

Монголын Математикийн Олимпиадын цуврал
№36

МУГБ, проф. Ц. Дашдоржийн нэрэмжит
ММО-47

Улаанбаатар хот
2012он

ӨМНӨХ ҮГ

Улсын болон Олон улсын математикийн олимпиадад бэлтгэгчид, математикийн төрөлжсөн сургалттай ангийн сурагч, оюутан, багш нар, математик сонирхогч өргөн олонд зориулсан цувралын ээлжит дугаар уншигч Таны гар дээр очиж байна. Тус гарын авлагыг бэлтгэхэд ММО Зохион Байгуулах Хорооны гишүүд, МУИС-ийн математикийн ангийн оюутнууд идэвхтэй оролцлоо. Уг номын талаархи аливаа санал хүсэлтээ МУИС-ийн Алгебрийн тэнхимд ирүүлнэ үү.

Монголын Математикийн XLVII олимпиад

Редактор: Цэрэндоржийн Дашдорж

Хэвлэлийн *LATEX* эхийг бэлтгэсэн: Лхагважавын Гэрэлтуяа
2012 оны 04-р сард хэвлэв.

Гарчиг

1	ММО-47-ын дүнгийн тухай тайлан	5
2	МАТЕМАТИКИЙН АМИН ЧУХАЛ АСУУДЛУУД	
	9	
3	ММО-47-ын III даваа	25
3.1	ММО-47, VII ангийн III даваа	25
3.2	ММО-47, VIII ангийн III даваа	29
3.3	ММО-47, VIII ангийн IV даваа	33
3.4	ММО-47, IX ангийн III даваа	38
3.5	ММО-47, X ангийн III даваа	42
3.6	ММО-47, XI ангийн III даваа	45
3.7	ММО-47, Багын багшийн III даваа	53
3.8	ММО-47, Дундын багшийн III даваа	56
4	ОУ-ын математикийн 52-р олимпиад	62
5	Тусгаар тогтнолын 100 жил ба Олонлог төв сургуулийн 10 жилийн ойн нэрэмжит уралдааны чөлөөт ангилал.....	71
6	ММО-47-ын IV даваа ба ОУМО-52-ын сорил (англи хэл дээр)	
	76	

МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАДЫН СҮЛД ДУУ

Нарнаас илчийг нь авч болох уу
Сарнаас гэрлийг нь салгаж болох уу
Багш та юу гэж заасан бэ
Багын нөхөд маань санаж байна уу
Тоо тоогоо тоолон бодъёо
Томъёогоор задлан бодъёо
Олуулаа уралдан бодъёо
Олимпиадаа оролцож бодъёо

Орчлонгийн удмыг туулж болох уу
Одод эрхсийг тоолж болох уу
Эвклид юу гэж хэлсэн бэ
Эрхэм нөхөд минь санаж байна уу

Дахилт

Эрдмийн оргилд хүрч болох уу
Энгүй далайг хэмжиж болох уу
Суут эрдэмтэн Мянгат өвөөгийн
Сургаалт үгийг санаж байна уу

Дахилт

Гэрлийн хурдыг давж болох уу
Тэнгэрийн хаяанд хүрч болох уу
Дэлхийд алдартай эрдэмтэн Гауссын
Дэлгэж нээсэн онолыг саная даа

Дахилт



2000 оны Сэлэнгийн
олимпиадыг зохион
байгуулагчдын бүтээл

1 ММО-47-ын дүнгийн тухай тайлан

Ц.Дашдорж

Эрхэм хүндэт математикч багш, сурагчид аа!

ММОХорооны гишүүдээ!

ӨВ-аймгийн засаг дарга Д.Тогтохсүрэн

Эрдэм ухаанд гүн шүтлэгтэй Өвөрхангайчууд аа,

Монголын Математикийн 47-р Олимпиад 2011 оны 05 сарын 02 -07-ны хооронд Арвайхээр суманд амжилттай явагдаж дүнгээ гаргаж байна. Энэ удаагийн олимпиадад 21 аймаг, Улаанбаатар хотын нийт 22 багийн 76 бага, дундын багш, 259 сурагчид оролцож нийт 335 хүн оюун ухаан, авъяас чадвараа сорин уралдлаа.

Энэ удаагийн олимпиадыг зохион байгуулах, бэлтгэл ажлыг хангахад ӨВ аймгийн Засаг дарга, Засаг даргын тамгын газар, аймгийн Боловсрол соёлын газар, ШУТИС-ийн ӨВ-дахь салбар Технологийн сургууль болон Ерөнхий боловсрол сургууль, цэцэрлэгүүд ихээхэн хүчин чармайлт гаргаж анхаарал хандуулсныг зориуд тэмдэглэх ёстой. Дээрх нэр бүхий нийт хамт олон, сайн санаат дэмжигчиддээ Монголын нийт математикчдын өмнөөс талархал илэрхийлье.

Олимпиадад 8-р ангийн 92 сурагч оролцсоноос "Орчлон" сургуулийн сурагч Ш.Золбаяр 33 оноогоор 1-р байр эзэлж, 8-р ангийн аварга боллоо. УБ хотын 1-р сургуулийн сурагч Б.Минжин, УБ "Олонлог" сургуулийн сурагч Б.Мөнх-Эрдэнэ нар 28 оноогоор 2-р байрыг, "Олонлог" сургуулийн сурагч А.Сүхбат 27,5 оноогоор, ӨВ аймгийн Улсын тэргүүний "Мэргэд" сургуулийн сурагч Д.Мөнх-Оргил, УБ 11-р сургуулийн сурагч Д.Батзориг, Б.Ганхэт нар тус тусдаа 25 оноогоор 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

Олимпиадад 9-р ангийн 64 сурагч оролцсоноос 1-р сургуулийн Ч.Золбоо 25 оноогоор 1-р байр эзэлж 9-р ангийн аварга су-

рагч боллоо. Увс аймгийн "Шинэ-Ирээдүй" сургуулийн сурагч Н.Төмөр-Очир УБ 1-р сургуулийн сурагч Б.Бат-Оргил нар 21 оноогоор, 2-р байрыг, "Орчлон" сургуулийн сурагч М.Ананд, 11-р сургуулийн сурагч Б.Батболд, нар 17 оноогоор, "Орчлон" сургуулийн сурагч Ш.Золбаяр 16 оноогоор тус тус 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

Олимпиадад 10-р ангийн нийт 61 сурагч оролцсоноос "Олонлог" сургуулийн сурагч Б.Бат-Од 30 оноогоор 1-р байр эзэлж, Улсын математикийн 47-р олимпиадын 10-р ангийн аварга сурагч боллоо. 1-р сургуулийн Э.Оргил-Эрдэнэ 28 оноогоор, Б.Баатархүү 27 оноогоор 2-р байрыг, Ч.Заяа, Н.Энхтөр, Д.Галмандах нар 21 оноогоор тус тус 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

Олимпиадад 11-р ангийн нийт 45 сурагч оролцсоноос 1-р сургуулийн Б.Батхуяг 23 оноогоор 1-р байр эзэлж Улсын математикийн 47-р олимпиадын 11-р ангийн аврага сурагч боллоо. 1-р сургуулийн Б.Төгөлдөр 22 оноогоор, Г.Халиун 18 оноогоор 2-р байрыг, 1-р сургуулийн сурагч Ц.Цэнгүүн, "Олонлог" сургуулийн сурагч О.Бямбадорж нар 17 оноогоор, Архангай аймгийн 1-р сургуулийн сурагч Д.Төвшинтөр 14 оноогоор тус тус 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоолоо.

Улсын Математикийн 47-р олимпиадад амжилттай оролцсон дээрх нэр бүхий сурагчид, олимпиадад сурагчдаа амжилттай бэлтгэж оролцуулсан багш нарт Монголын нийт математикчдын нэрийн өмнөөс чин сэтгэлийн талархал илэрхийлье. Багш нарын олимпиадыг бага, дунд гэсэн хоёр ангилалаар явуулсны дотроос бага ангийн математикийн 32 багш оролцсоноос, ӨВ аймгийн Улсын тэргүүний "Мэргэд" сургуулийн багш Д.Чулуунхүү 27 оноогоор түрүүлж, УБ "Төгсдэлгэрэх" сургуулийн багш Н.Даваа 25 оноогоор, "Орчлон" сургуулийн багш Б.Жаргалсүрэн 22,5 оноогоор удаах байруудад орлоо.

Дунд ангийн багш нарын олимпиадад нийт 44 багш оролцсоноос Сант сургуулийн багш Ч.Сугардорж 32 оноогоор түрүүлж, "Олонлог" сургуулийн багш Б.Ганбилэг 26 оноогоор II байр, Сэлэнгэ аймгийн багш Л.Буянтогтох 21 оноогоор III байрыг эзэллээ.

Багийн дүнгээр аймаг хотуудыг байр эзлүүлэхэд Н.Гэндэнсүрэн ахлагчтай Улаанбаатар баг дундаж оноо 16,4-өөр 1-р байр, П.Даарийбаамоо ахлагчтай ӨВ аймгийн баг дундаж оноо 15,2-оор 2-р байр, П.Одгэрэл ахлагчтай Увс аймгийн баг дундаж оноо 13,3-аар 3-р байранд шалгарлаа.

УБ хотын "Орчлон" сургуулийн 8-р ангийн сурагч Ш.Золбаярыг Ч.Даваадоржийн нэрэмжит "Гарамгай амжилт" тусгай шагналаар шагнах нь зүйтэй гэж ММОХороо үзлээ. ММО-47-д 1-р сургууль 12 медаль, "Олонлог" сургууль 5 медаль, "Орчлон" сургууль 4 медаль, 11-р сургууль 3 медаль, ӨВ аймаг 2 медаль, УБ-Төгсдэлгэрэх, УБ-Сант сургууль, Архангай, Увс, Сэлэнгэ аймаг тус тус 1, 1 медаль авч олимпиадад оролцогчдоо хошуучлан сайхан амжилт гаргалаа.

Энэ жилийн 7-р сард Голландын Амстарданд хотод болох ОУМО-52-ын бэлтгэлд УБ 1-р сургуулийн 11-р ангийн аврага сурагч Б.Батхуяг, Б.Төгөлдөр, Г.Халиун, Ц.Цэнгүүн, "Олонлог" сургуулийн сурагч О.Бямбадорж, Архангай аймгийн Төвшинтөр, "Олонлог" сургуулийн 10-р ангийн сурагч Б.Бат-Од, УБ 1-р сургуулийн 9-р ангийн сурагч Ч.Золбоо, "Орчлон" сургуулийн 8-р ангийн сурагч Ш.Золбаяр нарыг үлдээхээр Олимпиадын хороо шийдвэрлэлээ.

ОУМО-52-ын бэлтгэлд багтаж шалгарсан та бүхэндээ амжилт хүсч, Монголынхоо нэрийг дэлхийн тавцанд дуурсгах хүндтэй бөгөөд хариуцлагатай үйл хэргийн төлөө идэвхи чармайлт гарган сайн бэлтгэж амжилттай оролцохыг Монголын нийт Математикчдын нэрийн өмнөөс даалгаж байна.

Мэргэд сургуулийн захирал, ММОХорооны гишүүн
С.Эрдэнэбилэгийг ОУМО-2012-ийн Монголын багийн орлогч удир-
дагчаар томилох нь зүйтэй гэж ММОХороо үзлээ. Эрдэм оюун
дэлгэрч Монголд математикчдын оюун ухаан улам хөгжин дэл-
гэрэх болтугай. Анхаарал тавьсан та бүхэнд баярлалаа.

2 МАТЕМАТИКИЙН АМИН ЧУХАЛ АСУУДЛУУД

МУИС-ийн 70 жилийн ойд зориулав

ЧӨЛӨӨТ ЛЕКЦ

1. Математик сэтгэлгээний гурван үндсэн зарчим
/2012.03.09. МУИС-ийн дугуй зааланд 16:00 цагт /
2-3. Математикт юуг, яаж судлах ёстой вэ? /Математи-
кийн бурхад юуг судалдаг вэ?/

1. Математик сэтгэлгээний (баталгааны) 3 үндсэн
зарчим
(дүрэм, теорем, томъёо)

Ц.Дашдорж

1.0. Удиртгал

Энэ удиртгал хэсэгт миний эрхэм шавь математикч П.Энхболдын 50 насны ойг тохиолдуулан явуулсан П.Энхболдын нэрэмжит Улсын Математикийн ХУралдаанд зориулж Өнөөдөр сониноос 2008.12.18 нд гаргасан нүүрт миний бичсэн 2 өгүүлэл бүрэн эхээрээ дахин хэвлэгдэж байна. Энэ өгүүлэл нь өргөн олон уншигчдад зориулсан учраас ямар ч теорем томъёогүйгээр бичигдсэн бөгөөд одоо харин түүний математикийн нарийн томъёол, теорем, томъёог 1.1- 1.3-д авч үзэж байна.

Нэрт математикч П.Энхболдын мэндэлсний 50 насны
ой, түүний нэрэмжит Математикийн Улсын Х
Уралдаанд

Математик мину

Нэгэн зүйл. Сэтгэдэг явдал бол хүмүүнийг
амьтнаас ялгах гол ялгаа болой.

Сэтгэлгээний ноён оргил бол математик гэдэгтэй усан тэнэг ч маргахгүй буйзаа. Тэгэхлээр математикаар уралдана гэдэг бол

хүмүүн гэдэг бодгалийн жинхэнэ мөн чанарын уралдаан юм. Энд би математикийн уралдаан гэдгийн дор даага, шүдлэнгийн уралдаан лугаа сурагч, оюутнуудын олимпиадуудаас эхлээд хэдэн арав, зуу бүр мянган жилийн настай математикийн хүнд бодлогуудын төлөөх математикийн бурхадын хооронд олон арван жилээр үргэлжилдэг өрсөлдөөн тэмцээнийг ч хамааруулж байгаа уншигч авгай бээр болгоох ажаамуу. Хүмүүс маш олон төрлөөр уралддаг, тэмцэлддэг. Нохой ч гэсэн уралддаг, зодолддог, зодолдохоороо бүр алахаас наахнуур юм болдог. Хэрвээ нохой зодоон гэж байдаг бол Чингисийн Монголоос минь холуур, холуур, хайран ч монгол залуус минь!!! Хүмүүн төрөлхтөн энэ сайхан нэрэндээ зохицохуйц төгс төгөлдөржсөн үедээ л оюун ухааны уралдаанд онцгой ач холбогдол өгч, түүний үр шимийг хүртэж оюуны цэнгэлийн манлайг эдлэх буй заа. Хүмүүний сэтгэлгээ хэл яриагаараа дамжин илэрдэг. Өнгөнөөс нь харвал хэл ярианы маань, үнэн чанартаа бол сэтгэлгээний маань цаад язгуур үндэс нь бичгийн хэлэндээшингэсэн байх учиртай болов уу. Язгуурын бичгээ солих нь сэтгэлгээний гажуудлаас өгсүүлээд хиймэл эрхтний олон гажгийг дагуулах бөлгөө.

Нэгэн зүйл. Дэлхий 3 зааны нуруун дээр тогтдоггүй юмаа гэхэд хүмүүний сэтгэлгээ 3 "юуны" нуруун дээр тогтдог амой.

Математик гэхээр л төгсгөлгүй олон юмны тухай яриад байна гэж бодох хандлага байж мэдэх юм. Мэдлэгийн хүрээ тэлж, гүнзгийрэх бүр авч үзэж буй юмс улам нарийн олон талтай болохын хэрээр тэдэн дээр хийгдэж үйлдлүүд ч мөн тэр чинээгээр даган өөрчлөгдөж, тэндэх зүй тогтлууд нарийн түвэгтэй харагдана уу гэхээс биш дээр хэлсэн 3 үндсэн зарчмаас өөр илүү шинэ сэтгэлгээний зарчим гарч ирнэ гэж даанч байдаггүй болой. Одоо би энэ зарчмуудаа ойлгомжтойгоор тайлбарлая. Монголын математикийн олимпиадын хороо сэдвээ урьдчилан зарлаж байгаад багш, сурагчдын дунд Математикийн төрөлжсөн цуврал олимпиад гэгчийг явуулдаг. Тухайлбал Дирихлейн зарчим гэсэн сэдэв байна.

I ангийн баатрууд ч, V ангийн бацаанууд ч, X ангийн ах, эгч нарч, олон улсын Математикийн олимпиадын хамаг ме-

далийг хамсан МУИС-ийн онолын математикийн ангийн данагар оюутнууд ч, тэдний багш нарч ялгаагүй бүгд адилхан ганцхан энэ сэдвээр л гурав, гурван бодлого бодож уралддаг. Сонин байгаа биз. Тоо бодох гэж улайраад ертөнцийн бүх юмыг мартчихсан бацааныг харна гэдэг математикч хүний бас нэг жаргал даа. Дирихлейн зарчмын энгийн хэлбэр нь 5 туулайг 4 торонд яаж ч байрлуулсан аль аль нэг торонд дор хаяж 2 туулай заавал бий гэсэн хэлбэрээр томьёологддог. Математикийн аль ч түвшний сэтгэлгээнд ямар дугаартай хэдэн торыг яаж сонгох вэ, ямар дугаартай хэдэн туулайг яаж сонгох вэ, хамийн гол асуудал бол тухайн авч үзэж буй бодлоготой холбоотойгоор туулайнуудаа торонд яаж байрлуулах вэ гэдэг л жинхэнэ бодох ёстой асуудал болохоос биш дүгнэлтийг нь Дирихлейн зарчим аяндаа хийгээд өгнө. Нөгөө нэг зарчим бол оруулах, гаргах зарчим юм. Манай ангид шатар тоглодог төд, теннис тоглодог төдөн хүүхэд бий г.м. нөхцөлд энэ гурвууланг нь тоглодог хэдэн хүүхэд бий вэ? г.м. асуудалд хариулт өгөх томьёонууд дээр ажиллах явдал юм. Гурав дахь зарчим бол Холлын ялгаатай төлөөлөгчдийг сонгох зарчим буюу саяын бодлогын томьёололд ямар нөхцөл биелж байвал шатар тоглодог 1, даам тоглодог 1, теннис тоглодог 1 хүүхдийг сонгож авч чадах вэ гэсэн зарчим юм. Сэтгэлгээний тулгуур зарчмуудыг үе шаттай ингэж хялбарчлан бол өгвөл эхийн сүүтэй нь хамт балчир оюунд нь гүн суулгаж өгөхгүй бол ямарч авьяас байгаад их математикт амжилт олох магадлал бага юм. Дүрмийг нь хэлээд өгвөл Рубикийн шоог академич, цэцэрлэгийн сэргэлэн бацаан хоёрын хэн нь хурдан эвлүүлэх бол. Монголийн Математикийн олимпиадын хороо математикт ингэж ханддаг болсноор манай математикийн суурь боловсролын түвшин дэлхийн дунджаас дээгүүр байгаа, харин олимпиадын түлшин дэлхийд тэргүүлж байгаа гэж хэлэхээсээ би огт айхгүй байна. Олимпиадад амжилт гаргахын тулд олон бодлого бодож их цаг гаргахаас аль болохоор сэрэмжилж, оновчтой цөөн бодлогоор оюун ухааныг нь хөгжүүлэх тал дээр онц анхаарч ажиллах нь манай математикийн багш нарын эрхэм үүрэг болой. Хэрвээ ивээн тэтгэгчид олддогсон бол ганцхан Дирихлейн зарчмаар л гэхэд улирал бүр

уралдаан явуулаад байхад наанадаж Дирихлейн зарчим цаашилбал математик маань улам баялаг, улам хүчтэй, улам гүн, улам агуу баян болж харагдахын сацуу, математикийг мэдрэх хувьтай төрсөн хэн бүхэнд оюуны цэнгэлийн дээдийг эдлүүлж мянга, мянган охид хөвгүүдийг математикийн гайхамшигт ертөнц рүү даллан дуудах буйзаа.

Одоо би дээрх 3 зарчмын агуу гэдгийг мандуулах үүднээс бяцхан уянгын халил хийе. Хэрвээ бүх математикийг өөртөө багтаасан ганцхан томьёо байдагсан бол түүний баталгаанд дээрх 3 зарчим тус бүр гурвантаа ашиглагдах буй заа.

Нэгэн зүйл. Математикийн гоо сайхан бол ертөнцийн бүх гоо сайхны оргилын оргил мөн.

Ертөнцийг гоо сайхан л аварна гэж би хэлээгүй ээ, нэг номтой хүн айлдсан гэдэг байх. Бас "Математик бол шинжлэх ухааны хаан, математикийн хатан хаан нь арифметик" гэж математикийн хаан Гаусс гуай хэлсэн гэдэг. Хүмүүний мэдрэхүйнүүдийн дээд хэлбэр нь сэтгэж мэдрэхүй болой. Эндээс математикийн гоо сайхан бол ертөнцийн бүх гоо сайхны оргилын оргил мөнөөс мөн гэж төвөггүйхэн мөрдөгдөх байхаа. Математикийн гоо сайхныг харж, сонсож, үнэрлэж мэдрэх боломжгүй, зөвхөн сэтгэж л мэдрэх боломжтой юм. Төрөлхийн дүлий хүмүүн хүмүүсийн ярилцахыг хараад юм идээгүй байж амаа хөдөлгөөд байдаг тэнэг лүднүүд юмдаа гэж бодох лугаа тун адил санаа сэтгэх мэдрэмж нь тэг эрхэмд төрөхийг байг гэж аргагүй ээ. Сайхан, муухай математикийг ялгаж чадахгүй, өөрөөр хэлбэл математик урлагийн хэмжээнд ойлгогдохгүй л байвал эрхэм та онолын математикт олигтой амжилт олохгүй л болов уу.

Үнэнхүү хүчтэй теорем мөн л юм бол өгүүлшгүй гоо сайхныг агуулна гэсэн аксиом байна гээд айлдчихвал үнэнээс зөрөхгүй гэдэгт миний бие харин ч нэг итгэлтэй байна. Гоо сайхан ертөнцийг аварна гэдэг дэмий үг биш юм бол математикийн гоо сайхан Чингисийн Монголчуудын минь хийморийг сэргээж, онгодыг дуудах шидтэй байгаасай, хурай, хурай!

Нэгэн зүйл. Муухай математикт ертөнцөд байр байхгүй гэж би хэлээгүй ээ, Английн алдарт математикч

Харди айлдсаан.

Энэ бол аргаа барсан математикч хүний үг болохоос биш, муухай математик байдаггүй гэсэн үг хараахан биш болой.

Энэ үгийг миний шавь П.Энхболд хэлэх их дуртай байсан. Жаахан урт заваан баталгааг хараад л шавь маань муухай математикт ертөнцөд байр байхгүй гэж орос юмуу англиар хэлээд тэр дор нь маш товч ганган баталгаа хийчихдэгсэн. Нөгөө гоё баталгаанаасаа болоод нөгөө бодлого маань ой ухааныг нь цэнгүүлж, сэнгэнэсэн нэг аяга айраг хүртчихсэн юм шиг сэргээх явдал олонтаа тохиолдож нэг хэсэгтээ л ярианы сэдэв болдогсон. Бодлогыг зөвхөн бодохын тулд биш сэтгэлийн таашаал авахын тулд ингэж бодох хэрэгтэй юм байна гэдгийг шавиасаа анх ойлгосон болохоор П.Энхболддоо би их хайртай байдаг юм.

Бүр 70-аад онд Зөвлөлтийн хэдэн нэртэй алгебрч Монголын алгебрчдыг "Днестровский тетрадь" -аас өөр сэдвээр ажиллахгүй байхыг зөвлөөд, хэрэв өөр сэдвээр ажиллавал ажлаа манай руу битгий явуулаарай гэж захиж хэлснийг миний бие давтан хэлэх дуртай байдаг юм.

Энэ бол математикийн шинжлэх ухааныхаа үүднээс бол огт хэрэггүй гэж хэлж болохоор сэдвийг сонгож авч бие биендээ харилцан асуудал дэвшүүлж түүндээ хариулсан болж толгой эргэм олон теорем, өгүүллүүд бичээд математикийн шинжлэх ухаан, эрдмийн зэрэг цол, төрийн мөнгөөр тоглож байдаг улс гүрэн дамнасан бүлэглэлүүдэд орчих вий гэснээс сэрэмжилж хэлсэн захиас болохыг л тэр үед нь ойлгож билээ. Чухам энэ л утгаар муухай математик гэж хэлсэн болов уу гэж би хувьдаа таамагладаг юм. Байдлыг ажаад дуугүй байгаад байвал муухай математик Монголд маань нилээд амь бөхтэй суурьших нь бололтой. Математик болоод математик сэтгэлгээний наад захын мэдлэггүйгээ ойлгох тэнхэлгүйгээс би хэдэн зуун теорем баталсан гэж хөөрцөглөдөг математикийн шинжлэх ухааны докторууд олшрох янзтай. Ээ базарвааний хумпад, муухай математик Чингисийн Монголоос минь холуур, холуур.

Нэгэн зүйл. Цаг хоживол бүхнийг хожино.

Ямар ч мэргэжлийн хүн цаг хожихын тулд математикийг

жаахан суралтай гээд хэлчихвэл яадаг бол. Энд би математик гэдгийн дор математикийн томьёонуудыг тогтоо, теоремуудыг цээжил гэж огт хэлээгүй, зөвхөн математикийн хувиргалтуудыг чөлөөтэй хийх арга техникийг эзэмшин математик сэтгэлгээний наад захын төртэй бол гэж л хэлэх гэсэн юм. Шинжлэх ухааны дийлэнх салбаруудыг математикийн хэлэнд хөрвүүлчихсэн орчуулга аль хэдийнэ бэлэн байгаа. Үүнээс цааш бол гол нь математикчийн л ажил үлдэнэ, өөрөөр хэлбэл тухайн салбарын цөөн дүрмийг илэрхийлж буй томьёонууд дээр л математик хувиргалт чөлөөтэй хийж хүссэн үр дүнгээ, хүссэн цагтаа хэнээр ч заалгалгүй гаргаж авах явдал болой. Түүнээс биш тухайн салбарын бүх үр дүнгүүдийг тогтооно гэвэл ямар ч жижиг салбар байгаад, ямар ч том толгой байгаад нэмэргүй хүмүүний тархины багтаамжийн бодит боломжийг хэт давсан мэдээлэл байгаа шүүдээ.

Цаг хугацаа бол бүхний багш, цагийг хожвол бүхнийг хожно.

**Ардын багшийн ганц бодлогоор өгөх эрдмийг
Арчаагүй багш зуун бодлогоор залхаах болой**

Монголын математикийн хурц од байсан юм

П.Энхболд маань 1975 онд IX ангид байхдаа Улсын Математикийн олимпиадын эцсийн хоёр даваанд X ангийнхантай өрсөлдөн хол тасархай түрүүлж билээ. Тэр жилээ Олон улсын Математикийн олимпиадаас хүрэл медаль авчрав. Тэр үед бидний бэлтгэх хэмжээ ч хүрэл медиалаас дээш гарахааргүй байсан гэдэгтэй санал нийлнэ. Одоо бол харин элбэг алтан медаль авахуйц хэмжээнд бэлтгэдэг болсон. П.Энхболд IX анги төгсөөд тэр намраа шууд МУИС-ийн тооны ангид элсэв. Дахиж ийм хүүхэдтэй таараач уу, үгүйчүү, тэгээд ч чиний их сургуульд байх хугацаа дуусгавар болж байгаа шүү гэж их сургуулийн удирдлагаас надад үргэлж сануулж байдгийг бодолцоод амжиж ганц хэрэгтэй хүн бэлтгэх нь зүйтэй гэж сэтгээд есөн сарын 1-ээс П.Энхболдыгоо шууд л математикийн V ангийн алгебрийн тусгай курс ба математикийн III курсын математик логикийн хичээл-

дээ суулгав. Бараг л П.Энхболддоо зориулж V курсынхэнд Га-
луагийн онол, III курсынхэнд Алгоритм ба рекурсив функций
онол хичээлүүдийг МУИС-ийн түүхэнд шинээр зааж эхлэв. Эх-
ний хэдэн сар тэвдэж л байх шиг байснаа, хагас жилээс хойш уг
хичээлүүдийг гүйцэд ойлгодог нь П.Энхболд маань болж ах, эгч
нартаа бодлого бодож өгч, миний өмнөөс давтлага ч хийлгэдэг
болов.

Тоог алгебрийн ба трансцендент гэж хоёр ангид ху-
ваадгийг өнгөрсөн зуунд тогтоосон. Төгслөг тооны радикал ба
арифметикийн дөрвөн үйлдлээр бичигдэх тоо бүр алгебрийн тоо
болдог номтой. Тэгвэл үүний урвуу нь хүчинтэй юу гэсэн зүй
ёсны асуудлыг П.Энхболддоо тавилаа.

П.Энхболд маань тэр хавраа:

Теорем (П.Энхболд, 1976). $t, l = 2t - 1, q = ml + 1, p$ анхны
тоонууд ба $t \geq 3, p \neq q$ байг. $q - 1 \nmid m \cdot \text{ind} p$ бол

$$\sqrt[t+1]{qp + p \sqrt[t+1]{qp + p \sqrt[t+1]{qp + \dots}}} \quad (*)$$

илэрхийлэл радикалаар илэрхийлэгдэхгүй алгебрийн тоо байна.
 $p \in \mathbb{Z}_q^* = \langle \varrho \rangle_{q-1} \Rightarrow p = \varrho^s, 1 \leq s \leq q - 1$ байх $s \in N$ -г $\text{ind} p$
гэж тэмдэглэсэн.

Теорем (П.Энхболд, 1976). $t, l = 2t - 1$ анхны тоонууд ба
 $t \geq 3$ бол (*) нь теорем 1-ийн нөхцөлд оршихоор p, q анхны тооны
төгсгөлгүй олон хос олдоно гэсэн гайхамшигт теоремуудыг ба-
талж дээрх асуудалд сөрөг хариу өгөв.

Ийнхүү анхны тийм тоог математикчид гараараа барьж
нүдээрээ харав. Баталгаа нь ганган бөгөөд өндөр техник ур-
лагтай нь сайхан байлаа. Улсын оюутны эрдэм шинжилгээний
уралдаанд тэргүүн байр эзлэв. Үүнийг урьд нь хэн ч хийгээгүй
гэдгийг би сайн мэдэж байснаас гадна энэ бол зүй ёсны асуу-
дал гэдэг нь хэнд ч ойлгомжтой тул бушуухан дэлхийн матема-
тикчдын сонорт хүргэхсэн гэж яарлаа. Ашгүй тэр намар Олон
улсын оюутны эрдэм шинжилгээний ажлын уралдаан Унгарт бо-
лох байлаа. Мэдээж тэргүүн байрыг авсан багш, шавь хоёр явж л
таараа. МУИС-ийн эрдэм шинжилгээ хариуцсан нөхдүүд ч явах

бэлтгэлээ хангахыг үүрэг болгов.

Тавих илтгэлээ орос, англи хэл дээр бичиж жин тан болгов. Гэтэл бид хоёрыг л хасаад бусад нь явцгаав. Шавьд маань хэлсэн үг нь "Чиний эрдэм шинжилгээний ажлын удирдагч чинь Дашдорж байгаа цагт чи амжилт олохгүй шүү, хурдхан удирдагчаа солих хэрэгтэй. Нөхөр Дашдорж математикийн III, V курсынхэнд дур мэдэн сургалтын төлөвлөгөөнд тусгагдаагүй юм заасан сураг байгаа. Тэр нөхрийн их сургуульд дураараа дургидаг явдалд одоо цэг тавих цаг болсон байлгүй" гэж хэлсэн байв. Би ч үүнийг бас гадарлаж л байсан юм.

