

МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАДЫН
ЦУВРАЛ № 35

**АКАДЕМИЧ Т.ЖАНЛАВЫН
НЭРЭМЖИТ МОНГОЛЫН
МАТЕМАТИКИЙН XLVI
ОЛИМПИАД**

Улаанбаатар хот
2011 он

ӨМНӨХ ҮГ

Улсын болон Олон улсын математикийн олимпиадад бэлтгэгчид, математикийн төрөлжсөн сургалттай ангийн сурагч, оюутан, багш нар, математик сонирхогч өргөн олонд зориулсан цувралын ээлжит дугаар уншигч Таны гар дээр очиж байна. Тус гарын авлагын бэлтгэхэд ММО Зохион Байгуулах Хорооны гишүүд, МУИС-ийн МКС-ийн хамт олон, МУИС-ийн математикийн ангийн оюутнууд идэвхтэй оролцлоо.

Уг номын талаархи аливаа санал хүсэлтээ МУИС-ийн Алгебрийн тэнхимд ирүүлнэ үү.

Ховд аймгийн Боловсрол Соёлын Газар, МУИС-ийн МКС-иас ивээн тэтгэж “Тоонот принт” хэвлэх үйлдвэрт хэвлэв.

Монголын Математикийн XLVI олимпиад

Редактор: Цэрэндоржийн Дашдорж

Хэвлэлийн эхийг бэлтгэсэн: Доржсүрэнгийн Эрдэнэжаргал

2011 оны 3 сард 1500 хувь хэвлэв.

Гарчиг

1	Монголын Математикийн 46-р Олимпиадын дүн- гийн тухай	5
2	Намтар, хөдөлмөр бүтээлийн товчоон	9
3	Дурсамжууд	18
4	Монголын математикийн XLVI олимпиад	44
4.1	ММО-46, VII ангийн III даваа	44
4.2	ММО-46, VIII ангийн III даваа	48
4.3	ММО-46, VIII ангийн IV даваа	52
4.4	ММО-46, IX ангийн III даваа	56
4.5	ММО-46, X ангийн III даваа	61
4.6	ММО-46, XI ангийн III даваа	65
4.7	ММО-46, Багын багшийн III даваа	70
4.8	ММО-46, Дундын багшийн III даваа	72
5	ММО-46, IV давааны бодлогууд	77
6	ОУМО-51-ын сорилын бодлогууд	83
7	Олон улсын математикийн 51-р олимпиад	116

Үг Н.Сүхдорж

Ая Ц.Буян-Орших

МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАДЫН СҮЛД ДУУ

Нарнаас илчийг нь авч болох уу
 Сарнаас гэрлийг нь салгаж болох уу
 Багш та юу гэж заасан бэ
 Багш нөхөд маань санаж байна уу
 Тоо тоогоо тоолон бодъё
 Томъёогоор заллан бодъё
 Олуулаа уралдан бодъё
 Олимпиаддаа оролцож бодъё
 Орчлонгийн удмыг туулж болох уу
 Олод эрхсийг тоолж болох уу
 Эвклид юу гэж хэлсэн бэ
 Эрхэм нөхөд минь санаж байна уу

Дахилт

Эрдмийн оргилд хүрч болох уу
 Энгүй далайг хэмжиж болох уу
 Суут эрдэмтэн Мянгат өвөөгийн
 Сургаалт үгийг санаж байна уу

Дахилт

Гэрлийн хурдыг давж болох уу
 Тэнгэрийн хаяанд хүрч болох уу
 Дэлхийд алдартай эрдэмтэн Гауссын
 Дэлгэж нээсэн онолыг саная даа

Дахилт



2000 оны Сэлэнгийн
 олимпиадыг зохион
 байгуулагчдын бүтээл

1 Монголын Математикийн 46-р Олимпиа- дын дүнгийн тухай

Ц.Далддорж

Эрхэм хүндэт математикч багш сурагчид аа!

ММОХорооны гишүүдэд!

Эрдэм ухаанд гүн илчлэгтэй Ховдчууд аа!

Академич Т.Жанлавын гэр бүл үр хүүхэд, ач зээ нар аа!

Монголын Математикийн 46-р Олимпиад Ховд нутгаас төрсөн манай нэрт математикч Академич Т.Жанлавын нэрэмжит болон 2010 оны 05 сарын 06 - 11-ны хооронд "МУИС-ийн Математик Компьютерийн Сургууль" дээр амжилттай явагдаж дүнгээ гаргаж байна. Энэ удаагийн олимпиадад 21 аймаг, Улаанбаатар хотын нийт 22 багийн 80 бага, дундын багш, 245 сурагчид оролцож нийт 325 хүн оюун ухаан, авъяас чадвараа сорин уралдлаа. Энэ удаагийн олимпиадыг зохион байгуулах, бэлтгэл ажлыг хангахад Ховд аймгийн төр захиргаа, боловсролын байгууллага, хувь хүмүүс ихээхэн хүчин чармайлт гаргаж алхаарал хандуулсныг зориуд тэмдэглэх ёстой. Үүний дотор Б.Дүгэржав даргатай Ховд аймгийн БСГазрын хамт олон, Т.Баасансүрэн даргатай Ховд аймгийн Цэцэг сумын нутгийн зөвлөл, Д.Цагаанцоож захиралтай Ховд аймгийн Жаргалант сумын 12 жилийн 3-р сургууль, Б.Гантулга захиралтай Жаргалант сумын 12 жилийн 1-р дунд сургууль, Х.Батбаяр захиралтай Манханы, Энхжаргал захиралтай Мөстын, Б.Балдорж захиралтай Цэцэгийн сургуулиуд, мөн Л.Алтангэрэл захиралтай МУИС-ийн МКС-ийн хамт олон ихээхэн идэвхи санаачлага гарган бүх талаар дэмжин хамтран ажиллалаа. ММО-46-ийн ерөнхий ивээн тэтгэгчээр академичийн төрсөн нутгийн Нацагдорж захиралтай Мо-Эн-Ко ХХК ажилласныг та нарт дуулгахад таатай байна. Мөн манай Олимпиадын байнгын ивээн тэтгэгчдийн нэг бугуйн цагны төрөлжсөн дэлгүүр "Time-Shop"-ийн эзэн Б.Мөнхжаргал (1992 оны УБИС-ийн тооны ангийн төгсөгч), ММОХорооны менежер Бүүвэйбаатар нар ч уламжлалт бэлгээрээ биднийг баярлууллаа. Дээрх

нэр бүхий пийт хамт олон, сайн санаат дэмжигчиддээ Монголын нийт математикчдын өмнөөс талархал илэрхийлье.

Олимпиадад 8-р ангийн 81 сурагч оролцсоноос 1-р сургуулийн сурагч Ч.Золбоо 29 оноогоор 1-р байр эзэлж 8-р ангийн аварга боллоо. 1-р сургуулийн Б.Ганзориг 24 оноо, мөн Дарханы А.Мөнхзориг (Х.Төмөрхан) 17 оноо 2-р байрыг, 11-р сургуулийн сурагч Б.Номиндарь, Г.Төрболд, Б.Буян-Эрдэнэ нар тус тусдаа 15 оноогоор 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

Олимпиадад 9-р ангийн 61 сурагч оролцсоноос 1-р сургуулийн Э.Оргил-Эрдэнэ 29.5 оноогоор 1-р байр эзэлж 9-р ангийн аварга сурагч боллоо. Хөвсгөл аймгийн Ж.Энхбаяр 27.5 оноогоор, Дархан аймгийн Г.Баяннамсрай (Т.Алтанцэцэг) 24 оноогоор, 2-р байрыг, "Олонлог" сургуулийн Б.Бат-Од 23 оноогоор, 1-р сургуулийн сурагч Б.Баатархүү, Ч.Золбоо нар 22 оноогоор, 11-р сургуулийн Н.Санчир 22 оноогоор тус тус 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

Олимпиадад 10-р ангийн нийт 56 сурагч оролцсоноос 1-р сургуулийн сурагч Б.Батхуяг 17.5 оноогоор 1-р байр эзэлж Улсын математикийн 46-р олимпиадын 10-р ангийн аварга сурагч боллоо. "Мон-Турк" сургуулийн Б.Цээлмаа 16 оноогоор, Архангай аймгийн Д.Түвшинтөр, Увс аймгийн Т.Бямбаа нар тус бүр 14 оноогоор 2-р байрыг, 1-р сургуулийн Г.Халиун 12.5 оноогоор, 1-р сургуулийн Э.Минпээл 11 оноогоор, "Мон-Турк" сургуулийн Э.Төрбат 10 оноогоор тус тус 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

Олимпиадад 11-р ангийн нийт 47 сурагч оролцсоноос 1-р сургуулийн Ц.Ивээл 23.5 оноогоор 1-р байр эзэлж Улсын математикийн 46-р олимпиадын 11-р ангийн аварга сурагч боллоо. 11-р сургуулийн З.Болор-Эрдэнэ 19 оноогоор, "Мон-Турк" сургуулийн Б.Лувсанбямба 18.5 оноогоор 2-р байрыг, 1-р сургуулийн Б.Зулсар, Л.Энхжаргал нар тус тус 17 оноогоор, "Олонлог" сургуулийн Д.Баасанхүү 16.5 оноогоор тус тус 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

Улсын Математикийн 46-р олимпиадад амжилттай оролцсон

дээрх нэр бүхий сурагчид, олимпиадад сурагчдаа амжилттай бэлтгэж оролцуулсан багш нарт Монголын нийт математикчдын нэрийн өмнөөс чин сэтгэлийн талархал илэрхийлье.

Багш нарын олимпиадыг бага, дунд гэсэн хоёр ангилалаар явуулсны дотроос бага ангийн математикийн 34 багш оролцсоноос, Баян-Өлгий аймгийн багш Ш.Хайрол 27.5 оноогоор түрүүлж, "Олонлог" сургуулийн багш Б.Намжилмаа 24 оноогоор, Өвөрхангай аймгийн багш Д.Чулуунхүү 23 оноогоор удаах байруудад орлоо. Бага ангийн багш нарын аврага Ш.Хайролын амжилтыг Баян-Өлгий аймгаас ивээн тэтгэж явуулсан Академич А.Мекейн нэрэмжит Монголын Математикийн 42 - р Олимпиадын үр шим гэж үзэх нь зүйтэй болов уу!!

Дунд ангийн багш нарын олимпиадад нийт 46 багш оролцсоноос Дархан-Уул аймгийн багш Ч.Сугардорж 15 оноогоор түрүүлж, "Олонлог" сургуулийн багш Б.Ганбилэг 14 оноогоор II байр, Хөвсгөл аймгийн багш Г.Адъяахүү 13 оноогоор III байрыг эзэллээ.

Багийн дүнгээр аймаг хотуудыг байр эзлүүлэхэд, Г. Адъяахүү ахлагчтай Хөвсгөл баг дундаж оноо 14.66 - оор 1-р байр, Ч.Даваадорж ахлагчтай УБ баг дундаж оноо 14.5-аар 2-р байр, Ч.Сугардорж ахлагчтай Дархан баг дундаж оноо 12.58-аар 3-р байранд шалгарлаа.

ММО-46-д 1-р сургууль 11 медаль, 11-р сургууль 5 медаль, "Олонлог" сургууль 4 медаль, "Мон-Турк" сургууль 3 медаль, Дархан 3 медаль, Хөвсгөл 2 медаль, Архангай, Увс, Баян-Өлгий, Өвөрхангай тус тус 1, 1 медаль авч олимпиадад оролцогчдоо хопуучлан сайхан амжилт гаргалаа.

УБ хотын 1-р сургуулийн 8-р ангийн сурагч Ч.Золбоог Академич Т.Жанлавын нэрэмжит ММО- 46-ын үнэмлэхүй аваргаар тодруулах нь зүйтэй гэж ММОХороо үзлээ. Математикийн авъяас, авсан онооны чансааг харгалзан үзэж үнэмлэхүй аврага Ч.Золбоо, Дунд ангийн багш нарын аврага Ч.Сугардорж, бага ангийн багш нарын аврага Ш.Хайрол нарыг ММОХорооны тусгай дээд шагнал ба дээд шагналаар шагнаж байгааг дуулгахад таатай байна. Энэ жилийн 7-р сард Казакстаны Астана хотод

болох ОУМО - 51 - ийн бэлтгэлд 1 -р сургуулийн 11-р ангийн аврага сурагч Ц.Ивээл, 11-р сургуулийн З.Болор-Эрдэнэ, "Мон-Турк" сургуулийн Б.Лувсанбямба, 1-р сургуулийн Б.Зулсар, Л.Энхжаргал, 1-р сургуулийн 10-р ангийн сурагч Б.Батхуяг, үнэмлэхүй аврага Ч.Золбоо нарыг үлдээхээр Олимпиадын хо-роо шийдвэрлэлээ. ОУМО-51-ийн бэлтгэлд багтаж шалгарсан та бүхэндээ амжилт хүсч, Монголынхоо нэрийг дэлхийн тав-цанд дуурсгах хүндтэй бөгөөд хариуцлагатай үйл хэргийн тө-лөө идэвхи чармайлт гарган сайн бэлтгэж амжилттай оролцохыг Монголын нийт Математикчдын нэрийн өмнөөс даалгаж байна. Эрдэм оюун дэлгэрч Монголд математикчдын оюун ухаан улам хөгжин дэлгэрэх болтугай. Анхаарал тавьсан та бүхэнд баярла-лаа.

2 Намтар, хөдөлмөр бүтээлийн товчоон

МУИС-ийн Математик, компьютерийн сургуулийн
зөвлөх профессор, физик-математикийн шинжлэх
ухааны доктор, академич, профессор Т.Жанлавын
намтар, хөдөлмөр бүтээлийн товчоон

1. Товч намтарын он дарааллын хуудас

- | | |
|------------|--|
| 1943.09.25 | Ховд аймаг Цэцэг суманд төрсөн. |
| 1951-1958 | Бага, дунд сургуульд суралцаж төгссөн. |
| 1958-1962 | Улаанбаатар хотын Хүн эмнэлгийн техникумд суралцаж төгссөн. |
| 1962-1965 | Дорноговь аймагт хүний бага эмч, Улаанбаатар хотод дэлгүүрт ачигчаар ажилласан. |
| 1965-1970 | МУИС-ийн Физик-математикийн факультетэд суралцаж, математикч, математикийн багш мэргэжил эзэмшсэн. |
| 1970 | МУИС-д математикийн багшаар ажиллаж эхэлсэн. |
| 1978-1981 | ОХУ-ын Новосибирскийн их сургуулийн аспирантурт суралцаж төгссөн. |
| 1982.01.07 | ЗХУ-ын ИУА-ын Сибирийн салбарын Новосибирск дэх Тооцон бодох төвд "Метод сплайн-коллокации для параболических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами" сэдвээр физик-математикийн ухааны дэд эрдэмтний зэрэг (эрдэм шинжилгээний удирдагч доктор, профессор Ю.С.Завьялов /1930-1997/) хамгаалсан. |
| 1985-1992 | Дубна хот дахь ЦШНИ-д эрдэм шинжилгээний ахлах, тэргүүлэх ажилтан. |
| 1992.10.02 | ЦШНИ-д "Обобщение непрерывного аналога метода Ньютона и метод сплайнов для численного решения нелинейных задач теоретической физики" сэдвээр физик-математикийн шинжлэх ухааны докторын зэрэг хамгаалсан. |

1993-1997	МУИС-ийн Математикийн факультетэд Дифференциал тэгшитгэл, тооцон бодох математикийн тэнхимийн эрхлэгч
1994	Эрдмийн зэрэг цол олгох дээд зөвлөлийн шийдвэрээр дэд профессор цол, "Ардын боловсролын тэргүүний ажилтан" цол хүртсэн.
1997	"Пинжлэх ухааны тэргүүний ажилтан" цол, тэмдгээр шагнагдсан.
1997-2008	МУИС-ийн МКС-ийн захирлаар ажиллав.
1998	Эрдмийн зэрэг цол олгох дээд зөвлөлийн шийдвэрээр профессор цол хүртэв.
2001	Ардын хувьсгалын 80 жилийн ойн медаль, Алтангадас одонгоор шагнагдсан.
2003	МКС-ийн Хэрэглээний математик, программ хангамжийн ухаанаар магистрын зэрэг хамгаалуулах зөвлөлийн дарга
2006	ШУА-ын их чуулганаас ШУА-ын жинхэнэ гишүүн /академич/-ээр сонгогдсон.
2010	Физик-математикийн пинжлэх ухааны докторын зэрэг хамгаалуулах зөвлөлийн дарга
2008	МУИС-ийн МКС-ийн Хэрэглээний математик тэнхимд зөвлөх профессор

Эрдмийн бүтээл

Нийт нийтлүүлсэн бүтээл	118
• Диссертаци, монограф	4
• Их, дээд сургуулийн сурах бичиг, гарын авлага	10
• Эрдэм шинжилгээний өгүүлэл	88
• Эрдэм шинжилгээний төслийн тайлан	5
• Редакторласон ном	11

1. Сплайн дөхөлт, сплайн арга

Тэрээр ЗХУ-ын ШУА-ын Сибирийн салбар, Новосибирскийн Улсын их сургуулийн аспирантурт (1978-1981) суралцахдаа доктор профессор Ю.С.Завьяловын удирдлагаар сплайн дөхөлтийн арга, түүнийг хэрэглэх чиглэлээр судалгааны ажил хийж эхэлснээс хойш 30 гаруй жил ажиллаж 30 гаруй эрдэм шинжилгээний өгүүлэл бичиж нийтлүүлсэн бөгөөд гол үр

дүнгүүдээ нэгтгэн "Сплайн дөхөлт" монограф 2000 онд хэвлүүлсэн юм. Гол үр дүнгүүдээс дурьдвал:

- Куб сплайнны В-дүрслэлийн коэффициентуудыг олох аналитик томъёо байгуулж түүний үндсэн дээр локаль куб сплайнаар дөхөх онол боловсруулсан. Зарим үр дүнгүүд нь Ленинградын математикч Ю.С.Юферсвийн 1981 онд "Журнал вычислительной математики и математической физики" сэтгүүлд хэвлүүлсэн үр дүнтэй тохирч байсан нь уг сэдвийн чухалыг харуулах үзүүлэлт юм. Энэ өгүүлэл нь сплайн-функцийн нэрт мэргэжилтэн (Методы сплайн-функций, М. 1980 монографийн зохиогч) Ю.С.Завъялов, В.Л. Миропниченко, Б.С. Квасов нарын ажлуудад олон удаа ишлэгдсэнээс гадна Румыны математикч Micula George-н Лондонд хэвлүүлсэн монограф болон АНУ-ын нэрт математикч Carl de Boor нь сплайн функцийн талаар уншвал зохих өгүүллийн жагсаалтад оруулсан (<http://www.cs.wisc.edu/deboor/bib/z>) байна.

- 1984 онд интерполяцийн куб сплайнны хувьд оновчтой захын нөхцлийг дэвшүүлсэн нь түүний дөхөлтийн чанарыг сайжруулах боломжийг олгосон чухал үр дүн юм. Энэ нь Behforooz, L.H, Paramichael.N нарын дэвшүүлсэн (End conditions for cubic spline interpolation, J.Inst. Math Appl. 1979, V23) зарим захын нөхцлийг өөртөө агуулсан ерөнхий нөхцөл болсон.

Хожим Б.С.Квасов 1986 онд энэ үр дүнг параболлог сплайнны хувьд зөөсөн юм.

- Оновчтой захын нөхцлийг хангасан интерполяцийн куб сплайн нь байгуулалтын хувьд V.Dolezal, R.P.Tewarson, G.J.Worsey, B.J.Soares, M.Sakai, R.Uswani нарын хэд хэдэн аргаар байгуулсан сплайнаас дахин сплайн байгуулах аргаас харьцангуй хялбар бөгөөд өндөр эрэмбийн нарийвчлалтай квадратур томъёо байгуулах, Штурм-Лиувиллийн бодлогыг бодох өндөр эрэмбийн нарийвчлалтай ялгаварт схем байгуулахад хэрэглэгдэж үр ашигтай болох нь практикаар шалгагдсан болно. Энэ үр

дүнгүүд нь Грекийн математикч E.T.Simos /tsimos@mail.ariadne-t.gr, simos-editor@uop.gr/-ын ажлуудад удаа дараа илнэгдсэн болно.

- В - дүрслэлийг ашиглан хэлбэр хадгалах болон локаль интегро-куб сплайн байгуулж, тэдгээрийн дөхөлтийн теоремуудыг баталсан энэ ажлын талаар шүүмжлэгч бичихдээ "This is sound, well written and well established paper with no problem. I recommend it for publication (in journal Applied Mathematics and Computation) without any reservation" дүгнэсэн байна.
- Гурав болон таван зэргийн оновчтой сплайн байгуулж түүнийгээ ашиглан Штурм-Лиувиллийн бодлогыг өндөр нарийвчлалтай бодох ялгаварт схем боловсруулан практик тооцоо хийж баталгаажуулсан нь эрдэмтдийн сонирхолыг ихээр татсан чухал үр дүн болсон байна.
- Шугаман ба шугаман бус захын бодлого, параболлог хэлбэрийн бодлогыг бодох өндөр эрэмбийн нарийвчлалтай сплайн схемүүд байгуулсан ба түүнийгээ ашиглан онолын физикийн зарим бодлогуудын тооцоо хийж, шинэ дүгнэлтүүдэд хүрсэн зэргийг тэмдэглэж байна.

2. Ньютоны арга, түүний өргөтгөл, адилсгал, хэрэглээ

Орчин үеийн байгалийн шинжлэл, техник технологийн математик загвар нь ихэнхдээ шугаман бус тэгшитгэл, тэгшитгэлийн систем байдлаар бичигддэг. Ийм тэгшитгэл, системийн тоон болон чанарын судалгаа хийдэг шугаман бус судалгааны чиглэл үүсэж хөгжиж байгаа билээ. Энэхүү шугаман бус шинжлэх ухааны тоон судалгааны нэг чухал арга нь Ньютоны арга бөгөөд энэ арга нь нийлэлтийн хурд сайтай боловч хангалттай сайн анхны дөхөлт шаарддаг, нийлэлтийн муж нь явцуу учраас түүний элдэв хувилбар, өргөтгөл, адилсгалыг авч үзэх шаардлага зүй ёсоор тавигддаг юм.

Т.Жаплав 1985-1992 онд ОХУ-ын Дубна хот дахь ЦЦНИ-д ажиллахдаа шугаман бус бодлогыг бодох гол аргын нэг Ньютоны арга, түүний өргөтгөл, адилсгал байгуулах, хэрэглэх чиглэлээр

судалгаа явуулах шинэ арга, технологийг чадамгай эзэмшсэнийг түүний энэ чиглэлээр хэвлүүлсэн ажлууд харуулж байгаа юм. Гол үр дүнгүүд:

- Ньютоны аргын тасралтгүй адилсгалын нийлэлтийн мужийг өргөтгөсөн теоремыг Т.Жанлаз, И.В Пузынин нар баталж эдгээр ажлуудаа "Журнал вычислительной математики и математической физики" сэтгүүлд хэвлүүлжээ. (Энэ сэтгүүлийн бүх дугаарууд англи хэл дээр орчуулагдаж дэлхий нийтэд тардаг)
- Итерацийн процессийн нийлэлтийг параметрийн оновчтой сонголтоор удирдах бололцоотойг Т.Жанлазын судалгааны үр дүн харуулсан бөгөөд одоогийн байдлаар параметрийг сонгох Н.Н Калиткин, Е.С Ермаков болон Т.Жанлаз, И.В Пузынин нарын дэвшүүлсэн хоёр сонголт парактикт хэрэглэгдэж байгаа билээ.
- Ньютоны аргын тасралтгүй адилсгал дахь итерацийн параметрийн оновчтой сонголт нь нийлэлтийн мужийг өргөтгөж, нийлэлтийг хангуулдаг болохыг үзүүлсэн.
- Энэ аргын хагас-локаль нийлэлтийн теоремуудыг баталсан.
- Итерацийн параметрийн зохимжтой сонголтоор нийлэлтийн хурд болон төлвийг мөн удирдаж болохыг харуулсан.
- Дээд эрэмбийн нийлэлттэй Ньютон төрлийн аргуудыг дэвшүүлсэн.
- Ньютоны аргын тасралтгүй адилсгал, сплайн аргын хослолоор онолын физикийн зарим шугаман бус бодлогыг бодох арга боловсруулж, онолын тооцоо хийсэн зэрэг болно.
- Эдгээр үр дүнгүүд нь Ньютоны арга, түүний хэрэглээний чиглэлээр орос болон бусад гадаад орнуудад хэвлэгдэж байгаа ажлуудад тогтмол ишлэгдэж байгаа нь уг ажлын үр дүнгийн ач холбогдлыг харуулах чухал үзүүлэлт юм. Тухайлбал, Yu.S. Langnus (The international conference on nonlinear Dynamics and chaos (ICND-96), Applications in Physics, Biology and Medicine, Saratov); R.G. Airapetyan, (Comp. Phys. Comm 102, (1997), 97-108); Лебедев К.Л

(ЖВМ и МФ, 1996, 36); Chuluunbaatar O, Jonlakian B.B, Tsoochuu, Kh, Vinitzsky J . Phys B; At . Mol. Opto phys, 2004, J . Comput. Methods in Sciences and engineering, 2005, In Proceedings: International conference on programming and mathematical methods for solving physical problems, World Scientific, Singapore, 1998, pp. 20-34, pp 226-228, 205-209; I.V; Barashenkov and Yu.S. Smirnov. Phys.Review E, V54, N5, 1996 гэх мэт ажлуудад ишлэгдсэн болно.

3. Хувийн утгын бодлогыг ойролцоо бодох

Хэрэглээ талаасаа хувийн утгын бодлого нь физик, техникийн олон асуудлыг шийдэх арга хэрэгсэл болдог. Хувийн утгын дифференциал тэгшитгэл бодох төгсгөлөг ялгаврын арга нь тухайн тэгшитгэлд орсон уламжлалуудыг ялгаварт харьцаануудаар сольж цааш нь шугаман тэгшитгэлийн систем бодоход оршдог бөгөөд гол асуудал нь ялгаварт схемийн дөхөлтийн болон нийлэлтийн эрэмбийг сайжруулах замаар алдааг багасгах явдал юм. Энэ чиглэлээр хүрсэн зарим үр дүнг товч дурьдвал:

- Стандарт бус ялгаварт харьцаа оруулж хувийн утгын бодлогыг бодох стандарт бус ялгаварт схем байгуулсан ба энэ нь алдаагүй схем юм. Мөн олон хэмжээст хувийн утгын бодлогыг бодох алдаагүй ялгаварт схем байгуулсан.
- Штурм-Лиувиллийн бодлогын хувийн утгыг олоход (хувийн утгын дугаар их үед нийлэлтийн эрэмбэ буурдаг) A.L.Andrew, J.W.Paina нар ойролцоо хувийн утгын засвар хийх арга хэрэглэсэн боловч асуудлыг бүрэн шийдэж чадаагүй юм. Ийм учраас ялангуяа их дугаартай хувийн утгыг өндөр нарийвчлалтай олох асуудал чухлаар тавигдсан бөгөөд үүнийг шийдэх гарц болох өндөр нарийвчлалтай ялгаварт схем байгуулсан.
- Хоёрдугаар эрэмбийн шугаман дифференциал тэгшитгэл болон зарим хялбар тэгшитгэлийн шийдийг олох алдаагүй схем байгуулах талаар А.А.Самарский, R.E.Mickens нар зарим тодорхой үр дүнд хүрсэн бөгөөд

энэ санааг Штурм-Лиувиллийн болон Ланласын тэгшитгэлийн хувийн утгын бодлогод хэрэглэж алдаагүй бөгөөд компакт ялгаварт схемийг янз бүрийн захын нөхцөлтэй үед байгуулж, үр дүнг тоон туршилтаар баталгаажуулсан юм. Эдгээр үр дүнгүүд нь ОХУ, Германы сэтгүүлүүдэд хэвлэгдсэн байна.

4. Вейвлет дөхөлт, тооцоолох асуудлууд

Сүүлийн 20-иод жилд эрчимтэй хөгжиж байгаа математикийн нэг салбар нь вейвлет анализ бөгөөд вейвлет дөхөлтийн онолын чухал асуудлуудын нэг нь вейвлет задаргааны коэффициентуудыг олох явдал юм. Акад. Т.Жанлав эдгээр коэффициентуудыг өндөр нарийвчлалтайгаар олж улмаар харгалзах дөхөлтийн теоремыг баталсан нь түүний байгуулсан куб слайны локаль дөхөлтийн теоремыг 25 жилийн дараа ашигласан сайн үр дүн болсон юм. Вейвлет анализын тооцон бодох асуудал төсөр, үр ашигтай алгоритмууд байгуулах чиглэлд өөрийн шавь нарын хамтаар маш эрчимтэй ажиллаж олон чухал үр дүнд хүрч байна:

- Локаль вейвлет дөхөлтийг байгуулж харгалзах дөхөлтийн теоремуудыг нэг, хоёр хэмжээст тохиолдолд баталсан.
- Вейвлет задаргааны коэффициентүүдийг олох рекуррент Малла алгоритмын өргөтгөлийг байгуулсан.
- Вейвлет задаргааны коэффициентуудыг олох өндөр эрэмбийн нарийвчлалтай квадратур томъёо байгуулсан.
- Масштабын функцийн утгууд, тэдгээрийн уламжлалуудын утгыг олох, холбоосын коэффициентуудыг олох алгоритмуудыг байгуулсан зэрэг болно.

5. Онолын физикийн зарим шугаман бус бодлогыг ойролцоо бодох

Академич Т.Жанлав онолын физикийн шугаман бус бодлогуудыг бодоход Ньютоны арга, түүний өргөтгөл болон слайн-функцийн аргыг хослон хэрэглэх судалгааны шинэ чиглэлийг үүсгэн хөгжүүлсэн юм. Энэ талаар хийсэн судалгааны ажлуудын үр дүн нь өндөр нарийвчлалтай тооцоог хийх боломж олгосноос

гадна зарим шинэ физик дүгнэлтүүдэд хүрснээрээ судлаачдын сонирхолыг татсаар байгаа билээ.

Эдгээр үр дүнгүүд нь ЦПНИ, CERN, document server (library copies detailed record), Russian books catalog-д тоймлогдсоноос гадна Америкийн физикийн нийгэмлэгийн сэтгүүл Phys.Rev. D, 41(1990), 44(1991): Phys Review. E, 54(1996), 59,4(1999), 59,5(1999), 60(1999) 61(2000), 64(2001), 62(2000), J. of Physics A. Math.Gen. 34(2001), Adv. diff. equations 7(2002), Nonlinearity 12(1999) зэрэг дугааруудад ишлэгдсэн байна.

III. Шавь сургууль

Т.Жанлав МУИС-д багшилж эхэлснээс хойш 40 жил ажиллахаа тооцон бодох математикийн чиглэлээр 10 гаруй тусгай курс бэлтгэн зааж олон арван оюутны дипломын ажил удирдаж хамгаалуулсан. Үрээд оноос хойш 12 магистрын ажил, 4 докторын ажил удирдасан байна.

Монгол Улсад тооцон бодох математикийн шавь сургууль бүрэлдэн төлөвшүүлж хөгжүүлэхэд Т.Жанлав жинтэй хувь нэмэр оруулсан эрдэмтэн юм. 1997 оноос Математикийн хүрээлэнд төслийн удирдагчаар ажиллаж байгаа бөгөөд түүний удирдлагын дор слайн, вейблет дөхөлт, пугамап бус бодлогыг бодох итерацийн аргууд, дифференциал тэгшитгэлийн шийдийн тоон ба чанарын судалгаа чиглэлүүд амжилттай хөгжиж, орчин үеийн түвшинд өргөн хүрээтэй судалгааны ажил явуулж байна.

Түүний гарын шавь нараас Р.Ринчинбазар, О.Чулуунбаатар, Б.Цэцгээ нар шинжлэх ухааны докторын зэрэг амжилттай хамгаалсан бөгөөд доктор Д.Гармаа, Б.Батгэрэл, Л.Алтангэрэл, Р.Мижиддорж нар их, дээд сургуулиудад үр бүтээлтэй ажиллаж байна. судалгааны семинар удирдан явуулах, оюутан магистрант дагалдуулан сургах, эрдэм шинжилгээний хурал зөвлөгөөнд оролцуулах, илтгэл тавиулах, гадаадад мэргэжил дээшлүүлэх, гадаадын эрдэмтэдтэй хамтран ажиллах, төсөлд оролцох зэрэг идэвхтэй, олон талт үйл ажиллагаа явуулсны дүнд өнөөдөр тооцон бодох математикийн шавь сургууль амжилттай хөгжиж байна.

Удирдаж хамгаалуулсан магистр, докторууд нь МУИС, ШУ-ТИС, МУБИС, Батлан хамгаалахын их сургууль, Ховд их сургууль зэрэг их дээд сургууль, эрдэм шинжилгээний байгууллагуудад ажиллаж байна. Түүний хөгжүүлсэн навь сургуулийн шинжлэх ухаанд оруулсан хувь нэмрийн талаар 2009 онд хэвлэгдсэн Монгол Улсын шинжлэх ухаан (Тооцон бодох математик) 76-р ботиос танилцаж болно.

3 Дурсамжууд

Би ангийн багш нь бөгөөд дипломын ажлын удирдагч нь байлаа

1965 онд МУИС-ийн элсэлтийн шалгалтын коммист ажиллаж байсан Д.Шагдар багш сонин болгон манай математикийн салбарт группик хийж байсан нэг хүүхэд элсэлтийн шалгалтаа амжилттай өгч элсэн орлоо гэсэн нь энэ Т.Жанлав байсан юм. Уг нь Т.Жанлав Ховд аймагт 7-р ангиа төгсөөд хүн эмнэлгийн техникумд орж суралцан дүүргээд хөдөө орон нутагт хэдэн жил ажиллаж байгаад багаас сонирхолтой байсан математикийн мэргэжил эзэмшихээр эмчийн мэргэжлээ нуун Улаанбаатар хотод орж ирээд оройн 10 жилийн сургуулийн 9 дүгээр ангид орж суралцахын зэрэгцээгээр группийн ажил хийж 1965 онд 10-р ангиа оройгоор төгсөөд тэр жилдээ МУИС-ийн математикийн салбарын оюутан болж эхэлж байгаа нь энэ юм байжээ. Хүн эмнэлгийн техникумд хамт суралцаж байсан найз нарынх нь нэг болох их эмч, яруу найрагч Тоомойн Очирхүү Т.Жанлавын доктор (Sc) -ын зэрэг хамгаалж ирээд хийсэн зоогт гэр бүлийнхээ хамт хүндэтгэлтэйгээр уригдан ирж үйлчилж байсан бөгөөд тэр үеийн нэг сонин дээр "доктор" доктор болсон нь гэдэг өгүүлэл бичсэн байсан нь хүний эмч буюу доктор байгаад математикийн шинжлэх ухааны доктор болсон гэсэн утгатай байсан юм.

