \beta$, $\angle DCA_1 = \angle DAB = 90^\circ - \gamma$. Синусийн теоремоор

$$\frac{DE}{\sin(90^\circ - \gamma)} = \frac{DA}{\sin \angle AED},$$

$$\frac{DF}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{DA}{\sin \angle AFD}$$

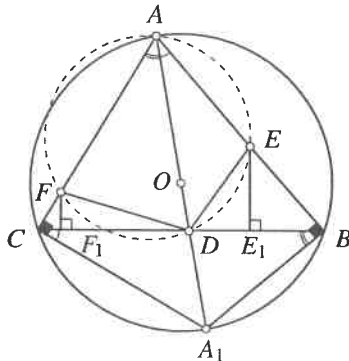
байна. $\angle EDB = \angle AED - \beta$, $\angle FDC = \angle AFD - \gamma$ ба $DE_1 = DE \cos \angle EDB$, $DF_1 = DF \cos \angle FDC$ тул

$$\begin{aligned} E_1F_1 &= \frac{DA}{\sin \angle AED} \cos \gamma \cos(\angle AED - \beta) + \\ &+ \frac{DA}{\sin \angle AFD} \cos \beta \cos(\angle AFD - \gamma). \end{aligned}$$

$\angle AED + \angle AFD = 180^\circ$ тул $\sin \angle AED = \sin \angle AFD$, $\cos \angle AED = -\cos \angle AFD$. Иймд

$$\begin{aligned} E_1F_1 &= \frac{DA}{\sin \angle AED} (\cos \gamma \cos \angle AED \cos \beta + \cos \gamma \sin \angle AED \sin \beta + \\ &+ \cos \beta \cos \angle AFD \cos \gamma + \cos \beta \sin \angle AFD \sin \gamma) = DA \sin(\beta + \gamma). \end{aligned}$$

болж батлах зүйл батлагдав.



XI-A3. Хэрэв

$$n = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_m a_m, \quad a_1 > \dots > a_m \geq 1, \quad \alpha_i \in \{1, 2\} \quad (1)$$

ба $a_i = 3^{\beta_i} b_i$, $3 \nmid b_i$ бол (1)-д $\alpha_i a_i$ бүрийг $\alpha_i 3^{\beta_i}$ ширхэг b_i -ээр солиод бичвэл n -тоог 3-т үл хуваагдах тоонуудын нийлбэрт тавьсан нэг задаргаа үүснэ. Энэ тохиолдолд d тооны задаргаанд оролцох тоо нь

$$\sum_{b_i=d} \alpha_i 3^{\beta_i}$$

байна. Дээрх аргаар нэг натурал тоог хоёроос олонгүй удаа ашигласан задаргаа бүрт нэмэгдэхүүн бүр нь 3-т үл хуваагдах задаргааг харгалзуулж болно. Энэ харгалзаа нь харилцан нэг утгатай болохыг харуулъя. Өөрөөр хэлбэл дурын 3-т үл хуваагдах тоонуудын нийлбэрт задалсан задаргаа бүр яг нэг удаа гарахыг харуулъя.

Ямар нэг 3-т үл хуваагдах тоонуудын нийлбэрт задалсан задаргаа авч үзье. Энэ задаргаанд 1-ийн тоо γ_1 удаа, 2-ийн тоо γ_2 удаа, 4-ийн тоо γ_4 гэх мэтчилэн оролцсон гэе. Түүнчлэн γ_d -ийн 3-тийн тооллын систем дэх задаргаа нь

$$\gamma_d = \sum \alpha_i 3^{\beta_i}, \quad d = 1, 2, 4, 5, \dots$$

гэвэл $a_i = 3^{\beta_i} d$ тоо α_i ($\alpha_i \in \{1, 2\}$) удаа орсон n тооны задаргаа үүснэ. Өөрөөр хэлбэл γ_d ширхэг d -г α_1 ширхэг $3^{\beta_1} d$, α_2 ширхэг $3^{\beta_2} d$, ... тоонуудаар сольж нэг тоог хоёроос олонгүй удаа ашигласан задаргааг гаргана. Үнэндээ $d_1 \neq d_2$ бол $3^i d_1 \neq 3^j d_2$ ба $i \neq j$ бол $3^i d \neq 3^j d$ байх нь ойлгомжтой тул нэг тоо хоёроос олон удаа орох боломжгүй. Шинээр үүссэн задаргааны дүр нь бидний авч үзсэн задаргаа байх тул дээр зохиосон харгалзаа харилцан нэг утгатай болох нь харагдаж байна.

XI-B1. $n = 1$ үед $b \mid a_1 - 2 \cdot 1 \cdot a^1 = 1 - 2a$, $n = 3$ үед

$b \mid a_3 - 2 \cdot 3 \cdot a^3 = 2 - 6a^3$ ба $(1 - 2a, 2) = 1$, $(1 - 2a, a) = 1$ тул

$$\begin{aligned} 1 < b \mid (1 - 2a, 2 - 6a^3) &= (1 - 2a, 1 - 3a^3) = \\ &= (1 - 2a, 1 - 3a^3 - (1 - 2a)) = (1 - 2a, 2a - 3a^3) \\ &= (1 - 2a, 2 - 3a^2) = (1 - 2a, 2 - 3a^2 - 2(1 - 2a)) = \\ &= (1 - 2a, 4a - 3a^2) = (1 - 2a, 4 - 3a) = \\ &= (1 - 2a, 4 - 3a - 4(1 - 2a)) = (1 - 2a, 5a) = (1 - 2a, 5) \end{aligned}$$

тул $b = 5$ байх л боломжтой. $5 \mid 1 - 2a$ ба $a < 5$ тул $a = 3$ байх л боломжтой. $(a, b) = (3, 5)$ хос бодлогын нөхцөлийг хангана гэж баталъя.

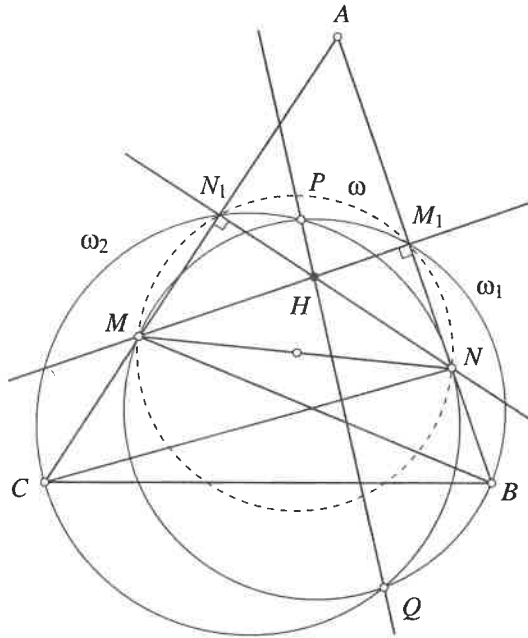
$n = 1$ үед $5 \mid 1 - 2 \cdot 3^1$ ба $n = 2$ үед $5 \mid 1 - 2 \cdot 2 \cdot 3^2$ байна. $3 \leq n$ үед $a_n - 2n \cdot 3^n = (a_{n-2} + a_{n-1}) - 2n \cdot 3^n = a_{n-2} - 2(n-2) \cdot 3^{n-2} + a_{n-1} - 2(n-1) \cdot 3^{n-1} - 2n \cdot 3^n + 2(n-2) \cdot 3^{n-2} + 2(n-1) \cdot 3^{n-1}$ тул

$$5 \mid -2n \cdot 3^n + 2(n-2) \cdot 3^{n-2} + 2(n-1) \cdot 3^{n-1}$$

гэж батлахад хангалттай. $-2n \cdot 3^n + 2(n-2) \cdot 3^{n-2} + 2(n-1) \cdot 3^{n-1} = (-18n + 2n + 6n) \cdot 3^{n-2} + (-4 - 6) \cdot 3^{n-2} = (-10n - 10) \cdot 3^{n-2}$ тул батлах зүйл батлагдав.

XI-B2. AMN гурвалжны M ба N оройгоос буулгасан өндүүдийн сууриудыг харгалзан M_1, N_1 гээ. MN диаметртай тойрог татъя. MN диаметртай тойргийг ω , BN диаметртай тойргийг ω_1 , CM диаметртай тойргийг ω_2 гээ. $\angle MM_1N = \angle MM_1B = 90^\circ$ тул M_1 цэг ω ба ω_1 тойргууд дээр, $\angle NN_1M = \angle NN_1C = 90^\circ$ тул N_1 цэг ω ба ω_2 тойргууд дээр тус тус оршино. Эндээс NN_1, MM_1, PQ нь радикал тэнхлэгүүд тул тэдгээрийн огтлолцлын цэг буюу гурван тойргийн радикал төв нь MM_1, NN_1 шулуунуудын огтлолцол буюу AMN гурвалжны орто төв

болно. Иймд PQ шулуун дээр H цэг оршино.



XI-B3. $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ буюу a_k дарааллын уламжлагч функцийг авч үзье.

$$f(x) = (1+x)(1+x+x^2)\dots(1+x+x^2+\dots+x^{n-1}) \quad (1)$$

болохыг n -ээр индукцлэн хялбархан баталж болно. $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ нь $x^2 + x + 1$ олон гишүүнтийн язгуурууд байг. Тэгвэл $\varepsilon_1^{3k} = 1$, $\varepsilon_2^{3k} = 1$, $\varepsilon_1^{3k+1} = \varepsilon_1$, $\varepsilon_2^{3k+1} = \varepsilon_2$, $\varepsilon_1^{3k+2} = \varepsilon_2$, $\varepsilon_2^{3k+2} = \varepsilon_1$ байна. Иймд

$$f(\varepsilon_1) = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3 + a_4\varepsilon_1 + a_5\varepsilon_2 + \dots \quad (2)$$

ба

$$f(\varepsilon_2) = a_0 + a_1\varepsilon_2 + a_2\varepsilon_1 + a_3 + a_4\varepsilon_2 + a_5\varepsilon_1 + \dots \quad (3)$$

нөгөө талаас $n > 2$ үед (1)-ээр $f(\varepsilon_1) = f(\varepsilon_2) = 0$ байна. Иймд (2)-оос (3)-ийг хасвал

$$a_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + a_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + a_4(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + a_5(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \dots = 0$$

Үүнийг $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ -д хуваавал $a_1 - a_2 + a_4 - a_5 + a_7 - a_8 + \dots = 0$ буюу батлах зүйл гарна.

3.17 ММО-45, XI ангийн IV даваа

Б. Батбаясгалан

XI-A1 (Б. Батбаясгалан). Зөв 2011 өнцөгтийн оройнуудыг аль нэг оройгоос нь эхлэн цагийн зүүний дагуу $1, 2, \dots, 2011$ тоонуудаар дугаарлав. Хэрэв цагийн зүүний дагуу a, b, c гэж уншигдах (дараалсан байх албагүй) 3 тоог харгалзан $c, a - \frac{1}{2009}, b + \frac{1}{2009}$ тоонуудаар сольж болох бол энэ үйлдлийн тусламжтайгаар уг олон өнцөгтийн оройнуудыг цагийн зүүний эсрэг чиглэлд $1, 2, \dots, 2011$ тоонуудаар дугаарлаж болох уу?

XI-A2 (Г. Батзаяа). n нь 6-тай харилцан анхны натурал тоо ба $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$ нь $a_1 < a_2 < \dots < a_n; b_1 < b_2 < \dots < b_n$ байх натурал тоонууд байг. Хэрэв дурын t натурал тооны хувьд $a_i + a_j + a_k = t, (i < j < k)$ байх гурвалын тоо нь $b_i + b_j + b_k = t, (i < j < k)$ байх гурвалын тоотой тэнцүү бол $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$ гэж батал.

XI-A3 (У. Батзориг). ω тойрог өгөгдөв. Уг тойргийг дотоод байдлаар шүргэсэн бөгөөд аль ч зэргэлдээ 2 тойргууд нь хоорондоо шүргэлцсэн 6 тойрог өгөгдөв. Эдгээр 6 тойргийн ω -тэй шүргэлцсэн цэгүүдийг A, B, C, D, E, F гээ. Тэгвэл $ABCDEF$ 6 өнцөгтийн AD, BE, CF гол диагоналиуд 1 цэгт огтлолцохыг батал.

XI-B1 (Н. Аргилсан). $x + y + z = 1$ байх x, y, z эерэг бодит тоонуудын хувьд

$$\frac{\sqrt{xyz}}{x^2 + y^2 + z^2 - x^3 - y^3 - z^3} \leq \\ \geq \sqrt{\frac{xy}{(1-z)^2} + \frac{yz}{(1-x)^2} + \frac{zx}{(1-y)^2}}$$

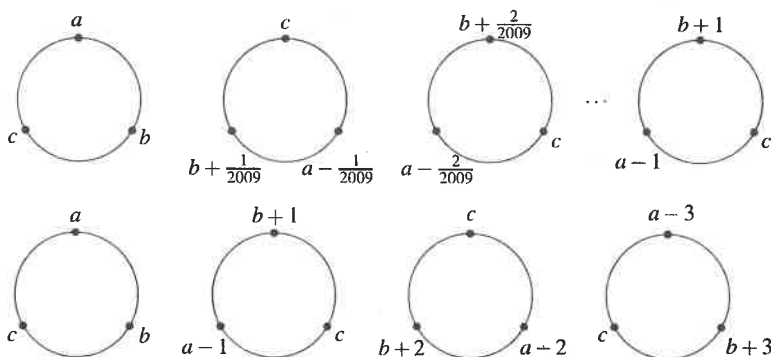
тэнцэтгэл бишийг батал.

XI-B2 (У. Батзориг). ABC гурвалжны AA_1 , BB_1 , CC_1 биссектриссүүд татав. $AA_1 \cap B_1C_1 = X$ ба X -ээс BC -д буулгасан перпендикулярын суурийг Y гэе. $\angle BC_1Y$ ба $\angle CB_1Y$ -үүдийн биссектриссүүдийн огтлолцлын цэгийг Z гэе. Тэгвэл A , Y , Z цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

XI-B3 (Г. Батзаяа). Дурын $k \in \mathbb{N}$ тооны хувьд $\frac{2^{n^2} + 1}{n^3}$ нь бүхэл байдаг яг k ширхэг анхны тоон хуваагчтай n -тоо олдохыг батал.

3.18 ММО-45, XI ангийн IV даваа бодолт

XI-A1. (Б. Баяржаргалын бодолт) Болно гэдгийг баталъя. a , b , c гурвал дээр үйлдлийг 2009 удаа давтахад $b+1$, c , $a-1$ тоонууд, $3 \cdot 2009$ удаа давтахад $a-3$, $b+3$, c тоонууд үүснэ.



Эхний үйлдлийг * үйлдэл, хоёр дахийг нь ** үйлдэл гэж нэрлэе. $3k+4$, $3k+2$, $3k+3$ хэлбэрийн гурвалууд дээр * үйлдлийг хийвэл $3k+3$, $3k+3$, $3k+3$ тоонууд үүснэ. Иймд $1, 2, \dots, 2011$ тоонуудаас $1, 3, 3, 3, 6, 6, 6, \dots, 2010, 2010, 2010$ үүснэ. $3k$, $2013-3k$, 1 хэлбэрийн гурвал дээр ** үйлдлийг $\frac{2013-6k}{3} = 671-2k$ удаа давтах замаар $2013-3k$, $3k$, 1 тоонуудыг гаргаж чадах тул $1, 3, 3, 3, 6, 6, 6, \dots, 2010, 2010, 2010$ -ийг $1, 2010, 2010, 2010, \dots, 6, 6, 6, 3, 3, 3$ болгож

чадна. k_1, k_2, k_3 ($k = k_1 = k_2 = k_3$) тоонуудыг k_3, k_1, k_2 гэж уншаад * үйлдлийг хийвэл $k_1 + 1, k_2, k_3 - 1$ болох тул $3k, 3k, 3k$ хэлбэрийн гурвалыг $3k + 1, 3k, 3k - 1$ болгож болно. Иймд 1, 2010, 2010, 2010, ..., 6, 6, 6, 3, 3, 3-ыг 1, 2011, 2010, 2009, ..., 7, 6, 5, 4, 3, 2 болгож болно. Энэ нь цагийн зүүний эсрэг чиглэлд дугаарласан дугаарлалтыг өгнө.

