

1923



**ХӨДӨЛМӨРИЙН ГАЗВЬЯАНЫ УЛААН  
ТУГИЙН ОДОНТ НИЙСЛЭЛИЙН НЭГДҮГЭЭР  
СҮРГУУЛИЙН НЭРЭМЖИТ МОНГОЛЫН  
МАТЕМАТИКИЙН ХЛХ ОЛИМПИАД**

**(2013.05.02-05.07)**



**Улаанбаатар хот**

МАТЕМАТИКИЙН ОЛИМПИАДЫН ЦУВРАЛ

№ 38

**ХӨДӨЛМӨРИЙН ГАВЬЯАНЫ УЛААН  
ТУГИЙН ОДОНТ НИЙСЛЭЛИЙН НЭГДҮГЭЭР  
СУРГУУЛИЙН НЭРЭМЖИТ МОНГОЛЫН  
МАТЕМАТИКИЙН XLIX ОЛИМПИАД**

**[ММО-49]**

**(2013.05.02-05.07)**

Улаанбаатар хот

2014 он

## МЭНДЧИЛГЭЭ

Монголын математикийн 49-р олимпиадыг зохион байгуулагчид, энэхүү олимпиадад оюун ухааны хүч чадлаа сорихоор, эх орныхоо дөрвөн зүг, найман зовхисоос шалгаран ирсэн сурагчид, багш нар, олимпиадын хүндэт зочид та бүхэнд Шинэ монгол улсын ууган дунд сургуулийн захиргаа, хамт олноо төлөөлөн чин сэтгэлийн мэндчилгээ дэвшүүлье.

Манай сургуулийн 90 жилийн түүхт ойг хүндэтгэн өргөмжилж энэхүү ээлжит 49-р олимпиадыг тус сургуулийн нэрэмжит болгон зохион байгуулах шийдвэр гаргасан ММО-ын хорооны гишүүдэд болон олимпиадын хорооны дарга, доктор, профессор Ц.Данцдорж танаа гүн талархал илэрхийлье.

Монголын "Математикчдийн их наадам" зохиогдож буй 17-р жарны усан могой жилийн хаврын дунд сарын энэ сайхан өдрүүдийг тохиолдуулан математикийн үе үеийн багш нар, олимпиадын цаг цагийн аваргууд, улс, олон улсад алт, мөнгө, хүрэл медаль авч эх орныхоо нэр алдрыг өргөж явсан оюун сэтгэлгээний "мастер"-уудцаа баяр хүргэж, сайн сайхныг ерөөе.

Шинэ цагийн Монгол улсын математик боловсролын хөгжилд жинтэй хувь нэмэр оруулсан, оруулсаар байгаа нэгдүгээр сургуулийн гурван үеийн багш нар, эх орноороо овоглосон Төрөлх нэгдүгээр сургуулийнхаа нэрийг бүс нутаг, тив, дэлхийн хүндэтгэлийн тавцанд өргөн мандуулсан төгсөгчид, сурагч, багш нартаа онцлон баяр хүргэе.

Сургуулийнхаа нэрэмжит "ММО-49"-ийг зохион байгуулах ажлын хэсгийн ахлагч, НИТХ-ын дарга Д.Баттулга танаа болон, олимпиадын өргөн цар хүрээтэй, нөр их ажилд сэтгэл харамгүй тусалж, дэмжиж, ивээн тэтгэж оролцсон "НЭГИЙНХЭН" ТББ-ын удирдах зөвлөл, гишүүдэд энд хуран цугласан математикчдийн өмнөөс зүй ёсны халуун талархал айлтган дамжуулъя.

Эрхэм хүндэт нөхөд өө !

Оюун сэтгэлгээний дээд урлаг математикт шамдан суралцагчдын яруу алдар бадартугай !

Монгол орны маань хөгжлийн нэгэн гол хөдөлгөгч хүч болсон шинжлэх ухаануудын хаан Математикийг хөгжүүлцгээе!

Шинэ Монгол улсын ууган дунд сургууль, нэгдүгээр сургуулийн түүхэн амжилт үеэс үед дэлгэртүгэй!

УЛААНБААТАР ХОТЫН 1 ДҮТЭЭР СУРГУУЛИЙН ЗАХИРАЛ,  
МУГБ Ц. ГҮРРАГЧАА. 2013.05.03

## "ММО-49" – ШИНЭ МОНГОЛЫН УУГАН ДУНД СУРГУУЛЬ.

Монгол улсын математикийн 49-р олимпиад Шинэ Монгол улсын ууган дунд сургууль, "Нийслэлийн лаборатори 1 дүгээр сургуулийн нэрэмжит" болон 2013 оны 5-р сарын 2-ноос 7-ны хооронд өргөн олны талархлыг хүлээн амжилттай явагдлаа.

Нийслэлийн 1 дүгээр сургууль нь математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийг тасралтгүй 49 (омнох 1 жил нь 2-р сургууль дээр нийт 50 жил) дэх жилдээ хичээллүүлж байгаа математикийн сургалтын андагч цөм сургууль юм.

Өнгөрсөн хугацаанд гүнзгийрүүлсэн сургалт хот хөдөөгийн сургуулиудад олон хичээлээр салбарлан үүсэж Монгол орны андогч булан бүрт олон зуун багш, сурагчид ажиллаж, суралцаж байна.

### 1 дүгээр сургууль-Аваргуудын сургууль

Монголын математикийн олимпиадын түүхэнд УБ хотын 1-р сургуулийн сурагч багш нарын гаргасан амжилтаас:

1. Сурагчдын дээд ангилалын (10-р анги, 2006 оноос 11-р анги) олимпиад 49 удаа зохиогдож 50 аварга төрсний 27 нь тус сургуулиас төрөөд байна. Үүнд:

- |                           |                         |
|---------------------------|-------------------------|
| 1. Ө.Энэбиш – 1967        | /Ц.Гарамсүрэн/          |
| 2. Л.Энхтайван – 1973     | /Ш.Мягмар/              |
| 3. Д.Амгалан – 1974       | /С.Цагаан/              |
| 4. А.Ганбаатар – 1976     | /Ч.Туул /               |
| 5. Г.Цогоо – 1977         | /С.Цагаан/              |
| 6. Г.Цогтоо – 1978        | /Ж.Дангаа/              |
| 7. Б.Түмэндэмбэрэл – 1979 | /С.Шарав/               |
| 8. Б.Баасандорж – 1980    | /Ж.Дангаа/              |
| 9. Б.Болдсайхан – 1981    | /Д.Буянхүү/             |
| 10. Г.Хүрэлбаатар – 1983  | /Д.Нарангэрэл/          |
| 11. Б.Батцэнгэл – 1985    | /Д.Нарангэрэл, С.Шарав/ |
| 12. Л.Батболд – 1986      | /Б.Наранхүү/            |
| 13. С.Батболд – 1987      | /Д.Пүрэвдорж/           |
| 14. З.Соёл-Эрдэнэ – 1988  | /Д.Нарангэрэл/          |
| 15. Б.Уламбаяр – 1992     | /Б.Амарбаясгалан/       |
| 16. Ц.Амарбат – 1996      | /Н.Энхбаатар/           |
| 17. Ө.Баттулга – 1998     | /Н.Эрдэнэ/              |

|                           |                    |
|---------------------------|--------------------|
| 18. Т.Баасанжав – 2001    | /З.Бат-Эрдэнэ/     |
| 19. С.Сайнбаяр – 2003     | /Ц.Баяраа/         |
| 20. С.Сайнбаяр – 2004     | /Ц.Баяраа/         |
| 21. Б.Чандмань – 2005     | /Н.Баянбат/        |
| 22. Д.Жаргалсайхан – 2006 | /З.Бат-Эрдэнэ/     |
| 23. Э.Тэмүгэ – 2008       | /Н.Баянбат/        |
| 24. О.Зоригтоо – 2009     | /Д.Самданпэрэнлэй/ |
| 25. Ц.Ивээл – 2010        | /З.Бат-Эрдэнэ/     |
| 26. Б.Батхуяг – 2011      | /Н.Баянбат/        |
| 27. Г.Мөнхбаяр – 2013     | /З.Бат-Эрдэнэ/     |

2. ММО нь 1989 оноос 9,10-р анги гэсэн хоёр ангилалтай болсны 2 дахь нь болох 9-р анги (одоогийн шилжилтийн 11-р анги) ангилалд 26 аварга торсний 9 нь :

|                         |                    |
|-------------------------|--------------------|
| 1. Б.Уламбаяр – 1991    | /Б.Амарбаясгалан/  |
| 2. Д.Бадарсан – 1994    | /Д.Нарангэрэл/     |
| 3. Т.Баасанжав – 2000   | /З.Бат-Эрдэнэ/     |
| 4. П.Оргил – 2001       | /Д.Самданпэрэнлэй/ |
| 5. С.Сайнбаяр –         | /Ц.Баяраа/         |
| 6. А.Ганбат – 2003      | /Ц.Баяраа/         |
| 7. Б.Цэдэнсодном – 2006 | /З.Бат-Эрдэнэ/     |
| 8. Э.Тэмүгэ – 2007      | /Н.Баянбат/        |
| 9. Б. Батхуяг 2010      | /Н.Баянбат/        |

3. ММО 1991 оноос 8,9,10 буюу сурагчдын 3 ангилалтай болсны 3 дахь нь болох 8-р анги (одоогийн 10-р анги) ангилалд 21 удаа аварга торсний 11 нь :

|                           |                    |
|---------------------------|--------------------|
| 1. Н.Бат – 1991           | /Д.Пүрэвдорж/      |
| 2. Ц.Пүрэвдорж – 1994     | /Н.Энхбаатар/      |
| 3. А.Амарсанаа – 1998     | /Д.Нарангэрэл/     |
| 4. Н.Энхбат – 1999        | /З.Бат-Эрдэнэ/     |
| 5. П.Оргил – 2000         | /Н.Энхбаатар/      |
| 6. С.Сайнбаяр – 2001      | /Ц.Баяраа/         |
| 7. Ц.Гэрэлт – 2002        | /Ц.Баяраа/         |
| 8. Б.Хүдэр – 2005         | /З.Бат-Эрдэнэ/     |
| 9. Н.Эрдэнэ – 2008        | /З.Бат-Эрдэнэ/     |
| 10. Э.Оргил-Эрдэнэ – 2010 | /Д.Самданпэрэнлэй/ |

11. Ч.Золбоо – 2011

/З.Бат-Эрдэнэ/

4. ММО олимпиад 2008 оноос 8,9,10,11 буюу сурагчдын 4 ангилалтай болсны 4 дэх нь болох 8-р анги (одоогийн 9-р анги) ангилалд 7 аварга төрсний 3 нь :

1. Б.Батхуяг – 2008

/Н.Баянбат/

2. Б.Баатархүү – 2009

/Д.Бат-Орших/

3. Ч.Золбоо – 2010

/З.Бат-Эрдэнэ/

5. ММО олимпиад 2013 оноос 8,9,10,11,11(12) буюу сурагчдын 5 ангилалтай болсны 5 дахь ангилал буюу одоогийн 8-р ангийн ангилал анх удаа зохиогдож аварга нь

1. Б.Төрхүү-2013

/Э.Батзаяа/ улсын аварга болоод байна.

6. ММО 1990 оноос дунд ангийн багш ангиллыг зохион байгуулж ирснээс :

1. Д.Нарангэрэл – 1991, алт

2. Д.Бат-Орших – 2009 - алт, 2000,2005 – хүрэл

3. Э.Батзаяа – 2009- мөнгө

7. ММО 1997 оноос Бага ангийн багш ангиллыг зохион байгуулж ирснээс

1. Б.Жаргалсүрэн – 1997- алт, 1999 – мөнгө

2. М.Отгонжаргал – 2013 – алт,2012 – мөнгө тус тус хүртээд байна.

# 1 ДҮГЭЭР СУРГУУЛЬ-ОЛИМПИАД ЗОХИОН БАЙГУУЛАГЧ

## I. Улсын олимпиад

А. 2002 оны улсын 38-р олимпиад УБ хотын 1-р сургуулийн 80 жилийн ойн нэрэмжит болон явагдсан.

Б. 2005 оны улсын 41-р олимпиад УБ хотын 1-р сургуулийн багш Монгол улсын гавьяат багш С.Цагааны нэрэмжит болон явагдсан.

В. 2013 оны улсын 49-р олимпиад УБ хотын 1-р сургуулийн нэрэмжит болон явагдсан.

Г. 2014 оны улсын 50-р олимпиад УБ хотын 1-р сургуулийн 1972 оны төгсөгч Монгол улсын математикийн анхны доктор Цагааны Болдсүхийн нэрэмжит болон явагдахаар болоод байна.

## II. Нийслэлийн олимпиад

Нийслэлийн хурлын төлөөлөгчдийн 1996 оны тушаалаар УБ хотын математикийн олимпиадыг тус оноос эхлэн Монгол улсын гавьяат багш С.Цагааны нэрэмжит болгон УБ хотын 1 дүгээр сургууль дээр зохион байгуулж байхаар шийдвэрлэсэн.

2014 онд 19 дэх удаагаа амжилттай зохион байгуулагдаад байна. УБ хотын 1-р сургууль, Нийслэлийн боловсролын газар болон Ц.Болд ерөнхийлөгчтэй "Содномдоржийн Цагаан багшийн сан" хариуцан хувь хүмүүс, албан байгууллагууд ивээн тэтгэж зохиогддог тус олимпиад хүүхэд багачуудын хүсэн хүлээдэг улсын олимпиадын дараа орох олимпиад болоод байна.

## III. Дүүргийн олимпиад

Сүхбаатар дүүргийн математикийн олимпиадыг тухайн үеийн УБ хотын 1-р сургуулийн удирдлага, багш нар, шавь нарын хүсэлтээр 1995 онд Монголын Математикийн олимпиадын Ц.Дашдоржийн тушаалаар УБ хотын 1-р сургуулийн багш АБТА Солийн Шаравын нэрэмжит болгон тус сургууль дээр зохион байгуулах болсон билээ.

Энэ олимпиад нь дүүргийн сургууль бүрийн шилдэг сурагчид хуран чуулж оюун ухаан сорин уралдаж дараагийн шатны албан ёсны эрх авдаг онц чухал олимпиад мөн.

## IV. "Их сунгаа" олимпиад

Монголын Математикийн олимпиадын түүхэнд УБ хотын 1-р сургуулийн ахмад үеийн багш нар онцгой чухал байр суурь эзэлдэг билээ.

Ахмад багш нарынхаа нэрэмжит болгон явуулдаг "ИХ СУНГАА" олимпиадыг МУТБ Ц.Гүррагчаа захиралтай манай хамт олон 2005 онд санаачлан эдүгээ 10 удаа зохион байгуулаад байна.

Тус олимпиад нь хот, улсын олимпиадын өмнө зохион байгуулагдаж

ангилал тус бүрийн эхний 10 байранд орсон сурагчдад хотын олимпиадын эхний өгөгдөг ба ахлах, дунд ангийн сурагчид 2 өдөр бодолт хийдэг зэрэг олон янзуу талтай сурагч багачуудын оролцох дуртай олимпиад билээ.

#### У. Хот хоорондын олимпиад

Хотын олон улс орнуудын хотуудад зохион байгуулагддаг тус олимпиадыг 2006 оноос УБ хотын 1-р сургууль (хариуцагч Б.Батцэнгэл, Ц.Бат-Оринх) дээр жил бүр хаврын болон намрын даваануудыг амжилттай зохион байгуулсаар байна.

Энэ олимпиад дунд ангиуд (6-10), ахлах ангиуд (11-12) гэсэн ангилалаар; ангилал дотор бага ангиуд нь өгөгдсөн коэффициент тооцож зүй гэрээгээрээ онц сонирхолтой өрсөлдөөнтэй олимпиад билээ.

### 1-Р СУРГУУЛИЙН МАТЕМАТИКИЙН БАГШ, УДИРДАХ АЖИЛТНУУД

Тус сургуулийн математикийн сургалтыг олон жил удирдаж, хариуцан ажилласан удирдах ажилтан, багш нар:

#### 1. Захирал МУГБ Д.Гомбосүрэн

1924 онд Сэлэнгэ аймгийн Тушиг суманд төрсөн. Түүх-нийгмийн ухааны багш мэргэжилтэй. 1962 оны 11-р сарын 15-аас 1990 оны 01 дүгээр сарын 02-ны өдөр хүртэл тасралтгүй 28 жил захирлаар ажиллахдаа математик сургалтын нэгэн түүхэн үеийг удирдаж байсан. 1981 онд "Монгол улсын гавьяат багш" цолоор шагнагдсан.

#### 2. Захирал Н.Ганболд

1973 онд УБДС-ийн физик-математикийн анги төгссөн. 1989 оны сүүлчээр 1-р сургуулийн хичээлийн эрхлэгчээр ажилаа эхэлж 1990 оны эхээр ардчилсан сонгуулиар сонгогдсон анхны захирал юм. Ардчилсан хувьсгалын анхны жилүүдэд математикийн сургалт, олимпиадын хэлбэр зохион байгуулалтыг өөрчилсөн.

#### 3. Захирал МУГБ Ц.Гүррагчаа

1979 онд УБДС-ийг Хими-биологийн багш мэргэжлээр төгссөн. 1979-1990 онд багш, 1990-2002 онд хичээлийн эрхлэгч, 2002 оноос хойш одоог хүртэл захирлаар ажиллахдаа математик сургалт, математикийн бүх л шатны олимпиадыг зохион байгуулан удирдсан байна. 2011 онд Монгол улсын гавьяат багш цол хүртсэн.

#### 4. Сургалтын менежер Ж.Дангаа

1975 онд МУИС-ийн математикийн анги төгсөөд багшаар сонгогдон ажилласан. 1980-1990 онд хичээлийн эрхлэгчээр ажиллаж байх үед сургалтын агуулга, арга зүйн шинэ туршилтууд хийгдэж, Зөвлөлтийн шинийг санаачлагч багш нарын туршлагаас судлан хэрэгжүүлэх ажил ид өрнөж байв. 1980 онд шавь нь улсын аварга болсон.

5. Б.Наранхүү

1977 онд 1-р сургууль, 1981 онд Эрхүүгийн их сургууль төгссөн. 1981-1986 онд багшилж байсан тухайн үеийн сайн багш юм.

6. Д.Пүрэвдорж

1971 онд МУИС төгссөн. 1984 оноос тус сургуульд ажиллаж, энэ хугацаанд 5 удаа 10-р анги төгсгөсөн. АБТА, "Алтан гадас" одонгоор шагнагдсан. Шавь, сурагчдаас нь хот, улсын олимпиадад амжилттай оролцож байснаас улсын үнэмлэхүй аварга 2 сурагч болсон.

7. С.Чимиддорж

1972 онд МУИС-ийг төгссөн. Тус сургуульд 1992-2009 онуудад математикийн багшаар ажилласан. Багш, хичээлийн эрхлэгч зэрэг ажил олон жил хийж байсан ажлын арвин туршлагатай багш. "АБТА", "Алтан гадас одон"-оор тус тус шагнагдсан.

8. Ц.Баяраа

1983 онд тус сургуулийн математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай анги, 1988 онд МУИС төгссөн. Нарангэрэл багшийн шавь. 1991 онд тус сургуульд багшаар ирж ажилласан. Шавь сурагчдаас нь хот, улс, олон улсын олимпиадад амжилттай оролцож тэргүүн байруудыг авч байдаг. 2006 оноос Орчлон сургуулийн багшаар шилжин явсан.

9. Н.Энхбаатар

1993 онд УБИС-ийг төгсөөд тус сургуульд ирсэн. Хэд хэдэн удаа 10-р анги төгсгөсөн. Шавь сурагчдаас нь хот, улс, олон улсын олимпиадад амжилттай оролцсон. Үүнээс: 1996 онд улсын үнэмлэхүй аварга, 2012 онд ОУМО-ын хүрэл медаль авсан.

10. Н.Эрдэнэ

1983 онд тус сургуулийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай анги, дараагаар нь МУИС төгссөн тус сургуулийн Нарангэрэл багшийн шавь юм. 1995 онд гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийн багшаар ирсэн. Түүний шавь сурагчдаас нь ОУМО-аас анхны алтан медаль, Евро-Азийн олимпиадаас алтан медалуудыг тус тус эх орондоо авчирсан. Тэрээр одоо "Номуун" дунд сургуулийг байгуулан захирлаар ажиллаж байна.

11. Н.Баянбат

1974 онд Улаанбаатар хотод төрсөн. 1991 онд 10 жилийн 1-р дунд сургуулийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай анги, 1996 онд МУИС-ийн математикийн анги төгссөн. 1996 оноос сургуульдаа математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийн багшаар ажиллаж байна. Шавь сурагч нараас нь УМО-ын аварга сурагч 6, мөнгөн медальт сурагч 11, хүрэл медальт сурагч 5, ОУМО-ын мөнгөн медальт сурагч 3, хүрэл медальт сурагч 2 төрсөн. Шавь нар нь Нийслэлийн хотын олимпиадаас 21 алт авсан. Н.Баянбат багш өөрөө хотын олимпиадаас 2 мөнгө 4 хүрэл медаль авсан. АБТА багш юм.

12. Э.Бат-Эрдэнэ

Архангай аймгийн Ихтамир сумын харьяат. Аймгийн 1-р сургууль, Улаанбаатарын Их сургууль төгссөн. 1998 оноос тус сургуулийн математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангид багшаар ажиллаж байна.

2013 онд АБТА багш. Шавь нар нь СБД-ийн олимпиадаас 15 алт, Нийслэлийн хотын олимпиадаас 17 алт, П.Энхболдын нэрэмжит улсын уралдаанаас 10 алт, Улсын математикийн олимпиадаас 11 алт, Олон улсын олимпиадаас мөнгө, хүрэл медаль хүртээд байна.

13. Д.Бат-Орших

1966 онд Увс аймгийн Улаангом суманд төрсөн. 1989 онд МУИС-ийг төгссөн. Улсын математикийн багш нарын 4 удаагийн аварга, УМО-аас 1 мөнгө, 5 хүрэл медальтай. Румын улсад 1999 онд зохион байгуулагдсан ОУМ-ийн 40 дүгээр олимпиадад Монгол улсын багийн орлогч удирдагч. Шавь, сурагчид нь улсын олимпиадаас нийтдээ алтан медаль 1, мөнгөн медаль 4, хүрэл медаль 18-ыг аваад байна. 2011 онд "Алтан гадас" одон хүртсэн.

14. Д.Самданпэрэнлай

1987 онд УБИС төгссөн. 2000 онд тус сургууль математикийн багшаар авч ажиллуулсан. 2003 оноос математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийг удирдсан. Шавь сурагчид нь улсад дээгүүр амжилт гаргасан.

15. Э.Батзаяа

1979 онд Завхан аймагт төрсөн. 2000 онд МУИС-ийн МКС-ийн онолын математикийн анги төгссөн. 2008 оноос тус сургуульд математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийн багшаар

сонгогдон ажиллаж байна. Э.Батзаяа багш улсын математикийн олимпиадаас мөнгө, хүрэл медаль болон УБ хотын математикийн олимпиадын 1 мөнгө, 3 хүрэл медальтай. Бэлтгэсэн шавь нар нь УБ хотын олимпиадаас алт медаль 5, УМО-н алт медаль 1, мөнгөн медаль 4, хүрэл медаль 6, ОУМО-н хүрэл медаль 3 хүртсэн АБТА багш.

16. Д.Оджүү

1980 онд Ховд аймагт Мөст суманд төрсөн. 2002 онд МУИС-ийн Ховд дахь салбарын математикийн багшийн ангийг төгссөн. 2007 оноос тус сургуульд ердийн ангийн математикийн багшаар ажиллаж байгаад 2012 онд гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийн багш болсон. 2008 онд "Аргазүйч" цол тэмдгээр шагнагдсан.

17. Л.Мягмар-очир

1989 онд Өвөрхангай аймагт төрсөн. 2012 онд МУБИС-ийн КМТС-ийг математик-мэдээлэл зүйн багш мэргэжлээр төгссөн. 2012 оны 9-р сарын 1-ээс тус сургуульд математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийн багшаар сонгогдон ажиллаж, шавь нар нь нийслэлийн болон дүүргийн олимпиадаас медаль хүртээд байна.

18. Х.Батцэцэг

1963 онд УБ хотод төрсөн. 1986 онд МУИС-ийг төгссөн. Тус сургуульд тасралтгүй 27 дахь жилдээ ажиллаж байна. 2007 онд сургуулийн "Анги удирдагч манлай багш", 2009 онд сургуулийн "Сурлагын чанар аварга" багш болж, 2011 онд "Хөдөлмөрийн хүндэт медаль" хүртсэн. Сургуулийн үйлдвэрчний эвлэлийн тэргүүлэгч юм.

19. Ч.Үржинханд

1961 онд УБ хотод төрсөн. 1984 онд УБИС-ийн математикийн багшийн ангийг төгссөн. 2010 оноос математикийн багшаар ажиллаж байна. "Боловсролын тэргүүний ажилтан"

20. Ш.Лхагва

1972 онд УБ хотод төрсөн. 1994 онд МУИС-ийн физик математикийн факультет, 1998 онд МУИС-ийн магистрантурыг төгссөн. 2008 оноос математикийн багшаар ажиллаж байна. "Боловсролын тэргүүний ажилтан", 2012 онд багш нарын ур чадварын уралдаанд дүүрэг, хотод тэргүүн байр, улсын уралдаанд дэд байр эзэлсэн.

21. Р.Мөнхзул

1974 онд төрсөн. 1995 онд УБИС-ийн математикийн ангийг төгссөн. 2011 оноос тус сургуульд математикийн багшаар ажиллаж байгаа. Мөнхзул багш нь Дорнод аймгийн олимпиадын удаа дараагийн аварга бөгөөд тус сургуульд сонгогдон ажиллаж байна.

22. Б.Алтанцэцэг

1963 онд Улаанбаатар хотод төрсөн. 1980 онд тус сургуулийн математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангийг, 1984 онд УБДС-ийг математикийн багшийн ангийг тус тус төгссөн. Тус сургуульд 20 гаруй жил тогтвортой ажиллаж байна.

# 1 Монголын Математикийн 49-р Олимпиа- дын дүнгийн тухай тайлан

Ц.Дашдорж

*Эрхэм гүндэт математикч багш, сурагчид аа!*

*ММОХорооны гишүүдээ!*

*Монголын Математикийн 49-р Олимпиадыг зохион байгуулах  
хорооны дарга НИТХ-ны дарга Д.Баттулга аа!*

*Нийслэлийн I сургуулийн захгараа Ц.Гүррагчаа!*

Монголын Математикийн 49-р Олимпиад 2013 оны 05 сарын 02 -08-ны өдрүүдэд нийслэлийн I сургууль дээр амжилттай явагдаж дүнгээ гаргалаа. Энэ удаагийн олимпиадад 21 аймаг, нийслэл Улаанбаатар хотын нийт 22 багийн, бага ангийн 33, дунд ангийн 47-н багш, 8-11-р ангийн 327 сурагчид оролцож нийт 407 хүн оюун ухаан, авъяас чадвараа сорин уралдлаа.

Энэ удаагийн олимпиадыг зохион байгуулах, бэлтгэл ажлыг хангахад БШУЯ, нийслэл, Сүхбаатар дүүргийн боловсролын газар, 1-р сургуулийн захиргаа тус сургуулийн багш сурган хүмүүжүүлэгчид, ажилсаг бүтээлч хамт олон болон энэ сургуулийн Математикийн ангийн үе үеийн төгсөгчид, 1-р сургуулийн төгсөгчдийн "Нэгийнхэн" ТББ, проф Р.Энхбат захиралтай МУИС-ийн Математикийн хүрээлэн, цагны төрөлжсөн дэлгүүрийн эзэн математикч Б.Мөнхжаргал (1992 оны МУБИС-ийн төг-

сөгч) нар идэвхи санаачлага гарган ажилласанд баярлаж та бүхнийхээ нэрийн өмнөөс баярлалаа гэж хэлэхэд сэтгэл хангалуун байна. Баяр хүргэе!