Үүний өмнөхөн Польшид Коперникийн 500 жилийн ойн нэрэмжит нэг жилийн өндөр хангамжтай мэргэжил дээшлүүлэх сургалтад явахаас зөвхөн намайг хасч уг боломжийг алдсанаа МУИС-ийн нийт багш нарын хурал дээр их л ид хав болгон тайлбарлаж байсан юм. МУИС-ийн удирдлага цаг үргэлж л хөөнө, зайлуулна гэж намайг сүрдүүлдэг ч Ү.Санжмятав, А.Мекей багш нар маань "явуулахад ч татгалзах юм алга ганцхан хичээлийг нь заах хүн алга байна" гэж аргацаагаад байдаг байв. Ингээд шавийгаа А.Мекей багш дээр хичээллүүлэхээр болов. Бид хоёрт дээрх ажлаа үргэлжлүүлэх өөр шинэ хэлбэрийн алгебрийн тоо олох, дараа нь бүр ерөнхий теорем батлах гээд дэндүү их ажил байсан юм сан. Үүнийгээ аспирантурын дараа л нэг сайхан цаг ирвэл дахин авч үзье гэж тохиров. Гэвч тийм цаг ирэх учиргүй байжээ. Шавь маань Москвагийн их сургуулийн аспирантурт дөнгөж очоод байхдаа есөн давхраас унаж нас барав. Энэ үйл явдал ч их учир битүүлэг юм. Ямар сайндаа л зөвлөлтийн цагдаа нар газар дээр нь ирж үзээд энэ хүнийг амьсгал хураасны нь дараа шидсэн байна гэж оношлоод хэсэг хүнийг байцааж хэдэн сар болсны дараа гэнэт тэр хүн өөрөө унажээ гэсэн хариу ирүүлж байхавдээ.

Ингэж Монголын математикийн хамгийн хурц од цаг үеийн золиос болж билээ. Галуа ч гэсэн дунд сургуулийн сурагч байхдаа энэ гайхамшигт онолоо нээсэн ч түүний ажлыг тэр үед дэлхий ойлгохоос дэндүү хол байсандаа. Математикт хамгийн олон теорем баталсан гэж түүхэнд тэмдэглэгдсэн Францын ШУА-ийн

ерөнхийлөгч Коши түүний ажлыг ойлгох боломжгүй байснаас Галуа 21 насандаа дуэлиэр нас барсан юм. Хэрвээ Галуагийн онол байхгүй байсан бол одоогийн математик ямар өрөвдмөөр ядмаг царайтай байх бол гэхээс айдас төрдөг юм.

Миний бие залуудаа ингэж будилж мунгинаж явахдаа Монголын болоод ертөнцийн хамгийн гайхамшигт хоёр хүмүүнтэй тун дотно харьцаатай байж, бие биеэ хайрлаж хамгаалж, түүнийхээ золиос болох шахаж явлаадаа.

Энэ цагийн (үнэндээ бол бүх л үеийн) хамгийн гайхамшигт алгебрч Е.И.Зельманов 1979 онд "энэ хүний ажил заавал зөв байх ёстой гэж" намайг өмгөөлөн Зөвлөлтийн алгебрчдыг эсэргүүцсэнийхээ төлөө кандидатынхаа хамгаалалт дээр "унаж" байсан юм шүү. Тухайн цаг үе үнэнийг заримдаа дийлдэг боловч түүхийн өмнө л тар нь танигддаг юм хойно доо.

П.Энхболд маань өдөрт манайд хэд орж ирнэ. Хэрэв ирэхгүй бол эхнэр маань намайг загнана, чи хүүхэд загначихав уу гэж. Яг л манай хоёр банди шиг манайд эрх дураараа байна. Ямар сайндаа л эхнэр маань "чамайг ингэж дураараа загнаж яваад амьтанд хорлогдчихвол Энхболд л энэ хоёр хүүтэй чинь үүрч аваачиж хаях байх шүү. Их сургууль ч ганц ачааны тэрэг өгөхгүй биз" хэлж байхавдээ.

Е.Зельманов, П.Энхболд нартай холбоотой эрхэм дээд хүний хамгийн эрхэм дээд мөс чанарын олон сайхан дурсамж надад байдаг. Сайн хүн нэг үгтэй, сайн морь нэг явдалтай гэж П.Энхболдын маань 18 настайдаа үнэндээ бол 17 нас дөрвөн сартайдаа баталсан дээрх хоёр теорем түүхэнд мөнхрөх нь гарцаагүй.

1.1. Оруулах ба гаргах зарчим

$A_i \subseteq V$, $i = \overline{1, n}$, $|A_i| < \infty$, $A = \bigcup A_i$ бол

$$|A| = \left| \bigcup A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n| \quad (1)$$

$$|\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_n}| = |\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}| = \left| V \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = |V| - \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \quad (2)$$

(1) ба (2)-д $\cap \leftrightarrow \cup$ гэж сольж болно (МК-I, 5.2). Бодлого бодох үед $A \cup B$ ба $A \cap B$ -г $A + B$ ба AB гэж бичвэл хялбар байдаг. А олонлогийн хэмжээс $|A|$ -г бодохын тулд A_i -үүдийг яаж сонгож авах вэ? түүний хэмжээс $|A_i|$ -г яаж бодох вэ гэдэг нь тухайн салбар бүрт өөрийн дүрмээр хийгдэнэ.

Бодлого 1. 12 ялгаатай номыг өнгө тус бүрээс ядаж 2 ном хавтаслагдсан байхаар 3 өнгөөр хавтаслах боломжийн тоог ол (МК-I 5.4.8).

Бодолт. $V = \{x = x_1 \dots x_{12} \mid x_i \text{ нь } i - \text{р номын хавтасны өнгө}\}$,
 $|V| = 3^{12}$

$A = \{x \in V \mid x \text{ нь бодлогын нөхцлийг хангана}\} \subseteq V$, $|A| = ?$

$A_i = \{x \in V \mid i - \text{р өнгөөр 2-оос цөөн ном хавтаслагдсан}\} \subseteq V$ гэвэл түүний гүйцээлт

$\overline{A_i} = \{x \in V \mid i - \text{р өнгөөр ядаж 2 ном хавтаслагдсан}\} \subseteq V$ ба $A = \cap \overline{A_i}$ болох тул Морганы дүрэм (МК-I, 4.2.3)-ээр

$$A = \cap \overline{A_i} = \overline{\cup A_i}; \quad |\cup A_i| \stackrel{(1)}{=} \sum |A_i| - \sum |A_i A_j| + |A_1 A_2 A_3|$$

$A_1 = A_{10} + A_{11}$, энд

$A_{1i} = \{x \in A_1 \mid i - \text{р өнгөөр яг } i \text{ ном хавтаслагдсан}\}$, $A_{10} \cap A_{11} = \emptyset$ болох тул $|A_1| = |A_{10}| + |A_{11}| = 2^{12} + C_{12}^1 \cdot 2^{11}$,

$$\begin{aligned} |A_1 A_2| &= |(A_{10} + A_{11})(A_{20} + A_{21})| \\ &= |A_{10} A_{20} + A_{11} A_{20} + A_{10} A_{21} + A_{11} A_{21}| \\ &= 1^{12} + 2C_{12}^1 1^{11} + C_{12}^2 2! \cdot 1^{10} \end{aligned}$$

болно, учир нь $A_{10} A_{20}, \dots, A_{11} A_{21}$ -үүд хос хосоороо үл огтлолцно.

Мөн $A_1 A_2 A_3 = \emptyset$ байх нь илэрхий тул

$|\cup A_i| = 3(2^{12} + 12 \cdot 2^{11}) - C_3^2 \cdot (1^{12} + 2 \cdot 12 \cdot 1^{11} + C_{12}^2 \cdot 2! \cdot 1^{10})$ ба
 $\forall X \subseteq V$ -ийн хувьд $|\overline{X}| = |V| - |X|$ тул $|A| = |\overline{\cup A_i}| = 3^{12} - |\cup A_i|$

Бодлого 2. Адил үсэг зэрэгцэж ороогүй байхаар "Дашдондог" гэдэг үгэнд үсгүүдийн байрыг хичнээн янзаар сольж болох вэ (МК-I, 5.7.8) ?

(1)-(2) томъёогоор бодогдохгүй хэмжээс гэж ертөнцөд байдаггүй болой.

$1 \leq k \leq n$ байх k -г бэхлэе. $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$,

$$S_{i_1 \dots i_k} = \left| \bigcap_{j=1}^k A_{i_j} \right|, \quad M_k = \sum S_{i_1 \dots i_k}, \quad S = \left| \bigcup_1^n A_i \right| \quad \text{байг.}$$

$$\text{Тэгвэл } S = M_1 - M_2 + M_3 - \dots + (-1)^{n+1} M_n \quad (1')$$

гэж (1)-ийг бичиж болно.

$$\text{m тэгш бол } S \geq M_1 - M_2 + M_3 - \dots + (-1)^{m+1} M_m \quad (3)$$

$$\text{m сондгой бол } S \leq M_1 - M_2 + M_3 - \dots + (-1)^{m+1} M_m \quad (4)$$

(3) ба (4)-ын баталгааг МК-I, 5.9.15-аас харж болно.

Бодлого 3. 6 талбайтай квадратад тус бүр нь 3 талбайтай 3 олон өнцөгт байрлажээ. Тэгвэл эднээс ерөнхий хэсгийн (огтлолцлын) талбай нь 1-ээс багагүй байх хоёр олон өнцөгт олдохыг үзүүл (МК-I, 5.9.22a).

Бодолт. A_i нь i -р олон өнцөгт, $S_i = |A_i|$, $S = |\cup A_i|$ гэвэл

$$6 = M \geq S \stackrel{(1')}{=} M_1 - M_2 + M_3 = \sum S_i - \sum S_{ij} + S_{123}$$

$$\rightarrow S_{12} + S_{13} + S_{23} = \sum S_{ij} \geq 9 - 6 + S_{123} = 3 + S_{123} \geq 3 \rightarrow \exists S_{ij} \geq 1.$$

Бодлого 4 (Нөхөөсний тухай Дынкины бодлого). 1 талбайтай тэрлэгэн дээр тус бүрийн талбай нь 0,5-аас багагүй 5 нөхөөс тавьжээ. Ерөнхий хэсгийн талбай нь 0,2 -оос багагүй байх 2 нөхөөс олдохыг үзүүл (МК-I, 5.9.23).

↑ A_i бол i -р нөхөөс, $S = |A_i|$, $S = |\cup A_i|$ ба M тэрлэгний талбай гэвэл

$$M \geq S \stackrel{(1')}{=} M_1 - M_2 + M_3 - M_4 + M_5 \quad \text{буюу}$$

$$M - M_1 + M_2 - M_3 + M_4 - M_5 \geq 0 \quad (5)$$

гэж гарна. Үүнтэй төстэй тэнцэл бишүүдийг одоо нөхөөс тус бүрийн хувьд бичье: A_1 нөхөөс нь $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5$ нөхөөсүүд бүхий тэрлэгний хэсэг тул (5)-г S_1 -ийн хувьд бичвэл: $S_1 - \sum S_{1i} + \sum S_{1ij} - \sum S_{1ijk} + S_{12345} \geq 0$ болно. Бүх 5 нөхөөсний хувьд гарах ийм тэнцэл бишүүдийг нэмбэл ($S_{12} = |A_1A_2| = S_{21}$ г.м.):

$$M_1 - 2M_2 + 3M_3 - 4M_4 + 5M_5 \geq 0 \quad (6)$$

болно, учир нь $S_{i_1 \dots i_k}$ нэмэгдэхүүн нь $i_1, \dots, i_k$ нөхөөсүүдийн хувьд бичигдсэн тэнцэл биш бүрт орох тул нийлбэрт k коэффициенттэй орно.

$$3(5) - (6) : 3M - 2M_1 + M_2 - M_4 + 2M_5 \geq 0 \quad (7)$$

Үүндээр $M_4 - 2M_5 \geq 0$ (S_{12345} нь $S_{i_1i_2i_3i_4}$ бүрд орох тул $M_4 \geq 5M_5 \geq 2M_5$) -ийг нэмбэл

$$3M - 2M_1 + M_2 \geq 0 \text{ буюу } M_2 \geq 2M_1 - 3M \geq 5 - 3 = 2$$

5 нөхөөснөөс $C_5^2 = 10$ хосыг үүсгэж болох тул энэ хосуудын аль нэгний нь огтлолцлын талбай $M_2/10 \geq 2/10 = 0.2$ -оос багагүй байна. $\downarrow$

1.2. Ялгаатай төлөөлөгчдийн систем(ятс).

$S_1, \dots, S_m \subseteq S, a_i \in S_i, i \neq j$ үед $a_i \neq a_j$ бол $a_1, \dots, a_m$ -ийг $S_1, \dots, S_m$ -ийн ЯТС гэдэг.

Теорем 1(Ф. Холл, 1935).

$S_1, \dots, S_m \subseteq S$ -ийн хувьд ЯТС оршино $\Leftrightarrow \forall k$ ба $\forall i_j$ -ийн хувьд $|S_{i_1} \cup \dots \cup S_{i_k}| \geq k$

Бодлого 1. $S = \bigcup_{i=1}^m A_i = \bigcup_{i=1}^m B_i, |A_i| = |B_j|, i \neq j$ үед $A_i \cap A_j = B_i \cap B_j = \emptyset$ бол $A_1, \dots, A_m$ ба $B_1, \dots, B_m$ -ийн хувьд ерөнхий $\exists$ ЯТС.

$\uparrow S_i = \{A_j | A_j \cap B_i \neq \emptyset\}, \overline{i} = 1, m. \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, m\} = [m]$ байг. Хэрэв $|S_{i_1} \cup \dots \cup S_{i_k}| < k$ бол $B_{i_1}, \dots, B_{i_k}$ -үүд нь $A_1, \dots, A_m$ -ийн k -аас цөөн олонлогийн нэгдэлд орно. Энэ нь $|B_{i_1} \cup \dots \cup B_{i_k}| = k|B_i| \leq (k-1)|A_i| = (k-1)|B_i|$ буюу $k \leq k-1$ болж зөрчилд хүргэнэ.

Иймд $|S_{i_1} \cup \dots \cup S_{i_k}| \geq k \rightarrow$ Холлын теоремоор $S_1, \dots, S_m$ -ийн хувьд $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$ гэсэн ЯТС олдоно. S_i -ийн тодорхойлолтоос

$A_{i_k} \cap B_k \neq \emptyset, \quad k = \overline{1, m}. \quad x_k \in A_{i_k} \cap B_k, \quad k = \overline{1, m}$ байг. Тэгвэл $x_1, \dots, x_m$ нь $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$ ба $B_1, \dots, B_m$ -ийн ерөнхий ЯТС боллоо.

1.3.Рамсейн теорем

$|S| = n$ байх S олонлогийн элементүүдийг 2 хайрцагт хийхэд I хайрцагт q_1 , эсвэл II хайрцагт q_2 элемент байхын тулд $n = ?$

$n \geq q_1 + q_2 - 1 = N(q_1, q_2; 1)$ байх нь илэрхий. Хэрэв t хайрцаг байна гээд ямар нэг i дүгээр хайрцагт q_1 элемент байх тухай яривал

$$N(q_1, q_2, \dots, q_t; 1) = \sum_1^t q_i - (t - 1) \quad (1)$$

болно. Энэ бол Дирихлейн зарчим юм. Сая S -ийн элементүүдийг нэг нэгээр буюу түүний нэг элементтэй дэд олонлогуудыг хийх тухай ярилаа.

S -ийн r элементтэй дэд олонлогууд (r -дэд олонлогууд)-ыг хайрцагуудад хийх асуудлыг авч үзээд Английн логикч, эдийн засагч Рамсей 1929 онд дараах теорем батлав. $|S_n| = n$ ба $P_r(S_n) = \{X \subseteq S_n \mid |X| = r\}$ байг.

Теорем 1(Рамсей, 1929). $r \geq 1, q_i \geq r, i = \overline{1, t}$ байг.

$\exists N = N(q_1, \dots, q_t; r)$ хамгийн бага натурал тоо, $\forall n \in \mathbb{N}$ ба дурын эрэмбэлэгдсэн t -хуваалт (эсвэл t ялгаатай хайрцагт байрлуулах)

$P_r(S_n) = A_1 \cup \dots \cup A_t$ -ийн хувьд $\exists i, \exists X \subseteq S_n, |X| = q_i,$

$P_r(X) \subseteq A_i.$

↑ (1) байгаа тул r -ээр индукцлэх нь ойлгомжтой.

$$N(q_1, q_2; r)$$

Индукцэд үзэж буйгаар $p_1 = N(q_1 - 1, q_2; r),$

$p_2 = N(q_1, q_2 - 1; r), N(p_1, p_2; r - 1)$ тоонууд оршин байгаа.

$N(q_1, q_2; r) \leq N(p_1, p_2; r - 1) + 1$ гэж баталдаг. Тухайн бодлоготой холбоотойгоор r, q_i, t -үүд нь ямар тоо байгаад A_i дэд олонлогуудыг яаж сонгож авахаасл математикчийн ур чадвар хамаарна, бусдыг нь Рамсейн теорем аяндаа хийгээд өгнө. За одоо бодлого руугаа орцгооё.

Бодлого 1(ОУМО-6, 1964 он). 17 эрдэмтэн 3 төрлийн сэдвээр харилцан захидал солилцжээ. Тэгвэл 1 төрлийн сэдвээр харилцсан 3 эрдэмтэн бий гэдгийг батал.

↑ x, y хоёр k -р сэдвээр харилцсан $\Leftrightarrow xy$ интервал k өнгө ($\theta(xy) = k$)—тэй гээ. x -аас $16 = \underline{3} \cdot 5 + 1$ интервал гарах тул нэг өнгийн ($k = 1$ өнгийн) 6 интервал $\theta(xy_1) = \dots = \theta(xy_6) = k = 1$ олдоно. Хэрэв $\theta(y_i y_j) = 1$ бол $\Delta xy_i y_j$ нь 1 өнгөтэй болно. Иймд $\forall i, j \theta(y_i y_j) = 2 \vee 3$ гээ. $y_1, \dots, y_6$ г авч үзэхэд y -ээс $5 = \underline{2} \cdot 2 + 1$ интервал гарах тул нэг өнгийн(2 өнгөтэй) 3 интервал олдоно,

$$\text{ө.х. } \theta(y_1 y_2) = \theta(y_1 y_3) = \theta(y_1 y_4) = 2$$

Хэрэв $\exists y_i y_j, 2 \leq i, j \leq 4, \theta(y_i y_j) = 2$ бол $\Delta y_1 y_i y_j$ нь 2 өнгөтэй болно. Ийм биш бол $\Delta y_2 y_3 y_4$ нь 3 өнгөтэй болно. ↓

$$P_2(S_{17}) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \quad (2)$$

энд $\{x, y\} \in A_k \Leftrightarrow x, y$ хоёр k дугаар сэдвээр харилцсан гэвэл бодлогын нөхцөл нь энэхүү (2) хуваалтыг өгөх тул $17 \geq N(3, 3, 3; 2)$ боллоо. $N(3, 3, 3; 2) > 16$ гэдгийг батлахын тулд 16 оройтой бүтэн графын нэг өнгийн Δ агуулаагүй 3-будалтыг байгуулах нь бас амаргүй асуудал байдаг.

Бодлого 2(Шур. И 1916). [16] -тоонуудыг 3 өнгөөр будахад (3 ангид хуваахад) $x + y = z$ тэгшитгэл 1 өнгийн шийдтэй гэж үзүүл.

↑ $\theta : [16] \rightarrow [3]$ өгсөн будалт нь $P_2([17]) = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, энд $\{x, y\} \in A_k \Leftrightarrow \theta|x - y| = k$ гэсэн хуваалтыг өгнө.

Бодлого 1-ээр $17 \geq N(3, 3, 3; 2)$ гэж гарсан тул Рамсейн теоремоор

$\exists s, \exists X = \{i, j, k\} \subseteq [17], i < j < k, P_2(X) \subseteq A_s$ буюу $s = \theta(j - i) = \theta(k - j) = \theta(k - i)$ ба $j - i + k - j = k - i$. ↓

$N(q_1, \dots, q_t; 1) = \sum q_i - (t - 1)$ болохыг (1) -ээс мэднэ.

$N(4, 4, 4; 2) \geq 128$ болох нь батлагдсан. $N(q_1, \dots, q_t; 2)$ -ийн томьёо олдоогүй байна. $N(q_1, \dots, q_t; 2) = N$ бол N оройтой бүтэн графын ирмэгүүдийг t өнгөөр яаж ч будсан ямар нэг i -ийн хувьд i -өнгө бүхий q_i -бүтэн дэд граф олдоно гэж Рамсейн Теоремоос шууд гарна.

Бодлого 3. $\forall n$ -ийн хувьд $\exists N = N(n)$, аль ч гурав нь нэг шулуун дээр үл орших хавтгайн N цэгийн хувьд эдгээрийн аль нэг n дээр нь оройтой гүдгэр n өнцөгт оршино.

↑ 1) өгөгдсөн n -өнцөгтийн оройнуудаас зохиож болох бүх дөрвөн өнцөгтүүд гүдгэр бол уг n -өнцөгт гүдгэр байна (үүнийг индукцээр хялбар батална). $N = N(n, 5; 4)$ ба хавтгайд ерөнхий байршилтай N цэг (S_N) өгөгдсөн байг. S_n -ийн бүх 4 өнцөгтүүдийн олонлогийг гүдгэр (A_1) ба хотгор (A_2) гэсэн 2 ангид хуваая: $P_4(S_n) = A_1 \cup A_2$ Тэгвэл Рамсейн теоремоор эсвэл $\exists X \subseteq S_N$, $|X| = n$ ба $P_4(X) \subseteq A_1$, энэ үед X нь 1) -ээр гүдгэр n -өнцөгтийг өгнө. Эсвэл $\exists X \subseteq S_N$, $|X| = 5$ ба $P_4(X) \subseteq A_2$ гэтэл энэ тохиолдол боломжгүй юм. ↓

$P_2(S_n) = A_1 \cup A_2$, $\{i, j\} \in A_1 \Leftrightarrow [ij]$ хөх хэрчим $\Leftrightarrow i, j$ хоёр танил,

$\{i, j\} \in A_2 \Leftrightarrow [ij]$ улаан хэрчим $\Leftrightarrow i, j$ хоёр танил биш,

$n = N(5, 3; 2)$ гэвэл $S_n\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ -ийн цэгүүдийг 2 өнгөөр холбоход эсвэл хөх 5 хошуу олдоно, эсвэл улаан Δ олдоно, г.м. олон янзаар томъёолж болно.

Теорем 2(Ширшов А.И, 1957). $\forall k, s, n \in \mathbb{N}$ -үүдийн хувьд $\exists N = N(k, s, n)$: k симболоос зохиосон N үрттай дурын үгэнд эсвэл дараалсан s адил дэд үг байна, эсвэл n -хуваагдах дэд үг байна(Олонлог, 2011 тусгай дугаар, х.51-57).

Бодлого 4(Ширшов).

A, B, C саванд харгалзан a, b, c литр ус байв. $a, b, c \in \mathbb{N}$. Сав тус бүрийн эзлэхүүнийг хангалттай их гэж үзээд аль нэг саванд байгаа устай тэнцүү хэмжээтэй усыг өөр аль нэг савнаас нь юүлж хийх замаар аль нэг савыг нь хоосолж болохыг батал. (Олонлогийн Математик цоморлиг 2007-2008, х.231)

↑ $0 < a \leq b \leq c$ гэе. $b = ad + r$, $0 \leq r < a$.

$d = 2^{k_1} + \dots + 2^{k_s}$, $k_1 < k_2 < \dots < k_s$ бол A -руу C -ээс эхлээд $(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k_1-1})a$ литр усыг юүлж дараа нь B -ээс $2^{k_1}a$ усыг хийвэл A -д $2^{k_1+1}a$ литр устай болно, дараа нь C -

ээс $(2^{k_1+1} + 2^{k_1+2} + \dots + 2^{k_2-1})a$ л ус хийж дараа нь B -ээс 2^{k_2} л ус хийнэ г.м. B -ээс A -руу da л ус хийхэд B -д r литр ус үлдэнэ, ө.х. (a, b, c) төлөвөөс (a_1, b_1, c_1) төлөвд шилжихэд $\min(a_1, b_1, c_1) < \min(a, b, c)$ болсон. Энэ үед C -ээс A -руу юүлсэн ус B -ээс A -руу юүлсэн уснаас ихгүй тул энэ үйлдлийг гүйцэтгэж чадна. (a_1, b_1, c_1) төлвөөс цааш яг саяных шиг ажиллаж $\min(a_1, b_1, c_1)$ багасгаж чадна, эцэстээ 0 болгож чадна. ↓

Ширшовын теоремын Йорданы ба Ли алгебрт зориулсан хувилбарыг алдарт математикч Е.И.Зельманов 1980-90-ээд онуудад хийж бүлгийн онол, Ли ба Йорданы алгебрийн хамгийн хүнд асуудлуудыг шийдсэн, харин баруун альтернатив алгебрт зориулсан хувилбарыг миний бие 1984 онд хийж К.А.Жевлаковын асуудлыг шийдсэн болно.

Дараа нь эндээсээ санаа авч Ширшов багшийн Бодлого 4-тай юмуу эсвэл Шүрийн Бодлого 2-той төстэйгээр n -ийн ямар утгад $1, 2, \dots, n$ тоонуудыг дурын аргаар 3 ангид хуваахад хуваалтын аль нэг ангид нь $x + y = z$ байх 3 ялгаатай тоо x, y, z олдохыг баталж болох вэ? гэсэн асуулт тавьж $n = 1000$ үед 1984 оны МО-ийн 3-р даваанд дэвшүүлж, манай нэрт математикч П.Энхболд нар 1000-г 49 болтол багасгаж байж билээ. Харин $n = 24$ доод торгон зааг болохыг миний шавь нар компьютер ашиглан тогтоосон боловч цэвэр математик баталгаа нь одоо хүртэл алга байгаа нь баруун альтернатив алгебрийн тохиолд асуудал хир гүнзгий болохыг хэлээд байх шиг.

2009 оны 7 сард Германд болсон ОУМО-50 д хүндэт зочноор уригдсан ОУМО-ийн удаа дараагийн алтан медальт, алдарт математикч Б.Боллабаш(Унгар, Англи), Л.Ловас(Унгар, Америк), Ж.Ёкос(Франц), С.Смирнов(Орос, Швейцарь), Т.Тао(Австраль, АНУ), Т.Гауэрс(Англи) нар өөрсдийн хамгийн шилдэг ажлуудаа Рамсейн теоремд тулгуурлан хийснээ тайлагнаж байв.

**МОНГОЛ ХҮМҮҮНИЙ ХИЙМОРЬ ЛУНДААГ
ДЭЛХИЙД ГАЙХУУЛСАН ЗАНГАРАГАТАЙ
МАТЕМАТИКЧИД ТӨРӨХ БОЛТУГАЙ.**

3 Монголын математикийн XLVII олимпиад

3.1 ММО-47, VII ангийн III даваа

Н.Аргилсан (МУБИС)

VII-A1 (Н.Аргилсан). $A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2011 \cdot 2012}$ ба
 $B = \frac{1}{1007 \cdot 2012} + \frac{1}{1008 \cdot 2011} + \dots + \frac{1}{2012 \cdot 1007}$ бол $\frac{A}{B}$ утгыг ол.

VII-A2 (Ц.Нямдаваа). x, y, z нь хос хосоороо харилцан анхны натурал тоонууд бол $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$ илэрхийллийн бүх бүхэл тоон утгыг ол.

VII-A3 (Э.Азжаргал). ABC гурвалжны AB тал дээр E цэгийг, BC талын үргэлжлэл дээр F цэгийг $AE = BF$ байхаар авав. $\angle FEC = 90^\circ$ бол $\angle ACE = ?$

VII-B1 (Н.Аргилсан). $(x+y)^2 = (x-2)(x+2)$ тэгшитгэлийн бүх бүхэл тоон шийдийг ол.

VII-B2 (Н.Дайвий-Од). Үржвэр нь ч, нийлбэр нь ч n -тэй тэнцүү байх n ширхэг бүхэл тоо олддог бол n -ийг "сайн" тоо гье. Тэгвэл $4k+1$ ($k \geq 0$), 4ℓ ($\ell \geq 2$) хэлбэрийн бүх тоонууд сайн тоо болохыг харуул.

VII-B3 (Б.Эрдэнэбаяр). $a > b$ байх эерэг бодит a, b тоонуудын хувьд $a + \frac{1}{b(a-b)} \geq 3$ тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

VII-A1:

$$\begin{aligned} A &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2011} - \frac{1}{2012}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2012}\right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2012}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2012}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{1006}\right) \\
&= (1-1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{1006} - \frac{1}{1006}\right) + \\
&\quad + \frac{1}{1007} + \cdots + \frac{1}{2012} = \frac{1}{1007} + \cdots + \frac{1}{2012} \\
2A &= \left(\frac{1}{1007} + \frac{1}{2012}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{1008} + \frac{1}{2011}\right) + \\
&\quad + \cdots + \left(\frac{1}{2012} + \frac{1}{1007}\right) = 3019 \\
&\quad \left(\frac{1}{1007 \cdot 2012} + \frac{1}{1008 \cdot 2011} + \cdots + \frac{1}{2012 \cdot 1007}\right) \\
&= 3019 \cdot B \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{3019}{2}
\end{aligned}$$

VII-A2: а) $x = y = z$ бол хос хосоороо харилцан анхных гэдгээс $x = y = z = 1$ байна. Эндээс

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} = n$$

гэвэл $n = 8$ байна.

б) $x = y = 1$ ба $z > 1$ байг.

$$n = \frac{2(1+z)(z+1)}{z} = \frac{2(z^2 + 2z + 1)}{z} = 2\left(z + 2 + \frac{1}{z}\right) \in \mathbb{Z}$$

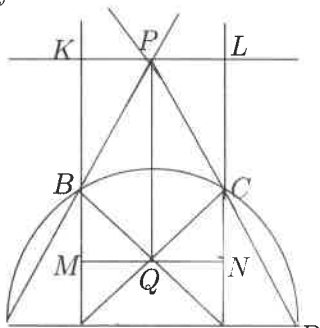
гэдгээс $z = 1, z = 2$ болно. Энэ үед $n = 8$ ба $n = 9$ болно.

в) Одоо бүгдээрээ ялгаатай гэе. $x < y < z$ гэж үзэж болно. $(x+y)(y+z)(z+x) = n \cdot xyz$ гэдгээс 2 талыг нь z -ээр жишвэл $x + y : z$. Үүнтэй адил $x + z : y$ байна. Нөгөө талаас $x + y < 2z$ байна. $x + y = mz$, $x + z = ky$ гэж үзвэл $x + y < 2z \Rightarrow mz < 2z \Rightarrow m < 2 \Rightarrow m = 1$ байна. Иймд

VII-B2: Үржвэр нь ч нийлбэр нь ч n -тэй тэнцүү байх n ширхэг бүхэл тоо олддог бол n -г "Сайн тоо" гээ. Тэгвэл

а). $4k + 1 (k \geq 0)$

б). $4l (l \geq 2)$ хэлбэрийн тоонууд бүгд сайн тоо болохыг харуулъя.