XI-A2. $a(x) = x^{a_1} + x^{a_2} + \dots + x^{a_n}$, $b(x) = x^{b_1} + x^{b_2} + \dots + x^{b_n} \in \mathbb{Z}[x]$ олон гишүүнтүүдийг авъя. Эсрэгээс нь $a(x) \neq b(x)$ гэе.

$$\begin{aligned} [a(x)]^3 &= \left(\sum_{i=1}^n x^{a_i} \right) \left(\sum_{i \neq j} x^{a_i + a_j} + \sum_{i=1}^n x^{2a_i} \right) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x^{a_i} \right) \left(\sum_{i \neq j} x^{a_i + a_j} \right) + \left(\sum_{i=1}^n x^{a_i} \right) \left(\sum_{i=1}^n x^{2a_i} \right) = \\ &= \left(\sum_{i \neq j \neq k} x^{a_i + a_j + a_k} + 2 \sum_{i \neq j} x^{a_i + 2a_j} \right) + \left(\sum_{i \neq j} x^{a_i + 2a_j} + \sum_{i=1}^n x^{3a_i} \right) \\ \sum_{i \neq j \neq k} x^{a_i + a_j + a_k} &= [a(x)]^3 - 3a(x)a(x^2) + 2a(x^3) \end{aligned}$$

бодлогын нөхцөлөөс

$$[a(x)]^3 - 3a(x)a(x^2) + 2a(x^3) = [b(x)]^3 - 3b(x)b(x^2) + 2b(x^3)$$

болно. $f(x) = a(x) - b(x)$ гэе. $f(1) = a(1) - b(1) = n - n = 0$ байна. $f(x) = (x - 1)^k h(x)$, $h(1) \neq 0$ гэе. Тэгвэл

$$\begin{aligned} (a(x) - b(x))([a(x)]^2 + a(x)b(x) + [b(x)]^2) - 3(a(x)(a(x^2) - \\ - b(x^2)) + b(x^2)(a(x) - b(x))) + 2(a(x^3) - b(x^3)) = 0 \end{aligned}$$

тул

$$\begin{aligned} (x - 1)^k h(x) ([a(x)]^2 + a(x)b(x) + [b(x)]^2) - 3(a(x)(x^2 - 1)^k h(x^2) + \\ + b(x^2)(x - 1)^k h(x)) + 2(x^3 - 1)^k h(x^3) = 0 \end{aligned}$$

иймд

$$h(x)([a(x)]^2 + a(x)b(x) + [b(x)]^2) - 3(a(x)(x+1)^k h(x^2) + b(x^2)h(x)) + 2(x^2 + x + 1)^k h(x^3) = 0$$

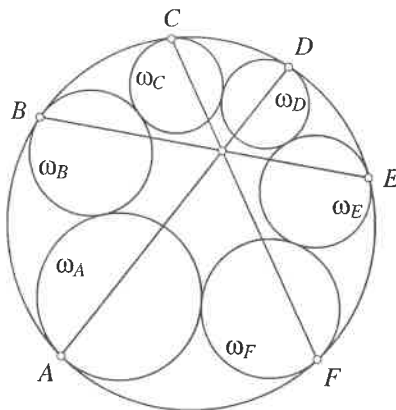
$x = 1$ гэвэл $3n^2 - 3(n \cdot 2^k + n) + 2 \cdot 3^k = 0$ буюу $n^2 - n(2^k + 1) + 2 \cdot 3^{k-1} = 0$ тул $n \mid 2 \cdot 3^{k-1}$ болж $(n, 6) = 1$ -д зөрчиж байна.

XI-A3. (1-р сургуулийн сурагч О. Зориггоогийн бодолт) A дээр төвтэй ирверс хийе. Тэгвэл $\omega_A \rightarrow \ell_A$, $\omega_B \rightarrow \omega_{B'}$, $\omega \rightarrow \ell$, $\omega_C \rightarrow \omega_{C'}$, $\omega_D \rightarrow \omega_{D'}$, $\omega_E \rightarrow \omega_{E'}$, $\omega_F \rightarrow \omega_{F'}$ болно.

ω_A , ω нь A цэгт шүргэлцэх тул $\ell_A \parallel \ell$ болно. $\omega_{F'}$, $\omega_{B'}$ нь ℓ_A , ℓ -г шүргэх тул $R_B = R_F = R$ байна.

$\omega_{C'}$ -ийн радиус r_C , $\omega_{D'}$ -ийн радиус r_D , $\omega_{F'}$ -ийн радиус r_E гээ.

$BE \cap CF = M$. Одоо $B'E'A$, $C'F'A$ гурвалжнуудыг багтаасан тойргуудын огтлолцол M' -д бууна, $AD \rightarrow AD'$, мөн AB нь $\triangle B'E'A$, $\triangle C'F'A$ -г багтаасан тойргуудын радикал тэнхлэг тул $M' \in AD'$ буюу $C'D' \cdot D'F' = D'E' \cdot B'D'$ гэж батлахад хангалттай.



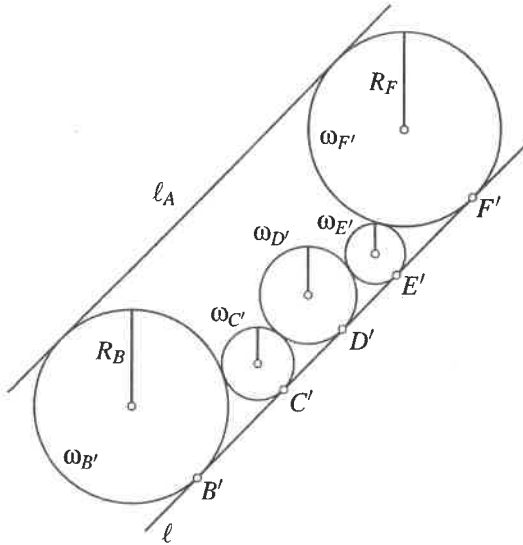
$$C'D' = \sqrt{(r_C + r_D)^2 - (r_C - r_D)^2} = 2\sqrt{r_C r_D}$$

төстэйгөөр $D'E' = 2\sqrt{r_D r_E}$, $E'F' = 2\sqrt{R r_E}$, $B'C' = 2\sqrt{R r_C}$ болно. Эндээс

$$C'D' \cdot D'F' = 2\sqrt{r_C \cdot r_D} \cdot (2\sqrt{r_D \cdot r_E} + 2\sqrt{R \cdot r_E})$$

$$D'E' \cdot B'D' = 2\sqrt{r_D \cdot r_E} \cdot (2\sqrt{r_C \cdot r_D} + 2\sqrt{R \cdot r_C})$$

тул $C'D' \cdot D'F' = D'E' \cdot B'D'$ болно. Иймд $D' \in AM'$ болж AD , BE , CD -үүд 1 цэгт огтлолцоно.



XI-B1. Тэнцэтгэл бишийн 2 талыг $\sqrt{xyz}$ -д хувааж, квадрат зэрэгт дэвшүүлбэл:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{x^2(1-x) + y^2(1-y) + z^2(1-z)} \right)^2 \leq \\ & \leq \frac{1}{x(1-x)^2} + \frac{1}{y(1-y)^2} + \frac{1}{z(1-z)^2} \end{aligned}$$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ функц авч үзье. $f''(x) = \frac{6}{x^4} > 0$ тул $f(x)$ нь хотгор функц байна. Иймд $\alpha = x$, $\beta = y$, $\gamma = z$, $x_1 = x(1-x)$,

$x_2 = y(1 - y)$, $x_3 = z(1 - z)$ гээд Йенсений тэнцэтгэл биш бичвэл

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) + \gamma f(x_3)$$

буюу

$$\frac{1}{(x^2(1-x) + y^2(1-y) + z^2(1-z))^2} \leq \\ \leq \frac{x}{x^2(1-x)^2} + \frac{y}{y^2(1-y)^2} + \frac{z}{z^2(1-z)^2}$$

болж тэнцэтгэл биш батлагдав.

XI-B2. (Хөвсгөл аймгийн Ирээдүй сургуулийн сурагч

О. Өсөхбаатарын бодолт) $\angle YB_1C$ -ийн биссектрисс AY -тэй E цэгээр, $\angle YC_1B$ -ийн биссектрисс AY -тэй F -цэгээр огтлолцдог байг. $(C_1B_1) \cap (CB) = P$ гээ. BB_1, CC_1, AA_1 нь чевианууд ба $P \in (C_1B_1)$, $P \in (BC)$ тул (P, C, A, B) нь гармоник дөрвөл болно. Эндээс (P, B_1, X, C_1) нь мөн гармоник дөрвөл болно. (*)

$\angle XYP = 90^\circ$ мөн (*)-оос гармоник тухай 2-р теоремоос $\angle C_1PX = \angle XYB_1$ болно. Мөн $\angle C_1AX = \angle XAB_1$ тул биссектриссийн чанар ёсоор $\frac{C_1Y}{B_1Y} = \frac{C_1X}{B_1X}$, $\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{C_1X}{B_1X}$ тул $\frac{AC_1}{C_1Y} = \frac{AB_1}{B_1Y}$. (**)

B_1E нь $\triangle AB_1Y$ -ийн гадаад өнцгийн биссектрисс тул биссектриссийн чанараар $\frac{AB_1}{B_1Y} = \frac{AE}{EY}$, (1); C_1F нь $\triangle AC_1Y$ -ийн

гадаад өнцгийн биссектрисс тул $\frac{AC_1}{C_1Y} = \frac{AF}{FY}$, (2). (**),

(1), (2)-оос $E \equiv F$ гэж гарах ба $E \in (AY)$ ба $F \in (AY)$ тул $Z \equiv E \equiv F$ болж батлах зүйл батлагдав.

XI-B3. Лемм. $2 < p \in \mathbb{P}$ байг.

(i) $\alpha \geq 1$ бол $p^\alpha \mid a+1 \iff p^{\alpha+1} \mid a^p+1$. Эндээс $\forall a \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд $p^2 \nmid \frac{a^p+1}{a+1}$.

(ii) $a \geq 4$ үед $\exists q \in \mathbb{P} : q \mid \frac{a^p+1}{a+1}$ ба $q \nmid a+1$ байна.

$\triangleleft$ (i)-г баталъя. $a \equiv -1 \pmod{p^\alpha}$ гээ. $a \equiv -1 \pmod{p}$ тул $a^{p-1} - a^{p-2} + \dots + 1 \equiv p \equiv 0 \pmod{p}$ болно. $a^p + 1 = (a+1)(a^{p-1} - a^{p-2} + \dots + 1)$ гэдгээс $p^{\alpha+1} \mid a^p + 1$ болно.

$a^p \equiv -1 \pmod{p^{\alpha+1}}$ гээ. $a^p \equiv a \equiv 1 \pmod{p}$ тул $a = pk - 1$ болно. Иймд

$$(pk-1)^{p-1} - (pk-1)^{p-2} + \dots + 1 \equiv (-pk(p-1) + 1) - \\ - (pk(p-2) - 1) + \dots + 1 \equiv -pk \frac{p(p-1)}{2} + p \equiv p \pmod{p^2}$$

болно. Өөрөөр хэлбэл $\text{ord}_p\left(\frac{a^p+1}{a+1}\right) = 1$ байна. Иймд $p^\alpha \mid a+1$ ба $p^2 \nmid \frac{a^p+1}{a+1}$ байна.

(ii)-г баталъя. Хэрэв $\forall q \mid \frac{a^p+1}{a+1}$ -ийн хувьд $q \mid a+1$ гэвэл $a \equiv -1 \pmod{q}$ ба $a^{p-1} - a^{p-2} + \dots + 1 \equiv p \equiv 0 \pmod{q}$. Эндээс $q = p$ болно. Иймд $p^\alpha = \frac{a^p+1}{a+1}$. (i)-ээр $p = \frac{a^p+1}{a+1} = a^{p-1} - a^{p-2} + \dots + 1 > a^{p-1} - a^{p-2} = a^{p-2}(a-1) \geq 3 \cdot 4^{p-2}$ болж зөрчил үүсч байна. $\triangleright$

Одоо k -аар индукцлэж байгуулъя. $k = 1, 2$ үед $2^{3^2} + 1 = 27 \cdot 19$ байна. Эндээс $\frac{2^{3^2} + 1}{3^3} \in \mathbb{N}$ ба

$$\frac{2^{3^2} + 1}{3^3 \cdot 19} \in \mathbb{N} \xRightarrow{(i)} \frac{2^{3^2 \cdot 19} + 1}{3^3 \cdot 19^2} \in \mathbb{N} \xRightarrow{(i)} \frac{2^{3^2 \cdot 19^2} + 1}{3^3 \cdot 19^3} \in \mathbb{N}$$

болно. $\frac{2^{(p_1 \dots p_s)^2} + 1}{(p_1 \dots p_s)^3} \in \mathbb{N}$ байг. $a = 2^{(p_1 \dots p_{s-1})^2}$ гээ. (ii)-ээр

$q \mid \frac{a^{p_s^2} + 1}{a+1}$ ба $q \nmid a+1$ байх q олдоно. $p_1 \dots p_{s-1} \mid a+1$ тул $(q, p_1 \dots p_{s-1}) = 1$ байна. Нөгөө талаас $q = p_s$ гэвэл $p_s^3 \mid a^{p_s^2} + 1 \xRightarrow{(i)} p_s^2 \mid a^{p_s} + 1 \xRightarrow{(i)} q = p_s \mid a+1$ болж зөрчил. Иймд $(q, p_1 \dots p_s) = 1$ болох ба

$$q \mid a^{p_s^2} + 1 \xRightarrow{(i)} q^2 \mid a^{p_s^2 \cdot q} \xRightarrow{(i)} q^3 \mid a^{p_s^2 q^2} + 1$$

$$\text{буюу } \frac{2^{(p_1 \dots p_s q)^2} + 1}{(p_1 \dots p_s q)^3} \in \mathbb{N} \text{ болно.}$$

3.19 ММО-45, Багын багшийн III даваа

Д.Ганзориг

ББ-А1. (Д.Ганзориг) Өгсөн a тоог $2a + 4$ эсвэл $3a + 8$ эсвэл $a^2 + 5a$ тоогоор солих үйлдлийн тусламжтайгаар 3-тооноос 2009 тоог гарган авч болох уу?

ББ-А2. (Д.Ганзориг) $x_1, x_2, \dots, x_{2009}$ - нь эерэг бодит тоонууд бол

$$x_1^{x_1} \dots x_{2009}^{x_{2009}} \geq (x_1 x_2 \dots x_{2009})^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2009}}{2009}}$$

батал.

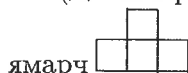
ББ-А3. (Д.Ганзориг) Самбарт $1, 2, \dots, 21$ тоонууд бичигдсэн байв. Хоёр хүүхэд ээлжлэн нэг нэг цифрийг дарах үйлдлээр хамгийн сүүлд үлдсэн 2 цифрийн нийлбэр 5-д хуваагдаж байвал 1-р хүүхэд, үгүй бол 2-р хүүхэд хожно.

Зөв тоглолтонд аль нь хожих вэ?

ББ-В1. (Д.Ганзориг) Хэдэн хүүхэд самар түүжээ. Хамгийн их самар түүсэн хүүхэд нийт самрын $\frac{1}{5}$ -г, хамгийн бага самар түүсэн хүүхэд нийт самрын $\frac{1}{7}$ -г түүсэн бол хэдэн хүүхэд самар түүсэн вэ?

ББ-В2. (Д.Ганзориг) $xy(x + y) = 200700002008$ тэгшитгэлийн бүхэл шийдийг ол.

ББ-В3. (Д.Ганзориг) Шатрын нүднүүдэд дараалсан 64 тоог



ямарч хэсэг дахь тоонуудын нийлбэр 5-д хуваагдаж байхаар байрлуулж болох уу?

3.20 ММО-45, Багын багшийн III даваа бодолт

ББ-А1. Хэрэв a тоо нь 7-д хуваахад 3-үлдэгдэл өгдөг, өөрөөр хэлбэл $7k - 4$ хэлбэртэй бол $2a + 4$, $3a + 8$, $a^2 + 5a$ тоонууд ч мөн 7-д хуваахад 3 үлдэгдэл өгнө гэдгийг хялбар харуулж болно. 2009 нь 7-д хуваагдах тул 3-н тооноос гарган авч болохгүй.

ББ-А2. x_i -үүдийн хувьд өгсөн тэнцэл биш нь тэгш хэмтэй тул $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{2009}$ гэж үзэх болно. Иймд

$$\frac{x_1^{2009} \cdot \dots \cdot x_{2009}^{2009}}{(x_1 \dots x_{2009})^{x_1 + \dots + x_{2009}}} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{x_1 - x_2} \dots \left(\frac{x_1}{x_{2009}}\right)^{x_1 - x_{2009}} \geq 1$$

болно.

ББ-А3. Нэгдүгээр хүүхэд хожино. $1, \dots, 20$ тоонуудын хос бүрдэх тоонуудын нийлбэр 5-д хуваагдаж байхаар бүлэглэе. Эхний хүүхэд 21 тоог даран дараагийн үйлдлээсээ эхлэн хасаж нөгөө тоог нь дарна. Энэ үйлдлээр хамгийн сүүлд нийлбэр нь 5-д хуваагдах ганц хос үлдэнэ.

ББ-В1. Самарын тоо бүхэл тул $5 \cdot 7 = 35$ -д хуваагдах ёстой. Нийт $35k$ самар түүсэн байг, тэгвэл бусад хүүхдүүд $23k$ самар түүсэн болно. Нөхцөл ёсоор $\frac{23k}{7k} > 3$, $\frac{23k}{5k} < 5 \Rightarrow$ нийт хүүхдийн тоо $4 + 2 = 6$ болно.

ББ-В2. x, y -ийн ядаж нэг нь тэгш.

1. $x = 2x_1$, $y = 2y_1$ бол $8x_1y_1(x_1 + y_1) = 200700002008 \Rightarrow x_1y_1(x_1 + y_1) =$ сондгой шийдгүй.

2. Яг нэг нь тэгш $x = 2x_1 \Rightarrow x_1y(x_1 + y) =$ сондгой шийдгүй.