Олимпиадад 8-р ангийн 101 сурагч оролцсоноос Нийслэлийн 1-р сургуулийн сурагч Б.Төрхүү 42 оноогоор 1-р байр эзэлж, 8-р ангийн улсын аварга боллоо. УБ хотын 11-р сургуулийн сурагч Г.Амарсанаа 36-н оноогоор, УБ "Сант" сургуулийн сурагч Л.Оюунтөгс 35 оноогоор тус тус 2-р байрыг, УБ 11-р сургуулийн сурагч М.Мөнх-Учрал 29,5 оноогоор, Дархан-Уул аймгийн сурагч Б.Энхбаяр 28 оноогоор, УБ 11-р сургуулийн сурагч Б.Уранчимэг 27 оноогоор тус тус 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоосноос гадна УБ хотын "Олонлог" сургуулийн сурагч Б.Долгормаа, 11-р сургуулийн сурагч О.Булгантамир нар шагналт 4-р байранд шалгараад байна.

Олимпиадад 9-р ангийн төрөлд УБ хотын "Сант" сургуулийн сурагч Б.Пүрэв 22.5 оноогоор 1-р байр эзэлж 9-р ангийн улсын аварга сурагч боллоо. УБ хотын 1-р сургуулийн сурагч Б.Алтангэрэл, Монгол Туркийн хамтарсан сургуулийн сурагч Б.Энхбат нар 22 оноогоор тус тус 2-р байрыг, Нийслэлийн 1-р сургуулийн сурагч М.Цэлмүүн, "Сант" сургуулийн сурагч Х.Цэрэнчимэг, УБ хотын 1-р сургуулийн сурагч С.Цэнд-Аюуш, Монгол Туркийн хамтарсан сургуулийн сурагч Т.Төгөлдөр нар 21.5 оноогоор тус тус 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоосноос гадна УБ хотын 1-р сургуулийн сурагч

Чандмань-Эрдэнэ, "Олонлог" сургуулийн сурагч М.Тэмүүлэн нар 21 оноогоор шагналт 4-р байр эзлэн тусгай шагналаар шагнагдахаар боллоо.

Олимпиадад 12 жилийн сургалттай 10-р ангийн төрөлд нийт 48 сурагч оролцсоноос УБ "Орчлон" сургуулийн сурагч О.Бодрол 32 оноогоор 1-р байр эзэлж, Улсын математикийн 49-р олимпиадын 12 жилийн сургалттай 10-р ангийн аварга сурагч боллоо. УБ "Орчлон" сургуулийн сурагч З.Батзориг, 11-р сургуулийн сурагч Б.Эрдэнэбаяр нар 28 оноогоор 2-р байрыг, Нийслэлийн 1-р сургуулийн сурагч Б.Эрдэнэ 26 оноогоор, "Олонлог" сургуулийн сурагч Г.Баяржавхлан 23 оноогоор, УБ хотын 11-р сургуулийн сурагч Б.Билгүүн 18 оноогоор, 1-р сургуулийн сурагч А.Ананд 17.5 оноогоор тус тус 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоосноос гадна нийслэлийн 11-р сургуулийн сурагч Ж.Төгөлдөр 16 оноогоор шагналт 4-р байранд шалгарлаа.

Олимпиадад 11 жилийн сургалттай 10-р ангийн төрөлд "Олонлог" сургуулийн сурагч А.Сүхбат 32 оноогоор 1-р байр эзэлж Улсын математикийн 49-р олимпиадын 11-р ангийн аврага сурагч боллоо. УБ хотын "Орчлон" сургуулийн сурагч Ш.Золбаяр 31 оноогоор, 11-р сургуулийн сурагч Д.Батзориг 23 оноогоор 2-р байр, нийслэлийн 1-р сургуулийн сурагч Б.Бямба-Эрдэнэ 20.5 оноогоор, "Олонлог" сургуулийн сурагч А.Сумъяабат, нийслэлийн 1-р сургуулийн сурагч Б.Тамир, С.Ганбүх нар 18 оноогоор тус тус 3-р байрыг эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн

ээд бөхлөгөөснээс гадна "Хөвсгөл" аймгийн сурагч Ц.Баянбат 17.5 оноогоор, Орхон аймгийн сурагч Г.Бат 15 оноогоор шагналт 4-р байранд шалгарлаа.

Улсын Математикийн 49-р олимпиадад 11-р ангийн төрөлд 37 сурагч авъяас чадвараа сорисноос нийслэлийн 1-р сургуулийн сурагч Г.Мөнхбаяр 22 оноогоор 1-р байр эзэлж улсын математикийн 49-р олимпиадын 11-р ангийн аварга сурагч боллоо. УБ "Орчлон" сургуулийн сурагч М.Ананд 21 оноогоор, нийслэлийн 1-р сургуулийн сурагч Б.Ганзориг, Монгол Туркийн хамтарсан сургуулийн сурагч Ч.Золбоо нар 14.5 оноогоор 2-р байр, УБ 1-р сургуулийн сурагч Б.Бат-Оргил, Увс аймгийн сурагч Н.Төмөр-Очир нар 14 оноогоор, "Олонлог" сургуулийн сурагч Б.Мөнх-Эрдэнэ 13 оноогоор 3-р байр эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд боллоо. Мөн УБ хотын 11-р сургуулийн сурагч М.Гармаа, Монгол Туркийн хамтарсан сургуулийн сурагч Ч.Очиргарьд нар 9 оноогоор шагналт 4-р байранд шалгарлаа.

Математикийн 49-р Олимпиадад амжилттай оролцсон дээрх нэр бүхий сурагчид, олимпиадад сурагчдаа амжилттай бэлтгэж оролцуулсан багш нарт Монголын нийт математикчдын нэрийн өмнөөс болон хувиасаа чин сэтгэлийн талархал илэрхийлж, халуун баяр хүргэе.

Багш нарын олимпиадыг бага, дунд гэсэн хоёр ангилалаар явуулсны дотроос бага ангийн математикийн 33 багш оролцсоноос, нийслэлийн 1-р сургуулийн багш М.Отгонжаргал 30 оноо

гоор түрүүлж, УБ "Олонлог" сургуулийн багш Б.Намжилмаа 26 оноогоор 2-р байр, Баян-Өлгий аймгийн багш Ш.Хайрал 3-р байр эзэлснээс гадна УБ хотын "Төгс Дэлгэрэх" сургуулийн багш Н.Нямдаваа, УБ "Олонлог" сургуулийн багш М.Чинчимэг нар 17 оноогоор шагналт байранд шалгарлаа.

Дунд ангийн багш нарын олимпиадад нийт 47 багш оролцсоноос УБ хотын "Олонлог" сургуулийн багш Б.Баяржаргал 19 оноогоор түрүүлж, Баянхонгор аймгийн багш С.Пагаан 13 оноогоор II байр, Увс аймгийн багш Р.Одгэрэл 12.5 оноогоор III байрыг эзэллээ. Мөн "Олонлог" сургуулийн багш Б.Ганбилэг 12 оноогоор шагналт 4-р байранд шалгарсан байна.

Б.Баяржаргал нь дунд ангийн математикийн багш нарын ангилалд 5 дахь удаагаа, Нийслэлийн 1-р сургуулийн бага ангийн багш М.Отгонжаргал нь 6 дахь удаагаа түрүүлж аваргын дээд амжилтуудыг тогтоолоо. Нийслэлийн 1-р сургуулийн VIII ангийн сурагч Б.Төрхүү нь авбал зохих 42 оноогоо бүрэн авч энэ олимпиадын "Үнэмлэхүй аварга"-аар тодорлоо. Увс аймгийн математикийн багш Р.Одгэрэл, УБ хотын "Олонлог" сургуулийн 9-р ангийн сурагч Магсаржавын Тэлмүүн нарыг монголын нэрт математикч П.Энхболдын нэрэмжит "Уран бодолтын" шагналаар шагнах нь зүйтэй гэж ММОХороо шийдвэрлэлээ. Амжилт гаргасан багш сурагчиддаа дахин халуун баяр хүргэе э!

Багийн дүнгээр аймаг хотуудыг байр эзлүүлэхэд Н.Гэндэнсүрэн ахлагчтай Улаанбаатар баг дундаж оноо 21,09-өөр 1-р байр,

Я.Лхагвагэрэл ахлагчтай Увс баг дундаж оноо 10,36-аа 2-р байр, П.Сүхбат ахлагчтай Хөвсгөл аймгийн баг дундаж оноо 10.07-оор 3-р байранд шалгарлаа.

2013 оны 7 сарын 18-аас 28-ны өдрүүдэд Колумбын Санта Мартад болох Олон Улсын Математикийн 54-р олимпиадын бэлтгэлд 11-р ангийн сурагч Г.Мөнхбаяр, Б.Ганзориг, В.Бат-Оргил, Орчлон сургуулийн сурагч М.Ананд, Монгол Туркийн хамтарсан сургуулийн сурагч Ч.Золбоо, Увс аймгийн сурагч Н.Төмөр-Очир, Олонлог сургуулийн сурагч Б.Мөнх-Эрдэнэ 11 жилийн сургалттай 10-р ангиас Олонлог сургуулийн сурагч П.Сүхбат, 12 жилийн сургалттай 10-р ангиас Орчлон сургуулийн сурагч О.Бодрол нарыг үлдээхээр ММОХороо шийдвэрлэлээ.

ОУМО-54-ын бэлтгэлд багтаж шалгарсан та бүхэндээ амжилт хүсч, Монголынхоо нэрийг дэлхийн тавцанд дуурсгах хүндтэй бөгөөд хариуцлагатай үйл хэргийн төлөө идэвхи чармайлт гарган сайн бэлтгэж амжилттай оролцохыг Монголын нийт Математикчдын нэрийн өмнөөс даалгаж байна.

Эрдэм оюун дэлгэрч Монголд математикчдын оюун ухаан улам хөгжин дэлгэрэх болтугай. Анхаарал тавьсан та бүхэнд баярлалаа.

## 2 Монголын математикийн XLIX олимпиад

## 2.1 ММО-49, VII ангийн III даваа

Н.Дайвий-Од

VII-A1 (Н.Аргилсан)  $a, b, 2a - 1, ab - 1, a + b$  тоонууд нь нэгэн зэрэг анхны тоо байх бүх  $(a, b)$  хосуудыг ол.

VII-A2 (Т.Гансүх)

• • • •  $3 \times 3$  хэмжээтэй тэгш өнцөгтийн  
 • • • • зангилааны цэгүүдийг тэмдэглэв.  
 • • • • Тэдгээр цэгүүд дээр оройтой гүд-  
 • • • • гэр 4 өнцөгтийн тоог ол.

VII-A3 (Н.Аргилсан) Зөвхөн 0, 1, 2 цифрүүдээс тогтох 30-д хуваагддаг  $10^6$ -аас хэтрэхгүй тоо хичнээн байх вэ?

VII-B1 (Ч.Гантөмөр) Өгөгдсөн 4 оронтой тооны хөрш хоёр цифр хоёулаа 9-с ялгаатай бол уг хоёр цифрийг 1-ээр нэмэгдүүлж болно. Эсвэл хөрш хоёр цифр хоёул 0-ээс ялгаатай бол уг хоёр цифрийг 1-ээр багасгаж болно. Тэгвэл 1234 тооноос

а) 2012

б) 2013 тоонуудыг гарган авч болох уу?

VII-B2 (Ч.Гантөмөр)  $N$  натурал тооны хуваагчид  $d$  ба  $d_1$  бөгөөд  $d_1 > d$  бол  $d_1 > d + \frac{d^2}{N}$  гэж батал.

## VII-B3 (Т.Гансүх)

|    |     |     |     |     |     |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1  | 3   | 6   | 10  | 15  | ... |
| 2  | 5   | 9   | 14  | ... |     |
| 4  | 8   | 13  | ... |     |     |
| 7  | 12  | ... |     |     |     |
| 11 | ... |     |     |     |     |

Бүх натурал тоонуудыг зурагт үзүүлсэн байдлаар бичжээ. Тэгвэл 2013 тооны бичигдэх баганын дугаарыг ол. (Жишээ нь: 14 гэдэг тоо 4-р багананд бичигдсэн байна.)

## 2.2 ММО-49, VIII ангийн III даваа

Н.Аргилсан

VIII-A1 (Т.Гансүх)  $1 \leq a < b < c \leq 12$  байх бүх бүхэл  $a, b, c$  гуравтуудын хувьд  $a \cdot b \cdot c$  үржвэрийг олж. Тэдгээрийн бүх үржвэрүүдийн нийлбэр нь 13-д хуваагдана гэж батал.

VIII-A2 (Ч.Гантөмөр)  $ABC$  гурвалжны  $BC$  талын дундаж цэг  $D$  бөгөөд  $\angle ADB = 45^\circ$ ,  $\angle ACD = 30^\circ$  бол  $\angle BAD$  өнцгийг ол.

VIII-A3 (Н.Аргилсан)  $q < 100$  байх  $p, q$  эерэг бүхэл тоонуудын хувьд  $\frac{3}{7}$ -тай тэнцүү биш бөгөөд  $\frac{3}{7}$ -д хамгийн ойр орших  $\frac{p}{q}$  тоог ол.

VIII-B1 (Н.Аргилсан) Зуланд амрахаар ирсэн 97 сурагчийг 3 бүлэгт хуваав. Эхний бүлгийн сурагчдын  $\frac{4}{5}$ -г, II бүлгийн сурагчдын  $\frac{5}{6}$ -г, III бүлгийн сурагчдийн  $\frac{6}{7}$ -г авч 82 хүнтэй жагсаалын бэлтгэл хийх ёстой байв. Тэгвэл бүлэг бүрд хэдэн сурагч байх вэ? Бүх боломжийг тооцоол.

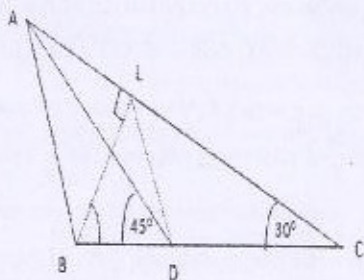
VIII-B2 (Ч.Гантөмөр)  $a, b, c, \frac{a^2}{b+c}, \frac{b^2}{a+c}, \frac{c^2}{a+b}$  натурал тоонууд бол  $a, b, c$  тоонуудыг нэгэн зэрэг хуваадаг 1-ээс их натурал тоо олдохыг харуул.

VIII-B3 (Ч.Гантөмөр)  $x, y$  эерэг бодит тоонууд бөгөөд  $y^3 + y \leq x - x^3$  тэнцэтгэл биш биелэх бол (а)  $y < x < 1$  (б)  $x^2 + y^2 < 1$  гэж тус тус батал.

VIII-A1: (Т. Гансүх) Хэрэв  $a, b, c$  гуравт манай нөхцлийг хангадаг бол  $13 - c, 13 - b, 13 - a$  гуравт мөн манай нөхцлийг хангана.  $a \cdot b \cdot c + (13 - c)(13 - b)(13 - a)$  нийлбэрийн нэмэгдэхүүн тус бүр нь 13-т хуваагдана гэдэг нь шууд харагдах тул бүх үржвэрүүдийн нийлбэр нь 13-т хуваагдана гэдэг нь батлагдана.

VIII-A2:

$B$  оройгоос  $AC$  талд буулгасан перпендикулярийн суурийг



$L$  гэе.  $\angle ACD = \angle BCL = 30^\circ \Rightarrow \angle CBL = 60^\circ \square BLC$  нь тэгш өнцөгт гурвалжин бөгөөд  $\angle BCL = 30^\circ$  гэдгээс.  $BL = \frac{BC}{2} = BD$  болж  $\square BLD$ -зөв гурвалжин болно. Иймд  $LB = LD, \angle LDB = 60^\circ$  болно.  $\angle ADB = 45^\circ$  гэдгээс  $\angle ADL = 15^\circ, \angle DAL = 15^\circ$  тул  $LD = LA$  болно.

$LD = LA = LB$  гэдгээс  $L$  цэг  $BDA$  гурвалжныг багтаасан тойргийн төв мөн. Иймд  $\angle BAD = \frac{1}{2} \cdot \angle BLD = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$  болно.

## VIII-A3: (Н. Аргилсан)

Хамгийн ойр байна.  $\Rightarrow \left| \frac{p}{q} - \frac{3}{7} \right| = \left| \frac{7p-3q}{7q} \right| = \left| \frac{7p-3q}{7q} \right|$   
хамгийн бага байх ёстой ( $\frac{3}{7}$ -тай  $\neq$  тул 0 байж болохгүй).

Иймд хамгийн багадаа  $|7p-3q| = 1$  байх ёстой. Энэ нөхцөлийг хангах  $p, q$  олдох эсэхийг шалгая.

$\Rightarrow 7p-3q = 1$  эсвэл  $7p-3q = -1$  байхаар  $p, q$ -г хайя.

Хэрэв  $q = 99$  бол  $7p-3q = 7p-297 \neq \pm 1$

Хэрэв  $q = 98$  бол  $7p-3q = 7p-294 = 7(p-42) \neq \pm 1$

Хэрэв  $q = 97$  бол  $7p-3q = 7p-291 \neq \pm 1$

Хэрэв  $q = 96$  бол  $7p-3q = 7p-288 = -1 \Rightarrow p = 41$  байна. Энэ үед  $\frac{p}{q} = \frac{41}{96}$  буюу  $\frac{3}{7}$ -тай хоорондох зай нь

$\left| \frac{p}{q} - \frac{3}{7} \right| = \frac{1}{7q} = \frac{1}{672}$ . Хэрэв  $q > 96$  бол  $|7p-3q|$  нь 2-оос их буюу  $\frac{3}{7}$ -тай хоорондох зай нь  $\frac{2}{7 \cdot 99} > \frac{1}{7 \cdot 96}$  байна. Хэрэв  $q > 96$  бол  $\frac{p}{q}$  ба  $\frac{3}{7}$ -ийн хоорондох зай нь  $\frac{1}{7 \cdot 95} > \frac{1}{7 \cdot 96}$  байна.

Иймд хамгийн ойр орших тоо нь  $\frac{41}{96}$  болно.

VIII-B1: (Н. Аргилсан) I нь  $k$ , II нь  $l$ , III нь  $m$  сурагчтай байсан

гэвч  $\frac{4}{5}k + \frac{6}{6}l + \frac{6}{7}m = 282$  гэдгээс  $5/k, 6/l, 7/m$  байх ёстой. Эндээс

$k = 5K, l = 6L, m = 7M$  буюу

$\begin{cases} 5K + 6L + 7M = 97 \\ 4K + 5L + 6M = 82 \end{cases}$  болно. Эндээс  $K + L + M = 15$  гарах

бөгөөд боломжуудыг тооцвол

$$a/ \quad k=5, l=36, m=56$$

$$б/ \quad k=10, l=24, m=63$$

$$в/ \quad k=15, l=12, m=70 \text{ гэсэн } 3 \text{ боломж бий.}$$

VIII-B2: (Ч. Гантөмөр)  $a, b, c \geq 2$  байх нь ойлгомжтой.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2 + (2a+b+c)(b+c) = b^2 + (2b+c+a)(c+a) \\ &= c^2 + (2c+a+b)(a+b) \text{ гэдгээс } (a+b+c)^2 \text{ нь}\end{aligned}$$

$a+b, a+c, c+a$  тоонуудад хуваагдана. Хэрэв  $a+b, b+c, c+a$  тоонууд хос хосоороо харилцан анхны гэвэл

$$\begin{aligned}& (a+b)(b+c)(c+a) \mid (a+b+c)^2 \\ \Rightarrow & (a+b+c)^2 \geq (a+b)(b+c)(c+a) \text{ болох ба нөгөө талаас} \\ & (a+b)(b+c)(c+a) \\ &= (a^2b+b^2c+c^2+ca^2) + (ab^2+bc^2+c^2+ca^2) + 2abc \\ &> (a^2+b^2+c^2) + (2ab+2bc+2ca) \\ &= (a+b+c)^2 \text{ болж зөрчилд хүрнэ.}\end{aligned}$$

Иймд  $a+b, a+c, c+a$  тоонуудыг аль нэг хоёр нь харилцан анхны биш. Жишээлбэл:  $(a+b, b+c) > 1$  болно.  $p$  анхны тоо  $a+b, b+c, c+a$  Тоонуудыг хуваадаг гэе. Эндээс өгсөн нөхцөлөөр

$$p \mid c^2, a^2 \Rightarrow p \mid c, a \Rightarrow p \mid c+a \Rightarrow p \mid b^2 \Rightarrow p \mid b \Rightarrow (a, b, c) \geq p > 1 \text{ болов.}$$

VIII-B3: (Ч. Гантөмөр)

$$\begin{aligned}(a) \quad & x, y > 0 \text{ гэдгээс } y \leq x - x^3 - y^3 < x \text{ бөгөөд } x - x^3 \geq \\ & y + y^3 > 0 \text{ гэдгээс } x(1-x^2) > 0 \text{ буюу } x < 1 \text{ болно. Иймд}\end{aligned}$$

$y \leq x \leq 1$  болов.

(б)  $x^3 + y^3 \leq x - y \Leftrightarrow x^2 - xy + y^2 \leq \frac{x-y}{x+y} \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq \frac{x-y}{x+y} + xy = \frac{x-y+xy(x+y)}{x+y}$  болно.  $xy(x+y) < 1 \cdot y \cdot (1+1) = 2y$  гэдгээс  $x^3 + y^3 \leq \frac{x-y+xy(x+y)}{x+y} < \frac{x-y+2y}{x+y} = \frac{x+y}{x+y} = 1$  болов.

### 2.3 ММО-49, IX ангийн III даваа

Т.Гансүх

IX-A1 (Ч.Гантөмөр)  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  ба  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$  арифметик прогрессууд өгөгдөв. Шинээр

$a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n, \dots$  дараалал байгуулав. Энэ дарааллын эхний 3 гишүүн харгалзан 1440, 1716, 1848 байсан бол энэ дарааллын (а) 2013-р гишүүнийг ол. (б) хамгийн их гишүүнийг ол.

IX-A2 (Т.Гансүх)

$$\frac{2013^2}{(2013-1)(2013^2-1)} + \frac{2013^3}{(2013^2-1)(2013^3-1)} + \dots + \frac{2013^{2013}}{(2013^{2012}-1)(2013^{2013}-1)}$$

нийлбэрийг ол.

IX-A3 (Н.Арсилсан)  $A$  нэг дээр оройтой өнцөг өгөгдөв. Өгөгдсөн өнцгийн дотор орших өгөгдсөн  $O$  цэгийг дайрсан  $l$  шулуун өнцгийн талуудыг  $B$  ба  $C$  цэгүүдээр огтлоно.  $AOB$  ба  $AOC$

гурвалжнуудын талбай харгалзан  $S_1$  ба  $S_2$  бол  $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}$  нийлбэр  $l$  шулууны сонголтоос үл хамаарна гэж батал.

IX-B1 (Т.Гансүх)  $a + b + c + abc = 4$  байх дурын эерэг  $a, b, c$  тоонуудын хувьд

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b+c)$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

IX-B2 (Ч.Гантөмөр)  $x, y \in \mathbb{Z}$  ба  $x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y$  болон  $x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y$  тоонууд 17-д хуваагдах бол  $xy - 12x + 15y$  тоо мөн 17-д хуваагдана гэж батал.

IX-B3 (Т.Гансүх) Аль ч хоёр цэгийнх нь хоорондох зай  $d$ -ээс хэтрэхгүй байх хэдэн цэг хавтгайд өгөгдөв. Эдгээр цэгүүдийг бүгдийг нь талын урт нь  $2d$  байх зөв гурвалжнаар хучиж чадах уу?

IX-A1: (Ч.Гантөмөр)  $a_n, n \geq 1$  ба  $b_n, n \geq 1$  арифметик прогрессуудын ялгаврууд харгалзан  $d_1, d_2$  болог. Тэгвэл  $\forall n \geq 1 : a_n = (n-1)d_1 + a_1, b_n = (n-1)d_2 + b_1$  болж  $a_n b_n = ((n-1)d_1 + a_1)((n-1)d_2 + b_1)$   
 $= (n-1)^2 d_1 d_2 + (n-1)(d_1 b_1 + d_2 a_1) + a_1 b_1$  боно. Хялбарчлах үүднээс  $x = d_1 d_2, y = d_1 b_1 + d_2 a_1, z = a_1 b_1$  гэе. Тэгвэл өгсөн нөхцөлөөс

$$(1) a_1 b_1 = (1-1)^2 x + (1-1)y + z = 1440$$

$$(2) a_2 b_2 = (2-1)^2 x + (2-1)y + z = 1716$$

$$(3) a_3 b_3 = (3-1)^2 x + (3-1)y + z = 1848 \text{ болно.}$$

$$(1) \Rightarrow z = 1440 \text{ ба үүнийг (2), (3)-д орлуулбал}$$

$$(4) x + y = 276$$

$$(5) 4x + 2y = 408 \text{ болж эндээс } x = -72, y = 348 \text{ болно.}$$

$$\text{Иймд } a_n b_n = -72(n-1)^2 + 348(n-1) + 1440$$

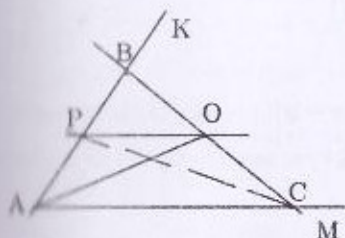
18-A9: (Г.Гансүх)  $a = 2013$  гэвэл нийлбэрийн нэмэгдэхүүн бүр нь  $\frac{a^k}{(a^{k-1}-1)(a^k-1)}$  хэлбэртэй гэсэн үг. Уг нэмэгдэхүүнийг дараах байдлаар хувиргая.

$$\begin{aligned} \frac{a^k}{(a^{k-1}-1)(a^k-1)} &= \frac{a}{(a-1)^2} \cdot \frac{a^{k-1}}{(1+a+\dots+a^{k-2}) \cdot (1+a+\dots+a^{k-1})} \\ &= \frac{a}{(a-1)^2} \left( \frac{1}{1+a+\dots+a^{k-2}} - \frac{1}{1+a+\dots+a^{k-1}} \right). \end{aligned}$$

Үүнийг нийлбэр дээр тавин хялбарчилбал эхний болон хамгийн сүүлийн гишүүд л үлдэнэ. Иймд

$$\begin{aligned} S &= \frac{2013}{2012^2} \cdot \left( 1 - \frac{1}{1+2013+2013^2+\dots+2013^{2012}} \right) \\ &= \frac{2013}{2012^2} \left( \frac{2013^{2013}-2013}{2013^{2013}-1} \right) \text{ болж бодогдоно.} \end{aligned}$$

18-A9: (Н.Аргилсан)



$\angle KAM$  өнцгийн дотор  $O$  цэг өгөгдөв.  $O$ -цэгийг дайруулан татсан  $l$  шулуун  $AK$  цацрагийг  $B$  цэгээр,  $AM$  цацрагийг  $C$  цэгээр огтолдог бол  $\frac{1}{S_{AOB}} + \frac{1}{S_{AOC}}$  нийлбэр  $l$  шулууны сонголтоос үл хамаарна гэж батал.

$$\frac{1}{S_{AOB}} + \frac{1}{S_{AOC}} = \frac{S_{AOB} + S_{AOC}}{S_{AOB} \cdot S_{AOC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{AOB} \cdot S_{AOC}} = \left| OP \parallel AM \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{S_{ABC}}{S_{AOB} \cdot S_{AOC}} \cdot \frac{S_{APO}}{1} = \frac{S_{ABC}}{S_{AOC}} \cdot \frac{S_{APO}}{S_{AOB}} \cdot \frac{1}{S_{APC}} \\
&= \frac{S_{ABC}}{S_{AOC}} \cdot \frac{AP}{AB} \cdot \frac{1}{S_{APO}} = \frac{S_{ABC}}{S_{AOC}} \cdot \frac{S_{APC}}{S_{ABC}} \cdot \frac{1}{S_{APO}} \\
&= |S_{AOC} = S_{APC}| = \frac{1}{S_{APO}} = const \quad \blacktriangle
\end{aligned}$$

IX-B1: (Т.Гансүх) Коши-Буняковскийн тэнцэтгэл бишээс

$$\sum_{cyc} a \cdot \sqrt{b+c} \cdot \sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{b+c}} \geq (a+b+c)^2 \text{ гэж гарна. Үүнээс гадна}$$

$$\sqrt{(a+b+c)(a \cdot (b+c) + b(c+a) + c(a+b))} \geq \sum_{cyc} a \cdot \sqrt{b+c}$$

болохыг харж болно. Иймд эндээс

$$\sum \frac{a}{\sqrt{b+c}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (a+b+c) \cdot \sqrt{\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}}$$

болох ба одоо  $a+b+c \geq ab+bc+ca$  гэж батлах хэрэгтэй гэсэн үг. Шүрын

тэнцэтгэл биш дээр  $r=1$  гэвэл

$$\frac{9abc}{a+b+c} \geq 4(ab+bc+ca) - (a+b+c)^2 \text{ гэж гаргаж болно.}$$

Хэрэв энд  $a+b+c < ab+bc+ca$  гэж авбал

$$\begin{aligned}
\frac{9abc}{a+b+c} &> 4(ab+bc+ca) - (a+b+c)^2 \\
&= (a+b+c)(4 - (a+b+c)) = abc \cdot (a+b+c)
\end{aligned}$$

болох тул  $a+b+c < 3$  эндээс гэж гарна. Гэвч  $abc < 1$  гэдгээс  $4 = a+b+c+abc < 4$  гэж зөрчил үүснэ. Ингэснээр тэнцэтгэл биш батлагдана.