а). $1; \underbrace{-1; -1; \dots -1}_{2k}; \underbrace{1; 1; \dots 1}_{2k};$

Эдгээр тоонууд бодлогын нөхцөлийг хангана.

б). $l - \text{тэгш бол}$
 $l; 4; \underbrace{-1; -1; \dots -1}_{\frac{l+2}{2}}; \underbrace{1; 1; \dots 1}_{\frac{7l-6}{2}};$

$l - \text{сондгой бол}$

1. $A \frac{l+1}{2} E \text{ тэгш үед } l; 2; 2; 2; \dots 2; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \underbrace{-1; -1; \dots -1}_{\frac{l-3}{2}}; \underbrace{1; 1; \dots 1}_{\frac{7l-11}{2}};$

2. $\frac{l+1}{2} \text{ сондгой үед } l; 2; 2; 2; \dots 2; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \underbrace{-1; -1; \dots -1}_{\frac{l+1}{2}}; \underbrace{1; 1; \dots 1}_{\frac{7l-13}{2}};$

тоонууд бодлогын нөхцөлийг хангана.

VII-B3: $a > b > 0$ бол $a + \frac{1}{b(a-b)} \geq 3$ тэнцэтгэл бишийг баталъя. Тэнцэтгэл бишийн зүүн гар талд b -г нэмж, хасаж өгөөд 3-н тооны хувьд Кошийн тэнцэтгэл биш бичвэл шууд гарна. Харин Коши хэрэглэхгүйгээр хэрхэн батлахыг авч үзье. Ижил хуваарь өгч b -ийн хувьд эмхэтгэвэл

$$ab(a-b) + 1 \geq 3b(a-b) \Rightarrow a^2b - ab^2 + 1 \geq 3ab - 3b^2 \Rightarrow$$

$$(3-a)b^2 + (a^2-3a)b + 1 \geq 0$$

Хэрэв $a \geq 3$ бол анхны тэнцэтгэл биш нь илэрхий байна. Иймд $a < 3$ гэж үзье. $f(b) = (3-a)b^2 + (a^2-3a)b + 1$ гэсэн b -хувьсагчийн хувьдах кв 3-н гишүүнтийг авъя. $3-a > 0$ учир график нь дээшээ харсан прабол байна. Иймд дискриминантыг нь авч үзье. Хэрэв

$D \leq 0$ гэж баталбал тэнцэтгэл биш батлагдана.

$$\begin{aligned} D &= (a^2 - 3a)^2 - 4(3 - a) \cdot 1 = a^2(3 - a)^2 - 4(3 - a) \\ &= (3 - a)(a^2(3 - a) - 4) = (3 - a)(3a^2 - a^3 - 3 - 1) \\ &= (3 - a)(3(a^2 - 1) - (a^3 + 1)) \\ &= (3 - a)(3(a - 1)(a + 1) - (a + 1)(a^2 - a + 1)) \\ &= (3 - a)(a + 1)(-a^2 + 4a - 4) \\ &= -(3 - a)(a + 1)(a - 2)^2 \leq 0 \quad (a < 3 \text{ учир}) \end{aligned}$$

Иймд тэнцэтгэл биш нь батлагдлаа.

3.2 ММО-47, VIII ангийн III даваа

Н.Аргилсан (МУБИС)

VIII-A1 (Ц.Нямдаваа). $p^3 - q^5 = (p + q)^2$ байх бүх (p, q) хос анхны тоонуудыг ол.

VIII-A2 (Н.Аргилсан). n нь 2-ын зэрэгт хэлбэртэй бичигддэг ба цифрүүдийнх нь байрыг сольж өөр ялгаатай 2-ын зэрэгт хэлбэрт бичигдэх тоог үүсгэж болдог байх n натурал тоо оршин байх уу?

VIII-A3 (Н.Дайвий-Од). Нэгж радиустай дугуйг гадна талаас нь нэгж талтай квадратуудаар дараахи хоёр нөхцөлийг нэгэн зэрэг хангадаг байхаар тойруулан хүрээлж болохыг батал. Үүнд:

1. Квадрат бүр дугуйг зөвхөн оройгоороо шүргэнэ.
2. Хөрш квадратууд зөвхөн нэг нэг оройгоороо холбогдоно.

VIII-B1 (Н.Аргилсан). a, b, c эерэг бодит тоонуудын хувьд

$$\frac{3}{8} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) > \frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2b+c} + \frac{1}{2c+a}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

VIII-B2 (Н.Дайвий-Од). Үржвэр нь ч, нийлбэр нь ч n -тэй тэнцүү байх n ширхэг бүхэл тоо олддог бол n -ийг "сайн" тоо гэе. Сайн тоо төгсгөлгүй олон олдохыг харуул.

VIII-B3 (Э.Азжаргал). Анги 30 сурагчтай ба сурагч бүрийн ангид байгаа найзын тоо хоорондоо тэнцүү байв. Өөрийнхөө бүх найзуудаас сурлагаар илүү сурагчийг "сайн сурагч" гэж нэрлэе. Сайн сурагчийн тоо хамгийн ихдээ хэд байж болох вэ? (Ямар ч хоёр сурагчийн хувьд нэг нь сурлагаар илүү байна)

VIII-A1: Тэгшитгэлээс $p > q$ байх нь илэрхий. p ба q -г 3-т хуваахад өгөх үлдэгдлүүдээр шалгая.

a) $p \equiv 1(3)$ ба $q \equiv 1(3)$ байг. $\Rightarrow p^3 - q^5 \equiv 0(3)$. Харин $(p+q)^2 \equiv 1(3)$ тул шийдгүй.

b) $p \equiv 1(3)$ ба $q \equiv 2(3)$ байг. $\Rightarrow p^3 - q^5 \equiv 1 - 2^5 \equiv 1 - (-1) \equiv 2(3)$. Харин $(p+q)^2 \equiv 0(3)$ тул шийдгүй.

c) $p \equiv 2(3)$ ба $q \equiv 1(3)$ байг. $\Rightarrow p^3 - q^5 \equiv 2^3 - 1^5 \equiv 7 \equiv 1(3)$. Харин $(p+q)^2 \equiv 0(3)$ тул шийдгүй.

d) $p \equiv 2(3)$ ба $q \equiv 2(3)$ байг. $\Rightarrow p^3 - q^5 \equiv -1 - (-1) \equiv 0(3)$. Харин $(p+q)^2 \equiv (2+2)^2 \equiv 1(3)$ тул шийдгүй.

Иймд p, q -ийн ядаж нэг нь 3-д хуваагдах болж байна. p анхны тоо $p \equiv 0(3)$ гэе. Тэгвэл $p^3 - q^5 = (p+q)^2 \Rightarrow -q^5 = q^2(3)$ буюу өөрөөр хэлбэл $q^5 + q^2 \equiv 0(3)$ болно. $\Rightarrow q^2(q^3 + 1) \equiv 0(3)$ буюу $q^2 \equiv 0(3)$ эсвэл $q^3 + 1 \equiv 0(3)$ байна. Хэрэв $q^2 \equiv 0(3)$ бол q -анхны тоо $\Rightarrow q = 3$ байна. p -анхны тоо тул $p = 3$ болно. Гэвч $p > q$ тул энэ нь шийд биш. Хэрэв $q^3 + 1 \equiv 1(3)$ ба $p > q$ гэдгээс $p = 3$ $q = 2$ гэсэн утгыг авч болно. Гэвч бас тэгшитгэлийн шийд биш болно. Иймд $q = 3$ байг. $p^3 - 243 = (p+3)^2$ ба $p^3 \equiv p^2(3)$ байна.

$\Rightarrow p^2(p-1) \equiv 0(3)$ ба $p^2 \not\equiv 0(3)$ тул $(p-1) \equiv 0(3)$ байх буюу $p=7$ гэсэн анхны тоо байна.

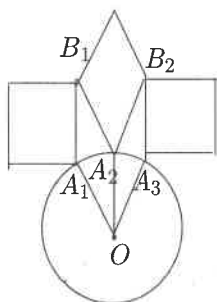
Өөр шийдгүйг харуулъя. $p^3 - 243 = p^2 + 6p + 9 \Rightarrow p^3 - p^2 - 6p - 252 = 0$.

$p^2(p-1) - 6(p-1) - 258 = 0 \Rightarrow (p^2 - 6)(p-1) = 258. \Rightarrow p > 7$ байх анхны тоон шийдгүй нь харагдана. Иймд $(p=7, q=3)$ гэсэн ганц шийдтэй.

VIII-A2: Энэ тоог a -гэе. $a = 2^n$ гэж бичигдэнэ. Цифрүүдийн байрыг сольж $b = 2^m$ тоог үүсгэж байдаг гэе. Тэгвэл $b = 2a$ эсвэл $b = 2^2 \cdot a$ эсвэл $b = 2^3 \cdot a$ байх боломжтой (2^4 -ээс их тоогоор үржвэл орон нэмэгдэх тул үржиж болохгүй).

$(b-a)$ -тоог авч үзье. $(b-a) = a$ эсвэл $(b-a) = 3a$ эсвэл $(b-a) = 7a$ болно. Гэвч $b-a:9$ ба харин $a, 3a, 7a$ тоонуудын аль нь ч 9-д хуваагдахгүй. Иймд a -натурал тоо олдохгүй.

VIII-A3: ◀ Тойргйн төвийг O , аль нэг квадрат тойрогтой шүргэх пэгийг A_1 , түүний дараагийн квадрат тойрогтой шүргэх пэгийг A_2 , дараагийнхыг нь A_3 , гэх мэт тэмдэглэе.



Хэрэв A_1, A_2 , цэгт шүргэдэг квадратуудын хоорондоо холбогдож байгаа ерөнхий оройг B_1 , дараагийн хосын ерөнхий оройг B_2 , гэх мэтчилэн тэмдэглэвэл эхний 2 квадрат OB_1 шулууны хувьд, дараагийн 2 квадрат OB_2 шулууны хувьд, тэгш хэмтэй учир $OA_1B_1A_2, OA_2B_2A_3$ дөрвөн өнцөгтүүд ромбо болно.

Иймд OA_1 нь A_2B_1 -тэй, OA_3 нь A_2B_2 -тэй параллель учир тэдгээрийн хоорондох 90° өнцөг болно ($\angle A_1OA_3 = 90^\circ$). Цаашид $\angle A_3OA_5, \angle A_5OA_7, \angle A_7OA_9$ гэдгээс $A_1 = A_9$ болно. Ингээд 8-н квадратаар дээрх нөхцөл хангаж байхаар хүрээлж болдог нь батлагдлаа. ►

VIII-B1: $\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 \geq 4 \cdot a \cdot \frac{b}{2} = 2ab$ тэнцэтгэл бишийг ашиг-

лая. $\frac{a + \frac{b}{2}}{ab} \geq \frac{2}{a + \frac{b}{2}} \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{2a} \geq \frac{4}{2a + b}$ болно. Үүнтэй адил

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{2b} \geq \frac{4}{2b + c}, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{2c} \geq \frac{4}{2c + a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{2c} \geq 4 \left(\frac{1}{2a + b} + \frac{1}{2b + c} + \frac{1}{2c + a} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 4 \left(\frac{1}{2a + b} + \frac{1}{2b + c} + \frac{1}{2c + a} \right)$$

Кошийн тэнцэтгэл бишийн тэнцэлдээ хүрэх нөхцлийг санавал

$a = \frac{b}{2}, b = \frac{c}{2}, c = \frac{a}{2}$ буюу $b = 2a, c = 2b, a = 2c$ гэдгээс $c = 2 \cdot 2a = 4a = 4 \cdot 2c = 8c$ буюу $c = 0$ болоход хүрнэ. Иймд тэнцэлдээ хүрэхгүй тул $\frac{3}{8} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) > \frac{1}{2a + b} + \frac{1}{2b + c} + \frac{1}{2c + a}$

VIII-B2: (7-р ангийн B2 бодолтыг хар.)

VIII-B3: Ангийн 30 сурагч 2, 2-оор найз гэж үзвэл 15 сайн сурагч олдоно. Одоо 15-аас олон сайн сурагч олдохгүй гэж харуулъя. Эсэргээс нь 16 сайн сурагч олддог гээ. 1 сайн сурагч m-ширхэг найзтай гэвэл сайн сурагчдын найзын тоо 16m болно. Үлдсэн 14 сурагч нь сайн сурагчидтай найзлах тоо m-ээс их болох хэрэгтэй болно. Өөрөөр хэлбэл 1 сайн сурагчаас m-ширхэг сум сайн биш сурагчидруу очиход 1 сайн биш сурагч дээр m-ээс олон сурагч очих учир зөрчинө. Иймд хамгийн ихдээ 15 сайн сурагчтай байна.

3.3 ММО-47, VIII ангийн IV даваа

Ч.Гантөмөр

VIII-A1 (Н.Аргилсан). Аливаа эерэг a, b, c бодит тоонуудын хувьд
$$\frac{1}{ab+c} + \frac{1}{bc+a} + \frac{1}{ac+b} \geq \frac{24}{(a+b+c+1)^2}$$
 тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

VIII-A2 (Н.Дайвий-Од). Хот 472011 хүнтэй ба хүн бүр өөрийн дуртай дугаар бүхий гар утас барьдаг (ямар ч 2 дугаар давхцахгүй ба натурал тоогоор дугаарлана). Хэрэв хүн бүр өөрийнхөө утасны дугаарын хуваагч дугаартай утас барьдаг хүнтэй найз бол ижил тооны найзтай 2 хүн олдохыг харуул (Хүн бүр 1 дугаар эзэмшинэ, А нь В-тэй найз бол В нь мөн А-тай найз байна).

VIII-A3 (М.Батбилэг). Хавтгай дээр аль ч 3 нь нэг цэгээр огтлолцохгүй, аль ч 2 нь параллель биш 47 шулуун зурав. Аль нэг шулуунтай параллель шулуун зурах замаар нийт 2011 шулуун зурагдахад хавтгай хамгийн олондоо хэдэн хэсэгт хуваагдах вэ?

VIII-B1 (Б.Ганбат) $x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$ тэгшитгэлийн бүх бүхэл тоон шийдийг ол.

VIII-B2 (Э.Азжаргал). В, С цэгүүд AD диаметртэй хагас тойрог дээр оршино. Е ба F цэгүүд харгалзан В ба С цэгүүдийн AD хэрчим дээрхи проекц болно. АВ ба DC шулуунууд Р цэгт, ЕС ба BF шулуунууд Q цэгт огтлолцоно. Тэгвэл $PQ \perp AD$ гэж батал.

VIII-B3 (Э.Энхзаяа) n -ширхэг ялгаатай бодит тоо өгөгдөв. Тэгвэл эдгээр тоонуудаас хэдэн тоог, уг сонгож авсан тоонуудын нийлбэр дээр ямар нэг бүхэл тоог нэмэхэд гарах тоо нь модулиараа $\frac{1}{n+1}$ -ээс хэтрэхгүй байхаар сонгож авч болохыг батал.

VIII-A1:

$(u+v)^2 \geq 4uv \Leftrightarrow \frac{u+v}{uv} \geq \frac{4}{u+v} \Leftrightarrow \frac{1}{u} + \frac{1}{v} \geq \frac{4}{u+v}$ гэсэн илэрхий тэнцэтгэл бишээс $x, y, z > 0$ бол (*)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 2 \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \right)$$

тэнцэтгэл биш биелэх нь мөрдөн гарна.

(*) тэнцэтгэл бишд $x = ab+c$, $y = bc+a$, $z = ac+b$ гэж орлуулбал

$$\begin{aligned} & \frac{1}{ab+c} + \frac{1}{bc+a} + \frac{1}{ac+b} \\ & \geq 2 \left(\frac{1}{ab+bc+a+c} + \frac{1}{bc+ca+a+b} + \frac{1}{ac+ab+b+c} \right) \\ & = 2 \left(\frac{1}{(a+c)(b+1)} + \frac{1}{(a+b)(c+1)} + \frac{1}{(b+c)(a+1)} \right) \\ & \geq 2 \left(\frac{4}{(a+c+b+1)^2} + \frac{4}{(a+b+c+1)^2} + \frac{4}{(b+c+a+1)^2} \right) \\ & = \frac{24}{(a+b+c+1)^2} \end{aligned}$$

болж батлах зүйл гарна. Энд $(a+b)(c+1) \leq \left(\frac{(a+b)+(c+1)}{2} \right)^2$ гэсэн Кошийн тэнцэтгэл бишийг ашиглав. Өгөгдсөн тэнцэтгэл биш нь $a = b = c = 1$ байхад тэнцэлдээ хүрнэ.

VIII-A2: Энэ бодлого нь дараах энгийн чанараас шууд мөрдөн гарна.

Теорем: Аливаа ердийн графын хувьд оройн зэргүүд нь тэнцүү хоёр орой олдоно. Үнэхээр n цэгийн заримыг хэрчмээр холбоход ижил тооны хэрчим гарсан 2 цэг олдоно гэдгийг Дирихлейн зарчим ашиглан хялбархан харж болно: Аль ч цэгээс гарсан хэрчмийн тоо $\in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ба хэрэв уг тоо нь 0-тэй тэнцүү бол

гарсан хэрчмийн тоо нь $n-1$ тэй тэнцүү байх орой олдохгүй. Хэрэв гарсан хэрчмийн тоо нь $n-1$ тэй тэнцүү цэг байвал хэрчим гараагүй орой олдохгүй. Иймд цэгээс гарсан хэрчмүүдийн тооны авч болох утгууд нь ихдээ $n-1$ ширхэг байх ба эдгээрийг "хайрцаг" гэж сэтгээд n цэгээ "туулай" гэж авахад аль нэг хайрцагт дор хаяж 2 туулай орно буюу ижил тооны хэрчим гарсан 2 цэг олдоно. Одоо бид хотын хүмүүсээ цэг гээд хоорондоо найз хосыг хэрчмээр холбосон гэж сэтгэвэл дээрх чанараар ижил тооны найзтай 2 хүн олдох ажээ.

VIII-A3: Эхэлж татагдсан 47 шулуунаа 1-47 хүртэл дугаарлая. a_i -ээр i -р шулуунтай параллель шулууны тоог тэмдэглэе. ($i = \overline{1, 47}$). Одоо нийт хэсгийн тоог тоолъё. Хэдэн шулуун татагдсан байг. Шинээр нэмж ямар нэг шулуун татахад уг шулуун түүнтэй параллель биш бүх шулуунтай огтлолцоно. Хэрэв татагдсан шулуунтай k шулуун огтлолцдог бол уг шулуун нийт $k+1$ хэсэгт хуваагдах ба хуваагдсан хэсэг бүр ямар нэгэн шинэ хэсгийн нэг тал болно. Иймд хэсгийн тоо $k+1$ -ээр нэмэгдэнэ. Нийт хэсгийн тоог тооцвол (Энд $a_1 + \dots + a_{47} = 2011$)

$$\begin{aligned} & a_1(a_2 + \dots + a_{47}) + a_2(a_3 + \dots + a_{47}) + a_3(a_4 + \dots + a_{47}) \\ & + \dots + a_{46} \cdot a_{47} + a_1 + \dots + a_{47} + 1 \\ & = \sum_{1 \leq i < j \leq 47} a_i a_j + \sum_{i=1}^{47} a_i + 1 = 2012 + \sum_{1 \leq i < j \leq 47} a_i a_j \end{aligned}$$

болно. Одоо бид $A = \sum_{1 \leq i < j \leq 47} a_i a_j$ -ын хамгийн их утгыг олъё.

$A = \frac{1}{2} [(\sum a_i)^2 - \sum a_i^2] = \frac{1}{2} [(2011)^2 - \sum a_i^2]$ тул A -ын ХИУ-ыг олох нь $B = \sum a_i^2$ -ын ХБУ-ыг олохтой адил юм.

$x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2$ тул B нь ХБУ-аа a_i -үүд нь хоорондоо тэнцүү үед л авна. a_i -үүд нь натураль тоо тул $(2011 = 47 \cdot 42 + 37)$,

$B \geq 37 \cdot 43^2 + 10 \cdot 42^2$ болно. Иймд нийт хэсгийн тоо хамгийн

ихдээ $2012 + \frac{1}{2} [(2011)^2 - (37 \cdot 43^2 + 10 \cdot 42^2)]$ болно.

VIII-B1:

$$x^6 + 3x^3 + 1 = y^4 \Leftrightarrow (x^3 + 1)^2 + (x^3 + 1) = y^4 + 1$$

$$\Leftrightarrow (2x^3 + 3)^2 - 4y^4 = 5 \Leftrightarrow (2x^3 - 2y^2 + 3)(2x^3 + 2y^2 + 3) = 5$$

болно. $5 = 1 \cdot 5 = (-1)(-5) = 5 \cdot 1 = (-5)(-1)$ гэдгийг бодолцвол

$$\begin{cases} 2x^3 - 2y^2 + 3 = 1 \vee -1 \vee 5 \vee -5 \\ 2x^3 + 2y^2 + 3 = 5 \vee -5 \vee 1 \vee -1 \end{cases} \text{ гэсэн 4 систем гарах ба эдгээ-}$$

рийг бодсоноор

$$(x, y) \in \{(0, 1), (0, -1)\} \text{ гэсэн хоёр л шийд олдоно.}$$

Нэмэлт. Дээрх тэгшитгэлийг өөрөөр, $x^3 = z$ гэж орлуулбал $z^2 + 3z + (1 - y^4) = 0$ болох ба z -ийн хувьд квадрат тэгшитгэл гэж санавал түүний дискриминант $D = 9 - 4(1 - y^4) = 0$ бүтэн квадрат өөрөөр хэлбэл $5 + 4y^4 = t^2$ байх ба $\Leftrightarrow 5 = (t - 2y^2)(t + 2y^2)$ болж ахин дээрх бодолтын адил үржигдэхүүнд задлах замаар бодлогийг бодож болохыг тэмдэглэе.

VIII-B2: $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$ байна. P -г дайрсан AD -тэй параллель шулуун EB ба FC шулуунуудтай харгалзан K ба L цэгээр огтлолцдог гэе. Түүнчлэн Q -г дайрсан AD -тэй параллель шулуун EB ба FC шулуунуудтай харгалзан M ба N цэгээр огтлоно. $KL = MN$ байх нь ойлгомжтой

$\triangle BKP \sim \triangle BED$, $\triangle APC \sim \triangle DPB$ ба $\triangle CLP \sim \triangle AFC$ гэд-

гээс

$$\frac{KP}{BE} = \frac{BP}{BD} = \frac{PC}{AC} = \frac{PL}{CF} \Rightarrow (*)$$

$$\frac{KP}{BE} = \frac{BE}{BE} \text{ болно. } \triangle BQE \sim \triangle FQC \Rightarrow (**)$$

$$\frac{PL}{MQ} = \frac{CF}{BE} \text{ болно. } (*) \text{ ба } (**)$$

$$\Rightarrow \frac{KP}{PL} = \frac{BE}{CF} = \frac{MQ}{QN} \Rightarrow \frac{KP}{PL} + 1 = \frac{MQ}{QN} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{KP + PL}{PL} = \frac{MQ + QN}{QN} \Leftrightarrow \frac{KL}{PL} = \frac{MN}{QN} \Rightarrow PL = QN$$

болж $PQ // LN$ буюу $AD \perp PQ$ болов.

VIII-B3: (Энхзаяа)

Бодолт: $\triangleright$ Илүү ерөнхий бодлого авч үзье. Дурын n ширхэг бодит тоонуудаас тогтох

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ олонлог өгөгдсөн бол $|m + \sum_{s \in S} s| \leq \frac{1}{n+1}$ байх

m бүхэл тоо ба $S \subseteq X$ дэд олонлог ($S \neq \emptyset$) олдохыг баталъя.

Юуны өмнө x бодит тооноос ихгүй хамгийн их бүхэл тоо $[x]$ -г x -ийн бүхэл хэсэг гэх ба $\{x\} = x - [x]$ тоог x -ийн бутархай хэсэг гэдгийг тэмдэглэе. $\{x_1\}, \{x_1 + x_2\}, \dots, \{x_1 + x_2 + \dots + x_n\}$ тоонуудыг авч үзье. Хэрэв эдгээр тоонуудын аль нэг нь $\left[0, \frac{1}{n+1}\right]$ эс-

вэл $\left[\frac{n}{n+1}, 1\right]$ хэрчимд ордог бол бодлого шууд бодогдоно. Иймд дээрх тоонууд бүгд дээр дурдсан 2 хэрчимд ордоггүй байг. Тэгвэл

$$\left[\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}\right], \left[\frac{2}{n+1}, \frac{3}{n+1}\right], \dots, \left[\frac{n-1}{n+1}, \frac{n}{n+1}\right]$$

гэсэн $n-1$ хэрчимийг авахад $\{x_1\}, \{x_1 + x_2\}, \dots, \{x_1 + x_2 + \dots + x_n\}$

гэсэн n тооноос Дирихлейн зарчмаар нэг хэрчимд орох 2 тоо олдоно. Тэдгээр нь $\{x_1 + \dots + x_k\}$ ба $\{x_1 + x_2 + \dots + x_{k+m}\}$ болог.

$0 < \{x_1 + x_2 + \dots + x_{k+m}\} - \{x_1 + \dots + x_k\} \leq \frac{1}{n+1}$ байх ба эндээс

$$((x_1 + x_2 + \dots + x_{k+m}) - [x_1 + x_2 + \dots + x_{k+m}])$$

$$-((x_1 + x_2 + \dots + x_k) - [x_1 + x_2 + \dots + x_k]) \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_{k+m}$$

$$-([x_1 + x_2 + \dots + x_{k+m}] - [x_1 + x_2 + \dots + x_k]) \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_{k+m} - N \leq \frac{1}{n+1}$$

болж N бүхэл тоо ба $S = \{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+m}\} \subseteq X$ дэд олонлог олдох нь батлагдав. $\triangleleft$

3.4 ММО-47, IX ангийн III даваа

Б.Батцэнгэл

IX-A1 (Б.Батцэнгэл). $1, 2, \dots, 2010, 2011$ тоонуудаас хэдэн тоог сонгон авчээ. Хэрэв сонгогдоогүй үлдсэн тоонууд дотор $x \cdot y = z$ байх ялгаатай x, y, z тоонууд олддоггүй бол хамгийн цөөндөө хэдэн ширхэг тоо сонгон авсан вэ?

IX-A2 (Б.Батцэнгэл). $3^m - 5^n$ ялгавар бүтэн квадрат байх бүх натурал m, n тоонуудыг ол.

IX-A3 (Б.Батцэнгэл). ABC гурвалжинд багтсан I цэгт төвтэй тойрог гурвалжны BC талыг D цэгт шүргэнэ. AI шулуун ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг A оройгоос ялгаатай E цэгт огтлох бөгөөд DE шулуун багтаасан тойргийг E цэгээс ялгаатай F цэгт огтолно. $\angle AFI = 90^\circ$ гэдгийг батал.

IX-B1 (Б.Батцэнгэл). a, b, c нь $abc = 1$ байх эерэг тоонууд бол

$$(1 + a^3)(1 + b^3)(1 + c^3) \geq 2 \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right)$$

тэнцэтгэл биш биелнэ гэдгийг батал.

IX-B2 (Б.Батцэнгэл). Тэгш өнцөгт ABC гурвалжны тэгш өнцгийн оройгоос BH өндөр татав. Гурвалжны BC катет дээр орших D цэгийг AB катетын дундаж M цэгтэй холбосон шулуун CA цацрагийг E цэгээр огтолно. $\angle EBM = \angle BHD$ байхыг батал.

IX-B3 (Б.Батцэнгэл). Натурал n тооны хувьд $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n + 1$ нь анхны тоо бол $n = 3^m$ байх сөрөг биш бүхэл m тоо олдоно гэдгийг батал.

IX-A1: Хариу 43. 2, 3, ..., 43, 44 гэсэн 43 ширхэг тоог сонгон авахад үлдэх тоонууд дотор $x \cdot y = z$ байх ялгаатай 3 тоо олдохгүй. Нөгөө талаас, $(2, 87, 2 \cdot 87 = 174)$
 $(3, 86, 2 \cdot 87 = 174)$

Иймд энэ 2 гурвалжин хоорондоо төсөөтэй. Эндээс $\frac{BF}{DB} = \frac{FE}{IE}$ гэж гарах ба энд $DB = BK$ ба $BE = IE$ гэдгийг тооцвол $\frac{BF}{BK} = \frac{FE}{IE}$ гэж гарна. A, F, B, E цэгүүд нэг тойрог дээр орших тул $\angle FBK = \angle FBA = \angle FEA = \angle FEI$ байна. Энэ нь өмнө нь баталсан тэнцэлтэй хамт FBK, FEI гурвалжнууд хоорондоо төсөөтэй гэдгийг харуулна. Тэгэхлээр $\angle FKA = 180^\circ - \angle FKB = 180^\circ - \angle FIE = \angle FIA$ буюу F, K, I, A цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Иймд $\angle AFI = \angle AKI = 90^\circ$ юм.

IX-B1: $\frac{b}{a} = b^2c, \frac{c}{b} = c^2a, \frac{a}{c} = a^2b$ гэдгийг ашиглан батлах ёстой тэнцэтгэл бишийг

$(1 + a^3)(1 + b^3)(1 + c^3) \geq 2 + 2(b^2c + c^2a + a^2b)$ буюу $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 + a^3 + b^3 + c^3 \geq 2(a^2b + b^2c + c^2a)$ гэж бичиж

болно. Кошийн тэнцэтгэл биш ёсоор

$$a^3b^3 + a^3b^3 + c^3a^3 \geq 3a^3b^2c = 3a^2b$$

$$b^3c^3 + b^3c^3 + a^3b^3 \geq 3b^3c^2a = 3b^2c$$

$c^3a^3 + c^3a^3 + b^3c^3 \geq 3c^3a^2b = 3c^2a$ байх ба эдгээр тэнцэтгэл бишийг хооронд нь нэмбэл

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a \quad (1) \quad \text{гэж гарна.}$$

Мөн Кошийн тэнцэтгэл биш ёсоор

$$a^3 + a^3 + c^3 \geq 3a^2b$$

$$b^3 + b^3 + c^3 \geq 3b^2c$$

$c^3 + b^3 + c^3 \geq 3c^2a$ байх ба эдгээр тэнцэтгэл бишийг хооронд нь нэмбэл $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$ (2) гэж гарна.

(1) ба (2) тэнцэтгэл бишийг хооронд нь нэмэхэд батлах ёстой тэнцэтгэл биш гарна.

IX-B2: MD шулууны хувьд B оройтой тэгш хэмтэй цэгийг B' гэж тэмдэглэе. M цэг тэгш өнцөгт ABH гурвалжны багтаасан тойргийн төв учраас $MH = MA = MB = MB'$ байна. Тэгэхлээр A, B, B', H цэгүүд нэг тойрог дээр орших бөгөөд $\angle EHB' = \angle AHB' = 180^\circ - \angle ABB' = 180^\circ - \angle MB B'$ юм.