ББ-В3. Бодлогын нөхцөл ёсоор байрлуулсан гэвэл ямар ч мөр ба баганы дараалсан ижил өнгийн нүднүүд дээрх тооны ялгавар 5-д хуваагдана гэж гарна. Өөрөөр хэлбэл модуль 5 аар тэнцүү гэсэн үг. Дамжих чанар нь модуль 5-д биелэх учир бүх хар нүднүүд дэх тоонуудын хамгийн их ба багын зөрөө нь 159 болно. Энэ нь дараалсан 64 тоонд зөрчинө.

3.21 ММО-45, Багын багшийн IV даваа

Ч.Гантөмөр

ББ-А1. (Ц.Батхүү) $S = \{2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{20}\}$ олонлог өгөгдөв. S олонлогийн хосуудын бүх боломжит эерэг ялгаваруудын нийлбэрийг N гээ. N тооны сүүлийн 3 цифрийг ол.

ББ-А2. (Н.Дайвий-Од) Аливаа тойргийн цэгүүдийг, нэгж зайтай нэг өнгийн хоёр цэг олдохгүй байхаар гурван өнгөөр ямагт будаж болохыг батал.

ББ-А3. (Э.Азжаргал) Сургуулийн сурагчдыг аль ч бүлэг нь 45-аас ихгүй хүнтэй байхаар 2009 бүлэгт хуваажээ. Хэрэв аль ч 46 бүлэгт зэрэг ордог сурагч олддог гэвэл бүх бүлэгт ордог сурагч олдохыг батал.

ББ-В1. (У.Батзориг) a, b, c, d бүхэл тоонууд ба $ab = cd$ болно. p анхны тоо бол $a + b - c - d = p$ тэгшитгэлийн бүх (a, b, c, d) шийдийг ол.

ББ-В2. (Б.Эрдэнэбаяр) Аливаа бодит x, y тоонуудын хувьд

$$x^2 + y^2 + (xy)^2 \geq (x + y - 1) \cdot (\lambda - xy)$$

тэнцэтгэл биш ямагт биелдэг байх бүх бодит λ тоог ол.

ББ-В3. (Ж. Батболд) 2×5 хүснэгтийг $1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3, 2 \times 1$ хүснэгтүүдэд хуваах ялгаатай бүх аргын тоог ол.

3.22 ММО-45, Багын багшийн IV даваа бодолт

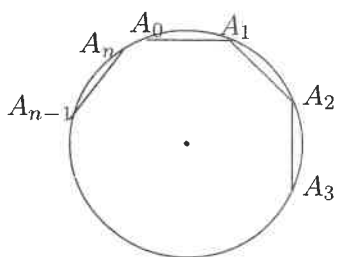
ББ-А1. $N = \sum_{x=0}^{20} (2x - 20)2^x = -20 \cdot 2^0 - 18 \cdot 2^1 - \dots + 18 \cdot 2^{19} + 20 \cdot 2^{20} = 2 \cdot \sum_{x=0}^{20} x \cdot 2^x - 20 \sum_{x=0}^{20} 2^x = 2A - 20B$ болог.

$B = \sum_{x=0}^{20} 2^x = (1 + 2 + \dots + 2^{20})(2 - 1) = 2^{21} - 1 = 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2 - 1 = 1024 \cdot 1024 \cdot 2 - 1 = 1048576 \cdot 2 - 1 = 2097152 - 1 = 2097151$ ба $B \equiv 151 \pmod{1000}$ болов.

$A = (2 + 2^2 + \dots + 2^{20}) + (2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}) + \dots + (2^{19} + 2^{20}) + 2^{20} =$

$$\begin{aligned}
&= 2 \cdot (1 + 2 + \dots + 2^{19}) + 2^2 \cdot (1 + 2 + \dots + 2^{18}) + \dots + 2^{19} \cdot (1 + 2) + 2^{20} = \\
&= 2 \cdot (2^{20} - 1) + 2^2 \cdot (2^{19} - 1) + \dots + 2^{19} \cdot (2^2 - 1) + 2^{20} \cdot (2 - 1) = \\
&= (2^{21} - 2) + (2^{20} - 2^2) + \dots + (2^{21} - 2^{19}) + (2^{21} - 2^{20}) = \\
&= 20 \cdot 2^{21} - (2 + 2^2 + \dots + 2^{20}) = 20 \cdot 2^{21} - 2 \cdot (1 + 2 + \dots + 2^{19}) = \\
&= 20 \cdot 2^{21} - 2(2^{20} - 1) = 39845890 \text{ ба } A \equiv 890 \pmod{1000} \text{ болов.} \\
N &= 2A - 20B \equiv 2 \cdot 890 - 20 \cdot 151 \equiv 1780 - 3020 \equiv -1240 \equiv -240 \equiv \\
&760 \pmod{1000} \text{ болов. Хариу: } 760.
\end{aligned}$$

ББ-А2. Баталгаа. Хэрэв тойргийн радиус $R < \frac{1}{2}$ бол энэ тойргийн аль ч 2 цэгийн хоорондох зай 1-ээс бага учир тойргийн цэгүүдийг гурван өнгөөр дурын аргаар будахад 1 зайтай, ижил өнгийн 2 цэг олдохгүй нь илэрхий.



$R \geq \frac{1}{2}$ болог. Тойрог дээр дурын A_0 цэг тэмдэглээд, A_0 цэгээс эхлэн 1 урттай хөвчүүд дэс дараалан байгуулая. (зураг хар) $A_0A_1 = A_1A_2 = \dots = A_{n-1}A_n = 1$

I. A_n цэг A_0 -той давхцадаг бол $(A_0; A_1]$ нумыг x өнгөөр, $(A_1; A_2]$ нумыг y өнгөөр, $(A_2; A_3]$ нумыг z өнгөөр, гэх мэтээр x, y, z өнгүүдээр ээлжлэн будая. Хэрэв $(A_{n-1}; A_n]$ ба $(A_0; A_1]$ ижил өнгөтэй (x өнгөтэй) байхаар таарвал $(A_{n-1}; A_n]$ -ийг y өнгөөр будая. Одоо энэ тойрог дээр 1 зайтай ижил өнгийн хоёр цэг олдохгүй нь ойлгомжтой.

II. $A_n \neq A_0$ ба $A_nA_0 < 1$ байг. Энэ тохиолдолд хэрэв $(A_n; A_0]$ нум x өнгөтэй байхаар таарвал, түүнийг y өнгөөр будна. Харин $(A_{n-1}; A_n]$ нум x өнгөтэй байхаар таарвал, түүнийг z өнгөөр будаж, харин $(A_{n-2}; A_{n-1}]$ нумыг x өнгөөр будая. Ингэхэд бодлогын нөхцөл биелнэ.

ББ-А3. Баталгаа. Бид бодлогын өгсөн нөхцөлөөс аль ч 47, 48, ..., 2009 бүлэгт зэрэг ордог сурагч олдохыг баталъя. $A_1, A_2, \dots, A_{47}$ гэсэн дурын 47 бүлгийг сонирхоё. $i_1, i_2, \dots, i_{45} \in$

$\{1, 2, \dots, 46\}$ ба $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_{45}}$ гэсэн ялгаатай 45 бүлгийг 46 янзаар сонгож болно. $A_{47} \cap (A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_{45}})$ нь өгсөн нөхцөлөөс $\emptyset$ биш байх ба энд ордог сурагч A_{47} -бүлгийн сурагч мөн. Ийм ялгаатай хоёр огтлолцол ерөнхий сурагчтай бол $A_1, A_2, \dots, A_{47}$ бүлэгүүдэд зэрэг ордог сурагч олдоно. Иймд ялгаатай хоёр огтлолцол ерөнхий элементгүй гэж үзэхэд A_{47} -бүлэг дор хаяж 46 сурагчтай болоход хүрч өгсөн нөхцөлд зөрчинө. Ийнхүү аль ч 47 бүлэгт зэрэг ордог сурагч олдоно. Энэ сэтгэлгээг цааш үргэлжлүүлсэнээр аль ч 48, ..., 2009 бүлэгт зэрэг ордог сурагч олдох нь батлагдана.

ББ-В1. $s = (a, c)$ байг. Тэгвэл $a = ms, c = sc_1, (a, c_1) = 1$ болно. $t = (b, c_1)$ байг. Тэгвэл $b = nt, c_1 = tc_2, (n, c_2) = 1$ гэж гарна. Иймд $a = ms, b = tn, c = stc_2$, энд $(c_2, n) = 1, (c_2, m) = 1$ байх болно. Эндээс бид $(c_2, nm) = 1$ болохыг харах болно.

$(ab, c) = (smtn, stc_2) = st(mn, c_2) = st$ ба $c \mid ab \Rightarrow st = c$. Одоо $a = ms, b = tn, c = st$ байг. $ab = cd \Rightarrow d = mn \Rightarrow a + b - c - d = p \Leftrightarrow ms + nt - st - mn = p \Leftrightarrow (m-t)(s-n) = p$. Эндээс бид дараах дөрвөн тохиолдлыг гарган авна.

1. $\begin{cases} m-t = -1 \\ s-n = -p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = t-1 \\ n = s+p \end{cases}$
 $a = s(t-1), b = t(s+p), c = st, d = (t-1)(s+p);$
2. $\begin{cases} m-t = -p \\ s-n = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = t-p \\ n = s+1 \end{cases}$
 $a = s(t-p), b = t(s+1), c = st, d = (t-p)(s+1);$
3. $\begin{cases} m-t = 1 \\ s-n = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = t+1 \\ n = s-p \end{cases}$
 $a = s(t+1), b = t(s-p), c = st, d = (s-p)(t+1);$
4. $\begin{cases} m-t = p \\ s-n = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = t+p \\ n = s-1 \end{cases}$
 $a = s(t+p), b = t(s-1), c = st, d = (s-1)(t+p)$

ББ-В2. $x + y = u, xy = v$ орлуулга хийе. Тэгвэл өгөгдсөн тэнцэтгэл биш $v^2 + (u-3)v + (u^2 - \lambda u + \lambda) \geq 0$ гэсэн тэнцэтгэл биш-д шилжинэ. Энэ тэнцэтгэл биш аливаа бодит u, v тоонуудын хувьд биелж байхын тулд v -ээс хамаарсан энэ квадрат 3-гишүүнтийн дискриминант эерэг биш байх ёстой. Ө.х $3u^2 + (6-4\lambda)u + (4\lambda-9) \geq$

0 болно. Дахин энэ тэнцэтгэл биш аливаа бодит u тооны хувьд биелэж байхын тулд түүний дискриминант эерэг биш байх ёстой. Эндээс $36 - 48\lambda + 16\lambda^2 + 108 = 16(\lambda - 3)^2 \leq 0$ болж $\lambda = 3$ болно. Энэ тохиолдолд аливаа бодит x, y тоонуудын хувьд өгөгдсөн тэнцэтгэл биш биелэхийг шууд шалгаж болно. Харин $\lambda \neq 3$ үед өгөгдсөн тэнцэтгэл биш биелэхгүй байхаар x, y бодит тоонуудыг дээр хийсэн үйлдлүүдийг буцаах замаар олж болно. Хариу: $\lambda = 3$

ББ-ВЗ. Эхлээд $1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3, 1 \times 4, 1 \times 5$ хүснэгт тус бүрийг $1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3$ хүснэгтэд хуваах ялгаатай аргын тоог олѐ. Тэдгээрийг харгалзан a_2, a_3, a_4, a_5 гэвэл $a_2 = 2, a_3 = 1 + 2 + 1 = 4, a_4 = 2 + 1 + 3 + 1 = 7, a_5$ -ыг тооцоолоѐ. $1 \times m$ хүснэгт n удаа оролцсон хуваалтыг nC_m -ээр тэмдэглѐе. $(C_3, C_2), (C_3, 2C_1), (2C_2, C_1), (C_2, 3C_1), (5C_1)$ хуваалт тус бүр $2, \frac{3!}{2!} = 3, \frac{3!}{2!} = 3, \frac{4!}{3!} = 4, 1$ боломжтой байх учраас $a_5 = 2 + 3 + 3 + 4 + 1 = 13$ болно. Эндээс 2×5 хүснэгтийг $1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3$ хүснэгтэд хуваах ялгаатай аргын тоо $a_5 \cdot a_5 = 169$ болно. Одоо 2×1 хүснэгт оролцсон тохиолдлыг тоолоѐ. 2×1 хүснэгт k удаа ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) оролцсон хуваалтын тоог b_k гэе. Жишээлбэл $b_0 = 169$ байна. $b_1 = 2a_4^2 + 2a_3^2 + a_2^4 = 2 \cdot 49 + 2 \cdot 16 + 16 = 98 + 32 + 16 = 146.$ $b_2 = 2a_3^2 + 2a_2^2 + 2a_2^2 + a_3^2 + a_2^2 + 1 = 2 \cdot 16 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 16 + 4 + 1 = 32 + 8 + 8 + 16 + 4 + 1 = 69.$ $b_3 = 2 \cdot a_2^2 + 2 + 2a_2^2 + 1 + 2 + 1 = 8 + 2 + 8 + 1 + 2 + 1 = 22.$ $b_4 = 5, b_5 = 1$ болохыг хялбархан харж болно. Иймд бодлогийн нөхцөлд нийцэх ялгаатай хуваалтын тоо нь $b_0 + b_1 + \dots + b_5 = 169 + 146 + 69 + 22 + 5 + 1 = 412$ болно.

3.23 ММО-45, Дундын багшийн III даваа

Ц.Дашдорж

ДБ-А1. (Ц.Дашдорж) $2 < p \in \mathbb{P}$ байг. $g \in G(p^2)$ бол $k \geq 1$ үед $g \in G(p^k)$ гэж батал. $p = 2$ үед энэ өгүүлбэр хүчингүйг үзүүл.

ДБ-А2. (Ц.Дашдорж) $\varphi = x^2 - x + 1 \mid f = (x-1)^n + (x-2)^{2n+1} + (1-x^2)^{2n+1} + a$ байхаар $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ -г ол.

ДБ-А3. (Ц.Дашдорж) S_n -ээр i утгыг авбал түүнээс бага бүх утгыг авдаг $f : \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow [n] \longrightarrow [n]$ буулгалтын тоог тэмдэглэе.

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}}$$

болохыг батал.

ДБ-В1. (Ц.Дашдорж) $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $n > 1$ үед $c_n = -2nc_{n-1} + \sum_k C_n^k c_k c_{n-k}$ -г бод.

ДБ-В2. (Ц.Дашдорж) $i = 1, 2, \dots, n$ бүрийн хувьд $1 \leq |a_i - i| \leq 2$ байх $1, 2, \dots, n$ -ийн $a_1, \dots, a_n$ бүх сэлгэмлүүдийн тоог s_n гэвэл $n > 6$ үед $\frac{7s_{n-1}}{4} < s_n < 2s_{n-1}$ болохыг батал.

ДБ-В3. (Ц.Дашдорж) $m, n \in \mathbb{N}$ бол $\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_m \leq n} k_1 k_2 \dots k_m$ ба $\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_m \leq n} k_1 k_2 \dots k_m$ -үүдийг бодох томъёог гарга (зөвхөн m, n -ээс хамаарсан томъёо бичих)

[Заавар: $(1 + \alpha_1 z) \dots (1 + \alpha_n z)$ ба $\frac{1}{(1 - \alpha_1 z) \dots (1 - \alpha_n z)}$ уламжлагч функцүүд дэх z^m -ийн коэф-ийг бич].

3.24 ММО-45, Дундын багшийн III даваа бодолт

ДБ-А1. $2 < p \in \mathbb{P}$ үед эхлээд дараахь өгүүлбэрийг баталъя.

Өгүүлбэр: $a \equiv b(p^\ell)$ бол $a^p \equiv b^p(p^{\ell+1})$, $p \in \mathbb{P}$ байна.

Баталгаа: $a^p - b^p = (a - b) \underbrace{(a^{p-1} + a^{p-2}b + \dots + ab^{p-2} + b^{p-1})}_A$

$a \equiv b(p) \Rightarrow A \equiv a^{p-1} + a^{p-1} + \dots + a^{p-1} \equiv p \cdot a^{p-1} \equiv 0(p) \Rightarrow a^p - b^p : p^{\ell+1}$ болов.

1) $g \in G(p^2)$ бол $g \in G(p)$ гэж баталъя. Эсрэгээс нь $g \notin G(p)$ гэж үзье. Тэгвэл $g^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1(p)$ болох бөгөөд өгүүлбэр ёсоор $g^{\frac{p(p-1)}{2}} \equiv 1(p^2)$ болж зөрчил үүслээ. Иймд $g \in G(p^2) \Rightarrow g \in G(p)$ байна.

2) $g \in G(p^2)$ бол $g \in G(p^k)$, $k \geq 3$ гэж баталъя. Эсрэгээс нь $g \notin G(p^k)$ гэж үзье. $g \in G(p^2) \Rightarrow g^{\frac{p(p-1)}{2}} \equiv -1(p^2)$. Өгүүлбэрийг $(k-2)$ удаа давтан хэрэглэвэл $g^{\frac{p^{k-1}(p-1)}{2}} \equiv (-1)^{p^{k-2}} \equiv -1(p^k)$. Нөгөө талаас $g \notin G(p^k) \Rightarrow g^{\frac{\varphi(p^k)}{2}} = g^{\frac{p^{k-1}(p-1)}{2}} \equiv 1(p^k) \Rightarrow 2 \equiv 0(p^k)$ зөрчил үүслээ. Иймд $g \in G(p)$ бол $g \in G(p^k)$, $k \geq 3$ боллоо.