IX-B2: (Ч.Гантөмөр)

$$\begin{aligned}
x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y &= (x-y)(x-2y+1) \equiv 0 \pmod{17} \\
\Rightarrow (a)(x-y) &\equiv 0 \pmod{17} \text{ эсвэл } x-2y+1 \equiv 0 \pmod{17}
\end{aligned}$$

байхаас аргагүй.

(a)  $x \equiv y \pmod{17}$  болог.

$$x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y \equiv y^2 - 2y^2 + y^2 - 5y + 7y$$

$$\equiv 2y \equiv 0 \pmod{17} \text{ гэдгээс}$$

$y \equiv 0 \pmod{17}$  болж  $x \equiv 0 \pmod{17}$  болно. Иймд

$$xy - 12x + 15y \equiv 0 \pmod{17} \text{ байх нь ойлгомжтой.}$$

(6)  $x \equiv 2y - 1 \pmod{17}$  болог. Эндээс

$$x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y \equiv y^2 - 5y + 6 \pmod{17} \text{ болох}$$

бөгөөд энэ үед

$$xy - 12x + 15y \equiv 2 \cdot (y^2 - 5y + 6) \equiv 0 \pmod{17} \text{ болж}$$

батлах зүйл гарна.  $\Delta$



Эхлээд тэдгээр цэгүүдийг  $\frac{d}{\sqrt{3}}$  радиустай дугуйгаар хучиж болохыг баталъя. Хос бүрийнх нь координдох зай  $d$  байх 3 цэг авъя.

Зураг 1

Цэг бүрийн хувьд түүн дээр төвтэй  $d$  радиустай дугуй дотор бусад бүх цэг орших тул (Зураг 1) дээр байгуулсан дурын бүх цэг агуулагдана. Харин уг дүрс нь  $d$  талтай зөв гурвалжныг багтаасан тойргоор үүсэх дугуйд бүтнээрээ агуулагдах ба тэр дугуйн радиус нь  $\frac{d}{\sqrt{3}}$  юм.

$\frac{d}{\sqrt{3}}$  радиустай тойрог нь  $2d$  талтай гурвалжны багтсан тойрог болох тул өгөгдсөн цэгүүдийг  $2d$  талтай зөв гурвалжнаар хучиж чална.

**Цэмэлт.** Энэ үнэлгээ нь торгон үнэлгээ биш бөгөөд уг бодлогыг илүү сайжруулах боломжтой.

## 2.4 ММО-49, 11 жилийн X аягийн III даваа

Ч.Гантөмөр

X-A1 (Ч.Гантөмөр)  $0 < \forall a, b, c < 1$  тоонуудын хувьд

$$2^a(b+c)^{1-a} + 2^b(c+a)^{1-b} + 2^c(a+b)^{1-c} \leq 4(a+b+c)$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

X-A2 (Б.Сандагдорж)  $P(x)$  өгөгдсөн бүхэл коэффициенттэй олон гишүүнт бол(а)  $P(x) \cdot Q(x) = R(x^2)$  байх  $Q$  ба  $R$  бүхэл коэффициенттэй олон гишүүнтүүд олдоно гэж батал.(б)  $P(x) \cdot Q(x) = R(x^3)$  байх  $Q$  ба  $R$  бүхэл коэффициенттэй олон гишүүнтүүд олдоно гэж батал.

X-A3 (Н.Дайвий-Од) Гурвалжны оройнууд дээр төвтэй, уул оройгоос гарсан өндөртэй тэнцүү радиус бүхий тойргууд гурвалжныг бүрэн хучиж чаддаггүй бол түүний их өнцгийн байж болох хамгийн бага утгыг ол.

X-B1 (Т.Гансүх) Аль ч хоёр цэгийнх нь хоорондох зай  $d$ -ээс хэтрэхгүй байх хэдэн цэг хавтгайд өгөгдөв. Эдгээр цэгүүдийг бүгдийг нь талын урт нь  $\frac{2d}{3}$  байх зөв 6 өнцөгтөөр хучиж чадах уу?X-B2 (Ч.Гантөмөр)  $m+n$  сондгой тоо байх  $m, n$  натурал тоонууд өгөгдөв.  $|x-y| \in \{m, n\}$  байх дурын  $x, y$  натурал тоонуудыг авахад  $x, y$ -ийн зөвхөн нэг нь  $A$ -д орно гэсэн нөхцөл хангах  $\mathbb{N}$ -ийн дэд олонлог  $A$  олдохгүй гэж батал.

Х-III (Ч.Гантөмөр)  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  байх бодит тоонууд өгөгдөн.  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ -ын сэлгэмэл  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  болог. Хэрэв  $i < j$  боловч  $b_i > b_j$  байвал  $(b_i, b_j)$  хосыг "эрэмбэ алдсан" гэе. Жишээлбэл  $n = 5$  үед  $(a_2, a_4, a_5, a_3, a_1)$  сэлгэмэлд  $(a_2, a_1)$ ,  $(a_4, a_3)$ ,  $(a_4, a_1)$ ,  $(a_5, a_3)$ ,  $(a_5, a_1)$ ,  $(a_3, a_1)$  гэсэн нийт 6 ширхэг "эрэмбэ алдсан" хос байна.  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  дарааллын сэлгэмэлүүд дотор яг 2 ширхэг "эрэмбэ алдсан" хос бүхий хичнээн сэлгэмэл байх вэ?

Х-А1: (Ч.Гантөмөр)  $0 < r < 1$  ба  $0 \neq x > -1$  бол

$(1+x)^r < 1+rx$  тэнцэтгэл биш биелэнэ (Бернулийн тэнцэтгэл биш). Бид энэ тэнцэтгэл бишийг ашиглан баталгааг гүйцэтгэе.

$$(*) \quad \left( \frac{2}{(b+c)} \right)^a = \left( 1 + \frac{1 - \frac{b+c}{2}}{\frac{b+c}{2}} \right)^a \\ \leq 1 + \frac{a(1 - \frac{b+c}{2})}{\frac{b+c}{2}} = \frac{2a + b + c}{b+c} - a \text{ болно.}$$

Энд  $(0 < a < 1$  ба  $\frac{1 - \frac{b+c}{2}}{\frac{b+c}{2}} > 0, (-1)$  гул Бернулийн т/бишийг хэрэглэх нөхцөл бүрдсэн).  $(*)$ -ийн 2 талыг  $(b+c)$ -ээр үржвэл:

$$2^a(b+c)^{1-a} \leq 2a + b + c - a(b+c) \text{ болно. Адилаар}$$

$$2^b(a+c)^{1-b} \leq 2b + a + c - b(a+c)$$

$$2^c(b+c)^{1-c} \leq 2c + a + c - c(a+b); \text{ тэнцэтгэл бишүүд биелэнэ.}$$

Эдгээрийг нэмбэл

$$2^a(b+c)^{1-a} + 2^b(a+c)^{1-b} + 2^c(b+c)^{1-c} \\ \leq 4(a+b+c) - 2(ab+bc+ac) \text{ болох ба}$$

$0 < a, b, c < 1$  гэдгийг тооцвол

$4(a+b+c) - 2(ab+bc+ac) < 4(a+b+c)$  болж батлах тэнцэтгэл биш гарна. Баталгаанаас харахад өгөгдсөн тэнцэтгэл бишид тэнцэлдээ хүрэх нөхцөл байхгүй аж.

**Theorem** (Bernoulli inequality)

(а)  $r > 1$  эсвэл  $r < 0$  болог.  $0 \neq x > -1$  бодит тооны хувьд

$$(1+x)^r \geq 1+rx \text{ тэнцэтгэл биш биелэнэ.}$$

(б)  $0 < r < 1$  болог.  $0 \neq x > -1$  бодит тооны хувьд

$$(1+x)^r \leq 1+rx \text{ тэнцэтгэл биш биелэнэ.}$$

X-A2: (Б.Сандагдорж)

$P(x) = (a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \dots) + x(a_1 + a_3x^2 + \dots)$  өгөгдсөн бүхэл коэффициенттэй олон гишүүнт болог.

(а)  $P(x) = (a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \dots) + x(a_1 + a_3x^2 + \dots)$  ба

$Q(x) = (a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \dots) - x(a_1 + a_3x^2 + \dots)$  гэж авбал

$Q(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$  ба

$$P(x) \cdot Q(x) = (a_0 + a_2x^2 + \dots)^2 - x^2(a_1 + a_3x^2 + \dots)^2 = R(x^2)$$

нь  $x^2$ -аас хамаарсан бүхэл коэффициенттэй олон гишүүнт болно.

(б)  $P(x) = A(x) + xB(x) + x^2C(x)$  ба

$$A(x) = a_0 + a_3x^3 + a_6x^6 + \dots;$$

$$B(x) = a_1 + a_4x^3 + a_7x^6 + \dots;$$

$C(x) = a_0 + a_5x^3 + a_8x^6 + \dots$  болог. (ө/х  $P(x)$ -г ингэж бичье).

$A(x), B(x), C(x)$  нь  $x^3$ -ээс хамаарсан бүхэл коэффициенттэй олон гишүүнтүүд мөн.

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$  адилтгал ашиглая. Энэ адилтгалд  $a \leftrightarrow A(x)$ ,  $b \leftrightarrow xB(x)$ ,  $c \leftrightarrow x^2C(x)$  гэж орлуулбал

$$\begin{aligned} A^3(x) + x^3 \cdot B^3(x) + x^6 \cdot C^3(x) &= R(x^3) \\ &= (A(x) + xB(x) + x^2C(x)) \cdot (A^2(x) + x^2B^2(x) + x^4C^2(x) - \\ &\quad xA(x)B(x) - x^2A(x)C(x) - x^3B(x)C(x)) \text{ болно. Сүүлийн тэн-} \\ &\text{цэтгэлийн баруун талын эхний үржигдэхүүн } P(x) \text{ болохыг} \\ &\text{тооцвол} \end{aligned}$$

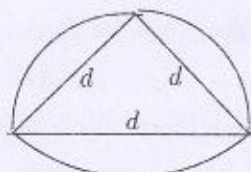
$$\begin{aligned} Q(x) &= A^2(x) + x^2B^2(x) + x^4C^2(x) - xA(x)B(x) - x^2A(x)C(x) - \\ &\quad x^3B(x)C(x) \text{ ба } R(x^3) = A^3(x) + x^3B^3(x) + x^6C^3(x) \text{ нь } x^3\text{-ээс} \\ &\text{хамаарсан бүхэл коэффициенттэй олон гишүүнт мөн. } \blacktriangle \end{aligned}$$

Х-А3: (Н.Дайвий-Од) Гурвалжин хурц өнцөгт ба тэгш өнцөгт бол бодлогын нөхцөлд дурдсан тойргууд гурвалжныг бүтэн хучиж чадна гэдгийг хялбархан харж болно. Харин мохоо өнцөгт гурвалжны хувьд гурвалжны оройнууд дээр төвтэй, уул оройгоос гарсан өндөртэй тэнцүү радиус бүхий тойргууд анхны гурвалжныг бүтэн хучиж байхын тулд мохоо өнцгийн эсрэг талын дурын цэг аль нэг оройн тойрогт агуулагдах шаардлагатай болно. Гэтэл мохоо өнцгийн орой дээр төвтэй тойрогт энэ хэрчмийн цорын ганц цэг (өндрийн суурь) агуулагдах тул бусад цэг нь хажуугийн оройнууд дээр төвтэй тойрогт харъяалагдана гэсэн үг. Их талыг  $c$  гэвэл энэ нь  $h_a + h_b = c$  гэсэн үг.  $\frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} \geq \frac{4RS}{ab}$  цаашид  $a + b \geq 2R$  ба

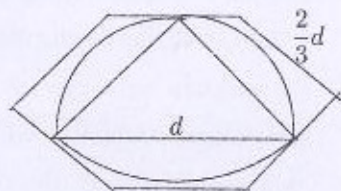
$\sin \alpha + \sin \beta \geq 1$  болох ба эндээс  $2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \geq 1$ ,  
 мөн  $2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \frac{1}{\cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)} \geq 1$ ,  $\cos \left( \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{1}{2}$  ба  $\gamma = 120^\circ$   
 гэж гарна.  $120^\circ$  өнцөгтэй адил хажуут гурвалжны хувьд  
 дээрх тойргууд нь гурвалжнаа бүтэн хучиж чаддаг болохыг  
 харуулж болох ба харин  $\gamma > 120^\circ$  байхад  $h_a + h_b < c$   
 болж дээрх тойргуудад үл харьяалагдах ямар нэг хэрчим  
 мохоо өнцгийн тал дээрээс олдоход хүрнэ.

X-B1: (Т.Гансүх)

Аль ч хоёр цэгийнх нь хоорондох зай  $d$ -ээс хэтрэхгүй гэсэн тул уг цэгүүд нь бүгд агуулагдах дүрс байгуулья.  $d$  талтай зөв гурвалжны орой бүрээс  $d$  радиустай нөгөө 2 оройг нь холбосон нум татъя. Тэгвэл тэдгээр нумуудаар хашигдсан дүрсэд бүх цэг агуулагдана (Зураг1). Энэ байгуулсан дүрсийг  $\frac{2}{3}d$  талтай зөв 6 өнцөгтөд багтааж болохыг хялбар харж болно (Зураг2).



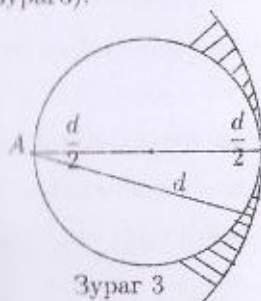
Зураг 1



Зураг 2

**Санамж.** Олимпиадад оролцогчид гол төлөв бүх цэг  $\frac{d}{2}$  радиустай дугуйд багтана гэсэн буруу дүгнэлт хийж байсан. Энэ дүгнэлт нь алдаатай болохыг хялбар шалгаж

болно (Зураг3).



Зураг 3

Нэг цэг нь A байхад зураасалсан хэсэгт дахин цэг байрлах боломжтой. Гэтэл уг хэсэг нь дугуйн гадна байна.

Ж-102 (Ч.Гантөмөр)

Эсрэгээс нь тийм A олонлог олддог гэж санаа.

$x \in A \Rightarrow x + n \notin A \Rightarrow x + n + m \in A \Rightarrow x + 2n + m \notin A \Rightarrow x + 2n \in A \Rightarrow x + 3n \notin A \Rightarrow x + 3n + m \in A \Rightarrow x + 4n + m \notin A \Rightarrow x + 4n \in A$  г.м  
 $x + 2k \cdot n \in A$  байх юм. Эндээс

(1)  $x + mn \in A \Leftrightarrow m$ -тэгш гэж харж болно. Нөгөө талаас  
 $x + m + n \in A \Rightarrow x + m \notin A \Rightarrow x + 2m \in A \Rightarrow \dots \Rightarrow x + 2k \cdot m \in A$  болж эндээс

(2)  $x + mn \in A \Leftrightarrow n$ -тэгш гэж харж болно. Гэтэл  $m + n$ -сондгой тоо ө.х  $m, n$ -ийн аль нэг нь тэгш тул (1), (2) нөхцөл зөрчилдөж байна. Иймд бодлогийн нөхцөл хангах A олонлог олддохгүй. ▲

Ж-103 (Ч.Гантөмөр) 1, 2, ..., n дарааллаас яг 1 ширхэг эрэмбэ алдагдсан хос бүхий сэлгэмэлийг дараах хоёр хувиргалтаар n үүсгэж болохыг ойлгоход төвөггүй. Үүнд:

$1^0, (1, 2, \dots, j-1, j, j+1, j+2, \dots, k-1, k, k+1, k+2, \dots, n)$

$\rightarrow (1, 2, \dots, j-1, j+1, j, j+2, \dots, k-1, k, k+1, k+2, \dots, n)$   
 $2^0. (1, 2, \dots, k, k+1, k+2, \dots, n) \rightarrow (1, 2, \dots, k+2, k, k+1, \dots, n)$  эс  
 вэл  $(1, 2, \dots, k, k+1, k+2, \dots, n) \rightarrow (1, 2, \dots, k+1, k+2, k, \dots, n)$   
 Эхний  $1^0$  хувиргалт нь дэс дараалсан салангид хосуудын  
 байрыг сэлгэхэд, харин  $2^0$  хувиргалт нь дэс дараалсан ги-  
 равтын хувьд хийгдэж буй хэрэг юм. Одоо  $1^0, 2^0$  хувиргал-  
 туудаар үүсэх сэлгэмэлүүдийг тоолъё.

$1^0$ -ийн хувьд:  $j = 1$  бол  $k$ -ийн авч болох утгын тоо  $n - 3$  ба

$j = 2$  бол  $k$ -ийн авч болох утгын тоо  $n - 4$  г.м

$1 + 2 + \dots + (n - 3) = \frac{(n - 3)(n - 2)}{2}$  сэлгэмэл үүснэ.

$2^0$ -ийн хувьд: аль ч тохиолдолд үүсэх сэлгэмэлийн тоо  $n - 2$

байна. Иймд үүсч болох нийт сэлгэмэлийн тоо

$2(n - 2)$  болно. Бодлогын нөхцөлийг хангах сэлгэмэлийн  
 тоо  $\frac{(n - 3)(n - 2)}{2} + 2(n - 2) = \frac{(n + 1)(n - 2)}{2}$  болов.  $\blacktriangle$

## 2.5 ММО-49, 12 жилийн X ангийн III даваа

Ч.Гантөмөр

X'-A1 (Н.Аргилсан)  $a + b + c = 3$  байх дурын  $a, b, c$  эерэг бодит  
 тоонуудын хувьд

$$\frac{a^2}{a + 2b^2} + \frac{b^2}{b + 2c^2} + \frac{c^2}{c + 2a^2} \geq 1$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

X'-A2 (Б.Сандагдорж)  $\{1, 2, 3, \dots, 48, 49\}$  олонлогийн аль ч хоёр  
 элементийнх нь зэрөө 10-аас үл хэтрэх чанартай 4 элемент-

тэй бүх дэд олонлогийн тоог ол.

X<sup>1</sup>-A3 (Ч.Гантөмөр)  $O$  төвтэй тойрогт багтсан  $ABCD$  трапецийн сууриуд  $AB, CD$  болно. Трапецийн диагонылууд  $M$  цэгт огтлолцох бөгөөд  $OM = 2$  бол  $AB - CD$  ялгаврыг

(а)  $\angle AMB = 60^\circ$  (б)  $\angle AMD = 60^\circ$  үед тус тус ол.

X<sup>1</sup>-B1 (Н.Аргилсан)  $S_n = [(\sqrt{n-1} + \sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2]$ ,  $n \in \mathbb{N}$  болог.  $S_1 + S_2 + \dots + S_{2013}$  нийлбэрийг ол. (Энд  $[a]$ -аар  $a$ -тооноос ихгүй хамгийн их бүхэл тоог тэмдэглэж  $a$ -ийн бүхэл хэсэг гэнэ).

X<sup>1</sup>-B2 (Ч.Гантөмөр)  $n \geq 3, n \in \mathbb{I}$  болог.  $S = \{k \in \mathbb{N} \mid (k, n) = (k+1, n), 1 \leq k \leq n-1\}$  бол  $S$  олонлогийн бүх элементүүдийн үржвэрийг  $n$ -д хуваахад гарах үлдэгдлийг ол. (Энд  $(a, b)$ -ээр  $a, b$  тоонуудын ХИЕХ-ыг тэмдэглэнэ).

X<sup>1</sup>-B3 (Б.Сандагдорж) 4см, 5см, 6см талтай гурвалжны нэг тал дээр орших  $D$  пэгээс нөгөө хоёр талд буулгасан перпендикулярин сууриуд  $P$  ба  $Q$  болно.  $PQ$  хэрчмийн уртын авч болох хамгийн бага утгыг ол.

X<sup>1</sup>-A1: (Н.Аргилсан)

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a+2b^2} &= a - \frac{2ab^2}{a+2b^2} \geq a - \frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{ab^4}} = a - \frac{2}{3}\sqrt[3]{a^2b^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{\text{сүс}} \frac{a^2}{a+2b^2} &\geq 3 - \frac{2}{3}(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}}) \text{ болно. Одоо} \\ a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}} &\leq \frac{1}{3}[(ab+ab+1) + (bc+bc+1) + (ca+ca+1)] \\ &= 1 + \frac{2}{3}(ab+bc+ca) \text{ болно.} \end{aligned}$$

Мөн  $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \Rightarrow ab+bc+ca \leq 3$ . Иймд

$$a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}} \leq 1 + \frac{2}{3} \cdot 3 = 3.$$

$$\text{Иймд } \sum_{\text{сүс}} \frac{a^2}{a+2b^2} \geq 3 - \frac{2}{3} \cdot 3 = 3 - 2 = 1. \quad \blacktriangle$$

X'-A2: (Б.Сандагдорж) Дэд олонлогийн элементийг

$x < y < z < w$  гэж эрэмбэлвэл  $3 \leq w - x \leq 10$  байх ёстой.

$w - x = k$ , ( $3 \leq k \leq 10$ ) байхаар  $(x, w)$  хосыг сонгох нийт боломжийн тоо  $49 - k$  ба ингэж  $(x, w)$  хосыг сонгосны дараа  $y, z$ -ийн авах бүх утгын олонлог

$\{x+1, x+2, \dots, x+k-1 = w-1\}$  буюу  $y, z$  нь  $C_{k-1}^2$  ширхэг утга авна. Иймд  $w - x = k$  байхаар  $\{x, y, z, w\}$  дэд олонлогийг сонгох боломж  $(49 - k) \cdot C_{k-1}^2$  болно. Эндээс

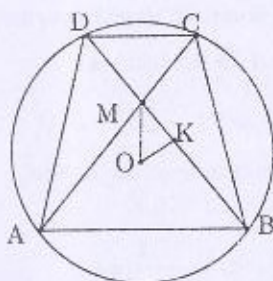
$$\sum_3^{10} (49 - k) \cdot C_{k-1}^2 = \sum_2^9 (48 - k) \cdot C_k^2 = \sum_2^9 (48 - k) \cdot \frac{k(k-1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_2^9 (49k^2 - 48k - k^3) = \frac{1}{2} \sum_1^9 (49k^2 - 48k - k^3)$$

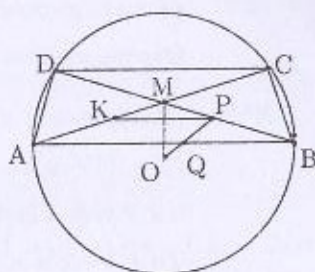
$$= \frac{49}{2} \sum_1^9 k^2 - 24 \sum_1^9 k - \frac{1}{2} \sum_1^9 k^3 = 4890$$

болно.

X'-A3: (Ч.Гантөмөр)



Зураг1



Зураг2

(а)  $\angle AMB = 60^\circ$  байг. Тэгвэл  $AMB$  ба  $CMD$  гурвалжнууд зөв гурвалжин мөн.  $O$ -оос  $BD$ -д буулгасан перпендикулярин суурийг  $K$  гэе. зураг1  $OM$  нь  $\angle AMB$ -ийн биссектрисс тул  $\angle OMK = 30^\circ$  болж  $OK = \frac{OM}{2} = 1$

болно. Иймд  $KM = \sqrt{OM^2 - OK^2} = \sqrt{3}$ . Нөгөө талаас  $AB - CD = BK - MD = BK + KM - (DK - KM) = 2 \cdot KM$  (энд  $DK = BK$  гэдгийг сана) болж  $AB - CD = 2\sqrt{3}$  болно.

(б)  $\angle AMD = 60^\circ$  байг. Тэгвэл  $\angle AMB = 120^\circ$  болно.  $O$ -г дайрсан  $AC$ -тэй параллель шулуун  $AB$  суурийг  $Q$  цэгээр,  $BD$  диагоналийг  $P$  цэгээр тус тус огтолцдог гэе. зураг2  $OM$  нь  $\angle AMB$ -ийн биссектрисс тул  $\angle OPM = \angle OMP = 60^\circ$ . Иймд  $OMP$  гурвалжин зөв гурвалжин мөн. Эндээс

$DM = PB$  байх нь ойлгомжтой.  $DMC$  ба  $BPQ$  гурвалжнуудын хувьд  $BP = DM, \angle DMC = 120^\circ = \angle BPQ$  ба  $\angle DCM = \angle PBQ$  (багтсан 4 өнцөгт гэдгээс) гэдгээс  $\triangle DMC, \triangle BPQ$  нь тэнцүү гурвалжнууд болно. Эндээс  $DC = BQ$  болж  $AB - DC = AQ = KP$  болно.  $KAQP$  па-

$$\Rightarrow 40 \cos \alpha = 5 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{8} \text{ } \alpha\text{-хурц. } PQ\text{-ийн хамгийн бага}$$

$$\text{утга } AH \cdot \sin \alpha; \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{63}{64};$$

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \cdot \sin \alpha \Rightarrow AH \cdot a = bc \cdot \sin \alpha \Rightarrow AH = \frac{bc}{a} \sin \alpha.$$

$$AH \cdot \sin \alpha = \frac{bc}{a} \sin^2 \alpha = \frac{5 \cdot 4}{6} \cdot \frac{63}{64} = \frac{105}{32}; \min(PQ)_{\min} = \frac{105}{32}.$$

## 2.6 ММО-49, Багын багшийн III даваа

Н.Дайвий-Од

ББ-А1 (Н.Дайвий-Од)



Тэгш өнцөгтийн урт талуудыг 6-н тэнцүү хэсэгт, богино талуудыг 5-н тэнцүү хэсэгт хуваан зурагт үзүүлсэн байдлаар холбов. Хэрэв тэгш өнцөгтийн талбай  $S$  бол  $ABCD$  паралелограммын талбайг ол.

ББ-А2 (Т.Гансүх)

$$\frac{3}{1! + 2! + 3!} + \frac{4}{2! + 3! + 4!} + \dots + \frac{2013}{2011! + 2012! + 2013!}$$

нийлбэрийг ол. (энд  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ )

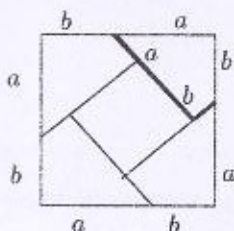
ББ-А3 (Ч.Гантөмөр)  $9 \times 9$  хүснэгтийн дурын 46 нүдийг будахад дор хаяж 3 нүд нь будагдсан байх  $2 \times 2$  квадрат ямагт олдохыг батал.