$BB' \perp MD$ бөгөөд $\angle MBD = 90^\circ$ тул $\angle MB B' = \angle MDB = \angle MDB'$ байна. Иймд $\angle EHB' = 180^\circ - \angle MB B' = 180^\circ - \angle MDB' = 180^\circ - \angle EDB'$ буюу E, D, B', H цэгүүд нэг тойрог дээр

оршино. Эндээс

3.5 ММО-47, X ангийн III даваа

Б.Баяржаргал, У.Батзориг

- X-A1 (Б.Баяржаргал). $n, m \geq 2$ натурал тоонууд, p нь анхны тоо бол $p^m - 1 \mid p^n + 1$ байх бүх (n, m, p) гуравтыг ол.
- X-A2 (Б.Баяржаргал). Дурын сөрөг биш x, y, z тоонуудын хувьд $A(x + y + z)^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x$ байдаг хамгийн бага A -г ол.
- X-A3 (Б.Баяржаргал). Харгалзан O_1, O_2 төвтэй A цэгээр огтлолцдог ω_1, ω_2 тойргууд өгөгдөв. ω_1, ω_2 -ийг харгалзан B, C -д шүргэх ерөнхий шүргэгч татав. O_3 нь ABC -г багтаасан тойргийн төв ба DO_3 -ийн дундаж цэг нь A байхаар D цэг авав. M нь O_1O_2 -ийн дундаж бол $\angle O_1DM = \angle O_2DA$ гэж батал.
- X-B1 (Б.Баяржаргал). Элементүүдийнх нь нийлбэр 19-т хуваагдаг байх $\{1, 2, \dots, 2011\}$ олонлогийн бүх дэд олонлогийн тоог ол.
- X-B2 (Б.Баяржаргал). $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн AC, BD диагоналиуд O цэгт огтлолцдог ба AC, BD -ийн дундажууд харгалзан M, N бол APD, BPC, OMN гурвалжнуудыг багтаасан тойргийн төвүүд нэг шулуун дээр оршино гэж харуул.
- X-B3 (Б.Баяржаргал). 1-ээс $2n$ хүртлэх натурал тоонууд өгөгджээ. Тэдгээрээс дурын k тоог сонгон авах бүрд нийлбэр нь анхны тоо байх хоёр тоо үргэлж олддог бол k -г сайн тоо гээ. Тэгвэл хамгийн бага сайн тоог ол.
- X-A1: (У.Батзориг) $p^m - 1 \mid p^n + 1 \Rightarrow p^m - 1 \mid p^{2n} - 1 \Leftrightarrow m \mid 2n$.

а) m -сондгой байг. Тэгвэл $m \mid n$ болно. $\Rightarrow n = m \cdot k$ гээ.

Гэтэл $-1 \equiv p^n \equiv (p^m)^k \equiv 1 \pmod{p^m - 1}$

$$\Rightarrow 2 \equiv 0 \pmod{p^m - 1} \Rightarrow \begin{matrix} p^m - 1 = 1 \\ p^m - 1 = 2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} p = 2, m = 1 \\ p = 3, m = 1 \end{matrix} \Rightarrow (n, 1, 2); (n, 1, 3)$$

б) m — тэгш байг. Өөрөөр хэлбэл $m = 2k$ бол $k|n \Rightarrow$
 $-1 \equiv p^n \equiv (p^k)^s \equiv 1 \pmod{p^k - 1}$
 $\Rightarrow 2 \equiv 0 \pmod{p^k - 1} \Rightarrow \begin{matrix} p^k - 1 = 2 \Rightarrow k = 1, p = 3 \\ p^k - 1 = 1 \Rightarrow k = 1, p = 2 \end{matrix}$
 $k = 1$ ба $p = 3$ үед $8|3^n + 1$ жишлэг шийдгүй. Харин
 $k = 1$ ба $p = 2$ үед $m = 2$ ба энэ үед $2^2 - 1|2^n + 1 \Rightarrow 3|2^n + 1$
 $\Rightarrow n$ — сондгой тоо.
 $m, n \geq 2$ тул хариу: $(n, 2, 2)$; n — сондгой тоо.

X-A2: Өгсөн тэнцэтгэл биш нэгэн төрлийн тэнцэтгэл биш тул
 $x + y + z = 1$ гэж үзэж болно. Мөн өгсөн тэнцэтгэл биш цикл
учраас $x = \max(x, y, z)$ гэж үзэж болно.

а) $x \geq y \geq z$ байг. $x^2y + y^2z + z^2x \leq x^2y + y^2z + z^2x$
 $+ z[xy + (x - y)(y - z)]$
 $= (x + z)^2 \cdot y = 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}y \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}y \right) \leq \frac{4}{27}.$

б) $x \geq z \geq y$ байг. $x^2y + y^2z + z^2x \leq x^2z + z^2y + y^2z$
 $- (x - z)(z - y)(x - y) \leq x^2z + z^2y + y^2x \leq \frac{4}{27}.$

Хамгийн сүүлийн тэнцэтгэл биш нь эрэмбэтэй тул а)-ёсоор
үнэлнэ. Тэнцэтгэл биш $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right)$ үед тэнцэлдээ хүрнэ.

X-A3: 46-р олимпиадын 4-ын давааг үз.

X-B1: $f(x) = (1 + x)(1 + x^2) \dots (1 + x^{2011})$
 $= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$ олон гишүүнтийг авч үзье.
 $\varepsilon \in U'_{19}$ ба $19 \nmid k$ байг.
 $\Rightarrow \varepsilon^{18} + \varepsilon^{17} + \dots + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$
 $\varepsilon^{18k} + \varepsilon^{17k} + \dots + \varepsilon^{2k} + \varepsilon^k + 1 = 0$
 $f(1) + f(\varepsilon) + \dots + f(\varepsilon^{18}) = 19a_0 + a_1(1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{18})$
 $+ a_2(1 + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{36}) + \dots + a_{19} \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{19} + \dots$ Тэгвэл бидний

олох ёстой нийт 19-д хуваагддаг олонлогийн тоо нь:

$\Rightarrow a_0 + a_{19} + a_{38} + \dots = \frac{1}{19}(f(1) + f(\varepsilon) + \dots + f(\varepsilon^{18}))$ болно.

$f(1) = 2^{2011}$, $f(\varepsilon^k)$ – үүдийг ММО-46, х.98-г анхааран бод.

X-B2: AOD -г багтаасан тойргийн төвийг O_1

BOC -г багтаасан тойргийн төвийг O_2

COD -г багтаасан тойргийн төвийг O_3

BOA -г багтаасан тойргийн төвийг O_4 гэе. Тэгвэл $O_1O_2O_3O_4$ дөрвөн өнцөгт нь параллелограмм ба уг //–граммын диагналаудын огтлолцлын цэг дээр MON гурвалжинг багтаасан тойргийн төв нь оршино гэдгийг харахад төвөггүй тул та бүхэнд үлдээе. **X-B3:** Лемм. $\{1, 2, \dots, 2n\}$

олонлогийг $A = \{a_1, \dots, a_n\}$; $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ ба

$1 \leq i \leq n$, $a_i + b_i$ анхны тоо байхаар хувааж болно.

▲ Бертранны постулятаар $\exists p \in \mathbb{P}$, $2n < p < 4n$ байна. $p = 2n + m$ байг. Тэгвэл m сондгой болно.

Индукцийн өмнөх алхмаар $\{1, 2, \dots, m - 1\}$ олонлогийг бодлогын нөхцөл хангахаар хувааж чадна.

Харин $m, m + 1, \dots, 2n$ олонлогийг $\{2n, m\}$, $\{m + 1, 2n - 1\}, \dots$ гэж хуваахад Лемм батлагдана. Эндээс $\min(k) = n + 1$ болно.

3.6 ММО-47, XI ангийн III даваа

Б. Батбаясгалан

XI-A1 (Б.Батбаясгалан). P нь 2011 ширхэг ялгаатай бодит язгууртай 2011 зэргийн олон гишүүнт байг. Хамгийн олондоо хичнээн коэффициент нь 0-тэй тэнцүү байж болох вэ?

XI-A2 (Б.Батбаясгалан). ABC гурвалжны AB ба BC талууд дээр харгалзан D ба E цэгүүдийг авав. DE хэрчмийг $K_1, K_2, \dots, K_{2n}$ цэгүүд $2n+1$ ширхэг ижил урттай хэрчмүүдэд хуваадаг байг ($DK_1 = K_1K_2 = K_2K_3 = \dots = K_{2n-1}K_{2n} = K_{2n}E$). Хэрэв BK_n цацраг AC талыг T_n цэгт, BK_{n+1} цацраг AC талыг T_{n+1} цэгт огтолдог бол $T_n T_{n+1} \leq \frac{AC}{2n+1}$ гэж батал.

XI-A3 (Б.Батбаясгалан). $\mathcal{H} = A_1 A_2 \dots A_n$ гүдгэр олон өнцөгт өгөгдөв. Хэрэв $A_{i-1} A_{i+1}$ ($A_{n+1} = A_1, A_0 = A_n$) хэрчмийн дундаж цэгийн хувьд A_i оройтой тэгш хэмтэй цэг A'_i нь $\mathcal{H}$ дотор (хүрээн дээр байж болно) байдаг бол A_i -г сайн орой гээ. $\mathcal{H}$ -д дор хаяж $n-3$ ширхэг сайн орой бий гэж батал.

XI-B1 (Б.Батбаясгалан). ABC гурвалжны ортоцентр нь H , BC талын дундаж цэг D байг. H -г дайрсан шулуун AB , AC талуудыг харгалзан F , E цэгүүдэд $AE = AF$ байхаар огтолдог. DH цацраг ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг P цэгт огтолдог бол P , A , E , F цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

XI-B2 (Б.Батбаясгалан). x, y, z нь $x + y + z \geq 6$ байх эерэг бодит тоонууд байг.

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{x}{y^2 + z + 1} + \frac{y}{z^2 + x + 1} + \frac{z}{x^2 + y + 1}$$

илэрхийллийн хамгийн бага утыг ол.

XI-B3 (Б.Батбаясгалан). $p > 3$ анхны тоо байг.

$$\sum_{i=1}^p C_{i,p}^p \cdot C_{(p-i+1)p}^p$$

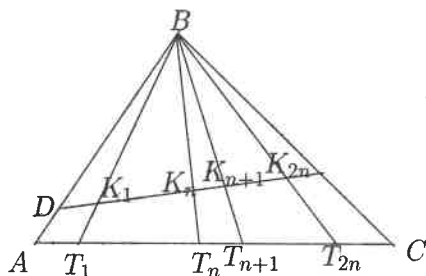
тоог p^3 -д хуваахад гарах үлдэгдлийг ол.

XI-A1: Ямарч олон гишүүнтийн ялгаатай 2 язгуурын хооронд уламжлалынх нь ядаж нэг язгуур оршдог. Үүнийг ашиглан анхны олон гишүүнтийн аль ч эрэмбийн уламжлал нь давхар язгуургүй гэдгийг хялбар харуулж болно. Анхны олон гишүүнтэд дараалсан 2 тэг коэффициентбайж болохгүй гэдгийг харуулъя. Хэрэв дараалсан 2 тэг коэффициент байвал түүний аль нэг эрэмбийн уламжлал нь x^2 -д хуваагдахад хүрнэ. Иймд анхны олон гишүүнтэд дараалсан 2 тэг коэффициент байхгүй. Иймд хамгийн ихдээ $2012/2 = 1006$ ширхэг л тэг коэффициент байж болох нь ээ. Ийм олон гишүүнт байна гэдгийг харуулъя.

$$P(x) = x(x^2 - 1^2)(x^2 - 2^2) \dots (x^2 - 1005^2)$$

олон гишүүнт нь ялгаатай язгууруудтай бөгөөд сондгой функц тул бүх тэгш зэргийн өмнөх коэффициентүүд нь тэг байна.

XI-A2: $\triangle BDK_1, \triangle BK_1K_2, \triangle BK_2K_3, \dots, \triangle BK_{2n}E$ гурвалжуудын талбай хоорондоо тэнцүү тул тэдгээрийг S гээ.



Мөн $\triangle BAT_1$ -ийн талбайг S_1 , $\triangle BT_1T_2$ -ийн талбайг S_2 , $\triangle BT_{2n}C$ -ийн талбайг S_{2n+1} гээ.

$$\begin{aligned} \mu_n &= \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_{2n+1}}{(2n+1)S}; \mu_{n-1} = \frac{S_2 + S_3 + \dots + S_{2n}}{(2n-1)S}; \\ \mu_{n-2} &= \frac{S_3 + S_4 + \dots + S_{2n-1}}{(2n-3)S}; \mu_k = \frac{S_{n+1-k} + \dots + S_{n+1+k}}{(2k+1)S}; \\ \mu_1 &= \frac{S_n + S_{n+1} + S_{n+2}}{3S}; \mu_0 = \frac{S_{n+1}}{S} \end{aligned}$$

байг. Тэгвэл

$$\frac{AC}{2n+1} = \frac{S_{ABC}}{h(2n+1)} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_{2n+1}}{(2n+1)h} = \mu_n \frac{S}{n}$$

$T_n T_{n+1} = \frac{S_{n+1}}{h} = \mu_0 \frac{S}{h}$ болно. $\mu_n \geq \mu_0$ гэж баталвал бодлого бодогдоно. Одоо $\mu_n \geq \mu_{n-1}$ гэж харуулъя.

$$S_1 + S_{2n+1} \geq 2\sqrt{S_1 \cdot S_{2n+1}} \quad \text{учир}$$

$$\mu_n = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_{2n+1}}{(2n+1)S} \geq \frac{S_2 + S_3 + \dots + S_{2n} + 2\sqrt{S_1 S_{2n+1}}}{(2n+1)S}$$

$$(2n+1)\mu_n \geq \frac{S_2 + \dots + S_n}{S} + 2\sqrt{\frac{S_1 S_{2n+1}}{S^2}}$$

$$= (2n-1)\mu_{n-1} + 2\sqrt{\frac{S_1 S_{2n+1}}{S^2}} \quad (*)$$

$$\frac{S_1}{S} = \frac{AB \cdot BT_1}{BD \cdot BK_1}, \quad \frac{S_{2n+1}}{S} = \frac{BC \cdot BT_{2n}}{BE \cdot BK_{2n}}, \quad \frac{BT_1 \cdot BT_{2n}}{BK_1 \cdot BK_{2n}}$$

$$= \frac{S_{\Delta BT_1 T_{2n}}}{S_{\Delta BK_1 K_{2n}}} = \frac{S_2 + \dots + S_{2n}}{(2n-1)S} = \mu_{n-1}$$

$$\frac{AB \cdot BC}{BD \cdot BE} = \frac{S_{ABC}}{S_{BDE}} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_{2n+1}}{(2n+1)S} = \mu_n$$

гэдгийг тооцвол

$$\frac{S_1 S_{2n+1}}{S^2} = \frac{AB \cdot BT_1}{BD \cdot BK_1} \cdot \frac{BC \cdot BT_{2n}}{BE \cdot BK_{2n}} = \mu_{n-1} \cdot \mu_n.$$

Иймд (*) тэнцэтгэл биш нь $((2n+1)\mu_n - (2n-1)\mu_{n-1})^2 \geq 4\mu_1\mu_2$ болно. Энэ тэнцэтгэл бишийг μ_{n-1}^2 -д хуваагаад $\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}} = \lambda$ гэвэл $(2n+1)^2\lambda^2 - 2(4n^2+1)\lambda + (2n-1)^2 \geq 0$ болно.

$$\lambda_{1,2} = \frac{4n^2+1 \pm 4n}{(2n+1)^2}, \quad \lambda_1 = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^2, \quad \lambda_2 = 1$$

$$\lambda \leq \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^2 \text{ эсвэл } \lambda \geq 1$$

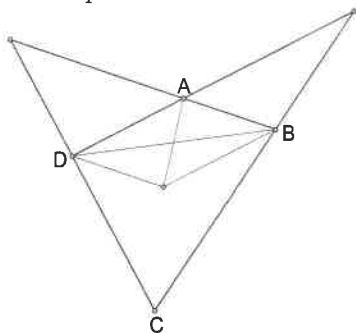
$$\lambda \leq \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^2 \text{ бол } \frac{(S_1 + S_2 + \dots + S_{2n+1})(2n-1)}{(2n+1)(S_2 + \dots + S_{2n})} \leq \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^2$$

$$(2n+1)(S_1 + \dots + S_{2n+1}) + 2(S_2 + S_3 + \dots + S_{2n}) < 0$$

болж зөрчилд хүрнэ. Иймд $\lambda \geq 1$ буюу $\mu_n \geq \mu_{n-1}$. Одоо энэ үйлдлийг μ_n -ийн оронд μ_{n-1} ээр солин үргэлжлүүлвэл

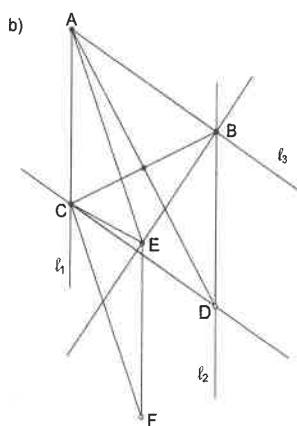
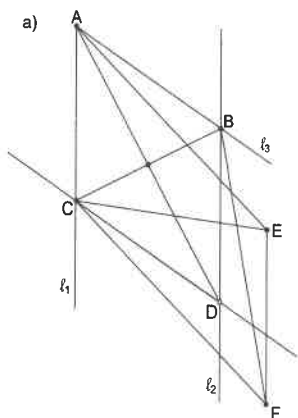
$\mu_{n-1} \geq \mu_{n-2}$ болох ба үүнийг үргэлжлүүлвэл $\mu_n \geq \mu_{n-1} \geq \dots \geq \mu_0$ болж батлагдана. Тэнцэтгэл биш $DE \parallel AC$ үед тэнцэлдээ хүрнэ.

XI-A3: Индукцээр баталъя. 4 өнцөгт маань трапец үед илэрхий. Трапец биш үед зураг 1-т үзүүлсэн A орой сайн орой болох нь илэрхий.



Зураг 1,

Одоо $n > 4$ үед баталъя. Хэрэв гүдгэр олон өнцөгтийн аль нэг орой нь муу бол түүнийг аль ч диагональн дундач цэгийн хувьд тэгш хэмтэй хувиргахад гарах цэг олон өнцөгтийн гадна байна гэдгийг баталъя. Зураг 2-т үзүүлсэнээр A нь сайн орой биш бөгөөд BC диагональн дундач цэгийн хувьд тэгш хэмтэй цэг D нь олон өнцөгт дотор оршдоггүй гэе.

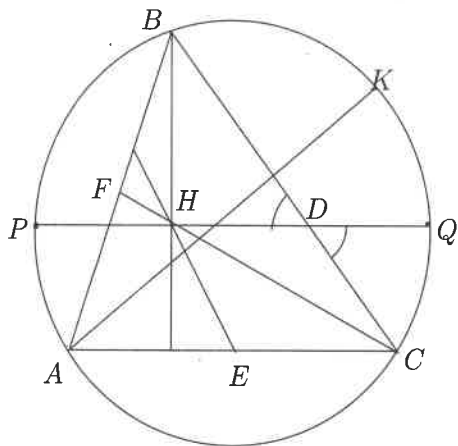


Зураг 2,

E нь B -тэй хөрш орой байг. E орой нь l_2 шулууны баруун талд зураг 2а)-д үзүүлсэнээр байрлах бол BCF гурвалжин дотор D орших тул F цэг олон өнцөгт дотор орших боломжгүй. Эсрэг тохиолдолд D цэг олон өнцөгт дотор ороход хүрнэ. Хэрэв E орой нь зураг 2а)-д F цэгийн орших мужид орших бол BCE гурвалжин дотор D орших тул зөрчил үүснэ.

Хэрвээ E нь зураг 2b)-д үзүүлсэнээр l_2 -ийн зүүн талд оршдог бол A ба F цэгүүд BE талын 2 талд орших тул F нь олон өнцөгт дотор оршихгүй. Ийм аргаар бид сайн биш оройг бүх диагоналийн дундачийн хувьд тэгш хэмтэй хувиргахад гарах цэгүүд бүгд олон өнцөгтийн гадна оршино гэдгийг баталж чадна. Хэрвээ E нь зураг 2b)-д үзүүлсэнээр l_2 -ийн зүүн талд оршдог бол A ба F цэгүүд BE талын 2 талд орших тул F нь олон өнцөгт дотор оршихгүй. Ийм аргаар бид сайн биш оройг бүх диагоналийн дундачийн хувьд тэгш хэмтэй хувиргахад гарах цэгүүд бүгд олон өнцөгтийн гадна оршино гэдгийг баталж чадна. Одоо бодлогоо бодъё. Хэрэв уг олон өнцөгтөд 4 ширхэг сайн биш орой байдаг бол тэдгээрээр үүсэх дөрвөн өнцөгт нь дээрх өгүүлбэр ёсоор 4 ширхэг муу оройтой олон өнцөгт болоход хүрч зөрчил үүсэв. Бодлого бодогдов.

XI-B1:



$\angle BHC = \angle BQC$ ба $BD = DC$ учир HD ба DQ нь медианууд

болох ба $\angle HDB = \angle CDQ$ учир $HD = DQ$ болох нь хялбар мөрдөнө. Иймд $BQCH$ нь $//$ грам болно. $\angle ABH = \angle ACH$ учир $\triangle CEH \sim \triangle BFH \Rightarrow \frac{BF}{CE} = \frac{BH}{CH} = \frac{CQ}{BQ}$. (*)

Мөн $BQCH //$ грамм гэдгээс $S_{PBQ} = S_{PQC}$,

$$PB \cdot BQ \cdot \sin \angle PBQ = PC \cdot CQ \cdot \sin \angle QCP,$$

$$\angle PBQ + \angle QCP = 180^\circ \text{ учир } PB \cdot BQ = PC \cdot CQ, \quad \frac{CQ}{BQ} = \frac{PB}{PC}.$$

$$(*)\text{-оос } \frac{BF}{CE} = \frac{PB}{PC} \text{ буюу } \frac{BF}{PB} = \frac{CE}{PC}$$

$$\angle PBA = \angle PCA \Rightarrow \triangle PBF \sim \triangle PCE \Rightarrow$$

$$\angle PFB = \angle PEC, \angle PFA = \angle PEA$$

тул $PAEF$, 4 өнцөгт тойрогт багтана.

XI-B2: Коши-Буняковскийн тэнцэтгэл бишээр

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{b_1 + b_2 + b_3}$$

байна. Үүнийг ашиглавал

$$\begin{aligned} A &= \sum_{cyc} \frac{x}{y^2 + z + 1} = \sum_{cyc} \frac{x^2}{x(y^2 + z + 1)} \\ &\geq \sum_{cyc} \frac{(x + y + z)^2}{\sum_{cyc} xy^2 + \sum_{cyc} xy + \sum_{cyc} x} = B \end{aligned}$$

$x + y + z > 6$ гэдгийг тооцвол

$$\begin{aligned} B &\geq \frac{6(x + y + z)}{\sum_{cyc} xy^2 + 1/6 \cdot \sum_{cyc} x \sum_{cyc} xy + 1/36 \cdot (\sum_{cyc} x)^3} \\ &= \frac{216(x + y + z)}{36 \sum_{cyc} xy^2 + 6 \cdot \sum_{cyc} x \sum_{cyc} xy + (\sum_{cyc} x)^3} = 216C \end{aligned}$$

Одоо $C \geq \frac{1}{21(x^2 + y^2 + z^2)}$ (*) гэж баталъя. Үнэндээ

$$(*) \Leftrightarrow 21(1 + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) \geq 36(xy^2 + yz^2 + zx^2) \\ + 6(x + y + z)(xy + yz + zx) + (x + y + z)^3.$$

Үүнийг задлаад эмхтгэвэл

$$20(x^3 + y^3 + z^3) + 12(xz^2 + yx^2 + zy^2) \\ > 24(xy^2 + yz^2 + zx^2) + 24xyz. \quad (**)$$

Энэ нь дараах 2 тэнцэтгэл бишийн нийлбэр юм.

$$12[x(x - z)^2 + y(y - x)^2 + z(z - y)^2] \geq 0$$

$$8(x^3 + y^3 + z^3) \geq 24xyz$$

$x^2 + y^2 + z^2 = t$ гэвэл

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{x}{y^2 + z + 1} + \frac{y}{z^2 + x + 1} + \frac{z}{x^2 + y + 1} \\ \geq x^2 + y^2 + z^2 + \frac{216}{21(x^2 + y^2 + z^2)} = t + \frac{216}{21t} = f(t) \quad (***)$$

болно. Нөгөө талаас

$x + y + z \geq 6$ тул $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x + y + z)^2}{3} \geq 12$ байна. $t \geq 12$ үед $f(t)$ -ийн хамгийн бага утга нь $f(12)$ байна. (***) тэнцэтгэл биш нь $x = y = z = 2$ үед тэнцэлдээ хүрэх тул $\min A = f(12) = 12 + \frac{216}{21 \cdot 12} = 12\frac{6}{7}$ байна.

XI-B3: $p > 3$ анхны тоо үед

$$A = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{p-k} \right) = \frac{p}{2} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k(p-k)} \equiv 0 \pmod{p}$$

$$B = \sum_{1 \leq k < l \leq p-1} \frac{1}{k \cdot l} = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \right)^2 - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \right] \equiv \frac{1}{2} \left[A^2 - \sum_{k=1}^{p-1} k^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[A^2 - \frac{(p-1)p(2p-1)}{6} \right] \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\begin{aligned} C &= \sum_{i=1}^p i(p-i+1) = \frac{p^2(p+1)}{2} - \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + \frac{p(p+1)}{2} \\ &= \frac{p(p+1)(p+2)}{6} \equiv \frac{p^2}{2} + \frac{p}{3} \pmod{p^3} \end{aligned}$$

байна.

$$\begin{aligned} C_{i,p}^p &= \frac{pi(pi-1)\dots(pi-p+1)}{p!} \\ &\equiv \frac{(-1)^{p-1}i}{(p-1)!} \left[(p-1)! - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{k} \cdot (pi) + \sum_{1 \leq k < l \leq p-1} \frac{(p-1)!}{k \cdot l} \cdot (pi)^2 \right] \\ &\equiv (-1)^{p-1}i[1 - A \cdot (pi) + B \cdot (pi)^2] \equiv (-1)^{p-1}i[1 - A \cdot (pi)] \pmod{p^3} \end{aligned}$$

тул

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p C_{i,p}^p \cdot C_{(p-i+1)p}^p &\equiv \sum_{i=1}^p i(p-i+1)[1 - A \cdot (pi) - A \cdot (p(p-i+1))] \\ &\equiv [1 - A(p^2 + p)]C \equiv C \equiv \frac{p^2}{2} + \frac{p}{3} \pmod{p^3}. \end{aligned}$$

3.7 ММО-47, Багын багшийн III даваа

Д.Ганзориг

ББ-А1 (Д.Ганзориг). Зөв 2011 өнцөгтийн 52 оройг нь улаан өнгөөр бусадыг нь цэнхэр өнгөөр будав. Ижил өнгийн оройтой адил хажуут гурвалжны тоо нь будалтаас үл хамаарна гэж батал.

ББ-А2 (Д.Ганзориг). Нэмэгдэхүүн бүр нь бүхэл тооны 2000 зэрэгт болох 2001 ширхэг тооны нийлбэрт дор хаяж 100 янзаар бичигдэх бүхэл тоонууд оршин байна гэж батал.

ББ-А3 (Д.Ганзориг). Сум 1600 малчинтай ба тус бүр 97 хүнтэй 36 хоршоо байгуулав. Дор хаяж 4 ерөнхий гишүүнтэй хоёр хоршоо олдоно гэж батал.

ББ-В1 (Д.Ганзориг). Тойрог дээр 2011 ширхэг тоо бичсэн байв. Хэрэв ямар нэг дараалсан x, y, z, t -тоонуудын хувьд $(x-t)(y-z) < 0$ бол y, z -ийн байрыг солих үйлдэл төгсгөлөг алхамын дараа зогсох уу?

ББ-В2 (Д.Ганзориг). $\underbrace{\sqrt{99 \dots 99}}_{4020}$ тооны аравтын бичлэгийн тасла-
лаас хойшхи 2011-р цифрийг ол.

ББ-В3 (Д.Ганзориг). 5 нэгж талбайтай квадратад нэгж талбайтай 9 ширхэг гүдгэр олон өнцөгт байрлуулав. Ерөнхий талбай нь $\frac{1}{9}$ өөс багагүй хоёр олон өнцөгт олдоно гэж үзүүл.

ББ-А1: (Ч.Сугардорж) 52-улаан, 959-цэнхэр байгаа. 2 өнгө хоёулаа орсон байх адил хажуут гурвалжны тоог тоолъё. Өөр өнгийн дурын 2 цэгийг авахад уг 2 цэг суурийн цэгүүд нь болох адил хажуут гурвалжин 1 ширхэг, уг 2 цэг хажуу тал нь болох гурвалжин 2 ширхэг буюу уг 2 цэгийг агуулсан адил хажуут гурвалжин 3 ширхэг байна. 1 улаан ($A(y)$), 1 хөх ($B(x)$) цэгийг сонгох боломжийн тоо $52 \cdot 1959$ болох ба адил хажуут $A(y)B(x)C(z)$ гурвалжин 2 янзаар тоологдох

($A(y)B(x)$ талыг yx тал гэвэл $\Delta A(y)B(x)C(z)$ – д z ямарч өнгөтэй байсан yx хэлбэрийн яг 2 тал байгаа) тул тийм $\frac{52 \cdot 1959 \cdot 3}{2}$ ширхэг гурвалжин 2 өнгийг агуулсан адил хажуут байна. Иймд 2 өнгө хоёулаа оролцсон адил хажуут гурвалжны тоо будалтаасаа үл хамааран тогтмол байгаа тул бүх орой нь адил байх адил хажуут гурвалжны тоо будалтаас хамаарахгүй: Нийт адил хажуут гурвалжны тоо дурын 2 цэгийг сонгоход уг 2 цэгээр суурь хийсэн адил хажуут гурвалжин цор ганц тул C_{2011}^2 байна.

ББ-А2: (Ч.Сугардорж) $s = 2000$, $m = 2001$, $t = 100$ гэе. $n \geq 2^n \cdot m! \cdot m \cdot t$ байх n тоог сонгоё.

$1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_m \leq n$ байх ($a_1, \dots, a_m$) m -тыг сонгох боломжийн тоо нь $1 \leq a_1 < \dots < a_m \leq n$ байхаар ($a_1, \dots, a_m$) m -тыг сонгох боломжийн тооноос их. Энэ сүүлчийн сонголтын боломж нь C_n^m . Сонголт бүр дэх $a_1^s + \dots + a_m^s = A \leq n^s \cdot m$ ба ($a_1, \dots, a_m$)-ийг A -дугаартай хайрцагт хийе. Хайрцагны тоо $n^s \cdot m$ -ээс хэтрэхгүй тул Дирихлейн зарчмаар дор хаяж $C_n^m / n^s \cdot m$ ширхэг m -тыг агуулсан хайрцаг олдоно. Гэтэл

$$\begin{aligned} C_n^m &= \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} > \frac{(n/2)^m}{m!} = \frac{n^m}{2^m \cdot m!} = \frac{n \cdot n^{m-1}}{2^m \cdot m!} \\ &\geq \frac{2^m \cdot m! \cdot m \cdot t \cdot n^{m-1}}{2^m \cdot m!} = t \cdot m \cdot n^{m-1} = t \cdot n^s \cdot m \end{aligned}$$

буюу $\frac{C_n^m}{n^s \cdot m} > t = 100$.