Өмнөх жилүүдэд манай математикийн салбарт жилд 30 оюутан элсүүлэх төлөвлөгөө өгдөг байсан бол 1965 онд 60 оюутан элсүүлэх төлөвлөгөө өгсөн ба 64 оюутан элсүүлэн авсан байлаа. Анги удирдсан багшаар намайг томилсон бөгөөд математик анализын хичээл зааж байсан доц. Д.Ишцэрэн багш маань Ардын Боловсролын Яамны сайд болж дэвшин ажилласан учир хичээлийн лекц, зарим группийн семинарыг надад хувиарласан юм. Энэ нь оюутнуудаа судалж, хүн нэг бүрийн талаар тодорхой мэдээлэлтэй болоход надад их дөхөм болсон юм. Эхний хагас жилээр манай энэ ангиас 10-аад оюутан бүх хичээлдээ онцсайн дүнтэй суралцсаны дотор Т.Жанлав байлаа.

Тэд 5 жилээр суралцаж төгссөн бөгөөд 6-р семестрээс нь на-

рийн мэргэжлийн группт өөрсдийн саналаар хувиарлахад математикийн салбарын түүхэнд анх удаа нээсэн тооцон бодох математикийн группт Т.Жанлав орсон юм. 1968-1969 оны хичээлийн жилд Украины Киевийн Их Сургуульд би мэргэжил дээшлүүлж тооцон бодох математикийг өөрийн цаашдын судалгааны ажлын чиглэл болгон сонгож авсан юм. Эргэж ирээд ангиа ч үргэлжлүүлэн удирдахын зэрэгцээгээр шинээр эзэмшиж байгаа чиглэлээрээ тусгай курсийн хичээл зааж зарим оюутны дипломын ажил удирдах санал тавихад Т.Жанлав миний удирдлаган дор дипломын ажил хийх болсон юм. Т.Жанлав суралцах хугацаандаа болон дипломын ажил хийсэн байдлаараа мэргэжилдээ дур сонирхолтой, их ажилсаг, нягт нямбай, хичээнгүй, юмны учрыг ул суурьтай ухан ойлгох эрмэлзлэлтэй, цаашид эрдэм шинжилгээний ажил хийх сонирхолтой, тэргүүний онц сурлагатан оюутан байлаа. Тэгээд ч 6 улирал дараалан онц суралцаж Д.Сүхбаатарын нэрэмжит цалинт оюутан болсон бөгөөд төгсөхөд нь багшаар үлдсэн ажиллуулах санал тавьсаныг зохих дээд удирдлагууд дэмжин зөвшөөрсөн юм.

Т.Жанлав МУИС - д багшилж байгаад дэлхийн шинжлэх ухааны хоёр том төв болох Новосибирск болон Дубна хотноо суралцах, ажиллах завшаан тохиож тооцон бодох математикийн чиглэлээр 1982 онд доктор (Ph), 1992 онд доктор (Sc) зэргийг амжилттай хамгаалсан бөгөөд эргэж ирээд тэнхимийн эрхлэгч, МКС-ийн захиралын албыг олон жил халчихад удирдлаганд нь ажиллаж ирсэндээ шавиараа бахархдаг юм.

*МУ-ын гавъяат багш,
доктор (Ph) профессор Л.Өвгөн*

Андын сэтгэгдэл

Бага эмчийн мэргэжлийг математикч мэргэжлээр сольсон анд минь шинжлэх ухааны доктор, академич болтлоо өссөн гэдгийг хэлэхэд л түүний авъяас билэг, ажилсаг чамбай байдал нь ямар ч нэмэлт тайлбаргүйгээр хүн бүхэнд тодорхой байдаг юм.

Ид залуу 49-хөн насандаа аав нь энэ хорвоог орхиход дөнгөж

7-р ангиа төгссөн дүүгээ хот оруулж мэргэжил эзэмшүүлэхээр Хүйс, Шаргын говийн уудам хөндийгөөр шуудангийн машинд сэгсчүүлэн явсан эгч нь дүүгээ ийм амжилтанд хүрэхийг төсөөлөөгүй ч байж болох билээ.

Жанлав бид хоёр их сургуулийн багш нарын нийтийн байранд айлсан амьдарч эхэлснээс хойш 40-өөд жил ахан дүүс шиг болтлоо найзалж бие биесээ харцаараа ойлгох хэмжээнд хүрчээ. Бидний нөхөрлөл ажил хөдөлмөрийн хоршилтоор эхэлсэн түүхтэй. Социализмын юм ховор тэр үед Хүрхрээгийн аманд юухан хээхнээр хоёр гэртээ зуслангийн байшин барьж айлсан гэр бүлээрээ үелхэж улмаар ах дүүсээ хүртэл мэдэх болсон билээ.

Жанлав маань юм бичихээсээ бусдаар солгой учраас зөв гартай хүний хувьд эвгүй байрлалын хадаасыг мөн ч урамтай шигтгэж өгдөгсөн. Хүмүүсийн үерхэл тэдний зан ааш болон бусад олон зүйл давхардсан үед илүү гүнзгийрч насан туршийн нөхөрлөл болж батжидаг байх. Жанлав бид хоёрын сонирхдог спортын төрөл хүртэл ижил болохоор яриа өрнөхөд их амар байдаг юм. Би найзынхаа юманд туунштай нэгэн үзүүрт сэтгэлээр ханддаг зан чанарын нь хүндлэн бахархдаг билээ.

Жанлавын математикийн бүтээлийн талаар мэргэжлийн багш нар болон гарын шавь нар нь тодорхой өгүүлэх тул би энд түүний зарим нууцлаг авъяасаас нэгийг өгүүлье. Залуудаа шүлэг бичиж үзээгүй хүн байдаггүй гэдэг ч Жанлавт хэвлүүлдэггүй болохоос мөн ч олон шүлэг гар бичмэлээрээ байгаа. Тодорхой нөхцөл байдал бүрдсэн үед сайн шахаж байж заримыг нь сонсож болно. Төрийн соёрхолт яруу найрагч Тоомойн Очирхүү асантай оюутан ахуйдаа МУИС-ийн хичээлийн I байрын 119 тоот өрөөнөө (зохиолчид зохиол бичихдээ онгодоо оруулахын тулд архи уудаг гэлцдэгийг үндэслэн) залгай савтай шар айраг тавьчихаад шүлэг бичиж байснаа хуучилдаг юм (хувийн нууц задалсандаа хүлцэл эрье). Хэрэв Жанлав яруу найргийг дагнан хөөсөн бол мөн л олон оргилд хүрсэн байна гэдэгт би эргэлздэггүй. Ер нь математик, яруу найраг хоёр оюун сэтгэлгээний өндөр түвшин, мэдрэмж шаарддагаараа төсөөтэй байдаг билээ.

Алс баруун хязгаарын Цэцэг суманд Жанлавын нэрэмжит

математикийн олимпиад явуулах болсон нь өргөжин уламжлал болж улмаар энэ жилийн улсын олимпиад түүний нэрэмжит болон зохион байгуулагдаж байгаад талархахын ялдамд Жанлавын олон жилийн багшийн хөдөлмөрийг төр засаг үнэлэн Монгол улсын гавъяат багш болон улмаар ардын багш болохын ерөөл дэвшүүлэе.

*МУИС-ийн МКС-ийн Алгебрийн тэнхимийн
зөвлөх профессор Н. Ёндон*

«Доктор» маань доктор болжээ
(Эрдэмтний хөрөг)

Нэгэн мянга есөн зуун жаран хоёр оны намрын нэгэн өглөө төмөр замын Улаан уул хэмээх бяцхан өртөөний гудамжаар бор тансар хилэн цамц, тэр үеэс их л моод болж байсан судалтай эрүү малгай өмссөн хорь шүргэм насны намхан бор залуу эмийн дугуй төмөр хайрцаг барьчихсан гүйж явлаа. Тосгоныхон тэр залууг андахгүй. Уулзсан хүн бүхэн «Жанлав эмч» гэнэ. Хөгшчүүл бол, хөдөөнийхөн нэгэн үе эмч нарыг нэрлэж байснаар «Жанлав доктор» гэнэ. Юм бүхэн учиртай гэдэг үнэхээр ч шинжлэх ухааны ирээдүйн нэгэн доктор замын бяцхан сууринд гүйж явсныг мэргэн өтгөс тааж зөгнөсөн ч юм билүү хэн мэдлээ... Тэр бид хоёр уг нь хүн эмнэлгийн дунд сургууль хамт төгссөн юм. Сургууль шинэхэн төгссөн анд нөхдийн ёсоор төдхөн л Жанлав маань Улаан уулаас надад бичсэн захидалдаа «Багаас сонирхож оролдсон шүлгээ бичиж байна. Бас тоо бодож байна» гэсэн байв. Тэр 1963.12.04 нд бичсэн нэгэн захидалдаа:

... Цасан хайлах хавар

Халтар бултар гялайж

Чандаган цагаан тосгон

Энх амар харагдана гэж эхэлсэн «Тэрэгний морь»

хэмээх найраглалынхаа гар бичмэлийг явуулсан байв. Өгүүлэн буй чандаган тосгон нь Улаан уул билээ. Шүлэг ч яахав ойлгомжтой, харин тэр тоо боддогийн нь учирь би нэг л сайн ойлгодоггүй байлаа. Залуу нас шинэ ажил хоёр нийлэхээр цаг хугацаа

гэдэг пахилаад өнгөрдөг ч юмсан уу нэг л мэдэхэд хоёр жил өнгөрч, ээлжийн амралтаараа хотод орж ирчихээд явж байсан чинь Жаплав маань салаа гэээгтэй, ягаан хацартай гэдгэрхон бүсгүй дагуулчихсан таарав аа. «Я гэдэг юм. Манай авгай» гэж танилцуулж байна. «Нэр нь ганцхан үсэг юм биз дээ» гэж дотны нөхрийн ёсоор хоншигновол мань хүн ч мөчөөгөө өгсөнгүй. Ард нь бас «А» бий шүү. Цагаан толгойн эх төгсгөлийг л авсан авсан хүн дээ» гэж байна. Яа охины ягаан хацар бүүр ч ягаан болж «Хүн ичээгээд ...» гээд нөхрийнхөө ханцуйнаас татаж байна. «За сонин сайхан юу байна? амарч явна уу?» «Бид хоёр Улаан уулд хамт ажиллаж байгаад хотод ээж рүүгээ шилжээд ирсэн. Өвгөн чинь хүнсний дэлгүүрт мах цавчигч хийж байгаа» гэдэг юм байна. «За яагаад тэр билээ» гэсэнд «Яахав ээ хө арай завтай ажил хийж байгаад оройн арав төгсгөөс... Яагаав нөгөө Шаагаа багшийн хэлдэг дутуу дөрвийг гүйцээ. Их сургуульд орох санаатай» гэж байна. Энэ сацуу 1960 оны хаврын нэгэн дурсамж санаанд орлоо. Бид хоёрдугаар курс төгсөж байлаа. Нэг өдөр тооны багш Шагдарсүрэн орж ирээд «За хүүхдүүдээ. Та нарын тооны талын хичээлүүдээ үзэж дууслаа. Одоо мэргэжлийн хичээлээ дагнан үзэх болно. Харин хичээлийн цаг, хөтөлбөрөөс шалтгаалан тооны хичээлийн 4 бүлгийг товчилж үзсэн шүү» гэвээ. Тооны хичээл их хэцүү, бас Шаагаа багш хатуухан болохоор тоонд төдийлөн сүжиггүй миний хувьд «За яамай, юутай ч хоёр яс саллаа» гэх ухааны юм бодож суулаа. Гэтэл арын суудлаас Жаплав: «Багшаа! Тэр дөрвөн бүлэг товчилж үзлээ гэдэг маань юу гэсэн үг вэ» гэж асуув.

Багш: «Товчхон хэлэхэд тооны ангид л орж дөнгөхгүй хэсэн үг дээ» гэсэнсэн... Гэтэл тэгэх тусам нь гэсэн юм шиг Жаплав маань хэдхэн жилийн дараа МУИС-ийн тооны ангийн оюутан болчихлоо. Бид их, дээд сургуульд бас л нэг үед сурч байв. Жаплавынх тэгэхэд Гандангийн дэнж дээр бага таван ханатад ээж, ах дүү нарынхаа хамт арван хэдүүлээ амьдарч байлаа. Хэзээ л уулзана тооны ном, дүүрэн тоо бичсэн хэдэн нимгэн дэвтэр барьчихсан, тоо ярьчихсан явна. Нөхөр маань их сургуулиа онц дүүргэж билээ.

Жанлавынх одоо хоёр хүү, хоёр охин, гурван ачтай өнөр өтгөн айл. Жанлав хүүхдэд их хайртай, ялалтуяа тоонд дуртай хүүхдүүдэд бол бүр ч ... Чухам л гучин жил хүүхэд тоо хоёртой ноцолдсон хүн гэж хэлж болно. Хатуухан ч багш «Жанлав багшийн гараас ч тоо сурч байж л гарна даа» гэлцэнэ. Шалгалтад унаж хасагдсан нэг оюутан «Уучлаарай багшаа! Өөрийгөө шахаж, тооны амтанд ороогүй миний буруу. Одоо л нэг ойлгож байна» гэж Увсаас багшдаа захиа бичжээ. Жанлав маань сургуульдаа багшаар хэдэн жил ажиллаад 1978 онд Новосибирскт аспирантурт суралцахаар явах гэж байхад уулзсансан. «Тоо амаргүй ээ! хөгшин чинь яахав хоёр жил мэргэжил дээшлүүлээд ирнэ» гэж байсан. Удсан ч үгүй дэд эрдэмтний зэрэг хамгаалчихаад ирэв. Хэдэн жилийн дараа 1985 оны намар «Дубна явж ажиллахаар боллоо. Доктор гэдэг ч ёстой ах нарын хэлдэгээр «кислый хлеб» байхаа! Яахав дээ том газар мэргэжлээ дээшлүүлээд ирэхэд л боллоо» гэж найз маань хэлж билээ. Гэтэл Дубнагаас саяхан ирсэн нэг хүнээс, МУИС-ийн багш Т.Жанлав Оросын холбооны улсын Дубна дахь «Цөмийн шинжилгээний институтэд «Онолын физикийн шугаман бус бодлогуудыг Ньютоны аргын тасралтгүй хувилбарын өргөтгөл болон сплайн функцийн аргаар бодох нь» сэдвээр докторын зэрэг хамгаалсныг нь сонсов. Энэ нь Орос улсад манайхаас анх удаа математикийн ухаанаар докторын зэрэг хамгаалсан үйл явдал. Хамгаалах зөвлөлийн хурлаас сүүлийн арван жилд 100 хувийн санал авсан анхны доктор боллоо гэж тэр баяр хөөр болгон ярилаа. Түүнийг докторын зэрэг хамгаалахад физик-математикийн ухааны доктор С.И.Виницкий, А.И.Гребенников, И.Д. Родионов нар мэргэжлийн нүүмжлэгчээр оролцож өндөр үнэлэлт өгчээ.

Физик - математикийн ухааны доктор Тугалхүүгийн Жанлавын диссертаци миний өмнө байна. Сүүлийн долоон жилд хийсэн судалгаа шинжилгээний 25 ажлын дүнгээр туурвисан энэ том бүтээл «Онолын математик», «Тодорхой функцуудын бодлогыг бодох» гэсэн хоёр үндсэн хэсэгтэй юм. Жанлав докторын шинэ бүтээл нэг талаар түүний дэд эрдэмтний зэрэг хамгаалсан сэдвийн нь үргэлжлэл нөгөө талаар Дубнад шугаман бус

тэгшитгэлийг ойролцоо боддог аргыг профессор Е.П. Жидков, И.В.Пузынин нарын удирдлагын дор хөгжүүлсэн хослол арга ажээ. Дубна хот дахь цөмийн шинжилгээний нэгдсэн институтын тооцон бодох техник, автоматжуулалтын лабораторийн орлогч захирал доктор, профессор И.В.Пузинин эрдмийн зэрэг хамгаалах зөвлөлийн хурал дээр: «Монголын эрдэмтэн Т.Жанлав өөрийн өмнө өндөр зорилго, шаардлага тавьж, түүнийгээ нөр пургуу хөдөлмөрөөрөө хөгжүүлсэн юм. Түүнийг би судалгаа шинжилгээний энэ салбарт ажиллаж байгаа нөхдийнхөө дунд нэрд гарсан мэргэжилтэн гэж үнэлж хэлэхийг хүсч байна » гэсэн бол « Доктор Т.Жанлавын диссертаци нь онол практикийн чухал ач холбогдол бүхий судалгаа шинжилгээний бүрнээ боловсрогдсон бүтээл болжээ» гэж түүний эрдэм судлалын ажлын албан ёсны тодорхойлолтод дурджээ. Одоо доктор Жанлав МУҮИС-ийнхаа математикийн факультетэд багшилж, докторын зэрэг хамгаалсан ажлынхаа үр дүнг онолын физикийн шугаман бус бодлогуудыг болоход хэрэглэх, судалгаа шинжилгээний ажлаа үргэлжлүүлэн энэ салбарт шинэ залуу мэргэжилтнүүд, шавь нарыг бэлтгэх зорилготой ажиллаж байна.

«Одоо пүлгээ бичиж байна уу? » гэвэл «Өөртөө л гэхүүдээ, хааяа бичдэг л юм. Гэхдээ пүлэг тоо хоёр гэдэг нэг хүн зэрэг хийчих ажил биш. Харин аливаа зүйлийг задлан дүгнэж, бодож сэтгэх урлагт пүлэг найраг л намайг сургасан юм шүү. Тийм болохоор би яруу найргийн өмнө өртэй хүн» гэж өгүүллээ.

...Саяхны нэг өдөр МУҮИС-ийн төв байрны хаалгаар гартаа бичгийн том цүнх барьсан, ов товхон буурал үстэй, намхан бор эр орж харагдсан нь мөнөөхөн гучин жилийн өмнө төмөр замын Улаан уул өртөөний гудамжаар гүйж явсан хүний бага эмч хүү буюу хөгшчүүлийн хэлдгээр «Доктор Жанлав» байлаа. Жанлав маань одоо жинхэнэ доктор болжээ. Жанлавыг Улаан уулын хүн гэвэл түүний төрсөн нутаг Ховдын Мөстийнхөн мэдээж гомдоно. Гэхдээ хүний амьдралын аяны нэгэн зөрлөг энэ жаахан тосгоноос ирээдүйн нэрт тоочны амьдралын ч, ажлын ч гараа эхэлсэн гэж бодохлоор Жанлав доктор маань Улаан уулын ч хүү, унаган Цэцэгийнхээ ч хүү, улс монголынхоо ч хүү юм.

Харин тооны шинжлэх ухааны хувьд дэлхийн ч хүү юм билүү? гэж бас бодогдлоо...

*Зохиолч Тоомойн Очиртүвшин "Ардын эрх" сонин,
1993 оны 2-р сарын 10-ны №24*

Шавийн сэтгэгдэл

Миний бие 1971 онд Дундговийн төвийн 10 жилийн сургуулийг төгсөөд МУИС-ийн Математикийн ангид элсэн Монголын математикийн алтан үеийн багш нар болох Монгол Улсын гавъяат багш, профессор Ү.Санжмятав, Монгол Улсын гавъяат багш У.Цоёд, Монгол Улсын гавъяат багш Д.Шагдар нараар их сургуулийн математикийн анхны хичээлүүдийг эхлэн заалгасан билээ.

1974 онд 3-р ангийн 2-р улирлаас Тооцон бодох математикийн бүлэгт хуваарилагдаж ахлах багш Б.Жаргал, Монгол Улсын гавъяат багш Л.Өвгөн, академич Т.Жанлав нараар Програмчлал, Тооцон бодох аргын нарийн мэргэжлийн хичээлүүдийг заалгасан үеэсээ Т.Жанлав багшийг мэддэг болсон юм. Тэр үед Жанлав багш маань идэр залуухан багш байсан бөгөөд тооцон бодох аргын хичээлийг бидэнд зааж номыг уншиж эзэмшихийг сургадаг байлаа. Уг хичээлээс тооцон бодох аргын нийлэлт, нийлэлтийн хурд, тогтворжилт гэсэн ойлголтуудын талаар мэдлэгийг олж авсан билээ.

1976-1980 онд Д.Шагдар эрхлэгчтэй Математик анализын тэнхимд багштайгаа хамт ажилласан. 1990 онд БНПУ-д мэргэжил дээшлүүлж байх хугацаандаа тэр үеийн ЗХУ-ын Дубна хот дахь ЦШНИ-д ажиллаж байсан Жанлав багштай уулзаж цаашдын эрдэм судлалынхаа ажлын чиглэлийн талаар ярилцсан билээ. 1995 оноос Т.Жанлав багш миний докторын ажлын нэг удирдагчаар ажилласан ба багшийнхаа удирдлагын дор 1998 онд "Хожимдолттой шугаман бус дифференциал тэгшитгэлийн системийн захын бодлогын тоон шийд" сэдвээр математикийн ухааны дэд докторын зэрэг хамгаалсан ба 1996 оноос "Тооцон бодох математикийн онол практикийн асуудал" сэдэвт улсын төсөвт эрдэм шинжилгээний ажилд оролцсон.

Т.Жанлав багш миний эрдэм судлалын ажлын удирдагчийн зэрэгцээгээр удирдлагын ухааны багш гэж боддог. 2000 онд МУИС-д сургалтын албадууд байгуулагдахад МКС-ийн захирал байсан Т.Жанлав багш намайг сургалтын албаны эрхлэгчээр томилсон. Сургалтын албаны эрхлэгчийн ажлыг хийж гүйцэтгэсэн 6 жилийн хугацаандаа Т.Жанлав багштай гар нийлэн ажиллаж ирсэн гэж боддог. Энэ үед МКС-д мэдээллийн системийн инженер, мэдээллийн системийн удирдлага, эдийн засгийн математик загварчлалын ангиуд шинээр нээгдэж мэдээллийн систем, эдийн засгийн математик загварчлал гэсэн хоёр тэнхим байгуулагдсан билээ.

Манай багш бол тооцон бодох математикийн чиглэлээр олон бүтээл туурвисан дотооддоо төдийгүй дэлхийд нэртэй эрдэмтэн-сурган хүмүүжүүлэгчийн зэрэгцээгээр аливаа асуудалд нягт нямбай, ул суурьтай, шулуун шударга ханддаг удирдагч хүн.

МУИС-ийн Математик, компьютерийн сургуулийн Програм хангамжийн тэнхимийн эрхлэгч, доктор, профессор Д.Гармаа

Өглөгийн давалгаа

Эхлэл

Эдүгээгийн академич, нэртэй математикч багштан маань дэлхийн дайны гал ид дүрэлзэж атга гурил, алга дарам цаас ч ховор эрдэнэ байсан тэртээ 1943 онд алс бөглүү Ховдын хязгаарт мэндэлжээ. Хөдөөгийн борог амьдралд дутуу гуцуугийн зовлон бэрхшээлийг амсаж, хар багаасаа “хал үзэж, халуун чулуу долоон” ажлын дөр, амьдралын хаттай болж, хүний амьдралд гагцхүү өөрийн хичээл чармайлт л чухал юм байна гэдгийг эрт ухааран хичээн зүтгэсэн түүний туулсан зам мөр “эзэн хичээл заяа хичээнэ” гэдэг мэргэн үгийн чухамхүү биелэл болсон бөлгөө. Нэг ёсондоо сурсан шиг сурч, ажилласан шиг ажиллаж, хүн өөрөө хувь заяаныхаа эзэн байхын үлгэр жипээ юм.

Сурсан шиг сурч гэхийн учир “круглны отличник” хүний тухай өгүүлж байгаад оршино. Дунд сургуульд, хүн эмнэлгийн техникумд нэвт онц сурч, дараа нь МУИС-ийн математикийн ангийг Д.Сүхбаатарын нэрэмжит цалинтай төгссөн байдаг. Их сургуульд анх ороход нь элсэлтийн шалгалт авсан багш нар “гүрүүшиг (ачигч) хийдэг хүн хамгийн өндөр оноо авчихлаа мөн сонин юм” гэж гайхацгааж байсан гэдэг. 10 төгсөөгүй атлаа хэдийд нь дифференциал, интеграл бодоод сурчихсан юм бүү мэд. Бодвол өөрийн сонирхол, байгалиас заяасан төрөлхийн авьяас дээр нь оролдлого зүтгэлээр сурсан бизээ. Бие даан суралцах арга барилыг эзэмшиж, уйгагүй тэвчээртэй ажиллаж сурсан нь нэг бариад авсан юмныхаа ард нь гарч, үр дүнг нь үзэх хатуужил, чадвар суулгаж, хожим олон зүйлд шинэ зам мөр гаргахад нь гол нөлөө үзүүлсэн байж таарна.

Ажилласан шиг ажиллаж гэхийн учир сургуулиа төгсөөд багшилж, судалгааны ажилд шамдаж эхэлснээс хойших хугацаанд орчин үеийн тооцон бодох математикийн хэд хэдэн чиглэлийг хөгжүүлэхэд дорвитой хувь нэмэр оруулан шинэ шинэ үр дүнгүүд гарган авч, тэдгээр нь дэлхийн томоохон сэтгүүлүүдэд хэвлэгдэн, олон нэртэй эрдэмтэн бүтээлийг нь өндрөөр үнэлэн, иш татахын зэрэгцээ шавь сургуулийг үүсгэн хөгжүүлж, араасаа олон эрдэмтэн шавь дагуулсан хөдөлмөр, зүтгэлийн нь үр дүн өдгөө дэд

эрдэмтэн, доктор, доцент, профессор, академич гээд эрдмийн өндөр зэрэг, цолоор илэрхийлэгдэж байна.

Багш болон захирлын ажлын тухайд нь

40 жил багшлахдаа дээд математик, дифференциал тэгшитгэл, тооцон бодох арга хичээлүүдийг математик, физик, эдийн засаг болон инженерийн ангиудад зааж олон зуун дээд боловсролтой мэргэжилтнүүд бэлтгэн гаргахад өөрийн хувь нэмрийг оруулсан туршлагатай сурган хүмүүжүүлэгч юм. Хичээлдээ бэлтгэх, заах, оюутанд юуг яаж ойлгуулах вэ гэдэгт үнэхээр няхуур хариуцлагатай хандах агаад самбарт цэгцтэй гоё сайхан бичиж, ойлгомжтой тайлбарлана, нэг үгээр багш хүний үлгэр жишээг өөрийн биеэр үзүүлж ирсэнийг хичээл заалгаж байсан олон шавь нар нь батална.

Одоогийн өөр өөр нэртэй олон ангиуд нээгдэхээс өмнө 5 жилийн сургалттай байхад тооцон бодох математик, зарим үед дифференциал тэгшитгэлийн группт хуваагддаг байсан бөгөөд эдгээрт орох нэлээд хэдэн мэргэжлийн курс, хожим нь хэрэглээнй математикийн ангийн сургалтын хөтөлбөрийг боловсруулж, шинэ хичээлүүд зааж, оюутнуудын курсийн болон бакалавр, магистрын дипломын ажлыг тогтмол удирдаж ирсэн билээ.

Төрөлх хэл дээр үндсэн мэргэжлийн сурах бичигтэй болох санаа нэлээд дээрээс яригдсан боловч Жанлав багшийг захирал байх үеэс асуудлыг шийдэх эхлэл тавигдаж, эрмийн зөвлөлөөр хэлэлцэж нэгдсэн стандартаар ном хэвлүүлж эхэлсэн бөгөөд тэрээр "Дифференциал тэгшитгэл", "Тооцон бодох математик"-ийн сурах бичгүүдийг дангаараа болон хамтран зохиосон юм. Мөн оюутнууд хавтсыг нь салж ойчтол "нухсан" гарын авлага, бодлогын хураамжууд ч хэд хэд бий.

МУИС-ийн Математик компьютерийн сургуулийн захирлаар ажиллахдаа зах зээлийн эрэлт хэрэгцээнд нийцүүлэн эдийн засгийн математик загварчлал, мэдээллийн системийн инженерийн ангиудыг 2001 онд, мэдээллийн системийн удирдлагын ангийг 2003 онд шинээр нээн элсэлт авч хичээллүүлсэн бөгөөд эдгээр салбаруудын сургалтын ажлыг мэргэжлийн хувьд хариуцан ажиллах мэдээллийн систем, математик загварчлалын тэнхмүү-

дийг 2003 онд шинээр байгуулсан. Гадаадын нэр хүндтэй их сургуулиудын ижил төрлийн салбаруудын сургалтын төлөвлөгөөний жишигт хүргэх үүднээс өөрийн салбаруудын сургалтын төлөвлөгөө, хичээлийн хөтөлбөрүүдийг шинэчлэн сайжруулах ажлыг хийснээс гадна, хэд хэдэн мэргэжлээр бакалаврын дээд боловсролын улсын стандартыг боловсруулан хүлээлгэн өгсөн.

МКС-ийн ОБДСТ-ийн номын санг Азийн сан, Дэлхийн зөн олон улсын байгууллагууд, ХБНГУ-ын DFG болон хувь хүмүүсээс англи, бусад гадаад хэлээр сүүлийн жилүүдэд хэвлэгдсэн математикийн мэргэжлийн онц шаардлагатай олон номоор баяжуулж одоо бас ч нүүр улайхааргүй фондтой болсон.

2002 онд тэмдэглэсэн МУИС байгуулагдсаны 60 жилийн ойг угтаж өөрөө биечлэн хөөцөлдөж БСПУЯ-ны халдиваар математик статистик загварчлалын лабораторийг шинээр байгуулж, ойн арга хэмжээний хүрээнд МКС-ийн хүндэт доктор цолоор анхны эрдэмтнийг шагнуулж байв. Захирлын хувьд өөрийн ажлын тайлангаа гурван ч удаа хэлэлцүүлэн хамт оныхоо дийлэнхийн эерэг санал авч улиран сонгогдсон нь мэдээж хариуцсан ажлаа сайн хийсний үнэлгээ байв.

МУИС-ийн ректорат болон эрдмийн зөвлөлийн гишүүний хувьд 2000-2005, 2006-2010 онд МУИС-ийг хөгжүүлэх стратеги төлөвлөгөөг боловсруулах комисст идэвх санаачлагатай ажилласнаас гадна сургуулийн интернет, дотоод сүлжээг байгуулах, боловсронгуй болгох комиссийг удаа дараа удирдан санал боловсруулж, тендерийн шалгаруулалтыг пуларга, зарчимчаар хийж гүйцэтгэж ирсэн.

Өөрийн сургуулийн эрдэм шинжилгээ, судалгааны хэтийн чигийг тодорхойлсон тэргүүлэх 10 чиглэлийг гаргаж 2004 онд МУИС-ийн эрдмийн зөвлөлөөр хэлэлцүүлж батлуулсан бөгөөд МКС-ийн материаллаг баазыг бэхжүүлэхэд ихээхэн анхаарч өндөр хүчин чадалтай компьютерийн 3 лабораторийг шинээр байгуулсан юм.

Тэрээр математикийн ухааны нэрт эрдэмтний хувьд авьяастай сурагч, залуусыг математикт дур сонирхолтой болгох, математикийг нийтэд түгээн дэлгэрүүлэх, сурталчлахад ихээхэн

санаачлага гарган идэвхтэй ажиллаж ирсэн билээ. Нэрт математикч, нийгмийн зүтгэлтэн Д.Ишцэрэнгийн нэрэмжит сангийн удирдах зөвлөлийн гишүүний хувьд математикч багш, тэргүүний судлаач оюутныг шалгаруулах ажлыг хариуцан явуулж, улсын математикийн олимпиад, их, дээд сургуулийн оюутнуудын математикийн олимпиадыг зохион байгуулах, өөрийн багийг бэлтгэх ажлыг удирдаж ирэв. Ийнхүү МКС-ийн шууд оролцоотойгоор мэргэжлийн ба мэргэжлийн бус ангийн оюутнуудын математикийн олимпиад, программчлалын олимпиад тогтмол явагдах болж, улмаар манай оюутнууд олон улсын олимпиадад амжилт гаргах боломж бүрдэж эхэлсэн юм.

Түүний өөрийн нь нэрэмжит математикийн олимпиад Ховд аймгийн Цэцэг суманд сүүлийн 6 жил тогтмол зохиогдож, ойр орчмын 10 гаруй сумын сурагч, багш нар оролцож байгаа бөгөөд уг олимпиадыг зохион байгуулахад МКС-ийн багш нар санаачлага, зүтгэлтэй ажиллаж ирсэн. Багш нар уг олимпиадыг зохион явуулахаас гадна аймгийн төвд математикийн багш нарт мэргэжлийн болон олимпиадад сурагчдыг бэлтгэх талаар зөвлөгөө өгдөг нь Ховд аймагт математикийн боловсролыг дээшлүүлэх чухал ач холбогдолтой арга хэмжээ болж байгаа билээ.

Мөн тэрээр 2001, 2006 онд Улаанбаатарт болсон математикийн олон улсын хурлыг зохион байгуулах хорооны орлогч даргаар, 2008, 2009 онд ОХУ-ын Улаан-Үд, Дубна хотод зохиогдсон олон улсын эрдэм шинжилгээний хурлыг зохион байгуулах хорооны гишүүнээр ажилласан ба 2005 онд Юнескогийн ивээл дор явуулсан нээлттэй ба зайн сургалтын олон улсын хурал, программчлалын чиглэлээр Монголд зохиогдсон 2 удаагийн зуны сургуулийг зохион явуулахад идэвхтэй оролцсон.

Эрдмийн ажлын тухайд нь

1978-1981 Новосибирскийн их сургуулийн аспирантурт суралцаж, 1985-1992 онд ОХУ-ын Дубна хот дахь ЦШНИ-д эрдэм шинжилгээний ахлах, тэргүүлэх ажилтнаар томилогдсон нь элдэвт сэтгэл хоёрдохгүйгээр эрдмийн ажилд шамдах, эрдмийн томоохон төвүүдээс ганзага дүүрэн олзтой ирэх аз завшаан болсон бизээ.

Нэг сэдэвт зохиол, монограф 4, эрдэм шинжилгээний өгүүлэл 85-ыг бичиж дотоод, гадаадын мэргэжлийн сэтгүүл, эмхэтгэлд хэвлүүлсэний ихэнх нь орос, англи хэл дээр нийтлэгдсэн. Бүтээлүүд нь Mathematical Reviews, Zentralblatt für Mathematik, Реферативный журнал "Математика" зэрэгт тоймлогдсоноос гадна гадаадын олон эрдэмтэд 200 гаруй удаа ишлэл авсан байна. Энэ нь түүний слайн дөхөлт, шугаман бус тэгшитгэлийг бодох Ньютоны аргын өргөтгөл, хувийн утгын бодлогыг өндөр нарийвчлалтайгаар ойролцоо бодох талаар гаргасан шинэ арга, алгоритм, үр дүнг мэргэжил нэгт эрдэмтэд нь өндрөөр үнэлсний тод илрэл юм. Ганцхан жилээ татахад, Ньютоны аргын тасралтгүй адилсгалын нийлэлтийн мужийг өргөтгөн, итерацийн процессийн нийлэлтийг параметрийн оновчтой сонголтоор удирдах бололцоотойг харуулсан бөгөөд одоогоор хаана ч гэсэн параметрийг сонгох Калиткин-Ермаковын Жаппав-Пузынины гэсэн хоёрхон сонголт парактикт хэрэглэгдэж байгаа билээ.

Өөрийн судалгааны ажлын үр дүнг Бээжин, Берлин, Кемниц, Мадрид, Дубна, Прага, Киев, Бангкок, Улаанбаатарт болсон олон улсын хуралд илтгэж байв. Судалгааны гол үр дүнгүүдийг нь тоймлож тусад нь өгүүлэх учраас энд олон зүйл үл нуршин бүтээлийн нь талаар Оросын эрдэмтдийн өгсөн үнэлэлт, дүгнэлтээс зарим баримт дурдъя:

Москвагийн инженер-физикийн институтийн профессор И.Д.Родионов:

"В диссертации представлены новые результаты по трем основным направлениям: Аппроксимация функции и в частности решений дифференциальных уравнений второго порядка локальными сплайнами повышенной точности, исследование непрерывного аналога метода Ньютона (НАМН), численное исследование решений нелинейных уравнений теоретической физики с помощью разработанных в диссертаций методов.