ББ-В1 (Н.Дайвий-Од) Дарааллын эхний гишүүн 1 бөгөөд аливаа гишүүн нь өмнөх гишүүн дээрээ түүний цифрүүдийн нийл-

бэрийг нэмэхэд гардаг бол энэ дарааллын гишүүд дотор 201303201303 гэдэг тоо байх уу?

ББ-В2 (Б.Сандагдорж) 4-д хуваагдах зэрэгцээ цифрүүд нь ялгаатай 6-н оронтой тоо хичнээн байх вэ?

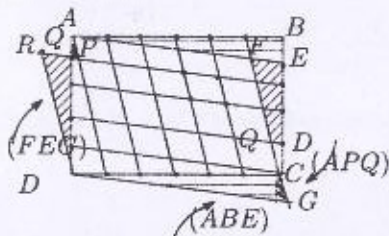
ББ-В3 (Н.Аргилсан)



Зурагт өгөгдсөн байдлаар квадратыг хуваав. Хэрэв  $a, b$  нь анхны тоо бол зураг дээрх жижиг квадратын талбайг том квадратын талбайд харьцуулсан харьцаа  $\frac{1}{N}$  байх  $N$ -ийн авч болох хамгийн бага утгыг ол.

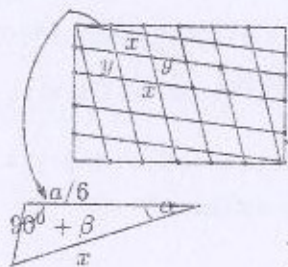
ББ-А1: (Н.Дайвий-Од)

1-р бодолт:



$$S = (ABCD) = (AFGDRP) = 29S'. \quad \blacktriangle$$

2-р бодолт:



Энэ гурвалжинд  
sin-ийн теорем  
бичвэл

$$\frac{a/6}{\sin(180^\circ - (90^\circ + \beta) - \alpha)} = \frac{x}{\sin(90^\circ + \beta)} \quad \text{ба}$$

$$\frac{a}{6} \cos \beta = x \cos(\alpha + \beta) \quad \text{болно (I).}$$

Харин нөгөө гурвалжинаас  $\frac{b}{5} \cos \alpha = y \cos(\alpha + \beta)$  болно (II).

ABCD параллелограмм нь  $x, y$  талтай ба хурц өндөг нь  $90^\circ - (\alpha + \beta)$  болно. Иймд

$$S' = xy \cdot \sin(90^\circ - (\alpha + \beta)) = xy \cdot \cos(\alpha + \beta). \quad \text{(I), (II)-оос}$$

$$\frac{ab}{5 \cdot 6} \cos \beta \cdot \cos \alpha = xy \cos(\alpha + \beta) \Rightarrow$$

$$\frac{S \cos \beta \cdot \cos \alpha}{5 \cdot 6 \cos(\alpha + \beta)} = xy \cos(\alpha + \beta) = S' \quad \text{(III)}$$

$$b, a/6 \text{ катеттэй гурвалжнаас } \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{6}\right)^2}};$$

$$\sin \beta = \frac{a}{6\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{6}\right)^2}}$$

$$a, b/5 \text{ катеттэй гурвалжнаас } \sin \alpha = \frac{b}{5\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{5}\right)^2}};$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{5}\right)^2}} \quad \text{болох ба (III)-т орлуулбал}$$

$$S' = \frac{S}{5 \cdot 6 - 1 \cdot 1} = \frac{S}{29} \quad \Delta$$

ББ-А2: (Т.Гансүх)

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{1! + 2! + 3!} + \frac{4}{2! + 3! + 4!} + \dots + \frac{2013}{2011! + 2012! + 2013!} \\
&= \sum_{n=1}^{2011} \frac{n! + (n+1)! + (n+2)!}{n+2} = \sum_{n=1}^{2011} \frac{n!(1+n+1+n^2+3n+2)}{n+2} \\
&= \sum_{n=1}^{2011} \frac{1}{n!(n+2)} = \sum_{n=1}^{2011} \frac{n+1}{(n+2)!} = \sum_{n=1}^{2011} \left( \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} \right) \\
&= \frac{1}{2!} - \frac{1}{2013!} \cdot \blacktriangle
\end{aligned}$$

ББ-А3: (Ч.Гантөмөр)

|    |   |    |    |    |
|----|---|----|----|----|
| 1  | 2 | 3  | 4  |    |
| 7  | 6 | 5  |    | 16 |
| 8  | 9 |    | 15 | 14 |
| 10 |   |    |    |    |
|    |   | 11 | 12 | 13 |

9 × 9 хүснэгтийг зурагт үзүүлсэний адилаар 16 ширхэг 2 × 2 квадрат ба 17 ширхэг 1 × 1 нүднүүдэд хуваана. Хэрэв эдгээр 16 ширхэг 2 × 2 квадратын аль нэгийгх нь 3 нүд будагдсан байвал бодлого бодогдоно. Иймд эдгээр 16 квадрат бүрт 2-оос олонгүй нүд будагдсан буюу 1, 2, ..., 16 дугаартай хэсгийн будагдсан нүдний тоо 16 · 2 = 32-оос ихгүй байх тохиолдлыг сонирхоё.

Хүснэгтийн диагоналийг ороосон, 17 ширхэг 1 × 1 нүднүүдээр үүсэх хэсгийн дараах дүрсүүдэд хуваая.



Хэрэв эхний дэрсийн 5 нүд бүгд будагдсан байвал 3 нүд нь будагдсан байх 2 × 2 квадрат олдох нь ойлгомжтой. Иймд эхний дүрсэд ихдээ 4 нүд нь будагдсан байг. Үүнтэй адилаар үлдэх гурван дүрс бүрт ихдээ 3 нүд л будагдсан байна.

Хэрэв тийм биш бол бодлого бодогдоно. Ингээд анхны том хүснэгтийн диагоналийг ороосон, 17 ширхэг  $1 \times 1$  нүднүүдээр үүсэх хэсэгт хамгийн олондоо  $4 + 3 \cdot 3 = 13$  нүд будагдана. Иймд  $9 \times 9$  хүснэгтийн маань будагдсан нүдний тоо ихдээ  $32 + 13 = 45$  болж 1 нүд заавал нэмж будагдах учиртай өөрөөр хэлбэл дор хаяж 3 нүд нь будагдсан  $2 \times 2$  квадрат олдоно. ▲

ББ-В1: (Н.Дайвий-Од)

Дарааллыг үргэлжлүүлбэл 1,2,4,8,16,7,14,5,... тооллолыг 3-т хуваахад гарах үлдэгдэл нь (1, 2) гэсэн үг юм. Харин 201303201303 нь 3-т хуваагдах тоо тул энэ тоо үүсэхгүй. ▲

ББ-В2: (Б.Сандагдорж)

4-д хуваагдахын тулд сүүлчийн хоёр оронгоор үүсэх 2 оронтой тоо 4-т хуваагдах ба ялгаатай цифрээр бичигдсэн 4-т хуваагдах 2 оронтой тоо 22 байна. Ямар нэгэн 4-т хуваагдах  $\overline{ab}$  тоогоор төгссөн 6 оронтой цифрүүдийн дарааллыг авч үзвэл түүний тоо нь  $A_6 = 22 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 22 \cdot 9^4$  болно. Гэхдээ энэ дараалал 0-ээр эхэлж болж байгаа ба харин 0-ээр эхэлбэл дараагийн цифр нь 0 биш байх болно. Хэрэв манай нөхцөлийг хангах  $n$ -оронтой тооны тоог  $F_n$  гэвэл  $A_6 = F_6 + F_5$  болох нь илт. Үүнтэй адилаар:

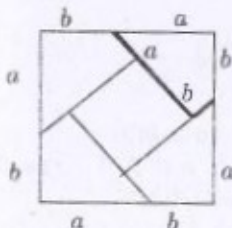
$$22 \cdot 9^4 = A_6 = F_6 + F_5$$

$$22 \cdot 9^3 = A_5 = F_5 + F_4$$

$$22 \cdot 9^2 = A_4 = F_4 + F_3$$

$22 \cdot 9^1 = A_3 = F_3 + F_2$  ба  $F_2 = 22$  гэдгээс орлуулж олбол:  
 $F_6 = 22 \cdot 9^4 - 22 \cdot 9^3 + 22 \cdot 9^2 - 22 \cdot 9 + 22 = 22(9^4 - 9^3 + 9^2 - 9 + 1)$   
 болно.

ББ-ВЗ: (Н.Аргилсан)



Жижиг квадратын тал  $(a-b)$   
 байна  $\Rightarrow \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} = \frac{1}{N}$  ба  $a, b$   
 анхны тоо  $\Rightarrow \frac{a-b}{a+b} = \frac{1}{\sqrt{N}}$  байна.  
 $a, b \in \mathbb{Q}$  тул  $\frac{1}{\sqrt{N}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow N = k^2$   
 байна.  $\Rightarrow \frac{a-b}{a+b} = \frac{1}{k}$  болно  
 $\Rightarrow (k-1)a = (k+1)b$  буюу  $k$ -ийн  
 авч болох хамгийн бага утгын  
 хувьд авч үзье.

Хэрэв  $k = 1$  бол  $0 = 2b \Rightarrow \phi$ .

Хэрэв  $k = 2$  бол  $a = 3b \Rightarrow$  буюу  $a: 3$  хүрч  $a$ -анхны тоо  
 гэдэгтэй зөрчинө.

Хэрэв  $k = 3$  бол  $2a = 4b \Rightarrow$  буюу  $a = 2b \Rightarrow a: 2$ .

Хэрэв  $k = 4$  бол  $3a = 5b \Rightarrow a = 5, b = 3$  болно.  $a, b$ -анхны  
 тоо учир болно. Иймд  $N = 16$  байна. ▲

## 2.7 ММО-49, Дундын багшийн III даваа

Ц Дашдорж

ДБ-А1 Өгсөн  $a, n \in \mathbb{N}$  тоонуудын хувьд  $n \mid a^n - 1$  бол  $n(a-1) \mid a^n - 1$   
 байхыг батал.

ДБ-А2  $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$  унитар олон гишүүнтийн бүх язгуурын модуль  
 1 байг.  $\exists n, k \in \mathbb{N}, P(x) \mid (x^n - 1)^k$  гэж батал.

ДБ-А3  $3 < p \in \mathbb{P}$ ,  $\forall \phi \neq T \subseteq \{0, 1, \dots, p-1\}$ -ийн хувьд  
 $E(T) = \{(x_1, \dots, x_{p-1}) \mid x_i \in T, p \mid \sum_{k=1}^{p-1} kx_k\}$  бол  
 $|E(\{0, 1, 2\})| \leq |E(\{0, 1, 3\})|$  гэж батал. Энд тэнцэл биелнэ  
 $\Leftrightarrow p = 5$  гэж харуул.

ДБ-В1  $n \mid 2^{2^n+1} + 1$ ,  $n \nmid 2^n + 1$  байх төгсгөлгүй олон натурал тоо  
 $n$  олдохыг харуул.

ДБ-В2  $n \geq 0$  үед  $\sum_k C_{n-k}^k (-1)^k = S_n$  гэе.

$$S_n = \begin{cases} (-1)^n, & n \equiv 0(3) \\ (-1)^{n+1}, & n \equiv 1(3) \\ 0, & n \equiv 2(3) \end{cases} \quad \text{гэж батал.}$$

ДБ-В3 (ММК-II, 10. 9в). 6).

$$G_n(x, y) = \prod_{\varepsilon \in U_n} (x - \varepsilon y) = x^n - y^n, \quad \Phi_n(x, y) = \prod_{\varepsilon \in U'_n} (x - \varepsilon y)$$

байг.

$$z = x + iy \text{ үед } W_n(x, y) = \Phi_n(z, \bar{z}) \text{ гэе.}$$

а)  $x, y \in \mathbb{Z}$ .  $(x, y) = 1$ ,  $p \mid W_n(x, y)$ ,  $p \nmid n$  ба  $p \equiv -1(4)$  бол  
 $p \equiv -1(n)$  гэж батал.

б)  $p \equiv -1(n)$  байх анхны тоо  $p$  хязгааргүй олон гэж батал.

ДБ-А1: Бодолт1. (Б.Ганбилэг) Эсрэгээс нь

$$\exists p \in \mathbb{P} : v_p(n(a-1)) > v_p(a^n - 1) \quad (1)$$

гэвэл  $v_p(a-1) = \ell \geq 1$  болох тул ММКI, 1.9 б), лемма а)-аар  
 $p > 2$  үед  $v_p(a^n - 1) = v_p(a-1) + v_p(n) = v_p(n(a-1))$  болж (1)-  
 д зөрчил гарав. Иймд  $p = 2$ . Хэрэв  $v_2(a-1) = \ell \geq 2$  бол мөн

дээрх лемм 1 б)-ээр яг адил зөрчил гарна. Иймд  $v_2(a-1) = 1$  байг. Тэгвэл  $a-1 = 4k+2$ ,  $a = 4k+3$ ,  $n = 2^\alpha q$ ,  $q$  сондгой,  $(4k+3)^q = A$  гэвэл  $A \equiv 3(4)$  тул

$$v_2(A-1) = 1, \quad v_2(A+1) \geq 2, \quad v_2(A^{2^\beta} - 1) = 1$$

$$a^n - 1 = A^{2^\alpha} - 1 = (A-1)(A+1)(A^2+1)(A^{2^2}+1)\dots(A^{2^{\alpha-1}}+1)-$$

$$\text{ээс } v_2(a^n - 1) \geq 1 + 2 + \alpha - 1 = \alpha + 2$$

$$v_2(n(a-1)) = v_2(n) + v_2(a-1) = \alpha + 1 \text{ буюу}$$

$$v_2(n(a-1)) < v_2(a^n - 1) \text{ нь мөн (1)-д зөрчив.}$$

Бодолт 2 (Ганболд, "Олонлог" сургууль)

$$n|a^n - 1 \text{ гэдгээс } (a, n) = 1 \text{ гэж гарна. } \delta = |a|_n \text{ гэвэл } \delta|n = \delta n_1.$$

Эсрэгээс нь

$$n(a-1) \nmid a^n - 1 \quad (1)$$

гэж үзье.

$$a^n - 1 = (a^\delta)^{n_1} - 1 = (a^\delta - 1)((a^\delta)^{n_1-1} + \dots + a^\delta + 1) \quad (2)$$

$$(a^\delta)^{n_1-1} + \dots + a^\delta + 1 \equiv \underbrace{1 + \dots + 1}_{n_1} = 0(n_1) \text{ учир (1) ба (2)-оос}$$

$$\delta(a-1) \nmid a^\delta - 1. \quad (3)$$

Энд  $\delta = |a|_n \leq \varphi(n) < n$  тул (1)-ээс (3)-г гаргасан үйлдлийг давтаж гүйцэтгэвэл

$$\delta = |a|_n > \delta_1 = |a|_\delta > \delta_2 = |a|_{\delta_1} > \dots \text{ гэсэн натурал}$$

тоонуудын төгсгөлгүй буурах дараалал олдоход хүрч зөрчил гарав. Иймд (1) үл биелнэ, өөрөөр хэлбэл  $n(a-1)|a^n - 1$  байна.

ДБ-А2: (Еркехулан)  $\deg P = m$ ,

$$P(x) = (x - z_1) \dots (x - z_m) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0,$$

$|z_i| = 1, i = \overline{1, m}$  гэвэл Виетийн томьёогоор

$$a_{m-i} = \pm \delta_i(z_1, \dots, z_m) \text{ тул } |a_{m-i}| \leq C_m^i. \text{ Эндээс } a_{m-i} \text{ бүр}$$

$2C_m^i + 1$  ширхэг утгыг авч чадна, өөрөөр хэлбэл боломжит

бүх  $P(x)$  олон гишүүнтийн олонлог  $V$  төгсгөл.

$\forall r \in \mathbb{N}, P_r(x) = (x - z_1^r) \dots (x - z_m^r)$  гэе.  $P_r(x)$  бүрийн

коэффициентүүд  $z_i, i = \overline{1, m}$ -үүдээс хамаарах тэгш хэмт

олон гишүүнт (ТХОГ) тул ТХОГ-ийн үндсэн теоремоор

бүхэл коэффициенттэй болох ба  $|z_i^r| = 1$  тул  $P_r \in V, |V| < \infty$

тул  $\exists r \neq s \in \mathbb{N}, P_r(x) = P_s(x)$  болно. Эндээс

$$\{z_i^r | i = \overline{1, m}\} = \{z_i^s | i = \overline{1, m}\} \text{ гэж гарах боловч } \forall i, z_i^r = z_i^s$$

гэж хэлж чадахгүй.  $S(V) = \{\alpha \in \mathbb{C} | \exists f \in V, f(\alpha) = 0\}$

гэвэл  $|V| < \infty$  тул мөн  $|S(V)| < \infty$  байна.  $S_i = \{z_i^r | r \in \mathbb{N}\}$

гэвэл  $S_i \subseteq S(V)$  байна, учир нь  $P_r(z_i^r) = 0, P_r \in V$ . Иймд

$|S_i| < \infty \Rightarrow \exists t < s \in \mathbb{N}, z_i^t = z_i^s$  буюу  $z_i \in U_{n_i}, n_i = s - t$  энд

$$U_{n_i} = \sqrt[n_i]{1} \text{ (ММКП, 10.7.14). } n = n_1 \dots n_m \text{ гэвэл}$$

$$U_{n_i} \subseteq U_n \Rightarrow \forall i, z_i^n = 1 \text{ буюу өгсөн } P(x)\text{-ын язгуур бүр } x^n - 1\text{-}$$

ийн язгуур болно.  $P(x)$ -ын хамгийн өндөр давтамжтай

язгуур нь  $k$  удаа давтагдсан гэвэл  $P(x) | (x^n - 1)^k$  болно.

ДБ-А3: (Г.Батзаяа)  $A = \{0, 1, 2\}, B = \{0, 1, 3\}, f_T(x) = \sum_{a \in T} x^a$  ба

$$F_T(x) = f_T(x) \cdot f_T(x^2) \cdot f_T(x^3) \cdot \dots \cdot f_T(x^{p-1}) = \sum_{i=0}^{p(p-1)} a_i x^i \quad (1)$$

гэвэл  $a_i$  нь  $i = x_1 + 2x_2 + \dots + (p-1)x_{p-1}$  тэгшитгэлийн

шийдийн тоо болно ( $x_i \in T$ ).  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}$  гэвэл

$$1 + \omega^j + \dots + \omega^{(p-1)j} = \begin{cases} 0, & p \nmid j \\ p, & p \mid j \end{cases} \quad \text{тул}$$

$$p \cdot |E(T)| = F_T(1) + \dots + F_T(\omega^{p-1}). \quad (2)$$

Мөн  $p \nmid i$  үед  $\{1, \omega, \dots, \omega^{p-1}\} = U_p = \{1, \omega^i, \dots, \omega^{i(p-1)}\}$  тул

$$F_T(\omega^i) = F_T(\omega) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} f_T(x) &= (x - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_s) \Rightarrow F_T(\omega) = \prod_{i=1}^{p-1} f_T(\omega^i) \\ &= \frac{(1 - \alpha_1^p) \cdot \dots \cdot (1 - \alpha_s^p)}{(1 - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (1 - \alpha_s)} = \frac{(1 - \alpha_1^p) \cdot \dots \cdot (1 - \alpha_s^p)}{f_T(1)} \end{aligned} \quad (4)$$

$$p \cdot |E(T)| \stackrel{(2),(3)}{=} F_T(1) + (p-1)F_T(\omega) \quad (5)$$

$$f_T(1) = |T|, \quad F_T(1) \stackrel{(1)}{=} (f_T(1))^{p-1} = |T|^{(p-1)}.$$

$$F_A(\omega) \stackrel{(1)}{=} \prod_{i=1}^{p-1} (1 + \omega^i + \omega^{2i}) = \prod_{i=1}^{p-1} \frac{1 - \omega^{3i}}{1 - \omega^i} = 1. \quad (6)$$

$f_B(x) = x^3 + x + 1 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$  гэвэл  $\alpha\beta\gamma = -1$

$$\begin{aligned} \text{тул } F_B(\omega) &\stackrel{(4)}{=} \frac{(1 - \alpha^p)(1 - \beta^p)(1 - \gamma^p)}{3} \\ &= \frac{2 + (\alpha\beta)^p + (\beta\gamma)^p + (\gamma\alpha)^p - (\alpha^p + \beta^p + \gamma^p)}{3} \end{aligned} \quad (7)$$

$n \geq 0$  үед  $a_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ ,  $b_n = (\alpha\beta)^n + (\beta\gamma)^n + (\gamma\alpha)^n$  гэе.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1 \\ \alpha\beta\gamma = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha^3 = -\alpha - 1 \\ \beta^3 = -\beta - 1 \\ \gamma^3 = -\gamma - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{n+3} = -(a_{n+1} + a_n).$$

$$\begin{cases} \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1 \\ (\alpha\beta)(\beta\gamma) + (\beta\gamma)(\gamma\alpha) + (\gamma\alpha)(\alpha\beta) = 0 \quad \text{тул} \\ (\alpha\beta)(\beta\gamma)(\gamma\alpha) = 1 \end{cases}$$

$$(x - \alpha\beta)(x - \beta\gamma)(x - \gamma\alpha) = x^3 - x^2 - 1 \Rightarrow b_{n+3} = b_{n+2} + b_n$$

Одоо  $n = 5$  үед  $b_5 = a_5 + 1, n \geq 6$  үед

$b_{n+1} > b_n, b_{n+1} > |a_{n+1}| + 1$  болохыг баталъя (индукц).

$b_{5,6,7} = 6, 10, 15; a_{5,6,7} = 5, 1, -7$  буюу суурь үнэн.  $k$ -д үед

гээд  $k \rightarrow k+1$  шилжилт хийе.  $b_{k+2} = b_{k+1} + b_{k-1} > b_{k+1}$  бол

$$b_{k+2} = b_{k+1} + b_{k-1} > b_k + b_{k-1} > (|a_k| + 1) + (|a_{k-1}| + 1)$$

$$> |-(a_k + a_{k-1})| + 1 = |a_{k+2}| + 1. \text{ Иймд } p = 5 \text{ үед}$$

$$F_B(\omega) \stackrel{(7)}{=} \frac{2 + b_p - a_p}{3} = \frac{2 + b_5 - a_5}{3} = \frac{2 + 6 - 5}{3} = 1 \text{ буюу}$$

$$p \cdot |E(B)| \stackrel{(5)}{=} F_B(1) + (p-1) = |B|^{p-1} + p-1$$

$$= 3^{p-1} + p-1 = p|E(A)|.$$

$$p > 5 \text{ үед } F_B(\omega) = \frac{2 + b_p - a_p}{3} > 1$$

$$\stackrel{(6)}{=} F_A(\omega) \Leftrightarrow |E(B)| > |E(A)|.$$

ДБ-В1: Бодолт1 (Э.Төрбат)  $a_n = 2^{3^n} + 1$  гэвэл  $n > 1$  үед

$\exists p_n \in \mathbb{P}, 3 < p_n | a_n, p_n \nmid a_{n-1}$  (МК1, 1.9 б), Лемм2 б)-г  $p =$

үед  $(a, b) \neq (2, 1)$  бол  $\exists q \in \mathbb{P}, q | a^3 + b^3, q \nmid a + b$

$(2, -1) \neq (a, b) \neq (1, -2)$  бол  $\exists q \in \mathbb{P}, q | a^3 - b^3, q \nmid a - b$  гэж

томъёолон баталж болно. Үүнийг ММК1-ийн VI хэвлэлээр

харж болох юм).  $b_n = p_n \cdot 3^{n-1}$  гэе. Одоо  $b_n$ -үүд нь бодлогын

нөхцөлийг хангахыг харуулъя. Фермагийн теоремоор

$2^{b_n} + 1 \equiv a_{n-1}(p_n) \Rightarrow b_n \nmid 2^{b_n} + 1$ . МК, 1.9 б), Лемма а)-аар

$$3^n | 2^{b_n} + 1 = 3^n \cdot q. \quad (1)$$

Иймд  $c_n = 2^{2^{b_n}+1} + 1 = 2^{3^n \cdot q} + 1 = (2^{3^n} + 1)(\dots) = a_n \cdot q_1$ -ээс  $p_n | c_n$  гэж гарлаа.  $3^{n-1} | c_n$  болох нь МК, 1.9 б) Лемма а)-аас гарна. Иймд  $b_n | c_n$  боллоо.

Бодолт2 (Г.Баярмагнай)  $a_1 = 57$  байх  $a_n = 2^{a_{n-1}} + 1$  рекуррент харьцааг сонирхоё.  $a_1 \nmid a_2$  ба  $a_1 | a_3$  байх нь хялбархан харагдана.  $a_n$  сондгой тул индукцээр  $a_n | a_{n+2}$  (ММК, 1.1.8 а). Хэрэв  $a_n = a_{n-1} \cdot p + r, 0 < r < a_{n-1}$ , бол

$$a_{n+1} = 2^{a_n-1 \cdot p + r} + 1 = 2^r (2^{a_{n-1} \cdot p} \pm 1) - (\pm 2^r - 1) = a_n \cdot p_1 + r_1$$

ба  $0 < r_1 < a_n$  байх тул индукцээр  $a_n \nmid a_{n+1}$ . Иймд  $\{a_n\}$  дараалал бодлогын нөхцлүүдийг биелүүлнэ.

ДБ-В2: Бодолт1 (Г.Баярмагнай)  $n \geq 0$  байг.  $C_n^m$ -ийг классик утгаар нь буюу  $n < k$  бол  $C_{n-k}^k = 0, k < 0$  бол  $C_{n-k}^k = 0, n > 0$  ба  $k = 0$  бол  $C_{n-k}^k = 0$  байна гэж тооцсон тохиолдолд  $S_n = \sum_k C_{n-k}^k (-1)^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{n-k}^k (-1)^k$  гэж бичиж болно. Паскалийн дүрэм

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1} \quad (1)$$

нь мөн  $k \in \mathbb{Z}$  бүрийн хувьд хүчинтэй. Иймд

$$S_{n+1} \stackrel{(1)}{=} \sum_k (-1)^k (C_{n-k}^k + C_{n-k}^{k-1}) = \sum_k (-1)^k C_{n-k}^k + \sum_k (-1)^k C_{n-k}^{k-1}$$

(Сүүлчийн нийлбэрт  $k-1$ -ийг  $k$ -аар соливол)

$$\begin{aligned}
&= \sum_k (-1)^k C_{n-k}^k + \sum_k (-1)^{k+1} C_{n-1-k}^k = \sum_k (-1)^k (C_{n-k}^k - C_{n-1-k}^k) \\
&\stackrel{(1)}{=} \sum_k (-1)^k C_{n-1-k}^{k-1} = -S_{n-2} \text{ буюу} \\
&S_n = -S_{n-3}
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
S_0 &= C_{0-0}^0 (-1)^0 = 1, S_1 = C_{1-0}^0 (-1)^0 = 1, \\
S_2 &= C_{2-0}^0 (-1)^0 + C_{2-1}^1 (-1)^1 = 1 - 1 = 0 \text{ ба}
\end{aligned}$$

$n = 3k + a$ ,  $a \in \mathbb{Z}_3$  үед

$$\begin{aligned}
S_n &\stackrel{(2)}{=} (-1)^k S_a = (-1)^{3k} S_a \\
&= \begin{cases} (-1)^{3k} S_0 = (-1)^{3k} = (-1)^n, \text{ хэрэв } a = 0 \text{ буюу } n \equiv 0(3) \\ (-1)^{3k} S_1 = (-1)^{3k} = (-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}, a = 1 \text{ буюу } n \equiv 1(3) \\ (-1)^{3k} S_2 = 0, a = 2 \text{ буюу } n \equiv 2(3) \end{cases}
\end{aligned}$$

Э.Төрбат мөн (2)-г ашигласан бодолт хийсэн.