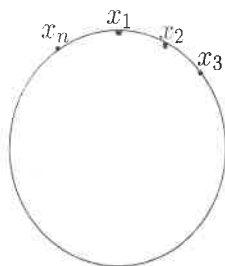
ББ-А3: $\uparrow A_i - i$ -р хоршоо, $i = 1, 36$, V сумын малчид гэе. Эсэргээс нь аль ч 2 хоршоо 3-аас илүүгүй ерөнхий гишүүнтэй $|A_i A_j| \leq 3$ гэе.

$$|V| = 1600 \geq \left| \bigcup_{i=1}^{36} A_i \right| \geq \text{ММК I, 5.9.15 б)}\text{-ээр}$$

$$\sum |A_i| - \sum |A_i A_j| \geq 36 \cdot 97 - C_{36}^2 \cdot 3 = 1602$$

зөрчил үүсгэв.

ББ-В1:



байг. $x_1x_2 + \dots + x_nx_1$ (*) - нийлбэрийг авч үзье.

x_i, x_{i+1} ($i + 1 = 1$)-үүдийн байрыг солиход (*)-нийлбэр ихсэнэ гэж үзүүл. Нөгөө талаас $x_1, \dots, x_n$ -тоонуудыг тойрог дээгүүр байрыг нь солих боломжийн тоо төгсгөлөг. Иймд дээрхи үйлдэл зогсоно.

ББ-В2:

$$A = \underbrace{\sqrt{9 \dots 9}}_{2n} = \sqrt{10^{2n} - 1}; \quad r_n = 10^n - A = \frac{10^{2n} - A^2}{10^n + A} = \frac{1}{10^n + A}$$

$$A < 10^n \Rightarrow r_n > \frac{1}{2 \cdot 10^n}; \quad A = 10^n - r_n < 10^n - \frac{1}{2 \cdot 10^n} = \underbrace{9 \dots 9}_n, \underbrace{9 \dots 9}_n 5.$$

Нөгөө талаас

$$\frac{1}{10^n + A} < \frac{3}{5 \cdot 10^n} \Leftrightarrow 2 \cdot 10^n < 3A \Leftrightarrow 4 \cdot 10^{2n} < 9A^2 = 9(10^{2n} - 1) = 0$$

$$\Rightarrow r_n < \frac{3}{5 \cdot 10^n}$$

$$\text{болно. Иймд } A = 10^n - r_n > 10^n - \frac{3}{5 \cdot 10^n} = \underbrace{9 \dots 9}_n, \underbrace{9 \dots 9}_n 4. \text{ Эндээс}$$

$$\underbrace{9 \dots 9}_n, \underbrace{9 \dots 9}_n 4 < A \underbrace{9 \dots 9}_n, \underbrace{9 \dots 9}_n 5. \text{ Иймд 4 болно.}$$

ББ-В3: Бодлого хавтгай дээр n - дүрс өгсөн.

$i_1, \dots, i_k$ -дугаартай дүрсүүдийн огтлолцол $S_{i_1 \dots i_k}$ байг. S -нь бүрхэгдсэн дүрсийн талбай. M_k -нь бүх $S_{i_1 \dots i_k}$ -үүдийн нийлбэр бол m -тэгш үед $S \geq M_1 - M_2 + M_3 - \dots + (-1)^{m+1} M_m$,

m -сондгой үед $S \leq M_1 - M_2 + M_3 - \dots + (-1)^{m+1} M_m$ байна.

(ММК-I Дирихлейн зарчим).

$$5 \geq 9 - M_2 \Rightarrow M_2 \geq 4. \text{ 9-олон өнцөгтөөс нийт } C_9^2 = 36 \text{ хос үүсгэж}$$

$$\text{болох тул эдгээрийн ямар нэг хоёрын еранхий талбай нь } \frac{M_2}{36} \geq \frac{1}{9} \text{ байна.}$$

3.8 ММО-47, Дундын багшийн III даваа

Б.Ганбилэг, Ц.Дашдорж

ДБ-А1 (Ц.Дашдорж). 2^n ялгаатай тоо бүхий

$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{2^n-1}, a_{2^n}$ дарааллаас

$$a_{2^{n-1}+1}, a_1, a_{2^{n-1}+2}, a_2, \dots, a_{2^n}, a_{2^{n-1}}$$

дараалалд шилжих f үйлдэл зөвшөөрөгджээ. f үйлдлийг хамгийн цөөндөө хэдэн удаа гүйцэтгэхэд анхны дараалал гарах вэ?

ДБ-А2 (Ц.Дашдорж). $p \in \mathbb{P}$, $a \in \mathbb{Z}$, $d \mid n$ байг. $p \mid \Phi_n(a)$, $\Phi_d(a)$ бол $n = d \cdot p^\alpha$ ба $p^2 \nmid \Phi_n(a)$ гэж батал, энд $\Phi_n(x)$ нь n дугаар дугуй олон гишүүнт.

ДБ-А3 (Ц.Дашдорж). $A \subseteq \mathbb{N}$, $|A| = \infty$ ба $\forall a \in A$ -ийн хувьд

$$a^n + a^{n-1} + \dots + a + 1 \mid a^{n!} + a^{(n-1)!} + \dots + a^{1!} + 1$$

байх бүх $n \in \mathbb{N}$ -г ол.

ДБ-В1 (Ц.Дашдорж). $\sum_k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} 2^k = \binom{2n+1}{n}$ болохыг батал.

ДБ-В2 (Ц.Дашдорж). $3 \mid 2^n - 1$ ба $\exists m$, $\frac{2^n - 1}{3} \mid 4m^2 + 1$ байх бүх $n \in \mathbb{N}$ -г ол.

ДБ-В3 (Ц.Дашдорж). $M = \{(x_i, y_i) \mid i = 1, 2p-1\} \subseteq \mathbb{Z}_p^2$, $|M| = 2p-1$ ба $\mathbb{Z}_p$ -ийн элемент бүр нь $x_1, \dots, x_{2p-1}$ дараалалд 2-оос илүүгүй удаа ордог байг. Тэгвэл M нь p гишүүнтэй тэг дэд дараалал ($|I| = p$, $I \subseteq \{1, 2, \dots, 2p-1\}$ ба $\sum_{i \in I} (x_i, y_i) = (\sum_{i \in I} x_i, \sum_{i \in I} y_i) = (0, 0) \in \mathbb{Z}_p^2$) агуулна гэж батал.

ДБ-А1: f буулгалтаар дарааллын m -р гишүүн k -р байранд ирдэг бол $f(m) = k$; анх өгөгдсөн дараалал гарах f буулгалтын

хамгийн бага тоог f_n гэж тэмдэглэе. $s \in \mathbb{N}$ $s \leq 2^{n-1}$ байг.
 $f(s) = 2s$; $f(2^{n-1} + s) = 2s - 1$ болно.
 $2(2^{n-1} + s) \equiv 2s - 1 \pmod{2^n + 1}$ тул $m \in \mathbb{N}$,
 $m = \overline{1, 2^n}$ үед $f(m) = 2m \pmod{2^n + 1}$

$$f^2(m) = f(f(m)) \equiv 2^2 \cdot m \pmod{2^n + 1}, \dots, f^{2^n}(m) \equiv 2^{2^n} \cdot m \pmod{2^n + 1}$$

ба $2^{2^n} \equiv 1 \pmod{2^n + 1}$ тул $f^{2^n}(m) \equiv m \pmod{2^n + 1}$. Энэ нь $2n$ удаа үйлдэл хийхэд дарааллын аль ч гишүүн анхны байрандаа ирнэ гэсэн үг. $f_n \geq 2n$ гэж батлавал $f_n = 2n$ болно. Дарааллын эхний гишүүн $2n$ -ээс цөөн үйлдлээр байрандаа ирж чадахгүй буюу $m = 1$ үед $q \in \{1, 2, 3, \dots, 2n - 1\}$ бүрийн хувьд $2^q \not\equiv 1 \pmod{2^n + 1}$ гэж батлахад хангалттай. $2^\delta \equiv 1 \pmod{2^n + 1}$ энд δ нь хамгийн бага илтгэгч гэвэл $2^\delta - 1 > 2^n + 1$ $\delta > n$ ба $2^{2^n} \equiv 1 \pmod{2^n + 1}$ тул $\delta | 2n$ болно. $\delta = 2n$ болох тул батлагдав.

ДБ-А2: $n = d \cdot p^\alpha$ болох нь ММК II, 10.6, Өгүүлбэр 1б) ба бодлого 10.9б). 1б)-ээс гарна.

$d \cdot p^{\alpha-1} = d_s$ гэе. $a^d \equiv 1(p) \Rightarrow a^{d_s} \equiv 1(p)$. $\Phi_n(a) | \frac{a^n - 1}{a^{d_s} - 1}$ тул $p^2 \nmid \frac{a^n - 1}{a^{d_s} - 1}$ гэж харуулахад $p^2 \nmid \Phi_n(a)$ гэж гарна. $a^{d_s} = B$ гэе. $B \equiv 1(p)$, $B = pk + 1$, $k \in \mathbb{N}$ гэвэл $B - 1 = pk$ болно. $p > 2$ байг

$$\frac{a^n - 1}{a^{d_s} - 1} = \frac{B^p - 1}{B - 1} = \frac{(pk + 1)^p - 1}{pk}$$

$$= p + \frac{p(p-1)}{2} \cdot kp + (kp)^2(\dots) \equiv p \pmod{p^2}.$$

$p = 2$ үед a -сондгой. $4 | n$ үед $a^n - 1 = (a^{n/2} - 1)(a^{n/2} + 1)$. ММК II, 10.6. Дасгал 2-оос $\Phi_n(a) | \frac{a^n - 1}{a^{n/2} - 1} = a^{n/2} + 1$. $a^{n/2} + 1 \equiv 2 \pmod{4}$

буюу $4 \nmid \Phi_n(a)$ болов. $4 \nmid n$ бол $\frac{n}{2} = k$, $a^2 = A$ гэе.

$a^n - 1 = A^k - 1 = (A - 1)(A^{k-1} + \dots + 1)$. II хаалт сондгой ширхэг тоонуудын нийлбэр тул 2-т хуваагдахгүй. Иймд $4 \nmid \Phi_n(a)$.

ДБ-А3: Хариу: $n = 1, 2$.

Өгүүлбэр: $A \subseteq \mathbb{N}$, $|A| = \infty$,

$n = \deg f(x) > \deg(g(x)) = k$, $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ба дурын

$a \in A$ хувьд $f(a) \nmid g(a)$ бол $g(x) \equiv 0$ байна.

◀ $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k \neq 0$ ба

a_n, b_k нь эерэг гэж үзэж болно. $f(x) - g(x) = a_nx^n + \dots$ болох ба $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = +\infty$ тул хангалттай их $a-$ ийн хувьд

$f(a) > g(a) > 0$, $f(a) \nmid g(a)$ гэж зөрчилд хүрэх тул $g(x) \equiv 0$ байна. ▶

$f(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1$; $T(x) = x^{n!} + x^{(n-1)!} + \dots + x^{1!} + 1$ ба

$T(x) = (x^{n+1} - 1) \cdot Q(x) + g(x)$; $Q(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ байг.

$x^{n+1} \equiv 1 \pmod{x^{n+1} - 1}$, $+1 \leq k$ үед $k! \equiv \alpha_k \pmod{n+1}$,

$0 \leq \alpha_k \leq n$, гэвэл $x^{k!} \equiv x^{\alpha_k} \pmod{x^{n+1} - 1}$ байна.

$g(x) = x^{\alpha_n} + x^{\alpha_{n-1}} + \dots + x^{\alpha_1} + 1$ болно. $\forall a \in A$ хувьд

$$f(a) \mid T(a) \Leftrightarrow f(a) \mid g(a) \quad (1)$$

байх тул хэрэв $\deg(g(x)) < n$ бол Θ гүүлбэр ёсоор $g(x) \equiv 0$ байна.

Гэвч $\alpha_1 = 1$ тул $\deg(g(x)) \geq 1$ болж зөрчилд хүрнэ. Иймд

$\deg(g(x)) = n$ ба $g(x) -$ ийн сул гишүүн c бол $c \mid f(x) - g(x) = x \cdot g_1(x)$

гэвэл (1)-ээс $\forall a \in A$ хувьд $f(a) \mid g_1(a)$, $\deg f(x) > \deg(g_1(x))$ тул Θ гүүлбэр ёсоор

$g_1(x) \equiv 0$, $cf(x) = g(x)$ болох тул

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = \{1, 2, \dots, n\} \quad (2)$$

байна.

$n = 1$ үед $a^1 + 1 \mid a^{1!} + 1$; $n = 2$ үед $a^2 + a + 1 \mid a^{2!} + a^{1!} + 1$;

$n \geq 3$ үед $n + 1 = p \in P$ байг. Вильсоны теоремоор

$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p} \Rightarrow (p-2)!(p-1) \equiv p(p-2)! - (p-2)!$

$\equiv -(p-2)! \equiv -1 \pmod{p}$, $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$ тул $\{\alpha_{p-2}, \alpha_1\} = \{1\}$;

$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \neq \{1, 2, \dots, n\}$ болж (2)-д зөрчинө. $n + 1$ зохиомол

бол $n + 1 = q \cdot k$, $2 \leq q \leq k$, $q, k \in \mathbb{N}$ гэвэл $k + 1 \leq n$ ба

$(k+1)! - k! = k! \cdot k$; $n + 1 = q \cdot k$

$\{\alpha_{k+1}, \alpha_k\} = \{r\}$ тул $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \neq \{1, 2, \dots, n\}$ болж мөн (2)-д

зөрчинө.

$$\text{ДБ-В1: } f(m) = \sum_k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\left\lfloor \frac{m-k}{2} \right\rfloor} 2^k \text{ ба } F(x) = \sum_m x^m f(m)$$

гээ. Энэ үед

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \sum_m x^m \sum_k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\left[\frac{m-k}{2}\right]} 2^k \\
 &= \sum_k \binom{n}{k} 2^k \sum_m \binom{n-k}{\left[\frac{m-k}{2}\right]} x^m \\
 &= \sum_k \binom{n}{k} 2^k \cdot x^k \sum_m \binom{n-k}{\left[\frac{m-k}{2}\right]} x^{m-k} \\
 &= \sum_k \binom{n}{k} 2^k \cdot x^k \times \\
 &\quad \times \left(\sum_{m-k=2k_1} \binom{n}{\left[\frac{2k_1}{2}\right]} x^{2k_1} + \sum_{m-k=2k_2+1} \binom{n}{\left[\frac{2k_2+1}{2}\right]} x^{2k_2+1} \right) \\
 &= \sum_k \binom{n}{k} 2^k \cdot x^k ((1+x^2)^n + x(1+x^2)^n) \\
 &= \sum_k \binom{n}{k} 2^k \cdot x^k (1+x)(1+x^2)^{n-k} \\
 &= (1+x) \sum_k \binom{n}{k} (2x)^k \cdot (1+x^2)^{n-k} = (1+x)(2x + (1+x^2))^n \\
 &= (1+x)((1+x)^2)^n = (1+x)^{2n+1}. \text{ Иймд} \\
 f(m) &= \binom{2n+1}{m} \text{ болж батлагдав.}
 \end{aligned}$$

ДБ-В2: $3 \mid 2^n - 1 \Rightarrow 2^n \equiv (-1)^n(3) \Rightarrow (-1)^n \equiv 1(3)$

$\Rightarrow n$ - тэгш. $n = 2^k \cdot s$, $k \in \mathbb{N}$ s - сондгой натурал тоо байг.

$$2^n - 1 = (2^s)^{2^k} - 1 = (2^s - 1)(2^s + 1)((2^s)^2 + 1) \dots ((2^s)^{2^{k-1}} + 1).$$

$3 \mid 2^s + 1$ ба $s \geq 3$ үед $2^s - 1 \equiv -1(4)$ тул $p = 4k + 3 \mid 2^s - 1$ байх

$$\exists p \in \mathbb{P}. p \mid 4m^2 + 1 \Rightarrow (p; 2m) = 1 \text{ ба } (2m)^2 \equiv -1(p)$$

$$((2m)^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}(p) \frac{p-1}{2} = 2k + 1 \text{ тул } (2m)^{p-1} \equiv -1(p) \text{ бо-}$$

лох нь Фермагийн бага теоремд зөрчинө. Иймд

$$s = 1, n = 2^k, \frac{2^n - 1}{3} = \frac{(2-1)(2+1)(2^2+1)\dots(2^{2^k}+1)}{3}$$

$= (2^2 + 1) \dots (2^{2^k} + 1) = F_1 F_2 \dots F_{k-1}$, үүнд $F_n = 2^{2^n} + 1$ Фермагийн n -р тоо. $F_{n+1} - 2 = F_0 F_1 \dots F_n$ ба Фермагийн тоонууд сондгой тул хоорондоо харилцан анхны. $F_n = 2^{2^n} + 1 = 4(2^{2^{n-1}-1})^2 + 1$

$$\text{тул} \left\{ \begin{array}{lll} 4x^2 + 1 & \equiv & 0(F_1) \\ 4x^2 + 1 & \equiv & 0(F_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ 4x^2 + 1 & \equiv & 0(F_{k-1}) \end{array} \right. \quad \text{системийн тэгшитгэл бүр шийдтэй}$$

ба $(F_i, F_j) = 1 \quad (i \neq j)$ тул үлдэгдлийн тухай Хятадын теоремоор систем шийдтэй. Хариу: $n = 2^k$; $k \in \mathbb{N}$ гэж гарна.

ДБ-В3: (1-р бодолт) Коши-Дэвенпортын теорем.

$$A_i \subseteq \mathbb{Z}_p, \quad i = \overline{1, k} \text{ бол } |A_1 + \dots + A_k| \geq \min\left\{\sum_{i=1}^k |A_i| - k + 1; p\right\}.$$

$\mathbb{Z}_p$ -ийн элемент бүр $x_1, x_2, \dots, x_{2p-1}$ дараалалд хамгийн олондоо 2 удаа орсон гэдэг нь $\mathbb{Z}_p$ -ийн нэг элемент 1 удаа бусад нь 2; 2 удаа орсон гэсэн үг. Нэг удаа орсон элементийг x_0 бусдыг нь $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$ гэхэд явцуурахгүй.

$\mathbb{Z}_p = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\}$ юм.

$M = \{(x_0, y_0), (x_1, a_1), (x_1, b_1), (x_1, a_2), (x_2, b_2),$

$\dots, (x_{p-1}, a_{p-1}), (x_{p-1}, b_{p-1})\}$ гэж бичиж болно, энд $a_i \neq b_i$.

$A_1 = \{a_1, b_1\}, A_2 = \{a_2, b_2\}, \dots, A_{p-1} = \{a_{p-1}, b_{p-1}\}$ гээд

Коши-Дэвенпортын теорем хэрэглэвэл:

$$|A_1 + A_2 + \dots + A_{p-1}| \geq \min\{2(p-1) - (p-1) + 1, p\} \text{ тул } |A_1 + A_2 + \dots + A_{p-1}| = p.$$

Энэ нь $\sum_{i=1}^{p-1} c_i \equiv -y_0(p)$ байх $c_i \in A_i$ олдоно гэсэн үг.

$c_i = a_i$ эсвэл $c_i = b_i$ тул $y_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_{p-1} \equiv 0(p)$. Эдгээрт харгалзан $x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{p-1} \equiv 0(p)$ тул батлах зүйл батлагдав.

(2-р бодолт) $M = \{(x_0, y_0), (x_1, a_1), (x_1, b_1), (x_1, a_2), (x_2, b_2),$

$\dots, (x_{p-1}, a_{p-1}), (x_{p-1}, b_{p-1})\}$ гэж бичиж болно, энд

$\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\} = \mathbb{Z}_p, \quad a_i \neq b_i$. Тэгийн тухай Алоны комбинатор

теорем гэдэг дараах теорем ашиглан бодоё. $f \in F[x_1, x_2, \dots, x_n]$

байг. $A(f) = c \cdot x_1^{t_1} \cdot \dots \cdot x_n^{t_n}, c \neq 0$ ба $S_1, \dots, S_n \subseteq F, \quad \forall i, |S_i| \geq t_i + 1$ бол $\exists s = (s_1, \dots, s_n) \in \prod S_i; \quad f(s) = f(s_1, \dots, s_n) \neq 0$,

$S_1 = \{a_1, b_1\}, S_2 = \{a_2, b_2\}, S_{p-1} = \{a_{p-1}, b_{p-1}\}$.

$f(z_1, \dots, z_{p-1}) = \prod_{c \in \mathbb{Z} \setminus \{-y_0\}} (z_1 + z_2 + \dots + z_{p-1} + c)$ гэвэл

$S_1, S_1, \dots, S_1 \in \mathbb{Z}_p$ ба $A(f) = c \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_{p-1}$,

$t_1 = t_2 = \dots = 1$ ба $|S_i| = 2 \geq t_i + 1$ ба $c = (p-1)! \not\equiv 0(p)$ тул
 дээрх теорем ёсоор $f(s_1, \dots, s_{p-1}) \neq 0$ байх $\exists(s_1, \dots, s_{p-1}) \in \prod S_i$,
 энд $s_1 + s_2 + \dots + s_{p-1} \equiv -y_0(p)$ ба $y_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_{p-1} \equiv 0(p)$ $s_i = a_i$
 эсвэл $s_i = b_i$ байх эдгээрт харгалзах $x_1 + x_2 + \dots + x_{p-1} \equiv 0(p)$ тул
 батлагдав.

4 ОУ-ын математикийн 52-р олимпиад

52nd international
Mathematical Olympiad
Amsterdam-The Netherlands 12-24 July 2011

Ц.Дашдорж

1. 52-р ОУМО Голландын Амстердамд 2011 оны 7-р сарын 16-наас 24-ний хооронд амжилттай явагдаж өнгөрлөө. ОУМО-д 101 орны 563 оролцогч оролцлоо.
2. Манай улсын тоочин сурагчид Б.Батхуяг (Улаанбаатар, I сургууль, XI анги) 19 оноогоор хүрэл медаль, Б.Төгөлдөр 17 оноогоор хүрэл медаль О.Бямбадорж, Б.Бат-Од, Ч.Золбоо нар тус тус 9 оноогоор тусгай байр эзэлж, Ц.Цэнгүүн 6 оноо авлаа. Ингээд 1-р байранд багийн оноогоор БНХАУ, 2-р байранд АНУ, 3-р байранд Сингапур, 4-р байранд ОХУ, 5-р байранд Тайланд улс орж, манай улс 54-р байр эзэллээ.
3. 53-р ОУМО Аргентин улсын Мар-дель-Плата хотод 2012-ны 7 сарын 4-ноос 16-ний өдрүүдэд зохион байгуулагдана.

Problem1. Given any set $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ of four distinct positive integers, we denote the sum $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ by S_A . Let n_A denote the number of pairs (i, j) with $1 \leq i < j \leq 4$ for which $a_i + a_j$ divides S_A . Find all sets A of four distinct positive integers which achieve the largest possible value of n_A .

Answer. The sets A for which n_A is maximal are the sets the form $\{d, 5d, 7d, 11d\}$ and $\{d, 11d, 19d, 29d\}$, where d is any positive integer. For all these sets n_A is 4.

Solution. Firstly, we will prove that the maximal value of n_A is at most 4. Without loss of generality, we may assume that $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. We observe that for each pair of indices (i, j) with $1 \leq i < j \leq 4$, the sum $a_i + a_j$ divides S_A if and only if $a_i + a_j$ divides $S_A - (a_i + a_j) = a_k + a_l$, where k and l are the other two indices. Since there are 6 distinct pairs, we have to prove that at least two of

them do not satisfy the previous condition. We claim that two such pairs are (a_2, a_4) and (a_3, a_4) . Indeed, note that $a_2 + a_4 > a_1 + a_3$ and $a_3 + a_4 > a_1 + a_2$. Hence $a_2 + a_4$ and $a_3 + a_4$ do not divide S_A . This proves $n_A \leq 4$.

Now suppose $n_A = 4$. By the previous argument we have

$$a_1 + a_4 \mid a_2 + a_3 \quad \text{and} \quad a_2 + a_3 \mid a_1 + a_4,$$

$$a_1 + a_2 \mid a_3 + a_4 \quad \text{and} \quad a_3 + a_4 \nmid a_1 + a_2,$$

$$a_1 + a_3 \mid a_2 + a_4 \quad \text{and} \quad a_2 + a_4 \nmid a_1 + a_3,$$

Hence, there exist positive integers u and v with $u > v \geq 2$ such that

$$\begin{cases} a_1 + a_4 = a_2 + a_3 \\ u(a_1 + a_2) = a_3 + a_4 \\ v(a_1 + a_3) = a_2 + a_4. \end{cases}$$

Adding up the first equation and the third one, we get $v(a_1 + a_3) = 2a_2 + a_3 - a_1$. If $v \geq 3$, then $v(a_1 + a_3) > 3a_3 > 2a_2 + a_3 > 2a_2 + a_3 - a_1$. This is a contradiction. Therefore $v = 2$. If we multiply by 2 the sum of the first equation and the third one, we obtain

$$6a_1 + 2a_3 = 4a_2,$$

while the sum of the first one and the second one is

$$(u + 1)a_1 + (u - 1)a_2 = 2a_3.$$

Adding up the last two equations we get

$$(u + 7)a_1 = (5 - u)a_2.$$

It follows that $5 - u \geq 1$, because the left-hand side of the last equation and a_2 are positive. Since we have $u > v = 2$, the integer u can be equal only to either 3 or 4. Substituting (3,2) and (4, 2) for (u, v) and solving the previous system of equations, we find the families of solutions $\{d, 5d, 7d, 11d\}$ and $\{d, 11d, 19d, 29d\}$ where d is any positive integer.

Problem2. Let S be a finite set of at least two points in the plane. Assume that no three points of S are collinear. A windmill is a process that starts with a line l going through a single point $P \in S$. The line rotates clockwise about the pivot P until the first time that the line meets some other point belonging to S . This point, Q , takes over as the new pivot, and the line now rotates clockwise about Q , until it next meets a point of S . This process continues indefinitely. Show that we can choose a point P in S and a line l going through P such that the resulting windmill uses each point of S as a pivot infinitely many times. Show that for a suitable $P \in S$ and a suitable starting line l containing P , the resulting windmill will visit each point of S as a pivot infinitely often.

Solution Give the rotating line an orientation and distinguish its sides as the orange side and the blue side. Notice that whenever the pivot changes from some point T to another point U , after the change, T is on the same side as U was before. Therefore, the number of elements of S on the orange side and the number of those on the blue side remain the same throughout the whole process (except for those moments when the line contains two points). First consider the case that $|S| = 2n + 1$ is odd. We claim that through any point $T \in S$, there is a line that has n points on each side. To see this, choose an oriented line through T containing no other point of S and suppose that it has $n + r$ points on its orange side. If $r = 0$ then we have established the claim, so we may assume that $r \neq 0$. As the line rotates through 180° around T , the number of points of S on its orange side changes by 1 whenever the line passes through a point; after 180° , the number of points on the orange side is $n - r$. Therefore there is an intermediate stage at which the orange side, and thus also the blue side, contains n points.

Now select the point P arbitrarily, and choose a line through P that has n points of S on each side to be the initial state of the windmill. We will show that during a rotation over 180° , the line of the windmill visits each point of S as a pivot. To see this, select any point T of S and select a line l through T that separates S into equal halves. The point T is the unique point of S through which a line in this direction

can separate the points of S into equal halves (parallel translation would disturb the balance). Therefore, when the windmill line is parallel to l , it must be l itself, and so pass through T .

Next suppose that $|S| = 2n$. Similarly to the odd case, for every $T \in S$ there is an oriented line through T with $n - 1$ points on its orange side and n points on its blue side. Select such an oriented line through an arbitrary P to be the initial state of the windmill.

We will now show that during a rotation over 360° , the line of the windmill visits each point of S as a pivot. To see this, select any point T of S and an oriented line l through T that separates S into two subsets with $n - 1$ points on its orange and n points on its blue side. Again, parallel translation would change the numbers of points on the two sides, so when the windmill line is parallel to l with the same orientation, the windmill line must pass through T .

Comment. One way shorten this solution in the following way.

Suppose that $|S| = 2n + 1$. Consider any line l that separates S into equal halves; this line is unique given its direction and contains some point $T \in S$. Consider the windmill starting from this line. When the line has made a rotation of 180° , it return to the same location but the orange side becomes blue and vice versa. So, for each point there should have been a moment when it appeared as pivot, as this is the only way for a point to pass from on side to the other.

Now suppose that $|S| = 2n$. Consider a line having $n - 1$ and n points on the two sides; it contains some point T . Consider the windmill starting from this line. After having made a rotation of 180° , the windmill line contains some different point R , and each point different from T and R has changed the color of its side. So, the windmill should have passed through all the points.

Problem3. Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a real-valued function defined on the set of real numbers that satisfies

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x)) \quad (1)$$

for all real numbers x and y . Prove that $f(x) = 0$ for all $x \leq 0$.

Solution Substituting $y = t - x$, we rewrite (1) as

$$f(t) \leq tf(x) - xf(x) + f(f(x)) . \quad (2)$$

Now consider some real numbers a, b and use (2) with $t = f(a)$, $x = b$ as well as with $t = f(b)$, $x = a$. We get

$$f(f(a)) - f(f(b)) \leq f(a)f(b) - bf(b),$$

$$f(f(b)) - f(f(a)) \leq f(a)f(b) - af(a).$$

Adding these two inequalities yields

$$2f(a)f(b) \geq af(a) + bf(b).$$

We substitute $b = 2f(a)$ and obtain $2f(a)f(b) \geq af(a) + 2f(a)f(b)$, or $af(a) \leq 0$. Therefore,

$$f(a) \geq 0 \text{ for all real } a < 0. \quad (3)$$

Now suppose $f(x) > 0$ for some real number x . From (2), we immediately get that, for every $t < \frac{xf(x) - f(f(x))}{f(x)}$, we have $f(t) < 0$. This contradicts (3); therefore

$$f(x) \leq 0 \text{ for all real } x, \quad (4)$$

and, by (3) again, we get $f(x) = 0$ for all $x < 0$. We are left to find $f(0)$. Setting $t = x < 0$ in (2), we obtain $f(x) \leq f(f(x))$. As x is a zero of f , this means $0 \leq f(0)$. Combining this with (4), we obtain $f(0) = 0$.

Problem 4. Let $n > 0$ be an integer. We are given a balance and n weights of weight $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$. We are to place each of the n weights on the balance, one after another, in such a way that the right pan is never heavier than the left pan. At each step we choose one of the weights that has not yet been placed on the balance, and place it on either the left pan or the right pan, until all of the weights have been placed.

Determine the number of ways in which this can be done.

Answer. The number $f(n)$ of ways of placing the n weights is equal to the product of all odd positive integers less than or equal to $2n - 1$, i.e., $f(n) = (2n - 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)$.

Solution Assume $n \geq 2$. We claim

$$f(n) = (2n - 1)f(n - 1). \quad (1)$$

To begin, note that after the first move the left pan is always at least 1 heavier than the right one. Hence, any valid way of placing the n weights on the scale gives rise, by not considering weight 1, to a valid way of placing the weights $2, 2^2, \dots, 2^{n-1}$.

If we divide the weight of each weight by 2, the answer does not change. So these $n - 1$ weights can be placed on the scale in $f(n - 1)$ valid ways. Now we look at weight 1. If it is put on the scale in the first move, then it has to be placed on the left side, otherwise it can be placed either on the left or on the right side, because after the first move the difference between the weights on the left pan and the weights on the right pan is at least 2. Hence, there are exactly $2n - 1$ different ways of inserting weight 1 in each of the $f(n - 1)$ valid sequences for the $n - 1$ weights in order to get a valid sequence for the n weights. This proves the claim. Since $f(1) = 1$, by induction we obtain for all positive integers n

$$f(n) = (2n - 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1).$$

Problem5. Let f be a function from the set of integers to the set of positive integers. Suppose that for any two integers m and n the difference $f(m) - f(n)$ is divisible by $f(m - n)$. Prove that, for all integers m and n with $f(m) \leq f(n)$, the number $f(n)$ is divisible by $f(m)$.