Автором введен новый тип локально кубических сплайнов, численная реализация которых более проста по сравнению с классическими интерполяционными сплайнами.

Для дифференциальных уравнений II порядка предложены

новые сплайн-схемы повышенной точности. Впервые обоснована модификация ПАМН для решения нелинейных уравнений в банаховом пространстве.

Москвитин Их сургуулийн профессор А.И.Гребенников:

"Работа Т.Жаплова вносит существенный вклад в формирование и развитие нового направления в численном решении нелинейных задач теоретической физики, состоящего в сочетании ПАМН и метода сплайнов. Анализ основных результатов диссертации позволяет сделать вывод о том, что они являются оригинальными, новыми. Их достоверность подтверждена строгими математическими выкладками, теоремами и расчетами на ЭВМ.

Полученные автором теоретические результаты имеют важное значение для вычислительной математики и могут найти применение и в других, кроме рассмотренных, областях физики и техники.

Практическая значимость работы (диссертации) состоит в том, что на основе разработанной теории создано алгоритмическое и программное обеспечение для ЭВМ и численно решен ряд практически важных задач. Получен ряд результатов, имеющих самостоятельный физический интерес"

ЦПНИ-ийн Онолын физикийн лабораторийн эрдэм шинжилгээний тэргүүлэх ажилтан доктор, профессор С.И.Виницкий:

"В целом диссертация является фундаментальным исследованием в области численных методов решения нелинейных задач и их применения в современной физике. В ней развито новое научное направление, связанное с разработкой единого метода численного решения нелинейных краевых и спектральных задач с широким кругом применения в различных областях теоретической физики, в котором достигнуто органическое сочетание метода сплайнов и обобщения ПАМН" гэж үнэлжээ.

Эрдмийн бүтээл туурвихаас гадна шинжлэх ухааны удирдлага, зохион байгуулалтын ажилд оролцож ирсэн. 1998 оноос ШУА-ын физик, математик, химийн салбар бага чуулганы гишүүн, 2001 оноос орлогч даргаар ажиллахдаа шинжлэх ухааны технологийн салгийн пугамаар хэрэгжүүлэх төсөл, сэдэвт ажлыг

сонгон палгаруулах, хэрэгжүүлж дууссан эрдэм шинжилгээний төсөл, сэдэвт ажлын тайланг хэлэлцэх, экспертиз хийх ажлыг гүйцэтгэж байв. Сүүлийн үед энэ талын ачаалал нь ихэд нэмэгдэх болон нь академичийн хувиар пийтмийн өмнө хүлээх үүрэг, хариуцлагатай нь холбоотой буйзаа.

БСПУЯ-ны сайдын болон ШУА-ийн ерөнхийлөгчийн тушаалын дагуу "Монгол Улсын Шинжлэх Ухаан" цувралын 73-р боть (математикийн шинжлэх ухаан), 76-р боть (тооцон бодох математик 2009)-ийг эрхлэн хэвлүүлэх редакцийн зөвлөлийн дарга болон зохиогчоор ажиллаж уг ботийг хэвлүүлсэн нь Монгол Улсад 20-р зуунд математикийн шинжлэх ухаанаар хийсэн судалгаа, чиглэлүүдийн гол үр дүнг тоймлосон одоо, ирээдүйд түүхэн ач холбогдолтой чухал бүтээл болсон билээ.

Сонгуульт ажлаас нь дурдвал, МУИС-ийн Эрдмийн зөвлөлийн гишүүн, ШУА-ийн Бага чуулганы гишүүн, физик-математикийн ухаанаар докторын зэрэг хамгаалуулах зөвлөлийн гишүүн, шинжлэх ухааны докторын зэрэг хамгаалуулах зөвлөлийн дарга, Монголын математикийн сэтгүүл, эрдэм шинжилгээний бичгийн зөвлөлийн гишүүн, МКС-ийн хэрэглээний математик, программ хангамжийн ухаанаар магистр зэрэг хамгаалуулах зөвлөлийн дарга гээд олон сэтэр бий дээ.

Шавь сургууль

Багш маань Монгол Улсад тооцон бодох математикийн шавь сургууль үүсгэн хөгжүүлэхэд үнэмжийн их хувь нэмэр оруулсан нэртэй эрдэмтэн бөгөөд олон чиглэлээр шинэ зам мөр гаргаж, нэг ёсондоо "түүхээ тогорууны" үүрэг гүйцэтгэж явна. Нэгийг Новосибирскт, нөгөөг нь Дубнад "уургалж авсан" слагйн, НАМН гэсэн хос морьдын нь хурд саарах яагаа ч үгүй, улам өнгө зүс ороод хазаар дараад байх бололтой. Аль алийг нь онолын хувьд хөгжүүлэхийн зэрэгцээ хослуулан хэрэглэснээр онолын физикийн шугаман бус бодлогуудыг бодох шинэ чиглэлийг үүсгэн хөгжүүлэхэд үнэтэй хувь нэмэр оруулсан билээ. ЦППИ-д ажиллаж байсан нэг болгар эрдэмтэн үүнийг хийх гэж олон жил оролдоод бараагүй тул Пузынин профессор Жанлав багшид санал болгосноор онолын хувьд төдийгүй, хэрэглээ практикийн үүднээс Дуб-

над хүлээгдэж байсан олон асуудлууд ар араасаа шийдлээ олсон түүхтэй.

"Шавийн эрдэм багшаас" гэдэг. Сайн багш шавь нарынхаа гарыг ганзаганд, хөлийг дөрөөнд хүргэж, цаандын зам мөрийг нь зааж өгдөг ачтай. Одоогоор эрдмийн зэрэг хамгаалсан шавь нар нь гэхэд Д.Гармаа багш хожимдолтой аргументтэй дифференциал тэгшитгэл, миний бие слайн-функц, онолын физикийн шугаман бус бодлогуудыг бодох, О.Чулуунбаатар ньютоны арга, Б.Батгэрэл хувийн утгын бодлого, алдаагүй ялгаварт схем байгуулах, Р.Мижиддорж вейвлет анализын чиглэлээр дагаж ажилласан юм. Мөн магистр шавь нар нь болох Л.Оюунцэцэг, А.Энхбаяр, В.Өлзийбаяр, Л.Батаа, А.Энхболор, Б.Оюунтуяа, Б.Сэлмаа гээд олон залуус багшийнхаа эрдмээс "өөр өөрийн шанагаар хутгаж авсаан". Эд маань тус бүртээ ярих дурсах юмтай байж таарна. Өмнөөс нь би юу хэлэхэв. Харин өөрийн мэдэх ганц нэг зүйлээ бичих минь.

Намайг 3-р ангид байхад шиг санаана, Өвгөн багш тооцонгийн грушгийн бид хэдэд төгсгөлөг элементийн арга, слайн-функцийн арга гээд шинэ юмнууд байна, та нар ном сэтгүүл олж унш, курсийн ажил бич гэж байна. Өөрөө ч ганц нэг ном өгсөн байх. Учрыг нь сайн олохгүй мунгинаж байтал ангүй Жанлав багш аспирантур төгсч ирээд шууд бидэнд спецкурс уншиж, бас ч жаахан гадарлахтай болж заавар зөвлөгөө авч курс, дипломын ажил бичиж, локаль куб слайн, квазиинтерполяцийн слайны дөхөлтийн үнэлгээ хийх, сайжруулах гэх мэт бага бага үр дүнгүүд гаргаж авсан нь дараа диссертацийн нэг бүлэг болсон билээ. Надтай хамт төгссөн олон мундаг оюутнаас арай эрт бага бага юм хийсэн маань хувь заяаны ивээлээр сайн багштай таарсны л аз юм. Төгсөөд хэдэн жил хамт ажиллаж байтал 1985 онд багш гэрээрээ Дубна явав. Хойно байхдаа тогтмол захиа бичнэ. Харин би хийж гавьсан юмгүй шиг бол халуун санагдаад хариу бичихдээ хойрго байсан байж магадгүй. 90-ээд оны эхээр надад хэдэн удаа нэлээд хугацаагаар ЦШНИ-д ажиллах томилолт олдож хичээл, олон нийтийн ажил гэж цаг барахгүй, багшийн дэргэд овоо туйлбартай ном үзэх боломж гарч, хажуугаас нь чирэгдэж явж

бага сага юм ухаарахтай болсон билээ.

Багш компьютер гээчийн үндсэндээ хараагүй төгссөн атлаа хожим нь алгоритм хэлийг бие даан сураад 1000 гаруй мөр программ бичиж, олон том массив шаарддаг матрицын элемент бодоход санах ойг өргөтгөж ашиглах гэх мэт нарийн пирийн юм ярьж байхыг нь хараад үнэхээр гайхаж байсан. Дараа санахад тулгарсан бэрхшээл бүхнийг өөрийн хүчээр даван түүлах чадварыг хар багаасаа сурсан юм билээ. Дубнад байхдаа Яа эгчийн хоолыг их буудсан даа. Яагаад ч юм, бага байхад миний дунд сургуулийн багш гавьяат Б.Банзрагч багшийн эхнэр, хожим Яа эгч намайг дандаа л хоол ундаар шахаж, ирэхгүй удвал гомдох маягтай, өөрийн хүү шигээ л хайрладаг нь "муу хүний заяа завагт" гэгчээр бас нэг хувь тохиол буйзаа. Яа эгч маань хүний өөрийн гэлтгүй бусдын төлөө л гэж явдаг сайхан сэтгэлтэй, хань, үр хүүхдийнхээ төлөө хамаг бүхнээ зориулсан буянтан, одоо ач зээгээ тойруулаад налайж сууна. Саяхан бас гучаа үзэж "өндөр" эмээ болсон гэж байгаа

Шавь сургууль хөгжин урагшилж байхын гол үндэс болсон семинарыг багш маань олон жил хөтлөн явуулах, тэргүүлэх эрдэмтний хувьд шавь нарын хамт "Орчин үеийн тооцон бодох математик, хэрэглээ" сэдэвт эрдэм шинжилгээний төсөлт ажил (2000-2003, 2003-2005, 2006-2008), "Виртуаль сургалтын систем ба хэрэглээний математик" (2003) төслийн удирдагчаар ажилласны дээр ОХУ-ын Дубна хот дахь ЦПНИ-д хэрэгжиж байгаа "Компьютерная физика для теоретических и экспериментальных исследований" 09-6-1041-2002, 2004, "Математическая поддержка экспериментальных и теоретических исследований проводимых ОИЯИ" (2005-2008) олон улсын төслүүдэд Монголын талаас оролцогчоор ажиллаж байна.

МУИС-ийн тэргүүлэх профессорын хувьд орчин үеийн хэрэглээний математикийн шинэхэн чиглэл болох "Вейвлет анализ" эрдэм шинжилгээний семинарыг 2004-2008 онуудад удирдан явуулж залуу эрдэмтэн, магистр, оюутнуудад судалгааны арга барил, чиглэл олгох ажлыг идэвхтэй хийж ирлээ.

"Их мөрөн дөлгөөн, эрдэмтэй хүн даруу" гэж үг бий. Даруу

байх нь мэдээж сайн хэрэг боловч заримдаа "дараа" болох бөлгөө. Би ингэсэн, тэгсэн гэж огт ярихгүй, сонин хэвлэлээр ч гарах дургүй, чимээгүйхэн ажлаа хийгээд явдаг болохоор хажууд нь реклам сайтай хүмүүс илүү харагдаад байдаг талтай. Гэхдээ энэ нь өөрийн нь гэхээсээ бидний муугийнх юм. Үүнийг хэлэхийн учир, академийн гишүүнд нэр дэвшиж байхад нь эхлээд огт мэдэхгүй байсан олон академич "танай багш их том эрдэмтэн юм байна одоо л таньж мэдлээ" гэгцгээж байснаас гадна өнөө цагт хүний хөдөлмөрийг зүй ёсоор үнэлэхэд бас бус хөндлөнгийн учир шалтгаан нөлөөтэйг хэн хүнгүй л ойлгож байгаа буйзаа.

Төгсгөлийн оронд дайх үг

Саяхандаа, нэг удаа Н.Ёндон багш бид хоёртой ярьж суухдаа "Золиг чинь үхэх нь ойртож байгаа юм болов уу, толгой ажиллаж байна гэж жигтэйхэн гэж билээ". Ингэж хэлэхэд нь насаараа ном шагайсан лам нарын дэргэд өсч, үзсэн хичээлээ мартаж нь тусгүй хэрэг гэж зэмлүүлж явснаа санаж ер нь хүн сэтгэл санаа хиргүй тунгалаг, бисэ зөв авч явж оюуны дасгал олон жил хийх аваас нас ахивч оюун ухаан нь хөгсрөхгүйгээр үл барам бүр ч саруулхан болдог юм байна гэдэгт улам итгэх болсон юм. Ер нь багш маань тооцон бодох математикийн чиглэлээр Монголд судалж, суралцаж эхэлсэн дийлэнх асуудлын анхны панг татсан бөгөөд хойнид ч шинийг эрэлхийлэх, хийж бүтээх хүсэл, эрмэлзэл дүүрэн байгаа гэдэгт итгэнэ.

МГУ-ийн мехматийн нэг хананд "дерево Лузина" гэж байх. Энэ нь 20-р зууны эхэн үед амьдарч байсан Николай Николаевич Лузин хэмээх алдартай математикчийн шавь, шавийн шавь нарыг П.С.Александров, Н.А.Архангельский гэж эхлээд олон нэртэй эрдэмтдийн нэрийг салбарлуулан бичсэн, үнэхээр олон салаа мод шиг зураг л даа. Үүнийг санахын учир манайд ч гэсэн хожмийн өдөр "академич Жанлавын мод" гээд олон салаа мөчиртэй граф МКС-ийн хананд зурагдаж, хойчийн залуус бахархан харж байхад болохгүй нь юу билээ гэж бодсоных.

Жанлав хэмээх төвд үг монголоор бол өглөгийн давалгаа буюу өөрийн эрдмийг дамжуулна гэсэн санааг илэрхийлэх болой. Үнэхээр багш маань үргэлжид өөрийн эрдмийг бусдад түгээн

дэлгэрүүлж ирсэн бөгөөд эцгийн нь өгсөн дуудах нэр ирээдүйн үйл хэрэг, зам мөрийг нь давхар заасан ажээ.

Эрхэм багштап танд эрүүл энх, урт удаан насалж, эрдэм мэдлэгийн яндангүй их далайгаас "тана, сувд олныг шүүрдэж", шавь нартаа ном эрдмийн зүг чигийг нь заан гэрэл гэгээ түгээж, улам гялалзаж явахын ерөөл дэвшүүлж байна.

Р.Ринчинбазар
2010.04.07.

Цэцгийн Жанлав

Жанлав багш гэхээр олон ястны өлгий нутаг, Ховд аймгийн Цэцэг сум, Цэцгийн дугуйлангийн удирдагч чин зоригт Ард Аюуш санаанд ордог.

Багш шулуун шударга, хаана ч хэний ч өмнө санасан бодсоноо шуудхан хэлчихдэг зориг зүрхтэй хүн гэж боддог. Энэ нь МУИС-ийн эрдмийн зөвлөлийн хурал, ректораторын зөвлөгөөн дээр Жанлав багшийн хэлж ярьж байгаагаас нь илт ажиглагдаж байдаг юм. Тийм ч учраас Цэцгийн Жанлав гэж юуны өмнө орж ирээд байдаг болов уу гэж бодогддог.

Тоочдыг удирдсан Жанлав багшийн "дугуйлан" Монголдоо төдийгүй дэлхийд танигдсан тооцоолох математикийн дэг сургууль болтлоо өргөжин тэлж, олон түмэнд үр шимээ хүртээсээр явна. Цэцгийн Жанлав өнөөдөр дэлхийн Жанлав болжээ.

Багшийн төрсөн нутаг мөн ч сайхан газар даа. Сумын төвийн араар дуунд мөнхөрсөн Цэцэг нуурын торгон долгио мяралзан, нуурын зэгс шугуй нь зөөлөн салхинд ээжийн бүүвэй шиг уянгалаад ирж буцах хүний сэтгэлийг ховсдон чангаана. Баруун хаяагаар нь сунаих Мянган угалзтын нуруу баруун монголын газар хороо, хүн зонхих нь мянга мянган жилийн үүх түүхийг хүүрнэх мэт алсуурхан дүнхийж, зүүн хөвөөгөөр нь төрийн тахилгат Сутай хайрхны мөнх цас мөсөн оргил нь гялтганаг гялалзаж хол ойрын айлчин гийчний сэтгэлийг алмайруулна. Ийм үлгэрийн гэмээр газар нутагт төрж өссөн хүн математикийн уран сэтгэмжтэй ч байлгүй яахав дээ гэж бодогддог юмаа.

Жанлав академич газар газрын физикчидтэй маш үр бүтээлтэй хамтран ажилласан Монголын анхны математикч хүн гэж бо-

догддог. Тэрээр ОХУ-ын Дубна хот дахь олон улсын Цөмийн судалгааны лабораторид ажиллахдаа тооцон бодох математикийн Ньютоны аргын тасралтгүй адилсгал хэмээх аргыг хөгжүүлж урд өмнө нь дийлдэхгүй байсан физикийн хэд хэдэн том бодлогыг шийдвэрлэх аргыг сэдэж олсон байдаг.

Ийм амжидтанд хүрэхэд математик толгойгоос гадна эмч гар /Жаплав багш маань уул нь хүний эмч мэргэжилтэй хүн шүү дээ/ чухал үүрэг гүйцэтгэсэн нь харагдаж байдаг юм. Стандарт бус хэлбэртэй, физик агуулгатай бодлогыг математикийн захын бодлогод эвтэйхэн шилжүүлж, илбэн тохинуулахад эв дүйтэй, ур чадвартай гар ямар их хэрэгтэй болохыг Жаплав багш, түүний шавь нартай хамтран ажилласан жилүүдэд би бээр зүрх сэтгэлээсээ мэдэрч авсандаа баярлаж, бахархаж явдаг нэгэн.

1982, 83 он шиг байна. Тэр зун, улсын баяр наадмаас арай өмнөхөн юмдаг, Жаплав багш Дубнагаас эх орондоо амрахаар ирсэн үедээ гавьяат О.Лхагва багшийн үүсгэн байгуулсан онолын атомын физикийн галынханд лекц уншсан юмдаг. Энэ лекцээс хоёр сэтгэгдэл санаанд манг тод үлдсэний нэг нь анх удаа математикч хүн физикийн бодлого томъёолж тэр нь бидэнд их ойлгомжтой сайхан санагдаж байсан явдал, нөгөө нь математикч хүн асуудалд ямар эмх цэгцтэй яс ханддагийг харсан явдал хоёр юм. Тэхэд л миний хувьд анх удаа онолын физикч, математикч хоёр бие биенээ ойлгож, хамтран ажиллаж болох юм байна гэсэн итгэл үнэмшил, ёстой нөгөө хонгилын үзүүрт гэрэл харагдана гэдэг шиг л юм бодогдож ирээдүйд найдвар төрж байсан билээ. Энэ итгэл найдвар талаар өнгөрөөгүй гэдгийг дараа дараагийн он жилүүд харуулж өгсөн гэж бодож байна.

Одоо МУИС-ийн тэргүүн дэд захиралаар ажиллаж байгаа Р.Ринчинбазар профессорын эрдмийн ажлыг Жаплав багштай миний бие хамтран удирдсан билээ. Коперник, Лейбницын үеэс эхлээд анх томъёологдож дэлхийн аль шилдэг математикчид (Дугаа Ньютон, Лейбницээс эхлээд ОХУ-ын Л.Д.Фаддеев, АНУ-ын Ж.Адамар, Францын Пуанкаре, Японы Сакура, Германы Борн-Оштенгеймер зэрэг) хүч чадлаа сорьсон, 300 шахам жилийн түүхтэй 3 биетийн бодлого гэж байдаг. Энэ алдартай бодлогын

тухайн тохиолдол болох, бэхлэгдсэн хоёр төв дээр гуравдахь бөөм хөдлөх бодлогыг Ринчинбазар тоон аргаар судалсан юм. Ринчинбазарын хийсэн тооцоо тухайн үедээ хамгийн өндөр нарийвчлалтай байсан учраас бусад судлаачдын гаргасан үр дүнг хянах эталон болж байсан төдийгүй мезоатом, мезомолекулд явагдах процессийг илэрхийлэхэд чухал түлхэц болсон юм.

Хоёрт, миний гарын шавь математикч, физикч Очбадрахын Чулуунбаатарыг нэрлэмээр байна. Энэ авъяаслаг залууг Т.Жанлав багшийн гараас цучил "гуйж" физикт урвуулсан буруутан нь би. Би түүний бакалаварын болоод магистрын дишломын ажлыг удирдсан гэж хирдээ жаахан онгироодохоё. Чулуунбаатар маань МУИС-д багшаар үлдэж ганц хоёр жил ажиллаал Олон улсын цөмийн шинжилгээний нэгдсэн институтийн урилга өвөртлөн, эрдэм хийхээр эх орны хилийн дээс алхсан юм. Тэрээр Жанлав, Ринчинбазар багш нарынхаа танил, газар газрын эрдэмтэдтэй гар нийлүүлэн ажиллаж Олон улсын нэртэй сэтгүүлд хэд хэдэн чамбай ажил хэвлүүлж, Монгол хүний чадварыг дэлхийд харуулсан залуучуудын эгнээнд хүч түрэн орж ирсэн билээ.

Чулуунбаатар ОХУ-д дэд докторын зэргээ, дараа нь үргэлжлүүлэн шинжлэх ухааны докторын зэргээ амжилттай хамгаалсан юм. О.Чулуунбаатар бид хоёрын хамтран 1998 онд хэвлүүлсэн хоёр төв дээр хөдөлж буй электроны бодлогын өвөрмөц шийдлийг Орос, Франц, Английн эрдэмтэд иш татан өөрсдийнхөө ажилд цууд тэр хэлбэрээр нь авч ашигласан байдаг. Эрхэм уншигч та намайг өөрийгөө рекламдаж байна гэж бүү зэмлээрээ. Өөрийгөө болон тооцон бодох математикийг Монголд хэдэн арав дахин үржүүлсэн хүний тухай бичнэ гэдэг бол хүссэн хүсээгүй бусад салаа мөчир, шавь нарынх нь хамтран зүтгэгчдийн талаар аяндаа бичихэд хүргэдэг юм байна. Тэхдээ энэ бүхний ард Жанлав гэдэг бурхан байгаагүй бол өчүүхэн би бээр юун энэ математикч залуучуудтай холбогдох бас хамтран ажиллах байхав дээ. Ийм л хаялга түрлэг, заяа буянтай хүн дэ Жанлав математикч маань. Та бол яах аргагүй Монголд тооцон бодох математикийг хөгжүүлсэн анхдагч, энэ чиглэлийн дэг сургууль үүсгэн байгуулагч, физикчдийн сайн найз мөн билээ.

Танд урт удаан насалж, улам ихийг бүтээж, урын сангаа баяжуулж явахыг хүсэн ерөөе.

*Физик-математикийн ухааны доктор /Sc.D/
Шинжлэх ухааны технологийн үндэсний зөвлөлийн
нарийн бичгийн дарга, профессор Х.Цоохцү*

Багшийн тухай

Бага сургуулиас эхлээд эрдмийн зэрэг хамгаалах хүртэл багагүй хугацаанд суралцахдаа олон сайхан багш нараар хичээл заалгаж явсандаа өөрийгөө азтай гэж тооцохоос аргагүй. Энэ дундаас их сургуулийн бакалавр, магистрийн дипломын ажлыг удирдан, эрдмийн замд хөтлөн оруулж, ажил амьдралыг минь дэмжиж ирсэн багшийнхаа тухай бичнэ гэдэг миний хувьд нэр төрийн хэрэг юм. Их сургуулийн 3-р курсэд ороод манай ангийнхан алгебр, анализ, магадлалын онол, тооцон бодох математикийн чиглэлээр хуваагдаж, мэргэнийхэд ямар ч эргэлзээгүйгээр тооцон бодох математикийг сонгож байсан. Үүнд багшийн маань хичээлээ ойлгомжтой, эмх цэгцтэй заадаг нь их нөлөөлсөн болов уу. Төгсөх курсэд ороод дипломын ажил бичих болоход Жанлав багшаас сэдэв сонгох бодолтой байсан боловч эмээгээд уулзаж чаддаггүй. Тэгээд ааваараа дамжуулан анх багш, шавь бололцож байсан минь саяхны юм шиг санагдаж байна.

Түүнээс хойш багш маань МКС-д багшаар орохоос эхлээд гадаадад эрдмийн зэрэг хамгаалж, тэнхимийн эрхлэгч, сургуулийн захирал хүртэл ажиллахад бүх талаар дэмжиж, үнэтэй сургааль үгээ харамгүй хайрласаар явна.

2003 оны зун Германд судалгааны томилолтоор очих үеэр нь илүү ойр байж, дэлгүүрт ачигч хүртэл хийж байгаад их сургуульд орж байсан, эхнэр, хүүхдүүдээ орхиод Новосибирск руу аспирантурт явж байсан зэрэг дурсамжуудыг нь сонсож байсан бөгөөд сонирхолтой түүхтэйгээр эрдмийн оргил өөд мацаж, уйгагүй хөдөлмөр, зориг тэвчээрийнхээ үр шимээр математикийн шинжлэх ухааны доктор, профессор, академич гэдэг нэр хүндтэй цол зэрэгт хүрсэнд нь бахархах сэтгэл өөрийн эрхгүй төрж явдаг юм.

Их сургуулийн багш, эрдэмтэн хүний хийж бүтээснийг үнэлэхэд зөвхөн өөрийнх нь хувийн судалгаа, сургалтаас гадна шавь төрүүлэх, төсөл удирдах болон судалгааны ажлын тасралтгүй байдал жинтэй байр суурийг эзэлдэг бөгөөд энэ бүхнийг хослуулах нь амаргүй ажил билээ. Жанлав багшийн хувьд энэ бүхнийг хослуулж яваа нь залуу үеийн бидэнд үлгэр дуурайлал болдог. Ингээд багшдаа эрүүл энх байж, цаашид олон сайхан бүтээл туурвиж, эрдмийн олз омгоор дүүрэн байхын өлзийтэй ерөөлийг хамт олон болон гэр бүлийнхээ өмнөөс өргөн дэвшүүлсе.

*МУИС-ийн МКС-ийн захирал,
д-р. Л.Алтангэрэл*

Академич Т.Жанлавын нэрэмжит "Sensation" математикийн олимпиадын тухайд

Энэ олимпиад 2004 оноос Ховд аймгийн Цэцэг сумын Ард Люушийн нэрэмжит дунд сургууль дээр жил бүр зохион явагдаж байгаа билээ. Уг олимпиадад Ховд аймгийн сумууд төдийгүй Говь-Алтай аймгийн ойр орших сумдын сурагч, багш нар оролцдог нь бүс нутгийн сурагчдын математик сэтгэлгээг хөгжүүлэх, багш нарын заах арга, ур чадвар, мэргэжлийг дээшлүүлэхэд чухал ач холбогдолтой арга хэмжээ болсоор байна.

Олимпиадад 2-11-р ангийн сурагчдын болон бага, дунд сургуулийн багш нарын тэмцээн 2 өдөр явагдаж дүнгээ гаргадаг. Дүнг нэгтгэн харуулбал:

Байр	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Оролцсон сум сургууль	13 сум	8 сум	8 сум	15 сум	15 сум	11 сум
I байр	Цэцэг	Цэцэг	Цэцэг	Прогресс	Прогресс	Прогресс
II байр	Мөст	Чандмань	Чандмань	I-р II жил	Цэцэг	Цэцэг
III байр	Чандмань	Мөст	Зэрэг	Цэцэг	Мөст	Мөст

- Энэхүү олимпиадын мэргэжлийн өндөр түвшинд зохион явуулахад МУИС-ийн Математик, компьютерийн сургуу-

лийн эрдэмтэн багш нар гардан оролцож ирсэн юм. Тухайлбал, 2004, 2005, 2007 онд доктор Б.Батцэнгэл, 2006, 2008 онд доктор В.Адъяасүрэн, 2009 онд магистр Б.Баяржаргал нар олимпиадын зохион байгуулсны гадна Ховд аймгийн төвд математикийн багш нарын семинарыг удирдан явуулсан юм.

- Түүнчлэн олимпиадад амжилттай оролцож тэргүүн байрт шалгарсан 2 сурагчийг МУИС-ийн МКС-д элсэн суралцах эрхийн бичгээр шагнаан суралцуулдаг уламжлал тогтсон юм.
- Олимпиадад бэлтгэгчид тусламж болгон тус олимпиадын материалыг 2 удаа бэлтгэн багш сурагчдын хүртээл болгосон байна. Үүнд: 1. Б.Батцэнгэл "Sensation" математикийн олимпиад (2004-2006), УБ. 2007 2. М.Баярт, Ж.Бөхчулуун "Sensation" математикийн олимпиад (2004-2008), Цэцэг нуур, 2009 2010 оны Улсын математикийн олимпиадын зохиох ажлын хүрээнд Ховд аймгийн хүрээнд хийсэн ажил.
- Улсын математикийн XLVI олимпиадыг Академич Т.Жанлавын нэрэмжит болгон явуулахаар шийдвэрлэсэн Олимпиадын хорооны саналыг Ховдчууд талархалтайгаар хүлээн авч, Ховд аймгийн бүх сургуулиудаар олимпиадын тугийг хичээлийн туршид аялуулж, сургууль бүр математикийг сурталчлах ажлыг зохион байгуулав.
- Ховд аймагт доктор В.Адъяасүрэн, МУ-ын гавъяат багш Г.Дашдондог, магистр Д.Ганзориг, магистрант Г.Батзаяа нар дунд ангийн математикийн багш нарыг, бага ангийн багш нарыг, VIII-XI ангийн сурагчдыг хамруулсан математикийн сургалт, семинарыг 7 хоног зохион байгуулж явуулсан ба VIII-XI ангийн сурагчдын математикийн олимпиадыг явуулав.
- Академич Т.Жанлавын нэрэмжит "Sensation" математикийн олимпиад 2010 оны 3-р сарын 13, 14-ны өдрүүдэд Ховд

аймгийн Цэцэг сумын Ард Аюушийн нэрэмжит дунд сургууль дээр МУБИС-ийн багш Н.Аргилсан зохион байгуулж явуулав.

*МУИС-ийн МКС-ийн Математик
анализын тэнхимийн эрхлэгч
доктор, профессор В.Адьяасцрэн*

4 Монголын математикийн XLVI олимпиад

4.1 ММО-46, VII ангийн III даваа

Н.Аргилсан (МУБИС)

VII-A1. (Н.Аргилсан) Мянга есөн зуун хэдэн оны нэг өдөр Бат өөрийн төрсөн өдрөөрөө төрсөн оных нь цифрүүдийн нийлбэр өөрийнх нь настай яг таарч байгааг анзаарав. Мөн түүний ах Болд яг энэ өдөр төрсөн бөгөөд нас нь Батынхтай адил зүй тогтолтой байгааг мэджээ. Хэрэв тэд 99-ээс бага настай бол Болд Батаас хэдэн насаар ах вэ?

VII-A2. (Ц.Нямдаваа) Яг зургаан натурал тоон хуваагчтай ба тэдгээрийн нийлбэр 2010 байх бүх натурал n тоог ол.

VII-A3. (Б.Сандагдорж) ABC гурвалжны AA_1 - нь медиал бөгөөд $AB < AC$ бол $\angle BAA_1 > \angle A_1AC$ гэж харуул.

VII-B1 (Ц.Дайвий-Од) Ангийн салаа тус бүр 5, 7, 9 сурагчтай. Салаадын хооронд зохиогдсон тэмцээнд түрүүлсэн салааг тортоор урамшуулах байв. Гэхдээ тортыг тэмцээнээс өмнө хэсгүүдэд хувааж (хэсгүүд нь хоорондоо заавал тэнцүү байх албагүй) тавих хэрэгтэй ба аль ч салааг түрүүлэхэд тортоо дахин хуваалгүйгээр тэр салааны хүүхдүүдэд яг тэнцүү хувааж өгч болохоор хуваасан байх хэрэгтэй болов. Тортыг хамгийн цөөндөө хэдэн хэсэгт хуваах боломжтой вэ?

VII-B2. (Н.Аргилсан) $n^4 - 4n^3 + 22n^2 - 36n + 18$ нь натурал тооны квадрат болох бүх эерэг бүхэл n тоонуудыг ол.

VII-B3. (Э.Азжаргал, Д.Тогмагнай) $ABC (\angle C = 90^\circ)$ тэгш өнцөгт гурвалжны AA_1 ба BB_1 биссектрисүүд I цэгт огтлолцоно. O -нь A_1B_1 -хэрчмийн дундаж цэг бол $OI \perp AB$ болохыг батал.

VII-A1. (Н.Аргилсан) Тухайн оныг A гэвэл $1900 \leq A < 2000$ болно. Батын төрсөн он нь $\overline{18ab}$ эсвэл $\overline{19ab}$ байна. Тэгвэл

$$A = \overline{18ab} + 1 + 8 + a + b = 1809 + 11a + 2b$$

ЭСВЭЛ

$$A = \overline{19ab} + 1 + 9 + a + b = 1910 + 11a + 2b$$

байна. Болдын хувьд $\overline{18cd}$ эсвэл $\overline{19cd}$ онд төрсөн байгаа.
($\overline{18cd}$ эсвэл $\overline{19cd}$).

а) Тэд ижил зуунд төрсөн гэвэл $\Theta.x$ хоёул $\overline{18cd}$, $\overline{19cd}$ онд төрсөн бол $1809 + 11a + 2b = 1809 + 11c + 2d$ болно гэдгээс $11(a - c) = 2(d - b)$ болно. Тэд чацуу биш тул $|a - c| \geq 11$ байх ёстой болж гарна. Гэвч a, c -нь цифр учир боломжгүй. Хэрэв хоёул $\overline{19ab}$, $\overline{19cd}$ онд төрсөн гэвэл мөн өмнөхтэй адил боломжгүй.

б) Иймд хоёр өөр зуунд төрсөн байх ёстой. $\Theta.x$

$$1809 + 11c + 2d = 1910 + 11a + 2b \\ \Rightarrow 11(c - a) + 2(d - b) = 101$$

буюу $c - a = 9$ $d - b = 1$ байхаас өөр боломжгүй. Иймд

$$\overline{19ab} - \overline{18cd} = 100 + 10(a - c) + (b - d) = 100 - 10 \cdot 9 - 1 = 9$$

насны зөрүүтэй байна.

VII-A2. (Ц.Нямдаваа) n тоо яг 6 хуваагчтай гэдгээс $n = p^5$ эсвэл $n = p^2 \cdot q$ (p, q -нь анхны тоо) хэлбэртэй байна.

а) $n = p^5$ байг. Тэгвэл

$$1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = 2010$$

болно. $p = 2, p = 3$ үед 2010-аас бага, $p = 5$ үед 2010-аас их тоо гарна. Иймд $n = p^5$ байх боломжгүй.