Бодолт 2  $\{S_n\}_{n \geq 0}$  дарааллын еуф-ийг МКП, 12.3 ө)-оор бод-

$$\begin{aligned}
\text{вол } S(x) &= \sum_{n \geq 0} S_n x^n = \sum_{n \geq 0} x^n \left( \sum_{k \geq 0} (-1)^k C_{n-k}^k \right) \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} (-1)^k C_{n-k}^k x^n = \sum_{k \geq 0} (-1)^k x^{n-k} \sum_{k \geq 0} C_{n-k}^k x^k \\
&= (-1)^n \sum_k (-1)^{n-k} x^{n-k} (1+x)^{n-k} \\
&= (-1)^n \sum_k (-1)^{n-k} (x+x^2)^{n-k} = (-1)^n \cdot \frac{1}{1+x+x^2}.
\end{aligned}$$

$$\varepsilon \in U'_3, 1+x+x^2 = (1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2x),$$

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon x)} - \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2x)} \text{ ба}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots+x^n+\dots \text{ байдгийг анхаарвал}$$

$$S_n = (-1)^n \left[ \frac{\varepsilon^n}{1-\varepsilon} - \frac{\varepsilon^{2n+1}}{1-\varepsilon} \right] = (-1)^n \frac{\varepsilon^n(1-\varepsilon^{n+1})}{1-\varepsilon} \text{ болно.}$$

Иймд

$$n = 3k \text{ үед } S_{3k} = (-1)^n \frac{\varepsilon^{3k}(1-\varepsilon)}{1-\varepsilon} = (-1)^n$$

$$n = 3k+1 \text{ үед } S_{3k+1} = (-1)^n \frac{\varepsilon(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon}$$

$$= (-1)^n (\varepsilon + \varepsilon^2) = (-1)^{n+1} \\ n = 3k + 2 \text{ үед } S_{3k+2} = (-1)^n \frac{\varepsilon^2(1 - \varepsilon^3)}{1 - \varepsilon} = 0.$$

ДБ-ВЗ. а)  $n > 1$  ба  $z = x + iy$ ,  $V_n(x, y) = \frac{1}{2i} G_n(z, \bar{z}) = \frac{1}{2i} (z^n - \bar{z}^n)$   
 буюу  $\operatorname{Im} z^n = iV_n(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ ,  $V_n(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ ,  
 $\operatorname{Re} z^n = U_n(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ ,

$$z^n = (x + iy)^n = U_n(x, y) + iV_n(x, y) \quad (1)$$

$$(x^2 + y^2)^n = U_n^2(x, y) + V_n^2(x, y) \quad (2)$$

Цаашид  $U_n(x, y)$  ба  $V_n(x, y)$ -г  $U_n, V_n$  гэж хялбарчлан бичээд  $z^n$ -ийн бодит ба хуурмаг олон гишүүнт(ог)-үүд гэж нэрлэж болно.

$2iV_n(x, y) = (z^n - \bar{z}^n) = \prod_{d|n} \Phi_d(z, \bar{z})$  [ММО-48 х.52]-ээс Мёбиусын томъёогоор

$$\Phi_n(z, \bar{z}) = \prod_{d|n} (2iV_d(x, y))^{\mu(n/d)} = (2i)^{\sum_{d|n} \mu(n/d)} \cdot \prod_{d|n} V_d(x, y)^{\mu(n/d)} \\ = \prod_{d|n} V_d(x, y)^{\mu(n/d)} = W_n(x, y) \quad (3)$$

болно, учир нь  $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$  байдаг.

$$\Phi_n(x, y) = \frac{x^n - y^n}{P_n(x, y)} = \frac{T_n(x, y)}{\prod_{d|n, d \neq 1, n} \Phi_d(x, y)} \text{ ээс}$$

$\Phi_2(x, y) = x + y$  ТХОГ тул индукцэд үзэж буйгаар  $\Phi_n(x, y)$  нь ТХОГ болох нь гарна. Иймд

$\Phi_n(z, \bar{z}) = \Phi_n(\bar{z}, z) = \Phi_n(z, \bar{z})$ -ээс  $n > 1$  үед

$$\Phi_n(z, \bar{z}) = W_n(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y] \quad (4)$$

гэж гарлаа,  $W_n(x, y)$  нь ТХОГ биш юм.  $n > 1$  үед

$\Phi_n(z, \bar{z}) = W_n(x, y)$ -ийг  $\Phi_n(x, y)$ -ийн хэлбэрийн цэвэр бодит хэсэг гэж нэрлэе.

$x^n - 1 = \prod_{\varepsilon \in U_n} (x - \varepsilon)$ ,  $\Phi_n(x) = \prod_{\varepsilon \in U'_n} (x - \varepsilon)$  томъёонуудыг нэгэн төрлийн хэлбэрт бичвэл

$x^n - y^n = \prod_{\varepsilon \in U_n} (x - \varepsilon y)$ ,  $\Phi_n(x, y) = \prod_{\varepsilon \in U'_n} (x - \varepsilon y)$ . Энд  $x, y$ -ийг  $z, \bar{z}$ -ээр сольвол

$$\frac{1}{2i}(z^n - \bar{z}^n) = V_n(x, y) = \frac{1}{2i} \prod_{d|n} \Phi_d(z, \bar{z})$$

$$= y \cdot \Phi_n(z, \bar{z}) \cdot \prod_{\substack{n \neq d|n \\ d \neq 1}} \Phi_d(z, \bar{z}) \stackrel{(3)}{=} W_n(x, y) \cdot H_n(x, y) \quad (5)$$

(4)-өөс

$$H_n(x, y) = y \cdot \prod_{\substack{d \neq 1, n \\ d|n}} W_d(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y] \quad (6)$$

гэж мөн гарна. (5), (6)-аас  $1, n \neq d|n$  бүрийн хувьд

$$\frac{V_n}{V_d} = W_n K_{n,d} \quad (7)$$

$\exists K_{n,d} \in \mathbb{Z}[x, y]$  гэж гарна.

(1)-д  $n \rightarrow nk$  гэвэл  $z^{nk} = (U_n + iV_n)^k = U_{nk} + iV_{nk}$  болох тул

$$V_{kn} = V_n [C_k^1 U_n^{k-1} - C_k^3 U_n^{k-3} V_n^2 + \dots] \quad (8)$$

(1)-д  $n \rightarrow n_1 + n_2$  гэвэл  $z^{n_1+n_2} = (U_{n_1} + iV_{n_1})(U_{n_2} + iV_{n_2})$

болох тул

$$V_{n_1+n_2} = U_{n_1} V_{n_2} + U_{n_2} V_{n_1} \quad (9)$$

**Теорем1.**  $x, y \in \mathbb{Z}, (x, y) = 1, p | W_n(x, y), p \nmid n$  ба  $p \equiv -1(4)$  бол  $p \equiv -1(n)$  байна.

$\uparrow p | W_n$  ба (5)-аас

$$V_n \equiv 0(p) \quad (10)$$

$p \nmid m, p \equiv -1(4)$  тул (7)-оос  $\forall d | n, d \neq 1$ -ийн хувьд

$$V_{\frac{n}{d}} \not\equiv 0(p) \quad (11)$$

болно: Хэрэв  $V_{\frac{n}{d}} \equiv 0(p)$  бол

(8)-д  $k \rightarrow d, n \rightarrow n/d$  гэж авбал

$$\frac{V_n}{V_{n/d}} = C_d^1 U_{n/d}^{d-1} - C_d^3 U_{n/d}^{d-3} V_{n/d}^2 \pm \dots \equiv d U_{n/d}^{d-1}(p). \text{ Энд (7)-}$$

г анхаарвал  $d U_{n/d}^{d-1} \equiv 0(p)$  гэж гарна. Иймд эсвэл  $p | d | n$  байна, энэ үед  $p | n$  гэсэн зөрчил гарна. Эсвэл  $U_{n/d} \equiv 0(p)$  байна, энэ тохиолдолд  $U_{n/d}^2 + V_{n/d}^2 \equiv 0(p)$  болох тул (2)-оос  $(x^2 + y^2)^{n/d} \equiv 0(p), x^2 + y^2 \equiv 0(p)$  гарч  $p \equiv 3(4)$  үед  $x \equiv 0 \equiv y(p)$  болох тул энэ нь  $(x, y) = 1$  гэж өгсөнд зөрчнө.

Одоо  $V_{n/d}$  ба  $V_{p+1}$ -үүдийг авч үзье.

(8)-д  $n \rightarrow 1, k \rightarrow p+1$  гэж авбал

$$V_{p+1} = y[C_{p+1}^1 x^p - C_{p+1}^3 x^{p-2} y^2 \pm \dots + (-1)^{\frac{p-1}{2}} C_{p+1}^p x y^{p-1}]$$

$p \equiv -1(4)$  учир [ ] дахь сүүлчийн тэмдэг сөрөг ба

$\nu = 2, \dots, p-1$  үед  $C_{p+1}^\nu \equiv 0(p)$  тул

$V_{p+1} \equiv (p+1)(x^p y - x y^p)(p)$ . Иймд Фермагийн теоремоор

$$V_{p+1} \equiv 0(p) \quad (12)$$

$d | n$ -ийг  $\frac{n}{d} = (p+1, n)$  гэж авбал  $\exists h, k \in \mathbb{N} \frac{n}{d} = h(p+1) - kn$ ,

өөрөөр хэлбэл:

$$h(p+1) = \frac{n}{d} + kn [(a, b) = au + bv = (au - abs) + (bv + abs) \\ = au_1 + bv_1$$

гэж бичиж болох тул ямагт  $u > 0, v < 0$  гэж үзэж чадна].

(8) ба (12)-оос  $V_{h(p+1)} \equiv 0(p)$ . (10)-аас  $V_{kn} \equiv 0(p)$ . Иймд  $U_{kn}V_{n/d} \equiv 0(p)$ .  $p \equiv -1(4)$ ,  $(x, y) = 1$  ба  $V_{kn} \equiv 0(p)$  гэдгээс (2)-ыг анхаарвал  $U_{kn} \not\equiv 0(p)$  гэж гарна. Иймд  $V_{n/d} \equiv 0(p)$  гэж гарна, энд (11)-г анхаарвал  $d = 1$  гарна. Энэ нь  $(p+1, n) = n$  буюу  $n|p+1 \Leftrightarrow p \equiv -1(n)$ .  $\downarrow$

б)  $V_n(x, y)$  ба  $W_n(x, y)$  дахь  $x$ -ийн хамгийн өндөр зэргийг агуулсан гишүүний коэффициент нь  $\frac{1}{y}V_n(x, y)\Big|_{x=1, y=0} = m$

ба  $W_n(1, 0) = \Phi_n(1, 1) = \prod_{d|n} \left(\frac{n}{d}\right)^{\mu(d)} > 0$  болох нь (5)

ба (3)-аас гарна. Эндээс  $x/y$  үл хураагдах бутархай нь хүрэлцэхүйц их эерэг тоо бол  $W_n(x, y)$ -ийн утга нь эерэг гэж гарна. Одоо  $\exists a/b$  үл хураагдах бутархай,  $W_n(a, b) < 0$  гэдгийг харуулъя:

$$W_n(x, y) = \Phi_n(x + iy, x - iy) = \prod_{r \in \mathbb{Z}_n^*} [(x + iy) - \varepsilon^r((x - iy))] \\ = \prod [(1 - \varepsilon^r)x + i(1 + \varepsilon^r)y]$$

ба үүнд харгалзах нэгэн төрлийн биш олон гишүүнт

$W_n(x, 1)$ -ийн бүх язгуур бодитой:

$$\xi_r = -i \frac{\varepsilon^{-r} + 1}{\varepsilon^{-r} - 1} = -i \cdot \frac{\varepsilon^{-r}}{\varepsilon^{-r}} \cdot \frac{1 + \varepsilon^r}{1 - \varepsilon^r} = i \cdot \frac{\varepsilon^r + 1}{\varepsilon^r - 1} = \xi_r$$

ба  $\xi_r$ -үүд ба  $U'_n$ -ийн  $\varepsilon^r$  элементүүд нь урвуутай бутархай шугаман функц  $f(x) = i \cdot \frac{x+1}{x-1}$ -ээр холбогдож байгаа тул  $\xi_r \neq \xi_s \Leftrightarrow \varepsilon^r \neq \varepsilon^s$  буюу  $\xi_r, r \in \mathbb{Z}_n^*$ -үүд бүгд ялгаатай.

Үүгээр бодит коэффициенттэй ялгаатай бодит язгууртай

$W_n(x, 1)$  олон гишүүнт нь  $x$  бодит утгуудыг авахад эерэг ба сөрөг утгыг авна. Иймд  $\exists a/b$  үл хураагдах бутархай ба

$W_n(a/b, 1) < 0$  буюу

$W_n(a, b) = b^{\varphi(n)} \cdot W_n(a, 1) < 0$ . Эндээс

$\exists a, b, (a, b) = 1, -W_n(a, b) = w_n \in \mathbb{N}$  болно.

$$Z_n(x) \equiv \frac{1}{w_n} W_n(w_n b x + a, b), Z_n(0) = -1 \quad (12)$$

$Z_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ .  $Z_n(x)$ -ийн ахмад коэффициент  $A(Z_n(x)) > 0$

тул  $x \in \mathbb{N}$  хангалттай их тоо бол  $Z_n(x) \in \mathbb{N}$  ба  $(a, b) = 1$  тул

$(w_n b x + a, b) = 1$  байна.  $p_i \in \mathbb{P}, p_0, p_1, \dots, p_{r-1} \equiv 1(n)$  байг.

$x_r = 4gnp_0 \dots p_{r-1}$ ,  $Z_n(x_r) \in \mathbb{N}$  байхаар том  $g \in \mathbb{N}$ -г сонговол

(12)-оор  $Z_n(x_r) \equiv -1 \pmod{4np_0 \dots p_{r-1}}$  ба

$Z_n(x_r) \equiv -1 \pmod{4}$  тул энэ тоо нь  $p_r \equiv -1 \pmod{4}$  байх

ядаж нэг анхны хуваагчтай  $p_r$ , мөн  $Z_n(x_r) \equiv -1(n)$  тул

$p_r \nmid n, p_r | W_n(w_n b x_r + a, b), (w_n b x_r + a, b) = 1$  тул Теорем1-ээр

$p_r \equiv -1(n)$ .  $Z_n(x_r) \equiv -1(p_0 \dots p_{r-1})$  гэдгээс  $p_r \neq p_0, \dots, p_{r-1}$

гэж гарна.  $\downarrow$

## 2.8 ММО-49, VIII ангийн IV даваа

Н.Аргилсан

VIII-A1 (Н.Аргилсан) Ядаж нэг цифр нь тэгш, ядаж нэг цифр нь

сондгой бүх 4 оронтой тоонуудын нийлбэр А байг. Яг 2

цифр нь сондгой 4 оронтой тоонуудын нийлбэрийг В гэе.

$(A \cdot B) = ?$

VIII-A2 (Б.Амарсанаа)  $\{a\} = \{1, 2, \dots, 2013\}$ ,  $\{b\} = \{100, 101, \dots, 913\}$  гэсэн 2 дараалал өгөгдөв. Хэрэв  $a_j \in \{a\}$ ,  $b_j \in \{b\}$  байх  $a_i$ ,  $b_j$  элементүүдийн хувьд  $a_i + b_j$  нийлбэрийн аравтын бичлэгт 0 цифрийг агуулсан бол  $(a_i, b_j)$  хосыг "сайн хос" гэе. Тэгвэл бүх сайн хосын тоог ол.

VIII-A3 (Т.Гансүх)  $a$  тоо нь  $(a, 6) = 1$  байх натурал тоо бол  $\frac{1}{9}a^{19} + \frac{1}{8}a^{13} + \frac{55}{72}a$  нийлбэр бүхэл тоо болохыг харуул.

VIII-B1 (М.Баасай)  $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ,  $b_n = \frac{n(3n-1)}{2}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) бөгөөд  $c_n = \text{ХИЕХ}(a_n, b_n)$  бол  $c_1 + c_2 + \dots + c_{2013}$  нийлбэрийг ол.

VIII-B2 (Д.Одгэрэл) Эсрэг орших талууд нь параллель,  $S$  талбайтай  $ABCD$  дөрвөн өнцөгтийн дотор орших аливаа  $P$  цэгийн хувьд  $AP \cdot CP + DP \cdot BP \geq S$  тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

VIII-B3 (Н.Аргилсан) Бүжгийн дугуйланд  $i$ -рт бүртгүүлсэн сурагч  $i$  төгрөг төлдөг байв (зэрэг бүртгэхгүй). Бүртгүүлсэн сурагчид нийт 2013 хос үүсгэсэн бөгөөд хосуудыг цувруулан жагсаахад төлсөн мөнгөөрөө эрэгтэй нь өсөх эрэмбээр, харин эмэгтэй нь буурах эрэмбээр жагссан байв. Тэгвэл хос бүрд байгаа 2 сурагчийн төлсөн мөнгөний зөрүүний нийлбэрийн авч болох бүх утгыг ол (нэг эрэгтэй, нэг эмэгтэй сурагч хос болно).

VIII-A1: (Н.Аргилсан)  $(A-B)$  яг нэг цифр нь сондгой эсвэл яг нэг цифр нь тэгш тоонуудын нийлбэр болно. Ийм тоонуудыг

$\overline{CCCT}, \overline{CCTC}, \overline{CTCC}, \overline{TCCC},$

$\overline{TTTC}, \overline{TTCT}, \overline{CTTT}$  гэж тэмдэглээд хэлбэр тус бүр дэх тоонуудын нийлбэрийг тооцвол

$$1. \sum \overline{CCCT} = 25 \cdot 125 \cdot 1000 + 25 \cdot 125 \cdot 100 + 25 \cdot 125 \cdot 10 + 20 \cdot 125 = 25 \cdot 125 \cdot 1110 + 20 \cdot 125 = 3471250$$

$$2. \sum \overline{CCTC} = 25 \cdot 125 \cdot 1101 + 20 \cdot 125 \cdot 10$$

$$3. \sum \overline{CTCC} = 25 \cdot 125 \cdot 1011 + 20 \cdot 125 \cdot 100$$

$$4. \sum \overline{TCCC} = 20 \cdot 125 \cdot 1000 + 25 \cdot 100 \cdot 111$$

$$5. \sum \overline{TTTC} = 20 \cdot 125 \cdot 1000 + 20 \cdot 100 \cdot 110 + 25 \cdot 100$$

$$6. \sum \overline{TTCT} = 20 \cdot 125 \cdot 1000 + 20 \cdot 100 \cdot 101 + 25 \cdot 100 \cdot 10$$

$$7. \sum \overline{TCTT} = 20 \cdot 125 \cdot 1000 + 25 \cdot 100 \cdot 100 + 20 \cdot 100 \cdot 11$$

$$8. \sum \overline{CTTT} = 25 \cdot 125 \cdot 1000 + 20 \cdot 125 \cdot 111$$

Эдгээрийг тус бүрт нь тооцоолж нэмбэл  $A-B=24747750$  болно.

VIII-A2: (Б.Амарсанаа) Сайн хосын нийлбэрийг сайн тоо гээ. Хамгийн бага сайн тоо  $1+100=101$ . Хамгийн их сайн тоо  $(2013+913=2926)$  2920,  $1+913=914$ ,  $2013+100=2113$ . Сайн тоо нь 914-өөс их 2113-аас бага үед ямар ч сайн тооны хувьд  $\{b\}$ -ын бүх тоог авч сайн хос үүсгэж болно. Сайн тоо 0-ээр төгсвөл  $920, 930, \dots, 2110 \rightarrow 211 - (92 - 1) = 120$ . Сайн тооны аравтын цифр 0, 0-ээр төгсөхгүй бол 1001, 1002, ..., 1009

...

1101, 1102, ..., 1109

2101, 2102, ..., 2109  $\Rightarrow 9 \cdot 12 = 108$ . Сайн тооны зуутын цифр

0, бусад нь 0 биш үед

1011, 1012, ..., 1019

1021, 1022, ..., 1029

...

1091, 1092, ..., 1099

2011, 2012, ..., 2019

...

2091, 2092, ..., 2099  $\rightarrow 9 \cdot 9 \cdot 2 = 162$

100, 101, ..., 913  $\rightarrow 814$  ширхэг

$814 \cdot (120 + 108 + 162) = 317460$  Сайн тоо 914-өөс бага үед

(Сайн тооноос 1002 хасахад тэр сайн тооны сайн хосын тоо

гарна). (Сайн тоо  $A$  бол  $A$ -аас 100-г хасахад  $\{a\}$ -аас сонгох

хамгийн их тоо олдоно. Тэгэхлээр 1-ээс эхлээд тэр тоо хүр-

тэл  $\{a\}$ -аас сонгож болох тул  $A-100$  ширхэг болно). Сайн

тоо 0-ээр төгсвөл

110, 120, 130, ..., 910 нь сайн тоо

$(110 - 100) + (120 - 100) + \dots + (910 - 100)$

$$= 10 + 20 + \dots + 810 = 10 \cdot \frac{81 \cdot 82}{2} = 33210$$

Сайн тооны аравтын орон 0, төгсгөлийн цифр 0 биш бол

101, 102, ..., 109  $\Rightarrow$

$$(101 - 100) + (102 - 100) + \dots + (109 - 100) = 45$$

201, 202, ..., 209  $\Rightarrow$

$$(201 - 100) + (202 - 100) + \dots + (209 - 100) = 100 \cdot 9 + 1 + \dots + 9$$

... ..

$$901, 902, \dots, 909 \Rightarrow$$

$$(901 - 100) + (902 - 100) + \dots + (909 - 100) = 800 \cdot 9 + 1 + \dots + 9$$

$$45 \cdot 9 + 900 \cdot (1 + 2 + \dots + 8) = 405 + 32400 = 32805, 32805 + 33210 = 66015.$$

Сайн тоо 2113-аас их үед (Сайн тоо А бол А-2013 нь {b}-ээс хост сонгох хамгийн бага тоо сайн. Тэр тоо нь x болог. Тэгэхээр {b}-ээс сайн хост x, x + 1, ..., 913-ыг сонгоно гэсэн үг.

$$913 - (x - 1) = 914 - x \text{ ширхэг). Сайн тоо 0-ээр төгсвөл}$$

$$2120, 2130, 2140, \dots, 2920$$

$$2120-2013=107, 914-107=807 \text{ ширхэг}$$

$$2130-2013=117, 914-117=797 \text{ ширхэг}$$

$$2920-2013=807, 914-807=7 \text{ ширхэг}$$

$$7 + 17 + \dots + 807 = 7 \cdot 81 + 10(1 + 2 + \dots + 80)$$

$$7 \cdot 81 + 10 \cdot \frac{81 \cdot 82}{2} = 32967.$$

Сайн тооны аравтын орон 0, 0-ээр төгсөөгүй үед

$$2201, 2202, \dots, 2209$$

$$2301, 2302, \dots, 2309$$

...

$$2901, 2902, \dots, 2909$$

$$2201-2013=188, 914-188=726$$

$$2202-2013=189, 914-189=725$$

...

$$2209-2013=196, 914-196=718$$

$$2901-2013=888, \quad 914-888=26$$

$$2909-2013=896=18$$

$$\begin{aligned} 8(18+19+\dots+26)+900(1+2+\dots+7) &= 8 \cdot \frac{(26+18) \cdot 9}{2} + 900 \cdot 28 \\ &= 1584 + 25200 = 26784 \text{ ширхэг} \end{aligned}$$

$$317460+66015+32967+26784=443226$$

VIII-A3: (Т.Гансүх)  $(a, 6) = 1$  гэдгээс  $(a, 9) = 1$  тул

$$a^{\varphi(9)} = a^6 = 1 \pmod{9} \text{ мөн } (a, 8) = 1 \text{ тул } a^{\varphi(8)} = a^4 = 1 \pmod{8}.$$

Иймд

$$\begin{aligned} \frac{1}{9}a^{19} + \frac{1}{8}a^{13} + \frac{55}{72}a &= \frac{1}{9}a^{19} - \frac{1}{9}a^{19} + \frac{1}{8}a^{13} - \frac{1}{8}a^{13} + a \\ &= \frac{1}{9} \cdot (a^{18} - 1) + \frac{1}{8}(a^{12} - 1) + a \end{aligned}$$

$$a^{18} = (a^6)^3 = 1 \pmod{9} \text{ тул } a^{18} - 1 \vdots 9$$

$$a^{12} = (a^4)^3 = 1 \pmod{8} \text{ тул } a^{12} - 1 \vdots 8. \text{ Ингэснээр уг нийлбэрийн}$$

нэмэгдэхүүн бүр нь бүхэл тоо болж батлагдлаа.

VIII-B1: Эхлээд  $c_n = (a_n, b_n)$ -ийг бодъёо.

а.  $n \rightarrow$  тэгш тоо болог. Тэгвэл:

$$\begin{aligned} c_n &= (a_n, b_n) = \frac{n}{2}(3n-1; n+1) \\ &= \frac{n}{2}(3n-3-3(n+1); n+1) = \frac{n}{2}(-4; n+1) = \frac{n}{2}; \end{aligned}$$

б.  $n \equiv 1 \pmod{4}$  болог. Тэгвэл:

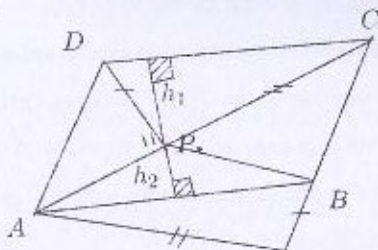
$$\begin{aligned} c_n &= (a_n, b_n) = n \cdot \left( \frac{3n-1}{2}; \frac{n+1}{2} \right) \\ &= n \cdot \left( \frac{3n-1}{2} - 3 \cdot \frac{n+1}{2}; \frac{n+1}{2} \right) \\ &= n \cdot \left( \frac{-4}{2}; \frac{n+1}{2} \right) = n \cdot \left( -2; \frac{n+1}{2} \right) = n \end{aligned}$$

в.  $n \equiv 3 \pmod{4}$  болог. Тэгвэл:

$$\begin{aligned}
 c_n &= (a_n, b_n) = n \cdot \left( \frac{3n-1}{2}; \frac{n+1}{2} \right) \\
 &= n \cdot \left( \frac{3n-1}{2} - 3 \cdot \frac{n+1}{2}; \frac{n+1}{2} \right) \\
 &= n \cdot \left( -2; \frac{n+1}{2} \right) = 2n \text{ болно. Иймд}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S &= c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{2012} + c_{2013} \\
 &= (c_2 + c_4 + c_6 + \dots + c_{2012}) + (c_1 + c_5 + c_9 + \dots + c_{2009} + c_{2013}) \\
 &\quad + (c_3 + c_7 + c_{11} + \dots + c_{2007} + c_{2011}) = \frac{2+4+\dots+2012}{2} \\
 &\quad + (1+5+9+\dots+2009+2013) + \\
 &\quad + 2(3+7+11+\dots+2007+2011) = \frac{2014 \cdot 1006}{2} \\
 &\quad + \frac{2014 \cdot 504}{2} + \frac{2014 \cdot 503}{2} \cdot 2 = 2014 \cdot \left( \frac{503}{2} + 252 + 503 \right) \\
 &= 2014 \cdot \left( \frac{503}{2} + 755 \right) = 1007 \cdot 503 + 755 \cdot 2014 = 2027091
 \end{aligned}$$

VIII-B2:



$P$  цэгийг дайруулан  $AB$  суурьт өндөр татъя.

$$\begin{aligned}
 AB = CD \text{ ба } S_{CPD} + S_{ABP} &= \frac{CD \cdot h_1}{2} + \frac{AB \cdot h_2}{2} \\
 &= \frac{AB(h_1 + h_2)}{2} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{S}{2}
 \end{aligned}$$

болно.  $AB$  талын гадна талд  $DP = BQ$ ,  $AQ = CP$  байх  $Q$  цэгийг байгуулъя. Эндээс  $S_{CDP} = S_{ABQ}$  ба  $AP \cdot CP + BP \cdot DP = AP \cdot AQ + BP \cdot BQ$  болно. Иймд

$S_{ABP} + S_{CPD} = S_{ABP} + S_{ABQ} = S_{APBQ} = S_{APQ} + S_{BPQ}$   
ба  $AP \cdot AQ \geq S_{APQ}$ ,  $BP \cdot BQ \geq S_{BPQ}$  болохыг хялбархан  
харж болно. Иймд  $AP \cdot AQ + BP \cdot BQ \geq S_{APQ} + S_{BPQ} = \frac{1}{2}S$   
болж батлагдлаа.  $\angle PAQ = \angle PBQ = 90^\circ$  үед тэнцэлдээ  
хүрнэ.