Solution For reference we write down the given property

$$f(m - n) \mid f(m) - f(n) \quad (*)$$

that holds for f , and all integers m, n . Suppose that x and y are two integers with $f(x) < f(y)$. We will show that $f(x) \mid f(y)$. By taking $m = x$ and $n = y$ in $(*)$ we see that

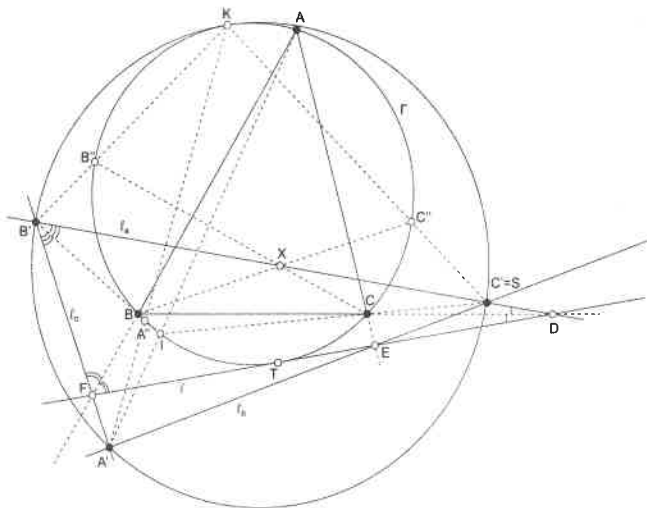
$$f(x - y) \mid |f(x) - f(y)| = f(y) - f(x) > 0,$$

so $f(x - y) \leq f(y) - f(x) < f(y)$. Hence the difference $d = f(x) - f(x - y)$ satisfies

$$-f(y) < -f(x - y) < d < f(x) < f(y).$$

Taking $m = x$ and $n = x - y$ in (*) we see that $f(y) \mid d$, so we deduce $d = 0$, or in other words $f(x) = f(x - y)$. Taking $m = x$ and $n = y$ in (*) we see that $f(x) = f(x - y) \mid f(x) - f(y)$, which implies $f(x) \mid f(y)$.

Problem6. Let ABC be an acute triangle with circumcircle Γ . Let l be a tangent line to Γ , and let l_a, l_b and l_c be the lines obtained by reflecting l in the lines BC, CA and AB , respectively. Show that the circumcircle of the triangle determined by the lines l_a, l_b and l_c is tangent to the circle Γ .



Note. To avoid a large case distinction, we will use the notion of oriented angles. Namely, for two lines m and n , we denote by $\angle(m, n)$ the angle by which one may rotate m anticlockwise to obtain a line parallel to n . Thus, all oriented angle are considered modulo 180° .

Solution Denote by T the point of tangency of l and Γ . Let $A' = l_b \cap l_c$, $B' = l_a \cap l_c$, $C' = l_a \cap l_b$. Introduce the point A'' on Γ

such that $TA = AA''$ ($A'' \neq T$ unless TA is a diameter). Define the points B'' and C'' in a similar way.

Since the points C and B are the midpoints of arcs TC'' and TB'' , respectively, we have

$$\begin{aligned}\angle(l, B''C'') &= \angle(l, TC'') + \angle(TC'', B''C'') = 2\angle(TC'', BC'') + 2\angle(l, TC'') \\ &= 2(\angle(l, TC) + \angle(TC, BC)) = 2\angle(l, BC) = \angle(l, l_a).\end{aligned}$$

It follows that l_a and $B''C''$ are parallel. Similarly, $l_b \parallel A''C''$ and $l_c \parallel A''B''$. Thus, either the triangles $A'B'C'$ and $A''B''C''$ are homothetic, or they are translates of each other. Now we will prove that they are in fact homothetic, and that the center K of the homothety belongs to Γ . It would then follow that their circumcircles are also homothetic with respect to K and are therefore tangent at this point, as desired.

We need the two following claims.

Claim 1. The point of intersection X of the lines $B''C'$ and BC'' lies on l_a .

Proof. Actually, the points X and T are symmetric about the line BC , since the lines CT and CB'' are symmetric about this line, as are the lines BT and BC'' . $\square$

Claim 2. The point of intersection I of the lines BB' and CC' lies on the circle Γ . *Proof.* We consider the case that l is not parallel to the sides of ABC ; the other cases may be regarded as limit cases. Let $D = l \cap BC$, $E = l \cap AC$, and $F = l \cap AB$.

Due to symmetry, the line DB is one of the angle bisectors of the lines $B'D$ and FD ; analogously, the line FB is one of the bisectors of the lines $B'F$ and DF . So B is either the incenter or one of the excenters of the triangle $B'DF$. In any case we have $\angle(BD, DF) + \angle(DF, FB) + \angle(B'B, B'D) = 90^\circ$, so

$$\angle(B'B, B'C')$$

$$= \angle(B'B, B'D) = 90^\circ - \angle(BC, DF) - \angle(DF, BA) = 90^\circ - \angle(BC, AB).$$

Analogously, we get $\angle(C'C, B'C') = 90^\circ - \angle(BC, AC)$. Hence,

$$\angle(BI, CI) = \angle(B'B, B'C') + \angle(B'C', C'C)$$

$$= \angle(BC, AC) - \angle(BC, AB) = \angle(AB, AC),$$

which means exactly that the points A, B, I, C are concyclic. $\square$

Now we can complete the proof. Let K be the second intersection point of $B'B''$ and Γ . Applying $P_{ASCAL}'s$ theorem to hexagon $KB''CIBC''$ we get that the points $B' = KB'' \cap IB$ and $X = B''C \cap BC''$ are collinear with the intersection point S of CI and $C''K$. So $S = CI \cap B'X = C'$, and the points C', C'', K are collinear. Thus K is the intersection point of $B'B''$ and $C'C''$ which implies that K is the center of the homothety mapping $A'B'C'$ to $A''B''C''$, and it belongs to Γ .

**Тусгаар тогтнолын 100 жилийн ой ба
Олонлог төв сургуулийн 10 жилийн ойд
зориулсан Математикийн уралдааны
чөлөөт ангиллын бодлого.**

Ц.Дашдорж

- A1. (Ц.Дашдорж) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ өсөх функц ба $n \in \mathbb{N}$ тоо өгчээ. Хэрэв өгөгдсөн ялгаатай анхны тоо $p_1, \dots, p_n$ -үүд ба өгөгдсөн натурал тоо $s_1, \dots, s_n$ -үүдийн хувьд $A_i \Rightarrow \{f(p_i r + s_i) / r = 1, 2, \dots\}$, $i = \overline{1, n}$ олонлогууд нь төгсгөлгүй $\div$ бол $\div f(a+1), f(a+2), \dots$ байх $\exists a \in \mathbb{N}$ гэдгийг батал.

$\uparrow$ (Г. Батзаяагийн бодолт)

$X_i \Rightarrow \{p_i r + s_i \mid r \in \mathbb{N}\}$, $A_i \div$ -ийн ялгаварыг $d_i \in \mathbb{N}$ ($d_i = 0$ бол $f = \text{const}$)

$d = p_1 \dots p_n$ гэе. Тэгвэл $\forall b, c \in X_i : f(b) - f(c) = d_i \frac{(b-c)}{p_i}$ (*)

болно. Одоо

$$\left\{ \begin{array}{l} x \equiv s_1(p_1) \\ \vdots \\ x \equiv s_n(p_n) \end{array} \right. \quad \text{байх } \exists x \in \mathbb{N} \text{ (хятадын теоремоор) тул}$$

$$x + p_1 \dots p_n, x \in X_i (i = \overline{1, n}) \Rightarrow f(x+d) - f(x) \stackrel{(*)}{=} d_i \frac{d}{p_i}, i = \overline{1, n}$$

болно. $\Rightarrow \frac{d_1}{p_1} = \dots = \frac{d_n}{p_n} = k$ ба $p_i \mid d_i, i = \overline{1, n}$ (1)

болно. Мөн

$$\left\{ \begin{array}{l} x' + 1 \equiv 0(p_1) \\ \vdots \\ x' + n \equiv 0(p_n) \end{array} \right. \quad \text{байх } \exists x' \in \mathbb{N} \text{ (хятадын теоремоор) тул}$$

$$i = \overline{1, n} : f(x + x' + i) - f(x) \stackrel{(*)}{=} \frac{d_i}{p_i} (x' + i) = k(x' + i) \quad (2)$$

болно. $\Rightarrow a = x + x'$ гэвэл $f(a+i+1) - f(a+i) \stackrel{(2)}{=} k \quad (i = \overline{1, n})$. $\downarrow$

- A2. (Ц.Дашдорж) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists P(x) \in \mathbb{Z}[x], P(1), P(2), \dots, P(n)$ -үүд бүгд 2-ийн ялгаатай зэргүүд гэж батал.

↑ (Г. Батзаяагийн бодолт)

n -ээр индукцлэж байгуулъя.

$n = 1$ үед $p_1(x) = x + 1 (p_1(1) = 2)$

n үед $f(1), f(2), \dots, f(n)$ -үүд бүгд 2-ийн ялгаатай зэргүүд байг.

$n + 1$ үед байгуулъя. $F(x) = 2^l (f(x))^m - t(x-1)(x-2)\dots(x-n)$ байхаар l, m, t -г сонгоё. $F(1), \dots, F(n)$ -үүд бүгд 2-ийн зэргүүд тул $F(n+1)$ нь 2-ийн зэрэг байхаар $\exists l, m, t \in \mathbb{N}$ гэж баталхад хангалттай.

$F(n+1) = (2^l \cdot (f(n+1))^m - t \cdot n!)$ байна: $f(n+1)$, $n!$ -г зэрэг хуваах сондгой анхны тоо олдохгүй. Хэрэв $2 < p \in \mathbb{P} : p \mid f(n+1)$, $n!$ бол $\Rightarrow p < n, p \mid f(n+1-p) = 2^l$ зөрчил. $\Rightarrow ord_2(n!) = l$ гэвэл

$(f(n+1), \frac{n!}{2^l}) = 1 \Rightarrow f(n+1)^m \equiv 1 (\frac{n!}{2^l}), \exists m \in \mathbb{N}$ (Эйлерийн

теорем) $\Rightarrow f(n+1)^m - 1 = t \frac{n!}{2^l} \Rightarrow 2^l \cdot (f(n+1))^m - t \cdot n! =$

$2^l \Rightarrow \exists l, m, t \in \mathbb{N}. \downarrow$

А3. (Б.Хоролдагва) 100 төмөр замын өртөөний нэгээс нь нөгөөд хүрэх зөвхөн нэг зам олддог бол яг дунд нь 2 өртөө байх хос өртөөний тоо 2401-ээс ихгүй болохыг батал.

Бодолт: Энэ бодлого нь 100 оройтой модны 3 урттай замын тоог үнэлэхтэй тэнцүү чанартай юм. Өртөөнүүдээ 1, 2, ..., 100 гэж дугаарлан үүсэх модыг T , түүний 3 урттай замын тоог $N(T)$ гэж тэмдэглэе.

i оройн зэргийг d_i (i өртөө d_i ширхэг өртөөтэй замаар шууд холбогдсон), хэрэв i оройн хөрш оройнууд нь $i_1, i_2, \dots, i_{d_i}$ бол $d_{i_1} + d_{i_2} + \dots + d_{i_{d_i}} - d_i = a_i$ гэж тэмдэглээд $\max_i a_i = a_t$ гэж үзье.

Хэрэв j нь k -р оройтой хөрш бөгөөд $d(t, j) > 2$ (Энд $d(t, j)$ нь t -ээс j -р орой хүртэлх ирмэгийн тоо) байх нэг зэргийн орой бол j -г t -тэй ирмэгээр холбон jk ирмэгийг арилгахад үүсэх модыг T' гэж тэмдэглэвэл $N(T) - N(T') = a_k - a_t$ болохыг хялбархан тооцоолж болно. Иймд t -оройн сонголтоор $N(T) \leq N(T')$ байна. Дээрх хувиргалтыг

давтан хийсээр аливаа нэг зэргийн орой j бүрийн хувьд $d(t, j) \leq 2$ байх T^* модыг гарган авч болно. Одоо T^* модны t оройн зэргийг d_t^* , түүний хөрш оройн зэргүүдийн нийлбэр болон d_t^* хоёрын ялгаврыг a_t^* , гэж тэмдэглэвэл

$$N(T) \leq N(T^*) = a_t^*(98 - a_t^*) \leq 49^2 = 2401$$

болж бодлого бодогдоно.

- Б1. (Б.Баясгалан) $S = \{1, 2, 3, \dots, 2011\}$ тоонуудыг 4 өнгийн аль нэгээр будав. Хэрэв нэг ижил өнгөтэй бөгөөд арифметик прогресс үүсгэдэг $a_1, a_2, \dots, a_n$ тоонууд олддоггүй бол

а) $n = 10$

б) $n = 9$ байж болох уу?

Бодолт: $n = 9$ байж болно гэж харуулъя

$\overline{1, 8}, \overline{17, 24}, \dots, \overline{113, 120}$ тоонуудыг болон эдгээр дээр $256k$, $k = \overline{1, 7}$ -г нэмэхэд гарах тоонуудыг S_1 олонлог гээ.

$$S_2 = \{s + 8 \mid s \in S_1\}$$

$$S_3 = \{s + 128 \mid s \in S_1\}$$

$$S_4 = \{s + 136 \mid s \in S_1\}$$

$$\bigcup_{i=1}^4 S_i = \{1, 2, \dots, 2048\} \supseteq S$$

тул одоо S_i -г i -р өнгөөр будахад дан өнгөт 9 урттай ($\div$) олдохгүй. Иймд 10 урттай ($\div$) мөн олдохгүй. Өөрөөр хэлбэл мөн $n = 10$ байж бас болно.

- Б2. (Б.Баясгалан) 100 оройтой бүтэн граф K_{100} -г орой бүрээс 99 өнгийн ирмэг гарсан байхаар будав. Тэгвэл 98 өнгийг агуулсанд K_{67} дэд граф олдох уу?

Бодолт: Аль ч өнгийн хувьд тухайн өнгийн аль ч 2 нь ерөнхий оройгүй 50 ирмэг олдоно. Иймд $K_{100} \rightarrow K_{67}$ буюу 33 оройг арилгахад дээрх 50 ирмэгээс хамгийн олондоо 33 л хасагдана. Энэ нь ямар ч өнгийн хувьд K_{67} -д хамгийн

цөөндөө 17 ирмэг байна гэсэн үг. Иймд 98 өнгөтэй K_{67} олдохгүй.

Б3. (Б.Баясгалан) $a_1, \dots, a_n$ нь ялгаатай бүхэл тоонууд ба M нь 50-аас олонгүй элементтэй бүхэл тоонуудын олонлог. Тэгвэл $b_1, b_1 + b_2, \dots, b_1 + b_2 + \dots + b_{99}$ тоонуудын аль нь ч M олонлогийн элемент биш байхаар $a_1, \dots, a_{100}$ олонлогийг $b_1, b_2, \dots, b_{100}$ гэж эрэмбэлж болохыг батал.

Тайлбар: Энэ бодлогыг аливаа бүхэл ялгаатай $a_1, \dots, a_n$ тоонуудын хувьд

$|M| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ үед 2011.12-р сард Унгарын математикч Geza Kos шийджээ. Хэрэв $a_i \neq 0$ ($i = \overline{1, n}$) бол $|M| \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ гэж сайжруулж болох юм. Бид энд $n = 2k$ үед түүний бодолтыг сийрүүлье.

Бодолт: $n = 2k$ ба $|M| = k$ байг.

1)

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{l=1}^{2k-1} \prod_{m \in M} (x_{\pi(1)} + x_{\pi(2)} + \dots + x_{\pi(l)} - m)$$

олон гишүүнтийг авч үзье.

$q(a_1, \dots, a_{2k}) \neq 0$ бол $\prod_{l=1}^{2k-1} \prod_{m \in M} (a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \dots + a_{\pi(l)} - m) \neq 0$ байх π орлуулга олдох болно.

2) $q(x_1, \dots, x_{2k})$ нь тэмдэг сөөлжлөх олон гишүүнт тул Вандермондын $V(x_1, \dots, x_{2k})$ олон гишүүнтийн давталт байна (M. Aigner, *A course in Enumeration*, 2007, p.346 – 347).

Өөрөөр хэлбэл $q(x_1, \dots, x_{2k}) = (-1)^k \cdot c_k \cdot V(x_1, \dots, x_{2k})$. Иймд $c_k \neq 0$ гэж батлахад хангалттай.

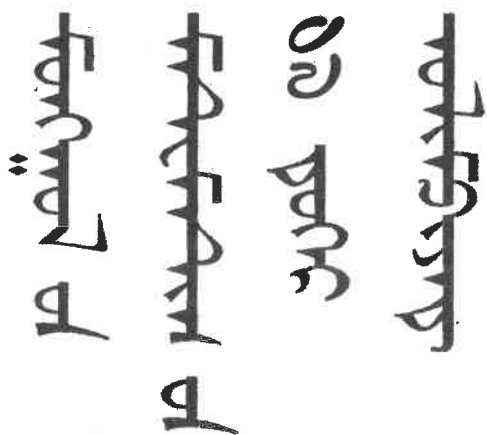
3) $c_k \neq 0$ гэдгийн баталгааг Geza Kos, On the Grasshoppers Problem, The Mathematical Association of America, Monthly 118, 2011, December, p.877-886 олж үзнэ үү.

Тайлбар: Шууд тэгийн тухай Алоны теоремийг хэрэглэх боломжгүй олон гишүүнтийн зэрэг нь хэт өндөр гарах тул тэмдэг сөөлжлөх Косийн олон гишүүнт зарим тохиолдолд үр ашигтай байдаг байна.

"Төгс Тоо" төвийн тухай

Манай орны математик боловсролын хөгжилд мэдэгдэхүйц амжилт гарч математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай сургууль, ангиуд олноор байгуулагдаж байгааг харгалзан үзэж, тэднийг нэгдсэн удирдлага, үйл ажиллагаагаар хангах зорилгоор БСШУЯ-ны санаачилга дэмжлэгтэйгээр Монголын Математик Олимпиадын Хорооны дэргэд математикийн багш нарын мэргэжил дээшлүүлэх "Төгс тоо" төв байгуулагдсаар хэдэн жил болж байна. Тус төв нь математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийн багш нарын мэргэжлийг системтэйгээр дээшлүүлэх ажлынхаа хүрээнд дунд ангийн багш нарын дунд тус бүр 90 цагийн багтаамжтай, 120000 төгрөгийн төлбөртэй I ба II шатны дамжааг 12 хоногоор; бага ангийн багш нарын дунд 60 цагийн багтаамжтай, 90000 төгрөгийн төлбөртэй сургалтыг 10 хоногоор хичээллүүлж, дамжааг амжилттай дүүргэсэн хүмүүст харгалзах сертификат олгон төгсгөдөг юм. Жил бүрийн хичээлийг МУИС, хичээлийн III байрны 308 тоотод-6 сарын 23-24-нд бүртгэж, хичээл 6 сарын 25-аас эхлэн явагддаг. Төлбөрийг "Төгс тоо" төв дансанд хийж, төлбөрийн баримтаа үзүүлээд бүртгүүлж болно, эсвэл бэлнээр авчирна.

	Голомт банк, 1102101388,
"Төгс тоо" төвийн данс:	регистрийн дугаар 1014366
	"Төгс тоо" төв
	312383 (гэр)
Лавлах утас:	99879779 (Ц.Дашдорж)



47th Mongolian Mathematical Olympiad

May 3 to May 7, 2011

**National University of Mongolia
Ulaanbaatar**

XLVII MONGOLIAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

Arvaikheer city, Uvurkhangai province, MONGOLIA

2011.05.03-2011.05.10

Organizing committee:

President Ts. Dashdorj

Members:

D.Narangerei, G.Bum-Erdene, B.Battsengel, B.Bayasgalan, B.Sandagdorj, Ts.Batkhuu, D.Davaadorj,
T.Batbold, B. Batnyam, U.Batzorig, G.Batzaya, B.Bayarjargal, D. Batnasan, Ch.Gantumur, D.Ganzorig, ,
B.Batbileg, N.Argilsan

Mongolian IMO 2011 team trainers: B.Battsengel, G.Batzaya, U.Batzorig, G.Bum-erdene

Mongolian IMO 2011 team members: O.Byambadorj, B.Tuguldur, B.Batod, Ts.Tsenguun, G.Zolboo, and
B.Batkhuuyag

B. Batnyam, D. Batnasan, B. Battsengel (translation)

Problems of the 47th Mongolian Mathematical Olympiad

9th grade

9.1. Denote midpoints of the sides BC, CA, AB of triangle ABC by A_1, B_1, C_1 respectively. Points A_2 and A_3 lie on the midline B_1C_1 , points A_2 and A_3 lie on the midline B_1C_1 , points A_2 and A_3 lie on the midline B_1C_1 and satisfy

$$AA_2 = AA_3 = BB_2 = BB_3 = CC_2 = CC_3.$$

Prove that all these points $A_2, A_3, B_2, B_3, C_2, C_3$ lie on a circle.

proposed by B. Battsengel

9.2. Given square lattice of size 2011×2011 . One marks some points of this lattice and any 4 marked points do not form isosceles trapezoid with bases parallel to a lattice side (a rectangle is also counted as isosceles trapezoid). Find with proof the maximum number of marked points.

proposed by Ts. Gerelt

9.3. Let a, b, c be the side lengths of a triangle. Prove that

$$\frac{a^4}{b} + \frac{b^4}{c} + \frac{c^4}{a} + abc \geq \sqrt{2(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)}.$$

proposed by E. Enkhzaya

9.4. Prove that for each positive integer n the equation $x^2 + y^2 + z^2 = 2011^n$ has positive integer solutions (x, y, z) .

proposed by B. Ganbat

9.5. Given a triangle ABC with obtuse angle $\angle BAC$. Point D lies on the side BC and satisfies $AD = BD$ and $\angle CAD = 90^\circ$. Let M, N be the midpoints of sides AB, AC and the line passing through point D parallel to side AB intersects segment MN at point E . Prove that $\angle ACE = \angle BCM$.

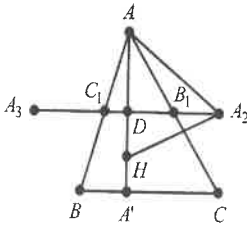
proposed by B. Luvsanbyamba

9.6. Given a sequence $\{a_n\}$ of positive integers satisfying $a_{n+1} = a_n + \lfloor \sqrt{a_n} \rfloor$ for all $n \geq 1$ (here $\lfloor x \rfloor$ is integer part of real number x). Prove that sequence has infinitely many perfect square terms.

folklore

Solutions of the problems

9.1. Let A', B', C' be the foots of heights and H be orthocenter of triangle ABC . By angle-chasing we show that $\triangle HAB' \sim \triangle HBA'$, hence we have $HA \cdot HA' = HB \cdot HB'$. Similarly, we have $HA \cdot HA' = HC \cdot HC'$. (Note that these relations also can be obtained by using intersecting chord theorem to nine point-circle). Denote the midpoint of height AA' by D (figure). Since $HA = AD \pm HD$ and $HA' = AD \mp HD$, we have $HA \cdot HA' = AD^2 - HD^2$. By Pythagoras theorem one has $DA_2^2 = AA_2^2 - AD^2 = HA_2^2 - HD^2$, hence



$$HA_2^2 = AA_2^2 - (AD^2 - HD^2) = AA_2^2 - HA \cdot HA'.$$

Writing similar relations for other points A_3, B_2, B_3, C_2, C_3 , one shows that all these points lie on the circle centered at point H .

9.2. Answer: 5026 points. Suppose that given lattice points (x, y) with integer coordinates x, y such that $1 \leq x, y \leq 2011$ and let M be the set marked points. Consider the set of pairwise sums of x -coordinates

$$S_k = \{x_1 + x_2 \mid (x_1, k) \in M, (x_2, k) \in M \text{ and } x_1 \neq x_2\}$$

of marked points with fixed y -coordinate k . Note that, four lattice points $(x_1, k), (x_2, k), (x_3, k'), (x_4, k')$ form isosceles trapezoid if and only if $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. So if there are no 4 marked points forming isosceles trapezoid, then the sets S_k ($1 \leq k \leq 2011$) are all disjoint. Suppose that we have integers $x_1 < \dots < x_n$, then one can construct at least $2n - 3$ number of distinct pairwise sums between them namely:

$$x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < x_2 + x_3 < x_2 + x_4 < \dots < x_{n-2} + x_{n-1} < x_{n-2} + x_n < x_{n-1} + x_n.$$

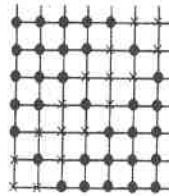
Thus if there are n_k marked points with given y -coordinate k , then one has $|S_k| \geq 2n_k - 3$. On the other hand, all the sets S_k ($1 \leq k \leq 2011$) are subsets of the set $\{3, 4, 5, \dots, 4020, 4021\}$. Hence

$$4019 = |\{3, 4, 5, \dots, 4020, 4021\}| \geq \left| \bigcup_{k=1}^{2011} S_k \right| = \sum_{k=1}^{2011} |S_k| \geq \sum_{k=1}^{2011} (2n_k - 3) = 2 \sum_{k=1}^{2011} n_k - 6033$$

and from this we get upper bound $|M| = \sum_{k=1}^{2011} n_k \leq \frac{4019+6033}{2} = 5026$ for

the number of marked points. An example of 5026 marked points are constructed as follows (see figure):

$$\begin{aligned} (n, n+1) & \quad 1 \leq n \leq 2010 \\ (n+1, n) & \quad 1 \leq n \leq 2010 \\ (2n-1, 2n-1) & \quad 1 \leq n \leq 1006 \end{aligned}$$



9.3. The condition $a, b, c > 0$ was enough to prove this inequality. After squaring both sides of given inequality multiply both sides by $a^2 b^2 c^2$. Then the inequality transforms to the form

$$\sum a^{10} c^2 + 2 \sum a^7 b^2 c^3 + 2 \sum a^6 b^5 c \geq 2 \sum a^6 b^4 c^2 + 2 \sum a^6 b^2 c^4 + 3a^4 b^4 c^4.$$

Here all summations are cyclic. By AM-GM inequality, we have $a^7 b^2 c^3 + a^7 b^2 c^3 + a^4 b^2 c^6 \geq 3a^6 b^2 c^4$ and $a^6 b^5 c + a^6 b^5 c + a^6 b^2 c^4 \geq 3a^6 b^4 c^2$. Thus $2 \sum a^7 b^2 c^3 + \sum a^4 b^2 c^6 \geq 3 \sum a^6 b^2 c^4$ and $2 \sum a^6 b^5 c + \sum a^6 b^2 c^4 \geq 3 \sum a^6 b^4 c^2$. Since the summations are cyclic, we have $\sum a^4 b^2 c^6 = \sum a^6 b^4 c^2$.

So summing the last 2 inequality we obtain $2\sum a^7b^2c^3 + 2\sum a^6b^5c \geq 2\sum a^6b^2c^4 + 2\sum a^6b^4c^2$. Summing it with the trivial AM-GM inequality $\sum a^{10}b^2 \geq 3a^4b^4c^4$ we get desired one. The inequality becomes an equality if and only if $a = b = c$.

9.4. Note that the equation $x^2 + y^2 + z^2 = 2011$ has positive integer solution $(x, y, z) = (9, 9, 43)$. Hence one easily finds solution

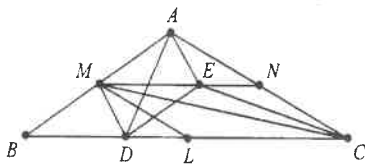
$$(x, y, z) = (9 \cdot 2011^m, 9 \cdot 2011^m, 43 \cdot 2011^m)$$

of equation $x^2 + y^2 + z^2 = 2011^n$ for odd $n = 2m + 1$. By writing $(2x^2 + z^2)^2 = (2x^2)^2 + (2xz)^2 + (z^2)^2$, one finds the solution $(x, y, z) = (2 \cdot 9^2, 2 \cdot 9 \cdot 43, 43^2) = (162, 774, 1849)$ of equation $x^2 + y^2 + z^2 = 2011^2$. This gives solution

$$(x, y, z) = (162 \cdot 2011^m, 774 \cdot 2011^m, 1849 \cdot 2011^m)$$

of equation $x^2 + y^2 + z^2 = 2011^n$ for even $n = 2m + 2$.

9.5. By assumption $MBDE$ is a parallelogram, hence $DE = BM = MA$ and $AMDE$ is a parallelogram too. Since $AD = BD$ and M is midpoint of AB , we have $DM \perp AB$, thus $AMDE$ is a rectangle. Hence



$\angle EAN = 90^\circ - \angle EAD = \angle MAD = \angle MBD$. Let L be a midpoint of side BC (figure). Since $\angle ANE = \angle BLM$ and $\angle EAN = \angle MBL$, triangles EAN, MBL are similar. Hence $\frac{EN}{ML} = \frac{AN}{BL}$ or $\frac{EN}{ML} = \frac{CN}{CL}$ because $AN = CN$ and $BL = CL$. Since $MNCL$ is a parallelogram $\angle MNC = \angle MLC$, now $\angle ENC = \angle MLC$ and $\frac{EN}{ML} = \frac{CN}{CL}$ implies triangles ECN, MCL

are similar. Hence $\angle ACE = \angle NCE = \angle LCM = \angle BCM$.

9.6. We will prove that, for any N there exists an index $n \geq N$ such that the term a_n is perfect square. Let $a_N = m^2 + k$ with $0 < k \leq 2m$. If $k \leq m$, then we have $a_{N+1} = m^2 + (m + k)$ and $a_{N+2} = m^2 + (2m + k) = (m + 1)^2 + (k - 1)$. By repeating this calculations, we will get

$$a_{N+4} = (m + 2)^2 + (k - 2), \dots, a_{N+2k-2} = (m + k - 1)^2 + 1, a_{N+2k} = (m + k)^2,$$

thus the term a_{N+2k} is perfect square. If $k > m$, then $a_{N+1} = m^2 + (m + k) = (m + 1)^2 + k'$ with $k' = k - m - 1 < m + 1$. By the same calculations as in the previous case, we get

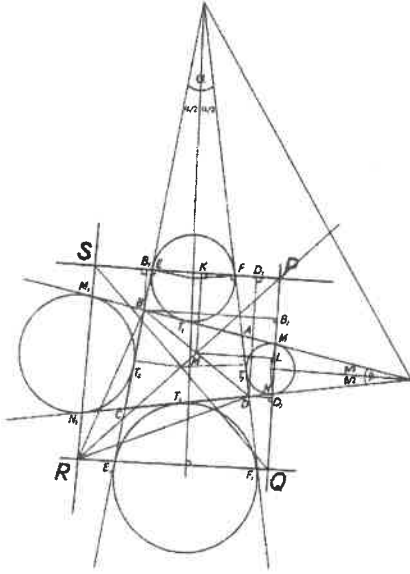
$$a_{N+3} = (m + 2)^2 + (k' - 1), \dots, a_{N+2k'-1} = (m + k')^2 + 1, a_{N+2k'+1} = (m + k' + 1)^2,$$

thus the term $a_{N+2k'+1}$ is desired perfect square.