б) $n = p^2 \cdot q$ байг. Тэгвэл хуваагчуудын нийлбэр нь

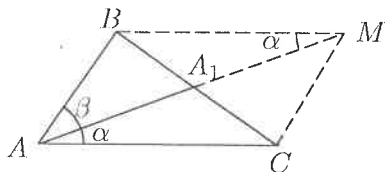
$$1 + p + q + pq + p^2 + p^2q = 2010$$

буюу $(1 + q)(1 + p + p^2) = 2010$ болно. $1 + p + p^2$ -нь сондгой тоо тул энэ нь 2010-ын сондгой хуваагч байна. Иймд

$$1 + p + p^2 \in \{3, 15, 201, 335, 5, 67\} \\ \Rightarrow p + p^2 \in \{2, 4, 14, 66, 200, 334\}$$

гэвч $p + p^2 = p(1 + p)$ буюу 2, 4, 14, 66, 200, 334 тоонуудын аль нь ч дэс дараалсан 2 тооны үржвэр биш. Иймд $n = p^2 \cdot q$ байх тоо олдохгүй тул манай бодлого шийдгүй байна.

VII-A3. (Б.Сандагдорж)



A -цэгийг A_1 -цэгийн хувьд төвийн тэгш хэмтэй хувиргаж M -цэгийг байгуулан M -г B, C цэгүүдтэй холбоё.

$BA_1 = A_1C$ тул $\triangle ABA_1 = \triangle MCA_1$ ба $\triangle AA_1C = \triangle MA_1B$ болно. Эндээс $AC = BM$ ба $AB = CM$ байна. Мөн $\angle A_1AC = \angle A_1MB$ болно.

Эдгээр өнцгийг α гэе. $\angle BAA_1 = \beta$ -гэе. Тэгвэл гурвалжны хамгийн их талын эсрэг орших өнцөг нь хамгийн их байдаг тул ABM гурвалжны хувьд $AB < AC = BM \Rightarrow AB < BM$ болно. Эндээс $\alpha < \beta$ буюу $\angle BAA_1 > \angle A_1AC$ болох нь батлагдлаа.

VII-B1. (Н.Аргилсан) $A = n^4 - 4n^3 + 22n^2 - 36n + 18 = (n^2 - 2n)^2 + 18(n^2 - 2n) + 18$ гэсэн хувиргая. $n^2 - 2n = x$ гэвэл $A = x^2 + 18x + 18 = y^2$ болно ($y \in \mathbb{N}$). Эндээс $(x + 9)^2 - 63 = y^2$ гэсэн тэгшитгэл үүснэ.

$$(x + 9)^2 - y^2 = 63 \Rightarrow$$

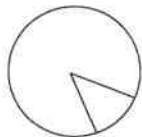
$$\Rightarrow (x + 9 - y)(x + 9 + y) = 1 \cdot 63 = 3 \cdot 21 = 7 \cdot 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 9 - y = 1 \\ x + 9 + y = 63 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 9 - y = 3 \\ x + 9 + y = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 9 - y = 7 \\ x + 9 + y = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 9 - y = 63 \\ x + 9 + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 9 - y = 21 \\ x + 9 + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 9 - y = 9 \\ x + 9 + y = 7 \end{cases}$$

гэсэн системүүд үүсэх бөгөөд эдгээрийг бодвол $(x, y) = (23; 31)$ $(x, y) = (3; 9)$ $(x, y) = (-1; 1)$ гэсэн шийдүүд гарч ирнэ. Одоо $n^2 - 2n = x$ болохыг санавал $n^2 - 2n = 23$ нь шийдгүй, $n^2 - 2n = 3 \Rightarrow n = 3$ ба $n^2 - 2n = -1 \Rightarrow n = 1$ болно. Иймд $n = 1$ $n = 3$ гэсэн хоёр шийдтэй.

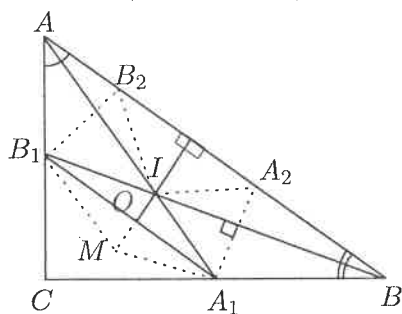
VII-B2.(Н.Дайвий-Од) Тортоо дугуй хэлбэртэй гэж үзье.



байдлаар хуваалт хийсэн гээ. Эхлээд нэг дугуйг 5 тэнцүү, дараа нь өөр нэг дугуйг 9 тэнцүү сегментээр хуваая.

Дараа нь тэдгээрийг давхцуулан тавихдаа нэг нэг радиус давхцаж байхаар байрлуулъя. Энэ тохиолдолд $5 + 7 + 9 - 2 = 19$ хэсэгт хуваагдаж байгаа бөгөөд аль ч салаа түрүүлэхэд бүгдэд нь тэнцүү хувь оногдохоор хувааж өгч болно гэдэг нь тодорхой. Одоо энэ хуваалт нь хамгийн цөөн гэдгийг харуулъя. Юуны өмнө тортыг хуваасан аливаа хуваалт нь тэрхүү хуваалтын хэсгүүдийн талбайтай секторууд бүхий радиусан хуваалттай ижил юм. Өөрөөр хэлбэл бодолтыг зөвхөн радиусуудаар секторуудад хуваасан хуваалт дээр гүйцэтгэхэд хангалттай гэсэн үг юм. Тэгвэл 5 хүүхдэд тэнцүү хувааж өгч чаддаг байхын тулд хамгийн багадаа 5 ялгаатай радиус (зүсэлт), 7 хүүхдэд тэнцүү хувааж өгч чаддаг байхын тулд мөн 7 ялгаатай радиус, үүнтэй адил 9 ялгаатай радиус зайлшгүй татагдсан байх шаардлагатай. 5, 7, 9 нь бүгд харилцан анхны учир тэдгээрээс хамгийн олондоо 3 радиус л давхцуулж чадна. Иймд $5 + 7 + 9 - 2 = 19$ ялгаатай радиус зайлшгүй шаардлагатай. Энэ нь хамгийн цөөн хуваалт юм.

VII-B3.(Э.Азжаргал)



B_1 -цэгийг AA_1 биссектриссийн хувьд тэгш хэмтэй хувиргавал AB гипотенуз дээр B_2 цэг гарна. Үүнтэй адил A_1 цэгийн BB_1 биссектриссийн хувьд тэгш хэмтэй хувиргавал AB гипотенуз дээр A_2 цэг гарна.

$\angle B_1IA = \angle IAB + \angle IBA = \frac{1}{2}(\angle CAB + \angle CBA) = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$ ба $\angle B_2IA = \angle B_1IA = 45^\circ$. Эндээс $B_1I \perp B_2I$ болно. Үүнтэй адил $A_1I = A_2I$ болно. Одоо B_1IA_1M нь параллелограмм байхаар M цэгийг байгуулъя. $\triangle MA_1I = \triangle B_2IA_2$ байна. Учир нь

$MA_1 = IB_1 = IB_2$, $A_1I = IA_2$ ба $\angle IA_1M = \angle IA_1B_1 + \angle IB_1A_1 = 180^\circ - \angle B_1IA_1 = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ = \angle B_2IA_1$ болно. $MA_1 \perp IB_2$ ба $IA_1 \perp A_2I \Rightarrow IM \perp A_2B_2 \Rightarrow OI \perp AB$ ▲

4.2 ММО-46, VIII ангийн III даваа

VIII-A1. (Б.Сандагдорж) a, b, c нь гурвалжны талын уртууд бол

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 < 4(ab + bc + ca)$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

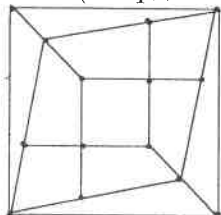
VIII-A2. (Мөнхнасан) $P(n) = n^4 + 2n^3 - n^2 + 2n + 1$ олон гишүүнт өгөгдөв. $|P(n)|$ анхны тоо байх бүх бүхэл n -ийг ол.

VIII-A3. (Э.Азжаргал) Зөв $2n$ өнцөгтийн бүх диагоналуудыг татав. Нэг оройгоос гарсан $2n - 1$ хэрчмийн аль нэгийг нь үлдээж бусдыг нь арчсан гэе. Энэ үйлдлийг бүх оройн хувьд гүйцэтгэе. Ингэхэд үүсэх n хэрчим дотор уртаараа тэнцүү 2 хэрчим ямагт олддог байх n -ийн бүх утгыг ол.

VIII-B1. (Ч.Гантөмөр) $2x(xy - 2y - 3) = (x + y)(3x + y)$ тэгшитгэлийн бүх натурал шийдийг ол.

VIII-B2. (Д.Тогмагнай) ABC зөв гурвалжны BC тал дээр M ба N цэгүүдийг (M нь B ба N -ийн хооронд оршино) $\angle MAN = 30^\circ$ байхаар авав. AMC ба ANB гурвалжнуудыг багтаасан тойрог K цэгт огтлолцоно. AK шулуун, AMN гурвалжинг багтаасан тойргийн төвийг дайрахыг батал.

VIII-B3. (Б.Эрдэнэбаяр)



Зураг дээр 14 хотыг холбосон авто замын сүлжээний зургийг дүрслэв. Аль нэг хотоос гараад хот бүрийг яг нэг удаа дайран гарах маршрут олох уу?

VIII-A1. (Б.Сандагдорж) $\triangleleft$ Батлах тэнцэтгэл биш нь

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$$

тэнцэтгэл бишийг батлахтай эквивалент юм.

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{c^2 + a^2}{2} \geq ab + bc + ca \text{ болно.}$$

Энд $\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy$ гэсэн илэрхий тэнцэтгэл бишийг анхиглав. Тэнцэлдээ $a = b = c$ байхад л хүрэх нь илэрхий. Харин баруун талын тэнцэтгэл биш нь

$$a(b + c - a) + b(a + c - b) + c(a + b - c) > 0$$

гэсэн илэрхий тэнцэтгэл биштэй эквивалент болохыг хялбархан шалгаж болно. $\triangleleft$

VIII-A2. $\triangleright$

$$\begin{aligned} n^4 + 2n^3 - n^2 + 2n + 1 &= (n^2 + an + 1)(n^2 + bn + 1) = \\ &= n^4 + (a + b)n^3 + (2 + ab)n^2 + (a + b)n + 1 \end{aligned}$$

ба

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2 + ab = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = -1$$

болно. Иймд

$$P(n) = (n^2 + 3n + 1)(n^2 - n + 1)$$

болов. $|P(n)|$ анхны тоо болохын тулд дараах тохиолдлууд л биелэх учиртай.

(а) $n^2 + 3n + 1 = 1 \Leftrightarrow n^2 + 3n = 0$ буюу $n_1 = 0$, $n_2 = -3$ энэ үед

$$n^2 - n + 1 \underset{(n=0)}{=} 1, \quad n^2 - n + 1 \underset{(n=-3)}{=} 13 \Rightarrow n = -3.$$

$$(b) \quad n^2 + 3n + 1 = -1 \Leftrightarrow n^2 + 3n + 2 = 0 \text{ буюу } n_1 = -1, n_2 = -2 \\ \text{энэ үед } n^2 - n + 1 \underset{(n=-1)}{=} 1, \quad n^2 - n + 1 \underset{(n=-2)}{=} 7 \Rightarrow n = -2$$

$$(c) \quad n^2 - n + 1 = 1 \Leftrightarrow n^2 - n = 0 \text{ буюу } n_1 = 0, n_2 = 1 \text{ энэ үед} \\ n^2 + 3n + 1 \underset{(n=0)}{=} 1, \quad n^2 + 3n + 1 \underset{(n=1)}{=} 5 \Rightarrow n = 1.$$

$$(d) \quad n^2 - 3n + 1 = -1 \Leftrightarrow n^2 - 3n + 2 = 0 \text{ буюу } n_1 = 2, n_2 = 1 \text{ энэ} \\ \text{үед} \\ n^2 + 3n + 1 \underset{(n=2)}{=} 11 \Rightarrow n = 2$$

болов. Иймд $|P(n)|$ анхны тоо байх бүхэл $n \in \{-3, -2, 1, 2\}$
 болов. $\triangleleft$

VIII-A3.(Э.Азжаргал) $\triangleright$ Зөв $2n$ өшцөгтийн $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ оройнуудыг хоёр оройгоос тогтох n ширхэг хосуудад хуваав. Нэг хосын 2 оройг холбоход үүсэх n хэрчим дотор урт нь тэнцүү 2 хэрчим олддог бол $n = 4m + 2$ эсвэл $n = 4m + 3$ хэлбэртэй гэж батлая. Эсрэгээс нь бүх хосын оройнуудыг холбосон хэрчмийн уртууд ялгаатай гэе. $A_p A_q$ хэрчимд $|p - q|$ ба $2n - |p - q|$ тоонуудын аль багыг нь харгалзуулъя. Тэгвэл $1, 2, \dots, n$ тоонууд дээрх n хэрчимд харгалзаа. Эдгээрийн k ширхэг нь тэгш ба $n - k$ ширхэг нь сондгой гэж үзье. $A_p A_q$ хэрчимд сондгой тоо харгалзах бол p, q тоонууд тэгш сондгойгоороо ялгаатай байна. Эндээс үлдсэн хэрчмүүд сондгой дугаартай k ба тэгш дугаартай k оройг сондгой ба тэгшээрээ адилхан дугаартай оройнуудыг хооронд нь холбоход үүснэ. Иймд k тэгш тоо. Нөгөө талаас $n = 4m, 4m + 1, 4m + 2, 4m + 3$ байхад харгалзан $k = 2m, 2m, 2m + 1, 2m + 1$ болж эндээс $n = 4m, 4m + 1$ болов. $\triangleleft$

VIII-B1.(Ч.Гантөмөр) $\triangleright$ Өгөгдсөн тэгшитгэлээ y -ийн хувьд квадрат тэгшитгэл хэлбэртэй бичвэл

$$y^2 + (8x - 2x^2)y + (3x^2 + 6x) = 0 \text{ болно.}$$

Энэ тэгшитгэлийн дискриминант

$$D = (8x - 2x^2)^2 - 4(3x^2 + 6x) = 4x(x - 1)^2(x - 6)$$

ба D бүтэн квадрат байх ёстой гэдгээс

$$x(x-6) = z^2, \quad x \in \mathbb{Z}$$

болно. Энэ нь

$$(x-3)^2 - z^2 = 9 \Leftrightarrow (x-3-z)(x-3+z) = 9$$

болно.

$$9 = 1 \cdot 9 = (-1) \cdot (-9) = 3 \cdot 3 = (-3) \cdot (-3)$$

байдгийг санавал дараах тохиолдлуудыг шалгахад хангалттай.

(a) $x+z-3=9, \quad x-z-3=1 \Rightarrow x=8.$

(b) $x+z-3=-1, \quad x-z-3=-9 \Rightarrow x=-2$ шийд биш.

(c) $x+z-3=3, \quad x-z-3=3 \Rightarrow x=6$

(d) $x+z-3=-3, \quad x-z-3=-3 \Rightarrow x=0$ шийд биш.

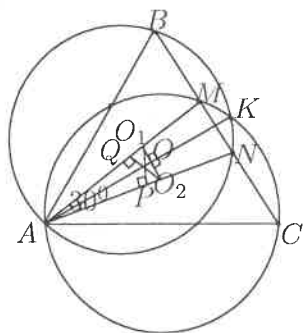
$x=8$ үед $y \in \mathbb{N}$ байх шийд олдохгүй.

$x=6$ үед $y=12$ болно. Иймд өгөгдсөн тэгшитгэл $(6, 12)$ гэсэн цор ганц шийдтэй.

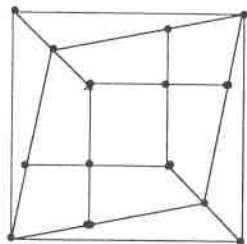
VIII-B2.(Д.Тодмагнай) O_1, O_2 нь $\triangle ABN$ ба $\triangle AMC$ багтаасан тойргийн төвүүд гэе. $\angle ABN = \frac{\widehat{AN}}{2} = 60^\circ$ $\angle AO_1N = 120^\circ$ болно. $\angle AO_1N = 120^\circ$ ба $AO_1 = O_1N$ гэдгээс $\angle O_1AN = \angle O_1NA = 30^\circ$ болно. $\angle MAN = 30^\circ$ ба $\angle O_1AN = 30^\circ \Rightarrow O_1 \in AM$ болно.

Үүнтэй адилаар $O_2 \in AN$ болно.

Q, P харгалзан AM, AN талуудын дундаж цэг байг. $\triangle AMN$ -г багтаасан тойргийн төв OO_2 ба O_1P шулуунуудын огтлолцолын цэг дээр оршино. $O = QO_2 \cap PO_1$ ба O_1, O_2 төвтэй тойргуудын ерөнхий хөвч нь AK тул $O_1O_2 \perp AK$ байна. Тэгвэл $\triangle O_1AO_2$ хувьд өндрүүд нь нэг цэгт огтлолцоно. Иймээс $O = O_1P \cap O_2Q \cap AK \Rightarrow O \in [AK]$ байна.



VIII-B3. (Б.Эрдэнэбаяр) Зураг дээрх 14 хотыг холбосон авто замын сүлжээг ажвал 3 зам гарсан хот бүрээс зөвхөн 4 зам гарсан хотод очиж чадна. 4 зам гарсан хот бүрээс 3 зам гарсан хотод очиж чадах нь харагдана (нэг ирмэг дамжин). Хэрэв аль нэг хотоос гараад хот бүрийг яг нэг удаа дайран гардаг маршрут олддог гэвэл 3 зам гарсан хотын тоо 4 зам гарсан хотын тоотой тэнцүү байна.



Гэтэл 3 зам гарсан хот 8 ба 4 зам гарсан хот 6 байгаа учир тийм маршрут олдохгүй.

4.3 ММО-46, VIII ангийн IV даваа

Ч.Гантөмөр

VIII-A1 (Ч. Гантөмөр) $1 \times n$ хүснэгтийн нүд бүрийг $a_1, a_2, \dots, a_n$ өнгүүдийн аль нэгээр будахдаа $i_1, i_2, \dots, i_k$ дугаартай нүднүүд ялгаатай өнгөтэй бөгөөд зөвхөн $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ өнгүүдээр будагдсан байх бүх ялгаатай будалтын тоог ол.

VIII-A2 (Б. Эрдэнэбаяр) $1 \leq a < b$ байх бодит тоонууд өгөгдөв. $[a^n, b^n]$ хэрчимд 2010-аас багагүй тооны бүхэл тоо ордог байх n натурал тоо олдохыг батал.

VIII-A3 (Э. Энхзаяа) Нэгэн компани аймшигт амьтан үржүүлдэг. Хэрэв уг амьтан өнөөдөр a -ширхэг гар b -ширхэг хөл, c -ширхэг толгойтой байсан бол маргааш нь харгалзан $b+c-a$, $c+a-b$, $a+b-c$ ширхэг гар, хөл, толгойтой болох бөгөөд энэ хувьсал өдөр болгон үргэлжлэн явагддаг. Тэгвэл анх төрөхдөө зөвхөн тэнцүү тооны гар, хөл, толгойтой төрсөн аймшигт амьтад л мөнхөд амьдарч чадахыг батал. Энд $a, b, c \in \mathbb{N}$ бөгөөд гар, хөл, толгойны аль нэг тоо нь сөрөг болоход уг амьтан үхнэ.

VIII-B1 (Б. Ганбат) $x, y \in \mathbb{Z}$ ба $2010x^2 + y^2 + 1$ болон $x^2 + 2010y^2 - 1$ тоонууд бүтэн квадрат бол (x, y) хосыг “квадратлаг хос”

гэе.

(а) $(2009^2, 2010^2)$ квадратлаг хос мөн үү?

(б) Бүх квадратлаг хосыг ол.

VIII-B2 (Э. Энхзаяа) a, b сөрөг биш бодит тоонуудын хувьд

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^9 \geq a^3 b^3 \left(\frac{a^3+b^3}{2}\right)$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

VIII-B3 (М. Батбилэг) ABC тэгш өнцөгт гурвалжны $\angle ACB = 90^\circ$ ба $CB > CA$ болно. CB катетаар диаметрээ хийсэн хагас тойрог дээр $AC = CQ$ байхаар Q цэгийг, CB катет дээр $BQ = BP$ байхаар P цэгийг тус тус авав. AP -ийн тойрогтой огтлолцох цэг S бол $\angle CBS = \angle QBS$ гэс батал. (Хагас тойрог ба A цэг BC -ийн нэг талд оршино.)

VIII-A1. (Ч.Гантөмөр) $i_1, i_2, \dots, i_k$ дугаартай нүднүүд хос хо-соороо ялгаатай өнгөтэй бөгөөд зөвхөн $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ өнгүүдээр будагдсан байх боломжийн тоо $k!$ бөгөөд үлдсэн $n-k$ нүдийг өгөгдсөн n өнгөөр будах боломжийн тоо нь n^{n-k} болно. Иймд бодлогын нөхцөлийг хангах бүх ялгаатай будалтын тоо нь $n^{n-k} \cdot k!$ болно.

VIII-A2. (Б.Эрдэнэбаяр)

$b^n - a^n > 2010$ байх n натурал тоо олдохыг батлая. $b - a = c$ гэе. Тэгвэл

$$b^n - a^n = c \cdot (b^{n-1} + b^{n-2}a + \dots + ba^{n-2} + a^{n-1}) > c \cdot a^{n-1} \cdot n \geq c \cdot n$$

болно.

$$c \cdot n > 2010 \Leftrightarrow n < \frac{2010}{c} = \frac{2010}{b-a}$$

байхаар n -ийг сонговол $b^n - a^n > 2010$ буюу $[a^n, b^n]$ хэрчимд дор хаяж 2010 ширхэг бүхэл тоо орох нь батлагдвал.

VIII-A3. (Э.Энхзаяа) Бүгд тэнцүү $a = b = c$ үед мөнхөд амьдрах нь илэрхий. Иймд $a \neq b$ гэж үзэж чадна.

$$a + b + c = (a + b - c) + (b + c - a) + (c + a - b)$$

-гэдгээс уг аймшигт амьтны гар, хөл, толгойн нийлбэр үргэлж тогтмол байна. $a \neq b \Rightarrow |a - b| \geq 1$ ба II дахь өдөр энэ ялгавар

$$|c + a - b - (c + b - a)| = 2|a - b| = 2 \cdot |a - b|$$

болно. Иймд n -р өдөр энэ ялгавар $2^{n-1}|a - b|$ болох бөгөөд хэзээ нэгэн цагт

$$2^{n-1}|a - b| > a + b + c$$

болно гэдгээс n -р өдөр байх уг амьтны гар ба хөлийн тооны зөрөө нь " $a + b + c$ "-ээсээ их болно гэдгээс мэдээж аль нэг нь сөрөг болно.

▲

VIII-B1.(Б.Ганбат)

$$\begin{cases} x^2 + 2010y^2 - 1 = m^2 \\ 2010x^2 + y^2 + 1 = n^2 \end{cases}$$

Ямар ч тооны квадратыг 4-өөр жипихэд 0, 1 гэсэн хоёр үлдэгдэл л өгөх боломжтой. Иймд

(a) $\begin{matrix} x^2 \equiv 1(4) \\ y^2 \equiv 1(4) \end{matrix}$ бол $x^2 + 2010y^2 - 1 \equiv 1 + 2 \cdot 1 - 1 \equiv 2(4) \not\equiv m^2(4)$
болж бүхэл тооны квадратыг 4-өөр жипихэд 2 үлдэгдэл өгөхгүй

(b) $\begin{matrix} x^2 \equiv 1(4) \\ y^2 \equiv 0(4) \end{matrix}$ бол $2010x^2 + y^2 + 1 \equiv 2 + 1 \equiv 3(4) \not\equiv n^2(4)$

(c) $\begin{matrix} x^2 \equiv 0(4) \\ y^2 \equiv 1(4) \end{matrix}$ бол $2010x^2 + y^2 + 1 \equiv 2 \not\equiv n^2(4)$

(d) $\begin{matrix} x^2 \equiv 0(4) \\ y^2 \equiv 0(4) \end{matrix}$ бол $x^2 + 2010y^2 - 1 \equiv -1(4) \not\equiv m^2(4)$ тул
квадратлаг хос байхгүй.

VIII-B2.(Э.Энхзаяа)

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{12} = \left(\frac{a^3 + b^3 + ab(a+b) + ab(a+b) + ab(a+b)}{8}\right)^4 \geq$$

$$\geq \frac{a^3 + b^3}{2} \cdot \left(\frac{ab(a+b)}{2} \right)^3 \Rightarrow \left(\frac{a+b}{2} \right)^9 \geq \frac{a^3 + b^3}{2} \cdot a^3 b^3 \blacktriangle$$

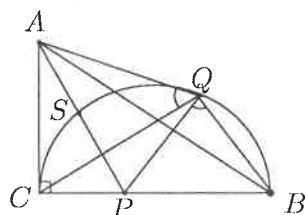
Энд $\left(\left(\frac{x+y+z+t}{4} \right)^4 \geq xyzt \right)$ -Кош аппиглав) Тэнцэлдээ хүрэх нөхцөл нь

$$\frac{a^3 + b^3}{2} = \frac{ab(a+b)}{2}$$

буюу

$$(a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b \blacktriangle$$

VIII-ВЗ. (М.Батбилэг)



Өгөгдсөн нөхцөлөөс $\triangle ACQ$, $\triangle PBQ$ -үүд нь адил хажуут гурвалжин болно. BC тал диаметртэй хагас тойргийн хувьд AC катет нь шүргэгч болно. Иймд $\angle ACQ = \frac{1}{2} \cdot \widehat{QC} = \angle CBQ$ байна.

$\triangle ACQ \sim \triangle PBQ$ болно.

$$90^\circ = \angle CQP + \angle PQB = \angle CQP + \angle CQA = \angle AQP$$

болох ба $\angle ACB = 90^\circ$ тул $AQPC$ -дөрвөн өнцөгт AP -диаметртэй тойрогт багтана. Нөгөө талаас C, S, Q, B 4-н цэг нэг тойрог дээр орших тул

$$\angle CSQ = 180^\circ - \angle QBP = 2 \cdot \angle PQB = 2 \cdot \angle CAQ$$

байна. S -цэг нь

1. AP дээр оршино

2. $\angle CSQ = 2 \cdot \angle CAQ$ тул $AQPC$ -г багтаасан тойргийн төв болно. Иймд $SC = SQ$ болох тул $CS = SQ$ буюу BS нь $\angle CBQ$ -ын биссектрисс болно. Бодлого бодогдов.

4.4 ММО-46, IX ангийн III даваа

Т.Хулан

IX-A1. (Т.Хулан) $a_1 = 1$, $a_n = \frac{n+1}{n-1}(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$ ($n > 1$) байх a_n дарааллын a_{2010} -г ол.

IX-A2. (Т.Хулан) $AC = BC$ байх адил хажуут ABC гурвалжинд багтсан тойрог BC , CA , AB талуудыг харгалзан A' , B' , C' цэгүүдэд шүргэнэ. AA_1 хэрчим багтсан тойргийг D цэгт огтлох ба $B'D$ шулуун AB талтай E цэгт огтлолдоно. Тэгвэл $AE = EC'$ гэж батал.

IX-A3. (Т.Хулан) Гурвалжны талууд үүсгэх a, b, c гурван натурал тооны их нь 2010-аас хэтрэхгүй бол ийм бүх (a, b, c) гурвалжны тоог ол.

IX-B1. (Т.Хулан) 1, 2, 3, ..., 100 тоонуудыг дараалсан 2 тоо хөрш нүдэнд (ерөнхий талтай нүд) бичигдсэн байхаар 10×10 хүснэгтэд байрлуулав. Тэгвэл ядаж 2 ширхэг бүхэл тооны квадрат агуулах мөр эсвэл багана олдохыг батал.

IX-B2. (Т.Хулан) Хурц өнцөгт ABC гурвалжны $\angle A = 30^\circ$, H нь орто төв ба M нь BC талын дундаж байг. T нь HM шулуун дээр орших $HM = MT$ байх цэг бол $AT = 2BC$ гэж батал.

IX-B3. (Т.Хулан) Хэрэв $a, b, c > 0$ тоонуудын хувьд $ab + bc + ca = 1$ бол

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \frac{1}{abc}$$

гэж батал.

IX-A1. $a_{n-1} = \frac{n}{n-2}(a_1 + \dots + a_{n-2})$ нөхцөлөөс

$$a_1 + \dots + a_{n-2} = \frac{n-2}{n}a_{n-1}$$

болох ба үүнийг анхны рекурент томъёонд орлуулбал

$$a_n = \frac{n+1}{n-1} \left(\frac{n-2}{n}a_{n-1} + a_{n-1} \right) =$$

$$= \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{2n-2}{n} \cdot a_{n-1} = \frac{2(n+1)}{n} a_{n-1}.$$

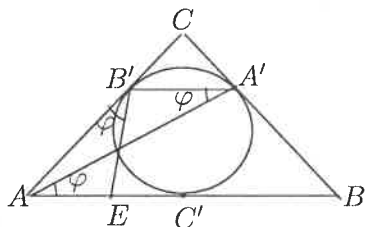
Эндээс

$$a_n = \frac{2(n+1)}{n} \cdot \frac{2n}{n-1} \cdots \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot a_1 = 2^{n-2}(n+1)$$

болно. Иймд

$$a_{2010} = 2^{2008} \cdot 2011$$

IX-A2.



AB' нь багтсан тойргийн шүргэгч учраас $\angle AB'E = \varphi$ гэвэл $\angle B'A'A = \varphi$ болно. $\angle A = \angle B$ учраас $\triangle AB'E \sim \triangle BAA'$ болно.

Эндээс

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AE}{A'B}$$

$$AB' = AC' = C'B = \frac{AB}{2}$$

гэдгийг тооцвол $\frac{AE}{AC'} = \frac{AB}{2AB} = \frac{1}{2}$ гарах ба энэ нь $2AE = AC'$ гэсэн үг.

IX-A3. S_n -ээр гурвалжны талууд үүсгэх ба тус бүр n -ээс хэтрэхгүй (a, b, c) гурвалжны тоог тэмдэглэе. Тэгвэл S_n -ийн хувьд дараах тэнцэтгэл үнэн байна.

$$S_n = S_{n-1} + |A| + |B| + |C| - |A \cup B| - |A \cup C| - |B \cup C| + |A \cup B \cup C|. (*)$$

Энд

$A = \{(a, b, c) \mid a = n, 1 \leq b \leq n; 1 \leq c \leq n, a, b, c \text{ нь гурвалжны талууд үүсгэдэг}\}$

$B = \{(a, b, c) \mid b = n, 1 \leq a \leq n, 1 \leq c \leq n; a, b, c \text{ нь гурвалжны талууд үүсгэдэг}\}$

$C = \{(a, b, c) \mid c = n, 1 \leq a \leq n, 1 \leq b \leq n; a, b, c \text{ нь гурвалжны талууд үүсгэдэг}\}$

$|A|$ -ийг олж. $a = n$ учраас $a + b > n \geq c$ ба $a + c > n \geq b$ нөхцөлүүд бишлээ. Иймд $b + c > n$ байх b, c -г тоолох ёстой.

$b = 1$ үед $c = n$

$b = 2$ үед $c = n; n - 1$

.....

$b = n$ үед $c = n; n - 1; \dots; 1$ байх боломжтой. Иймээс

$$|A| = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = |B| = |C|.$$

$|A \cup B|$ -ийг олж. $a = n; b = n$ учраас $c = 1, \dots, n$ байх боломжтой. Иймд

$$|A \cup B| = n = |A \cup C| = |B \cup C|.$$

$|A \cup B \cup C| = 1$ байх нь ойлгомжтой. Эдгээрийг (*) тэнцэлд оруулбал

$$S_n = S_{n-1} + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 3n + 1 = S_{n-1} + 3 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 1$$

болно.

$$\begin{cases} S_n = S_{n-1} + \frac{3n(n-1)}{2} + 1 \\ S_{n-1} = S_{n-2} + \frac{3(n-1)(n-2)}{2} + 1 \\ \dots\dots\dots \\ S_2 = S_1 + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2} + 1 \end{cases}$$

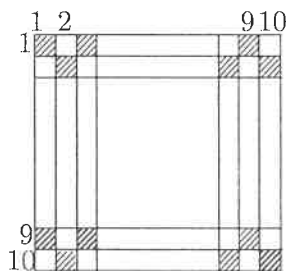
$$S_n = S_1 + \frac{3}{2}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n) + n - 1 \quad (S_1=1)$$

$$n + \frac{3}{2} \frac{n(n+1)(n-1)}{3} = n + \frac{n(n^2-1)}{2} = \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

Иймд

$$S_{2010} = \frac{2010 \cdot (2010^2 + 1)}{2}$$

IX-B1.



Эсрэгээс $1^2; 2^2; \dots; 10^2$ тоонуудыг аль ч 2 нь нэг мөр эсвэл баганад оршихгүй байхаар байрлуулж чадсан гэе. 10×10 хүснэгтийн мөр ба багануудыг зурагт үзүүлсэн байдлаар дугаарлая. Тэгээд нүд бүрт (x, y) тоог харгалзуулъя. x -мөрийн дугаар, y -баганы дугаар.

Хэрэв $x+y$ тэгш бол хар өнгөөр, сондгой бол цагаан өнгөөр будъя. Хэрэв 1^2 хар нүдэнд буусан бол 2^2 цагаан нүдэнд бууна, 3^2 хар, $\dots 10^2$ цагаан нүдэнд бууна. Учир нь $k \rightarrow k+1$ рүү шилжихэд нүдний өнгө эсэргээрээ өөрчлөгдөнө. Харин 1^2 цагаан бол, 2^2 хар, 3^2 цагаан, $\dots 10^2$ хар нүдэнд бууна.

1^2 -ийн буусан нүдний багана ба мөрний дугаар нь (x_1, y_1) ; 2^2 -ийнх $(x_2, y_2); \dots 10^2$ -ийнх (x_{10}, y_{10}) байг. Тэгвэл

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i + y_i)$$

нь 5 ширхэг тэгш тоо ба 5 ширхэг сондгой тоонуудын нийлбэр буюу сондгой тоо гарах ёстой. Гэтэл 1 мөр эсвэл баганад $1^2; \dots; 10^2$ тоонуудаас яг 1 нь орших учир

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55$$

ба

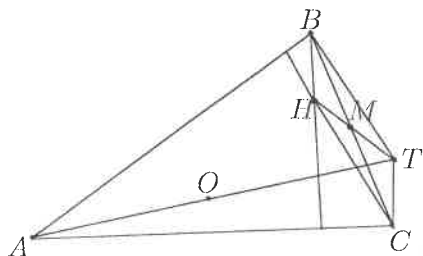
$$\sum_{i=1}^{10} y_i = 1 + 2 + \dots + 10 = 55$$

байна.

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i + y_i) = 55 + 55 = 110$$

тэгш болж зөрчилд хүрлээ.

IX-B2.



$BM = MC$, $HM = MT$ гэдгээс $BH \parallel TC$ болно. Иймд $\angle ACT = 90^\circ$. Мөн $BT \parallel HC$ гэдгээс $\angle ABT = 90^\circ$. Энэ 2 нөхцөлөөс $ABTC$ 4 өнцөгт тойрогт багтах ба тойргийн төв нь AT -ийн дундаж O цэг болно.

$OB = OC$ ба $\angle BOC = 2 \cdot \angle A = 60^\circ$ гэдгээс $\triangle OBC$ зөв гурвалжин болно. Иймд $BC = OC = AO = AT/2$ болж батлагдлав.