VIII-B3: Хосуудыг  $(a_i, b_i)$  гэж тэмдэглэе ( $j = \overline{1, 2013}$ ). Тэгвэл

$a_1 < a_2 < \dots < a_{2013}$  ба  $b_1 > b_2 > \dots > b_{2013}$  эрэмбэтэй  
байх болно.  $a_i$  нь жагсаалын  $i$ -рт байгаа эрэгтэй сурагчийн  
төлсөн мөнгө,  $b_i$ -нь жагсаалын  $i$ -р байранд байгаа эмэгтэй  
сурагчийн төлсөн мөнгө. Тэгвэл  $a_i, b_i \in \{1, 2, \dots, 4026\}$   
байна.  $\{1, 2, \dots, 4026\}$  олонлогийг  $\{1, 2, \dots, 2013\} = A$ ,

$\{2014, \dots, 4026\} = B$  гэсэн 2 дэд олонлогт хуваая. Хэрэн  
 $a_i, b_i \in A$  гэвэл  $a_1 < a_2 < \dots < a_i$  ба  $b_i > b_{i+1} > \dots > b_{2013}$   
гэсэн нийт 2014 ширхэг ялгаатай тоонууд  $A$  олонлогт орох  
болж зөрчинө. (Учир нь  $A$  ба  $B$  нь 2-уулаа 2013 ширхэг  
элементтэй). Үүнтэй адил  $a_i, b_i$  нь нэгэн зэрэг  $B$ -д орохгүй  
гэдгийг харж болно. Иймд  $a_i, b_i$ -ийн нэг нь  $A$ -д байвал  
нөгөө нь  $B$ -д байна. Иймд

$$\begin{aligned} & |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_{2013} - b_{2013}| \\ &= (2014 + 2015 + \dots + 4026) - (1 + 2 + \dots + 2013) \\ &= 2013^2 \text{ болно.} \end{aligned}$$

## 2.9 ММО-49, IX ангийн IV даваа

Т.Гансүх

IX-A1 (Ч.Гантөмөр) Хөвгүүдийн өндрийн олонлог  $\{x, y, z\}$  ба охидын өндрийн олонлог  $\{a, b, c\}$  болог. Тэгвэл  $x + y + z = a + b + c$ ,  $xyz = abc$  ба  $\max(x, y, z) \geq \max(a, b, c)$  гэдгээс  $\min(x, y, z) \geq \min(a, b, c)$  гэж батал.

IX-A2 (Эрдэнэбаяр) Праллелограммын тал тус бүрийн дунджийг эсрэг тал дээр орших оройтой холбов. Үүссэн найман өнцөгтийн талбай нь параллелограммын талбайн  $\frac{1}{6}$  болохыг батал.

IX-A3 (Т.Гансүх)  $x, y, z$  нь  $x + y + z = 1$  байх эерэг тоонууд бол  $\frac{x}{9xy+1} + \frac{y}{9yz+1} + \frac{z}{9zx+1} \geq \frac{1}{2}$  болохыг батал.

IX-B1 (Н.Аргилсан) Цифрүүдийнх нь нийлбэр дээр цифрүүдийнх нь бүх хосолсон үржвэрүүдийг нэмээд цифрүүдийнх нь үржвэрийг хасаад 1 гардаг бүх гурван оронтой тоог ол.

IX-B2 (Т.Гансүх)  $\{a_n\}$  дараалал нь  $a_0 = 2, a_1 = 4$  ба  $a_{n+1}$  нь эсвэл  $a_{n+1} = 3a_n$  эсвэл  $a_{n+1} = 4a_n - 3a_{n-1}$  гэж тодорхойлогддог байг. Тэгвэл уг дараалалд  $22000 \leq a_n \leq 26000$  байх гишүүн олдох уу?

IX-B3 (Б.Батцэнгэл) IV даваа ББ-ВЗ-ийг хар!

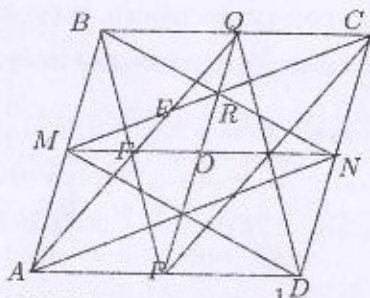
IX-A1: Хөвгүүдийн өндрийн олонлог  $\{x, y, z\}$  ба охидын өндрийн олонлог  $\{a, b, c\}$  болог. Тэгвэл  $x + y + z = a + b + c$ ,  $xyz = abc$  ба  $\max(x, y, z) \geq \max(a, b, c)$  гэдгээс  $\min(x, y, z) \geq \min(a, b, c)$  гэж баталъя.  $q = ab + ac + bc$ ,  $r = xy + xz + yz$  гэе.  $t$ -дурын

хувьсагч болог. Өгөгдсөн нөхцөлөөс

$$(t-a)(t-b)(t-c) - (t-x)(t-y)(t-z) = (q-r)t \quad (1)$$

болохыг шууд шалгаж болно.  $x \geq y \geq z$  гэж үзэж болох тул  $\max(x, y, z) = x$ ,  $\min(x, y, z) = z$  гээ. (1)-д  $t = x$  ба  $t = z$  гэж тус тус орлуулбал  $(x-a)(x-b)(x-c) = (q-r)x$   
 $(z-a)(z-b)(z-c) = (q-r)z$  болох бөгөөд  $x \geq \max(a, b, c)$   
гэдгээс  $q-r = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x} \geq 0$ . Иймд  
 $(z-a)(z-b)(z-c) = (q-r)z \geq 0$  болно. Нөгөө талаас  
 $z < \min(a, b, c)$  байна гэвэл  $(z-a)(z-b)(z-c) < 0$  болж  
зөрчилд хүрнэ. Иймд  $z \geq \min(a, b, c)$  болох нь батлагдав. ▲

IX-A2:



$ABCD$  4-н өнцөгтийн  $\frac{1}{4}$ -тэй тэнцүү  $MOQB$  параллельграмм авч үзье.

$$\begin{aligned} S_{FOLE} &= S_{FOR} + S_{RFE} = \frac{1}{4}S_{MOQ} + \frac{1}{12}S_{MOQ} \\ &= \frac{1}{3}S_{MOQ} = \frac{1}{6}S_{MOQB}. \end{aligned}$$

Яг үүнтэй адил дүгнэлтийг бусад 4-н өнцөгтүүд дээр хийж болох тул бодлого бодогдов.

IX-A3: Нэмэгдэхүүн бүрийн хувьд дараах хувиргалтыг хийе.

$$\frac{x}{9xy+1} = x - \frac{9x^2y}{9xy+1} \geq x - \frac{9x^2y}{2 \cdot \sqrt{9xy}} = x - \frac{3}{2}\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{y}.$$

$$\text{Тэдгээрийг хооронд нь нэмбэл } S = \frac{x}{9xy+1} + \frac{y}{9yz+1} +$$

$$\frac{z}{9zx+1} \geq x+y+z - \frac{3}{2}(\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{y} + \sqrt{y^3} \cdot \sqrt{z} + \sqrt{z^3} \cdot \sqrt{x}) =$$

$$1 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (a^3b + b^3a + c^3a) \text{ болно. Энд } a = \sqrt{x}, b = \sqrt{y}, c = \sqrt{z}$$

$$\text{гэж тэмдэглэсэн. Харин одоо } (a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(a^3b+b^3c+c^3a)$$

гэсэн хялбар батлагдах Vascile Cirtoaje-н тэнцэтгэл бишийг ашиглавал:

$$S \geq 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (a^3b + b^3a + c^3a) \geq 1 - \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2 = \frac{1}{2} \text{ болж}$$

$$\text{бодлого бодогдлоо. Уг тэнцэтгэл биш нь } x=y=z=\frac{1}{3} \text{ үед}$$

л тэнцэлдээ хүрнэ.

$$\text{Тэмдэглэл. Дээр өгүүлсэн } (a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3 \cdot (a^3b+b^3c+c^3a)$$

$$\text{тэнцэтгэл бишийг } a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \text{ гэсэн илэрхий}$$

$$\text{тэнцэтгэл биш дээр } a=x^2-xy, b=y^2-yz, c=z^2-zx$$

орлуулга хийн баталж болно.

$$\text{IX-B1: } a+b+c+ab+bc+ca = abc+1 \text{ хувьд } a-1=p, b-1=q, c-1=r$$

$$\text{гэе. Тэгвэл } pqr = 2(p+q+r) + 4 \text{ ба } a=1, b=0, c=0$$

$$\text{нь илэрхий шийд тул } p, q, r \text{ нь } 0 \leq p \leq q \leq r \text{ байна.}$$

$$p=0 \text{ байж болохгүй. Хэрэв } 0 = 2(q+r) + 4 \text{ болж зөрчил.}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left( \frac{1}{pq} + \frac{1}{pr} + \frac{1}{qr} \right) + \frac{4}{pqr} = 1. \text{ Хэрэв } p \geq 3 \text{ бол } q \geq 3 \text{ ба}$$

$$r \geq 3 \text{ болох тул } p=q=r=3 \text{ үед } \frac{6}{9} + \frac{4}{27} < 1 \text{ болж зөрчинө.}$$

$$\text{Иймд } p=1 \text{ эсвэл } p=2 \text{ байна.}$$

$$(a) \ p=1 \text{ бол } q+r = 2(q+r) + 6 \Rightarrow$$

$$(q-2)(r-2) = 10 \Rightarrow (1, 4, 7)$$

$$(6) \ p = 2 \text{ бол } 2qr = 2(2+q+r) + 4 \Rightarrow$$

$$qr = q+r+4 \Rightarrow (q-1)(r-1) = 5 \Rightarrow (p, q, r) = (2, 2, 6)$$

болно.  $(a, b, c)$  нь  $(1, 0, 0)$ ,  $(2, 5, 8)$ ,  $(2, 8, 5)$ ,  $(8, 5, 2)$ ,  $(8, 2, 5)$ ,  $(5, 8, 2)$ ,  $(5, 2, 8)$ ,  $(3, 3, 7)$ ,  $(3, 7, 3)$ ,  $(7, 3, 3)$  гэсэн 10 шийдтэй.

#### IX-B2. Хариу: Олдохгүй

Хэрэв  $a_n = 3 \cdot a_{n-1}$  гэж олдсон  $a_{n+1}$  нь аль ч тохиолдолд  $a_{n+1} = 9 \cdot a_{n-1}$  болно гэдгийг шууд шалгаж болно. Иймд хэрэв I үйлдлээр дарааллын гишүүн тодорхойлогдсон бол цаашид уг үйлдлээрээ л ямагт тодорхойлогддог гэсэн үг. Анх II үйлдлээр хэдэн удаа тодорхойлсноор дарааллын гишүүд бүрэн тодорхойлогдох тул алхмын тоог  $k$  нь гэе. Түүнээс цааш  $m$  удаа I үйлдлээр тодорхойлогдсон гэвэл  $a_{n+m} = 3^m \cdot (3^k + 1) = 3^{m+k} + 3^n$  болох нь харагдана. Тэгэхээр уг бодлого  $22000 \leq 3^{m+k} + 3^n \leq 26000$  байх  $n \geq 1$ ,  $m \geq 0$  натурал тоонууд олдох уу гэсэн бодлогод шилжинэ. Үүнийг боломжгүй гэдгийг хялбар шалгаж болох тул бодлогын нөхцөлийг хангах гишүүн уг дараалалд олдохгүй.

#### IX-B3: IV даваа ББ-В3-ийг хар!

2.10 ММО-49, 11 жилийн X ангийн IV даваа

Ч.Гантөмөр

Х-А1 (Ч.Гантөмөр) Хуриц өнцөгт гуравалжны талууд

$BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$  бол

$$\sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + 2bc}} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2 - b^2}{b^2 + 2ca}} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{c^2 + 2ab}} \leq \sqrt{3}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

Х-А2 (Д.Батнасан)  $p, q$  натурал тоонууд өгөгдөв.

$\{-p, -p+1, \dots, 0, 1, \dots, q\}$  олонлогоос аливаа ялгаатай  $m$  ширхэг бүхэл тоонуудыг сонгоход тэдгээрийн дотор нийлбэр нь 0-тэй тэнцүү байх ялгаатай 3 бүхэл тоо ямагт олддог байх  $m$ -ийн хамгийн бага утгыг ол.

Х-А3 (Г.Батзаяа)  $BD$  диаметртэй тойрогт багтсан  $ABCD$  дөрвөн өнцөгтийн  $AC, BD$  диагоналиуд  $P$  цэгт огтлолцоно.  $X, Y, Z, T$  цэгүүд нь харгалзан  $AB, BC, CD, DA$  шулуунуудын хувьд  $P$  цэгтэй тэгш хэмтэй цэгүүд бол  $XPY, TQZ$  гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд хоорондоо шүргэлцэнэ гэдгийг батал.

Х-В1 (Э.Оргил-Эрдэнэ) 1, 2, 3, 4, 5, 6 цифрүүдээр 7-д хуваагдах  $n$  оронтой тоо хичнээнийг зохиож болох вэ?

Х-В2 (Б.Сандагдорж)  $d > 1$  өгөгдсөн натурал тоо ба

$a_n = dn^2 + 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$  дараалал өгөгдөв. Энэ дарааллын төгсгөлгүй олон гишүүн дугаараасаа бага ялгаатай гурван тооны үржвэрт задарна гэж батал.

Х-В3 (Г.Батзаяа)  $\omega$  тойргийн гадна орших  $X$  цэгээс уг тойрогт  $XY, XZ$  шүргэгчүүд татжээ.  $YZ$  хэрчмийн дундаж  $M$

цэг нь  $\omega$  тойрогт багтсан  $ABC$  гурвалжны  $AC$  тал дээр оршиж байв.  $AB$ ,  $BC$  шулуунуудын хувьд  $M$  цэгтэй тэгш хэмтэй цэгүүд нь  $P, Q$  бол  $X, P, B, Q$  цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал.

Х-А1: (Ч.Гантөмөр)  $\cos$ -ийн теоремоос  $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cdot \cos \angle A$   
ба  $a^2 + 2bc = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \angle A + 2bc \geq 4bc - 2bc \cdot \cos \angle A$   
 $= 2bc(2 - \cos \angle A)$  болно. Эндээс  $\angle A \in (0, \frac{\pi}{2})$  үед

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + 2bc} \leq \frac{2bc \cdot \cos \angle A}{2bc(2 - \cos \angle A)} = \frac{1}{2 \cdot \sec \angle A - 1} \quad (1)$$

болно. Яг адилаар

$$\frac{c^2 + a^2 - b^2}{b^2 + 2ca} \leq \frac{1}{2 \cdot \sec \angle B - 1} \quad (2)$$

ба

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{c^2 + 2ab} \leq \frac{1}{2 \cdot \sec \angle C - 1} \quad (3)$$

болно. Батлах тэнцэтгэл биш ба (1), (2), (3)-аас бид

$$\sqrt{\frac{1}{2 \cdot \sec \angle A - 1}} + \sqrt{\frac{1}{2 \cdot \sec \angle B - 1}} + \sqrt{\frac{1}{2 \cdot \sec \angle C - 1}} \leq \sqrt{3} \quad (4)$$

гэж батлахад хангалттай нь харагдана.

$f(x) = \frac{1}{2 \cdot \sec x - 1}$ ,  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  функцийг сонирхоё.

$$f''(x) = \frac{-\sec x \cdot (\sec x \cdot (\sec x - 1)^2 + 1)}{(2 \sec x - 1)^{5/2}} < 0, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

болохыг хялбархан харж болно. Иймд  $f(x)$  функц нь  $(0, \frac{\pi}{2})$

дээр гүдгэр функц мөн. Ийнсений тэнцэтгэл бишээс

(4)-ийн зүүн талын нийлбэр

$\leq 3 \cdot f\left(\frac{\angle A + \angle B + \angle C}{3}\right) = 3 \cdot f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$  болж  
батлах зүйл гарав. Тэнцэлдээ  $a = b = c$  буюу  $ABC$  зөв  
гурвалжин байхад хүрнэ. ▲

X-A2: (Д.Батнасан) Хариу:  $\min m = \max(p, q) + c$ , энд

$$c = \begin{cases} 2, & p = q = 2k \\ 3, & \text{бусад тохиолдолд} \end{cases}$$

$$\{-p, -p+1, \dots, q-1, q\} \quad (*)$$

тоонуудыг бүгдийг  $(-1)$ -ээр үржүүлж эсрэг эрэмбэлж болох  
тул  $p \leq q$  гэж үзэхэд явцуурахгүй.  $[-p, q]$  хэрчимд  
 $q+1$  ширхэг сөрөг биш бүхэл тоо орших ба аль ч гур-  
вынх нь нийлбэр тэгээс ялгаатай.  $p = q = 2k$  үед  
 $\{-2k, \dots, -k, k, \dots, 2k\}$  олонлогийн ижил тэмдэгтэй аль ч 2  
тооны нийлбэрийн абсолют хэмжээ нь эсрэг тэмдэгтэй аль  
ч 2 тооны нийлбэрээс их байна. 0 болон дурын  $q+1$  ширхэг  
тэгээс ялгаатай тоонуудыг  $(*)$ -оос авахад Дирихлейн зарч-  
маар нийлбэр нь тэгтэй тэнцүү байх 3 тоо ямагт олдоно.  
Иймд бид  $X \subseteq [-p, q] \setminus \{0\}$  ба  $X$ -ийн аль ч 3 элементийнх нь  
нийлбэр тэгээс ялгаатай бол  $|X| \leq q+1+\delta$  болохыг батла-  
хад хангалтай. Энд  $p = q = 2k$  үед  $\delta = 1$  бусад тохиолдолд  
 $\delta = 0$  байна. Дараах 3 тохиолдолд бодлогийг салгаж бат-  
лая.

Тохиолдол 1.  $p = q$  ба ерөнхий утга нь сонцгой байг.

$|X| \leq q+1$  болохыг индукцээр батлая.  $q = 1$  үед батлах  
зүйл илэрхий.  $q > 1$  бол  $Y = X \cap \{-q, -(q-1), q-1, q\}$

олонлогийг авч үзье. Хэрэв  $|Y| \leq 2$  бол индукцэд үзсэнээр  $|X| \leq q + 1$  болчихно. Иймд  $|Y| \geq 3$  байг.  $Y$  нь ижил тэмдэгтэй ядаж 2 тоо агуулах ба тэр 2 тоо сөрөг бус, мөн  $-q \in X$  гэж үзэж болно.  $1 \leq i \leq \frac{q-1}{2} \Rightarrow \{i, q-i\} \subseteq X$  байх  $i$  олдоно. Иймд  $X$ -д хамгийн олондоо  $\frac{q+1}{2}$  ширхэг зэрэг тоо агуулагдах ба тэнцэлдээ  $q \in X$  үед л хүрнэ. Хэрэв  $q \in X$  бол тэгш хэмээр  $X$ -д хамгийн олондоо  $\frac{q+1}{2}$  тооны сөрөг тоо харъяалагдана.  $|X| > q + 1$  бол  $|Y| \geq 3$  гэдгээс  $q - 1 \in X$  болж зөрчил. Иймд  $|X| \leq q + 1$  болно. Одоо  $X$  нь  $1 \leq i \leq \frac{q-3}{2}$  үед  $-i$  ба  $-q + 1 + i$  элементүүдийг агуулж чадахгүй болно.  $X$  нь  $-q$  ба  $-q + 1$  тоонуудыг агуулна. Мөн хамгийн олондоо  $\frac{q-1}{2}$  ширхэг зэрэг, нийлбэр нь  $-(q-1)$ -тэй тэнцүү  $\frac{q-3}{2}$  хос сөрөг тоонуудын хамгийн олондоо нэг нэгийг авна. Мөн  $\frac{-(q-1)}{2}$  гэсэн элементийг агуулж болох юм. Иймд  $|X| \leq q + 1$  болно.

Тохиолдол2.  $p = q$  ба ерөнхий утга нь тэгш байг. Энэ тохиолдолд дээрхитэй адилаар  $|X \cap [-q + 1, q - 1]| \leq q$  ба  $X$  нь хамгийн олондоо өөр хоёр элементтэй л байж болно. Эндээс  $|X| \leq q + 2$ .

Тохиолдол3.  $p \leq q - 1$ . Хэрэв  $q$  нь тэгш бол

$X \setminus \{q\} \subseteq [-(q-1), q-1]$  болох ба эхний тохиолдолтой адилаар  $|X \setminus \{q\}| \leq (q-1) + 1 = q$ . Хэрэв  $q$  сондгой бол  $X \subseteq [-q, q]$  ба эхний тохиолдолтой адилаар  $|X| \leq q + 1$  гэж мөрдөнө. ▲

X-A3: (Г.Батзаяа)  $\angle A = \angle C = 90^\circ \Rightarrow C \in YZ, A \in XT,$

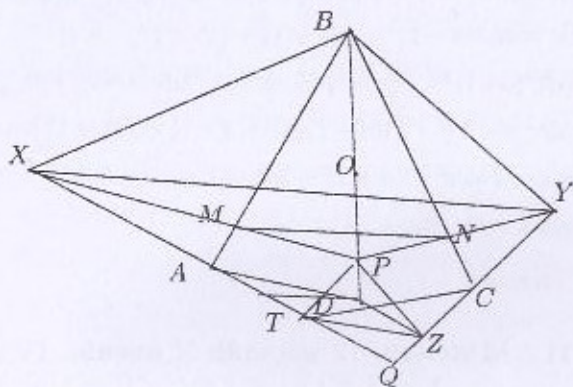
$YZ \cap XT = Q$  гэе. Тэгвэл

$$\angle BXA + \angle BYC = \angle APB + \angle BPC = 180^\circ \Rightarrow Q \in \omega(BXY).$$

Яг адил  $Q \in \omega(TDZ)$ . Одоо  $AC \parallel XY, TZ$  гэж баталъя.  $\ell$ -ээс

$AB, BC$ -д буулгасан сууриуд  $M, N$  байг. Тэгвэл

$$\angle APM = 90^\circ - \angle MAP = \angle OBC = \angle NMP \Rightarrow XY \parallel AC. \blacktriangle$$



Х-В1: (Э.Оргил-Эрдэнэ)  $\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} 0}, \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} 1}, \dots, \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} 6}$

гэж дараалсан 7 тооны яг нэг нь 7-д хуваагдах ба хэрэв

$$7 \mid \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} 0} \Rightarrow \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} \equiv 0 \pmod{7} \text{ болох тул дараах}$$

дүгнэлт хүчинтэй. 1, 2, ..., 6 цифрүүдээс бүтсэн дурын

$\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$  тооны хувьд уг тоо 7-д хуваагдахгүй бол нөхцөл

хангах  $\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n}$  тоо нэг утгатай олдоно. Иймд  $n$

оронтой, бодлогын нөхцөл хангах тоонуудын тоог  $b_n$  гэвэл

$$b_n = 6^{n-1} - b_{n-1}, \quad n \geq 2 \text{ ба } b_1 = 0 \text{ байна. Эндээс}$$

$$b_n = 6^{n-1} - 6^{n-2} + \dots + (-1)^{n-2} \cdot 6 + (-1)^{n-1} \cdot b_1 \text{ буюу}$$

$$\begin{aligned} b_n &= 6^{n-1} - 6^{n-2} + \dots + (-1)^{n-2} \cdot 6 \\ &= \frac{6^{n-1} \cdot (1 - (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{6^{n-1}})}{1 + \frac{1}{6}} = \frac{6 \cdot (6^{n-1} + (-1)^n)}{7} \end{aligned}$$

болов. ▲

X-B2: (Б.Сандагдорж) Аливаа натурал  $d$ -ийн хувьд

$n = dk^2(d+1)^2 + k(d+1) + 1$  дугаарыг сонирхоё. Энд  $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Иймд  $n$  дугаартай  $a_n = dn^2 + 1$  гишүүд  $n$ -ээс бага ялгаатай 3 натурал тооны үржвэрт задарна. Үнэхээр  $a_n = d(dk^2(d+1)^2 + k(d+1) + 1)^2 + 1$   
 $= (dk^2(d+1)^2 + 1)(d^2k^2(d+1)^2 + d + 2dk(d+1)) + dk^2(d+1)^2 + 1$   
 $= (dk^2(d+1)^2 + 1)(d+1)(d^2k^2(d+1) + 2dk + 1)$  бөгөөд  $k > 1$  үед  $d+1 < d^2k^2(d+1) + 2dk + 1 < dk^2(d+1)^2 + 1 < n$  тул батлах зүйл гарав. ▲

X-B3: (Г.Батзаяа)

## 2.11 ММО-49, 12 жилийн X ангийн IV даваа

Д.Батнасан

X'-A1 (Н.Аргилсан) Самбарт  $n$  ширхэг натурал тоо бичигдсэн байв. Өгсөн тоонуудыг бүгдийг нь нэгэн ижил натурал тоогоор үржүүлэн "бүтэн зэрэгт" болсон тоонуудыг дарав. Үлдсэн тоонуудыг дахин нэгэн ижил натурал тоогоор үржүүлэн бүтэн зэрэгт болдог тоог дарна. Энэ зарчмаар хоёр сурагч ээлжлэн тоглох бөгөөд самбарт байгаа тоонууд дуусахад хамгийн олон тоог дарсан тоглогч хожих бол эвс тогловол аль тоглогч хожих вэ? ( $k \geq 2, q$  натурал тоонуудын хувьд  $m = q^k$  байх  $m$  тоог бүтэн зэрэгт гэнэ).

X'-A2 (Ч.Гантөмөр)  $\{1, 2, \dots, 2013\}$  олонлогоос

$A \cap B = , B \cap C =$  байх  $(A, B, C)$  дэд олонлогуудын гуравтыг хичнээн янзаар зохиож болох вэ?

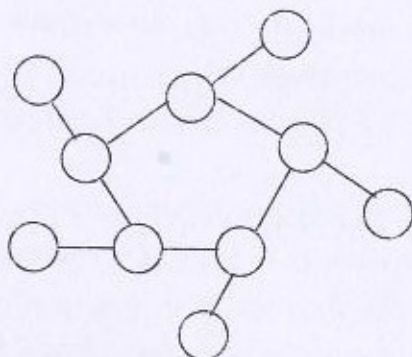
X'-A3 (Э.Төрбат)  $ABC$  нь 0 төвтэй тойрогт багтсан,  $AB \neq AC$  байх гурвалжин байг.  $BAC$  өнцгийн бисектрис нь  $BC$ -г  $D$  цэгээр огтлох ба  $E$  нь  $D$ -г  $BC$ -н дундаж цэгийн хувьд тэгш хэмээр хувиргахад гарах цэг байг.  $D$  ба  $E$  цэгүүдийг дайрсан  $BC$ -д перпендикуляр шулуунууд харгалзан  $AO$  ба  $AD$  шулуунуудыг харгалзан  $X$  ба  $Y$  цэгээр огтлох бол  $BXCY$  4 өнцөгт нь тойрогт багтана гэж батал.

X'-B1 (Ч.Гантөмөр)  $\frac{xy+x}{x-1}, \frac{yz+y}{y-1}, \frac{zx+z}{z-1} \in \mathbb{N}$  байх

а)  $(x, y, z)$  натурал тоон гуравтыг ол.

б) хуучиржээрийн авч болох хамгийн их утгыг ол.

X'-B2 (Б.Амарсанаа) 1-ээс 1000 хүртэлх тоонуудаас ялгаатай 10-н тоог сонгон авч зурагт үзүүлсэн дугуйнуудад бөглөхдөө нэг шулууны дагуу байрлах 3-н тоо хос хосоороо харилцан анхны байхаар хичнээн янзаар бөглөж болох вэ? (Эргүүлэлтээр давхцах бөглөлтүүдийг ижилд тооцно).