3) $p = 2$ үед $3 \in G(2^2)$ ба $3^2 \equiv 1(2^3)$ буюу $\varphi(2^3) = 4 \Rightarrow 3 \notin G(2^3)$ байна.

ДБ-А2. $x - 2 + 1 - x^2 = -(x^2 - x + 1) = -\varphi(x) \mid (x - 2)^{2n+1} + (1 - x^2)^{2n+1}$ тул

$$\varphi(x) \mid (x - 1)^n + a = f_1(x) \quad (1)$$

байхаар a, n -ийг олъё. $\varphi(x) = x^2 - x + 1 = \Phi_6(x) = (x - \varepsilon)(x - \bar{\varepsilon})$,
 $\varepsilon = e^{i\frac{2\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}} \in U'_6$, $\bar{\varepsilon} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = e^{2\pi i - i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{i\pi} e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 = -\varepsilon^2$.

$$\varphi(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = \alpha - 1 \quad (2)$$

$\varphi(x) \mid f_1(x) \Leftrightarrow f_1(\varepsilon) = 0, f_1(\bar{\varepsilon}) = 0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \varepsilon^{2n} + a = 0, \bar{\varepsilon}^{2n} + a = 0$.

$n = 3k$ бол $\varepsilon^{6k} + a = 0, (\bar{\varepsilon})^{6k} + a = 0$ буюу $a = -1$

$n = 3k + 1$ бол $\varepsilon^{6k+2} + a = 0, (\bar{\varepsilon})^{6k+2} + a = 0$ буюу $\varepsilon^2 + a = 0, (\bar{\varepsilon})^2 + a = 0, \varepsilon^2(\bar{\varepsilon})^2 = (-\varepsilon^2)^2 = \varepsilon^4$ буюу $\varepsilon^2 = 1$ болж зөрчил.

$n = 3k + 2$ бол $\varepsilon^{6k+4} + a = 0$, $(\bar{\varepsilon})^{6k+4} + a = 0$, $\varepsilon^4 + a = 0$, $(\bar{\varepsilon})^4 + a = 0$, $\varepsilon^4(\bar{\varepsilon})^4 = (-\varepsilon^2)^4 = \varepsilon^8$, $\varepsilon^4 = 1$ мөн зөрчил. Иймд хариу: $(n, a) = (3k, -1)$, $k \in \mathbb{N}$.

ДБ-А3.

$$S_n = \sum_{k=1}^n C_n^k S_{n-k} \quad (1)$$

гэж баталъя. 1-д очих $1 \leq k$ ширхэг элементийг C_n^k янзаар сонгоход үлдэх $n - k$ элементийг $\{2, \dots, n\}$ -д мөн бодлогын нөхцөлд оршихоор буулгах боломж нь $n - k \leq n - 1$ тул мөн S_{n-k} байна. $n \geq 1$ үед

$$\frac{2S_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{S_{n-k}}{(n-k)!} \quad (2)$$

гэж бичиж болох ба $S_0 = 1$ байх нь ойлгомжтой ((1)-ээс харахад) тул $\langle S_n \rangle$ -ийн эцф. нь

$$2\hat{S}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2S_n}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{S_{n-k}}{(n-k)!} \right) x^n =$$

$$\begin{aligned} & (\text{Хуйлралын томьёо}) = 1 + \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{S_m}{m!} x^m \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) = 1 + \\ & \hat{S}(x)e^x. \quad \text{Эндээс } \hat{S}(x) = \frac{1}{2 - e^x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{e^x}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^x}{2} \right)^k = \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n x^n}{n!} \text{ буюу } S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

ДБ-В1. px -г битүү хэлбэрт бичихийн тулд $n < 0$ үед $C_n = 0$ гэвэл $C_n = -2nC_{n-1} + \sum_k C_n^k C_k C_{n-k} + [n = 1]$ болно.

$$\begin{aligned} \hat{C}(t) &= \sum_n C_n \frac{t^n}{n!} = \sum_n (-2nC_{n-1} + \sum_k C_n^k C_k C_{n-k} + [n = 1]) \cdot \frac{t^n}{n!} = \\ & - \sum_n 2nC_{n-1} \cdot \frac{t^n}{n!} + \sum_n \sum_k C_n^k C_k C_{n-k} \cdot \frac{t^n}{n!} + \sum_n ([n = 1]) \cdot \frac{t^n}{n!} \stackrel{12.10-1}{=} \\ & - 2t \cdot \sum_n C_{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \hat{C}(t) + t = -2\hat{C}(t) + t = -2\hat{C} + \hat{C}^2 + t \\ \hat{C} &= \frac{1 + 2t - \sqrt{1 + 4t^2}}{2} \text{ болно } (\hat{C}(0) = C_0 \cdot \frac{t^0}{0!} = C_0 \cdot \frac{1}{1} = C_0 = 0 \end{aligned}$$

тулд - тэмдгийг авав). $C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$ Каталаны тоонууд гэвэл $n > 0$ үед $C_{2n+1} = 0$ ба $c_{2n} = (-1)^n \cdot (2n)! C_{n-1}$ болно. Үүнийг МК-II, §12.3в), Жишээ 3-ыг бодно.

ДБ-В2. S_n нь $1, \dots, n$ -ийн бүх сэлгэмлийн олонлог. $B = \{\pi = (a_1, \dots, a_n) \in S_n \mid 1 \leq |a_i - i| \leq 2, \forall i\}$ $1 \leq k \leq n$ үед $B_k = \{\pi \in B \mid \forall i < k, \{a_1, \dots, a_i\} \neq \{1, \dots, i\} \text{ боловч } \{a_1, \dots, a_k\} = \{1, \dots, k\}\}$ гэвэл $B_1, \dots, B_n$ -үүд үл огтлолцох ба $B = \bigcup_{k=1}^n B_k$ болно. $H_k = \{\sigma = (a_1, \dots, a_k) \in S_k \mid \forall i, 1 \leq |a_i - i| \leq 2 \text{ ба } i < k \text{ үед } \{a_1, \dots, a_i\} \neq \{1, \dots, i\}\}$, $|H_k| = t_k$ гэвэл $|B_k| = t_k s_{n-k}$ болох тул $s_n = |B| = \sum_{k=1}^n t_k s_{n-k}$, $s_0 = 1$.

$t_1 = 0, t_2 = 1, t_3 = 2, t_4 = 3$ болно. $k > 4$ бол H_k нь зөвхөн дараахь 2 сэлгэмлээс тогтохыг хялбархан шалгаж болно:

1) $(a_1, \dots, a_n) : a_1 = 2, a_{2i} = 2i + 2, a_{2i+1} = 2i - 1, i = 1, \dots, [\frac{k}{2}] - 1$ ба k тэгш бол $a_k = k - 1$, эсвэл k сондгой үед $a_{k-1} = k, a_k = k - 2$

2) $(a_1, \dots, a_n) : a_1 = 3, a_2 = 1, a_{2i-1} = 2i + 1, a_{2i} = 2i - 2, i = 2, \dots, [\frac{k}{2}]$ ба k сондгой үед $a_k = k - 1$, эсвэл $a_{2i} = 2i - 2, i = 2, \dots, [\frac{k}{2}] - 1$ ба k тэгш үед $a_{k-1} = k, a_k = k - 2$.

Ийнхүү $k > 5$ үед $t_k = 2$ тул $s_n = s_{n-2} + 2s_{n-3} + 3s_{n-4} + 2(s_{n-5} + \dots + s_0)$, $s_{n+1} = s_{n-1} + 2s_{n-2} + 3s_{n-3} + 2(s_{n-4} + \dots + s_0)$. Эндээс $s_{n+1} - s_n = s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} - s_{n-4}$. Энд n -ийг $n+1$ -ээр сольж бичээд $s_{n+2} - 2s_{n+1} = s_{n-4} - 2s_{n-3}$.

$n > 4$ үед $s_{n-3} > s_{n-4}$ тул $s_{n+2} \leq 2s_{n+1}$. Эндээс $s_{n+2} = s_{n+1} + s_n + s_{n-1} + s_{n-2} - s_{n-3} \geq s_{n+1} + s_n + s_{n-1} \geq s_{n+1} + \frac{s_{n+1}}{2} + \frac{s_{n+1}}{4} = \frac{7s_{n+1}}{4}$.

ДБ-В3.

$$[z^m](1 + \alpha_1 z) \dots (1 + \alpha_n z) = \sum_k \alpha_{k_1} \dots \alpha_{k_m} \quad (1)$$

энд k нь $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n$ байх бүх m -т $(k_1, \dots, k_m)$ -ээр гүйнэ. (1)-д $\alpha_i = i$ гэж авбал манай бодлого болно, өөрөөр хэлбэл $f_n(z) = (1+z)(1+2z)\dots(1+nz)$ дахь z^m -ийн коэф-г олох хэрэгтэй. Тэр нь $f_n(z)$ -ийн хөрвүүлэлт $f_n^R(z) = z^n f\left(\frac{1}{z}\right) = (z+1)(z+2)\dots(z+n) = (z+1)^{\overline{n}} = \frac{1}{z} z^{\overline{n+1}} \stackrel{12.8b)}{=} \frac{1}{z} \sum_k \left[\begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right] z^k$ дахь z^{n-m} -ийн коэф. $= \left[\begin{matrix} n+1 \\ n-m+1 \end{matrix} \right]$ болно.

Одоо нөгөө нийлбэрийг мөн ийм санаагаар бодъё.

$$[z^m] \frac{1}{(1-\alpha_1 z) \dots (1-\alpha_n z)} = \sum_k \alpha_{k_1} \dots \alpha_{k_m} \quad (2)$$

энд k нь $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n$ байх бүх m -т $(k_1, \dots, k_m)$ -ээр гүйнэ. (2)-д $\alpha_i = i$ гэж авбал манай бодлого болно. Тэр нь $g_n(z) = \frac{1}{(1-z)(1-2z)\dots(1-nz)}$ дахь z^m -ийн коэф. эсвэл $\frac{1}{(1-z)(1-2z)\dots(1-nz)} = z^n g_n(z)$ дахь z^{n+m} -ийн коэф. болно. $z^n g_n(z)$ -ийг өсөх юмуу буурах зэрэг хэлбэртэй бичихийг зоръё.

$$G_n(z) = \sum_{k \geq 0} \left[\begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right] z^k \quad (3)$$

$G_n(z) = z^n g_n(z)$ болохыг n -ээр индукцэлж баталъя. $n = 1$ үед илэрхий.

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right\} - n \left\{ \begin{matrix} k-1 \\ n \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} k-1 \\ n-1 \end{matrix} \right\} \quad (4)$$

$$z G_{n-1}(z) \stackrel{(3)}{=} \sum \left\{ \begin{matrix} k-1 \\ n-1 \end{matrix} \right\} z^k \stackrel{(3)}{=} \sum_{k \geq 0} \left(\left\{ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right\} - n \left\{ \begin{matrix} k-1 \\ n \end{matrix} \right\} \right) z^k \stackrel{(3)}{=}$$

$$(1-nz) G_n(z) \text{-ээс } G_n(z) = \frac{z}{1-nz} G_{n-1}(z) \stackrel{\text{индукц}}{=}$$

$$\frac{z}{1-nz} \cdot \frac{z^{n-1}}{(1-z)\dots(1-(n-1)z)} = z^n g_n(z).$$

$$G_n(z) = z^n g_n(z) \text{ дахь } z^{n+m} \text{-ийн коэф. нь } \left\{ \begin{matrix} m+n \\ n \end{matrix} \right\} \text{ болно.}$$

Мөн $z^n g_n(z) = (z^{-1})^{-n} = G_n(z) = \sum_{k \geq 0} \left\{ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right\} z^k$ томъёо батлагдлаа.

3.25 ММО-45, Дундын багшийн IV даваа

Ц.Дашдорж

ДБ-А1. (Б.Батцэнгэл) Харгалзан O_1, O_2 пэгүүдэд төвтэй P цэгт гадаад байдлаар шүргэлцсэн ω_1, ω_2 тойрог өгөгдөв. ω_1 тойргийг шүргэх ℓ шулуун, ω_2 тойргийг A, B пэгүүдээр огтлоно. B цэгийн дайрсан ℓ шулуунд перпендикуляр шулуун O_1A шулуунтай C цэгт огтлолцоно. PC шулуун AB хэрчмийг Q цэгт, O_1Q шулуун BC хэрчмийг D цэгт огтолдог бол D цэг нь BC хэрчмийн дундаж цэг мөн гэж батал.

ДБ-А2. (Г.Батзаяа) $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ялгаатай язгууртай олон гишүүн байг. $\forall k \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд

$$|\{p \in \mathbb{P} | \text{ord}_p(f(x)) = k, \exists x \in \mathbb{Z}\}| = \infty$$

гэж батал.

ДБ-А3. (Н.Дайвий-Од) $n \times n$ квадратад 0.5 радиустай k ширхэг дугуйг давхардуулалгүйгээр багтаан байрлуулсан болох k -ийн хамгийн их утгыг $S(n)$ гээ. $S(n) - n^2 \geq 100$ байх n -ийн хамгийн бага утгыг ол.

ДБ-В1. (Н.Бямбажав) Нэгж тойрогт багтсан дурын n -өнцөгтийн хувьд

а) Уг n -өнцөгтийн оройнууд хүртлэх зайнуудын үржвэр 2-оос багагүй байх цэг нэгж тойрог дээр олдохыг үзүүл.

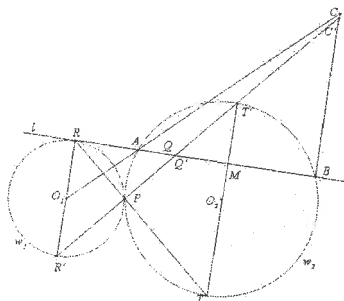
б) Хэрэв зайнуудын үржвэр нь 2-оос эрс их байх цэг олдоггүй бол n -өнцөгтийг зөв гэж батал.

ДБ-В2. (Б.Баясгалан) $\{1, 2, \dots, 2009\} \Rightarrow [2009] \supseteq A$ байг.

$2009 \mid \sum_{a \in A} a$ байх бүх A дэд олонлогийн тоог ол.

ДБ-ВЗ. (Ц.Дашдорж) $x^3 = y^{16} + y^{15} + \dots + y + 9$ -ийн бүх бүхэл шийдийг ол.

3.26 ММО-45, Дундын багшийн IV даваа бодолт ДБ-А1.



ℓ шулуун ω_1 тойргийг шүргэх цэгийг R , ω_1 тойргийн R цэгийн диаметрийн эсрэг цэгийг R' гэж тэмдэглэе R' , P , C цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батлахад хангалтай билээ. $R'P \cap BC = C'$ ба $R'P \cap AB = Q'$ гэж үзье.

$$\triangle O_1AR \sim \triangle CAB \text{ тул } \frac{BC}{RO_1} = \frac{BA}{RA}$$

$$\triangle R'Q'R \sim \triangle C'Q'B \text{ тул } \frac{BC'}{RR'} = \frac{BQ'}{RQ'} \text{ юм. Эндээс } BC, BC'$$

уртуудыг олж $RR' = 2 \cdot RO_1$ гэдгийг тооцвол $BC = BC'$ байх $\Leftrightarrow BA \cdot RQ' = 2BQ' \cdot RA$ гэж гарна. $RP \cap \omega_2 = T$, $R'P \cap \omega_2 = T'$ гэж тэмдэглэвэл T , T' цэгүүд ω_2 тойргийн диаметрийн төгсгөлийн цэгүүд байна. Түүнээс гадна $TT' \parallel RR' \perp AB$ тул TT' диаметр нь AB хөвчийг түүний дундаж болох M цэгээр огтолно. Иймд P , Q' , M , T цэгүүд $Q'T$ диаметртэй тойрог дээр оршино. Уг тойргийн хувьд огтлогч шүргэгчийн теорем ёсоор $RQ' \cdot RM = RP \cdot RT$ байх ба ω_2 тойргийн хувьд огтлогч шүргэгчийн теорем ёсоор $RP \cdot RT = RA \cdot RB$ байна. Эндээс $RQ' \cdot RM = RA \cdot RB$ гэж гарна. Энэ тэнцэлд $RM = RA + \frac{AB}{2}$ ба $RB = RQ' + Q'B$ гэж

орлуулбал $RQ' \cdot \frac{AB}{2} = RA \cdot Q'B$ гэж гарна. Дээр тэмдэглэгдсэн ёсоор энэхүү тэнцэл C, C' давхцана гэдгийг харуулж болно.

ДБ-А2. Лемм. $\forall f(x) \in \mathbb{F}[x], \deg f \geq 1$:

$$\mathbb{P}'(f(x)) = \{p \in \mathbb{P} \mid p \mid f(x), \exists x \in \mathbb{Z}\}$$

олонлог төгсгөлгүй байна.

Леммийн баталгаа: $f(x) = b_k x^k + \dots + b_0, k \geq 1$ гэе. Эсрэгээс нь төгсгөлөг гээд $p_1, \dots, p_s$ гэе. Тэгвэл $x = b_0 t p_1 \dots p_s$ гэвэл $f(x) = b_0(b_k \cdot b_0^{k-1}(t p_1 \dots p_s)^k + \dots + 1)$ ба $\Rightarrow \exists p \mid b_k \cdot b_0^{k-1}(t p_1 \dots p_s)^k + \dots + 1, p \in \mathbb{P}$ тул $(p, p_1 \dots p_s) = 1 \Rightarrow$ зөрчил.