IX-B3. Эхлээд

$$3(ab \cdot ac + ab \cdot bc + ac \cdot bc) \leq (ab + ac + bc)^2$$

тэнцэтгэл бинийг баталъя.

$$ab \cdot ac + ab \cdot bc + ac \cdot bc \leq a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$$

$$0 \leq (ab + ac)^2 + (ab + bc)^2 + (ac + bc)^2$$

болж батлагдлаа.

$$3abc(a + b + c) = 3(ab \cdot ac + ab \cdot bc + ac \cdot bc) \leq (ab + ac + bc)^2 = 1.$$

$$a + b + c \leq \frac{1}{3abc} \quad (*)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc} = \frac{1}{abc} \quad (**)$$

Кошийн тэнцэтгэл бишээр

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} = \sqrt[3]{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3a} + 2b} \cdot \sqrt[3]{3a} \leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{3a} + 2b + 3a}{3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} = \sqrt[3]{\frac{1}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3b} + 2c} \cdot \sqrt[3]{3b} \leq \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{3b} + 2c + 3b}{3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} = \sqrt[3]{\frac{1}{c}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3c} + 2a} \cdot \sqrt[3]{3c} \leq \frac{\frac{1}{c} + \frac{1}{3c} + 2a + 2c}{3}$$

тэнцэтгэл бишүүд үнэн. Дээрх 3 тэнцэтгэл бишүүдийг нэмээд (*) ба (**) -ийг тооцвол.

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \\ & \leq \frac{\frac{4}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + 5(a + b + c)}{3} \leq \frac{\frac{4}{3} \frac{1}{abc} + \frac{5}{3abc}}{3} = \frac{1}{abc} \end{aligned}$$

болж батлагдлаа.

4.5 ММО-46, X ангийн III даваа

Б.Баяржаргал

X-A1. (Б.Баяржаргал) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$, $n \geq 1$
бол $a_{2010} > 0.9995$ болохыг батал.

X-A2. (Б.Баяржаргал) Ямар нэг $p \in \mathbb{P}$, $k, n \in \mathbb{N}$ тоонуудын хувьд $b^2 + a = p^k$, $a^2 + b = np^k$ байх бүх a, b гэсэн ялгаатай натурал тоонуудыг ол.

X-A3. (Б.Баяржаргал) ABC гурвалжинд AN өндөр, AL биссектрис татав. AL шулуун руу BP ба CQ өндөр буулгав. M нь BC -ийн дундаж цэг бол $HPMQ$ цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

X-B1. (Б.Баяржаргал) $x, y, z, t > 0$ ба $x + y + z + t = 1$ бол

$$\frac{xy(z+t)}{1-4zt} + \frac{yz(t+x)}{1-4tx} + \frac{zt(x+y)}{1-4xy} + \frac{tx(y+z)}{1-4yz} \geq \frac{128}{3}xyzt$$

болохыг батал.

X-B2. (Б.Баяржаргал) Дурын $[a, b] \subset [0, 1]$ хэрчимийн хувьд $2^n x \in [a, b]$ байдаг n гэсэн натурал тоо олдог бол $x \in [0, 1]$ цэгийг сайн цэг гээ. Тэгвэл төгсгөлгүй олон сайн цэг олдоно гэж батал.

X-B3. (Б.Баяржаргал) Өгсөн AB хэрчим дээр D цэг өгөгдөв. AB -тэй перпендикуляр D -г дайрсан l шулуун дээр M цэг, MD диаметртэй тойрог ABC гурвалжинд багтаж байхаар C цэгийг тус тус авчээ. M цэг l шулуун дээгүүр гүйж байхад CM шулуунууд ерөнхий цэгтэй болохыг батал.

X-A1. $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n > n$ гэж батлая.

$n = 1$ үед $S_1 = a_1 = 2 > 1$

$n = k$ үед $S_k > k$ гэс.

$n = k + 1$ үед

$$\begin{aligned} S_{k+1} - (k+1) &= S_k + a_{k+1} - (k+1) = S_k - (k+1) + \frac{k}{S_k} = \\ &= \frac{S_k^2 - (k+1)S_k + k}{S_k} = \frac{(S_k - k)(S_k - 1)}{S_k} > 0 \\ a_{n+1} = \frac{n}{S_n} &< 1 \quad (n = 1, 2, \dots) \text{ болох ба} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \frac{n}{S_n} &= \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} > \frac{n}{2 + 1 + \dots + 1} = \frac{n}{n+1} \\ a_{2010} &> \frac{2010}{2011} > \frac{1999}{2000} = 0.9995 \end{aligned}$$

болж батлагдав.

X-A2. $b = 1$ бол

$$\begin{aligned} a+1 \mid a^2+1 &= (a+1)^2 - 2a \Rightarrow \\ a+1 \mid 2a &\Rightarrow a+1 \mid 2 \Rightarrow a+1 = 2 \quad a = 1 \end{aligned}$$

болж $a \neq b$ гэдэгт зөрчинө.

$$a^2 + b \equiv 0 \pmod{(b^2 + a)} \Rightarrow a^2 \equiv -b \pmod{(b^2 + a)}$$

ба

$$b^2 \equiv -a \pmod{(b^2 + a)}$$

учир $b^4 = a^2 \equiv -b \pmod{(b^2 + a)}$ буюу $b^4 + b \equiv 0 \pmod{(b^2 + a)}$
 $b^4 + b = b(b^3 + 1)$ ба $(b, b^3 + 1) = 1$ гэдгээс $b^2 + a \mid b$ эсвэл

$$\begin{aligned}
& \frac{z+t}{zt(1-4zt)} - \frac{z+t}{zt(1-2\sqrt{zt})(1+2\sqrt{zt})} \geq \\
& \geq \frac{2\sqrt{zt}}{zt(1-2\sqrt{zt})(1+2\sqrt{zt})} = \frac{4}{2\sqrt{zt}(1-2\sqrt{zt})(1+2\sqrt{zt})} \geq \\
& \geq \frac{4}{\left(\frac{2\sqrt{zt}+1-2\sqrt{zt}}{2}\right)^2 (1+z+t)} = \frac{16}{1+z+t}
\end{aligned}$$

болно. Бусад нь ижил арга хэрэглэвэл

$$\begin{aligned}
A & \geq \frac{16}{1+z+t} + \frac{16}{1+t+x} + \frac{16}{1+x+y} + \frac{16}{1+y+z} \geq \\
& \geq 64 \sqrt[4]{\frac{1}{(1+z+t)(1+t+x)(1+x+y)(1+y+z)}} \geq \\
& \geq \frac{64}{\frac{1+z+t+1+t+x+1+x+y+1+y+z}{4}} = \frac{256}{4+2} = \frac{128}{3}.
\end{aligned}$$

X-132. Өгүүлбэрт $\{2^n x\} \in [a, b]$ буюу бутархай хэсгийн тэмдгийг орхигдуулсан байсанд хүлцэл өчье. Энэ үедээ сайн цэг байхгүй гэдэг нь илэрхий. Зөв томъёололтой үед бодъё. Хэрэв бид X гэсэн нэг сайн цэг олбол $\frac{x}{2^k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ хувьд мөн сайн цэг гэдэг нь илэрхий. Иймд 1 сайн цэг олоход хангалттай. Үүний тулд бодит тоог 2-тын тооллын системд бичье.

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 00, \quad b_4 = 01,$$

$$b_5 = 10, \quad b_6 = 11, \quad b_7 = 000, \quad b_8 = 001, \dots$$

гэсэн дараалал $x = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$ тоог авъя. $\forall [a, b] \subset [0, 1]$ завсар авахад

$$a \leq 0, t_1 t_2 \dots t_k; \quad 0, t_1 t_2 \dots t_k(1) \leq b$$

байх $t_1, t_2, \dots, t_k$ гэсэн 0, 1-ээс тогтох дараалал олдоно.

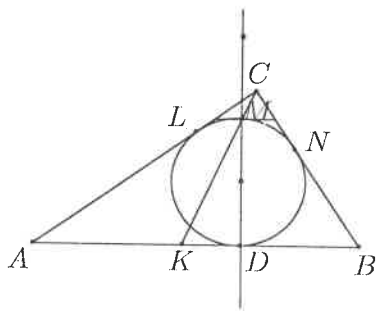
$t_1 t_2 \dots t_k = b_s$ байх $\exists s \in \mathbb{N}$.

$\{2x\}$ нь x -ийн таслалыг нэг урагшлуулсан тоо байх учир

$$\exists n \in \mathbb{N} : \{2^n x\} = 0, b_s b_{s+1} \dots$$

буюу $a \leq \{2^n x\} \leq b$ болж $\{2^n x\} \in [a, b]$ гэдэг нь харагдав.

X-133.



$(CM) \cap (AB) = K$ гэе. M -ийг дайрсан (AB) -тэй параллель шулуун AC ба CB -г L, N -д огтолдог байг. C дээр төвтэй M -ийг K -д буулгадаг гомотетээр $\triangle CLN$ нь $\triangle ACB$ -д бууна. Мөн уг гомотестоор $\triangle ABC$ -д багтсан тойрог нь $\triangle ABC$ -д гадаад багтсан тойрогт буух ба K нь шүргэлтийн цэг нь болно.

Иймд $CA + AK = CB + BK$

$$\begin{aligned} CA - CB &= AL + LC - CN - NB = AL - NB = \\ &= AD - BD = BK - AK = (BD + KD) - (AD - KD) \\ &= BD - AD + 2KD \Rightarrow 2KD = 2(AD - BD) \end{aligned}$$

$KD = AD - BD$ буюу K нь M цэгийн сонголтоос үл хамаарна.

4.6 ММО-46, XI ангийн III даваа

Б. Батбаясгалан

XI-A1 ABC гурвалжны AB ба AC талууд дээр харгалзан D ба E цэгүүдийг $DE \parallel BC$ байхаар авав. P нь ADE гурвалжин дотор орших дурын цэг ба PB ба PC хэрчмүүд нь DE хэрчимтэй харгалзан F ба G цэгүүдэд огтлолцдог. $\triangle DPG$ ба $\triangle FPE$ -г багтаасан тойргийн төвүүд нь харгалзан O_1 ба O_2 бол $O_1O_2 \perp AP$ гэж батал.

XI-A2 Хэрэв a, b, c нь $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ нөхцлийг хангах эсрэг бодит тоонууд бол

$$\frac{a}{a^2 + 2b + 3} + \frac{b}{b^2 + 2c + 3} + \frac{c}{c^2 + 2a + 3} \leq \frac{1}{2}$$

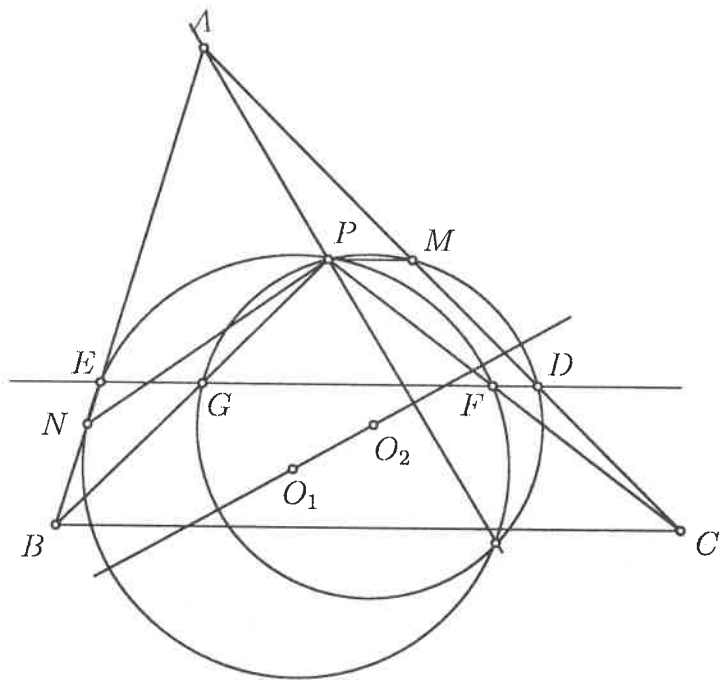
гэж батал.

XI-A3 $a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_{n-k}^k \cdot 6^k$ гэе. Хэрэв $p > 5$ анхны тоо бол $p \mid a_{p-2}$ гэж батал.

XI-B1 $a + b^2 + (a, b)^3 = ab \cdot (a, b)$ байх бүх a, b натурал тоон хосыг ол. Энд (a, b) нь a, b тоонуудын ХИЕХ.

XI-B2 ABC гурвалжинд багтсан тойрог BC ба CA талуудыг харгалзан D ба E цэгүүдэд шүргэнэ. DE -ийн $\angle ABC$ ба $\angle BAC$ -ийн биссектриссүүдтэй огтлолцсон цэгүүд нь харгалзан F, G . Мөн A ба B оройгоос DE руу буулгасан перпендикуляруудын сууриуд харгалзан S, T бол $SF = GT$ гэж батал.

XI-A1. $\triangle DPG$ -г багтаасан тойрог AB талтай M цэгт, AP -тэй Q_1 цэгт огтлолцдог байг.



Харин $\triangle FPE$ -г багтаасан тойрог AC талтай N цэгт, AP -тэй Q_2 цэгт огтлолцдог байг. $ENPF$ тойрогт багтах ба $ED \parallel CB$

учраас $\angle ANP = \angle PFE = \angle PBC$. Энэ нь $NMBC$ ба $PMDC$ тойрогт багтана гэсэн үг. Эндээс $NPMBC$ тойрогт багтана. Иймд $AM \cdot AB = AN \cdot AC$ байна. Түүнчлэн $AM \cdot AB = AP \cdot AQ_1$ ба $AN \cdot AC = AP \cdot AQ_2$ учраас $Q_1 \equiv Q_2$ болж байна. Иймд PQ_1 нь 2 тойргийн ерөнхий хөвч болох тул O_1O_2 -т перпендикуляр байна.

XI-А2. $a^2 + 1 \geq 2a$, $b^2 + 1 \geq 2b$, $c^2 + 1 \geq 2c$ тул

$$\sum_{cyc} \frac{a}{a^2 + 2b + 3} \geq \sum_{cyc} \frac{a}{2(a + b + 1)}$$

Иймд

$$\sum_{cyc} \frac{a}{a + b + 1} \leq 1 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{b + 1}{a + b + 1} \geq 2$$

гэж батлахад хангалттай. $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ гэдгийг тооцвол

$$\sum_{cyc} (b + 1)(a + b + 1) = 3 + 3 \sum_{cyc} a + \sum_{cyc} ab + \sum_{cyc} a^2 = \frac{1}{2}(a + b + c + 3)^2$$

Копи-Вуниковскийн тэнцэтгэл бишээр

$$\sum_{cyc} \frac{b + 1}{a + b + 1} \geq$$

$$\frac{(a + b + c + 3)^2}{(b + 1)(a + b + 1) + (c + 1)(b + c + 1) + (a + 1)(c + a + 1)} \geq 2$$

болж батлагдав. Тэнцэтгэл биш $a = b = c = 1$ үед тэнцэлдээ хүрнэ.

XI-А3. $a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_{n-k}^k \cdot 6^k$ гэе. Тэгвэл

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (C_{n-k-1}^k + C_{n-k-1}^{k-1}) \cdot 6^k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_{n-k-1}^k \cdot 6^k + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_{n-k-1}^{k-1} \cdot 6^k$$

$n = 2k$ бол $C_{n-k-1}^k = 0$ тул $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_{n-k-1}^k \cdot 6^k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_{n-k-1}^k \cdot 6^k = a_{n-1}$ байна. Төсөөтэйгөөр

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_{n-k-1}^{k-1} \cdot 6^k = 6 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} C_{n-k-2}^k \cdot 6^k = 6a_{n-2}$$

Иймд $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$, $a_0 = a_1 = 1$ болов. Рекурент харьцааны шийд нь $a_n = \frac{1}{5}(3^{n+1} - (-2)^{n+1})$ болно. Фермагийн теоремоор $a_{p-2} = 5^{-1}(3^{p-1} - (-2)^{p-1}) \equiv 5^{-1}(1 - 1) \equiv 0 \pmod{p}$ болж батлагдав.

XI-B1. $a = zx$, $b = zy$ ба $(x, y) = 1$ гэс. Тэгвэл $x + zy^2 + z^2 = z^2xy$ ба болох тул $x = zt$, $t \in \mathbb{Z}$ байна. Иймд $t + y^2 + z = z^2ty$ буюу $t = \frac{y^2 + z}{z^2y - 1}$.

1. $z = 1$ бол $t = \frac{y^2 + 1}{y - 1} = y + 1 + \frac{2}{y - 1}$ тул $y = 2$ юмуу $y = 3$ байна. Эндээс $(x, y) = (5, 2)$, $(x, y) = (5, 3)$ гэсэн шийдүүдтэй.

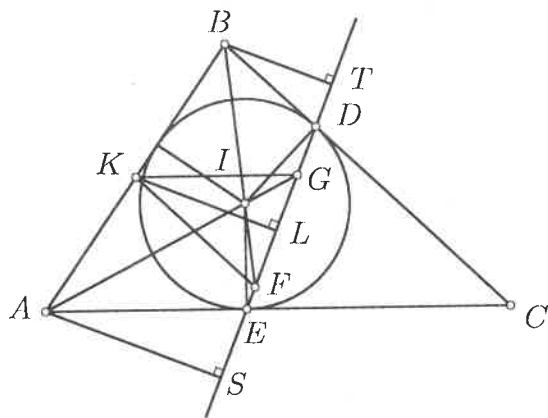
2. $z = 2$ бол $16t = \frac{16y^2 + 32}{4y - 1} = 4y + 1 + \frac{33}{4y - 1}$ байна. Иймд $b = 1$ юмуу $b = 3$ байна. Энэ тохиолдолд $(x, y) = (4, 2)$, $(x, y) = (5, 3)$ гэсэн шийдүүдтэй.

3. $z \geq 3$ бол $z^2c = \frac{z^2y^2 + z^3}{z^2y - 1} = y + \frac{y + z^3}{z^2y - 1}$. Иймд $\frac{y + z^3}{z^2y - 1}$ нь натурал тоо байна. Иймд $y + z^3 \geq z^3y - 1$ буюу $y \leq \frac{z^2 - z + 1}{z - 1}$ байна. Иймд $y \leq z$. Гэвч $y^2 + z \leq z^2 + y < z^2y - 1$ тул сүүлийн тэнцэтгэл бишээс $(z^2 - 1)(y - 1) > 2$. Иймд $t = \frac{y^2 + z}{z^2y - 1} < 1$ болж зөрчил үүсэв.

XI-B2. AB -ийн дундаж k , багтсан O -ийн төв I байг. $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ гэвэл

$$\angle AIF = \angle BAI + \angle ABI = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}, \quad \angle AFI = \angle AEI = 90^\circ$$

тул $AK = KF = KB$. Үүнтэй адилаар $\angle BIG = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = \angle BDT$. Иймд $BGDI$ тойрогт багтана. $\angle IGB = 90^\circ$ тул $KG = AK = KB$. K -аас ST рүү перпендикуляр буулгавал $SL = LT$. Нөгөө талаас $KF = KG$ учраас $FL = LG$. Иймд $SF = GT$ болно.



XI-B3. Илүү хүчтэй өгүүлбэрийг индукцийн аргаар баталъя.

Лемм. S нь $nk + k - 1$ элементтэй олонлог байг. S -ийн n элементтэй бүх дэд олонлогуудыг дурын аргаар 2 хэсэгт хуваахад хуваалтын аль нэг хэсгээс нь өөр хоорондоо үл огтлолцох k ширхэг олонлог сонгон авч болно.

$k = 1$ үед илэрхий. k -аас хэтрэхгүй бүх утгад үнэн гэж үзээд, $k + 1$ -ийн хувьд баталъя.

Хэрэв A ба B олонлогуудын хувьд $(|A| = |B| = n, A, B \subset S)$ $|A \cap B| = n - 1$ бол тэдгээрийг хөрш гэе. Дараах 2 тохиолдлыг авч үзье.

1: $X, Y \subset S$ нь хөрш бөгөөд хуваалтын өөр өөр хэсгүүдэд ордог байхаар X, Y олонлог сонгож болдог гэе. Тэгвэл $S' = S - X \cup Y$ -ийн хувьд $|S'| = n(k + 1) + k + 1 - 1 - (n + 1) = nk + k - 1$ тул индукцээр хуваалтын аль нэг хэсгээс нь өөр хоорондоо үл огтлолцох k ширхэг олонлог сонгон авч болно. Эдгээр дээр X, Y -ийн аль нэгийг нэмэхэд бидний хайж буй олонлогууд гарч ирнэ.

2: Хэрэв дурын хөрш $X, Y \subset S$ олонлогууд нь нэг хэсэгт байдаг бол бүх n элементтэй дэд олонлогууд нэг хэсэгт орохыг харахад төвөгтэй бий. Мэдээж энэ тохиолдолд бодлогын нөхцлийг хангах олонлогуудыг сонгож болох нь ойлгомжтой.

4.7 ММО-46, Багын багшийн III даваа

Д.Ганзориг

ББ-А1. (Д.Ганзориг) p анхны тоо. $p^2 = 2^n \cdot 3^m + 1$; $m, n \in \mathbb{N}$ хэлбэртэй бол $p \leq 17$ гэж батал.

ББ-А2. (Д.Ганзориг) Натурал тоон дээр 1) Натурал зэрэг дэвсгүүлэх

2) Сүүлийн 2 оронг 3-т үржүүлж өмнөх тоон дээр нэмэх үйлдлээр 243-аас 2010-г гарган авч болох уу?

ББ-А3. (Д.Ганзориг) Дурын натурал $n > 10000$ тооны хувьд $0 < m - n < 3\sqrt[4]{n}$ нөхцлийг хангах, хоёр тооны квадратуудын нийлбэрт тавигдах m -тоо олдоно гэж үзүүл.

ББ-В1. (Д.Ганзориг) Хавтгай дээр аль ч 2 нь паралель бий төгсгөлөг тооны хар ба улаан шулуунууд өгчээ. Хэрэв ижил өнгийн хоёр шулууны огтолцлын цэгийг өөр өнгийн шулуун дайрдаг бол бүх шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.

ББ-В2. (Д.Ганзориг) a, b 1-ээс их натурал тоонууд ба $a \mid b^3 - 1$, $b \mid a - 1$ бол $a = b^{3/2} + 1$ эсвэл $a = b^2 + b + 1$ гэж батал.

ББ-В3. (Д.Ганзориг) $a, b \in \mathbb{N}$ ба 1) $a^2 + ab + b^2$ -нь 0-ээр төгсдөг бол хоёр 0-ээр төгсөнө гэж батал

ББ-А1. $\forall p > 3$ хувьд $p^2 - 1$ -нь 2, 3, 24-т хуваагдана гэдгийг хялбар харуулж болно. $p > 17$ үед $p^2 - 1$ -нь 3-аас их анхны хуваагчтай гэж харуулъя. Эсрэгээс нь тийм бий гэвэл $p-1, p+1$ нь $2 \cdot 3^k, 2^k$ -тай тэнцүү байна. (харгалзан байх албагүй). $p+1 = 2^k$ байг n -тэгш бол $2^n - 1 = (2^{n/2} - 1)(2^{n/2} + 1)$ болох ба үржигдэхүүнүүд нь харилцан анхны байх тул дор хаяж хоёр сондгой ялгаатай анхны хуваагчтай. $p+1 = 2 \cdot 3^k$ байг. Эндээс

буюу

$$k = lb - 1 \quad (l \geq 1) \quad a = \frac{b^3 - 1}{lb - 1} \Rightarrow l < b^2$$

ба

$$lb - 1 | b^2 - l, lb - 1 | b - l^2$$

гэж гарна.

$$a \neq b^{3/2} + 1 \text{ гэе } (l \neq b^{1/2}).$$

Хэрэв $1 < l < b$ бол $0 < |b - l^2| < lb - 1$ буюу $lb - 1 \nmid b - l^2$.

Хэрэв $b \leq l < b^2 \Rightarrow 0 < b^2 - l < lb - 1$ буюу $lb - 1 \nmid b^2 - l$.

Иймд $l = 1$ ба $a = b^2 + b + 1$.

ББ-ВЗ.

1) $a^2 + ab + b^2$ -г 4 ба 25-д хуваагдана гэж харуулахад болно.
 $a^2 + ab + b^2$ -тэгш гэдгээс a, b -тэгш иймд 4-т хуваагдана.

$a^2 + ab + b^2$ нь 5-д хуваагдана гэдгээс $a^3 - b^3$ нь мөн 5-д хуваагдана.
 a, b хоёул 5-д хуваагдана эндээс 25-д хуваагдах нь гарна.

2) $14641 = 11^4$.

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$$

гэдгээс ядаж нэг хаалт нь 11-д хуваагдана. Эндээс $a^3 - b^3$ эсвэл $a^3 + b^3$ 11-д хуваагдана.

Хэрэв $a^2 + ab + b^2 : 11$ бол $11 | a, 11 | b$ болно гэдгээс $11^4 | a^4 + a^2b^2 + b^4$.

Хэрэв $a^2 - ab + b^2 : 11$ бол $11 | a, 11 | b$ гэж гарна.

4.8 ММО-46, Дундын багшийн III даваа

Ц.Дашдорж

ДБ-А1. (Ц.Дашдорж) $k \neq \ell \in \mathbb{N}$ ба $0 \neq a_i \in \mathbb{C}, i = 1, n$ (зарим нь адил байж болно) тоонууд өгчээ. $\{a_1^k, \dots, a_n^k\} = \{a_1^\ell, \dots, a_n^\ell\}$ бол a_i бүр нэгжийн язгуур гэж батал.

ДБ-А2. (Ц.Дандорж) $f(x), g(y)$ нь комплекс коэф. бүхий n зэргийн унитар олон гишүүнтүүд ба $f(x) - g(y) = \prod_{j=1}^n (a_j x + b_j y + c_j)$, $a_j, b_j, c_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, n}$ байг. $\exists a, b, c \in \mathbb{C}$, $f(x) = (x+a)^n + c$, $g(y) = (y+b)^n + c$ гэж батал.

ДБ-А3. (Ц.Дандорж) $M = \{1, \dots, 2010\}$ -г хөх, шар, улаан өнгө бүр орсон ба тоо бүр зөвхөн нэг өнгөөр будагдсан байв.

$S_1 = \{(x, y, z) \in M^2 \mid x, y, z \text{ нь адил өнгөтэй ба } x + y + z \equiv 0(2010)\}$

$S_2 = \{(x, y, z) \in M^3 \mid x, y, z \text{ нь өөр өнгөтэй ба } x + y + z \equiv 0(2010)\}$ гэвэл $2|S_1| > |S_2|$ гэж батал.

ДБ-В1. (Ц.Дандорж) $n \geq 2$ байг. $n \mid 3^n + 4^n$ бол $7 \mid n$ гэж батал.

ДБ-В2. (Ц.Дандорж)

$$\sum_{j=0}^n \left\{ \binom{3n+2-j}{j} 2^j - \binom{3n+1-j}{j-1} 2^{j-1} \right\} = 2^{3n}$$

гэж батал.

Энд $\binom{n}{k} = C_n^k$ ба $j = 0$ үед $\binom{3n+1-j}{j-1} 2^{j-1} = 0$ гэж үзнэ.

ДБ-В3. (Ц.Дандорж) $2 < p \in \mathbb{P}$, $a_1, \dots, a_s$ -нь $\mathbb{Z}_p$ -ийн ялгаатай элементүүд, $b_1, \dots, b_s$ нь мөн $\mathbb{Z}_p$ -ийн ялгаатай элементүүд бол $a_1 + b_{\sigma(1)}, \dots, a_s + b_{\sigma(s)}$ нь $\mathbb{Z}_p$ -ийн ялгаатай элементүүд байх тийм сэлгэмэл $\sigma \in S_s$ олдохыг үзүүл.

ДБ-А1. Бодлогын нөхцөлөөс

$\exists f$ хнух (биекц) : $\{1, 2, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} [n] \rightarrow [n]$,

$\mathbb{Z}f(j) = m$ бол $a_j^k = a_m^l(1)$ гэж гарна.

$$1, f(1), f^{(2)}(1) \xrightarrow{\sim} f(f(1)), \dots$$

дарааллыг авч үзье. f төгсгөлөг олонлог дээрх биекц гэдгээс

$$\exists r, s \in \mathbb{N}, f^{(r)}(1) = f^{(s)}(1), 0 \leq r < s \leq n-1,$$

энд $f^0(1) = 1$ гэж үзнэ. f биец гэдгээс $f^{(t)}(1) = 1$, $t = s - r$ гэж гарна. (1)-ээс $a_1^k = a_{f(1)}^l$, $a_{f(1)}^k = a_{f^{(2)}(1)}^l$. Эндээс $a_1^{k^2} = a_{f^2(1)}^{l^2}$ болох ба индукцээр $a_1^{k^t} = a_{f^{(t)}(1)}^{l^t} = a_1^{l^t}$.

$l \neq k$ тул a_1 нэгжийн язгуур гэж гарна. a_1 -ийн оронд a_j -г авч үзвэл мөн адилаар дүгнэлт гарна.

ДБ-А2. $\prod_{j=1}^n a_j = 1$ -д хувааж

$$f(x) - g(y) = \prod_{j=1}^n (x - \alpha_j y + \beta_j)$$

гэж бичвэл

$$\prod_{j=1}^n (x - \alpha_j y) = x^n - y^n = \prod_{j=1}^n (x - \varepsilon^j y), \varepsilon \in U_n'$$

болохыг төвөггүй ажиглаж болно. Шаардлагатай гэж үзвэл дахин дугаарлах замаар $\alpha_j = \varepsilon^j$, $1 \leq j \leq n$ гэж үзэж чадна. Үүгээр

$$f(x) - g(y) = \prod_{j=1}^n (x - \varepsilon^j y + \beta_j)$$

болноо.

$$a = \frac{\beta_1 - \varepsilon \beta_n}{\varepsilon - 1}, \quad b = \frac{\beta_1 - \beta_n}{\varepsilon - 1} \text{ гээд}$$

$$F(x) = f(x + a), \quad G(y) = g(y + b)$$

гэвэл

$$F(x) - G(y) = (x - y)(x - \varepsilon y) \prod_{j=2}^{n-1} (x - \varepsilon^j y + \gamma_j),$$

$$\gamma_j = \beta_j + a - \varepsilon^j b, \quad 2 \leq j \leq n - 1$$

болохыг шалгаж болно. $y = x$ гэвэл $F(x) = G(x)$ болно. $x = \varepsilon y$ гэвэл мөн $F(\varepsilon y) = G(y) = F(y)$ болохыг олж чадна. Үүгээр α нь $F(x) = 0$ -ийн язгуур бол $\varepsilon \alpha$ нь мөн язгуур болно. Иймд $F(y) = 0$ нь $\alpha, \varepsilon \alpha, \varepsilon^2 \alpha, \dots, \varepsilon^{n-1} \alpha$ язгууртай ба

$$F(y) = G(y) = (y - \alpha)(y - \varepsilon \alpha) \dots (y - \varepsilon^{n-1} \alpha) = y^n - \alpha^n$$

буюу

$$f(x) = F(x - a) = (x - a)^n - \alpha^n, \quad g(y) = (y - b)^n - \alpha^n$$

ДБ-А3. Бид срөнхий тохиолдолд бодъё.

$M = \{1, \dots, n\}$ олонлогийн хөх, шар, улаан элементүүдийн олонлогуудыг харгалзана. B, Y, R ба

$$|B|=b, |Y|=y, |R|=r \quad (b+y+r=n) \text{ гэе.}$$

Тэгвэл

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x^i, \quad f_b(x) = \sum_{i \in B} x^i, \quad f_y(x) = \sum_{i \in Y} x^i, \quad f_r(x) = \sum_{i \in R} x^i$$

ба ε -ээр нэгжийн n зэргийн язгуурыг тэмдэглэвэл.

$$|S_1| = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (f_b^3(\varepsilon^k) + f_y^3(\varepsilon^k) + f_r^3(\varepsilon^k)) \right) = \frac{1}{n} A,$$

$$|S_2| = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (f_b(\varepsilon^k) \cdot f_y(\varepsilon^k) \cdot f_r(\varepsilon^k)) \right) = \frac{1}{n} B$$

болно. Эндээс бид $2A > B$ гэж батлахад халгалттай. $A \geq 3B$ гэж батлая.

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ca) + 3abc$$

ба

$$1 \leq k \leq n-1: \quad f_b(\varepsilon^k) + f_y(\varepsilon^k) + f_r(\varepsilon^k) = f(\varepsilon^k) = 0 \quad (*)$$

ашиглавал

$$A = b^3 + y^3 + r^3 + 3 \sum_{k=1}^{n-1} (f_b(\varepsilon^k) f_y(\varepsilon^k) f_r(\varepsilon^k)),$$

$$B = byr + \sum_{k=1}^{n-1} (f_b(\varepsilon^k) f_y(\varepsilon^k) f_r(\varepsilon^k)) = byr + B'$$

гэвэл

$$A = b^3 + y^3 + r^3 + 3B' \geq 3byr + 3B' = 3 \cdot B$$

болж батлагдана.

ДБ-В1. p нь n -ийн хамгийн бага анхны тоон хуваагч гэвэл $3 \nmid p \nmid 2$ ба $(n, p-1) = 1$ тул $\exists a \in \mathbb{N}$, $an \equiv 1(p-1)$.

$p-1$ тэгш тоо тул a сондгой тоо.

Иймд $p|3^n + 4^n|3^{an} + 4^{an}$. Фермагийн теоремоор $3^{p-1} \equiv 1(p)$.

$p-1|an-1$ гэдгээс $3^{an} \equiv 3(p)$. Мөн үүний адилаар $4^{an} \equiv 4(p)$.

Иймд

$$3^{an} + 4^{an} \equiv 3 + 4 \equiv 7(p)$$

буюу $p|7$. Иймд $p = 7|n$

ДБ-В2. f дахь x^j -ийн коэффициентийг $ko(f, x^j)$ гэвэл нийлбэр дахь j дугаар илэрхийлэл нь

$$A = ko[(1+2x)^{3n+2-j}, x^j] - ko[(1+2x)^{3n+1-j}, x^{j-1}]$$

болно.

$$A = ko\{x^{3n+2-j}[(1+2x)^{3n+2-j} - x(1+2x)^{3n+1-j}], x^{3n+2}\} =$$

$$= ko[(x+x^2)(x+2x^2)^{3n+1-j}, x^{3n+2}] \Rightarrow \sum_{i=0}^n ko[()] =$$

$$= ko[x(1+x)((x+2x^2)^{3n+1} + (x+2x^2)^{3n} + \dots + (x+2x^2)^{2n+1}), x^{3n+2}] =$$

$$= ko[x^{2n+2}(1+2x)^{2n+1} \cdot \frac{1 - (x+2x^2)^{n+1}}{1-2x}] = X_1 - X_2, x^{3n+2}]$$

$$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + (2x)^2 + (2x)^3 + \dots \text{ байдгийг анхаарвал}$$

X_2 нь x^{3n+3} үржигдэхүүнтэй учир x^{3n+2} -ийн коэффициентод үл нөлөөлнө. Тэгвэл

$$A = ko(X_1, x^{3n+2}) = 2^n (1 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n) =$$

$$= 2^n \cdot \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{2n+1} C_{2n+1}^j \right) = 2^{3n}.$$

ДБ-В3. Энэ бодлогын бодолтыг хараахан хийж амжаагүй байна.