10th grade

10.1 Let l_1 be the line which connects the tangency points other than in side AB of the excircle of convex quadrilateral $ABCD$. l_2, l_3 and l_4 are the lines similarly determined by the excircles of BC, CD and DA respectively. Let $l_1 \cap l_4 = P, l_2 \cap l_1 = S, l_2 \cap l_3 = R$ and $l_3 \cap l_4 = Q$. Prove that the line PR goes through the midpoint of BD . (U. Batzorig)

Solution:



Since BB_1D_1D a trapeze, then

$$KM = \frac{BB_1 + DD_1}{2} = \frac{BE \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + FD \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2} = \frac{BE + FD}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{BT_1 + T_1A + AD}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{BA + AD}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Similarly, BB_2D_2D is also a trapeze, so $ML = \frac{BB_2 + DD_2}{2} = \frac{BM \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + DN \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2} = \frac{BM + DN}{2} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{BA + AT_2 + T_2D}{2} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{BA + AD}{2} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right).$

Hence we can see that $\frac{KM}{ML} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)} \quad (1).$

The bisector of the angle α is perpendicular to both lines SP and RQ , hence we see $SP \parallel RQ$. Similarly, since $SR \parallel PQ$, the quadrilateral $PQRS$ turns out to be a parallelogram.

Let d_1 be the distance between PS and RQ . After some computation we find

$$d_1 = \frac{BT_1 + BC + CT_3 + T_3D + DA + AT_1}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{AB + BC + CD + DA}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

Let d_2 be the distance between the lines SR and PQ . Also we find

$$d_2 = \frac{AT_2 + AB + BT_4 + T_2D + DC + CT_4}{2} \cos \frac{\beta}{2} = \frac{AB + BC + CD + DA}{2} \cos \frac{\beta}{2}. \text{ These two equalities give us}$$

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)} \quad (2).$$

From (1) and (2) it is easily seen that $\frac{d_1}{d_2} = \frac{KM}{KL}$ which in turn means that point M lies on PR .

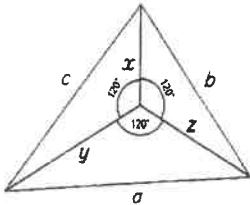
10.2 Let x, y and z be positive real numbers such that $5 \cdot \min\{x, y, z\} \geq x + y + z$. Prove that

$$\frac{1}{(x^2+xy+y^2)^2} + \frac{1}{(y^2+yz+z^2)^2} + \frac{1}{(z^2+zx+x^2)^2} \geq \frac{3}{(xy+yz+zx)^2}. \quad (\text{E. Enkhzaya})$$

Solution: Let us assume $\min\{x, y, z\} = x$ without losing the generality. Then $5x \geq x + y + z \Rightarrow$

$x \geq \frac{y+z}{4} \Rightarrow 2x + \frac{y+z}{2} \geq y + z > \frac{\sqrt{3}}{2}(y+z) \geq \sqrt{2yz + \left(\frac{y+z}{2}\right)^2} \Rightarrow yz < 2x + xy + xz$. We can write the last inequality as $(y^2 + yz + z^2) < (x^2 + xz + z^2) + (y^2 + xy + x^2)$. (*)

Let us draw the following figure



It is easy to see that
$$\begin{cases} a^2 = y^2 + yz + z^2 \\ b^2 = x^2 + xz + z^2 \\ c^2 = x^2 + xy + y^2 \end{cases} \text{ and } \max\{a, b, c\} = a. \text{ From (*) it follows that } a^2 < b^2 +$$

c^2 which means that the triangle in the figure is an acute one. We can see that $S = xz \frac{1}{2} \sin 120^\circ + xy \frac{1}{2} \sin 120^\circ + yz \frac{1}{2} \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + yz + zx)$ leaving for us adequate to show $\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} \geq \frac{9}{16S^2}$. (**) It is true that there exists a triangle with the sides a^2, b^2, c^2 because $a^2 < b^2 + c^2$. Let

A, B, C be positive real numbers such that
$$\begin{cases} a^2 = B + C \\ b^2 = C + A \\ c^2 = A + B \end{cases} \text{ Then } (**) \Leftrightarrow \frac{1}{(A+B)^2} + \frac{1}{(B+C)^2} + \frac{1}{(C+A)^2} \geq$$

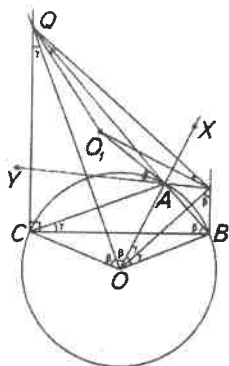
$\frac{9}{4(AB+BC+CA)}$. This last inequality was presented in the national Olympiad of Iran in 1996.

10.3 From three real number (a, b, c) we can get another three numbers either $(a+b, c-a, 2a)$, or $(4a+2b+c, 2b+c, 4a+2b+3c)$. Can we get $(47, -1549, 2011)$ from $(1, -2, 1)$ applying these two operations adequately many times. (Ts. Gerelt)

Solution: Let A be the first type of operation and B be the second type of operation. Since both these operations shall make integer from integer, the $2a$ after the first type of operation shall always be an even integer. So in order to get 2011 we should apply the second operation finally. However, as $(4a+2b+c)-(2b+c) \equiv 4a \equiv 0 \pmod{4}$, which contradicts to $47-1549 \not\equiv 0 \pmod{4}$. So we cannot get $(47, -1549, 2011)$.

10.4 Let O be the circumcenter of triangle ABC . A line perpendicular to BC through B meets the midperpendicular AB at P , and a line perpendicular to BC through C meets the midperpendicular of AC at Q . If O_1 is the circumcenter of OPQ prove that $\angle O_1AO = 90^\circ$. (M. Batbileg)

Solution:



Let $\angle ACB = \gamma$ and $\angle ABC = \beta$. It is easy to see that $\angle AOC = 2\beta$, $\angle AOB = 2\gamma$, and $OA = OB = OC$. Since OQ is the altitude of an isosceles triangle, then it is also its bisector. From this we conclude $\angle QOA = \beta$ and similarly $\angle POA = \gamma$. O_1 is the circumcenter of PQO , so we can see $\angle QO_1P = 2\angle QOP = 2(\gamma + \beta)$ (*)

$\angle QCA = \angle QCB - \angle ACB = 90^\circ - \gamma$. This means $\angle CQO = \angle OQA = \gamma$ and similarly $\angle APO = \beta$. Suppose $x \in [OA]$, and $A \in [XO]$. Then it is clear that $\angle QAX = \beta + \gamma = \angle XAP$, that is $\angle QAP = 2(\gamma + \beta)$ (**)

From (*) and (**) we conclude that Q, A, O_1 and P belong to a circle.

Let Y be a point such that $Y \in [PA]$ and $A \in [PY]$. Then $\angle QAX = \angle XAP = \angle OAY$ (***). On the other hand the points Q, A, O_1 and P lie in same circle from which follows Therefore $\angle O_1AY = \angle O_1QP$ and $\angle QAO_1 = \angle O_1PQ$. And $QO_1 = O_1P$ means that $\angle QAO_1 = \angle O_1AY$ that is O_1A is a bisector of triangle $\angle QAY$. Considering (***) we now conclude $\angle O_1AO = 90^\circ$, as desired.

10.5 Find all functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that for any $x, y \in \mathbb{R}$, the equality $f(2f(x) + f(y)) = 2x + f(y)$ takes place. (U. Batzorig)

Solution: $x = y = 0 \Rightarrow f(3f(0)) = f(0)$ (1)
 $x = y \Rightarrow f(3f(x)) = f(x)$

Let substitute x with $3f(x)$ then $f(3f(3f(x))) = 6f(x) + f(3f(x)) = 6f(x) + 2x + f(x) = 7f(x) + 2x$, and $f(3f(2x + f(x))) = f(6x + 3f(x)) = 7f(x) + 2x$ (2)

If we substitutes $x = 0$ in (2), we see $f(3f(0)) = 7f(0) \stackrel{(1)}{=} f(0) \Rightarrow f(0) = 0$.

If $x = 0$, then $f(f(y)) = f(y)$ (3).

Note $f(f(2f(x)) + f(y)) = f(2x + f(y))$, if we apply (3) here, we obtain $2f(x) + f(y) = f(2x + f(y))$ (4). From (3) we can show that $2f(x) + f(y) \Rightarrow 2f(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x$.

10.6 Prove that for any $l \in \mathbb{N}$ there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $n^n + 47 \equiv 0 \pmod{2^l}$. (T. Baasanjav)

Solution: Let us prove the claim by induction

If $l = 1$, it is obvious that $1^1 + 47 \equiv 0 \pmod{2^1}$

Assume if $l = k$, and the claim is true. Now let us show that it is also true for $l = k + 1$. Denote the number which satisfies the claim when $l = k$ by n_1 .

We should show that when $n_1^{n_1} + 47 \equiv 0 \pmod{2^l}$ and $n_1^{n_1} \not\equiv 0 \pmod{2^{l+1}}$, that is $n_1^{n_1} + 47 = 2^l(2s + 1)$ for a certain $s \in \mathbb{N}$.

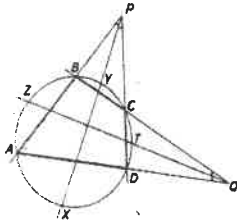
$(n_1 + 2^k)^{n_1+2^k} + 47 \equiv (n_1 + 2^k)^{n_1} + 47 \equiv n_1^{n_1} + n_1 n_1^{n_1-1} 2^k + 47 \equiv 2^k(2s + 1) + n_1^{n_1} 2^k \equiv 2^k(2s + 1 + n_1^{n_1}) \equiv 0 \pmod{2^{k+1}}$. It gives us the number $n_1 + 2^k$ which satisfies our claim.

11th grade

11.1 Convex quadrilateral $ABCD$ is inscribed in a circle and circumscribed by another circle. Let I be the incenter of $ABCD$ and let X, R, Z and T be the incenters of triangles ABI , BCI , CDI and DAI respectively. Prove that $XZ \perp RT$. (G. Batzaya, U. Batzorig)

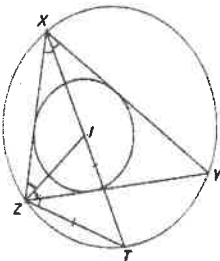
Solution:

Lemma 1. If $AB \cap CD = P$ and $BC \cap AD = Q$ for inscribed quadrilateral $ABCD$, then the internal bisectors of the angles at vertices P and Q are perpendicular to each other.

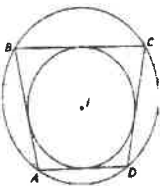


Let the bisector of angle P meet the circle at points X , and R and the bisector of angle Q at Z and T . Then we add equations $\overrightarrow{AX} - \overrightarrow{BR} = \overrightarrow{DX} - \overrightarrow{CR}$ and $\overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{DR} = \overrightarrow{BZ} - \overrightarrow{CT}$ to obtain $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{AZ} + \overrightarrow{CR} + \overrightarrow{CT} = \overrightarrow{DX} + \overrightarrow{BZ} + \overrightarrow{BR} + \overrightarrow{DT} \Rightarrow \overrightarrow{XZ} + \overrightarrow{RT} = \overrightarrow{XT} + \overrightarrow{ZR}$ that is the proof.

Lemma 2. Let I be the incenter of triangle XYZ (tangent to YZ). Then the incenter of ZIY lies on the bisector of $\angle YXZ$.



Let us denote as $\omega(XYZ) \cap XI = T$. Now we will prove that I is the incenter of ZIY . For this purpose it is sufficient to prove that $TZ = TI$. $\angle ZIT \Rightarrow \angle IZY + \angle YZT = \angle IZX + \angle YXZ = \angle IZX + \angle IXZ = \angle ZIT$. The proof for the excircle is similar.



Now we continue with our problem. According to lemma 2 the incenter of IBC , IAD lies on the bisector of angle P . Similarly the incenter of IAB and ICD lie on the bisector of angle Q . Hence by lemma 1, our statement follows.

11.2 $2n^2 + 2n$ cells of $2n + 1 \times 2n + 1$ table were colored in red. At least how many moves should the castle make in order to visit all red cells when it is located in any of the cells? The castle can move only to one of the neighboring cells horizontally or vertically. (Ts. Gerelt)

Solution: Let us color $(2n^2 + 2n)$ cells in a following way.

(PS: In case when the 2 cells are in an edge, that is coinciding with either of A and B, we should change its one of neighboring cells as A or B)

11.3 Let $a_1, \dots, a_n$ be positive rational numbers such that $a_1^m + \dots + a_n^m \in \mathbb{N}$ for $\forall m \in \mathbb{N}$. Prove that $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. (G. Batzaya)

Solution: Let $a_i = \frac{r_i}{t_i}$, $r_i, t_i \in \mathbb{Z}$, $(r_i, t_i) = 1$, $i = \overline{1, n}$ and $S_m = a_1^m + \dots + a_n^m$, $m \in \mathbb{N}$.

Assume contrary as $t_1 \dots t_n > 1$. Then we can take as $p | t_1 \dots t_n$, $p \in P$, $\text{ord}_p(t_i) = l_i$, $l_1 = \dots = l_j \geq l_{j+1} \geq \dots \geq l_n$.

Let us denote as $M = [t_1, \dots, t_n] = p^{l_1} N$, $(p, N) = 1$ and $T_m = (a_1 p^{l_1} N)^m + \dots + (a_n p^{l_1} N)^m$.

Hence $p^{m l_1} | T_m \Rightarrow m = \varphi(p^j) = p^j - p^{j-1}$. Then for $1 \leq r \leq j$ we have $(a_r p^{l_1} N)^m \equiv (a_r p^{l_1} N)^{\varphi(p^j)} \equiv 1 \pmod{p^j}$ and for $r > j$ we have $p | a_r p^{l_1} N$ and $p \geq 2$, $j \geq 1$. Hence follows $m = p^j - p^{j-1} \geq j \Rightarrow (a_r p^{l_1} N)^m \equiv 0 \pmod{p^j} \Rightarrow T_m = \sum_{r=1}^n (a_r p^{l_1} N)^m \equiv j \not\equiv 0 \pmod{p^j}$ that is a contradiction

11.4 Find all $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that $f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y$ (1) for any real x, y

(B. Luvsanbyamba)

Solution: We substitute $x = 0$ in (1) and get $f(f(0)^2 + f(y)) = y$ which means that f can take any real value (surjective).

If $f(a) = f(b)$ then $a = f(f(0)^2 + f(a)) = f(f(0)^2 + f(b)) = b$ which means f is injective. So follows f is bijective.

Let t be the value for which $f(t) = 0$.

Substituting $x = y = t$ in (1) gives $f(0) = t$

$x = y = 0$ in (1) gives $f(t^2 + t) = 0$

Since $f(t^2 + t) = f(t)$ and f is injective, then $t^2 + t = t \Rightarrow t = 0$.

Then $x = 0$ in (1) gives $f(f(y)) = y$ (2)

$y = 0$ in (1) gives $f(f(x)^2) = xf(x)$ (3)

Substituting $x \rightarrow f(x)$ in (3) we get $f(f(f(x))^2) = f(x)f(f(x))$ and from applying (2) follows

$f(x^2) = xf(x)$. Since f is bijective it means $f(x^2) = x^2$

Assume that there exist $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ such that $f(a) = a$ and $f(b) = -b$. Substituting $x = a, y = b$ in (1) we get $f(a^2 - b) = a^2 + b$ which contradicts to $f(x^2) = x^2 - y$. Hence the first solution is

$f(x) = x$ and the second solution is $f(x) = -x$.

11.5 Find all $n \in \mathbb{N}$ such that there exist some permutation $(a_1, \dots, a_n)$ of $\{0, 1, \dots, n-1\}$ with the property that the residues of the numbers $a_1, a_1 a_2, \dots, a_1 a_2 \dots a_n$ modulo n are all different. (G. Batzaya)

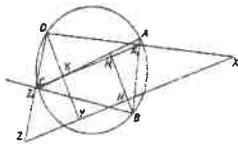
Solution: Let $n > 4$. $a_n = 0$ is obvious (Because if $a_k = 0, k < n$ then $a_1 \dots a_k \equiv a_1 \dots a_{k+1} \equiv 0 \pmod{n}$). Now we consider that n is not prime. Since $n > 4$ it follows that $(n-1)! = a_1 a_2 \dots a_{n-1} \equiv 0 \pmod{n}$. (Because if $n = pq, 1 < p < q < n$, then $n = pq \mid (n-1)!$, and if $n = p^2$ then $p > 2$ and since $2p \leq n-1$ then $n = p^2 \mid (n-1)! \Rightarrow (n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$.)

So we conclude that $n = p$ is prime number. Now we will arrange a permutation $(a_1, \dots, a_p)$ which fulfills the condition. We know that $(k-1)x \equiv k \pmod{p}$ has a unique solution since $(k-1, p) = 1$ when $a_1 = 1, p > k > 1$. Let us denote the solution by a_k . That is $a_k = 1, 1 < k: (k-1)a_k \equiv k \pmod{p}$ (*). Now we will show that all a_i are different. When $1 < k$ it is obvious that $a_1 \neq a_k$. If $2 \leq k \leq l \leq p-1, a_k = a_l = a$ then $a_l(l-1)k = a(kl-k) \equiv kl \pmod{p}$ and $a_k(k-1)l = a(kl-l) \equiv kl \pmod{p}$ which means $a(k-l) \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow k = l$.

Answer is: $n = 1, (a_1) = (0); n = 4, (a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 3, 2, 0)$.

11.6 A line meets the segments AB and AC of triangle ABC at M and N , and the line BC at P respectively. Let x, y, z and T be the midpoints of the segments NM, MB, BC and CN respectively. Prove that orthocenters of triangles AMN, AYT, PBM and PXZ are collinear. (E. Enkhzaya)

Solution: Lemma: Let $ABCD$ be a inscribed quadrilateral and let x, y and z be the points symmetric to D in respect of the lines AB, BC and CA . x, y, z and the orthocenter of ABC are collinear. This line is called Steiner line of P with respect to ABC .



Solution: Let denote $DX \cap AB = X', DY \cap BC = Y', DZ \cap CA = Z'$. x', y' and z' lie on the Simson's line of $\triangle ABC \Rightarrow x, y$, and z are collinear. Let us denote $\angle ABC = b, \angle BAC = a, \angle BCA = c$ and $DH \cap (X'Y'Z') = H'$. Our aim is to show $DH' = HH'$. If $SZ' DX' = SZ' X'H \Rightarrow DH' = HH'$

Denote $\angle CBD = \alpha$. Let us make some computations as follow:

$$2SZ' DX' = DZ' \cdot DX' \cdot \sin \angle Z' DX' = DB \cdot \sin \alpha \cdot DB \cdot \sin(b - \alpha) \cdot \sin b$$

$$\begin{aligned}
2SZ'X'H &= 2 \cdot SZ'X'B - 2 \cdot SHBX' - 2 \cdot SHBZ' \\
&= BX' \cdot BZ' \cdot \sin b - BH \cdot BX' \cdot \sin(90 - a) - BH \cdot BZ' \cdot \sin(90 - c) \\
&= BD \cdot \cos(b - \alpha) \cdot BD \cdot \cos \alpha \cdot \sin b - BH \cdot BD \cdot \cos(b - \alpha) \cdot \sin(90 - a) - BH \cdot BD \\
&\quad \cdot \cos \alpha \cdot \sin(90 - c) =
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{BH}{AB} &= \frac{\sin(90 - b)}{\sin(b + a)} \\ \frac{AB}{BD} &= \frac{\sin c}{\sin(a + \alpha)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{BH}{BD} = \frac{\sin(90 - b)}{\sin(a + \alpha)} \Rightarrow BH = BD \cdot \frac{\sin(90 - b)}{\sin(a + \alpha)} \Rightarrow$$

$$2 \cdot SZ'HX' = BD^2 \cdot \cos(b - \alpha) \cdot \cos \alpha \sin b - BD^2 \cdot \frac{\cos b \cdot \cos(b - \alpha) \cdot \cos \alpha}{\sin(a + \alpha)} - BD^2 \cdot \frac{\cos b \cdot \cos c \cdot \cos \alpha}{\sin(a + \alpha)}$$

$$2 \cdot SZ'HX' = BD^2 \cdot \sin \alpha \sin(b - \alpha) \sin b \Rightarrow$$

$$\sin \alpha \sin(b - \alpha) \sin b = \cos(b - \alpha) \cdot \cos \alpha \cdot \sin b - \frac{\cos b \cdot \cos \alpha \cdot \cos(b - \alpha) + \cos b \cdot \cos c \cdot \cos \alpha}{\sin(a + \alpha)}$$

$$\sin b (\cos(b - \alpha) \cos \alpha - \sin(b - \alpha) \sin \alpha) = \frac{\cos b (\cos \alpha \cos(b - \alpha) + \cos c \cdot \cos \alpha)}{\sin(a + \alpha)} \Rightarrow$$

$$\sin b \cos b = \frac{\cos b (\cos \alpha \cos(b - \alpha) + \cos c \cdot \cos \alpha)}{\sin(a + \alpha)} \Rightarrow$$

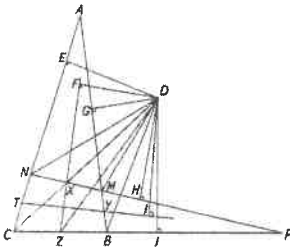
It is sufficient to show $\sin b \sin(a + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos(b - \alpha) + \cos c \cdot \cos \alpha$.

Again let us make some computations.

$$2 \cdot \sin b \cdot \sin(a + \alpha) = \cos(b - a - \alpha) - \cos(a + b + \alpha)$$

$$2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos(b - \alpha) + 2 \cos c \cos \alpha = \cos(a + b - \alpha) + \cos(a + \alpha - b) + \cos(c + \alpha) + \cos(c - \alpha) =$$

$$\begin{aligned}
&\cos(a + b - \alpha) + \cos(b - a - \alpha) + (-\cos(a + b - \alpha)) + (-\cos(a + b + \alpha)) = \cos(b - a - \alpha) - \\
&\cos(a + b + \alpha) = 2 \cdot \cos b \cdot \sin(a + \alpha). \text{ Lemma is proved.}
\end{aligned}$$



$$\omega(ABC) \cap \omega(PCM) = \{C; D\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle ACD = \angle ABD \\ \angle ACD = \angle NCD \\ \angle NCD = \angle NPD \end{array} \right\} \Rightarrow \angle ABD = \angle NPD \Rightarrow MDPB \text{ is an inscribed quadrilateral. Similarly } MNAD \text{ is also}$$

an inscribed quadrilateral. $\angle NDM = \angle NAM = \angle CAB \angle CDB$

$$\left. \begin{array}{l} \angle NDM = \angle CDB \\ \angle DNM = \angle DCB \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle NDM \sim \triangle CDB \Rightarrow \frac{DM}{DB} = \frac{MN}{BC} = \frac{MX}{BZ} \quad \left(\begin{array}{l} MN = 2MX \\ BC = 2BZ \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{MD}{BD} = \frac{MX}{BZ} \\ \angle XMD = \angle ZBD \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle XDM \sim \triangle ZBD \Rightarrow \angle XDM = \angle ZDB \Rightarrow \angle XDC = \angle MDB$$

$\angle MDB = \angle MPB = \angle XPZ \Rightarrow \angle XPZ = \angle XDZ \Rightarrow ZXDP$ is inscribed and similarly TADY is also inscribed.

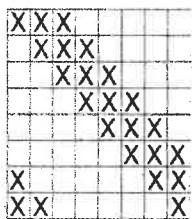
Let E, F, G, H, I and J be the bases of the perpendicular lines through D to AC, XZ, AB, NP, TY and CP. Since $l(E, G, H)$, $l(E, G, I)$, $l(E, H, J)$ and $l(F, H, J)$ are the Steiner lines of $\triangle AMN$, $\triangle TAY$, $\triangle NPC$

and $\triangle XZP$ respectively. Hence it follows that the orthocenters of the given triangles belong to line $l(E, F, G, H, I, J)$.

Secondary school teachers

T1-1 Each cell of 2011×2011 table is filled with an integer so that each row and column has at most 47 different numbers. How many different numbers can be in the table? (U. Batzorig)

Solution: If we paint the cells shaded on the figure with 46 different colors, it will total $2011 \cdot 46$ colors.



And we paint with another color different from them, there will be totally $2011 \cdot 46 + 1$ colors. If there are $2011 \cdot 46 + 2$ colors then by the pigeonhole principle there are two rows which contain 47 different colors respectively. Since the cells (not in these two rows) contain at most 45 different colors, there will be not more than 45 different colors. And $2011 \cdot 45 + 47 \cdot 2 < 2011 \cdot 46 + 2$ would mean a contradiction.

T1-2 $\{a_i\}$ and $\{b_i\}$ are an arithmetic and geometric progression with $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ and $a_{10} = b_3$. Find the number j for which $b_{47} = a_j$. (D. Ganzorig)

Solution: $a_1 + 9d = aq^2 \Rightarrow q = 8$. $a_1(q-1) = d$; $a_1(q-1)(q+1) = a_1(q^2-1) = 9d$.
 $a_1q^{46} = a_1 + a_1(q^{46}-1) = a_1 + a_1(q-1)(q^{45} + \dots + 1)$; $a_1(q-1) = d \Rightarrow j = q^{45} + q^{44} + \dots + q + 1$ is the number of the term we desired.

T1-3 Each pair of 24 cities in a circle will be connected with a road. (Any such road will be constructed by one of 24 selected companies) It is possible to have a planning so that for any company there are some three cities whose three roads will be constructed by that company? (Ch. Gantimur)

Solution: We will prove that it is not possible to paint $2n$ points in a circle with n different colors so that for any three colors there will be a triangle of which the sides are painted with the three colors. In the contrary, let us assume such painting is possible. We denote the number of edges of a same color, say red as k . Then the number of triangles with at least one red side will not be less than $\binom{2}{2n-1}$.

From the fact that any red edge can be a side of $2n-2$ triangles, we conclude that $k \geq \frac{\binom{2}{2n-2}}{\frac{(2n-1)(2n-2)}{2(2n-2)}}$. It follows that $k \geq n$ and the number of the edges of each color will be $\binom{2}{2n}$, and $\binom{2}{2n} \geq 2nk$, $2nk \geq 2n^2$. However, since $\binom{2}{2n} = \frac{2n(2n-1)}{2}$ and $\frac{2n(2n-1)}{2} \geq 2n^2 \Leftrightarrow 2n-1 \geq 2n$ that is contradiction.

T1-4 Prove that there is a number which ends with 47 and is divided by 2011. (B. Bayarjargal)

Solution: If one of the 2011 numbers such as 47, 4747, 474747, ..., 4747...47 is divided by 2011 we have the proof. If none of the numbers is divisible by 2011 then by the pigeonhole principle, there will be two numbers equal by modulo 2011. As $(10, 2011) = 1$, the difference of the two numbers is divisible by 2011.

T1-5 Horse A runs a circle for a 1 minute, while horse B runs 3.47 circle and horse C runs $1 < N < 3.47$ circle. The race is finished when the three horses are at a same point (it can be other than the starting point). If the horses outran each other 47 times (the start and ends are not included) then find the number of different value of N . (D. Ganzorig)

Solution: In comparison with horse A, entire circles were made by horse B and horse C.

Assume that horse B and C made n and m respectively in comparison with the horse A. In comparison with the horse A, horse B runs $3.47 \cdot 1 = 2.47$ and so he completed the race in $n/2.47$ minutes. Similarly horse C completed the race in $m/(n-1)$ minutes.

$\frac{n}{2.47} = \frac{m}{L-1} \Rightarrow L = 2.47 \frac{m}{n} + 1$. A bijection was set between L and $\frac{m}{n}$. It should be that $(m, n) = k$, then they should have gone $\frac{n}{k}$, $\frac{m}{k}$ circles when they first meet horse A respectively. Horse B made $n-m$ circles in comparison with horse C and outran him $n-m-1$ times. Similarly horse B outran horse A $n-1$ times and horse C outran horse A $m-1$ times. Therefore $47 = (n-1) + (m-1) + (n-m-1) = 2n-3 \Rightarrow n = 25$. Since $m < n$ and $(m, n) = 1$, then $\varphi(25) = 20 = m$. (D. Ganzorig)

T1-6 Find all natural solutions of $x^{y^2} = y^x$. (D. Batnasan)

Solution: $x = y^{x/y^2}$. Let us assume $\frac{x}{y^2} = \frac{k}{l}$, $(k, l) = 1$. Then $x = y^{k/l}$, $(y^{k/l})^{y^2} = y^{y^{k/l}}$; $y^{ky^2/l} = y^{y^{k/l}}$ (1)

If $y = 1$ then $x = 1$. Or if $y > 1$ then (1) $\Rightarrow \frac{k}{l} y^2 = y^{\frac{k}{l}} \Rightarrow \frac{k}{l} = y^{\frac{k}{l}-2}$ (2).

Case 1: if $k - 2l \geq 0$ then (2) $\Rightarrow \frac{k}{l} \in \mathbb{Z} \Rightarrow l = 1$. In other words:

$x = y^k$, $k = y^{k-2}$ (3); $y^{k-2} \geq 2^{k-2} > k$ ($k > 5$) $\Rightarrow$ (3) will be true only when $k > 5$. So $k = 4, y = 2, x = 16$; $k = 3, y = 3, x = 27$.

Case 2: if $k - 2l < 0$. (2) $\Rightarrow \frac{l}{k} = y^{2-\frac{k}{l}}$, $2 - \frac{k}{l} > 0 \Rightarrow k = 1, y = x^l$; $x^{x^{2l}} = x^{x^l}$, $x^{2l-1} = l \Rightarrow l \geq 2^{2l-1}$ will not be true when $l \geq 2$. So the solutions are: $\{(1,1); (16,2); (27,5)\}$.

T2-1 $n_1, n_2, n_3, \dots$ is a sequence of positive integers with the property $n_{k+1} > n_k$. Show that it is the sequence $1, 2, 3, 4, \dots$ (D. Batnasan)

Solution: If n_k is an increasing sequence, then $n_{k+1} > n_k$ will ensure $k+1 > n_k$, while just positive integers will ensure $n_k \geq k$. It means $n_k = k$.

Now it is sufficient to see monotonicity. Indeed term of the form n_{k+1} has a term, namely n_k , smaller than it. This means n_1 is strictly smaller than all the other terms.

This fact about n_1 can be extended. Namely, the new sequence $n_2 - 1, n_3 - 1, n_4 - 1, \dots$ has exactly the same properties as the original one. The terms are positive integers since, again $n_{k+1} > n_k \geq 1$.

Also $n_{(n_{k+1}-1)+1} - 1 < n_{(k+1)+1} - 1$ since this simply says that $n_{k+2} > n_{n_{k+1}}$. Thus, $n_2 - 1$ is the unique smallest of these, which is to say n_2 is smaller than $n_3, n_4, \dots$

Repeating this argument does indeed give the full monotonicity property that we required, and the proof is complete.