Одоо бодлогоо баталъя. f нь давхар язгуургүй тул $(f, f') = 1$ ө.х. $\exists g, h \in \mathbb{Z}[x]$

$$f(x) \cdot g(x) + f'(x) \cdot h(x) = a, 0 \neq a \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

гэе. Одоо $p \in \mathbb{P}'(f(x))$ ба $p > |a|$ байх p -ийн хувьд $\text{ord}_p(f(x_0)) = k$ байх x_0 -г байгуулахад хангалттай $p \in \mathbb{P}'(f(x)) \Rightarrow p \mid f(x_0), x_0 \in \mathbb{Z}$. Одоо $p^\alpha \mid f(x_0)$ бол $p^{\alpha+1} \mid f(x'_0) \exists x'_0 \in \mathbb{Z}$ гэж баталъя. $p > |a| \Rightarrow (f'(x_0), p) = 1$ байна. $x = p^\alpha \cdot t + x_0$ гэвэл $s \geq 1 : (p^\alpha t + x_0)^s \equiv s \cdot (t p^\alpha) \cdot x_0^{s-1} + x_0^s (p^{\alpha+1}) \Rightarrow f(p^\alpha \cdot t + x_0) \equiv t p^\alpha f'(x_0) + f(x_0)(p^{\alpha+1}) \Rightarrow (p, f'(x_0)) = 1$ тул $p \mid t \cdot f'(x_0) + \frac{f(x_0)}{p^\alpha}$ байх $\exists t \in \mathbb{Z}$. Одоо $p^{k+1} \mid f(x_0)$ гэе. Тэгвэл $x = p^k + x_0$ үед $f(p^\alpha + x_0) \equiv p^k f'(x_0) + f(x_0)(p^{k+1})$ тул $\text{ord}_p(f(x_0 + p^k)) = k$ болно.

ДБ-А3. Дугуйнуудыг  хэлбэртэй өрвөл "дөрвөлжин өрөгт"  хэлбэртэй өрвөл "гурвалжин өрөгт" гэж нэрлэе. Хэрэв дан дөрвөлжин өрөгтөөр өрвөл n^2 ширхэг дугуйг багтааж чадна.

Гэтэл "дөрвөлжин" өрөгтөөс "гурвалжин" өрөгт рүү шилжүүлэхэд мөр хоорондын зай $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$ -оор ойртох боловч, 2 хоёр мөр тутмаас 1-дугуй олдох ба иймд шахсан зайнууд нийлээд нэг шинэ мөр орох зайнаас $\left(1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ бага бол "гурвалжин" өрөгтөнд шилжих шаарлагагүй, их бол шинэ мөр нь n юмуу $n - 1$ дугуйтай учир "гурвалжин" өрөгтөнд шилжих хэрэгтэй гэсэн үг.

Хэрэв $n \times n$ -ийн бүх мөрийг "дөрвөлжин"-гөөс "гурвалжин" өрөгт рүү шилжүүлбэл $n - 1$ мөрийн дээш нь өргөн шахах ба хэмжигдэх зай нь $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}(n - 1)$ болно. Ингээд $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}(n - 1) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}k$ тэнцэтгэл бишийг хангах хамгийн их k нь $\left\lfloor \frac{2 - \sqrt{3}}{2}(n - 1) \right\rfloor = k_0$ бол яг k_0 мөр орж ирэх хамгийн бага n -нь $\left\lceil \frac{2 - \sqrt{3}}{2}k_0 \right\rceil + 2 = n_0$ болох ба $n \times n$ -ийг $n_0 + k_0$ мөрийг "гурвалжин" өрөлтөөр, үлдсэн мөрүүдийг "дөрвөлжин" өрөлтөөр өрнө. Ингээд хялбар тооцоог хийвэл $n = 29$ нь $s(n) - n^2 \geq 100$ байх хамгийн бага n тоо болно.

ДБ-В1. Оройнуудыг $z_1, z_2, \dots, z_n$ гэсэн нэгж модультай комплекс тоонууд гэж үзье. Эргүүлэлт хийгээд $\prod_{i=1}^n z_i$ -ыг өөрчилж

болох тул $\prod_{i=1}^n z_i = 1$ гэж үзье. $\Rightarrow |w - z_1| \cdot |w - z_2| \cdot \dots \cdot |w - z_n| =$

$|(w - z_1) \dots (w - z_n)| \Rightarrow P(w) = \prod_{i=1}^n (w - z_i)$ гэе. $P(w) = w^n + Q(w) + 1$

гэвэл $Q(w) = a_{n-1}w^{n-1} + \dots + a_1w$ хэлбэрийн олон гишүүнт байна.

Эндээс $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ гэсэн нэгжийн n ширхэг язгуур авч үзье.

Тэгвэл $\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i^s = 0$ (Энд $s \not\equiv 0 \pmod{n}$) байдаг тул

$$\sum_{i=1}^{n-1} Q(\varepsilon_i) = \sum_{j=1}^{n-1} \left(a_j \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i^j \right) = 0$$

а) Эсрэгээс нь тийм цэг олддоггүй гэе.

$\Rightarrow Q(\varepsilon_i) = a_i + b_i i$, $a_i > 0$ байх i олддог бол

$$P(\varepsilon_i) = \varepsilon_i^n + 1 + Q(\varepsilon_i) = 2 + a_i + b_i \cdot i,$$

$\Rightarrow |P(\varepsilon_i)| > 2 \Rightarrow \forall i$ хувьд $Q(\varepsilon_i) = b_i \cdot i$ хэлбэртэй байна. ($\sum_{i=0}^{n-1} a_i = 0$

ба бүгд 0-ээс хэтрэхгүй байх тул $\forall i$ хувьд $a_i = 0$ байна)

$\Rightarrow b_i \neq 0$ бол $P(\varepsilon_i) = \varepsilon_i^n + 1 + Q(\varepsilon_i) = 2 + b_i \cdot i \Rightarrow |P(\varepsilon_i)| > 2 \Rightarrow$ зөрчил үүснэ.

$\Rightarrow \forall i$ хувьд $Q(\varepsilon_i) = 0 \Rightarrow \deg Q(w) = n - 1$ тул $i = \overline{0, n-1}$.
 $Q(w) = 0$ гэсэн олон гишүүнт байна. $\Rightarrow \forall i$ хувьд $\Rightarrow P(w) = w^n + 1$
 тул $|P(\varepsilon_i)| = |\varepsilon_i^n + 1| = 2 \Rightarrow$ нийт цэг олддоно гэдэг нь батлагдав

б) а)-аас 2-оос их байдаг цэг олдохгүй байгаа тул $P(w) = w^n + 1$ байна.

$$z_i = \cos \frac{2\pi}{2n}(2k+1) + i \sin \frac{2\pi}{2n}(2k+1), \quad k = \overline{0, n-1}$$

буюу $2n$ -зэргийн сондгой дугаартай нэгжийн язгуур байна. Өгсөн n -цэг зөв n -өнцөгт үүсгэнэ.

ДБ-В2. $f(x) = (1+x)(1+x^2) \dots (1+x^n)$ функцийн задаргааг авч үзвэл x^k -ийн өмнөх коэффициентууд нь нийлбэр нь k байх дэд олонлогийн тоог илэрхийлнэ. Бидэнд x^{nk} -ийн өмнөх коэффициентуудын нийлбэрийг олох шаардлагатай. Уг нийлбэрийг A_n гэе. Энд $n = 2009$. Одоо $f(\varepsilon) + f(\varepsilon^2) + \dots + f(\varepsilon^n)$, энд $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ нийлбэрийг авч үзье. Нэгэнт $\varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^n = 0$ тул энэ нийлбэрээс зөвхөн $n \cdot A_n$ тоо үлдэнэ: $\sum_{k=1}^n f(\varepsilon^k) = n \cdot A_n$.

Одоо $f(\varepsilon^k)$ -г тооцоолъё. Иймд $d = (k, n)$ гэж үзье. $f(\varepsilon^d) = f(\varepsilon^k)$ болно. Нөгөө талаас $d = (k, n)$ байх k тоо нийтдээ $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ байна. Мөн

$$f(\varepsilon^d) = (1+\varepsilon^d)^d (1+\varepsilon^{2d})^d \dots (1+\varepsilon^{n/d})^d$$

байна. Үүнийг хувиргаж бичвэл

$$f(\varepsilon^d) = \left[(1+\varepsilon^d)(1+\varepsilon^{2d}) \dots (1+\varepsilon^{\frac{n}{d} \cdot d}) \right]^d$$

болох юм. $x^n - 1 = (x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2) \dots (x-\varepsilon^{n-1})(x-\varepsilon^n)$ учир $x = -1$ гэж авбал $(-1)^n - 1 = (-1)^n f(\varepsilon)$ буюу $f(\varepsilon) = 1 + (-1)^{n+1}$ болно.

Хэрэв $(\varepsilon^d)^{\frac{n}{d}} = 1$ гэдгийг анзаарвал $f(\varepsilon^d) = \left(1 + (-1)^{\frac{n}{d}+1} \right)^d$ юм.

Эцэст нь $n \cdot A_n = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) \cdot \left(1 + (-1)^{\frac{n}{d}+1} \right)^d$ болов.

ДБ-В3. $x^3 - 8 = \Phi_{17}(y)$, Φ_{17} -дугуй олон гишүүнт $p \in \mathbb{P}$, $p | \Phi_{17}(y)$ гэдгээс эсвэл $p \equiv 1(17)$, эсвэл $p \mid 17$ гэж гарна [МКI-ээс

Үз]. Иймд $\forall d \mid \Phi_{17}(y)$ -ийн хувьд $d \equiv 1(17)$ эсвэл $d \mid 17$ болно.

$$(x-2)(x^2+2x+4) = \Phi_{17}(y)$$

$d = x-2 \mid \Phi_{17}(y)$ -ийн хувьд $x-2 \equiv 1(17)$ бол $x \equiv 3(17)$,

$$x^2+2x+4 \equiv 9+6+4 \equiv 2(17)$$

$17 \mid x-2 = d$ бол $x \equiv 2(17)$, $x^2+2x+4 = 4+4+4 \equiv 16(17)$ буюу аль ч тохиолд x^2+2x+4 нь $\Phi_{17}(y)$ -ийн хуваагч гэдэгт зөрчив.

4 ОУ-ын математикийн 50-р олимпиадын сорил

4.1 ОУМО-50, I сорил

Б.Баясгалан(Олонлог)

1 (Б.Баясгалан). Хэрэв дурын гурван тоог нь авч үзэхэд хоорондоо харилцан анхны биш байвал эдгээрийн аль нэг хоёрынх нь нэг нь гурав дахь тоотоогой харилцан анхны биш байхаар $a_1, a_2, \dots, a_{2009}$ гэсэн ялгаатай натурал тоонууд өгөв. Хэрэв эдгээр тоонууд дотор хоорондоо харилцан анхны биш байх 50 тоо олддоггүй байвал хос хосоороо харилцан анхны биш байх 40 тоо олдоно гэж батал.

2 (Орос). $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн B ба D өнцөгүүдийн дотоод биссектрисүүд I цэгт огтлолцдог байг. BI ба DI хэрчмүүд дээр харгалзан M ба N цэгүүдийг $\angle MAN = \frac{1}{2} \cdot \angle A$ байхаар авав. Тэгвэл $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн хувьд $\angle MCN = \frac{1}{2} \cdot \angle C$ байх нөхцөлийг тогтоо.

3 (Б.Ганбилэг). $1, 2, \dots, 57$ тоонуудаас $0 \leq a_1 < \dots < a_k < 57$ байх тоонуудыг сонгохдоо $a_1, a_2, \dots, a_k$ тоонууд нь $a_i - a_j$ эсвэл $57 + a_i - a_j$ -ийн аль нэг байхаар сонгов. Тэгвэл k -ийн хамгийн бага утгыг ол.

1. $a_1, a_2, \dots, a_{2009}$ оройнуудтай G графыг хэрэв эдгээр тоонуудын аль нэг хоёр нь харилцан анхны биш байвал тэдгээрийг иргэмээр холбох замаар байгуулъя. Тэгвэл бодлогод өгсөн нөхцөлөөс G -д гурван оройгоос тогтсон бөгөөд нэг тусгаарлагдсан оройгоос тогтсон дэд граф байхгүй гэж гарна.

Иймээс G -ийн оройнуудыг үл огтлолцох оройнуудын олонлогуудад хувааж болно. Иймд G нь 2009 оройтой K -туйлт граф боллоо. Эдгээр оройнуудын олонлог тус бүр нь хамгийн олондоо 49 оройтой байна гэж бодлогод өгсөн нөхцөлөөс гарна. Иймээс үл огтлолцох оройнуудын олонлог хамгийн бага тоо нь $\frac{2009}{49} = 41$

ширхэг байна. Дараа Эдгээр 41 олонлог бүрээс нэг нэг элемент сонгоход эдгээр нь бүгд хоорондоо харилцан анхны биш байна.

2. Хариу. $ABCD$ нь зөвхөн тойргийг багтаасан үед л биелнэ.

$ABCD$ - багтаасан биш байг. Энэ үед $\angle A$ -ийн биссектрис I -г дайрахгүй ба BI , DI хэрчмүүдийн аль нэгтэй заавал огтлолцох тул DI хэрчимтэй I' цэгээр огтлолцдог гэж үзье. $M \equiv B$, $N \equiv I'$ гэж сонгоход $\angle MAN = \angle BAI' = \frac{1}{2}\angle A$ боловч хэрэв $\angle MCN = \frac{1}{2} \cdot \angle C = \angle BCI'$ бол CI' нь $\angle C$ -ын биссектрис болох ба $ABCD$ нь багтаасан 4-н өнцөгт болж зөрчилд хүрнэ.

$ABCD$ -багтаасан байг.

Энэ үед $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ -ын биссектрисүүд I цэгт огтлолцоно.

$\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, $\angle D = \varphi$, $\angle BAM = x$, $\angle MCI = y$, $\angle ICN = z$ байг. Синусын теоремоор

$$\begin{aligned} \frac{BM}{MI} \cdot \frac{DN}{NI} &= \frac{BM}{MA} \cdot \frac{MA}{MI} \cdot \frac{DN}{NA} \cdot \frac{NA}{NI} = \\ &= \frac{\sin x}{\sin \frac{\beta}{2}} \cdot \frac{\sin(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2} - x)} \cdot \frac{\sin(\frac{\alpha}{2} - x)}{\sin \frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{\sin(\frac{\alpha+\varphi}{2})}{\sin x} = \\ &= \frac{\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2}} \end{aligned} \quad (1)$$

болно. Дээрхийн адилаар

$$\begin{aligned} \frac{BM}{MI} \cdot \frac{DN}{NI} &= \frac{BM}{MC} \cdot \frac{MC}{MI} \cdot \frac{DN}{NC} \cdot \frac{NC}{NI} = \\ &= \frac{\sin(\frac{\gamma}{2} - y)}{\sin \frac{\beta}{2}} \cdot \frac{\sin(\frac{\beta+\gamma}{2})}{\sin y} \cdot \frac{\sin(\frac{\gamma}{2} - z)}{\sin \varphi} \cdot \frac{\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\sin z}. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma + \varphi}{2}; \quad \frac{\alpha + \varphi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta + \gamma}{2} \quad \text{ба (1), (2)-ооc}$$

$$\frac{\sin(\frac{\gamma}{2} - y)}{\sin y} = \frac{\sin z}{\sin(\frac{\gamma}{2} - z)} = \frac{\sin(\frac{\gamma}{2} - (\frac{\gamma}{2} - z))}{\sin(\frac{\gamma}{2} - z)}$$

гэж гарна. $\operatorname{ctg} y = \operatorname{ctg}(\frac{\gamma}{2} - z)$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$ has πk periodic, thus $y = \frac{\gamma}{2} - z$. $\angle MCN = y + z = \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} \cdot \angle C$.

3. Хэрэв p -анхны тоо бөгөөд $n = p^2 + p + 1$ бол $1, 2, \dots, n$ олонлог $\bmod n$ -ээр өөр хоорондоо ялгаатай $p+1$ ширхэг элемент агуулна.

Уншигч та илүү өргөн мэдээлэл авахыг хүсвэл B.Bollobas'-ийн түүврээс уншина уу!

4.2 ОУМО-50, II сорил

Б.Баясгалан(Олонлог)

1 (Б.Баясгалан). $0 \leq i, j \leq 2009$. Хавтгайн бүхэл (i, j) пэгүүд $ix_i + jy_j \neq 0$ байх рациональ (x_{ij}, y_{ij}) координаттай тэг биш векторуудыг байгуулав. Хэрэв $(i-k)x_{ij} + (j-s)y_{ij} = 0$ эсвэл $(i-k)x_{ks} + (j-s)y_{ks} = 0$ бол $(i, j), (k, s)$ цэгүүдэд байгуулсан векторуудын аль нэгийг арилгах үйлдлийг хийхийг зөвшөөрсөн бол хамгийн цөөндөө хичнээн вектор үлдээж чадах вэ?

2 (Б.Баясгалан). Үйлдвэрт нэгж талтай зөв 6-н өнцөгт хэлбэртэй, нэгж зузаантай замын хавтан үйлдвэрлэдэг бөгөөд тээвэрлэлтийн явцад хавтангийн булан гэмтдэг байв. 2009 хавтангаас гэмтэл нь ижил 7 хавтан сонгож болох уу?