Багш сурагчдын англи хэлний мэдлэгт нэмэр болгох зорилгоор ММО-46-ын 4-ийн даваа болон ОУМО-51-ийн сорилын бодлогуудыг англи хэл дээр бичив.

5 ММО-46, IV давааны бодлогууд

9th grade

9.1. Given are sequences $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ by the following recurrent relations: $x_1 = 1$, $y_1 = 39$ and

$$x_{n+1} = 23x_n + y_n + 2, \quad y_{n+1} = 551x_n + 24y_n + 64.$$

Prove that x_n is a perfect square for all positive integer n .

(proposed by U. Batzorig)

9.2. A circle touches BC side of triangle ABC at the point M and intersects sides AB and AC at D and E respectively. If $DE \parallel BC$, prove that $EM = MD$.

(proposed by T. Khulan)

9.3. Let a, b, c be distinct positive real numbers. Show that

$$\frac{(b-c)^4}{(a-b)^2(a-c)^2} + \frac{(a-c)^4}{(a-b)^2(b-c)^2} + \frac{(a-b)^4}{(a-c)^2(b-c)^2} \geq \frac{33}{2}.$$

(proposed by B. Sanchir and VQBC)

9.4. Given are $2n$ people and it is known that their heights are all different. They have to stand in two rows, each with n people. How many different positions are there, if the front row person is always shorter than the back row person?

(folklore)

9.5. Let M and N be points on the side of BC of the triangle ABC . It is known that $\angle BAM = \angle CAN$ and AL is bisector of the angle

A. Prove that $\frac{BM}{MC} + \frac{NB}{NC} \geq 2 \cdot \frac{BL}{LC}$.

(proposed by N. Argilsan and D. Odgerel)

9.6. Given are m positive integers such that $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m \leq 400$. Show that $m \leq 40$, if $\gcd(a_i, a_j) \leq 400$ for all i and j ($1 \leq i, j \leq m$).

(folklore)

10th grade

10.1. Let $a, b, c \geq 0$. Prove that

$$\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \sqrt[6]{\frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}{8}} + \sqrt[3]{abc}.$$

(proposed by E. Enkhzaya)

10.2. Let A be a nonempty subset of the positive integers. If $x \in A$, then $\lfloor \sqrt[3]{x} \rfloor \in A$ and $\lfloor 9x \rfloor \in A$ holds for any x . Prove that A is the set of all positive integers. ($\lfloor x \rfloor$ denotes the integer part of x)

(proposed by B. Bayarjargal)

10.3. Let A be one of the intersection points of circles $\omega_1(O_1)$ and $\omega_2(O_2)$. ℓ is a line that touches ω_1 and ω_2 at B and C respectively. Let O_3 be the center of the circumscribed circle of ABC . And we choose D as A is midpoint of O_3D . If M is midpoint of O_1O_2 , then prove that $\angle O_1DM = \angle O_2DA$.

(proposed by U. Batzorig)

10.4. Let M be a point on the circumscribed circle of an acute triangle ABC and distinct from the vertices of ABC . MP and MQ are perpendicular lines from M to AB and AC respectively and H is orthocenter of triangle ABC . Prove that PQ intersects HM at the midpoint of HM .

(proposed by E. Enkhzaya)

10.5. Prove that $6 \nmid [(\sqrt[3]{28} - 3)^{-n}]$, for all n .

(proposed by B. Amarsanaa)

10.6. Find all the positive integers n such that there exist n sets $A_1, A_2, \dots, A_n$ such that each of them has exactly 5 elements, any two of these n sets have exactly one common element and union of these sets consists n elements.

(proposed by U. Batzorig, folklore)

11th grade

11.1. Let γ_1 and γ_2 be externally tangent circles and S be the point of tangency. Let ω be a circle that touches internally γ_1 and γ_2 at P and Q respectively. Denote by R one of the intersection points of ω and the common tangent line of γ_1 and γ_2 that passes through S . Furthermore, the lines RP and RQ intersect γ_1 and γ_2 at A and B respectively and the line PQ intersects γ_1 and γ_2 at C and D respectively. Prove that the lines RS , AC and BD have a common point.

(proposed by U. Batzorig)

11.2. Let $a, b, c, d > 0$. Prove the following equality:

$$\sqrt{\left(a + \sqrt{\frac{bcd}{a}}\right)\left(b + \sqrt{\frac{acd}{b}}\right)\left(c + \sqrt{\frac{abd}{c}}\right)\left(d + \sqrt{\frac{abc}{d}}\right)} + 2\sqrt{abcd} \geq ab + bc + cd + da + ac + bd.$$

(proposed by E. Enkhzaya)

1.1.3. Let us say that an integer number is a power number, if there exist positive integers a and n such that the number equals to a^n and $n > 1$.

a) Prove that there exist 2010 positive integers such that every sum of the integers selected from them is not a power number.

b) Prove that there exist 2010 positive integers such that every sum of the integers selected from them is a power number.

(proposed by B. Bayasgalan and B. Sandagdorj)

1.1.4. Let $P(x)$ be a unitary polynomial with integer coefficients and $Q(x) = P(x^{2^{2010}})$. If $|P(0)| = 2010$ then prove that $Q(x)$ is irreducible over $\mathbb{Z}$.

(folklore)

1.1.5. Denote by $d(A)$ the sum of all the elements of A (if $A = \emptyset$, $d(A) = 0$). Let $S = \{1, 2, \dots, 2013\}$ and

$$T_r = \{T \mid T \subseteq S, d(T) \equiv r \pmod{7}\},$$

for $r = 1, 2, \dots, 6$. Find the number of elements of T_r for each r .

(Chinese olympiad problem)

1.1.6. Let $ABCD$ be a tangential quadrilateral. Let ω be externally inscribed circle in $ABCD$, tangent to AD , BC and AB . Denote by X_{AB} the point of tangency of ω and the circle that passes through A and B and internally tangent to ω . Let us define X_{BC} , X_{CD} and X_{DA} , analogously. Prove that the bisectors of the angles $\angle AX_{AB}B$, $\angle BX_{BC}C$, $\angle CX_{CD}D$ and $\angle DX_{DA}A$ are concurrent.

(proposed by G. Batzaya)

Primary school teachers

TA.1. Three problems A, B and C were given in a mathematical olympiad and there was 25 participants. Every participants solved at least 1 problem. Among the participants, who didn't solve problem A , the number of participants who solved B is twice as much as the number of participants who solved problem C . Number of participants who solved only problem A is 1 more than the number of remaining participants who solved problem A . Half of the participants who solved just one problem, didn't solve problem A . How many participants solved just one problem B .

(proposed by B. Sandagdorj)

TA.2. Let $m \in \mathbb{N}$. $m^2 < a, b < m^2 + m$ and $a \neq b$. Find all the natural c , such that $c \mid ab$, $m^2 < c < m^2 + m$.

(proposed by D. Ganzorig)

TA.3. Let A, C be interior points of $XOBD$ square, such that $\angle AXC = \angle ABC = 45^\circ$. Prove that, $S_{\triangle AXO} + S_{\triangle ABC} + S_{\triangle CXD} = S_{\triangle ACX} + S_{\triangle AOB} + S_{\triangle CBD}$.

(proposed by D. Ganzorig)

TA.4. Find all the positive integer N such that there exists M satisfying the following two conditions:

- M 's first few digits coincide with N .
- Let S be a number obtained from M by transferring the digits that express N from the beginning of M to the end of M . Then $S \cdot N = M$.

(For example, $M = 460100021743857360295716$ satisfies the conditions, for $N = 46$).

(proposed by D. Ganzorig)

TA.5. Prove that every even number not exceeding $2n(4n + 1)$ can be written as $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \dots \pm 4n$, here we choose $+$ or $-$.

(proposed by N. Argilsan)

TA.6. Let $(2m+1, 2n+1) = 1$ for natural numbers m and n . Find

$$(2^{2m+1} + 2^{m+1} + 1, 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1).$$

Here (a, b) denotes the greatest common denominator of a and b .

(proposed by D. Ganzorig)

Secondary school teachers

TB.1. If $a_i \geq 0$, prove that

$$\frac{n(n+1)}{2} \left(\prod_{i=1}^n A_i^i \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} \geq \frac{n(n-1)}{2} \left(\prod_{i=1}^{n-1} A_i^i \right)^{\frac{2}{n(n-1)}} + nG_n,$$

where $A_k = \sum_{i=1}^k \frac{2ia_i}{k(k+1)}$, $G_k = \left(\prod_{i=1}^k a_i^i \right)^{\frac{2}{k(k+1)}}$.

(proposed by B. Sanchir)

TB.2. Prove that there are infinitely many prime numbers p such that $x^x \equiv 1 \pmod{p}$ equation has at least 2010 solutions in $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$.

(proposed by U. Batzorig)

TB.3. Let k, n be positive integers. Given $A_0, A_1, \dots, A_n$ points and edges that connect them are colored with k colors. $S(n, k)$ is the maximum number of angles, whose sides are colored with different colors. Prove that $S(n, k) > \binom{k}{2} \cdot \left[\frac{n}{k} \right]^2 \cdot n$.

(proposed by B. Bayasgalan and B. Sandagdorj)

TB.4. Is it possible to color all rational numbers with one of two colors, so that if $x, y \in \mathbb{Q}$, $x \neq y$, $xy = 1$ or $x + y \in \{0, 1\}$ then x and y must be colored with different colors.

(proposed by Ch. Gantumur)

TB.5. Parliament has 76 members and 114 working groups (each has at least two members). There is no two working groups that have exactly the same members. If a member is elected as a speaker, he have to leave all his working groups and after that if there are two working groups that have exactly the same members, then the groups must be united into one working group. Prove that, it is possible that one can elect a speaker so that after the election there are at least 113 working groups.

(proposed by B. Batbayasgalan)

TB.6. The nine-point circle of scalene $\triangle ABC$ touches with incircle of $\triangle ABC$ at point S . AD , BE and CF are heights. If reflection of DS over AD is ℓ_1 , reflection of ES over BE is ℓ_2 and reflection of FS over CF is ℓ_3 , then prove that $\ell_1 \parallel \ell_2 \parallel \ell_3$.

(proposed by U. Batzorig)

6 ОУМО-51-ын сори́лын бодлогууд

IMO selection test №1

TST.1.1. Let $\nu(n)$ be the order of 2 in $n!$. Prove that for any positive integers a and m there exists n ($n > 1$) such that $\nu(n) \equiv a \pmod{m}$.

(Kömal problem)

TST.1.2. Let p be a prime number. Prove that

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} \binom{p+k}{k} \equiv -1 \pmod{p^3}$$

(proposed by B. Batbayasgalan, inspired by Putnam olympiad problem)

TST.1.3. Given an acute triangle ABC . Let (ω, I) be the inscribed circle of ABC , (Ω, O) be the circumscribed circle of ABC and A_0 be mid point of AH altitude. ω touches BC at point D . $A_0D \cap \omega = P$ and the perpendicular from I to A_0D intersects BC at the point M . MR and MS lines touch Ω at R and S respectively. Prove that the points R, P, D and S are concyclic.

(proposed by E. Enkzaya, inspired by Vietnamese olympiad problem)

IMO selection test №2

TST.2.1. A group of the pupils in a class are called *dominant* if any other pupil from the class has a friend in the group. If it is known that there exists at least 100 dominant group, then there exists one more dominant group.

(proposed by B. Batbayasgalan, inspired by Kömal problem)

TST.2.2. Let ABC be a scalene triangle. The inscribed circle of ABC touches the sides BC , CA and AB at the points A_1 , B_1 and C_1 respectively. Let I be the center of the inscribed circle, O be the center of the circumscribed circle and $OI \cap BC = D$. The perpendicular line from A_1 to B_1C_1 intersects AD at the point E . Prove that B_1C_1 passes through the midpoint of EA_1 .

(Romanian olympiad problem)

TST.2.3. Let G be a graph, not containing K_4 as a subgraph and $|V(G)| = 3k$. What is the maximum number of triangles in G .

(Romanian olympiad problem)

IMO selection test №3

TST.3.1. Let $A = \{a^2 + 13b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$. Prove that there

a) exists

b) exists infinitely many

x, y integer pairs such that $x^{13} + y^{13} \in A$ and $x + y \notin A$.

(proposed by B. Bayarjargal)

TST.3.2. Given a triangle ABC , the internal and external bisectors of angle A intersect BC at points D and E , respectively. Let F be the point (different from A) where line AC intersects the circle ω with diameter $\overline{DE}$. Finally, draw the tangent at A to the circumcircle of triangle ABF , and let it hit ω at A and G . Prove that $AF = AG$.

(Vietnamese olympiad problem)

TST.3.3. Let n and d be positive integers satisfying $d < \frac{n}{2}$. There are n boys and n girls in a school. Each boy has at most d girlfriend and each girl has at most d boyfriend. Prove that one can introduce some of them to make each boy has exactly $2d$ girlfriend and each girl has exactly $2d$ boyfriend.

(proposed by B. Batbaysgalan, folklore)

IMO selection test №4

TST.4.1. Let t, k, m be a positive integers and $t > \sqrt{km}$. Prove that

$$\binom{2m}{0} + \binom{2m}{1} + \cdots + \binom{2m}{m-t-1} < \frac{2^{2m}}{2k}.$$

(proposed by B. Amarsanaa, folklore)

TST.4.2. Let r be a given positive integer. Is it true that for every r -coloring of the natural numbers there exists monochromatic solution of the equation $x + y = 3z$?

(proposed by B. Batbaysgalan, folklore)

TST.4.3. Let m and n be a positive integers such that $m > n$ and $m \equiv n \pmod{2}$. If $(m^2 - n^2 + 1) \mid n^2 - 1$, then prove that $m^2 - n^2 + 1$ is a perfect square.

(proposed by G. Batzaya, folklore)

Solutions of the problems

9.1. $x_{n+1} = 23x_n + y_n + 2$, $y_{n+1} = 551x_n + 24y_n + 64$. Multiplying the first equation by 24 then subtracting these two, we get $y_{n+2} = 24x_{n+1} - x_n + 18$. And we have $x_{n+2} = 23x_{n+1} + y_{n+1} + 2$. Adding last two equations, we have

$$x_{n+2} = 47x_{n+1} - x_n + 1 \quad (*).$$

Thus, $x_{n+1} = 47x_n - x_{n-1} + 18$. Subtracting these two equations, we get

$$x_{n+2} = 48x_{n+1} - 48x_n + x_{n-1} \quad (**).$$

Let $a_n = \sqrt{x_n}$. It suffices to prove that a_n is integer for $n \in \mathbb{N}$. From $x_1 = 1$ and $y_1 = 39$, we get $x_2 = 64$ and $x_3 = 3025$. Then $(**)$ is equivalent to

$$a_{n+2}^2 = 48a_{n+1}^2 - 48a_n^2 + a_{n-1}^2.$$

From this,

$$a_{n+2}^2 - (49a_{n+1}^2 - 14a_{n+1}a_n + a_n^2) = a_{n-1}^2 - (49a_n^2 - 14a_na_{n+1} + a_{n+1}^2)$$

and

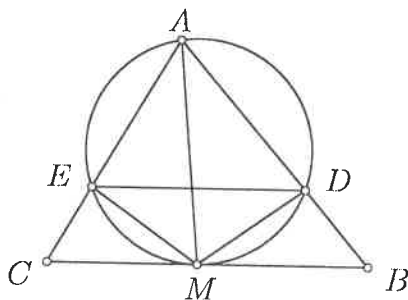
$$a_{n+2}^2 - (7a_{n+1} - a_n)^2 = a_{n-1}^2 - (7a_n - a_{n+1})^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Furthermore,

$$\begin{aligned} & (a_{n+2} + a_n - 7a_{n+1})(a_{n+2} + 7a_{n+1} - a_n) = \\ & = (a_{n-1} - 7a_n + a_{n+1})(a_{n-1} + 7a_n - a_{n+1}). \end{aligned}$$

Let $b_n = a_{n+2} + a_n - 7a_{n+1}$, then $b_1 = a_3 + a_1 - 7a_2 = \sqrt{3025} + \sqrt{1} - 7\sqrt{64} = 0$. $b_n(2a_{n+2} - b_n) = b_{n-1}(2a_{n-1} - b_{n-1})$ holds for $n \in \mathbb{N}$ (***). Applying for $n = 2$, we get $b_2(2a_4 - b_2) = b_1(2a_1 - b_1) = 0$. Thus, $b_2 = 0$ or $2a_4 - b_2 = 0$. Since x_n is monotonically increasing, a_n is monotonically increasing too. Hence $2a_{n+2} - b_n = a_{n+2} + 7a_{n+1} - a_n > 0$. Therefore, $b_2 = 0$. Applying (***) for $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 0$. Hence $a_{n+2} = 7a_{n+1} - a_n$, for $n \in \mathbb{N}$. Since a_1 and a_2 are integers, a_n is integer for $n \in \mathbb{N}$.

9.2. Since BC is tangent to the circle, we have $\angle EMC = \angle EAM = \angle EDM$ and $\angle DMB = \angle DAM = \angle DEM$. From $DE \parallel BC$, we have $\angle EDM = \angle DMB$. So AM bisects $\angle CAB$.



9.3. Let us assume that $a > b > c$. $a - c = (a - b) + (b - c) \geq 2\sqrt{(a - b)(b - c)}$. Then

$$\frac{(a - c)^4}{(a - b)^2(b - c)^2} \geq 16$$

holds. Now it suffices to prove that

$$\frac{(a - b)^4}{(b - c)^2} + \frac{(b - c)^4}{(a - b)^2} \geq \frac{(c - a)^2}{2}$$

By Cauchy-Schwarz inequality

$$\frac{(a - b)^4}{(b - c)^2} + \frac{(b - c)^4}{(a - b)^2} \geq \frac{((a - b)^2 + (b - c)^2)^2}{(b - c)^2 + (a - b)^2} = (a - b)^2 + (b - c)^2.$$

Then again by Cauchy-Schwarz $(a-b)^2 + (b-c)^2 \geq \frac{(a-b+b-c)^2}{2} = \frac{(a-c)^2}{2}$.

Equality holds for $a + c = 2b$.

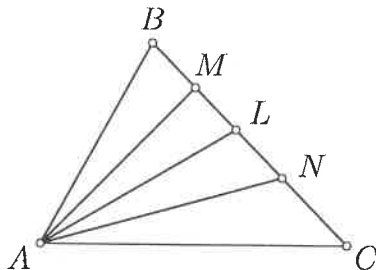
9.4. In the first seats of the rows, we can choose 2 people $\frac{2n(2n-1)}{2}$ different ways. Then in the second seats of the rows, we can choose 2 people $\frac{(2n-2)(2n-3)}{2}$ different ways. Continuing this, we have $\frac{2n(2n-1)}{2} \cdot \frac{(2n-2)(2n-3)}{2} \cdots \frac{2 \cdot 1}{2} = \frac{(2n)!}{2^n}$.

9.5. Let $\angle BAM = \angle CAN$ and $\angle MAN = x$. By the property of bisector $\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$. If the area of $\triangle ABM$ is S_{ABM} and that of $\triangle ANC$ is S_{ANC} then $S_{ABM} = \frac{1}{2}AB \cdot AM \sin \varphi$, $S_{ANC} = \frac{1}{2}AC \cdot AN \sin \varphi$. From this

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ANC}} = \frac{AB \cdot AM}{AC \cdot AN} = \frac{BM}{NC}.$$

Also

$$\frac{S_{ABN}}{S_{AMC}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AN \sin(\varphi + x)}{\frac{1}{2}AM \cdot AC \sin(\varphi + x)} = \frac{AB \cdot AN}{AM \cdot AC} = \frac{BN}{MC}.$$



It follows from the two equalities that $\frac{BM \cdot BN}{NC \cdot MC} = \frac{AB^2}{AC^2}$. By AM-GM inequality,

$$\frac{BM}{MC} + \frac{NB}{NC} \geq 2\sqrt{\frac{BM \cdot NB}{MC \cdot NC}} = 2\sqrt{\frac{AB^2}{AC^2}} = 2 \cdot \frac{AB}{AC} = 2 \cdot \frac{BL}{LC}.$$

Equality holds for $M \equiv N \equiv L$.

9.6. First let us change the order: $a_1 = b_m, a_2 = b_{m-1}, \dots, a_m = b_1$. Then we have $1 \leq b_m \leq b_{m-1} \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq 400$. Let us show that $b_k \leq \frac{400}{k}$, $1 \leq k \leq m$. If $k = 1$, it is true.

For the induction step, we need to prove that $b_{k+1} \leq \frac{400}{k+1}$. By the condition

$$b_k - b_{k+1} \geq (b_k, b_{k+1}) = \frac{b_k \cdot b_{k+1}}{[b_k, b_{k+1}]} \geq \frac{b_k \cdot b_{k+1}}{400}$$

holds. From this inequality we have $b_{k+1} \leq \frac{400b_k}{b_k + 400} = \frac{400}{1 + \frac{400}{b_k}} \leq \frac{400}{1+k}$. Hence $\frac{400}{b_k} \geq k$.

The $1 \leq b_m \leq b_{m-1} \leq \dots \leq b_{20} \leq \frac{400}{20} = 20$. Since b_i is integer for $1 \leq i \leq m$, $m \leq 40$.

10.1. By AM-GM inequality

$$\begin{aligned} 3 &= \left(\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} \right) + \left(\frac{x_1}{1+x_1} + \frac{x_2}{1+x_2} + \frac{x_3}{1+x_3} \right) \geq \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)}} + 3\sqrt[3]{\frac{x_1x_2x_3}{(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)}} \end{aligned}$$

for $x_1, x_2, x_3 > 0$.

Now if $x_i = \frac{a_i}{b_i}$, $a_i, b_i > 0$, from above it implies

$$\sqrt[3]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3)} \geq \sqrt[3]{a_1a_2a_3} + \sqrt[3]{b_1b_2b_3}. \quad (*)$$

Also $x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)}$ holds for $x, y > 0$.

If $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ and $y = \sqrt{ab}$, then it implies

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \sqrt{ab} \leq a + b. \quad (1)$$

Using (1) and (*), we have

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} &\stackrel{(1)}{\geq} \sqrt{\prod_{cyc} \left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \sqrt{ab} \right)} \stackrel{(*)}{\geq} \\ &\stackrel{(*)}{\geq} \sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2}}} + \sqrt[3]{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ca}} = \\ &= \sqrt[6]{\frac{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)}{8}} + \sqrt[3]{abc}. \end{aligned}$$

Equality holds for $a = b = c$.

10.2. Since A is a nonempty subset of the positive integers, A has a minimum element m . If $m > 1$ then $m > \sqrt[3]{m} \geq [\sqrt[3]{m}]$ and $[\sqrt[3]{m}] \in A$. It is contrary to that m is the minimum element. So $m = 1$. Since $1 \in A$, $9^k \in A$. From this $[\sqrt[3]{81}] = 4 \in A$ and $4 \cdot 9 = 36 \in A$ and $[\sqrt[3]{36}] = 3 \in A$. Then $3^n \in A$ for $n = 1, 2, \dots$ (*).

Lemma. *There exists 3^k type integer in the $[n, 3n]$ interval.*

Proof of lemma. Let $3^s \leq n < 3^{s+1}$. Then $n < 3^{s+1} \leq 3n$. $\square$

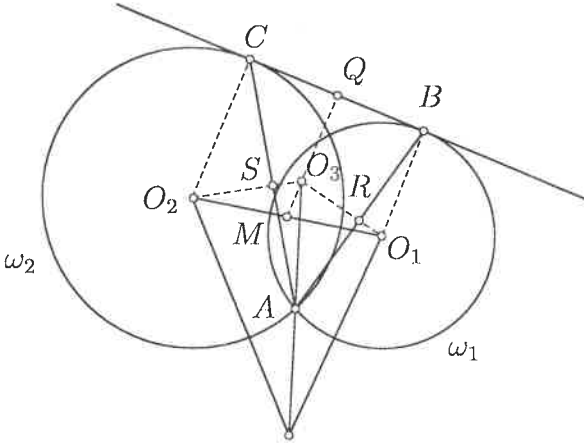
Assume that there exists n such that $n \notin A$. Let us show that if $a \in [n^{3^p}, (n+1)^{3^p} - 1]$ then $a \notin A$. Suppose that $a \in A$, then $[\sqrt[3]{a}] \in A$ and $[\sqrt[3]{a}] \in [n^{3^{p-1}}, (n+1)^{3^{p-1}} - 1]$. Using this statement p times, we'll get $[\sqrt[3]{\dots [\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}]}] = n \in A$ which is contradiction.

Since $\log_3(n+1) - \log_3 n > 0$ and $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{3^k} = 0$, there exists a positive integer k such that

$$\log_3(n+1) - \log_3 n > \frac{1}{3^k}.$$

From this $3^k \log_3 \frac{n+1}{n} > 1$, then $\log_3 \left(\frac{n+1}{n} \right)^{3^k} > \log_3 3$ and $(n+1)^{3^k} > 3 \cdot n^{3^k}$. Hence $[n^{3^k}, 3n^{3^k}] \subseteq [n^{3^k}, (n+1)^{3^k} - 1]$. By the lemma, there exists $s \in \mathbb{N}$ such that $3^s \in [n^{3^k}, (n+1)^{3^k} - 1]$ and $3^s \notin A$, contradicting (*). It means $\mathbb{N} \subseteq A$.

10.3. Let us denote by Q, R and S the midpoints of BC, AB and AC respectively. Then $O_3R \perp AB, O_1R \perp AB, O_3S \perp AC, O_2S \perp AC, O_3Q \perp BC$ and $MQ \perp BC$. Assuming $\angle ABC = \beta$ and $\angle BCA = \gamma$, we get $\angle BO_3O_1 = \gamma$ and $\angle CO_3O_2 = \beta$, as O_3 is the circumcenter of $\triangle ABC$.



Since BC is tangent to ω_1 , $\widehat{AB} = \beta$. So $\angle BO_1O_3 = \beta$. Similarly $\angle CO_3O_2 = \gamma$. Hence $\angle BO_3O_1 = \angle CO_2O_3 = \gamma$ and $\angle BO_1O_2 = \angle CO_3O_2 = \beta$. Thus, $\triangle CO_2O_2 \sim \triangle BO_1O_3$.

Let us denote the radii of ω_1 by r_1 , the radii of ω_2 by r_2 and the radii of ω_3 (the circumcircle of $\triangle ABC$) by r_3 . Then $r_3 = CO_3 = BO_3 = AO_3 = AD$, $r_1 = O_1B = O_1A$ and $r_2 = O_2C = O_2A$. Also $\triangle O_1BO_3 = \triangle O_1AO_3$ and $\triangle O_2CO_3 = \triangle O_2AO_3$. It follows that $\angle O_1AO_3 = \angle O_2AO_3$, which means $\angle O_1AD = \angle O_2AD$. From $\triangle CO_3O_2 \sim \triangle BO_1O_3$, we have $\frac{O_1B}{O_3B} = \frac{CO_3}{CO_2}$, i.e. $\frac{r_1}{r_3} = \frac{r_3}{r_2}$. Then

$$\frac{AO_1}{AD} = \frac{AD}{AO_2} \text{ holds. So } \triangle O_1AD \sim \triangle DAO_2. \text{ Hence } \frac{DO_1}{DO_2} = \frac{AO_1}{AD} = \frac{r_1}{r_3} \quad (*).$$

$$\frac{r_1}{r_3} = \frac{AO_1}{AD} = \frac{\sin \angle ADO_1}{\sin \angle AO_1D} = \frac{\sin \angle ADO_1}{\sin \angle ADO_2} \quad (**)$$

Now we use the law of sines to $\triangle O_2MD$ and $\triangle DMO_1$.

$$\frac{O_2M}{\sin \angle O_2DM} = \frac{DO_2}{\sin \angle O_2MD}, \quad \frac{O_1M}{\sin \angle O_1DM} = \frac{DO_1}{\sin \angle O_1MD}.$$

From thus, we'll get $\frac{DO_1}{DO_2} = \frac{\sin \angle O_2DM}{\sin \angle O_1DM}$. Then from (*) and (**),

$$\frac{DO_1}{DO_2} = \frac{r_1}{r_3} = \frac{\sin \angle ADO_1}{\sin \angle ADO_2}, \quad \frac{\sin \angle O_2DM}{\sin \angle O_1DM} = \frac{\sin \angle ADO_1}{\sin \angle ADO_2}$$

it is equivalent to

$$\frac{\sin(\angle O_1DO_2 - \angle O_1DM)}{\sin \angle O_1DM} = \frac{\sin(\angle O_1DO_2 - \angle ADO_2)}{\sin \angle ADO_2},$$

$$\frac{\sin \angle O_1DO_2 \cos \angle O_1DM - \cos \angle O_1DO_2 \sin \angle O_1DM}{\sin \angle O_1DM} =$$

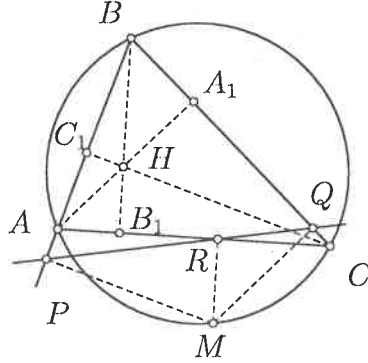
$$\frac{\sin \angle O_1DO_2 \cos \angle ADO_2 - \cos \angle O_1DO_2 \sin \angle ADO_2}{\sin \angle ADO_2}$$

$$\sin \angle O_1DO_2 \operatorname{ctg} \angle O_1DM - \cos \angle O_1DO_2 =$$

$$= \sin \angle O_1DO_2 \operatorname{ctg} \angle ADO_2 - \cos \angle O_1DO_2.$$

Since $\sin \angle O_1DO_2 \neq 0$, we obtain $\operatorname{ctg} \angle O_1DM = \operatorname{ctg} \angle ADO_2$. Hence $\angle O_1DM = \angle ADO_2$ ($0^\circ < \angle O_1DM, \angle ADO_2 < 180^\circ$).

10.4. Let us denote the feet of the perpendicular from M to AC by R . Then P, Q and R are collinear (Simson's line).



If $\angle CAM = \varphi_1$, $\angle ACM = \varphi_2$ and $\angle ABC = \beta$, then $\varphi_1 + \varphi_2 = \beta$. We first show that $S_{PHQ} = S_{PMQ}$. Since

$$S_{PMQ} = S_{BPMQ} - S_{BPQ} \text{ and } S_{PHQ} = S_{BPQ} - S_{BHQ} - S_{BHP},$$

it suffices to prove

$$S_{BPQ} = \frac{S_{PQMP} + S_{BHQ} + S_{BHP}}{2} = S_{PMQ} + S_{BHQ} + S_{BHP} \quad (1).$$

$\frac{BM}{\sin(\gamma + \varphi_2)} = 2R$ and $MQ = BM \cdot \sin \varphi_1$. From this $MQ = 2R \sin \varphi_1 \sin(\gamma + \varphi_2)$. And similarly $MP = 2R \sin \varphi_2 \sin(\alpha + \varphi_1)$, $BQ = 2R \cos \varphi_1 \sin(\gamma + \varphi_2)$, $BP = 2R \cos \varphi_2 \sin(\alpha + \varphi_1)$ (here $\sin(\alpha + \varphi_2) = \sin(\gamma + \varphi_2)$).

$HA_1 = BH \cos \gamma = 2R \cos \beta \cos \gamma$, $HC_1 = 2R \cos \alpha \cos \beta$. From this the (1) equality is equivalent to $\sin \beta (BP \cdot BQ - MP \cdot MQ) = HA_1 \cdot BQ + HC_1 \cdot BP$.

$$\sin \beta (4R^2 \sin(\alpha + \varphi_1) \sin(\gamma + \varphi_2)) (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) =$$

$$= 4R^2 \cos \beta (\cos \gamma \cos \varphi_1 \sin(\gamma + \varphi_2) + \cos \alpha \cos \varphi_2 \sin(\alpha + \varphi_1))$$

$$\sin \beta \sin(\alpha + \varphi_1) = \cos \gamma \cos \varphi_1 + \cos \alpha \cos \varphi_2$$

$$\sin \beta \sin \alpha \cos \varphi_1 + \sin \beta \cos \alpha \sin \varphi_1 = \cos \varphi_1 (\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta) +$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha (\cos \beta \cos \varphi_1 + \sin \beta \sin \varphi_1) &= \cos \alpha (\sin \beta \sin \varphi_1 + \cos \beta \cos \varphi_1) \\ \sin \beta \sin \alpha \cos \varphi_1 &= \sin \alpha \sin \beta \cos \varphi_1 \end{aligned}$$

So $S_{PHQ} = S_{PMQ}$, implies that PQ intersects HM at the midpoint of HM .

10.5. Using $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b)$,

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{28} - 3)^{-n} &= ((\sqrt[3]{2m})^2 + \sqrt[3]{28} \cdot 3 + 3^3)^n = \\ &= \sum_{k+l+m=n} \frac{n!}{k!l!m!} (\sqrt[3]{28})^{2k+l} 3^{l+2m}. \end{aligned}$$

Let $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$. Consider

$$\begin{aligned} S &= ((\sqrt[3]{2m})^2 + \sqrt[3]{28} \cdot 3 + 3^3)^n + ((\sqrt[3]{2m\varepsilon})^2 + \sqrt[3]{28\varepsilon} \cdot 3 + 3^3)^n + \\ &\quad + ((\sqrt[3]{2m\varepsilon^2})^2 + \sqrt[3]{28\varepsilon^2} \cdot 3 + 3^3)^n = \\ &= \sum_{k+l+m=n} \frac{n!}{k!l!m!} (\sqrt[3]{28})^{2k+l} 3^{l+2m} (1 + \varepsilon^{2k+l} + \varepsilon^{4k+2l}). \end{aligned}$$

If $2k + l \not\equiv 0 \pmod{3}$, then $1 + \varepsilon^{2k+l} + \varepsilon^{4k+2l} = 0$. If $2k + l \equiv 0 \pmod{3}$, then $1 + \varepsilon^{2k+l} + \varepsilon^{4k+2l} = 3$. Hence we get that $S \in \mathbb{Z}$ and $S \equiv 3 \pmod{3}$. On the other hand, it is easy to check that

$$A = |(\sqrt[3]{2m\varepsilon})^2 + \sqrt[3]{28\varepsilon} \cdot 3 + 3^3| < 1, \quad B = |(\sqrt[3]{2m\varepsilon^2})^2 + \sqrt[3]{28\varepsilon^2} \cdot 3 + 3^3| < 1.$$

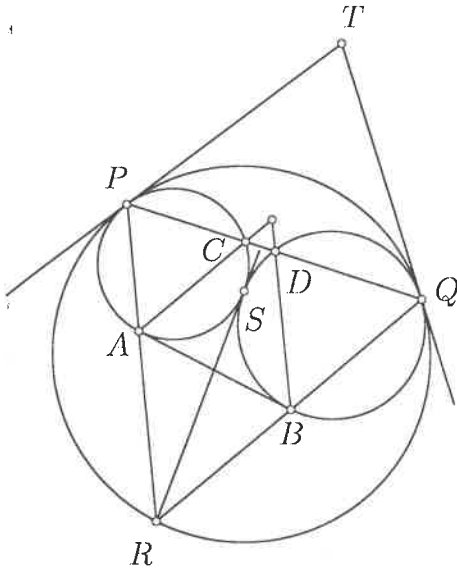
From this implies that $[(\sqrt[3]{28} - 3)^{-n}] = [S - A - B] \not\equiv 0 \pmod{6}$.