$X'$ -B3 (Г.Батзаяа)  $P, Q$  цэгүүдэд огтлолцдог  $\omega_1, \omega_2$  тойргууд тойргуудыг дотоод байдлаар харгалзан  $C, A$  цэгт шүргэх  $\omega$  тойрог өгөгджээ.  $\omega$  тойрог  $PQ$  шулуунтай  $B, D$  цэгүүдэд огтлолцох бөгөөд  $AD, AB$  шулуунууд  $\omega_2$  тойргийг  $A$  цэгээс ялгаатай  $X, T$  цэгүүдэд,  $CD, CB$  шулуунууд  $\omega_1$  тойргийг  $C$  цэгээс ялгаатай  $Y, Z$  цэгүүдэд тус тус огтолно.  $X, Y, Z, T$  цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал.

$X'$ -A1: Эхний тоглогч бүх тоог бүтэн зэрэгт болгож чадна гэж харуулъя.  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  гэсэн натурал тоонуудын олонлог өгөгдсөн байг.  $a_i = p_1^{\alpha_{i1}} \cdot p_2^{\alpha_{i2}} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_{ik}}$  гэж анхны тоон үржигдэхүүнд задардаг гэе ( $i = \overline{1, n}$ ). Хэрэв  $a_i$  нь  $p_j$ -д хуваагддаггүй бол  $\alpha_{ij} = 0$  гэж үзнэ. Хэрэв  $p_1^{u_1} \cdot p_2^{u_2} \cdot \dots \cdot p_k^{u_k}$  нь ямар нэгэн тооны  $q$ -зэрэгт бол  $u_j$  нь ( $j = \overline{1, k}$ )  $q$ -д хуваагдах ёстой. Тэгвэл  $\{ba_1, ba_2, \dots, ba_n\}$  олонлогийн гишүүн бүр нь тус бүрдээ ямар нэгэн тооны харгалзан  $q_1, q_2, \dots, q_n$  ( $q_i > 1$ ) зэрэгт болдог байхаар  $b = p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \dots \cdot p_k^{l_k}$







адилаар  $DB \parallel XT \Rightarrow$

$$\angle ZYC + \angle ATX = \angle BDC + \angle ABD = \angle BAC + \angle ACD. (*)$$

Огтлолцсон хөвчүүдийн теоремоор

$$AB \cdot BT = QB \cdot BD = ZB \cdot BC \Rightarrow$$

$A, C, T, Z$ -1 тойрог дээр оршино. Мөн адилаар  $Y, X, C, A$ -1 тойрог дээр оршино.

$$\Rightarrow \angle XYC + \angle ATZ = \angle XAC + \angle ACZ = \angle DAC + \angle ACB \quad (**)$$

$$(*), (**) \Rightarrow \angle XYZ + \angle XTZ$$

$$= (\angle ZYC + \angle ATX) + (\angle XYC + \angle ATZ)$$

$$= \angle BAC + \angle ACD + \angle DAC + \angle ACB$$

$$= \angle BAD + \angle DCB = 180^\circ \text{ тул } X, Y, Z, T \text{ -1 тойрог}$$

дээр оршино.

## 2.12 ММО-49, XI ангийн IV даваа

Б.Батцэнгэл, Г.Батзаяа

Эхний өдөр

XI-A1 (Э.Төрбат)  $a + b + c + d = 3$  байх сөрөг биш  $a, b, c, d$  тоонуудын хувьд

$$\frac{ab}{3b+c+d+3} + \frac{bc}{3c+d+a+3} + \frac{cd}{3d+a+b+3} + \frac{da}{3a+b+c+3} \leq \frac{1}{3}$$

тэнцэтгэл биш биелнэ гэдгийг батал.

XI-A2 (Г.Батзаяа)  $ABC$  гурвалжны  $AC$  тал дээр орших  $X$  цэгийн хувьд  $BX$  шулуун  $ABC$  гурвалжныг багтаасан  $\omega$  тойргийг  $D$  цэгт дахин огтлоно.  $AXD, CXD$  гурвалжнуудыг багтаасан тойргийн төвүүдийг  $O_1, O_2$  гэж тэмдэглэе.  $DO_1O_2$  гурвалжныг багтаасан тойрог  $\omega$  тойргийг  $D$  цэгтээ ялгаатай  $T$  цэгт огтолсог бол  $T$  цэг нь  $X$  цэгийн сонголтоос хамаараагүй гэдгийг батал.

XI-A3 (Б.Батцэнгэл) Натурал  $n$  тоог хуваадаг бүх анхны тоонуудын үржвэрийг  $\text{rad}(n)$  гэж тэмдэглэвэл,  $\text{rad}(a^2 + 1) = \text{rad}(b^2 + 1)$  байх ялгаатай натурал  $a, b$  тоонуудын хос төгсгөлгүй олон олдохыг батал.

2-р өдөр

XI-B1 (Г.Батзаяа) Эсрэг бодит тоон дээр тодорхойлогдсон, сөрөг бодит тоон утгатай дараах чанартай бүх функцийг ол.

а) Дурын эсрэг  $x, y$  тоонуудын хувьд  $f(x+y) = f(-f(x)) + f(-f(y))$  байна.б) Дурын натурал  $n$  тооны хувьд  $f(2^n) = -2^n$  байна.

XI-B2 (Б.Батцэнгэл) Тойрог дээр эвс 2013-өнцөгтийн орой болох 2013 ширхэг цэгийг тэмдэглэжээ. Тэмдэглэгдсэн цэгүүд дээр 1, 2, 3, 4, 5, 6 цифрүүдийг, зэргэлдээ орой дээр бичигдсэн цифрүүдийн зөрүү нь 1-ээс хитрэхгүй эсвэл 5-тай тэнцүү байхаар хэдэн янзаар байрлуулж болох вэ?

XI-B3 (Г.Батзаяа)  $\omega$  тойргийн гадна орших  $X$  цэгээс уг тойрогт  $XY, XZ$  шүргэгчүүд татигээ.  $YZ$  хэрчимийн дундаж  $M$  цэг нь  $\omega$  тойрогт багтсан  $ABC$  гурвалжны  $AC$  тал дээр цэг оршиж байна.  $AB, BC$  шулуунуудын хувьд  $M$  цэгтэй тэгш хэмтэй цэгүүд нь  $P, Q$  бол  $X, P, B, Q$  цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал.

Бодлогуудын бодолт

A1.  $a + b + c + d = 3$  гэдгийг ашиглан

$$\frac{ab}{3b+c+d+3} = \frac{ab}{a+4b+2c+2d} = \frac{ab}{(a+2c) + (2b+d) + (2b+d)}$$

гэж бичиж болно.  $\frac{9}{x+y+z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  гэсэн хэлбэр тэнцэл бишийг ашиглавал,

$$\frac{ab}{(a+2c) + (2b+d) + (2b+d)} \leq \frac{1}{9} \left( \frac{ab}{a+2c} + \frac{2ab}{2b+d} \right)$$

гэж гарна. Үүгээр

$$\frac{ab}{3b+c+d+3} \leq \frac{1}{9} \left( \frac{ab}{a+2c} + \frac{2ab}{2b+d} \right)$$

болохыг баталсан бөгөөд энэ тэнцэтгэл биш нь  $ab = 0$  эсвэл  $a + 2c = 2b + d$  үед тэнцэлдээ хүрнэ. Үүнтэй нэгэн адилаар

$$\frac{bc}{3c+d+a+3} \leq \frac{1}{9} \left( \frac{bc}{b+2d} + \frac{2bc}{2c+a} \right)$$

$$\frac{cd}{3d+a+b+3} \leq \frac{1}{9} \left( \frac{cd}{c+2a} + \frac{2cd}{2d+b} \right)$$

$$\frac{da}{3a+b+c+3} \leq \frac{1}{9} \left( \frac{da}{d+2b} + \frac{2da}{2a+c} \right)$$

байна. Баталсан тэнцэтгэл бишүүдээ нэмээд

$$\frac{ab}{a+2c} + \frac{2bc}{2c+a} = b$$

$$\frac{bc}{b+2d} + \frac{2cd}{2d+b} = c$$

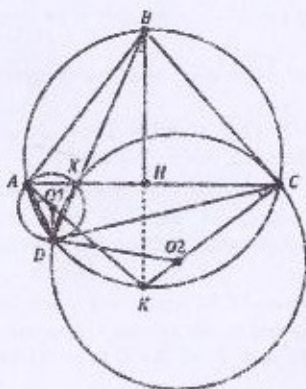
$$\frac{cd}{c+2a} + \frac{2da}{2a+c} = d$$

$$\frac{da}{d+2b} + \frac{2ab}{2b+d} = a$$

гэдгийг анхнаарвал

$$\frac{ab}{3b+c+d+3} + \frac{bc}{3c+d+a+3} + \frac{cd}{3d+a+b+3} + \frac{da}{3a+b+c+3} \leq \frac{1}{9}(a+b+c+d) = \frac{1}{3}$$

болж батлах ёстой тэнцэтгэл биш батлагдана.



A2. Гурвалжны B оройгоос татсан BH өндрийн үргэлжлэл багтаасан тойргийг K цэг огтолдог гэж үзье. Тодорхой болгон  $\angle AXD$  өнцөг хурц, харин  $\angle DXC$  өнцөг мохоо гэж үзье. Тэгвэл  $AO_1D, CO_2D$  гурвалжнууд ижилхэн  $2\angle AXD$  оройн өнцөгтэй адил хажуут гурвалжнууд юм. Иймд  $\angle DAO_1 = \angle DCO_2 = 90^\circ - \angle AXD = \angle DBH$  юм. Энэхүү тэнцэл нь  $AO_1, CO_2$  шулуунуудын огтлолцлын цэг нь K цэг гэдгийг хэлж байна. Одоо K цэг нь  $D, O_1, O_2$  цэгүүдтэй хамт нэг тойрог дээр оршихыг баталъя.  $AO_1$  шулуун дээр K цэгийн байрлалаас хамгааран  $\angle DO_1K$  өнцөг нь  $\angle DO_1A$  эсвэл  $180^\circ - \angle DO_1A$  өнцөгтэй тэнцүү,  $CO_2$  шулуун дээр K цэгийн байрлалаас хамгааран  $\angle DO_2K$  өнцөг нь  $\angle DO_2C$  эсвэл  $180^\circ - \angle DO_2C$  өнцөгтэй тэнцүү.  $\angle DO_1A = \angle DO_2C$  тул аль ч тохиолдолд  $\angle DO_1K = \angle DO_2K$  эсвэл  $\angle DO_1K + \angle DO_2K = 180^\circ$  гэж гарна.

A3.  $a^2 + 1 = 5(b^2 + 1)$  бөгөөд  $b^2 + 1$  нь 5-д хуваагддаг бол  $\text{rad}(a^2 + 1) = \text{rad}(b^2 + 1)$  байх нь ойлгомжтой. Падийн тэгшитгэлийн онолоор  $a^2 - 5b^2 = 4$  тэгшитгэлийн бүх язгуурыг ойлгох нь

$$n \geq 0 \text{ үед } a + b\sqrt{5} = 2 \cdot (9 + 4\sqrt{5})^n \text{ эсвэл } a + b\sqrt{5} = (3 + \sqrt{5}) \cdot (9 + 4\sqrt{5})^n$$

байх  $(a, b)$  хосуудаар илэрхийлдэг.  $(9 + 4\sqrt{5})^n = a_n + b_n\sqrt{5}$  бол нэрлэвэр

$$a_n \equiv (-1)^n \pmod{5}, \quad b_n \equiv (-1)^n \cdot n \pmod{5}$$

гэдгийг хялбархан харуулж болно. Иймд эхний тохиолдолд  $n$  нь  $5k + 1$  ба  $5k + 4$  хэлбэртэй үед, явцаагийн тохиолдолд  $n$  нь  $5k + 2$  ба  $5k + 3$  хэлбэртэй үед  $b \equiv \pm 2 \pmod{5}$  буюу  $b^2 + 1$  нь 5-д хуваагдана.

B1. Хэрвэ  $f(x) < -x$  бол  $f(x) = -x - y$  байх  $y > 0$  тоо олдно.

$$f(x+y) = f(-f(x)) + f(-f(y))$$

гэдгээс  $f(-f(y)) = 0$  болж  $f$  нь сөрөг утгатай гэдгээт зорино. Иймд  $f(x) \geq -x$  юм.

Дурын эерэг  $x$  тооны хувьд  $x < 2^n$  байх хангалттай том натурал  $n$  тоо олдоно.  $y > 0$  тооны хувьд  $x + y = 2^n$  гэж үзвэл,

$$f(-f(x)) + f(-f(y)) = f(x + y) = f(2^n) = -2^n$$

байна. Нөгөө талаас, бидний баталснаар

$$f(-f(x)) + f(-f(y)) \geq f(x) + f(y) \geq -x - y = -2^n$$

юм. Иймд  $f(x) = -x$  ба  $f(y) = -y$  байна.

**В2.** Уг бодлогыг бүрэн зөв бодсон УБ хотын 1-р сургуулийн сурагч Г.Мөлхбаярын бодолтыг сийрүүлээ. Юуны өмнө тойрог дээр өгсөн нэгүүд дээр 2013 ширхэг цифр бичих нь 2014 ширхэг цифрийг эхний ба эсийн цифр ижилхэн байхаар дараалулж бичихтэй ижил гэдгийг тэмдэглэе.  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 1$  гэсэн орлууллаар бодлого өөрчлөгдөхгүй (бүх цифрууд ижил эрхтэй) тул эхний ба эсийн цифр нь ижилхэн 1 байх 2014 цифртэй дарааллын тоо  $N$  бол олох ёстой тоо нь  $6 \cdot N$  гарна.

Еронхий тохиолдолд

эхний гишүүн нь 1, эсийн гишүүн нь 1 байх  $n$  гишүүнтэй дарааллын тоог  $a_n$ ,

эхний гишүүн нь 1, эсийн гишүүн нь 2 байх  $n$  гишүүнтэй дарааллын тоог  $b_n$ ,

эхний гишүүн нь 1, эсийн гишүүн нь 3 байх  $n$  гишүүнтэй дарааллын тоог  $c_n$ ,

эхний гишүүн нь 1, эсийн гишүүн нь 4 байх  $n$  гишүүнтэй дарааллын тоог  $d_n$

гэж тэмдэглэе. Тэгвэл  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 1$  орлуулга болон дарааллыг эхсэх нь эх рүү нь тогтооруулж бичих үйлдлээр эхний гишүүн нь 1, эсийн гишүүн нь 3 байх  $n$  гишүүнтэй дарааллын тоо  $c_n$ , эхний гишүүн нь 1, эсийн гишүүн нь 6 байх  $n$  гишүүнтэй дарааллын тоо  $b_n$  гэж гарна.

Эхний гишүүн нь 1, эсийн гишүүн нь 1 байх  $n$  гишүүнтэй дарааллын  $(n-1)$ -р гишүүн нь 6, эсвэл 1, эсвэл 2 байх боломжтой. Иймд  $a_n = b_{n-1} + a_{n-1} + b_{n-1}$  гэсэн рекуррент харьцаа биелнэ. Бусад  $b_n, c_n, d_n$  тоонуудын хувьд үүнтэй нэгэн адилаар рекуррент харьцаа бичвэл

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} \\ c_n = b_{n-1} + c_{n-1} + d_{n-1} \\ d_n = 2c_{n-1} + d_{n-1} \end{cases}$$

гэж гарна. Эхний тэгшитгэлээс

$$b_{n-1} = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1})$$

гэж олдоно. Үүнийг дараагийн тэгшитгэлд орлуулбал,

$$c_{n-1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) - a_{n-1} - \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1}) = \frac{1}{2}(a_{n+1} - 2a_n - a_{n-1})$$

гэж олдоно. Үүнийг дараагийн тэгшитгэлд орлуулбал,

$$d_{n-1} = \frac{1}{2}(a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n) - \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1}) - \frac{1}{2}(a_{n+1} - 2a_n - a_{n-1}) = \frac{1}{2}(a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_{n-1})$$

гэж олдоно. Үүнийг эсийн тэгшитгэлд орлуулбал,

$$\frac{1}{2}(a_{n+3} - 3a_{n+2} + 2a_n) = (a_{n+1} - 2a_n - a_{n-1}) + \frac{1}{2}(a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_{n-1})$$

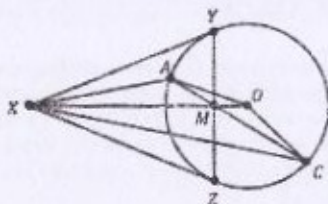
буюу  $a_{n+3} = 4a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n$  гэсэн рекуррент харьцаа гарч ирнэ.  $n = 2$  үед дараалал нь  $(1,1)$  тул  $a_2 = 1$  юм.  $n = 3$  үед дараалал нь  $(1,1,1), (1,2,1), (1,6,1)$  тул  $a_3 = 3$  юм.  $n = 4$  үед дараалал нь  $(1,1,1,1), (1,1,2,1), (1,1,6,1), (1,2,1,1), (1,2,2,1), (1,6,1,1), (1,6,6,1)$  тул  $a_4 = 7$  юм.

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)(x-2)(x-3)$$

гэдгийг тооцвол рекуррент харьцаагаар өгөгдсөн дарааллын еронхий гишүүнийг олдог томъёогоор  $a_n = \frac{1}{6}(3^{n-1} + 2^n + (-1)^{n-1})$  гэж олдоно. Иймд  $N = a_{2014} = \frac{1}{6}(3^{2013} + 2^{2014} - 1)$  бөгөөд олох ёстой тоо нь  $6 \cdot N = 3^{2013} + 2^{2014} - 1$  юм.

Тэмдэглэл. 1, 2, ...,  $m$  тоонуудыг, зэргэмдээ орой дээр бичигдсэн цифрүүдийн нэгүү нь 1-ээс хэтрэхгүй хэвэл  $(m-1)$ -тэй тэнцүү байхаар тойрог дээр тэмдэглэгдсэн  $n$  ширхэг цэг дээр бичих боломжийн тоо нь  $\sum_{k=1}^{m-1} \left(1 + 2 \cdot \cos \frac{2\pi k}{m}\right)^n$  байх.

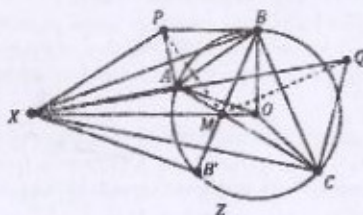
ИЗ.  $\omega$  тойргийн төв  $O$  бөлөг. Дархал хялбархан дүгнэлтийг шигшля.



Лемма:  $O$  цэгт төвтэй  $\omega$  тойргийн гадна орших  $X$  цэгээс уг тойрогт  $XU, XZ$  шүргэгчүүд татгаж,  $YZ$  хэрчимийн дундаж  $M$  цэгийг дайрсан амар  $AC$  хөртийн хувьд  $X, A, O, C$  цэгүүд нэг тойрог дээр орших бөгөөд  $XAM, XOC$  гурвалжнууд төсөөтэй байна.

Баталгаа. Тэгш өнцөгт  $XMY, YMO$  гурвалжнууд төсөөтэй тул  $XM \cdot MO = YM^2$  юм.  $M$  цэгийг дайрсан  $\omega$  тойргийн  $YZ, AC$  хөвчүүдийн хувьд

$YM \cdot MZ = YM^2 = AM \cdot MC$  байна. Энэхээс  $XM \cdot MO = AM \cdot MC$  буюу  $X, A, O, C$  цэгүүд нэг тойрог дээр орших нь гарна. Цаашилбал,  $\angle XAM = \angle XAC = \angle XOC$  бөгөөд  $\angle AXM = \angle AXO = \angle ACO = \angle OAC = \angle OXC$  тул  $XAM, XOC$  гурвалжнууд төсөөтэй юм.



Одоо бодлогоо бодой.  $XAM, XOC$  гурвалжнууд төсөөтэй гэдгээс  $\frac{XA}{AM} = \frac{XO}{OC}$  буюу  $\frac{XA}{AP} = \frac{XO}{OB}$  гэж гарна.  $\angle PAM = \angle BAC = \angle BOC$  ба  $\angle XAM = \angle XOC$  тул  $\angle XAP = 360^\circ - \angle PAM - \angle XAM = 360^\circ - \angle BOC - \angle XOC = \angle XOB$  юм. Иймд  $XAP, XOB$  гурвалжнууд төсөөтэй.  $BM$  шулуун  $\omega$  тойргийн  $B'$  цэгт огтлолдог бол леммийг  $B'B$  хөвчийн хувьд хэрэглэвэл  $XB'M, XCB'$  гурвалжнууд төсөөтэй гэж гарна. Үүгээр  $XAP, XB'M$  гурвалжнууд төсөөтэй буюу

$\angle XPA = \angle XMB'$  гэдэг нь батлагдлаа.  $\angle APB = \angle AMB = \angle B'MC$  тул эндээс  $\angle XPB = \angle XMC$  гэж гарна (бүр цаашилбал  $KPB, KMCB'$  дөрвөн өнцөгтүүд төсөөтэй гэдгийг хариулж болно).

Үүнтэй нэгэн адилаар  $XCO, XB'M$  гурвалжнууд төсөөтэй гэдэг нь батлагдлах бөгөөд эндээс  $\angle XQB = \angle XMA$  гэдэг нь батлагдана. Иймд  $\angle XPB + \angle XQB = \angle XMC + \angle XMA = 180^\circ$  болж батлах зүйл батлагдлаа.

Тэмдэглэл.  $B$  нэгт төвтэй нэвсрээр  $A, C, M$  цэгүүдийн дүрүүд  $A', C', M'$  бол  $B, A', C', M'$  цэгүүд нэг  $\gamma$  тойрог дээр оршино. Одоо  $BA'C'$  гурвалжныг бэглэсэн  $\gamma$  тойргийн  $M'$  цэгийн хувьд Симпсоны шулууны чанаруур  $P', Q', X'$  цэгүүд нэг шулуун дээр орших ба энэ нь  $P, Q, X, B'$  цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг үзүүнэ. Энэ бодолтыг цааш хэрхэн гүйцэтгэхийг уншигч таны дахин бодлого үздэг.

## 2.13 ММО-49, Багын багш IV даваа

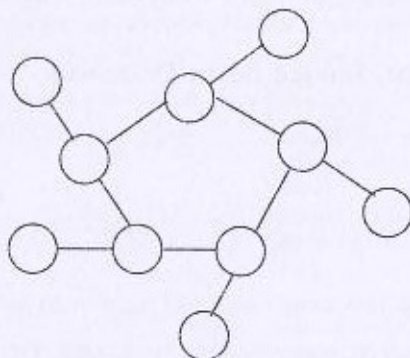
Ц.Батхүү

ББ-А1 (М.Батбилэг) Тойрог дээр 1-ээс 2013 хүртэл дугаарлагдсан 2013 гэрлийн сондгой дугаартай гэрлүүд асаж, тэгш дугаартай гэрлүүд унтраалттай байв. Нэг үйлдлээр дараалсан 49 гэрлийн төлөвийг сольж болдог бол бүх тэгш дугаартай гэрлийг асааж, сондгой дугаартай гэрлүүдийг унтрааж болох уу.

ББ-А2 (Б.Сандагдорж)  $ABCD$  параллелограммын  $AD$  талын дундаж цэг  $M$  болог.  $CM$ -д  $B$  цэгээс буулгасан перпендикулярийн суурь  $F$  болог.  $AFB$  гурвалжныг адил хажуут гэж батал.

ББ-А3 (Т.Гансүх)  $3 \cdot \lfloor \sqrt{x} \rfloor + 2 \cdot \lfloor \sqrt{x+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{4x+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{4x+3} \rfloor = 2013$  тэгшитгэлийн бүх бүхэл тоон шийдийг ол.

ББ-В1 (Б.Амарсанаа) Хөрш дугуйнууд хэрчмээр холбогдсон дахь тоонууд харилцан анхны байхаар 1-ээс 1000 хүртэлх ялгаатай тоонуудаар доорх дүрсийг бөглөх бүх боломжийн тоог ол.

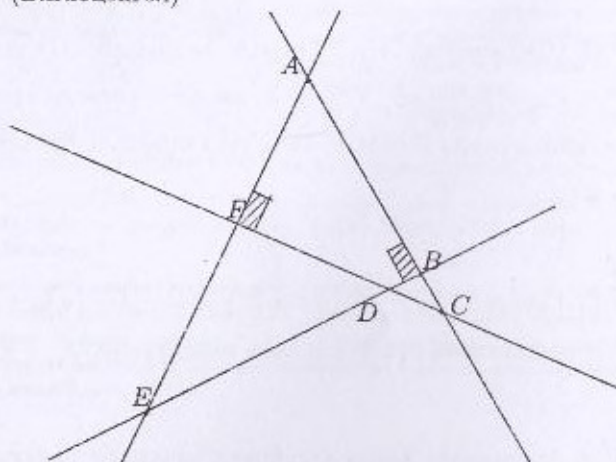


ББ-В2 (Л.Оюунцэцэг) Аливаа дараалсан 3 гишүүний хувьд

$$a_n = \frac{2a_{n-1}a_{n+1}}{a_{n-1} + a_{n+1}} \text{ байх } a_1, a_2, \dots, a_{21} \text{ тоонуудын дараалал}$$

өгөгдөв.  $a_1 = \frac{1}{100}, a_{21} = \frac{1}{101}$  бол  $a_{15}$ -ийг ол.

ББ-В3 (Б.Батцэнгэл)

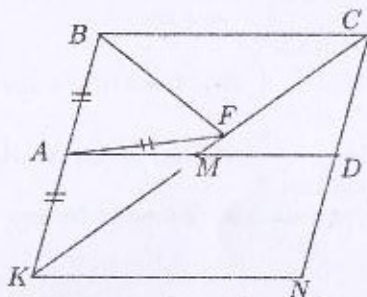


Аль ч 3 нь нэг цэгт огтлолцохгүй, аль ч 2 нь параллель биш  
4 шулуун зурагт үзүүлснээр хос хосоороо  $A, B, C, D, E, F$

цэгүүдэд огтлолцоно. Шулуунуудын огтлолцолд үүсэх  $AB, BC, AF, FE, BD, DE, CD, DF$  хэрчмүүдийн урт нь бүгд алгаатай натурал тоонууд байж болох уу?

ББ-А1: (М.Батбилэг) Нэг гэрэл дээр сондгой тооны үйлдэл хийвэл уг гэрэл төлөвөө солих нь тодорхой. Одоо 1-р гэрлээс эхлэн бүх гэрэл дээр бодлогын нөхцөлд дурьдсан үйлдлийг тус бүр 1 удаа хийвэл гэрэл бүр дээр 49 удаа үйлдэл хийгдэх ба өөрөөр хэлбэл өмнө өгөлснээр гэрэл бүр төлөвөө өөрчилнө. Иймд дараалсан 49 гэрлийн төлөвийг солих замаар бүх тэгш дугаартай гэрлийг асааж, сондгой дугаартай гэрлүүдийг унтрааж болно.

ББ-А2: (Б.Сандагдорж) (УМО-ын 6 удаагийн аварга, 4 удаагийн мөнгө, 2 удаагийн хүрэл медальт Машбатын Отгонжаргалын бодолтыг сийрүүлье).



$AB$  ба  $MC$  шулууны огтлолцлын цэгийг  $K$  гээд,  $KBCN$  параллелограмм байгуулъя.  $2 \times AM = BC, AM \parallel BC$  учир  $A$  цэг нь  $KB$ -ийн дундаж цэг байна. Иймд  $AF$  нь  $BKF$  тэгш өнцөгт гурвалжны медиан болох учир

(Тэгш өнцгийн оройгоос буусан медиан нь гипотенузын хастай тэнцүү байна)  $KA = AB = AF$  болж  $ABF$  нь  $AB = AF$  байх адил хажуут гурвалжин болох нь батлагдав.

ББ-А3: (Т.Гансүх)  $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = k$  гэе. Тэгвэл  $\lfloor \sqrt{x+1} \rfloor$  нь  $k$  эсвэл  $k+1$ ,  
 $\lfloor \sqrt{4x+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4x+3} \rfloor$  нь  $2k$  эсвэл  $2k+1$  байх боломжтой.  
 Тохиолдол бүрийн хувьд  $k$ -г олъё.