3 (Б.Баяржаргал). Аливаа n натурал тооны хувьд $10^n + n \mid x^n + n$ байх бүх x натурал тоог ол.

1. Өгсөн цэгүүдийг дайрсан үүссэн векторуудад перпендукуляр шулуунуудыг байгуулъя. Өгсөн нөхцөлөөс шулуун бүр $(0, 0)$ -ийг дайрахгүй. Мөн түүнчлэн дурын хоёр цэгийн аль нэгийг арчсан гэвэл өгсөн нөхцөлүүдээс тэдгээр нь нэг шулуун дээр оршино. Өөрөөр хэлбэл бидний олох тоо нь өгсөн (x, y) цэгүүдийг

дайрсан бөгөөд $(0, 0)$ -ийг агуулаагүй хамгийн цөөн шулууны тоо юм.

Энэ нь Alon-ийн комбинаторикийн теоремоос шууд гарах ба эсвэл Alon-Furedi нарын параллел пипедийн хуваалтын теоремоос шууд мөрдөн гарна. Иймд бидний олох ёстой векторын тоо нь $2 \cdot 2009 + 1$ болов.

2. Уг дүрийн хувьд өөрийг өөрт нь буулгадаг 12 сэлгэмэлийн эргүүлэлт байгаа. Эдгээр нь $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$; $(7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$; $(1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)(7\ 9\ 11)(8\ 10\ 12)$; $(1\ 4)(3\ 6)(2\ 5)(3\ 6)(7\ 10)(8\ 10)(9\ 12)$; $(1\ 5\ 3)(2\ 6\ 4)(7\ 11\ 9)(8\ 12\ 10)$; $(1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2)(7\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8)$ ба $(1\ 8)(2\ 7)(3\ 12)(4\ 11)(5\ 10)(6\ 9)$ гэх мэт байна. Эдгээрийн яг нэг нь 12 ширхэг 4 үл огтлолцох циклүүдийн үржвэр, яг 2 нь үл огтлолцох 2 ширхэг циклүүдийн үржвэр тус тус байна. иймд орбит тоолох леммээр [Бернсайддын лемм] нийт орбитыг тоолбол $t = \frac{1}{12}(1 \cdot 2^{12} + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^4 + 7 \cdot 2^6)$ гэж гарна. Өөрөөр хэлбэл замын хавтангын ялгаатай байдлаар эвдэрч болох нийт тоо нь $t = \frac{4584}{12} = 382$ боллоо. Иймээс $2009 < 382 \cdot 6$ байх учраас бид яг ижилхэн эвдрэлтэй 7 замын хавтанг эдгээр 2009 хавтангаас сонгож чадахгүй.

3. Зөвхөн $x = 10$ гэсэн ганц шийдтэй. Эсрэгээс нь $p \nmid x - 10$ гэж үзье. Тэгвэл

$$\begin{cases} n \equiv 1 \pmod{p-1} \\ n \equiv -10 \pmod{p} \end{cases} \text{ байх ба } (p-1, p) = 1 \text{ тул Үлдэгдэлийн}$$

тухай хятадын теоремоор энэ систем шийдтэй. Иймээс Фермагийн бага теоремоор

$$10^n + n \equiv 10 + n \equiv 10 - 10 = 0 \pmod{p}$$

ба

$$x^n + n \equiv x + n \equiv x - 10 \not\equiv 0 \pmod{p}$$

Иймд $p \mid 10^n + n$ боловч $p \nmid x^n + n$ болж зөрчилд орлоо. Иймээс $x = 10$ нь цор ганц шийд болов.

4.3 ОУМО-50, III сорил

Б.Ганбилэг(Олонлог)

- 1 (Б.Батбаясгалан). G энгийн граф өгөгдөв. Хэрэв графын аль ч 1100 ширхэг ирмэгийн хувьд тэдгээрийг төлөөлж чадах 45 оройг сонгож болдог бол бүх ирмэгийг төлөөлж чадах 45 оройг сонгож болохыг батал. ($v \in e$ бол v нь e -г төлөөлнө)
- 2 (Б.Ганбилэг, У.Батзориг). A, B, C, D 4-н цэг энэ дарааллаараа тойрог дээр оршино. $AC \cap BD = M$ байх M цэгийг дайруулан татсан шулуун тойргийг M_1 ба M_2 цэгт, $\triangle ABM$ ба $\triangle CDM$ -ийг багтаасан тойргууд харгалзан N_1 ба N_2 цэгт огтлолцно $M_1N_1 = M_2N_2$.
- 3 (Б.Ганбилэг, У.Батзориг). a, b, c нь $abc = 1$ байх эерэг тоонууд бол

$$\sqrt{\frac{a}{a+8}} + \sqrt{\frac{b}{b+8}} + \sqrt{\frac{c}{c+8}} \geq 1$$

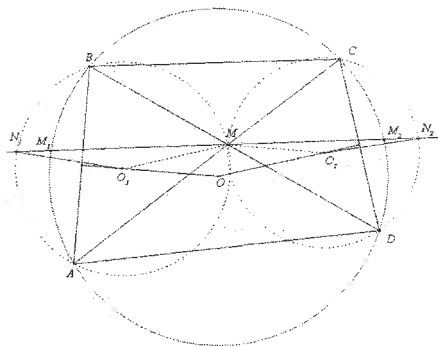
гэж батал.

1. Ийм 45 орой олддоггүй гэе. Хэрэв аль нэг ирмэгийг арилгахад нөхцөл өөрчлөгдөхгүй бол тэр ирмэгийн арилгая. Энэ үйлдлийг цаашид хийх боломжгүй болтол нь үргэлжлүүлэхэд гарах графын хувьд аль нэг ирмэгийг нь арилгахад үлдэх бүх ирмэгийг төлөөлөх 45 оройг сонгож болох боловч бүх оройг төлөөлөх 45 ирмэг сонгож болохгүй.

Графын ирмэгүүдийг $e_1, e_2, \dots, e_m$ гэе. Тэгвэл e_i ирмэг бүрийн хувьд e_i -ээс бусад бүх ирмэгтэй огтлолцдог, e_i - тэй огтлолцдоггүй $v_i \in G(V)$ гэсэн 45 элементтэй олонлог оршин байна. Өөрөөр хэлбэл $\forall i, j$ -ийн хувьд $i \neq j$ бол $e_i \cap v_j \neq \emptyset$, $i = j$ бол $e_i \cap v_j = \emptyset$ байна. $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$ -ийн π сэлгэмэлийг авч үзье. Хэрэв энэ сэлгэмэлийн хувьд e_i -ийн 2 орой нь v_i -ийн бүх оройн өмнө ордог бол π -г i -р төрлийн сэлгэмэл гэе. Одоо $i \neq j$ бол π нь нэгэн зэрэг i ба j -р төрлийн биш гэж харуулъя. π -ээр e_i, e_j -ийн оройнуудаас хамгийн сүүлд байрлах нь k -рт байсан. Энэ нь e_i -ийнх гэхэд явцуурахгүй. v_i -ийн элементүүд k -р байрлаж хойш

байх ба e_j -ийн 2 орой нь хамгийн ихдээ k -р байрт байна. Иймд $e_j \cap v_i = \emptyset$ болж зөрчил үүсч байна. Иймд бүх сэлгэмэл нь хамгийн ихдээ нэг л төрлийнх байна. Нөгөө талаас i -р төрлийн сэлгэмэлийн тоо $C_n^{47} \cdot 2!45!(n-47)!$ ба нийт сэлгэмэлийн тоо $n!$ тул $m \cdot C_n^{47} \cdot 2!45!(n-47)! \leq n!$. Эндээс $m \leq C_{47}^2 < 1100$ болоход хүрнэ. Энэ нь бодлогын нөхцөлд зөрчих тул бүх ирмэгийг төлөөлөх 45 оройг сонгож болно.

2. $\triangle ABM$ ба $\triangle CDM$ -ийг багтаасан тойрогийн төвүүдийг харгалзан O_1 ба O_2 гэе. Эхлээд OO_1MO_2 -ийг параллелграмм гэж баталъя. $\angle ABM = \angle DCM = \varphi$ гэвэл $\angle AMO_1 = 90^\circ - \varphi$ ба $\angle MCD = \varphi$ гэж гарна. Иймд $O_1M \perp CD$; $OO_2 \perp CD$ болох тул $O_2M \parallel OO_2$ гэдгээс O_1MO_2O параллелграмм болно. Иймээс одоо бид зөвхөн $\angle OO_2N_2 = \angle OO_2N$ гэж батлахад хангалттай. Үнэхээр $\triangle OO_1N_1 = \triangle N_2O_2O \Rightarrow ON_1 = ON_2$ ба $OM_1 = OM_2 \Rightarrow M_1N_1 = M_2N_2$ гэж гарна.



$\angle BMN_1 = \alpha$; $\angle BAM = \beta$ гэж тэмдэглэе.

$$\angle O_1MO_2 = \angle O_1MA + \angle AMD + \angle O_2MD = 90^\circ + \beta + \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle MO_1O = \angle MO_2O = 90^\circ - \beta - \varphi \Rightarrow$$

$$\rightarrow \angle OO_1N_1 = 90^\circ - \beta - \varphi + 2\alpha + 2\beta = 90 + \beta + 2\alpha - \varphi$$

болох ба яг үүнтэй адилаар тооцвол $\angle OO_2N_2 = 90^\circ + \beta + 2\alpha - \varphi = \angle OO_1N_1$ болж батлах зүйл бүрэн батлагдлаа.

3. (Э.Энхзаяагийн бодолт) Энэ бодлогыг бодохын тулд ОУМО-2001 онд дэвшигдэж байсан дараах бодлогыг ашиглая. $a, b, c > 0$ бол

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

байна. Одоо дээрх тэнцэтгэл бишид $\frac{a^2}{bc} = x, \frac{b^2}{ac} = y, \frac{c^2}{ab} = z$ гэж сонговол $x \cdot y \cdot z = 1$ болох батэнцэтгэл биш маань

$$\sqrt{\frac{x}{x+8}} + \sqrt{\frac{y}{y+8}} + \sqrt{\frac{z}{z+8}} \geq 1$$

болно. (x', y', z') нь (x, y, z) -ийн дурын сэлгэмэл байг. Мөн $(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z})$ ба $(\frac{1}{\sqrt{x+8}}, \frac{1}{\sqrt{y+8}}, \frac{1}{\sqrt{z+8}})$ гэсэн гурвалууд эсрэг монотон байх тул эрэмблэх арга ёсоор

$$1 \leq \sqrt{\frac{x}{x+8}} + \sqrt{\frac{y}{y+8}} + \sqrt{\frac{z}{z+8}} \leq \sqrt{\frac{x'}{y'+8}} + \sqrt{\frac{y'}{z'+8}} + \sqrt{\frac{z'}{x'+8}}$$

гэж гарна. Одоо $(x, y, z) = (a, b, c)$ гэвэл манай батлах ёстой тэнцэтгэл биш батлагдана.

4.4 ОУМО-50, IV сорил

Б.Баяржаргал(МУИС)

1 (Г.Батзаяа). a -натурал тоо өгчээ. $n^2 \mid a^n + 1, n \in \mathbb{N}$ тэгшитгэлийн шийдийн тоог ол.

2 (Б.Баясгалан). Шулуун дээр 2 өнгийн n цэг өгөв. Тэгвэл

а) Ижил өнгийн дэс дараалсан 3 цэгийг арилгах, мөн аль дуртай байршилд ижил өнгийн дэс дараалсан 3 цэгийг нэмэх.

б) Дэс дараалсан 3 цэгийн өнгийг нөгөө өнгөөр солих үйлдлүүдийг хийх замаар хичнээн ялгаатай байршил үүсгэх вэ?

3 (Б.Баяржаргал). $I = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ олонлогийг дараах нөхцлүүдийг хангаж байхаар A ба B олонлогуудад хувааж болох уу? Үүнд

а) $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$

б) $A \cup B = I$, $A \cap B = \emptyset$

в) $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n) \cdot 2^n$ тооны хуваагчдын тоо 2^n -ээс хэтрэхгүй.

1. Лемм: $\mathbb{P} \ni p > 2$ ба $a \in \mathbb{N}$ байг.

(а) $p^\alpha | a^p + 1$, $\alpha \geq 1 \Leftrightarrow p^{\alpha+1} | a^p + 1$

(б) $a > 2$ бол $\exists q > 2$, $q \in \mathbb{P}$, $q | a^p + 1$, $q \nmid a + 1$.

Баталгаа: $a = 1$ ганц шийдтэй. $a \in \mathbb{N}$ $n = 1$ шийд болно.

$a = 2$ үед $n > 1$ гээд $n = p^\alpha \cdot n'$, p нь хамгийн бага анхны тоон хуваагч (n', p) = 1 гээ.

$$p^{2\alpha} | 2^{p^\alpha \cdot n'} + 1 \xrightarrow{\text{лемм}} p^\alpha | 2^{n'} + 1 \Rightarrow \begin{cases} p^\alpha | 4^{p^{\alpha-1} \cdot (p-1)} - 1 \\ p^\alpha | 4^{n'} - 1 \end{cases} \Rightarrow p^\alpha | 4^{(n', p^\alpha(p-1))} - 1 = 3, \alpha = 1, p = 3 \text{ болно.}$$

$n = 3$ үед $9 | 2^3 + 1 \Rightarrow$ шийд $n' > 1$ гэвэл $q | n'$ хамгийн бага анхны тоон хуваагч гэвэл $\frac{q | 64^{q-1} - 1}{q | 64^{n'} - 1} \Rightarrow q | 63 \Rightarrow q = 7$ ба $8^{n'} + 1 \equiv 9 \not\equiv 0(7)$ болж зөрчил $\Rightarrow n \in \{1, 3\}$ гэсэн 2 шийдтэй.

$a + 1 = 2^\alpha > 3$ бол $p | n$ хамгийн бага анхны тоон хуваагч гэвэл хэрэв $p = 2$ бол $a^n + 1 \equiv 2 \not\equiv 0(4)$ болж зөрчил $\Rightarrow p > 2$ ба n -сондгой $\Rightarrow \frac{p | a^{2n} - 1}{p | a^{p-1} - 1} \Rightarrow p | a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1) \Rightarrow p | a - 1$ ба $a^n + 1 \equiv 2 \not\equiv 0(p) \Rightarrow$ зөрчил

Хэрэв $\exists p_1 | a + 1$, $p_1 > 2$ байг. Леммээр $\exists p_2 | a^{p_1} + 1$, $p_2 \nmid a + 1$, $p_2 > 2 \xrightarrow{\text{лемм}} p_1^2 | a^{p_1} + 1$ ба $p_2 | a^{p_1} + 1 \Rightarrow p_2^2 | a^{p_1 p_2} + 1 \Rightarrow p_1^2 p_2^2 | a^{p_1 p_2} + 1 \Rightarrow \dots$ гэх мэт $p_1^2 \dots p_k^2 | (a^{p_1 \dots p_k}) + 1$, $k \geq 1$ байг. Леммээр

$$p_{k+1} | (a^{p_1 \dots p_{k-1}})^{p_k} + 1, p_{k+1} \nmid a^{p_1 \dots p_{k-1}} + 1, p_{k+1} > 2$$

$\Rightarrow (p_{k+1}, p_1 \dots p_{k-1}) = 1$ ба хэрэв $p_{k+1} = p_k$ бол $p_k^2 | (a^{p_1 \dots p_{k-1}})^{p_k} + 1$
 $\Rightarrow p_k | a^{p_1 \dots p_{k-1}} + 1$ болж зөрчил $\Rightarrow (p_{k+1}, p_1 - p_k) = 1$ ба $p_{k+1}^2 |$
 $a^{p_1 \dots p_k p_{k+1}} + 1 \Rightarrow p_1^2 \dots p_{k+1}^2 | a^{p_1 \dots p_{k+1}} + 1 \Rightarrow$ энэ үед төгсгөлгүй
 олон шийдтэй. $\downarrow$

$$\text{Хариу } a = \begin{cases} 2^\alpha - 1, \alpha \geq 1 & \text{бол ганц шийдтэй} \\ 2, & \text{бол 2 шийдтэй} \\ \text{бусад,} & \infty \text{ олон шийдтэй} \end{cases}$$

2. Бодлогод өгсөн нөхцөл нь дараах нөхцөлтэй эквивалент байна. Үүнд

$$a^3 = b^3 = 1$$

$$a^2 b = b^2 a$$

$$a b a = b a b$$

$$a b^2 = b a^2$$

гэж гарна. Дээрх тэгшитгэлүүдийг ашиглан бид дараах 12 ширхэг байрлалд хүрч болно.

1) $a^3 = b^3$ нь арчсан 2) a , 3) b , 4) a^2 , 5) b^2 , 6) ab , 7) ba , 8) ab^2 , 9) aba , 10) $a^2 b$, 11) $a^2 ba$, 12) aba^2 . Одоо эдгээр 12 байрлал бүгд хос хосоороо ялгаатай гэж батлахад манай бодлого бодогдоно. α ба β -үүд нь зөв тетрадерийг өөрийг нь өөрт буулгадаг.

$\alpha = (234)$; $\beta = (132)$ сэлгэмэлүүд дээрх нөхцөлийг хангана. Эндээс 12 байрлалууд бүгд хоорондоо ялгаатай болох нь гарна.