10.6. Let us assume that the union of the sets consists of integers from 1 to n . Let S_i denote the number of sets that i belongs to. Then the total number of elements of n sets is $5n = S_1 + S_2 + \dots + S_n$ (*). Let us assume $S_1 > 5$ and $1 \in A_1, 1 \in A_2, 1 \in A_3, 1 \in A_4, 1 \in A_5, 1 \in A_6$. If $1 \in A_i, i = \overline{1, n}$, then the remaining $4n$ elements have to be different. Because $|A_i \cap A_j| = 1, i \neq j$ holds. That means, we have $4n + 1$ different elements. It contradicts to $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = n$. Thus we can assume that $1 \notin A_7$.

Since $|A_i \cap A_j| = 1$ for $1 \leq i, j \leq 6$, the intersections of A_7 with $A_1, A_2, \dots, A_6$ are all different. Hence $|A_7| \geq 6$. But it contradicts to $|A_7| = 5$. This leads to $S_1 \leq 5$. Analogously, $S_k \leq 5$ for $k = \overline{1, n}$. Considering (*), $S_k = 5$ holds for $i = \overline{1, n}$. Hence the number of sets is $n = 4 \cdot 5 + 1 = 21$. The construction is:

$$\begin{array}{ll}
 A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\} & A_2 = \{1, 6, 7, 8, 9\} \\
 A_3 = \{1, 10, 11, 12, 13\} & A_4 = \{1, 14, 15, 16, 17\} \\
 A_5 = \{1, 18, 19, 20, 21\} & A_6 = \{2, 6, 10, 14, 18\} \\
 A_7 = \{2, 7, 11, 15, 19\} & A_8 = \{2, 8, 12, 16, 20\} \\
 A_9 = \{2, 9, 13, 17, 12\} & A_{10} = \{3, 6, 7, 8, 9\} \\
 A_{11} = \{3, 10, 11, 12, 13\} & A_{12} = \{3, 14, 15, 16, 17\} \\
 A_{13} = \{3, 18, 19, 20, 21\} & A_{14} = \{4, 6, 10, 14, 18\} \\
 A_{15} = \{4, 7, 11, 15, 19\} & A_{16} = \{4, 8, 12, 16, 20\} \\
 A_{17} = \{4, 9, 13, 17, 21\} & A_{18} = \{5, 6, 7, 8, 9\} \\
 A_{19} = \{5, 10, 11, 12, 13\} & A_{20} = \{5, 14, 15, 16, 17\} \\
 A_{21} = \{5, 18, 19, 20, 21\}.
 \end{array}$$

11.1. Let $(AC) \cap (BD) = M$. It suffices to prove that M is on the radical axis of γ_1 and γ_2 .



It's equivalent to $MC \cdot MA = MD \cdot MB$. This is equivalent to $ACDB$ is a cyclic quadrilateral. Since PT and TQ are tangents to ω . $\angle TPQ = \angle TQP = \alpha$. From this $\angle PAC = \alpha = \angle QBD$ implies. Since R is on the radical axis of γ_1 and γ_2 , $RA \cdot RP = RB \cdot RQ$. This means $ABQP$ is cyclic quadrilateral and $\angle BAD + \angle BQP = 180^\circ$. $\alpha + \angle BAC + \angle BQP = 180^\circ$. $x + \angle BQP = \angle QBD + \angle BQP = 180^\circ - \angle QDB$. Hence $\angle BAC = \angle QDB$. This means $ABDC$ is cyclic, as desired.

11.2. Let us consider $f(x) = (x^2 + a^2)(x^2 + b^2)(x^2 + c^2)(x^2 + d^2)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \prod_{cyc} (x + ai) \prod_{cyc} (x - ai) = \\ &= (((x^4 - x^2(ab + bc + cd + da + ac + bd) + abcd)) + i(x^3(a + b + c + d) - x(abc + bcd + cda + dab))) \times \\ &\times (((x^4 - x^2(ab + bc + cd + da + ac + bd) + abcd)) - i(x^3(a + b + c + d) - x(abc + bcd + cda + dab))) = \\ &= (x^4 - x^2(ab + bc + cd + da + ac + bd) + abcd)^2 + x^2[x^2(a + b + c + d) - abc - bcd - cda - dab]^2 \geq \\ &\geq (x^4 - x^2(ab + bc + cd + da + ac + bd) + abcd)^2 \quad (*). \end{aligned}$$

Using the (*), for $x = \sqrt[4]{abcd}$ we get,

$$\prod_{cyc} (a^2 + \sqrt{abcd}) \geq (2abcd - \sqrt{abcd}(ab + bc + cd + da + ac + bd))^2,$$

or

$$\sqrt{\prod_{cyc} (a^2 + \sqrt{abcd})} + 2abcd \geq \sqrt{abcd}(ab + bc + cd + da + ac + bd),$$

Now multiplying both sides by $1/\sqrt{abcd}$ we get the desired result. Equality holds for

$$\sqrt{abcd}(a + b + c + d) = abc + bcd + cda + dab$$

or equivalently

$$(\sqrt{ab} - \sqrt{cd})(\sqrt{ac} - \sqrt{bd})(\sqrt{ad} - \sqrt{bc}) = 0.$$

11.3. a) Let p_i be the i -th prime number. Consider the numbers

$$p_1, p_1^2 p_2, p_1^2 p_2^2 p_3, \dots, p_1^2 p_2^2 \dots p_{2009}^2 p_{2010}.$$

If $p_1^2 p_2^2 \dots p_k^2 p_{k+1}$ is the least number in the sum, then the sum is divisible by p_{k+1} , but not divisible by p_{k+1}^2 . Hence each sum formed from the given numbers is not a power number.

b) Let us show that for any given integers $a_1, a_2, \dots, a_n$ there exists $b \in \mathbb{N}$ such that $ba_1, ba_2, \dots, ba_n$ are all power numbers. Suppose that $a_i = p_1^{\alpha_{i1}} p_2^{\alpha_{i2}} \dots p_k^{\alpha_{ik}}, i = \overline{1, n}, 0 \leq \alpha_{ij}$ and $b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. If ba_i is a power number, then there exists q_i ($q_i > 1$) such that $\alpha_1 + \alpha_{i1}, \alpha_2 + \alpha_{i2}, \dots, \alpha_k + \alpha_{ik}$ are all divisible by q_i .

Let q_i be the i -th prime number. By the Chinese Remainder Theorem there exists α_s such that $\alpha_s \equiv -\alpha_{is} \pmod{q_s}$, for $i = \overline{1, n}$ and $s = \overline{1, k}$.

Now we choose arbitrary 2010 positive integers: $a_1, a_2, \dots, a_{2010}$. Let $S_1, S_2, \dots, S_{2010-1}$ be all the sums formed by them. Then there exists b such that $bS_1, bS_2, \dots, bS_{2010-1}$ are all the power numbers. Thus, $ba_1, ba_2, \dots, ba_{2010}$ are the desired numbers.

11.4. First, we will show that $Q_1 = P(x^2)$ is irreducible over $\mathbb{Z}$. Let $\deg P = n$. Then $\deg Q_1 = 2n$. To the contrary, assume that there exist $R_1(x), R_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$ such that $Q_1(x) = R_1(x)R_2(x)$. It is clear that $Q_1(x) = Q_1(-x) = R_1(-x) \cdot R_2(-x)$. Let $F(x)$ be common factor of $R_1(x)$ and $R_1(-x)$, with maximum degree. Then it is clear that $F(x) = F(-x)$. Thus, $F(x) = G(x^2)$ for some $G(x)$. It is also clear that $\deg G \leq n - 1$. From $G(x^2) \mid Q(x) = P(x^2)$, we can conclude that $G(x) \mid P(x)$. This means that $\deg G = 0$ and $G(x) \equiv c$. Since $R_1(x)R_2(x) = R_1(-x)R_2(-x)$ we get

$$R_1(-x) \mid R_2(x), \quad R_2(-x) \mid R_1(x).$$

Thus $\deg R_1 = \deg R_2 = n$, $R_2(x) = cR_1(-x)$ and $Q(x) = cR_1(x)R_1(-x)$. Since $Q(x)$ is a unitary polynomial $c = (-1)^n$. Hence $|P(0)| = |(-1)^n(R_1(0))| = a^2, a \in \mathbb{Z}$. But given is $|P(0)| = 2010$, which leads to contradiction. Thus $P(x^2)$ is irreducible over $\mathbb{Z}$.

Now we define a sequence of polynomials by the following recurrent relation:

$$Q_{n+1}(x) = Q_n(x^2), n = 1, 2, \dots$$

It is obvious that $|Q_n(0)| = 2010$. Thus $Q_n(x)$ is irreducible over $\mathbb{Z}$.

11.5. Consider $f(x) = (1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2013}) = \sum_n a_n x^n$. Then

$$|T_r| = \sum_k [x^{7k+r}]f(x) = \sum_k a_{7k+r}.$$

Let $\varepsilon = e^{\frac{2\pi}{7}i}$, i.e ε is a 7th root of unity. We use following well known facts.

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^6 = 0, \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^6 \varepsilon^{kr} = 6, \text{ if } 7 \mid r, \quad \sum_{k=1}^6 \varepsilon^{kr} = -1, \text{ if } 7 \nmid r. \quad (2)$$

$$\text{Hence } \sum_{i=0}^6 f(\varepsilon^i) = \sum_{i=0}^6 \sum_n a_n \varepsilon^{ni} = \sum_n a_n \sum_{i=0}^6 \varepsilon^{ni} = \sum_{7|n} 7a_n = 7|T_0|.$$

Analogously,

$$|T_r| = \frac{1}{7} \sum_{i=0}^6 \varepsilon^{-ri} f(\varepsilon^i) = \frac{1}{7} (2^{2013} + \sum_{i=1}^6 \varepsilon^{-ri} \cdot f(\varepsilon^i)).$$

Let $g(x) = x^7 - 1 = (x - \varepsilon)(x - \varepsilon^2) \dots (x - \varepsilon^7)$. Then

$$g(-1) = -2 = (-1 - \varepsilon)(-1 - \varepsilon^2) \dots (-1 - \varepsilon^7),$$

and

$$(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon^2) \dots (1 + \varepsilon^7) = 2.$$

Since $\varepsilon^7 = 1$ and $2013 = 7 \cdot 287 + 4$,

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) &= (1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon^2) \dots (1 + \varepsilon^{2013}) = \\ &= [(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon^2) \dots (1 + \varepsilon^7)]^{287} (1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon^3)(1 + \varepsilon^4) \\ &= 2^{287} [(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon^4)](1 + \varepsilon^3) = \end{aligned}$$

$$= 2^{287}[1 + \varepsilon + \cdots + \varepsilon^7](1 + \varepsilon^3) = 2^{287}(1 + \varepsilon^3).$$

Thus $f(\varepsilon^i) = 2^{287}(1 + \varepsilon^{3i})$, for $1 \leq i \leq 6$.

$$|T_r| = \frac{1}{7} [2^{2013} + 2^{287} \cdot \sum_{i=1}^6 (\varepsilon^{-ri} + \varepsilon^{(3-r)i})].$$

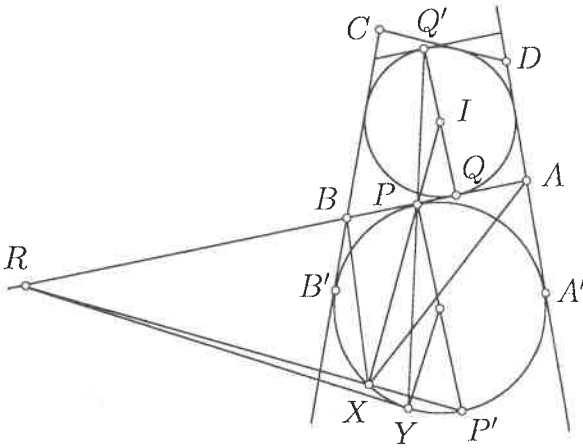
From (1) and (2)

$$\sum_{i=1}^6 (\varepsilon^{-ri} + \varepsilon^{(3-r)i}) = \begin{cases} 6 - 1 = 5, & r = 0, 3 \\ -1 - 1 = -2, & r = 1, 2, 4, 5, 6 \end{cases}$$

Hence

$$|T_r| = \begin{cases} \frac{2^{2013} + 5 \cdot 2^{287}}{7}, & r = 0, 3 \\ \frac{2^{2013} - 2^{288}}{7}, & r = 1, 2, 4, 5, 6 \end{cases}$$

11.6. Let I be center of incircle of $ABCD$, and AB touches incircle at Q and ω at P . It will be sufficient to show that X_{AB}, P, I are collinear and $\angle BX_{AB}P = \angle AX_{AB}P$ (all passes through I). Let $(IP) \cap \omega = X$, PP' and QQ' are diameters and $(PQ') \cap \omega = Y$, $(XP') \cap (AB) = R$.



$Q'I = IQ$, $QQ' \parallel PP'$ follows that $(PP'YX)$ is harmonic division. Therefore, tangent line to ω at Y passes through R . Tangent line at

Q' is parallel to AB . From this BC, AD, PQ' are concurrent. If ω touches BC and AD at B' and A' respectively, we have $(A'YB'P)$ harmonic division and $R \in (B'A')$. According to Nagel point BA', AB', PQ' lines are concurrent. This implies that $(RBPA)$ harmonic division. Considering $\angle PXP' = 90^\circ$, $\angle BXP = \angle AXP$ holds. If $(XB) \cap \omega = B'', (XA) \cap \omega = A''$, then $A''B'' \parallel AB$. Hence $\omega(XBA)$ is tangent to ω , as needed.

TA.1. Let A, B and C be the numbers of participants, who solved just one problem A, B, C respectively. And let AB be the number of participants who solved only A and B and etc. Then

$$\begin{cases} A + B + C + AB + AC + BC + ABC = 25 & (1) \\ B + BC = 2(C + BC) & (2) \\ A - 1 = AB + AC + ABC & (3) \\ A + B + C = 2(B + C) & (4) \end{cases}$$

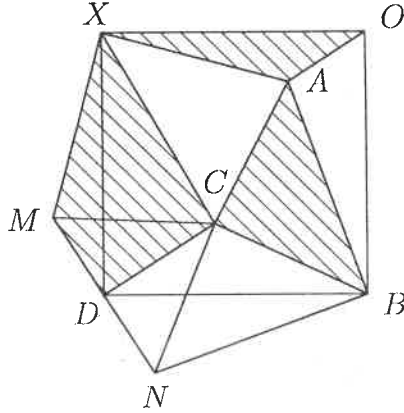
From (1) and (3) implies $2A + B + C + BC = 26$ (5). (4) is equivalent to $A = B + C$ and (2) is equivalent to $BC = B - 2C$. From (5), (2) and (4), $4B + C = 26$ implies $C = 26 - 4B$ (6) and $BC = B - 2C = B - 2(26 - 4B) = 9B - 52$ (7). Considering B, C, BC are non-negative integers, $B = 6$ will imply from (6) and (7).

TA.2. Let d be a number such that $d \mid ab$ and $d \in (m^2, m^2 + m)$. Then $d \mid (a - d)(b - d)$ and $|a - d| < m$, $|b - d| < m$. It follows that $|(a - d)(b - d)| < m^2 < d$. Hence

$$(a - d)(b - d) = 0.$$

We have $d = a \vee b$.

TA.3. Let M and N be a exterior points of $XOBD$, such that $\triangle XO A = \triangle XDM$ and $\triangle AOB = \triangle NDB$. Then we have $S_{\triangle ACX} = S_{\triangle MCX}$, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCN}$. Since $MD = DN$ and M, D, N are collinear, we have $S_{\triangle MDC} = S_{\triangle NDC}$. This implies the equality.



TA.4. Let $N = \overline{a_1 a_2 \dots a_c}$. Let us define a sequence of pair of integers by the following way. $a_0 = N$ and $b_0 = 0$.

$$\begin{cases} a_{n+1} \equiv a_n \cdot N + b_n \pmod{10^c} \\ b_{n+1} = \frac{a_n \cdot N + b_n - a_{n+1}}{10^c} \end{cases}$$

Let us show that $b_n < N$, for $n \in \mathbb{N}$. Use induction on n . For $n = 0$, it is trivial.

$$b_{n+1} < \frac{(a_n + 1)N - a_{n+1}}{10^c} \leq \frac{(a_n + 1)N}{10^c} \leq N.$$

Thus,

$$\begin{cases} b_n \equiv 10^c \cdot b_{n+1} + a_{n+1} \pmod{N} \\ a_n = \frac{10^c + a_{n+1} - b_n}{N} \end{cases}$$

Hence (a_n, b_n) and (a_{n+1}, b_{n+1}) define each other unambiguously. Since $0 \leq a_n, b_n \leq 10^c$, the number of different pairs of (a_n, b_n) is finite. Thus, (a_n, b_n) is periodic sequence from the first term. Let $(a_t, b_t) = (a_0, b_0)$, then

$$M = a_t \cdot 10^{(t-1)c} + a_{t-1} 10^{(t-2)c} + \dots + a_1$$

has a desired property. This shows that for each positive integer N there exists M that satisfies the conditions in the problem statement.

ТЛ.5. Let us prove by induction. For $n = 1$, we have to construct even numbers not exceeding $2 \cdot (4 + 1) = 10$.

$$+1 - 2 - 3 + 4 = 0, \quad -1 + 2 - 3 + 4 = 2, \quad +1 + 2 - 3 + 4 = 4,$$

$$+1 - 2 + 3 + 4 = 6, \quad -1 + 2 + 3 + 4 = 8, \quad +1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

By induction hypothesis assume that we've constructed all even numbers not exceeding $2n(4n + 1)$ by $\pm 1 \pm 2 \pm \dots \pm 4n$.

Now let m be even number, such that $2n(4n + 1) < m \leq (2n + 2)(4n + 5)$.

$$1 + 2 + \dots + (4n + 4) = (2n + 2)(4n + 5)$$

$1 + 2 + \dots + (k - 1) - k + (k + 1) + \dots + (4n + 4) = (2n + 2)(4n + 5) - 2k$, for $k = \overline{1, 4n + 4}$. The above expression gives us even numbers between $(2n + 2)(4n + 1)$ and $(2n + 2)(4n + 5)$.

Then $+1 + 2 + \dots + (l - 1) - l + (l + 1) + \dots + (4n + 3) - (4n + 4) = (2n + 2)(4n + 1) - 2l$ for $l = \overline{1, 4n}$. The above expression gives us even numbers between $2n(4n + 1)$ and $(2n + 2)(4n + 1)$.

For $m \leq 2n(4n + 1)$, we use $(4n + 1) - (4n + 2) - (4n + 3) + (4n + 4) = 0$ and induction hypothesis. By this the induction is complete.

ТЛ.6. Let $d = (2^{2m+1} + 2^{m+1} + 1, 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1)$. It is well known that

$$(2^k - 1, 2^n - 1) = 2^{(k,n)} - 1.$$

Since

$$(2^{2a+1} + 2^{a+1} + 1)(2^{2a+1} - 2^{a+1} + 1) = (2^{2a+1} + 1)^2 - (2^{a+1})^2 = 2^{4a+2} + 1,$$

$d \mid (2^{4a+2} + 1, 2^{4b+2} + 1)$. This implies

$$d \mid (2^{8a+4} - 1, 2^{8b+4} - 1) = 2^{(8a+4, 8b+4)} - 1 = 2^4 - 1 = 15.$$

Since $2^{2a+1} + 2^{a+1} + 1 \equiv 2^{a+1} \not\equiv 0 \pmod{3}$, $d = 1 \vee 5$. If $4 \mid a$, $2^{2a+1} + 2^{a+1} + 1 \equiv 0 \pmod{5}$, otherwise, $2^{2a+1} + 2^{a+1} + 1 \not\equiv 0 \pmod{5}$.

Thus $d = 5$, for $4 \mid m, n$; $d = 1$, otherwise.

TB.1. The inequality is equivalent to

$$\frac{n(n+1)}{2} \geq \frac{n(n-1)}{2} \left[\frac{\prod_{i=1}^{n-1} A_i^{i(n+1)}}{\prod_{i=1}^n A_i^{i(n-1)}} \right]^{\frac{2}{n(n-1)(n+1)}} + n \left[\frac{\prod_{i=1}^n a_i^i}{\prod_{i=1}^n A_i^i} \right]^{\frac{2}{n(n+1)}}$$

According to AM–GM inequality, we have

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\prod_{i=1}^{n-1} A_i^{i(n+1)}}{\prod_{i=1}^n A_i^{i(n-1)}} \right]^{\frac{2}{n(n-1)(n+1)}} \\ &= \left[\left(\frac{A_1^{\frac{1 \cdot 2}{2}}}{A_2^{\frac{1 \cdot 2}{2}}} \right)^n \cdots \left(\frac{A_{n-1}^{\frac{(n-1) \cdot n}{2}}}{A_n^{\frac{(n-1) \cdot n}{2}}} \right)^n \cdot 1^{\frac{n^2(n-1)(n+1)}{12}} \right]^{\frac{4}{n^2(n-1)(n+1)}} \leq \\ &\leq \frac{4}{n^2(n-1)(n+1)} \left[\frac{1 \cdot 2}{2} \cdot n \frac{A_1}{A_2} + \cdots + \frac{(n-1)n}{2} \cdot n \frac{A_{n-1}}{A_n} + \frac{n^2(n-1)(n+1)}{12} \right] \quad (1) \end{aligned}$$

Then again by AM–GM inequality

$$\left(\frac{\prod_{i=1}^n a_i^i}{\prod_{i=1}^n A_i^i} \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} \leq \frac{2}{n(n+1)} \left[1 \cdot \frac{a_1}{A_1} + 2 \cdot \frac{a_2}{A_2} + \cdots + n \cdot \frac{a_n}{A_n} \right]. \quad (2)$$

Then multiplying (1) by $\frac{n(n-1)}{2}$ and multiplying (2) by n , adding this two we get $\frac{n(n+1)}{2}$. Equality holds for $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

TB.2. Using the fact that $2^{2^{k+1}} - 1 \equiv 0 \pmod{2^{2^k} + 1}$, we conclude the following. If $l \cdot 2^l \equiv 0 \pmod{2^{k+1}}$ then $(2^l)^{2^l} - 1$ is divisible by $2^{2^k} + 1$.

$$\begin{cases} l \cdot 2^l \equiv 0 \pmod{2^{k+1}} \\ l < k+1 \end{cases} \quad (1)$$

Denoting $l = k + 1 - c$, l is solution to the system (1), in case there exists positive integer c such that $k + 1 - c \equiv 0 \pmod{2^e}$.

Let us consider the following sequence $a_1 = 1$, $a_2 = 2^1 + 3$, $a_n = a_{n-1} + 2^{a_{n-1}}$. Then $a_n - a_{n-1} \equiv 0 \pmod{2^{a_{n-1}}}$.

$$\begin{aligned} a_n - a_m &= a_{n-1} + 2^{a_{n-1}} - a_m = \dots = a_m + 2^{a_{m-1}} + \\ &+ \dots + 2^{a_m} - a_m \equiv 0 \pmod{2^{a_m}}. \end{aligned}$$

Therefore, if $k + 1 = a_n$, then $k + 1 - c \equiv 0$ holds for $c = a_i$, $i = \overline{1, n-1}$. Thus, (1) has at least $(n-1)$ solutions. That implies $(2^{l_i})^{2^{l_i}} \equiv 1 \pmod{2^{2^k}} + 1$ holds for $l_i = a_n - a_i$ and $k + 1 = a_n$.

Each prime divisor of $2^{2^k} + 1$ type number is $2^{k+1}m + 1$ type. Also $1 \leq 2^{l_i} \leq 2^{a_n} = 2^{k+1} < 2^{k+1}m + 1$ holds, for $1 \leq i \leq n$. Hence $(2^{l_i})^{2^{l_i}} \equiv 1 \pmod{p}$ holds for $p = 2^{k+1}m + 1$, $1 \leq i \leq n$, and $l_i \in \mathbb{Z}_p$. Since $2^{2^t} + 1$ type integers are relative primes, there are infinitely many prime p , for $n > 2010$.

TB.3. We are going to give a construction of coloring, whose number of angles with different colored sides is greater than $\binom{k}{2} \cdot \left[\frac{n}{k}\right]^2 \cdot n$.

Case I. Let k be odd number. Let $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ are subsets of $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ and $\mathcal{A}_1 \cup \dots \cup \mathcal{A}_n = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$, $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$, $(i \neq j)$ and $\left[\frac{n}{k}\right] \leq |\mathcal{A}_i| \leq \left[\frac{n}{k}\right] + 1$.

Let us color the edges between $\mathcal{A}_0$ and $\mathcal{A}_i$ with color i , and color the edges between $\mathcal{A}_i$ and $\mathcal{A}_j$ with color $\frac{k+1}{2}(i+j) \pmod{k}$.

Case II. Let k be even number.

Lemma. If k is even, we can color a complete graph on k points with $k-1$ color, so that edges with general vertice have different colors.

If we color the edges between $\mathcal{A}_i$ and $\mathcal{A}_j$ with color that gives the lemma, we'll have the construction we desired.

TB.4. Let $x \in \mathbb{Q}^+$, $x = \frac{a}{b}$, $(a, b) = 1$, $a > 0$, $b > 0$. Now let us apply Euclid's algorithm for a and b . Here $r_0 = a$, $r_1 = b$. $r_{j-1} = q_j r_j + r_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots, n$. There exists $n = n(x)$, such that $r_n \neq 0$ and $r_{n+1} = 0$.

Consider the function $f: \mathbb{Q} \rightarrow \{-1; 1\}$ defined by

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^{n(x)} & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ (-1)^{n(-x)+1} & x < 0 \end{cases}$$

Now let us prove that $f(x)$ satisfies the given condition.

I. Indeed let $x + y = 0$, $x \neq y$ and $x > 0, y < 0$. $f(x) = (-1)^{n(x)}$, $f(y) = f(-x) = (-1)^{n(x)+1} = -f(x)$. Then from this $f(x) \cdot f(y) = -1$, which means x and y has different colors.

II. Let $x + y = 1$, $x \neq y$, $x, y \in \mathbb{Q}$. Then at least one of x, y is positive. Let $x > 0$, $x = \frac{a}{b}$. Then $y = \frac{b-a}{b}$. If $y < 0$, then $f(y) = (-1)^{n(-y)+1} = (-1)^{n(\frac{a-b}{b})+1}$. Considering $n(\frac{a}{b}) = n(\frac{a \cdot b}{b \cdot b})$, we have $f(x) \cdot f(y) = -1$. If $y > 0$, then $0 < x < \frac{1}{2} < y < 1$. From Euclid's algorithm $n(y) = n(x) + 1$. $f(x) \cdot f(y) = -1$.

III. Let $xy = 1$, then x, y has same sign. In this case $n(y) = n(x) + 1$, that implies $f(x)f(y) = -1$.

TB.5. Let S be the set of all the members. We can represent working groups as nonempty subsets of S . Let $A_1, A_2, \dots, A_{114}$ be the working groups.

To the contrary, assume that for each $x \in S$, there are at most 112 distinct sets among the sets $A_1 - \{x\}, A_2 - \{x\}, \dots, A_{114} - \{x\}$. Let us construct graph G by the following way. For any $x \in S$, choose two pair of sets such that $F_x \subseteq E_x, F'_x \subseteq E'_x$ and $E_x - F_x = E'_x - F'_x = \{x\}$. Such pairs exist, otherwise that contradicts to the assumption. We will join (E_x, F_x) and (E'_x, F'_x) by edges. Thus, $|V(G)| = 114$ and $|E(G)| = 2 \cdot 76 = 152$.

Consider the following facts:

1°. G -is 2-partite. Indeed

$$V_1 = \{E: |E| \text{ is odd}\}, \quad V_2 = \{E: |E| \text{ is even}\}$$

are the two coloring.

2°. G doesn't contain Θ graph (a graph consists of three independent paths that joins two vertices). Indeed, if P_1, P_2 and P_3 are independent paths joins E and E' , and $x \in E - E'$, then there exist E_i and F_i on the path P_i such that $\{x\} = E_i - F_i$ for each $i \in \{1, 2, 3\}$, which is impossible.

Let a be the number of edges that do not lie in a cycle and b be the number of cycles. Furthermore, let $k_1, k_2, \dots, k_b$ be the sizes of the cycles. Then

$$114 = |V(G)| = c + a + \sum_{k=1}^b (k_i - 1), \text{ here } c \text{ is the number of components,}$$

$$152 = |E(G)| = a + \sum_{i=1}^b k_i.$$

Thus,

$$\begin{aligned} 114 &\geq 1 + a + \sum_{i=1}^b (k_i - 1) \geq 1 + \frac{3}{4}a + \sum_{i=1}^b \left(\frac{3}{4}k_i \right) = \\ &= 1 + \frac{3}{4}(2 \cdot 76) = 1 + \frac{3}{2} \cdot 76 = 115. \end{aligned}$$

This means there exists $x \in S$ such that there are at least 113 distinct sets among the sets $A_1 - \{x\}, A_2 - \{x\}, \dots, A_{114} - \{x\}$.

TB.6. Let ω be the nine-point circle and $\ell_1 \cap \omega = X$, $\ell_2 \cap \omega = Y$. Since $AFDC$ is inscribed in a circle, $\angle FDA = \angle FCA = 90^\circ - \angle BAC$. Also from $AEDB$ is inscribed in a circle, we have $\angle EDA = \angle EBA = 90^\circ - \angle BAC$. Therefore, $\angle FDA = \angle EDA$. Analogously, $\angle FEB = \angle DEB$. From the given condition $\angle SDA = \angle XDA$. Then $\angle FDS = \angle XDE$ holds, i.e $\widehat{FS} = \widehat{XE}$. Analogously, $\widehat{SF} = \widehat{DY}$. Therefore, $\widehat{XE} = \widehat{DY}$. From this implies $\ell_1 \parallel \ell_2$. Analogously $\ell_1 \parallel \ell_3$.

and, due to $i \geq t$,

$$2^i - 1 \equiv -1 \pmod{2^t}. \quad (2)$$

The relations (1) and (2) determine the residue class $2^i - 1$ modulo m , and it must be relatively prime to m .

Since m and r are relatively prime, there is a positive integer u such that $a \equiv ur \pmod{m}$. For $n = 2^{i_1} + \dots + 2^{i_u}$ we achieve

$$\nu(n) = \nu(2^{i_1} + \dots + 2^{i_u}) = (2^{i_1} - 1) + \dots + (2^{i_u} - 1) \equiv u \cdot r \equiv a \pmod{m}.$$

TST.1.2. The sum $\sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} \binom{p+k}{k}$ is the coefficient of x^p in the expansion of

$$\sum_k \binom{p}{k} (x-1)^{p+k}.$$

This can be rewritten as

$$\left\{ \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (x-1)^j \right\} (x-1)^p = x^p (x-1)^p$$

Hence the sum is actually $(-1)^p = -1$. Hence

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} \binom{p+k}{k} \equiv -1 \pmod{p^3}$$

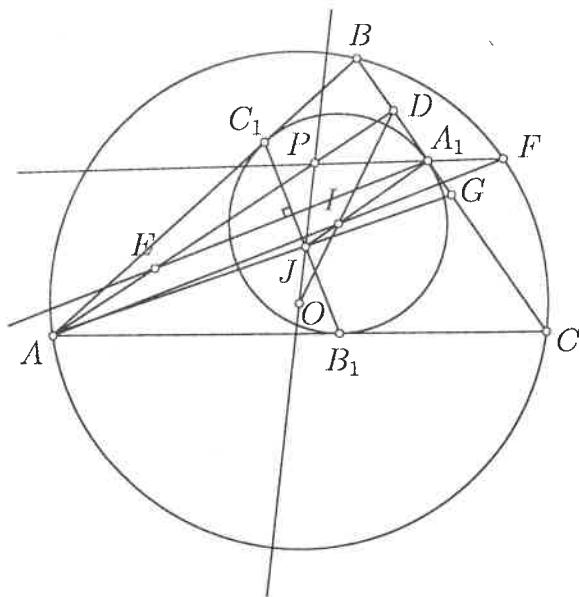
clearly holds.

TST.1.3. Let ω touch AB and AC at E and F respectively. $(AD) \cap \omega = Q$, $(ID) \cap \omega = N$, $(EF) \cap (BC) = T$. Since E, F are points of tangency $(DEQF)$ is harmonic division. This implies TQ is tangent to ω . Since $AA_0 = A_0H$, $(AA_0H\infty)$ is harmonic division. From this $(QPDN)$ is harmonic too. Hence NP , EF , BC are concurrent. Considering ND is diameter, we have $NT \perp PD$. Then $IM \parallel NT$ and $DM = MT$. From $(DEQF)$ is harmonic division, implies that $(BDCT')$ is harmonic division. Hence $MD^2 = MC \cdot MB$. (This is

maps circumcircle onto incircle and with center $R \in OI$. Let S_2 be a homothety, which maps circumcircle onto ω and with center $P \in OJ$. Let S_3 be a homothety, which maps incircle onto ω and with center A_1 . Then A_1, P and R are collinear.

$S_2([OF]) = [JA_1]$, $S_2(F) = A_1$. Hence it suffices to prove $S_2([AF]) = [EA_1]$. It is equivalent to $S_2(A) = E \Leftrightarrow P \in AD$.

By Pappus theorem if $OI \cap GA_1 = D$, $OJ \cap FA_1 = P$, $GJ \cap FI = A$, then A, P and D are collinear. So we need to prove $GJ \cap FI = A$, that is equivalent to $J \in GA$.



Let A' be the foot of altitude from A and $J_1 = A_1I \cap AG$. ($J_1 \neq J$).

By Thale's theorem $\frac{GJ_1}{GA} = \frac{GA_1}{GA'} = \frac{a}{b+c}$.

Let $X = B_1C_1 \cap BC$ and $J_2 = AG \cap B_1C_1$ ($J \neq J_2 \neq J_1$). By Menelaus's theorem $\frac{XC}{XB} = \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{a+b-c}{a+c-b}$. Then again by

Menelaus's theorem,

$$\frac{J_2G}{J_2A} = \frac{G_1B}{C_1A} \cdot \frac{XG}{XB} = \frac{\frac{a+c-b}{2}}{\frac{b+c-a}{2}} \cdot \frac{\frac{a^2}{2(c-b)}}{\frac{a(a+c-b)}{2(c-b)}} = \frac{a}{b+c-a}.$$

Thus, $\frac{J_2A}{J_2G} = \frac{b+c-a}{a}$ and $\frac{AG}{J_2G} = \frac{b+c}{a}$. This implies $J_2 = J_1 = J$.

TST.2.3. Let us show that the maximum number of triangles is k^3 by induction. It is trivial for $k = 1$.

Let G be a graph with the maximum number of triangles. Clearly, it contains a triangle. Say it $T_1T_2T_3$. $G - \triangle T_1T_2T_3$ is a subgraph of G with $3(k-1)$ vertices. $G - \triangle T_1T_2T_3$ doesn't contain K_4 . Hence the number of triangles in $G - \triangle T_1T_2T_3$ is at most $(k-1)^3$, and by Turan's theorem the number of edges in $G - \triangle T_1T_2T_3$ is at most $3(k-1)^2$. The number of triangles between $\triangle T_1T_2T_3$ and $G - \triangle T_1T_2T_3$ is at most $3(k-1)^2 + 3(k-1)$. Thus, total number of triangles doesn't exceed $(k-1)^3 + 3(k-1)^2 + 3(k-1) + 1 = k^3$. Equality holds for $K_{k,k,k}$.