T2-2 Find a point D on the side BC , for which sum of the areas of the inscribed circles of ABD and ACD , reaches maximum value. (R. Enkhbat)

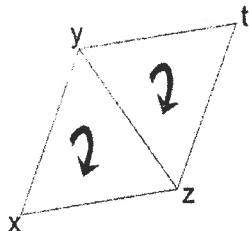
Solution: Let denote inscribed circles of ABC, ABM, AMC as $\omega = C(I, r)$, $\omega_1 = C(I_1, r_1)$, $\omega_2 = C(I_2, r_2)$ respectively and the area of triangle ABC by S , the height from the vertex A by h .

Lemma. $pr^2 + ar_1r_2 = pr(r_1 + r_2)$.

Thus, in case of $b + c < \alpha\sqrt{2} \cdot r_1^2 + r_2^2$ our sum gets its maximum value iff $r_1 = r_2$, and in other cases it gets the maximum value iff $r_1 = 0$ or $r_2 = 0$.

T2-3 All vertices of polyhedron with triangle faces, are painted with red, blue and black colors. Prove that number of faces with differently colored vertices is even. (G. Batsaya)

Solution:



Let label each face with same orientation. Let denote the set of faces of polyhedron by S and the face with vertices x, y, z by $\{x, y, z\}$. For the face $a = \{x, y, z\}$ consider function $T_a = (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$. We can map each coloring as points (vertices) labeled by $-1, 0$ and 1 . Then we get $T_a = \begin{cases} \pm 6, & \{x, y, z\} = \{-1, 0, 1\} \\ 0, & |\{x, y, z\}| \leq 2 \end{cases} \quad (*)$

Each edge yz is counted twice and it gives $(y - z)^3 + (z - y)^3$ for the sum $\sum_{a \in S} T_a$. Therefore we get $\sum_{a \in S} T_a = 0$. From $(*)$ follows $0 = \sum_{a \in S} T_a = \sum \pm 6$. The proof is complete

T2-4 Find all natural n satisfying $n | 9^{n-1} + 3^{n-1} + 1$. (G. Batzaya)

Solution: $n = 1$ is obvious. Suppose $1 < p_1 p_2 \dots p_l$. Let denote $d = \text{ord}_3(n - 1) \geq 0$. Then $\forall p_i: p_i | 3^{3(n-1)} - 1, p_i | 3^{p_i-1} - 1$ implies $p_i | 3^{(3(n-1), p_i-1)} - 1$. If $\text{ord}_3(p_i - 1) \leq d$ then, $(3(n-1), p_i - 1) | n - 1$ implies $p_i | 3^{n-1} - 1$, therefore we get $3^{2(n-1)} + 3^{n-1} + 1 \equiv 3 \equiv 0 \pmod{p_i}$, consequently it implies $p_i = 3$, which is contradiction. The case $\text{ord}_3(p_i - 1) > d$ also leads contradiction: $n = p_1 \dots p_l \equiv 1 \pmod{3^{d+1}}$ implies $d = \text{ord}_3(n - 1) > d$.

T2-5 For any permutation of the set $\{1, 2, \dots, n\}$, if consequent elements x, y satisfies $x < y$ we say this pair as "order decreasing". Find a number all permutations, which has exactly 2 "order increasing" pair. (U. Batzorig)

Solution: Let denote our number by A_n and the number of permutations exactly one "order increasing" pair by B_n .

There is an unique permutation not containing "order increasing" pair.

Permutations counted to A_n have a form $\{\dots, x, y, \dots, z, t, \dots\}, x < y, z < t$. (Here can be $y = z$.)

We can add $n + 1$ before these pairs, or between x and y , or between z and t .

Permutations counted to B_n have a form $\{\dots, x, y, \dots\}, x < y$.

We can add $n+1$ before these pairs, or between x and y , or between z and t . Likewise we can add $n+1$ before or between x and y .

Therefore we get $A_{n+1} = 3A_n + (n-1)B_n$. We can do same technique to B_n and get $B_{n+1} = 2B_n + n$. It is obvious $A_2 = 0$ and $B_2 = 0$. Therefore we get $B_{n+1} = 2^n - (n+1)$. Hence, $A_{n+1} = 3A_n + (n-1)(2^n - (n+1)) = 3A_n + (n-1)2^n - (n^2 - 1)$. Calculating this recurrence we get $A_n = 3^n - (n+1)2^n + \frac{n(n+1)}{2}$.

T2-6 Prove that the equation $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 2011$ has infinitely many integer solutions (x, y, z, t) .

proposed by B.Battsengel

Solution: The given equation has solution $(x, y, z, t) = (13, -5, -5, 4)$. Now we look for solutions of kind $(x, y, z, t) = (13 + a, -5 - a, -5 - b, 4 + b)$ with some integer a, b . Substituting this into the equation we get $b^2 + 9b = 8x^2 + 144x$ or $(2b+9)^2 - 2 \cdot (4a+36)^2 = 9^2 - 2 \cdot 36^2$. So we need to prove that the equation $u^2 - 2 \cdot v^2 = 9^2 - 2 \cdot 36^2$ has infinitely many solutions such that v is divisible by 4. By the theory of Pell equations this equation has infinitely many number of solutions and the solutions (u, v) such that $4|v$ is exhausted by

$$u + v\sqrt{2} = (9 + 36\sqrt{2})(17 + 12\sqrt{2})^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

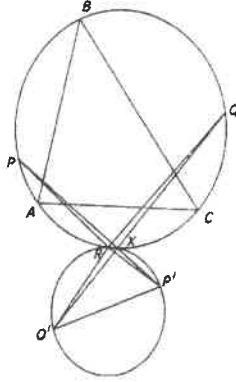
For example, solution $(u, v) = (1017, 720)$ gives us $(a, b) = (171, 504)$ and the solution $(x, y, z, t) = (184, -176, -509, 508)$ of given equation.

Mongolian IMO team selection tests

Test 1. (2011, May 19) G. BATZAYA

TST1.1. Points P, Q and X are chosen on the arcs $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$ of the circumcircle ω of triangle ABC respectively. Let P' and Q' be points on the half-lines $[PX)$ and $[QX)$ such that $PB + PA = PP'$ and $QB + QC = QQ'$. Suppose that the circumcircle of triangle $XP'Q'$ meets ω at point R . Prove that R is a constant point that doesn't depend on the location of X on arc $\widehat{CA}$.

Solution:



$$\Delta XPR = \Delta XQR$$

$$\Rightarrow \Delta PRP' \sim \Delta QRR' \Rightarrow \frac{PR}{QR} = \frac{PP'}{QQ'} = \frac{PA+PB}{QB+QC} = \text{const}$$

$$\Delta XPR = \Delta XQR$$

Now it is sufficient for us to prove that $\frac{PR}{QR} = \frac{PR'}{QR'}$ for the points R and R' of arc $\widehat{PQ}$

$$\text{Since } \frac{PR}{QR} = \frac{PR'}{QR'} \text{ and } \Delta PRQ = \Delta PR'Q \Rightarrow \Delta PRQ \sim \Delta PR'Q \Rightarrow R = R'$$

TST1.2. Find all natural pairwise prime pairs (a, n) such that $a^{\varphi(n)} - 1 \mid 2^{n(a^{\varphi(n)} - 1) - 1} + 1$.

Solution: If we denote as $1 < a^{\varphi(n)} - 1 = m$ then it gives us $n \mid m$

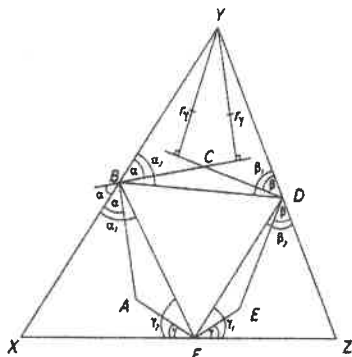
Since $((a, n) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1(n))$, and $m \mid 2^{mn-1} + 1$ means m is odd, let us denote $\text{ord}_2(nm - 1)$

as $d \geq 0$. Then for $\forall p \mid m$, takes place $\begin{cases} 2^{2(nm-1)} \equiv 1(p) \\ 2^{p-1} \equiv 1(p) \end{cases}$, that is $2^{(2mn-1)p-1} \equiv 1(\text{mod } p)$

In other words If $\text{ord}_2(nm - 1) = \alpha \geq \alpha + 1$, that is also a contradiction. Hence it gives

$$a^{\varphi(n)} - 1 = 1 \Leftrightarrow a = 2, \varphi(n) = 1 \Leftrightarrow a = 2, n = 1 \text{ or } 2 \Rightarrow (a, n) = (2, 1)$$

TST1.3. Let l_A, l_C , and l_E be the bisectors of the internal angles at vertices A, C , and E , and G_B, G_D and G_F be the bisectors of the exterior angles at vertices B, D , and F , respectively of convex hexagon $ABCDEF$. If the lines l_A, G_B, G_F and the lines l_C, G_B, G_D , and l_E, G_D, G_F are concurrent respectively prove that the lines AD, BE , and CF also concurrent.



Solution: Let us assume the lines G_B, G_D and G_F meet at points X, Y , and Z respectively. (See the notation in figure).

Since l_A, G_B, G_F are concurrent, we conclude that the distances from X to AF, AB are equal.

Let us denote this distance by Ω_X . (Ω_Y and Ω_Z are similarly determined).

We will show the statement by proving the equivalent statement

$$(*) \frac{\sin \angle FBE}{\sin \angle DBE} \frac{\sin \angle BDA}{\sin \angle FDA} \frac{\sin \angle DFC}{\sin \angle BFC} = 1$$

We see that

$$\frac{\sin \angle FBE}{\sin \angle DBE} = \frac{DE \sin(180 - (\gamma_2 + \gamma))}{FE \sin(180 - (\beta_2 + \beta))} = \frac{\sin(\gamma_1 - \gamma) \sin(\gamma_2 + \gamma)}{\sin(\beta_2 - \beta) \sin(\beta_1 + \beta)}$$

Making similar computations gives us

$$\frac{\sin(\gamma_1 - \gamma) \sin(\gamma_2 + \gamma)}{\sin(\beta_2 - \beta) \sin(\beta_1 + \beta)} = \frac{\sin^2(\gamma_1) - \sin^2(\gamma)}{\sin^2(\beta_2) - \sin^2(\beta)} = \frac{\sin^2(\gamma_1) - (\frac{r_2}{FZ})^2}{\sin^2(\beta_2) - (\frac{r_2}{DZ})^2} = (\frac{DZ}{FZ})^2$$

$$\text{Here } FZ \sin(\gamma_1) = DZ \sin(\beta_2) \Rightarrow$$

$$(*) = (\frac{DZ}{FZ})^2 (\frac{FX}{BX})^2 (\frac{BY}{DY})^2 = (\frac{XF DZ YB}{FZ DY BX})^2 = (\frac{r_x r_z r_y}{r_z r_y r_x})^2 = 1 \text{ which proves our statement.}$$

Test 2 (2011, May 22)

TST2.1. Given an odd positive integer m . Prove that, there exist an infinitely many positive integer n such that

$$\frac{2^n - 1}{mn + 1}$$

is an integer.

proposed by B.Battsengel

TST2.2. Incircle of the triangle ABC touches sides BC, CA, AB at points D, E, F respectively. The line EF intersects with line BC at P and with the middle line parallel to side BC at Q . The median QM of triangle DQP intersects with the incircle at R . Prove that, $\angle BRC = 90^\circ$.

proposed by B.Battsengel

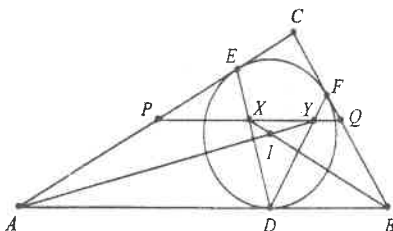
TST2.3. Given an operation that transforms a sequence $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$ to sequence $(a_2, a_3, \dots, a_n, a_n \cdot a_1)$ for $n \geq 2$. Suppose that, the sequence $(\underbrace{-1, -1, \dots, -1}_n)$ with all n entries equal to -1 transforms into itself by k number of operations. Prove that, the sequence $(\underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{2^n - 1})$ with all $2^n - 1$ entries equal to -1 transforms into itself by $2^k - 1$ number of operations.

proposed by B.Battsengel

Solutions of the problems

TST2.1. Let p be a prime satisfying $p > m$ and $p \equiv 1 \pmod{\phi(m)}$. By Dirichlet's theorem, there exist infinitely many such primes p . Euler's theorem $2^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ implies that, $2^{p-1} - 1$ is divisible by m . Let $n = \frac{2^p - 2}{m}$, then we have $mn + 1 = 2^p - 1$. We have $p|n$ by Fermat's little theorem, this implies $(mn + 1)|(2^n - 1)$ as desired.

TST2.2. Denote the incircle by ω and the circle with diameter BC by γ . We will show that, the line QM is the radical axis of circles ω, γ and the desired result follows from this easily. Points (B, D, C, P) are harmonic 4 points, so we easily obtain an equality $MB \cdot MC = MD^2$ for the midpoint M of segment DP , which shows point M lies on the radical axis of circles ω, γ . To show that point Q lies on the radical axis, we will use following well known fact. (Now this fact is well known and it was proposed first in Mongolian Mathematical 26th Olympiad of year 1990 to 9th grade students. The proposer was B.Ulzumasan and by that time the proposer was 10th grade student.) Let A', B', C' be midpoints sides BC, CA, AB

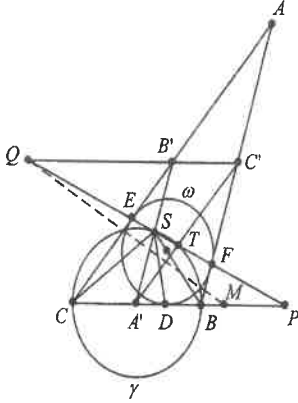


Lemma: Incircle of the triangle ABC with center I touches sides BC, CA, AB at points D, E, F respectively. The line passing through points $X = (BI) \cap (EF)$ and $Y = (AI) \cap (DF)$ coincides with the midline $A'B'$.

Proof of lemma: We give a proof from the pamphlet "Mongolian Mathematical 26th Olympiad". Assume that points X, Y lie inside of triangle (figure), other cases are treated similarly. Let $P = (XY) \cap (AC)$ and $Q = (XY) \cap (BC)$. Since $XF \perp YA$ and $YF \perp XB$, the point I is the orthocenter of triangle XYF . Hence $XY \perp IF$ or $XY \parallel AB$. This implies the triangle EPX is similar to isosceles triangle EAF , thus $EP = PX$. Similarly we obtain $DQ = QY$. Also $XY \parallel AB$ implies that triangles XQB, YPA are isosceles. Hence

$$\begin{aligned} 2 \cdot PQ &= PX + XQ + PY + YQ = PE + BQ + PA + DQ = \\ &= (PE + PA) + (BQ + DQ) = AE + BD = AF + BF = AB, \end{aligned}$$

that shows the line PQ coincides with the midline $A'B'$.



By lemma, the point $S = (A'B') \cap (EF)$ lies on the bisector of angle $\angle ABC$. Hence triangles BDS, BFS are congruent and $\angle DSB = \angle FSB = \angle PSB$. By well known property of harmonic 4 points (B, D, C, P) , we have $\angle BSC = 90^\circ$ or $S \in \gamma$. Similarly one gets $T = (A'C') \cap (EF) \in \gamma$. Triangles QEB', QTC' are similar, hence $\frac{QE}{QT} = \frac{QB'}{QC'}$. Triangles QSB', QFC' are similar, hence $\frac{QS}{QF} = \frac{QB'}{QC'}$. Thus we have $\frac{QE}{QT} = \frac{QS}{QF}$ or $QE \cdot QF = QT \cdot QS$, this shows the point Q lies on the radical axis of circles ω, γ .

TST2.3. Consider a sequence $\{a_m\}$ of terms equal to ± 1 , defined recursively by relation $a_{m+n} = a_{m+n-1} \cdot a_{m+1}$.

Then the sequence $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$ transforms to sequence $(a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{m+n-1}, a_{m+n})$ after m number of operations. Note that, the sequence $(\underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{n})$ with all n terms equal to -1

transforms into itself by k number of operations if and only if the sequence $\{a_m\}$ is periodic with period k . If we set $a_m = (-1)^{b_m}$, then the sequence $\{b_m\}$ of residues modulo 2 satisfies recurrent relation $b_{m+n} \equiv b_{m+n-1} + b_{m+1} \pmod{2}$ with characteristic polynomial $x^n + x^{n-1} + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ and the sequence $\{a_m\}$ is periodic with period k if and only if $(x^n + x^{n-1} + 1) | (x^k + 1)$ in $\mathbb{Z}_2[x]$. By this interpretation, we have to prove divisibility

$$(x^{2^n-1} + x^{2^n-2} + 1) | (x^{2^k-1} + 1)$$

of polynomials in $\mathbb{Z}_2[x]$ assuming $(x^n + x^{n-1} + 1) | (x^k + 1)$.

We can replace x by $\frac{1}{x}$ and $x^n + x^{n-1} + 1$ by $x^n + x + 1$. Suppose that

$$x^k + 1 = x^{m_1}(x^n + x + 1) + \dots + x^{m_s}(x^n + x + 1).$$

Replacing each formal power x^i by x^{2^i} in this equality of polynomials, we will get new equality

$$x^{2^k} + x = (x^{2^{m_1+n}} + x^{2^{m_1+1}} + x^{2^{m_1}}) + \dots + (x^{2^{m_s+n}} + x^{2^{m_s+1}} + x^{2^{m_s}}).$$

Note that

$$x^{2^{m+n}} + x^{2^{m+1}} + x^{2^m} = (x^{2^m})^{2^n} + (x^{2^m})^2 + x^{2^m} = (x^{2^n} + x^2 + x)^{2^m}$$

for all m , here the last equality follows from the equality $g(x)^2 = g(x^2)$ true for all polynomial $g(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$. Thus

$$x^{2^k} + x = (x^{2^n} + x^2 + x)^{2^{m_1}} + \dots + (x^{2^n} + x^2 + x)^{2^{m_s}}$$

and dividing this equality by x we will get desired result.

TEST 3 (2011, May 26) U. BATZORIG

TST3.1. Find the number of ordered triples a, b, c of distinct integers such that $-47 \leq a, b, c \leq 47$ and $a + b + c > 0$.

Solution: $|\{a, b, c\} : -47 \leq a, b, c \leq 47, a + b + c < 0\}| = |\{a, b, c\} : -47 \leq a, b, c \leq 47, a + b + c > 0\}|$ So it is sufficient to count $|\{a, b, c\} : -47 \leq a, b, c \leq 47, a + b + c > 0\}|$ which is not difficult task. Thus the answer is $68655 \cdot 6 = 411930$.

TST3.2. Find all functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that for all real x, y $x^n f(y) - y^n f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right)$.

Solution: Let $x^n f(y) - y^n f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right)$. (1)

Let substitute into (1) $x = y = 1$, then $f(1) = 0$.

Let substitute into (1) $y = 1$, then $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ (2).

Let substitute into (1) $y = 1/x$, then taking into account (2) we get $(x^2) = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)f(x)$. (3)

Let's change x by x^2 and y by y^2 in (1): $x^{2n} f(y^2) - y^{2n} f(x^2) = f\left(\frac{x^2}{y^2}\right)$ or (in view of (3)): $x^{2n} \left(y^n + \frac{1}{y^n}\right)f(y) - y^{2n} \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)f(x) = \left(\frac{x^n}{y^n} + \frac{y^n}{x^n}\right)f\left(\frac{y}{x}\right)$. (4)

By subtracting from (4) equation (1), multiplied by $\left(\frac{x^n}{y^n} + \frac{y^n}{x^n}\right)$, we can get: $y^n(1 - x^{2n})f(y) - x^n(1 - y^{2n})f(x) = 0$. Separating variables: $\frac{f(x)}{x^n - x^{2n}} = \frac{f(y)}{y^n - y^{2n}}$. Left side of this equality does not depend on y , and right side does not depend on x , therefore $\frac{f(x)}{x^n - x^{2n}} = c$, where $c \in \mathbb{R}$.

By simple check we can see that the function $f(x) = c\left(\frac{1}{x^n} - x^n\right)$ is indeed the solution of the equation.

TST3.3. Let n be an integer and $a_1, \dots, a_n$ real positive numbers. Then prove that $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2} +$

$$\frac{1}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2} \geq \frac{n^3 + 1}{(n + 2011)^2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{2011}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \right)^2$$

Solution: By the Cauchy-Schwartz inequality

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2} + \frac{1}{(a_1+a_2+\dots+a_n)^2} \right] \geq \\ & \left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{n(a_1+a_2+\dots+a_n)} \right]^2 = \left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{n(a_1+a_2+\dots+a_n)} \right]^2 n^2 \geq \frac{n^3+1}{(n^2+2011)^2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots \right. \\ & \left. \frac{1}{a_n} + \frac{2011}{a_1+a_2+\dots+a_n} \right)^2 \Leftrightarrow n(n^2+2011) \left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{n(a_1+a_2+\dots+a_n)} \right] \geq \\ & (n^3+1) \left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{2011}{(a_1+a_2+\dots+a_n)} \right] \Leftrightarrow \\ & (n^3+2011n) \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} + (n^2+2011) \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i} \geq (n^3+1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} + (2011n^3+2011) \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i} \Leftrightarrow \\ & (2011n-1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq (2011n-1)n^2 \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \sum_{i=1}^n a_i \geq n^2 \text{ Q.E.D} \end{aligned}$$

Test 4 (2011, May 29)

TST4.1. Let $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ be a convex polygon and $n \geq 4$. Find the maximum number of quadrilateral $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ in which one can inscribe a circle (here $A_{n+1} = A_1, A_{n+2} = A_2, A_{n+3} = A_3$).

folklore

TST4.2. The radii of incircle and circumcircle of the triangle ABC is r and R respectively. A circle γ_A is internally tangent to circumcircle at point A and externally tangent to incircle of the triangle. Similarly one defines circles γ_B, γ_C and let r_A, r_B, r_C are radii of circles $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C$. Prove that

$$\frac{R-r_A}{r+4r_A} + \frac{R-r_B}{r+4r_B} + \frac{R-r_C}{r+4r_C} \geq \frac{3R}{4r}.$$

proposed by B.Battsengel

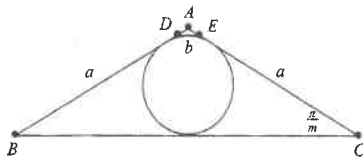
TST4.3. Find with proof n , for which there exist polynomials $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ each of degree n such that their composite polynomial $P(Q(x))$ has n^2 distinct real root forming an arithmetic sequence.

proposed by B.Battsengel

Solutions of the problems

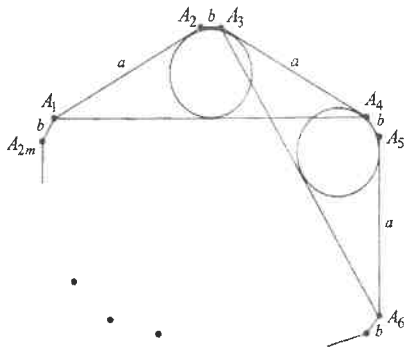
TST4.1. Answer: 1 for $n = 4$ and $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ for $n \geq 5$. Suppose that $n \geq 5$ and 2 consequent quadrilaterals $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$, $A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}A_{i+4}$ are both inscribed. By simple criteria of inscribed quadrilaterals, we have $A_iA_{i+1} + A_{i+2}A_{i+3} = A_{i+1}A_{i+2} + A_iA_{i+3}$ and $A_{i+1}A_{i+2} + A_{i+3}A_{i+4} = A_{i+2}A_{i+3} + A_{i+1}A_{i+4}$. Summing the equalities we obtain $A_iA_{i+1} + A_{i+3}A_{i+4} = A_iA_{i+3} + A_{i+1}A_{i+4}$. Let O be intersection point of segments A_iA_{i+3} and $A_{i+1}A_{i+4}$, such a point exists because our polygon is convex. By triangle inequality we have $A_iA_{i+1} < A_iO + A_{i+1}O$ and $A_{i+3}A_{i+4} < OA_{i+3} + OA_{i+4}$, summing this 2 inequality we obtain

$$A_i A_{i+1} + A_{i+3} A_{i+4} < A_i O + O A_{i+3} + A_{i+1} O + O A_{i+4} = A_i A_{i+3} + A_{i+1} A_{i+4}.$$



This contradicts to $A_i A_{i+1} + A_{i+3} A_{i+4} = A_i A_{i+3} + A_{i+1} A_{i+4}$, so among any 2 consequent quadrilaterals $A_i A_{i+1} A_{i+2} A_{i+3}$, $A_{i+1} A_{i+2} A_{i+3} A_{i+4}$ at least one is not inscribed and this gives upper bound $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ for the number of inscribed quadrilaterals.

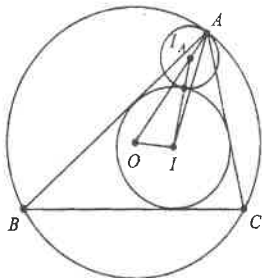
Suppose that, $n = 2m$ is an even. Consider an isosceles triangle ABC with base angle $\angle ABC = \angle ACB = \frac{\pi}{m}$. Draw tangent line ℓ parallel to base BC to its incircle (figure). Let $(AB) \cap \ell = D$, $(AC) \cap \ell = E$, then $BDEC$ is inscribed isosceles trapezoid. Denote $b = DE$ and $a = BD = EC$. Using this isosceles trapezoid one can construct convex $2n$ -gon $A_1 A_2 \dots A_{2m-1} A_{2m}$ with side lengths $a, b, a, b, \dots, a, b$ as shown in the figure. Note that, the angle between 2 vectors $\overrightarrow{A_1 A_2}, \overrightarrow{A_3 A_4}$ is $\frac{2\pi}{m}$ and so vectors $\overrightarrow{A_1 A_2}, \overrightarrow{A_3 A_4}, \dots, \overrightarrow{A_{2m-1} A_{2m}}$ form side vectors of regular n -gon, thus their sum vector is 0. Similarly we have $\overrightarrow{A_2 A_3} + \overrightarrow{A_4 A_5} + \dots + \overrightarrow{A_{2m} A_1} = 0$ and this shows that our construction gives indeed a convex polygon. By construction quadrilaterals $A_1 A_2 A_3 A_4, A_3 A_4 A_5 A_6, \dots, A_{2m-1} A_{2m} A_1 A_2$ are all inscribed isosceles trapezoids.



Now suppose that, $n = 2m + 1$. Consider polygon $A_1 A_2 \dots A_{2m-1} A_{2m}$ constructed before. By homothety centered at A_{2m-1} with coefficient $1 + \varepsilon$ (ε is sufficiently small), the incircle of triangle $A_{2m-1} A_{2m} A_1$ goes to a circle still tangent to sides $A_{2m-1} A_{2m}, A_{2m-1} A_1$ but intersecting the side $A_{2m} A_1$. Draw tangents from the vertices A_{2m}, A_1 to this circle and let A_{2m+1} be the intersection point of these tangents. Then for the new polygon $A_1 A_2 \dots A_{2m} A_{2m+1}$, quadrilaterals $A_1 A_2 A_3 A_4, A_3 A_4 A_5 A_6, \dots, A_{2m-3} A_{2m-2} A_{2m-1} A_{2m}$ and $A_{2m-1} A_{2m} A_{2m+1} A_1$ are inscribed.

TST4.2. Denote by O, I the centers of circumcircle, incircle of triangle ABC and let I_A be the center of circle γ_A (figure). Writing Stewart theorem to cevian II_A of triangle AIO , we obtain relation

$$IO^2 \cdot AI_A + IA^2 \cdot I_A O = AO (II_A^2 + AI_A \cdot I_A O).$$



Here $AI_A = r_A, I_A O = R - r_A, AO = R, II_A = r + r_A$ and $IO^2 = R^2 - 2Rr$ is the famous Euler relation. Substituting this into the relation we find $IA^2 \cdot (R - r_A) = Rr(r + 4r_A)$ or $\frac{R - r_A}{r + 4r_A} = \frac{Rr}{IA^2}$.

Similarly one finds $\frac{R - r_B}{r + 4r_B} = \frac{Rr}{IB^2}$ and $\frac{R - r_C}{r + 4r_C} = \frac{Rr}{IC^2}$. Thus given inequality is equivalent to inequality $\frac{r^2}{IA^2} + \frac{r^2}{IB^2} + \frac{r^2}{IC^2} \geq \frac{3}{4}$ or

$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} \geq \frac{3}{4}$, where α, β, γ are angles of triangle ABC . The last inequality is equivalent to well known inequality $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}$ true for angles in any triangle.

TST4.3. Answer: $n = 2$. If $P(x) = x^2 - 1$, $Q(x) = x^2 - 5x + 5$, then polynomial $P(Q(x))$ has roots 1, 2, 3, 4 forming arithmetic sequence. Now suppose to the contrary that, there are such polynomials $P(x), Q(x)$ of degree $n \geq 3$. Roots of composite polynomial $P(Q(x))$ are solutions of polynomial equations $Q(x) = y_i$ ($1 \leq i \leq m$), where y_i ($1 \leq i \leq m$) are distinct roots of polynomial $P(x)$. Since the composite polynomial has n^2 number of distinct roots there must be $m = n$. Furthermore all the equations $Q(x) = y_i$ ($1 \leq i \leq m$) must have n distinct solutions.

Let $z_1 < \dots < z_{n-1}$ are roots of derivative $Q'(x)$. Then the polynomial $Q(x)$ is monotone on each of n intervals

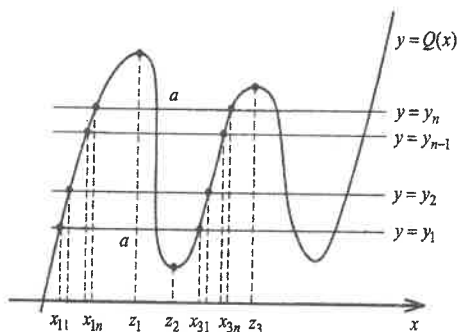
$$(-\infty, z_1), (z_1, z_2), \dots, (z_{n-2}, z_{n-1}), (z_{n-1}, \infty)$$

and $Q(x)$ is increasing and decreasing alternately on these intervals. Thus increasing, decreasing behavior of polynomial $Q(x)$ on the 1st and 3rd interval is the same. For each i ($1 \leq i \leq n$) the equation $Q(x) = y_i$ must have exactly one solution in each of these intervals. Let x_{1i} be the solution of equation $Q(x) = y_i$ in the 1st interval and x_{3i} be the solution of equation $Q(x) = y_i$ in the 3rd interval. Assume that $x_{11} < \dots < x_{1n}$, then $x_{31} < \dots < x_{3n}$ since behavior of polynomial $Q(x)$ on the 1st and 3rd interval is the same (figure). By assumption the roots $x_{11}, \dots, x_{1n}$ of polynomial $P(Q(x))$ are n consequent members of arithmetic

sequence, also roots $x_{31}, \dots, x_{3n}$ are n consequent members of same arithmetic. Thus

$$x_{31} - x_{11} = \dots = x_{3n} - x_{1n} = a$$

for some $a \neq 0$ and $x_{11}, \dots, x_{1n}$ are solutions of polynomial equation $Q(x+a) = Q(x)$. But $Q(x+a) - Q(x)$ is a polynomial of degree $n-1$, so it has at most $n-1$ number of solutions. This leads to a contradiction.



Introduction

The purpose of this study is to

investigate the effects of the
different types of the
treatment on the
growth of the
plants.

The results of the study are

presented in the following

sections of the report.

The first section describes

the materials and methods

used in the study.

The second section

discusses the results of the

study and compares them