3. Лемм: I олонлогийн A ба B олонлогуудад $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ хувьд $a_i + b_i \in \mathbb{P}$ байхаар хувааж болно.

▲ Индукцийн аргаар $n = 1$ бол $\{1, 2\} = \{1\} \cup \{2\}$, $1 + 2 = 3 \in \mathbb{P}$. $\{1\} \cap \{2\} = \emptyset$. $k < n$ байх k бүрийн хувьд хувааж болдог гэе. Бертрандын тостулат ёсоор $2n < p < 4n$ байх p гэсэн анхны тоо олдоно. $p > 2n \leq 2$ учир сондгой гэдгээс $p = 2n + m$, m -сондгой натурал тоо

$$(2n, m); (2n - 1, m + 1); \dots \left(\frac{2n + m + 1}{2}, \frac{2n + m - 1}{2} \right)$$

хосуудын нийлбэр бүгд p гарна. Харин үлдсэн $\{1, 2, \dots, m - 1\}$ олонлогийг индукцын таамаглал ёсоор 2 хэсэгт хувааж болно. ▼

Одоо лемм ёсоор I -г A ба B гэсэн хэсэгт хуваая. $M = (a_1 + b_1) \dots (a_n + b_n) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_s = n$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

M -ийн хуваалтын тоо $N = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_s + 1)$ байна. Хэрэв $\alpha_j = 1$ байх j байвал

$$N = 2 \cdot (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_{j-1} + 1)(\alpha_{j+1} + 1) \dots (\alpha_s + 1)$$

болж $N \leq 2^n$ гэдэг нь $\frac{N}{\alpha_j + 1} \leq 2^{n-1}$ буюу батлах зүйлтэй ижил тэнцэл биш ахиж гарах учир $\forall j \in \{1, 2, \dots, s\}$ хувьд $\alpha_j > 1$ гэж үзэж болно. Кошийн тэнцэтгэл биш ёсоор

$$\prod_{i=1}^s (\alpha_i + 1) \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^s (\alpha_i + 1)}{s} \right)^s = \left(\frac{n + s}{s} \right)^s$$

болно. Иймд бид $\left(\frac{n+s}{s} \right)^s \leq 2^n$ гэж батлахад хангалттай.

$\alpha_i > 1 \Rightarrow \alpha_i \geq 2$ ба $\sum_{i=1}^s \alpha_i = n$ гэдгээс $s \leq \frac{n}{2}$.

Одоо $f(x) = \left(\frac{n+x}{x} \right)^x$, $x \geq 1$ гэсэн p -ийг авч үзье.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1 + \frac{n}{x} \right)^x \ln \left(1 + \frac{n}{x} \right) - \frac{n}{x} \left(1 + \frac{n}{x} \right)^{x-1} = \\ &= \left(1 + \frac{n}{x} \right)^{x-1} \cdot \left(\left(1 + \frac{n}{x} \right) \ln \left(1 + \frac{n}{x} \right) - \frac{n}{x} \right) \end{aligned}$$

$x \leq \frac{n}{2} \Rightarrow \frac{n}{x} \geq 2$ учир $\ln \left(1 + \frac{n}{x} \right) \geq \ln 3 > 1$. Иймээс $\left(1 + \frac{n}{x} \right) \ln \left(1 + \frac{n}{x} \right) - \frac{n}{x} > 1 - \frac{n}{x} > 0$ буюу f нь $1 \leq x \leq \frac{n}{2}$ үед өсдөг функц байна. Иймд $f(x) \leq f\left(\frac{n}{2}\right) = 3^{\frac{n}{2}} < 2^n$ болж батлагдав.

5 Олон улсын математикийн 50-р олимпиад

Ц.Дашдорж

Б.Ганбилэг

Олон улсын математикийн 50-р олимпиад ХБНГУ-ын Бремен хотноо 2009 оны 7-р сарын 10-22-ны өдрүүдэд болж өнгөрлөө. Тус олимпиадад эх орноо төлөөлөн Б.Батхуяг (1-р сургууль 9-р анги), О.Зориггоо, И.Цогбаяр (1-р сургууль 11-р анги), Э.Энхзаяа (Олонлог сургууль 11-р анги), О.Бямбадорж (Олонлог сургууль 9-р анги), Б.Лувсанбямба (Мон-Турк, 10-р анги) нар оролцлоо. Манай сурагчид нийт 72 оноо авч багийн дүнгээр 108 орноос 54-р байранд оров.

Сурагчдын тус олимпиадад хэрхэн оролцсон талаар дараахь хүснэгтээс харна уу.

	A1	A2	A3	B1	B2	B3	нийт оноо	
Б.Батхуяг	5	0	0	1	0	0	6	
Э.Энхзаяа	7	7	0	5	2	0	21	Хүрэл медаль
О.Зориггоо	7	7	1	0	2	0	17	Хүрэл медаль
Б.Лувсанбямба	7	2	0	5	0	0	14	Хүрэл медаль
О.Бямбадорж	7	0	0	0	0	0	7	Шагналт байр
И.Цогбаяр	4	0	0	3	0	0	7	

5.1 Бодлогууд

ОУ-1. Натурал тоо n ба $\{1, \dots, n\}$ олонлогийн $a_1, \dots, a_k$ ($k \geq 2$) ялгаатай тоонууд өгсөн ба $i = 1, \dots, k-1$ бүрийн хувьд $a_i(a_{i+1} - 1)$ нь n -д хуваагдаж байв. $a_k(a_1 - 1)$ нь n -д хуваагдахгүй гэж батал.

ОУ-2. O нь ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн төв. P ба Q нь CA ба AB хэрчмүүдийн дотоод цэгүүд. K, L ба M нь BP, CQ ба PQ хэрчмүүдийн дундач цэгүүд, Γ нь K, L ба M цэгүүдийг дайрсан тойрог байг. PQ шулуун нь Γ тойргийг шүргэж байг. $OP = OQ$ гэж батал.

ОУ-3. Натурал тоонуудын эрс өсөх дараалал $s_1, s_2, s_3, \dots$ өгөгдсөн ба $s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots$ ба $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$ дэд дараал-

лууд нь арифметик прогресс үүсгэдэг байг. $s_1, s_2, s_3, \dots$ дараалал мөн арифметик прогресс гэж батал.

ОУ-4. Гурвалжин ABC -д $AB = AC$ байг. CAB ба ABC өнцгийн биссектрисүүд нь BC ба CA талуудыг D ба E цэгүүдэд огтолдог. ADC гурвалжинд багтсан тойргийн төв нь K гээ. $\angle BEK = 45^\circ$ байв. CAB өнцгийн авч болох бүх утгыг ол.

ОУ-5. Дурын a ба b натурал тоонуудын хувьд $a, f(b)$ ба $f(b + f(a) - 1)$ талууд бүхий үл бөхөх гурвалжин оршдог байх бүх $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ функцийг (бүх натурал тоон дээр тодорхойлогдсон натурал утга авдаг функц) ол.
(Оройнууд нь нэг шулуун дээр оршоогүй бол үл бөхөх гурвалжин болно)

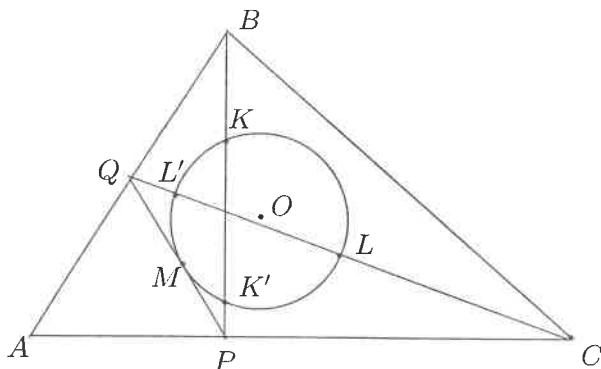
ОУ-6. $a_1, \dots, a_n$ ялгаатай натурал тоонууд ба $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ тоог үл агуулах $n - 1$ натурал тооноос тогтох M олонлог өгчээ. O координаттай цэгээс эхлэн, дэвхрэг баруун тийш тоон шулуун дагуу n харайлт хийх ёстой. Түүний хайралтын уртуудын дараалал нь $a_1, \dots, a_n$ тоонуудын ямар нэг сэлгэмэл л байх ёстой. Дэвхрэг M олонлогоос координаттай цэг дээр буухгүй байх тийм сэлгэмлийг сонгож чадахыг батал.

5.2 Бодлогуудын бодолт

ОУ-1. Б.Лувсанбямбын бодолт (Б.Батням мөн ийм бодолт хийв).

$\forall i \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$ хувьд $n \mid a_i(a_{i+1} - 1)$ буюу $a_i + a_{i+1} \equiv a_i \pmod{n}$ байна. Үүнийг хэрэглэн $a_{k-1} \cdot a_k \equiv a_{k-1}(n) \Rightarrow a_{k-2} \cdot a_{k-1} \cdot a_k \equiv a_{k-2} \cdot a_{k-1}(n) \Rightarrow a_{k-2} \cdot a_{k-1} \equiv a_{k-2}(n) \Rightarrow a_{k-3} \cdot a_{k-2} \cdot a_{k-1} \equiv a_{k-3} \cdot a_{k-2}(n) \Rightarrow a_{k-3} \cdot a_{k-1} \equiv a_{k-3}(n)$ гэх мэтчилэн үргэлжлүүлвэл $a_1 a_k \equiv a_1(n)$ (1) болно. Эсрэгээс нь $n \mid a_k(a_1 - 1)$ гэвэл $a_1 a_k \equiv a_k(n)$ (2) ба (1) ба (2)-оос $a_k \equiv a_1(n)$ болно. Энэ нь a_1 ба a_k нь n -ээс хэтрэхгүй ялгаатай тоонууд гэдэгт зөрчинө. Иймд $n \nmid a_k(a_1 - 1)$ батлагдав.

ОУ-2. О.Энхзаяагийн бодолт.



Г-тойрог CQ, BP хэрчмүүдийг L, K цэгүүдээс ялгаатай L', K' цэгүүдээр огтолж байг. Өгсөн нөхцөлөөс $\left. \begin{array}{l} MK \parallel AB \\ ML \parallel AC \end{array} \right\} \Rightarrow \angle BAC = \angle KML = \alpha$ гэе. $ML \parallel PC \Rightarrow \angle QLM = \angle QCP$ ба QM нь Г-г шүргэнэ гэдгээс $\angle QML' = \angle QLM = \angle QCP \Rightarrow L'MPC$ нь багтсан дөрвөн өнцөгт $\Rightarrow \angle MKL = \angle ML'L = \angle ML'C = \angle APQ$ $\left. \begin{array}{l} \angle KML = \angle PAQ \\ \angle MKL = \angle APQ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle KML \sim \triangle PAQ$, $\frac{AQ}{AP} = \frac{ML}{MK} \Rightarrow AQ \cdot MK = AP \cdot ML$ ба $MK = \frac{BQ}{2}$; $ML = \frac{PC}{2}$ тул $AQ \cdot QB = AP \cdot PC$ болно. $\triangle AOB$ -д Стюартын теорем бичвэл $OQ^2 \cdot AB = OA^2 \cdot BQ + BO^2 \cdot AQ - AQ \cdot BQ \cdot AB = R^2(BQ + AQ) - AQ \cdot BQ \cdot AB = R^2 \cdot AB - AQ \cdot BQ \cdot AB = AB(R^2 - AQ \cdot BQ) \Rightarrow OQ^2 = R^2 - AQ \cdot BQ = R^2 - AP \cdot CP = OP^2$ ба $OQ = OP$ болох нь батлагдав. (Үүнд R нь ABC гурвалжны багтаасан тойргийн радиус)

ОУ-3. ММО-26-ын мөнгөн медальт математикч Б Батнямын бодолт.

$\div s_{s_1}, s_{s_2}, \dots$ -ийн ялгавар нь D байг. $n = 1, 2, \dots$ үед $d_n = s_{n+1} - s_n$ гэе. d_n тогтмол гэж батлах ёстой. Эхлээд d_n тоонууд зааглагдсан гэж харуулъя: Өгснөөр $\forall n, d_n \geq 1$ тул $\forall n, d_n = s_{n+1} - s_n \leq d_{s_n} + d_{s_n+1} + \dots + d_{s_{n+1}-1} = S_{s_{n+1}} - S_{s_n} = D$ гэж бичиж болно, учир нь $|\{s_n + 1, s_n + 2, \dots, s_{n+1}\}| = |\{s_n, s_n + 1, \dots, s_{n+1} - 1\}|$.

Иймд $m = \min\{d_n \mid n = 1, 2, \dots\}$, $M = \max\{d_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ гэе. $m = M$ гэж баталбал болно. $m < M$ гэж үзье. $d_n = m$ байх

n -ийг сонговол $\forall i, d_i \leq M$ тул

$$D = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = s_{s_n+m} - s_{s_n} = d_{s_n} + d_{s_n+1} + \dots + d_{s_n+m-1} \leq mM \quad (1)$$

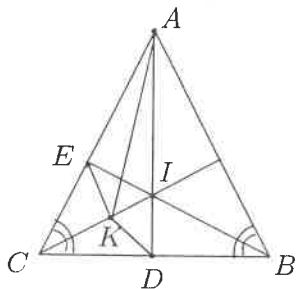
гэж олох ба энд тэнцэл биелнэ $\Leftrightarrow$ нэмэгдэхүүн бүр $= M$. Хэрэв $d_n = M$ байхаар n -ийг сонговол

$$D = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = s_{s_n+M} - s_{s_n} = d_{s_n} + d_{s_n+1} + \dots + d_{s_n+M-1} \geq mM \quad (2)$$

Энд мөн тэнцэл биелнэ $\Leftrightarrow$ нэмэгдэхүүн бүр $= m$ гэж болно. (1) ба (2)-оос $D = Mm$ ба хэрэв $d_n = m$ бол $d_{s_n} = d_{s_n+1} = \dots = d_{s_{n+1}-1} = M$, хэрэв $d_n = M$ бол $d_{s_n} = d_{s_n+1} = \dots = d_{s_{n+1}-1} = m$ гэж гарна. Эндээс $d_n = m$ бол $d_{s_n} = M$ гэж гарлаа. $\forall n$ -ийн хувьд $n \leq s_1 + (n-1) \leq s_n$ ба хэрэв $d_n = m$ бол $s_n > n$; хэрэв $s_n = n$ бол $m = d_n = d_{s_n} = M$ гэж зөрчилд хүрнэ. Мөн адилаар $d_n = M$ бол $s_n > n$ гэж олно. Үүгээр $d_{s_{n_1}} = M, d_{s_{n_2}} = m, d_{s_{n_3}} = M, d_{s_{n_4}} = m, \dots$ байх эрс өсөх дараалал $n_1, n_2, \dots$ байна гэж гарав. $d_{s_1}, d_{s_2}, \dots$ дараалал нь $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, \dots$ ба $s_{s_1}, s_{s_2}, \dots$ -ийн хосолсон ялгаваруудын дараалал тул мөн $\div$ болно. Иймд $m = M$.