TST.3.1. Let us construct infinitely many pairs of positive integers satisfying the condition of the problem. It is clear that if $a \equiv 3 \pmod{4}$, then $a \notin A$. Let $x = 2y$, $y = (2^{13} + 1)(a^2 + 13b^2)$, $a = 4k$ and $b = 4k + 1$ for $k \in \mathbb{N}$. Then,

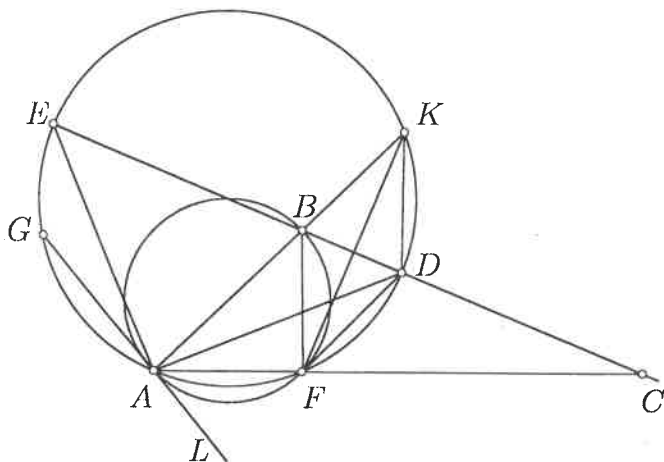
$$x+y = 3y = 3(2^{13}+1)((4k)^2+13(4k+1)^2) \equiv 3 \pmod{4} \text{ and } x+y \notin A.$$

Using $(a^2 + 13b^2)(c^2 + 13d^2) = (ac - 13bd)^2 + 13(ad + bc)^2$, we have

$$x^{13} + y^{13} = (2^{13} + 1)^{14}(a^2 + 13b^2)^{13} \in A.$$

TST.3.2. Let $K = AB \cap \omega$. Since AD is bisector of $\angle KAF$, $FD = DK$. Since ED is diameter of ω , we have $BK = BF$. From this $\angle FKB = \angle BFK = \alpha$ and $\angle ABF = 2\alpha$. By the property of tangent line $2\alpha = \angle ABF = \angle FAL$. From $GEFA$ is inscribed quadrilateral,

implies $\angle GEF = 180^\circ - \angle GAF = 2\alpha$. $\angle AEF = \frac{\widehat{AF}}{2} = \angle AKF = \alpha$.
 $\angle GEA = 2\alpha - \alpha = \alpha$. That is equivalent to $GA = AF$.



TST.3.3. Let us define a bipartite graph G as usual way. The boys and girls are vertices of the graph and pairs of friends are edges. It suffices to prove that the bipartite complement of this graph has a $(n - 2d)$ regular subgraph with $2n$ vertices.

Lemma. Let G be a bipartite graph. $V(G) = A \cup B$ and all the vertices are between A and B . Let $|A| = |B| = n$. If $k|X| \leq e(X, Y) + k(n - |Y|)$ holds for any $X \subseteq A$ and for any $Y \subseteq B$, then there exists a k regular subgraph of G , with vertices $V(G)$. ($e(X, Y)$ is number of edges between X and Y).

Proof of lemma. Let us consider the following directed graph $\vec{G}$. $V(\vec{G}) = V(G) \cup \{a, b\}$, $E(\vec{G}) = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\} \cup \{(a, x) \mid x \in A\} \cup \{(y, b) \mid y \in B\}$. Now we define weight on the edges. All edges in $\{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ have weight 1, and all the remaining edges have weight k . Let us show that max-flow from a to b is kn . By MAX-FLOW, MIN-CUT theorem, it suffices to show that minimum cut is kn .

Assume that $X \subseteq A$ and $Y \subseteq B$ and $\{(a, x) \mid x \in X\} \cup \{(y, b) \mid y \in Y\}$ are all the edges that not affected by the cut. Then all the edges

between X and Y must be affected. Thus, the weight of cut is at least $k|A - X| + k|B - Y| + e(X, Y) \geq k|A - X| + k|X| = k|A| = kn$. This completes proof of lemma.

Let $\tilde{G}$ be the bipartite complement of G . We need to show that $\tilde{G}$ has a $(n - 2d)$ regular subgraph with $2n$ vertices. By the lemma, it suffices to show that

$$(n - 2d)(n - |Y|) + e_{\tilde{G}}(X, Y) \geq (n - 2d)|X|, \forall X \subseteq A, \forall Y \subseteq B$$

or equivalently,

$$(n - 2d)(|X| + |Y| - n) \leq e_{\tilde{G}}(X, Y), \forall X \subseteq A, \forall Y \subseteq B.$$

If $|Y| \leq n - 2d$, then $|Y| + 2d - n \leq 0$ and

$$(|X| + d - n)(|Y| + 2d - n) \geq (n + d - n)(|Y| + 2d - n) \geq d(2d - n).$$

If $n - 2d \leq |Y| \leq |X| \leq n - d$ and $|X| \geq d$, then $|X| + d - n \leq 0$ and

$$(|X| + d - n)(|Y| + 2d - n) \geq (|X| + d - n)d \geq (2d - n)d.$$

If $n - 2d \leq |Y|$ and $n - d \leq |X|$ then from $d \leq \frac{n}{2}$,

$$(|X| + d - n)(|Y| + 2d - n) \geq 0 \leq d(2d - n).$$

If $|X| \leq d$, then from $e(X, Y) \leq |Y| \cdot |Y|$ and $|Y| \leq |X| \leq d \leq \frac{n}{2}$,

$$(n - 2d)(|X| + |Y| - n) \leq 0.$$

This completes the proof.

TST.4.1. Lemma. For all integers $0 \leq t, s \leq m$ such that $t + s \leq m$,

$$\frac{\binom{2m}{m-s}}{\binom{2m}{m-t-s}} > \frac{t^2}{m}.$$

Proof of lemma.

$$A = \frac{\binom{2m}{m-s}}{\binom{2m}{m-t-s}} = \frac{(m-t-s)!(m+t+s)!}{(m-s)!(m+s)!} =$$

$$= \frac{(m+t+1)(m+t+2)\dots(m+t+s)}{(m-t-s+1)(m-t-s+2)\dots(m-s)} =$$

$$= \left(1 + \frac{t+2s}{m-t-s+1}\right) \left(1 + \frac{t+2s}{m-t-s+2}\right) \dots \left(1 + \frac{t+2s}{m-s}\right).$$

Using the $(m-t-s+1) < (m-t-s+2) < \dots < (m-s)$ and Bernoulli's inequality:

$$A \geq \left(1 + \frac{t+2s}{m-s}\right)^t > 1 + \left(\frac{t+2s}{m-s}\right)t > \frac{t^2}{m}.$$

This completes the proof of lemma.

Let us compare the sum

$$\binom{2m}{0} + \binom{2m}{1} + \dots + \binom{2m}{m-t-1}$$

with the sum

$$\binom{2m}{t} + \binom{2m}{t+1} + \dots + \binom{2m}{m-1} \quad (1).$$

Sum in (1) is clearly less than $\frac{2^{2m}}{2}$. $t \leq [\sqrt{km}]$ implies $\frac{t^2}{m} \leq k$ and we have $\binom{2m}{m-t-1} \leq \frac{1}{2} \binom{2m}{m-1}$ by lemma. Similarly, $\binom{2m}{m-t-2} \leq \frac{1}{k} \binom{2m}{m-2}$, $\dots$, $\binom{2m}{0} \frac{1}{k} \binom{2m}{t}$.

Hence we get that,

$$\binom{2m}{0} + \binom{2m}{1} + \dots + \binom{2m}{m-t-1} <$$

$$\frac{1}{k} \left(\binom{2m}{t} + \binom{2m}{0} + \binom{2m}{1} + \dots + \binom{2m}{m-t-1} \right) <$$

$$\frac{1}{k} \left(\binom{2m}{t} + \binom{2m}{t+1} + \dots + \binom{2m}{m-1} \right) < \frac{2^{2m}}{2k}.$$

TST.4.2. Let m be a positive integer and $m = 5^{\alpha_m}(5\beta_m + \gamma_m)$, $1 \leq \gamma_m \leq 4$. It is clear that γ_m is unique. So we can color m by γ_m . Now we will show that there is no monochromatic solution of the equation $x + y = 3z$. To the contrary assume that there is a monochromatic solution of the equation. Then $x = 5^{\alpha_x}(5\beta_x + \gamma)$, $y = 5^{\alpha_y}(5\beta_y + \gamma)$, $z = 5^{\alpha_z}(5\beta_z + \gamma)$ and $x + y = 3z$ (1). Let $\alpha = \min(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$. Let us divide (1) by 5^α then,

$$\xi_x \gamma + \xi_y \gamma \equiv 3\xi_z \gamma \pmod{5}, \text{ where } \xi_x, \xi_y, \xi_z \in \{0, 1\}.$$

Since $(\gamma, 5) = 1$, $\xi_x + \xi_y \equiv \xi_z \pmod{5}$, which means $\xi_x = \xi_y = \xi_z = 0$. But at least one of them must be 1. This shows that there is no monochromatic solution of the equation.

TST.4.3. Let $\frac{n^2 - 1}{m^2 + 1 - n^2} = k \in \mathbb{N}$. Then $(k + 1)(n^2 - 1) = km^2$ (*) and $m^2 + 1 - n^2 = \frac{m^2}{k + 1}$. It suffices to prove that $k + 1$ is perfect square. Let $k + 1 = s$, $x = \frac{m + n}{2}$, $y = \frac{m - n}{2}$. Then $x, y \in \mathbb{Z}$ and from (*) implies $x^2 - (4s - 2)yx + y^2 - s = 0$. Consider $x_0, y_0 \in \mathbb{N}$ such that $x_0 > y_0$, $x_0^2 - (4s - 2)y_0x_0 + y_0^2 - s = 0$ and assume that $(x_0 + y_0)$ is the least among the solutions. Then by Vieta's formulas

$$\begin{cases} x_0 + t = (4s - 2)y_0 \\ x_0 t = y_0^2 - s \end{cases},$$

here t is the another solution different from x_0 . If $t < 0$, then $t^2 - (4s - 2)ty_0 + y_0^2 - s > 0$. If $t > 0$, then $0 < t = \frac{y_0^2 - s}{x_0}$ and $(t + y_0) < (x_0 + y_0)$. This is contrary to the assumption. Thus, $t = 0$ and $s = y_0^2$.

7 Олон улсын математикийн 51-р олимпиад

Ц.Далцдорж

Б. Батбаясгалан

ОУМО-51 2007 оны 7-р сарын 2-14-нд Казахстаны Астанад болж өнгөрлөө. Дэлхийн 97 орон оролцсон энэ Олимпиадад Хятад 197, Орос 169, АНУ 168, Өмнөд Солонгос 156, Казахстан 148, Тайланд 148, Япон 141, Турк 139, Герман 138, Серб 135 оноогоор эхний 10 байранд палгарлаа.

Манай улсаас:

1. Ц. Ивээл (1-р сургууль 11-р анги) 18 оноогоор хүрэл медаль
2. Б. Лувсанбямба (Мон-Турк 11-р анги) 16 оноогоор хүрэл медаль
3. Б. Зулсар (1-р сургууль 11-р анги) 13 оноогоор тусгай шагнал
4. Л. Энхжаргал (1-р сургууль 11-р анги) 12 оноогоор тусгай шагнал
5. З. Болор-Эрдэнэ (11-р сургууль 11-р анги) 10 оноо тусгай шагнал
6. Л. Лувсандондов (11-р сургууль 11-р анги) 10 оноо тусгай шагнал тус тус авч багийн дүнгээр 79 оноогоор 97 орноос 50-р байранд оров. Багийн орлогч удирдагчаар МУИС-ийн Б.Батбаясгалан явлаа.

ОУМО-52 нь 2012.07.16-24 нд Голландын Амстердамд болохоор төлөвлөгдлөө.

ОУ-1. Бүх $x, y \in \mathbb{R}$ -ийн хувьд

$$f([x]y) = f(x)[f(y)], \quad (1)$$

байх бүх $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол ($[z]$ -нь z -ээс үл хэтрэх хамгийн их бүхэл тоо).

ОУ-2. I нь ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв ба Γ нь энэ гурвалжныг багтаасан тойрог. AI шулуун Γ тойргийг A ба

D цэгт огтолно. BDC нум дээр E цэгийг, BC тал дээр F цэгийг

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2} \angle BAC$$

байхаар сонгов. IF хэрчмийн дундач цэг G байг. DE ба EI шулуунууд Γ тойрог дээр орших цэг дээр огтлолцохыг батал.

ОУ-3. $\mathbb{N}$ натурал тоон олонлог. Аливаа $m, n \in \mathbb{N}$ тоонуудын хувьд

$$(g(m) + n)(m + g(n))$$

тоо бүтэн квадрат байх бүх $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ функцийг ол.

ОУ-4. P нь ABC гурвалжны дотоод цэг. AP, BP ба CP шулуунууд ABC гурвалжныг багтаасан Γ тойргийг хоёр дахь удаагаа харгалзан K, L ба M цэгүүдэд огтолно. C -цэгийг дайрсан Γ тойргийн шүргэгч AB шулууныг S цэгт огтолно. $SC = SP$ бол $MK = ML$ гэж батал.

ОУ-5. Эхлээд $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ хайрцаг бүрт нэг, нэг мөнгө байв. Дараахь хоёр төрлийн үйлдлийг хийнэ:

Төрөл 1: Дурын хоосон биш $B_j, 1 \leq j \leq 5$ хайрцгийг сонгож түүнээс 1 мөнгө авах ба B_{j+1} хайрцагт 2 мөнгө нэмж хийнэ.

Төрөл 2: Дурын хоосон биш $B_k, 1 \leq k \leq 4$ хайрцгийг сонгож түүнээс 1 мөнгө авч B_{k+1} ба B_{k+2} хайрцагт буй зүйлсийн байрыг сольж хийнэ. B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 , хайрцгууд хоосон, харин B_6 -д яг $2010^{2010^{2010}}$ мөнгө байх төлөвт хүргэх үйлдлүүдийн дараалал орших уу? (тодорхойлолт ёсоор $a^{b^c} = a^{(b^c)}$).

ОУ-6. Эерэг бодит тоонуудын дараалал $a_1, a_2, a_3, \dots$, өгчээ. Өгсөн s тоо ба $n > s$ байх бүх n -ийн хувьд

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

бол $N \leq n$ байх n бүрийн хувьд $a_n = a_l + a_{n-l}$ $l \leq s$ байх натурал тоо l ба N олдохыг үзүүл.

ОУ-1.(1)-д $x = 0$ гэвэл

$$f(0) = f(0)[f(y)] \quad (2)$$

болно.

а) $f(0) \neq 0$ гэе. (2)-оос $\forall y \in \mathbb{R}$, $[f(y)] = 1$. Иймд (1) нь $f([x]y) = f(x)$ болно, энд $y = 0$ гэвэл $f(x) = f(0) = C \neq 0$.
 $[f(y)] = 1 = [c]$ -ээс $1 \leq c < 2$.

б) $f(0) = 0$ гэе. Дараахь 2 дэд тохиол байна.

$b_1)$ $\exists 0 < \alpha < 1$, $f(\alpha) \neq 0$ гэе. (1)-д $x = \alpha$ гэвэл $\forall y \in \mathbb{R}$,
 $0 = f(0) = f(\alpha)[f(y)]$. Иймд $\forall y \in \mathbb{R}$, $f(\alpha) \neq 0$ гэж авсанд зөрчинө.

$b_2)$ $\forall \alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, $f(\alpha) = 0$ гэе.
 $z \in \mathbb{R}$ -г авъя. $\exists N \in \mathbb{Z}$, $\alpha = \frac{z}{N} \in [0, 1)$.
 (1)-ээс

$$f(z) = f([N]\alpha) = f(N)[f(\alpha)] = f(N)[f(\alpha)] = 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

гэж гарна. Үүгээр а) ба $b_2)$ -ийн үр дүн нь $f(x) = \text{const} = c$,
 $c = 0$ эсвэл $c \in [1, 2)$ гэж гарлаа. Энэ функц (1)-ийг хангахыг шууд шалгаж болно.

ОУ-2.ЕГ ба Г-ийн 2 дахь огтлолцолын цэг нь X , A оройгоос татсан биссектрисийн суурь нь L байг. G' ба T нь харгалзан DX -ийн IF ба AF -тэй огтлолцох цэгүүд байг. Бид $G = G'$ буюу $IG' = G'F$ гэж баталъя. AI гурвалжин ба DX шулууны хувьд Менелайн теорем хэрэглэвэл

$$1 = \frac{G'F}{IG'} = \frac{TF}{AT} \cdot \frac{AD}{ID}, \quad \text{буюу} \quad \frac{TF}{AT} = \frac{ID}{AD}$$

гэж батлах шаардлагатай.

AF нь Г тойрогтой $K \neq A$ цэгт огтлолцдог байг. $\angle BAK = \angle CAE$ тул $\widehat{BK} = \widehat{CE}$. Иймд $KE \parallel BC$.

$$\angle IAT = \angle DAK = \angle EAD = \angle EXD = \angle IXT$$

тул I, A, X, T цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Иймд

$$\angle ITA = \angle IXA = \angle EXA = \angle EKA$$

болох тул $IT \parallel KE \parallel BC$ болно. Эндээс $\frac{TF}{AT} = \frac{IL}{AI}$.

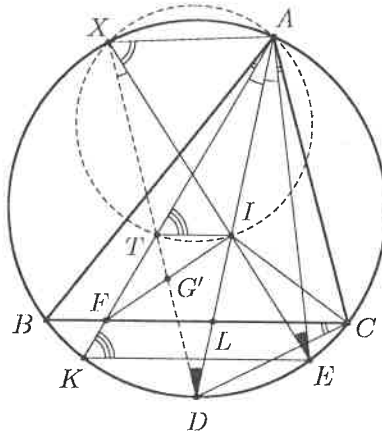
CI нь $\angle ACL$ -ийн биссектрисс тул $\frac{IL}{AI} = \frac{CL}{AC}$. Түүнчлэн

$$\angle DCL = \angle DCB = \angle DAB = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC$$

тул DCL ба DAC гурвалжнууд төсөөтэй. Иймд $\frac{CL}{AC} = \frac{DC}{AD}$. Мөн BC цумын дундач цэг D -ээс I, B, C цэгүүд хүртэлх зайнууд тэнцүү байдаг тул $\frac{DC}{AD} = \frac{ID}{AD}$. Эдгээрийг дүгнэвэл

$$\frac{TF}{AT} = \frac{IL}{AI} = \frac{CL}{AC} = \frac{DC}{AD} = \frac{ID}{AD}$$

болж батлах зүйл батлагдав.



ОУ-3. $0 \leq c \in \mathbb{Z}$ бол $f(n) = n + c$ хэлбэрийн бүх функц бодлогын нөхцөлийг хангана:

$$(f(m) + m)(f(n) + m) = (n + m + c)^2.$$

Үүнээс өөр функц байхгүйг харуулъя.

Лемм. Ямар нэг анхны тоо p ба натурал тоо k, l -ийн хувьд $p \mid f(k) - f(l)$ бол $p \mid k - l$ байна.

а) $p^2 \mid f(k) - f(l)$ бол $f(l) = f(k) + p^2\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}$ болно.

$\mathbb{N} \ni D > \max\{f(k), f(l)\}$, $p \nmid D$ D -ийн хувьд $n = pD - f(k)$ гэж авбал $n + f(k) = pD$ ба $n + f(l) = pD + (f(l) - f(k)) = p(D + p\alpha)$ тоонууд нь p -д хуваагдах ба p^2 -д үл хуваагдана. Бодлогын нөхцөлөөр $(f(k) + n)(f(n) + k)$ ба $(f(l) + n)(f(n) + l)$ тоонууд нь квадратууд ба p -д хуваагдана. Иймд p^2 -д хуваагдана. $f(n) + k$ ба $f(n) + l$ -үүд нь p -д хуваагдах тул

$$p \mid (f(n) + k) - (f(n) + l) = k - l$$

б) $p \nmid f(k) - f(l)$ бол а)-д сонгосон D -ийн хувьд $n = p^3D - f(k)$ гэж авъя. $f(k) + n = p^3D$ ба $f(l) + n = p^3D + (f(l) - f(k))$ тоонууд нь харгалзан. p^3 (p^4 -д хуваагдахгүй) ба p (p^2 -д хуваагдахгүй)-д хуваагдана. Иймд а)-д хийсний адилаар $f(n) + k$ ба $f(n) + l$ тоонууд p -д хуваагдана. Тэгвэл

$$p \mid (f(n) + k) - (f(n) + l) = k - l$$

лемм батлагдлаа. Одоо бодлого руугаа орё.

$$\exists k, l \in \mathbb{N}, f(k) = f(l)$$

байдаг бол Леммээр $k - l$ нь анхны тоо болгонд хуваагдана. Иймд $k - l = 0$ буюу $k = l$. Үүгээр f инъектив ($x \neq y$ бол $f(x) \neq f(y)$) функц боллоо. $f(k)$ ба $f(k + 1)$ -г авч үзье. $(k + 1) - k = 1$ тоо анхны тоон хуваагчгүй тул Леммээр $f(k + 1) - f(k)$ тоо мөн тийм буюу $|f(k + 1) - f(k)| = 1$ байна. $f(2) - f(1) = q$, $|q| = 1$ байг. Индукцээр $f(n) = f(1) + q(n - 1)$ гэж батлая.

$n = 1, 2$ үед q -ийн тодорхойлолтоор үнэн.

$n > 1$ бол

$$f(n + 1) = f(n) \pm q = f(1) + q(n - 1) \pm q.$$

$$f(n) \neq f(n - 2) = f(1) + q(n - 2)$$

тул $f(n+1) = f(1) + q(n)$ болно. Үүгээр $f(n) = f(1) + q(n-1)$ боллоо. $q \neq -1$: $q = -1$ гэвэл $n \geq f(1) + 1$ байх n -ийн хувьд $f(n) \leq 0$ болоход хүрнэ. Үүгээр $q = 1$ ба $f(n) = (f(1) - 1) + n$, $f(1) - 1 \geq 0$ боллоо.

$|A \cap M|$ буюу $|Q| \leq |A \cap M| = k$. Иймд алхам 5-г хийсээр $c(A) = c(B) = k$ болно.

ОУ- 4. $CA > CB$ гэж үзье. Тэгвэл S нь AB цапраг дээр оршино. $\triangle PKM \sim \triangle PCA$ ба $\triangle PLM \sim \triangle PCB$ гурвалжнуудын төсөөгөөс $\frac{PM}{KM} = \frac{PA}{CA}$ ба $\frac{LM}{PM} = \frac{CB}{PB}$ болно. Эдгээрийг үржүүлбэл

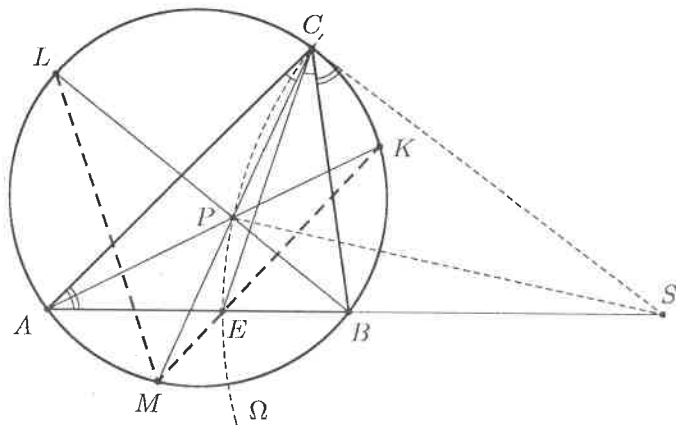
$$\frac{LM}{KM} = \frac{CB}{CA} \cdot \frac{PA}{PB}.$$

Иймд $MK = ML$ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\frac{CB}{CA} = \frac{PB}{PA}$ байна.

E -ээр ABC гурвалжны C оройгоос татсан биссектрисийн суурийг тэмдэглэе. $\frac{XA}{XB} = \frac{CA}{CB}$ байх цэгүүдийн геометр байр нь AB шулуун дээр орших Q цэгт төвтэй Аполлоны Ω тойрог байдаг. Энэ тойрог C ба E цэгүүдийг дайрна. Иймд $MK = ML$ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $P \in \Omega$ буюу $QP = QC$ байна.

Одоо $S = Q$ гэж баталъя. $\angle CES = \angle CAE + \angle ACE = \angle BCS + \angle ECB = \angle ECS$ буюу $SC = SE$ болно. Иймд S нь AB ба

CE -ийн дундаж перпендикуляр дээр орших тул Q -тэй давхцана.



ОУ-5. Хэрэв бодлогын нөхцөлд зөвшөөрөгдсөн үйлдлүүдийг дараалсан тус бүр $a_1, \dots, a_n$ ширхэг мөнгөтэй хайрцгууд дээр хийгээд харгалзан $a'_1, \dots, a'_n$ ширхэг мөнгөтэй хайрцгууд гаргаж авч болдог бол $(a_1, \dots, a_n) \rightarrow (a'_1, \dots, a'_n)$ гэж тэмдэглэе. $A = 2010^{2010^{2010}}$ гэе. Бидний зорилго

$$(1, 1, 1, 1, 1, 1) \rightarrow (0, 0, 0, 0, 0, A).$$

Эхлээд дараах туслах өгүүлбэрүүдийг баталъя.

Лемма 1. Дурын $a \geq 1$ -ийн хувьд $(a, 0, 0) \rightarrow (0, 2^a, 0)$ байна.

Баталгаа. Дурын $k \in \{1, \dots, n\}$ -ийн хувьд $(a, 0, 0) \rightarrow (a - k, 2^k, 0)$ болохыг индукцийн аргаар баталъя. $k = 1$ үед 1-р төрлийн үйлдлийг эхний хайрцагт хэрэглэвэл:

$$(a, 0, 0) \rightarrow (a - 1, 2, 0) = (a - 1, 2^1, 0).$$

$k < a$ гэе. $(a - k, 2^k, 0)$ -ийн 2 дахь хайрцагт 1-р үйлдлийг 2^k удаа хийгээд 2-р төрлийн үйлдлийг эхний хайрцагт хийвэл

$$(a - k, 2^k, 0) \rightarrow (a - k, 2^k - 1, 2) \rightarrow \dots \rightarrow (a - k, 0, 2^{k+1}) \rightarrow (a - k - 1, 2^{k+1}).$$

Иймд индукцээр

$$(a, 0, 0) \rightarrow (a - k, 2^k, 0) \rightarrow (a - k - 1, 2^{k+1}, 0). \quad \square$$

Лемм 2. $P_n = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}}_n$ гэс. Тэгвэл дурын $a \geq 1$ -ийн хувьд $(a, 0, 0, 0) \rightarrow (0, P_a, 0, 0)$ байна.

Баталгаа. Өмнөхтэй ижилээр k -аар индукцлэс. $k = 1$ үед эхний хайрцагт 1-р төрлийн үйлдлийг хийвэл:

$$(a, 0, 0, 0) \rightarrow (a - 1, 2, 0, 0) = (a - 1, P_1, 0, 0).$$

Одоо $k < a$ үед үнэн гээд $k + 1$ үед үнэн гэж баталъя. $(a - k, P_k, 0, 0)$ -д лемм 1-ийг хэрэглээд дараа нь эхний хайрцагт 1-р төрлийн үйлдлийг хийс:

$$(a - k, P_k, 0, 0) \rightarrow (a - k, 0, 2^{P_k}, 0) = (a - k, 0, P_{k+1}, 0) \rightarrow (a - k - 1, P_{k+1}, 0, 0).$$

Иймд индукцээр

$$(a, 0, 0, 0) \rightarrow (a - k, P_k, 0, 0) \rightarrow (a - k - 1, P_{k+1}, 0, 0). \quad \square$$

Одоо бодлогын нөхцөлийг хангах үйлдлүүд олдохыг баталъя.

$$\begin{aligned} (1, 1, 1, 1, 1, 1) &\rightarrow (1, 1, 1, 1, 0, 3) \rightarrow (1, 1, 1, 0, 3, 0) \rightarrow (1, 1, 0, 3, 0, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow (1, 0, 3, 0, 0, 0) \rightarrow (0, 3, 0, 0, 0, 0) \rightarrow (0, 0, P_3, 0, 0, 0) = \\ &= (0, 0, 16, 0, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 0, P_{16}, 0, 0). \end{aligned}$$

Ингэхэд 4-р хайрцагт байгаа мөнгөний тоо A -аас их болсон байна.

$$\begin{aligned} A = 2010^{2010^{2010}} &< (2^{11})^{2010^{2010}} = 2^{11 \cdot 2010^{2010}} < \\ &< 2^{2010^{2011}} < 2^{(2^{11})^{2011}} = 2^{2^{11 \cdot 2011}} < 2^{2^{2^{15}}} < P_{16} \end{aligned}$$

2-р төрлийн үйлдлийг 4-р хайрцагт хийж хайрцаг дахь мөнгөний тоог $A/4$ болгоё.

$$\begin{aligned} (0, 0, 0, P_{16}, 0, 0) &\rightarrow (0, 0, 0, P_{16} - 1, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 0, P_{16} - 2, 0, 0) \rightarrow \\ &\rightarrow \dots \rightarrow (0, 0, 0, A/4, 0, 0). \end{aligned}$$

Эцэст нь 1-р төрлийн үйлдлийг 4 ба 5-р хайрцуудад давтан хийж:

$$(0, 0, 0, A, 0, 0) \rightarrow \cdots \rightarrow (0, 0, 0, 0, A/2, 0) \rightarrow \cdots \rightarrow (0, 0, 0, 0, 0, A).$$

ОУ-6

$$a_n = \max_{1 \leq k \leq n-1} (a_k + a_{n-k}) \quad (1)$$

$n > r$ үед a_n бүр нь $a_n = a_{j_1} + a_{j_2}$, $j_1, j_2 < n = j_1 + j_2$ гэж бичигдэнэ. Энд хэрэв $j_1 > r$ бол a_{j_1} мөн ингэж бичигдэх тул

$$a_n = a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} \quad (2)$$

$$1 \leq i_j \leq r, \quad i_1 + \cdots + i_k = n \quad (3)$$

болно. (2)-д буй a_{i_1} ба a_{i_2} нь сүүлчийн алхамд гарсан тоонууд бол $i_1 + i_2 > r$ байна. Иймд (3)-ийг

$$1 \leq i_j \leq r, \quad i_1 + \cdots + i_k = n, \quad i_1 + i_2 > r \quad (4)$$

гэж бичиж чадна. Нөгөө талаас $i_1, \dots, i_k$ индексүүд (4)-г хангаж байна гэж үзье. $s_j \Rightarrow i_1 + \cdots + i_j$ гэвэл (1)-ээс

$$a_n = a_{s_k} \geq a_{s_{k-1}} + a_{i_k} \geq a_{s_{k-2}} + a_{i_{k-1}} + a_{i_k} \geq \cdots \geq a_{i_1} + \cdots + a_{i_k}.$$

(2) – (4)-оос

Өгүүлбэр. $r < n$ бүрийн хувьд

$$a_n = \max\{a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} \mid (i_1, \dots, i_k) \text{ нь (4)-ийг хангана}\}$$

гэж дүгнэж чадна. $s \Rightarrow \max_{1 \leq i \leq r} \frac{a_i}{i}$ гээд $s = \frac{a_l}{l}$ ба $l \leq r$ байх l индексийг бэхлэе. $r^2 l + 2r < n$ байх n -ийг авч a_n -ийн (2), (4) хэлбэрийг сонговол $n = i_1 + \cdots + i_k \leq rk$ гэдгээс $k \geq n/r \geq rl + 2$. $i_3, \dots, i_k$ -ийн аль нь ч l -тэй тэнцэхгүй гэвэл Дирихлен зарчмаар $\exists j, \quad 1 \leq j \leq r$ ба j нь $i_3, \dots, i_k$ -ийн дотор хамгийн цөөндөө l удаа орно ($j \neq l$) гэж гарна. j -ийн энэ l оролтыг $(i_1, \dots, i_k)$ -ээс

зайлуулж, оронд нь l -ийн j оролтыг нэмж $(i_1, i_2, i'_3, \dots, i'_{k'})$ гэсэн мөн (4)-ийг хангах дараалал олно. Өгүүлбэрээр

$$a_{i_1} + \dots + a_{i_k} = a_n \geq a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i'_3} + \dots + a_{i'_{k'}}.$$

буюу эсвэл давхцаж буй нэмэгдэхүүнийг зайлуулбал $la_j \geq ja_l$ буюу $\frac{a_l}{l} \leq \frac{a_j}{j}$ гэж олно. l -ийн тодорхойлолтоор энэ нь $la_j = ja_l$ болохыг заах тул

$$a_n = a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i'_3} + \dots + a_{i'_{k'}}.$$

Үүгээр $n \geq r^2l + 2r$ бүрийн хувьд (2), (4) хэлбэрийн дүрслэлийг олно. Тэнд $i_j = l$, $j \geq 3$ байна. Индексүүдийг дахин дугаариаад $i_k = l$ гэж үзэж чадна. Энэ дүрслэлд $(i_1, \dots, i_{k-1})$ индексүүд нь n -ийн $n-l$ -ээр сольсон (4) нөхцөлийг хангана. Тэгвэл Өгүүлбэрээс $a_{n-l} + a_l \geq (a_{i_1} + \dots + a_{i_{k-1}}) + a_l = a_n$ гэж олох тул (1)-ээр $n \geq r^2l + 2r$ бүрийн хувьд $a_n = a_{n-l} + a_l$ гэж олно.

"Төгс Тоо" төвийн тухай

Манай орны математик боловсролын хөгжилд мэдэгдэхүйц амжилт гарч математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай сургууль, ангиуд олноор байгуулагдаж байгааг харгалзан үзэж, тэднийг нэгдсэн удирдлага, үйл ажиллагаагаар хангах зорилгоор БСПУЯ-ны санаачилга дэмжлэгтэйгээр Монгоолын Математик Олимпиадын Хорооны дэргэд математикийн багш нарын мэргэжил дээшлүүлэх "Төгс тоо" төв байгуулагдсаар хэдэн жил болж байна. Тус төв нь математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийн

багш нарын мэргэжлийг системтэйгээр дээшлүүлэх ажлынхаа хүрээнд дунд ангийн багш нарын дунд тус бүр 90 цагийн багтаамжтай, 120000 төгрөгийн төлбөртэй I ба II шатны дамжааг 15 хоногоор; бага ангийн багш нарын дунд 60 цагийн багтаамжтай, 90000 төгрөгийн төлбөртэй сургалтыг 12 хоногоор хичээллүүлж, дамжааг амжилттай дүүргэсэн хүмүүст харгалзах сертификат олгон төгсгөдөг юм. Жил бүрийн хичээлийг МУИС, хичээлийн III байрны 306, 308 тоотод 6 сарын 23-24-нд бүртгэж, хичээл 6 сарын 25-аас эхлэн явагддаг. Төлбөрийг "Төгс тоо" төв дансанд хийж, төлбөрийн баримтаа үзүүлээд бүртгүүлж болно, эсвэл бэлнээр авчирна.

"Төгс тоо" төвийн данс:

Лавлах утас:

Голомт банк

2119483, "Төгс тоо" төв

312383 (гэр)

99879779 (Ц.Дашдорж)