ОУ- 4. Энэ бодлогыг О.Энхзаяа, Б.Лувсанбямба нар

CAB өнцгийн авч болох утга нь $60^\circ, 90^\circ$ гэдгийг олсон боловч эдгээр утгуудад $\angle BEK = 45^\circ$ байхыг шалгаагүйгээс тус бүр 2 оноо хасуулсан юм. Цаашид манай багш, сурагчид ийм тохиолдолд анхаарлаа хандуулах хэрэгтэй. О.Энхзаяагийн бодолтыг гүйцээж авч үзье.



$$\begin{aligned} \angle CAB &= \alpha \text{ гэе } 0 < \alpha < 180^\circ, \\ \triangle ABC\text{-д багтсан тойргийн төв нь } I &\text{ байг. } AB = AC \text{ гэдгээс } \angle ACI = \angle ICD = \angle IBC = 45^\circ - \frac{\alpha}{4} \Rightarrow \\ \angle AEB &= \angle ECB + \angle EBC = 135^\circ - \frac{3}{4}\alpha. \quad \angle CKE = 180^\circ - \angle AEB - \\ \angle KEI &= \frac{3}{4}\alpha \Rightarrow \angle IKE = \angle ECK + \\ \angle CEK &= 45^\circ - \frac{\alpha}{4} + \frac{3}{4}\alpha = 45^\circ + \frac{\alpha}{2} \\ \angle IKD &= \angle KCD + \angle KDC = 45^\circ - \frac{\alpha}{4} + 45^\circ = 90^\circ - \frac{\alpha}{4} \quad \triangle IKE \text{ болон} \end{aligned}$$

$\triangle IKD$ -д синусын теорем бичвэл

$$\begin{aligned}\frac{IK}{\sin 45^\circ} &= \frac{IE}{\sin(45^\circ + \frac{\alpha}{2})} = \frac{ID}{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{4})} \\ \Rightarrow \frac{IE}{ID} &= \frac{\sin(45^\circ + \frac{\alpha}{2})}{\cos \frac{\alpha}{4}}\end{aligned}\quad (1)$$

Нөгөө талаас $\triangle IEC, \triangle IDC$ -д синусын теорем бичвэл

$$\begin{aligned}\frac{IE}{ID} &= \frac{IE}{IC} \cdot \frac{IC}{ID} = \frac{\sin(45^\circ - \frac{\alpha}{4})}{\sin(45^\circ + \frac{3\alpha}{4})} \cdot \frac{1}{\sin(45^\circ - \frac{\alpha}{4})} = \\ &= \frac{1}{\sin(45^\circ + \frac{3\alpha}{4})}\end{aligned}\quad (2)$$

(1) ба (2)-оос $\sin(45^\circ + \frac{\alpha}{2}) \cdot \sin(45^\circ + \frac{3\alpha}{4}) = \cos \frac{\alpha}{4} \Rightarrow$
 $\frac{1}{2}(\cos(\frac{\alpha}{2} - \frac{3}{4}\alpha) - \cos(90^\circ + \frac{3}{4}\alpha)) = \cos \frac{\alpha}{4} \Rightarrow -\cos(90^\circ + \frac{3}{4}\alpha) = \cos \frac{\alpha}{4}$
 $\cos \frac{\alpha}{4} + \cos(90^\circ + \frac{3}{4}\alpha) = 2 \cos(45^\circ + \frac{3}{4}\alpha) \cdot \cos(45^\circ + \frac{\alpha}{2}) = 0. \quad 0 < \alpha < 180^\circ$
 тул $45^\circ + \frac{3}{4}\alpha = 90^\circ$ эсвэл $45^\circ + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$. Эндээс $\alpha = 60^\circ$ эсвэл $\alpha = 90^\circ$

$\alpha = 60^\circ$ үед $\triangle KID = \triangle KIE$ тул $\angle KEI = \angle KDI = 45^\circ$;
 $\angle BEK = 45^\circ$

$\alpha = 90^\circ$ үед $\angle BEK = \varphi$ гээ. $\angle BEC = \angle EAB + \angle EBA =$
 $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$; $\angle KIE = \pi - \angle ICE - \angle CEI = \pi - \frac{\pi}{8} - \frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$;
 $\angle CEK = \frac{5\pi}{8} - \varphi$; $\triangle CID$ -д биссектрисийн чанараар

$$\frac{KI}{KC} = \frac{ID}{CD} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \quad (3)$$

$\triangle EIK$ ба $\triangle EKC$ -д синусын теоремоор

$$\begin{aligned}\frac{KI}{KC} &= \frac{KI}{EK} \cdot \frac{EK}{KC} = \frac{\sin \varphi}{\sin \frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin(\frac{5\pi}{8} - \varphi)} = \\ &= \frac{\sin \varphi \cdot \sin \frac{\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{4} \sin(\frac{5\pi}{8} - \varphi)}\end{aligned}\quad (4)$$

$$(3) \text{ ба } (4)\text{-өөс } \frac{\sin \varphi \cdot \sin \frac{\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{4} \sin(\frac{3\pi}{8} - \varphi)} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \Rightarrow \sin \varphi = 2 \sin \frac{\pi}{8} \cdot \sin(\frac{5\pi}{8} - \varphi)$$

$$\sin \varphi = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) - \cos(\frac{3\pi}{4} - \varphi), \cos(\frac{3\pi}{4} - \varphi) = 0, \frac{3\pi}{4} - \varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

ОУ-5. Алхам 1. $f(1) = 1 : f(1) = 1 + m > 1$ гэвэл $1, f(y), f(y + f(1) - 1) = f(y + m)$ талуудтай гурвалжин оршино. Хэрэв $\exists y \in \mathbb{N}, f(y + m) \neq f(y)$ гэвэл тухайлбал $f(y + m) > f(y)$ бол $1 + f(y) > f(y + m), 1 > f(y + m) - f(y) \geq 1$ буюу $1 > 1$ гэсэн зөрчилд хүрэх тул $\forall y \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд $f(y + m) = f(y)$ буюу f нь m -үетэй буюу зааглагдсан функц байна. B нь зааг гэвэл $\forall x \in \mathbb{N}, f(x) \leq B. 2B < x$ байх x -ийг сонговол $x > 2B \geq f(y) + f(y + f(x) - 1)$ гэсэн зөрчилд хүрнэ. Иймд $m = 0$ буюу $f(1) = 1$.

Алхам 2. $\forall z \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд $f(f(z)) = z : z, 1 = f(1), f(f(z))$ бүхэл талууд бүхий гурвалжин орших тул $z = f(f(z))$ гэж гарна. $f(f(z)) = z$ -ээс f инъектив ($x \neq y$ бол $f(x) \neq f(y)$) гэж гарна: $x \neq y$ боловч $f(x) = f(y)$ гэвэл $x = f(f(x)) = f(f(y)) = y$ гэж зөрчилд хүрнэ. $d := f(2) - 1$ гээ. $d \geq 1$ байна. $2, f(y), f(y + f(2) - 1) = f(y + d)$ талууд бүхий гурвалжнаас

$$|f(y) - f(y + d)| \leq 1 \quad (*)$$

Алхам 3. $\forall k \geq 0, f(1 + kd) = 1 + k$: k -аар индукцэлж баталъя. $k = 0$ үед Алхам 1-ээр батлагдана. Одоо индукцийн шилжилтийг хийе. $(*)$ ёсоор $f(1 + (k + 1)d) \in \{k, k + 1, k + 2\}$ ба f инъектив тул k ба $k + 1$ байж үл чадна. Үүгээр Алхам-3 батлагдана.

Алхам 4. $d = 1 : x = 1 + d^2, y = 1 + d$ гэвэл $1 + d^2 = x < f(y) + f(y + f(x) - 1) = 2 + d + f((1 + d) + (1 + d) - 1) = 2 + f(1 + 2d) = 2 + 1 + 2 = 5$ буюу $d = 1$. Иймд $\forall k \geq, f(1 + k) = 1 + k$ буюу $f(x) = x$ ганц функц л байна.

О.Зориггоо, Э.Энхзаяа хоёр л Алхам-1, 2-г хийж 2 оноо авсан бусад нь оноо авч чадаагүй болно.

ОУ-6 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$ харайлтуудын дарааллыг $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ гэж тэмдэглэе. n -ээр индукцэлье. $n = 0, 1$ тохиолдлууд илэрхий. n -ээс бага бүх утгын хувьд бодлого бодогддог гээ. $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ гэж үзэж чадна. $d = \min M$ байг.

Тохиол 1. $d < a_n$ байг. Хэрэв $a_n \notin M$ бол a_n -ээс эхлэн $M' = M \setminus \{d\}$ -ийн цэгүүд дээр буулгүйгээр $a_1, \dots, a_{n-1}$ харайлтуудыг ашиглан индукцийн өмнөх алхмаар явж чадна (M нь эхлэл 0-оос $s = a_1 + \dots + a_n$ -зайд орших цэгийг агуулдаггүй бол M' нь эхлэл a_n -ээс $s' = a_1 + \dots + a_{n-1}$ -зайд орших цэгийг мөн агуулдаггүй: Эсрэгээс нь $\exists b \in M', b - a_n = a_1 + \dots + a_{n-1}$ гэвэл $b = a_1 + \dots + a_n = s \in M$ болж зөрчилд хүргэв)

$a_n \in M$ байг.

$$\{a_n\}, \{a_1, a_1 + a_n\}, \{a_2, a_2 + a_n\}, \dots, \{a_{n-1}, a_{n-1} + a_n\}$$

гэсэн хос хосоороо ялгаатай n олонлогийг авч үзье. Тэдгээрийн нэг нь M -тэй огтлолцохгүй, тухайлбал $\{a_i, a_i + a_n\}$. Тэгвэл $|M \cap [a_i + a_n, \dots, s]| \leq n - 3$, учир нь $d, a_n < a_i + a_n$. Иймд дэвхрэг $a_i + a_n$ -ээс s -рүү a_i, a_n -ээс бусад бүх харайлтыг ашиглан харайж чадна. a_i, a_n -ийг эхэнд нь тавибал шаардагдах аялал олдоно.

Тохиол 2. $d \geq a_n$ байг. Индукцэд үзэж буйгаар дэвхрэг a_n -ээс s -рүү $a_1, \dots, a_{n-1}$ харайлтуудыг ашиглан M' -ийн цэгүүд дээр гишгилгүйгээр явж чадна, үүнд

$$(i_1, \dots, i_{n-1}) \quad (*)$$

харгалздаг. Хэрэв энэ аялалаар d дээр гишгэхгүй бол (тухайлбал эндээс $d > a_n$ гэж гарна) $U = (n, i_1, \dots, i_{n-1})$ нь олбол зохих аялал болно. Эсрэг тохиолд $(*)$ нь M -ийн яг нэг цэгийг агуулах (тэр нь d) ба $0 \leq \exists k < n - 1, a_n + a_{i_1} + \dots + a_{i_k} = d$. Энэ сүүлчийн тохиолд $(i_1, \dots, i_{k+1}, n, i_{k+2}, \dots, i_{n-1})$ -ийг авч үзье.

$$a_{i_1} + \dots + a_{i_{k+1}} < a_{i_1} + \dots + a_{i_k} + a_n = d$$

тул эхний $k + 1$ харайлтдаа M -ийн цэгүүд дээр буухгүй. Нөгөө талаас аяллын үлдэх хэсэгт U аяллынхтай адил цэгүүд дээр бууна (энэ нь $a_{i_1} + \dots + a_{i_{k+1}} + a_n > d$ -ээс багагүй цэгүүд байна), иймд M -ийн цэгүүд дээр буухгүй. Үүгээр аль ч тохиолд тохирох замыг олж чадлаа.

6 Монголын Оюутны Математикийн XVIII Олимпиад

Монголын Их, Дээд Сургуулиудын
Математикийн XVIII олимпиадын бодлогууд

В.Адъяасүрэн

6.1 I Курс

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2n} 2^{-\frac{nk}{n+k}}$ хязгаарыг ол.
2. $a_k = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{2^{n-k}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ байг. $\prod_{k=0}^{n-1} (1 - a_k) = \frac{(-1)^{n-1}}{1 + a_0}$ гэж батал.
3. $\min_{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} \frac{\operatorname{Im} z^5}{(\operatorname{Im} z)^5}$ -ийг ол.
4. Аливаа натурал n -ийн хувьд $\ln \left(n + \frac{1}{2} \right) + \gamma < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < \ln \left(n + \frac{1}{2} \right) + \gamma + \frac{1}{6(n+1)^2}$ гэж батал. Энд γ -Эйлерийн тогтмол.
5. Аливаа натурал n -ийн хувьд $\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin nx}{\sin x} \right)^2 dx = \pi n$ гэж батал.
6. $3 = \sqrt{5 + \sqrt{6 + 2\sqrt{7 + 3\sqrt{8 + 4\sqrt{9 + \dots}}}}}$ гэж батал.
7. $\max_{z \in \mathbb{C}, |z|=1} |z^3 - z + 2|$ -ийг ол.

8. $k \in \mathbb{N}$, μ -ээрэг бодит тоо байг.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k \cdot \left(\frac{\mu}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-k} = \frac{\mu^k}{e^\mu \cdot k!} \quad \text{гэж батал.}$$

9. $f \in C^2([0, 1])$ байвал

$$\exists \theta \in (0, 1) : \int_0^1 f(x) dx = f(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{6}f''(\theta) \quad \text{гэж батал.}$$

10. $n \in \mathbb{N}$ ба $f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2n}} - e^x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ байг.

1) $\forall x \in [0, n] : f_n(x) \geq 0$ гэж батал.

2) $\frac{1}{4\sqrt{en}} \leq \max_{0 \leq x \leq n} f_n(x) \leq \frac{1}{\sqrt{en}}$ гэж батал.

11. $x = \frac{2\pi}{n}$ байг.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cos \alpha & \cos 2\alpha & \cdots & \cos n\alpha \\ \cos 2\alpha & \cos 4\alpha & \cdots & \cos 2n\alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(n-1)\alpha & \cos 2(n-1)\alpha & \cdots & \cos(n-1)n\alpha \end{pmatrix}$$

матрицыг урвуутай гэж батал.

12. G нь 1) 2-р эрэмбийн элементгүй, 2) $\forall x, y \in G : (xy)^2 = (yx)^2$ байх бүлэг бол G -г Абелийн гэж батал.

6.2 II-IV Курс

1. a, b, c -сөрөг биш тоонууд.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{\sqrt{i^2 + j^2 + a \cdot i + b \cdot j + c}}$$

хязгаарыг ол.

2. $\sigma(n)$ -ээр натурал n тооны хуваагчдын нийлбэрийг тэмдэглэе.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n!} = s$$
 тоог иррационал гэж батал.
3. $\varphi : S_n \longrightarrow S_{n-1}$ буулгалт сюръектив гомоморфизм байх $n(n \geq 3)$ -ийн бүх утгыг ол.
4. $\{a_n : n \geq 1\}$ дараалал $a_1 = a_2 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, n \geq 2$ рекуррент томъёогоор өгөгдсөн байг.

$$9 = \sqrt{3a_2a_4 + a_4\sqrt{3a_4a_6 + a_6\sqrt{3a_6a_8 + \dots}}}$$

гэж батал.

5. $\mathbb{R}_+$ -ээр эерэг бодит тоон олонлогийг тэмдэглэе. $E \subset \mathbb{R}_+, E \neq \emptyset$ байг.
 Хэрэв $\forall x, y \in E : \sqrt{x^2 + y^2} \in E$ ба $\frac{x}{2} \in E$ байвал $\overline{E} = [0, +\infty)$ гэж батал.

6. G -төгсгөлөг бүлэг. $P(G) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\{(a, b) \in G \times G \mid ab = ba\}|}{|G \times G|}$ гээ.

а) Хэрэв G нь коммутатив биш байвал $P(G) \leq \frac{5}{8}$ гэж батал.

б) $P(G) = \frac{5}{8}$ байх жишээ гарга.

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_0^{1/n} x^{x+1} dx = \frac{1}{2}$ гэж батал.

8. $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m! n!}{(m+n+2)!}$ цувааны нийлбэрийг ол.

9. a, b өгөгдсөн тоонууд

$$D = \left\{ f \in \mathbb{R}([0, 1]) \mid \int_0^1 f(x) dx = a, \int_0^1 x f(x) dx = b \right\} \quad \text{гээ.}$$

$$\min_{f \in D} \int_0^1 f^2(x) dx \text{-ийг ол.}$$

10. $y(x) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos \frac{x^2}{2t^2} dt$ интегралыг тооцоол.
11. R нь $\forall x, y \in R : (xy)^2 = x^2 y^2$ байх нэгжтэй цагираг бол энэхүү цагираг нь коммутатив гэж батал.
12. p -анхны тоо. $\forall a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -ийн хувьд $a = b^2 + c^2$ байх $b, c \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ олдоно гэж батал.

6.3 Багийн тэмцээний бодлогууд

1. $a, b \in \mathbb{R}, b > 0, z = a + i \cdot b$ байг.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\cos^n z + \cos^n(z + i) + \cos^n(z + 3i)|^{1/n}$$

хязгаарыг ол.

2. $f \in C[0, 1]$ ба $x \in [0, 1]$ байг.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 e^{-nk(x-u)} f(u) du = \int_0^x f(u) du$$

батал.

3. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ нь $D = \{z : |z| < 1\}$ мужид аналитик ба $A = \iint_D |f'(z)|^2 dx dy < \infty$ байг.

а) $A = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2$ гэж батал.

б) $\forall z \in D : |f(z) - f(0)| \leq \sqrt{\frac{A}{\pi} \ln \frac{1}{1 - |z|^2}}$ батал.

4. $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ба $\psi(n) = \#\{k | (f(k), n) = 1, 1 \leq k \leq n\}$ байг.
- а) $\forall m, n \in \mathbb{N}; (m, n) = 1$ бол $\psi(mn) = \psi(m) \cdot \psi(n)$ гэж батал.
- б) $\psi(p^t) = \psi(p) \cdot p^{t-1}$ гэж батал.

5. $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ба $\deg P(x) = n > 0$ байг. Дурын комплекс

α тооны хувьд $P(x) = (x - \alpha)q(x) + r$ хэлбэрт тавья. Үүнд $q(x) = c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \dots + c_1x + c_0$ ба $r \in \mathbb{C}$.

Тэгвэл $S = \{c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_1, c_0, r\}$ олонлогийн элементүүд $\mathbb{Q}$ дээр шугаман хамааралгүй байх гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь α нь $\mathbb{Q}[x]$ дээрх n -зэргийн олон гишүүнтийн язгуур гэж харуул.

6. $R = M_n(F)$, F талбар. $a_1, a_2, \dots, a_k$ нь R -ийн F дээр шугаман хамааралгүй элементүүд. $b_1, b_2, \dots, b_k$ нь R -ийн дурын

$$l: R \longrightarrow R$$

элемент бол $a_i \xrightarrow{i=1, k} b_i$ байх шугаман аналитик буулгалт ол-

$$l: R \longrightarrow R$$

дохыг үзүүл. Үүнд: $x \longrightarrow \sum_{\nu} d_{\nu} x a'_{\nu}$ гэж буулгах буулгалтыг

шугаман аналитик буулгалт гэнэ.

Олимпиадын дүн

NQ	Оюутны нэр	байр
I-курс		
1.	Б.Эркехулан (ОМ-1)	I байр
II-IV курс		
1.	Б.Батзаяа (ОМ-4)	I байр
2.	Ц.Батболд (ОМ-4)	II байр
3.	У.Батзориг (ОМ-4)	III байр
4.	А.Содбаатар (ОМ-2)	III байр
Багийн тэмцээн		
1.	МУИС-МКС-ОМ-1	I байр
2.	МУИС-МКС-ОМ-4	II байр