а)  $3k + 2k - 4k = 2013, k = 2013$

б)  $3k + 2(k+1) - 4k = 2013, k = 2011$

в)  $3k + 2k - 2(2k+1) = 2013, k = 2015$

г)  $3k + 2(k+1) - 2(2k+1) = 2013, k = 2013$ . Одоо эдгээрийн  
 харгалзах системүүдийг зохиож шийдийг олъё.

а)  $\begin{cases} \lfloor \sqrt{x} \rfloor = 2013 \\ \lfloor \sqrt{x+1} \rfloor = 2013 \\ \lfloor \sqrt{4x+1} \rfloor = 2 \cdot 2013 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2013^2 \leq x < 2014 \\ 2013^2 \leq x+1 < 2014 \\ 2013^2 - \frac{1}{4} \leq x < 2013^2 + 2013 \end{cases}$   
 $x$  нь  $2013^2 \leq x \leq 2013^2 + 2012$  бүхэл тоонууд.

б)  $\begin{cases} \lfloor \sqrt{x} \rfloor = 2011 \\ \lfloor \sqrt{x+1} \rfloor = 2012 \\ \lfloor \sqrt{4x+1} \rfloor = 2 \cdot 2011 \end{cases}$  систем шийдгүй.

в)  $\begin{cases} \lfloor \sqrt{x} \rfloor = 2015 \\ \lfloor \sqrt{x+1} \rfloor = 2015 \\ \lfloor \sqrt{4x+1} \rfloor = 2 \cdot 2015 + 1 \end{cases} \Rightarrow x$  нь

$2015^2 + 2015 \leq x \leq 2015^2 + 2 \cdot 2012$  байх бүхэл тоонууд.

г)  $\begin{cases} \lfloor \sqrt{x} \rfloor = 2013 \\ \lfloor \sqrt{x+1} \rfloor = 2014 \\ \lfloor \sqrt{4x+1} \rfloor = 2 \cdot 2013 + 1 \end{cases}$  систем шийдгүй. Иймд а), в)

тохиолдлийн шийдүүд нь бодлогын шийд болно.

ББ-В1: (Б.Амарсанаа)

ББ-В2: (Л.Оюунцэцэг) өгсөн нөхцөлийг дараах хэлбэрээр бичиж  
 болно.

$$a_n(a_{n-1} + a_{n+1}) = 2a_{n-1}a_{n+1}$$

Тэгээд уг илэрхийллийг  $\frac{1}{2a_{n-1}a_{n+1}}$ -ээр үржүүлбэл

$$\frac{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}}{2} = \frac{1}{a_n}$$

Дээрх илэрхийллийг дүгнэж хэлбэл дарааллын дэс дараалсан гурван гишүүний захын хоёр гишүүний арифметик дундаж нь голын гишүүнтэй тэнцсэн байна. Иймд

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_{21}}$$

дараалал арифметик прогресс үүсгэж байна. Эндээс

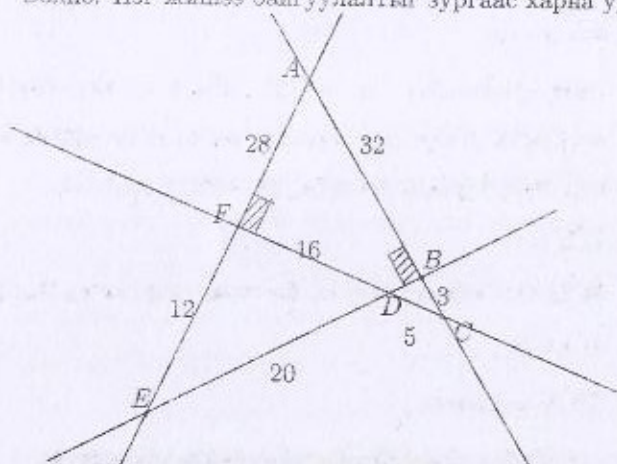
$$d = \frac{\frac{1}{a_{21}} - \frac{1}{a_1}}{20} = \frac{101 - 100}{20} = \frac{1}{20}$$

Арифметик прогрессын ялгавар  $d = \frac{1}{20}$ . Ийнхүү

$$\frac{1}{a_{15}} = \frac{1}{a_1} + 14 \frac{1}{20} = 100 + \frac{7}{10} = \frac{1007}{10}.$$

$$a_{15} = \frac{1007}{10}.$$

ББ-ВЗ: Бодно. Нэг жишээ байгуулалтыг зургаас харна уу.



Тэгш өнцөгт гурвалжин бүр нь пифагорын гурвал болж байхаар хэрчмүүдийн уртыг сонгон авна.

## 2.14 ММО-49, Дундын багш IV давья

О.Төрбат

ДБ-А1 (Г.Батзаяа)  $\Delta ABC$  гурвалжинд багтсан тойргийн төв  $I$  байв.  $ABC$  гурвалжныг багтаасан тойргийн  $B$  оройг үд агуулах  $AC$  нум дээр орших  $R$  цэгээс  $ABI$  гурвалжныг багтаасан тойрогт  $RX, RY$  шүргэгчүүд,  $BCI$  гурвалжныг багтаасан тойрогт  $RZ, RT$  шүргэгчүүд тус тус татжээ.  $I$  нь  $XY, TZ$  хэрчмүүдийн дунджуудыг холбосон шулуун дээр оршихыг батал.

ДБ-А2 (Г.Батзаяа)  $p \in \mathbb{P}, p \nmid a \in \mathbb{N}$  бол

$$n! \prod_{d|n} (1 + a^{d-1} + a^{2(d-1)} + \dots + a^{(p-1)(d-1)}) = \prod_{d|n} A_d = A \text{ байх}$$

бүх  $n$ -г ол.

ДБ-А3 (Б.Лувсанбаяр)  $A = \{2^a \cdot 3^b | a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$  олонлог өгөгдсөжээ. Доорх нөхцлүүдийг нэгэн зэрэг хангах  $S$  олонлог нэр гэгц олдохыг баталж, түүнийг тодорхойл.

$$1) S \subseteq A$$

$$2) \forall n \in A \text{ хувьд } n, 2n, 3n, 4n \text{ талуудын эг нь } S\text{-д орно.}$$

$$3) 1 \in S$$

ДБ-В1 (Б.Амарсанаа)

ДБ-В2 (Б.Хоролдагва) Оройн зэргүүдийн олонлог нь

$\{1, 2, \dots, k\}$  ( $k < 49$ ) байх аливаа графын ирмэгийн тоо 600-аас хэтрэхгүй гэж батал.

ДБ-В3 (Г.Баярмагнай)  $n \in \mathbb{N}$  ба  $a > 1$  нь  $(a^n + 1, n) = 1$  байх бүхэл тоо. Хэрэв  $n$  дор хаяад  $m$  ширхэг сондгой анхны тоон хуваагчтай бол

$$n^m \mid \phi(a^n + 1)$$

болохыг батал. Энд  $\phi$  нь Эйлерийн функц.

ДБ-А1:  $C$ -г үл агуулах  $AB$  нумын дуджийг  $M$ ,  $A$ -г үл агуулах  $BC$  нумын дуджийг  $N$  гээ.  $M$  нь  $ABI$ -г багтаасан тойргийн төв болохыг баталъя.

$$\begin{aligned} \angle MAI &= \angle MAB + \angle BAI = \angle MCB + \frac{\angle A}{2} \\ &= \frac{\angle A + \angle C}{2} = \angle IAC + \angle ICA = \angle MIA \Rightarrow MA = MI \end{aligned}$$

мөн адилаар  $MI = MB$  болж  $MI = MA = MB$  буюу  $M$  нь  $(ABI)$ -н төв болох нь батлагдана.

$\angle MXR = \angle MYR = 90^\circ \Rightarrow MXRY$  тойрог багтана.  $(ABC), (ABI), (MXRY)$  тойргуудын радикал тэнхлэгүүд нэг цэгт огтлолцох тул  $XY, AB, MR$  шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно.  $XY, MR$  шулуунуудын огтлолцлын цэг нь  $XY$ -н дундаж цэг байх нь ойлгомжтой тул  $XY$ -н дундаж цэг гэдэг нь  $NR \cap BC$  цэг байх нь.

Мөн адилаар  $ZT$ -н дундаж нь  $NR \cap BC$  байна.

$CM \cap AN = I$  болохыг тооцон үзвэл Паскалын теорем ёсоор  $(AMBNCR), MR \cap AB, NR \cap BC, I$  цэгүүд нэг шулуун дээр

орших болж бодлого бологдоно.

ДБ-А2:

↑ Лемма.  $p \in \mathbb{P}, p|b \in \mathbb{N}, 0 \leq k \in \mathbb{Z}$  байг.

Хэрэв  $\mathbb{P} \ni q|1 + b^{p^k} + b^{2p^k} + \dots + b^{(p-1)p^k}$  бол  $q \equiv 1(p^{k+1})$  байна.

↑  $b^{p^{k+1}} \equiv 1(q)$  ба Фермагийн теоромоор  $b^{q-1} \equiv 1(q)$  тул  $b^{(q-1)p^{k+1}} \equiv 1(q)$  болно.  $(q-1)p^{k+1} = p^m, 0 \leq m \in \mathbb{Z}$  болно.

Хэрэв  $m \leq k$  гэвэл

$0 \equiv 1 + b^{p^k} + b^{2p^k} + \dots + b^{(p-1)p^k} \equiv 1 + \dots + 1 = p(q) \Rightarrow p = q$   
 болох ба энэ нь  $(q, b) = 1$ -д зөрчинө. Эрж буй тоо  $n$  байг.

$A_1 = p$  учир  $p \neq q|n, q \in \mathbb{P}$  бол

$1 \neq \exists d|n, q|A_d = 1 + a^{d-1} + \dots + a^{(p-1)(d-1)}$  байх учир  
 $p|b = a^{d-1}, k = 0$  үед Леммийн нөхцөл биелж байгаа тул  
 $q \equiv 1(p)$ . Иймд  $p \nmid d|n$  бол  $d \equiv 1(p)$  буюу  $d-1 = p \cdot d_1$   
 тул  $b = a^{d_1}, k = 1$  гээд Леммийг хэрэглэвэл  $q \equiv 1(p^2)$  гэж  
 олно, тэгвэл  $\forall d|n, d \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд  $d \equiv 1(p^2)$  болно гэх  
 мэт.  $\forall k \in \mathbb{N}$  ба  $\forall q|$ -ийн хувьд  $q \equiv 1(p^k)$  гэж олно. Иймд  
 $q = 1$ . Нөгөө талаас  $A_1 = p, d \neq 1$  бол  $A_d \equiv 1(p)$  байх  
 тул  $A = pA', A' \equiv 1(p)$  байх нь илэрхий буюу  $n = 1$  эсвэл  
 $n = p$ . ↓

ДБ-А3:

$S = \{2^a \cdot 3^b \mid a \equiv b \pmod{4}, a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$  нөхцөлийг хан-  
 гана. Одоо өөр тийм олонлог олдохгүйг баталъя.

Эсэргээс нь  $S \neq S'$  олонлог олддог байг. Дээрх олонлогуу-  
 лад дараах байдлаар цэгүүдийн хавтгайн цэгүүдийн олон-  
 логийг харгалзуулъя.

$$2^a \cdot 3^b \in S \Leftrightarrow (a, b) \in f(S)$$

$X \in f(S'), X \notin f(S)$  байх минималь  $X(a, b)$  цэгийг авч үзье (өөрөөр хэлбэл нөхцөлийг хангах хамгийн зүүн талын цэгүүдийн хамгийн доодхыг нь авч үзнэ).

$\forall x, y \in \mathbb{N} : (x, y), (x+1, y), (x+2, y), (x, y+1)$  цэгүүдээс яг нэг нь  $f(S)$ -д харъяалагдана.  $X(a, b) \in f(S') \Rightarrow$

$$(a-1, b), (a, b-1), (a+1, b-1) \notin f(S') \Rightarrow (a-1, b-1) \in f(S')$$

$$a \neq b(4) \Rightarrow (a-1) \not\equiv (b-1)(4) \Rightarrow (a-1, b-1) \notin f(S) \text{ болж}$$

$X$ -н минималь сонголтонд зөрчив.

ДБ-В2: Өгсөн графыг  $G$ , түүний  $i$  зэрэгтэй оройнуудын олонлогийг

$V_i$  гэж тэмдэглэе. Хэрэв  $k \leq 23$  бол  $|V_i| = 1, i = \overline{1, 22}$  ба

$|V_{23}| = 27$  гэж үзвэл графын ирмэгийн тоо оройн зэргүү-

дийн нийлбэрийн хагастай тэнцүү тул  $G$  графын ирмэгүүд

нь  $\frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{22} i + 27 \cdot 23 \right)$  тооноос буюу 600-иас бага байна. Хэ-

рэв  $k \geq 24$  бол  $V_1, V_2, \dots, V_{24}$  олонлог тус бүрээс нэг орой сон-

гон авч тэдгээрийн олонлогийг  $X$ , үлдэх оройнуудын олон-

логийг  $Y$  гэж тэмдэглэе. Тэгвэл ядаж нэг төгсгөл орой нь

$X$  олонлогт байх ирмэгүүд нь  $\sum_{i=1}^{24} i$  тооноос, харин төгсгөл

оройнууд нь зөвхөн  $Y$  олонлогт байх ирмэгүүд нь  $C_{25}^2$ -аас

ихгүй тул  $G$  графын нийт ирмэгийн тоо нь

$\sum_{i=1}^{24} i + C_{25}^2$ -аас буюу 600-аас хэтрэхгүй. Одоо графын орой-

нуудаа  $1, 2, \dots, 49$  гэж дугаарлан  $i + j \geq 50$  байх  $i$  ба  $j$  ду-

гаартай оройнуудыг ирмэгээр холбоход үүсэх граф яг 600 ирмэгтэй болохыг хялбархан тооцож болно.

ДБ-ВЗ:  $n = 2^{\alpha}k$  ( $k$ - сондгой) гэвэл  $a^n + 1 = \prod_{d|k} \Phi_{2^{\alpha+1}d}(a)$  ба  $\Phi_{2^{\alpha+1}d}(a) > 1$  байна. Одоо

$$(*) \quad (\Phi_{2^{\alpha+1}d_1}(a), \Phi_{2^{\alpha+1}d_2}(a)) = 1, \quad \forall d_1, d_2 \mid k$$

болохыг үзүүлсэ. Хэрэв  $d_1/d_2$  анхны тооны зэрэг бол энэ нь өгөгдсөн нөхцөл болон [10.6.4, МКС 2]-ээс, биш бол [10.6.3, МКС 2]-ээс мөрдөнө. Ямар ч  $q \mid \Phi_{2^{\alpha+1}d}(a)$  хувьд  $2^{\alpha+1}d \mid q-1$  ([Лемма 1, МКС 2]) байх тул

$$n \mid \phi(\Phi_{2^{\alpha+1}d}(a)\Phi_{2^{\alpha+1}k/d}(a)).$$

Иймд  $(*)$ -оор  $n^{2^{\alpha-1}} \mid \phi(a^n + 1)$  болно.

### 3 ОУМО-54 сорилын бодлого бодолтууд

#### 3.1 ОУМО-54, I-сорил

Ц.Батхүү

C1-1. (Дайвий-Од) Тогтмол өргөнтэй дүрсийн өргөн  $\Delta$ , багтсан тойргийн радиус  $R$  бол  $\frac{\Delta}{R}$  хэмжигдэхүүний хамгийн бага утгыг ол.

C1-2. (Ц.Батхүү)  $\{1, 2, \dots, 325\}$  олонлогийн аливаа 2-будалт бүрийн хувьд ижил өнгөөр будагдсан арифметик прогресс үүсгэдэг  $p, q, r$  тоонууд олдохыг батал.

C1-3. (АРМО-2009, Ц.Батхүү)  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  нь

$$\frac{a_1}{k^2+1} + \frac{a_2}{k^2+2} + \frac{a_3}{k^2+3} + \frac{a_4}{k^2+4} + \frac{a_5}{k^2+5} + \frac{a_6}{k^2+6} = \frac{1}{k^2},$$

$k = 1, 2, \dots, 6$  байх бодит тоонууд бол

$$\frac{a_1}{50} + \frac{a_2}{51} + \frac{a_3}{52} + \frac{a_4}{53} + \frac{a_5}{54} + \frac{a_6}{55} = \frac{m}{n}$$

байх  $m, n$  бүхэл тоонуудыг ол.

C1-1: Тогтмол өргөнтэй дүрсийн диаметр  $d$  бол  $d = \Delta$  болохыг харуулъя.  $d > \Delta$  байж болохгүй, хэрэв  $d > \Delta$  гэж үзвэл диаметртэй перпендикуляр чиглэлд дүрс нь  $\Delta$  зайтай хоёр параллель шулууны хооронд хашигдахгүй болох ба энэ нь  $\Delta$  өргөнтэй гэдэгт харшилна.  $d < \Delta$  байж болохгүй. Дурын чиглэл сонгон авч дүрсийг  $\Delta$  зайтай хоёр параллель шулуунаар хашихад тэдгээр шулууныг шүргэх цэгүүдийг  $A, B$  гэвэл  $|AB| \geq \Delta > d$  болж энэ нь диаметр гэдэгт харшилна. Юнгийн тэнцэтгэл бишийг бичвэл  $R \leq \frac{1}{\sqrt{3}}d$

болох ба  $d = \Delta$  болохыг ашиглавал  $\frac{\Delta}{R} \geq \sqrt{3}$  гэж гарна.

C1-2:  $\{1, 2, \dots, 325\}$  олонлогийг

$$G_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}, G_2 = \{6, 7, 8, 9, 10\},$$

$\dots, G_{65} = \{321, 322, 323, 324, 325\}$  гэсэн 65 ангид хуваая.

Анги бүр  $2^5 = 32$  боломжит 2-будалттай байх тул яг ижил 2-будалттай  $G_a, G_b$ ,  $1 \leq a < b \leq 33$  байх 2 анги олдоно. Энд  $2b - a \leq 65$  бол  $a, b, 2b - a$  тоонууд арифметик процесс үүсгэнэ.  $G_a$  ангийн эхний 3 тооны 2 нь ижил өнгөтэй, тухайлбал 1 ба 3-р тоонууд ижил улаан өнгөтэй гэе. Тэгвэл 5-р тоо мөн улаан бол бодлого бодогдоно. Иймд  $G_a$ -ийн 5-р тоо хөх болог. Тэгвэл  $G_b$  ангийн 1 ба 3-р тоо улаан, 5-р тоо хөх боно. Одоо  $G_{2b-a}$  ангийн 5-р тоо улаан бол  $G_a$  ангийн 1,  $G_b$  ангийн 3-р тоонуудтай нийлээд 3 урттай улаан прогресс үүснэ. Эсрэг тохиолдолд буюу  $G_{2b-a}$  ангийн 5-р тоо хөх тохиолдолд тэр нь  $G_a, G_b$  ангиудын 5-р тоонуудтай 3 урттай дан хөх арифметик прогресс үүсгэнэ. Эцэст нь  $1, 2, \dots, N$  олонлог дээр  $k$  будалт тодорхойлоход  $k$  урттай ижил өнгийн арифметик прогресс үргэлж олдож байх хамгийн бага  $N$  тоог  $W(r, k)$  Вандер Вардений тоо гэж нэрлэдэгийг санавал уг бодлого  $W(2, 3) \leq 325$  болохыг харах бодлого болох ба үнэн хэрэгтээ  $W(2, 3) = 9$  болохыг харахад түвэггүй болохыг тэмдэглэе.

C1-3:

$$R(x) = \frac{a_1}{x^2+1} + \frac{a_2}{x^2+2} + \frac{a_3}{x^2+3} + \frac{a_4}{x^2+4} + \frac{a_5}{x^2+5} + \frac{a_6}{x^2+6}$$

болог. Тэгвэл  $R(\pm 1) = 1$ ,  $R(\pm 2) = \frac{1}{4}$ ,  $R(\pm 3) = \frac{1}{9}$ ,

$R(\pm 4) = \frac{1}{16}$ ,  $R(\pm 5) = \frac{1}{25}$ ,  $R(\pm 6) = \frac{1}{36}$  ба бидний олох тоо

$R(7)$  болно.

$P(x) = (x^2+1)(x^2+2)\dots(x^2+6)$ ,  $Q(x) = R(x)P(x)$  болог.

Тэгвэл  $k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 6$  үед  $Q(k) = R(k)P(k) = \frac{P(k)}{k^2}$  буюу

$P(k) - R^2Q(k) = 0$ . Эндээс  $P(x) - x^2Q(x)$  гэсэн 12 зэргийн

олонгишүүнт  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$  язгууртай ба

$$P(x) - x^2Q(x) = A(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9) \times \\ \times (x^2-16)(x^2-25)(x^2-36).$$

$$\text{Энд } x=0 \text{ гэвэл } A = \frac{P(0)}{(-1)(-4)(-9)(-16)(-25)(-36)} = \frac{1}{720},$$

$$1 - x^2R(x) = 1 - x^2 \frac{Q(x)}{P(x)} \\ = \frac{1}{720} \cdot \frac{(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)(x^2-16)(x^2-25)(x^2-36)}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)(x^2+4)(x^2+5)(x^2+6)}$$

болохыг тооцвол  $1 - 49R(7) = \frac{1}{720} \cdot \frac{48 \cdot 45 \cdot 40 \cdot 33 \cdot 24 \cdot 13}{50 \cdot 51 \cdot 52 \cdot 53 \cdot 54 \cdot 55}$  ба  
одоо эндээс  $R(7)$  олоход түвэггүй.

### 3.2 ОУМО-54, II-сориол

Б.Баяржаргал

C2-1 (Б.Баясгалан, Б.Баяржаргал, 2013.05.18). Бүхэл  $R$  радиустай тойрог дээр аль ч хоёрынх нь хоорондын зай бүхэл байх яг 4 цэг олох зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь  $R$  нь

$4k+1$  хэлбэрийн цор ганц анхны хуваагчтай байхыг батал.

C2-2. (Б.Баяржаргал)  $k, n \in \mathbb{N}, (n, 3) = 1$ . Тэгвэл  $3^k | m^3 + n$  байх натурал  $m$  тоо төгсгөлгүй олон олдож байх бүх  $n$  натурал тоог ол.

C2-3. (Б.Баясгалан) Хуваалтын хэсгүүд дэх тоонуудын нийлбэрүүд хоорондоо тэнцүү байхаар  $\{1, 2, \dots, n\}$  олонлогийг хэсгүүдэд хуваах боломжийн тоог  $E_n$  гэе. Мөн  $m = dk + r, 0 \leq r < d$  байх натурал тоонуудын хувьд  $\frac{m!}{d!^k \cdot k! \cdot r!}$  тоог  $P(m, d)$  гэе. Тэгвэл  $n$  сондгой натурал тооны хувьд  $E_n \geq \sum_{d|\frac{n+1}{2}} P\left(\frac{n+1}{2}, d\right)$  байхыг батал.

C2-1:  $R, a, b, c \in \mathbb{Z}$  байг. Косинус, синусын томъёогоор

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha, \quad \sin \alpha = \frac{a}{2R} \text{ тул}$$

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}$ . Эндээс  $4R^2 - a^2$  нь ямар нэг  $t$  бүхэл тооны квадрат байх нь. Өөрөөр хэлбэл

$$4R^2 - a^2 = t^2, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (*)$$

1) Тойрогийн радиус  $R$  нь  $4k+1$  хэлбэрийн анхны тооноос чөлөөт үед  $a, b, c$  тоонууд зэрэг 0-ээс ялгаатай бүхэл тоо байж чалахгүй. Үнэхээр  $a^2 + t^2 = 4R^2 \Rightarrow$  Эйлер-Фермагийн теоремоос  $R$ -н  $R'$  сондгой хуваагч бүрийн хувьд  $a \equiv t \equiv 0(R')$  ба  $2^{2\alpha} = a_1^2 + t_1^2$  тэгшитгэл нь  $(\pm 2^\alpha, 0)$  эсвэл  $(0, \pm 2^\alpha)$  гэсэн дөрөвхөн бүхэл шийдтэйг анхаарвал  $a = 0$  эсвэл  $b = 0$  болоход хүрнэ.

2)  $q = 4k+1$  анхны тоо.  $R = q \cdot r$ ,  $r$  нь  $4k+1$  хэлбэрийн

анхны тооноос чөлөөт үед тойрог дээр аль ч хоёрынх нь зай бүхэл байх яг 4 цэг олдохыг баталъя. (\*) дүгнэлтээс  $a, b, c$  тоонууд зэрэг бүхэл байхын тулд  $\triangle ABC$  нь тэгш өнцөгт байна. Тухайлбал  $b = 2R, \angle CAB = 90^\circ$  байг. Гауссын теоремоос  $q^2 = x^2 + y^2$  байх  $(x, y)$  натурал хос эрэмбийн нарийвчлалтайгаар цор ганц олдоно. Цаашилбал

$4R^2 = (2rx)^2 + (2ry)^2$  хэлбэрт ганц аргаар тавигдана. Эндээс  $R$  радиустай тойрогт багтсан  $ABCD$  тэгш өнцөгтийн оройнууд өгүүлбэрийн нөхцөлийг хангана. Хэрэв тав дахь  $K$  цэг олдоно гэж үзвэл ( $K$  цэг  $D$  цэгтэй нэг хагас нумд оршдог байг)  $KC = 2rx, KA = 2ry (KC = 2ry, KA = 2rx)$  байна.  $CK = CB \Rightarrow a \cdot c = 2R \cdot KB \Rightarrow KB = \frac{ac}{2R}$ ,  
 $(a, q) = (c, q) = 1$  тул  $KB \notin \mathbb{Z}$ .

3) Одоо  $p \equiv q \equiv 1(4)$ ,  $p, q$  анхны тоонууд ба  $R = pqr$ ,  $r \in \mathbb{N}$  байг. Энэ үед  $R = pq$  үед бодлогыг бодоход хангалттай (Үнэхээр  $2r$  коэффициенттэй гомотет хийхэд бүхэл байх чанар нь хадгалагдах нь илэрхий). Иймд

$$AC = pq, p^2 = x^2 + y^2, q^2 = a^2 + b^2$$

$AD = ap, DC = cp, KC = xq, KA = yq$  гэвэл  $BKD$  тэгш өнцөгт гурвалжны  $\angle KBD = \angle CAD + \angle CKA - 90^\circ$  тул синусын теорем ашиглан  $KD$ -г бүхэл болохыг хялбархан харж болно. Өөрөөр хэлбэл  $A, B, C, D, K$  таван цэгийн аль ч хоёрын хоорондох зай бүхэл байна.  $p = q$  өөрөөр хэлбэл  $p^2 | R$  үед өмнөхтэй адил  $KD$ -г бүхэл гэж харна. Тооцоо нь эн-

гийн тул үлдээв.

C2-2:  $(n, 3) = 1$   $k, n \in \mathbb{N}$  хувьд  $m^3 \equiv -n(3^k)$  биелэх  $m$  тоо олдох

бүрэн нөхцөл нь (МК1-ийн 1.9.13)

$m^{\frac{3\varphi(3^k)}{3}} \equiv (-n)^{\frac{\varphi(3^k)}{3}} \equiv n^{2 \cdot 3^{k-2}} \equiv 1(3^k)$ . Одоо модулийн зэрэг

осгох, буулгах чанараар (МК1-ийн 1.8.17)

$n^{2 \cdot 3^{k-2}} \equiv 1(3^k) \Leftrightarrow n^2 \equiv 1(3^2)$ . Иймд  $n = 9\ell \pm 1, \ell \in \mathbb{N}$ .

C2-3:  $P\left(\frac{n+1}{2}, d\right) = \frac{\frac{n+1}{2}!}{\underbrace{d! \cdot d! \cdot \dots \cdot d!}_k \cdot k!}$  саная.

$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = n \cdot \frac{n+1}{2}$  ба иймд олжлогчуудын

тус бүр дэх тоонуудын нийлбэр нь  $nd, d \mid \frac{n+1}{2}$  байх хуваал-

туудыг нь авч үзье.  $d \mid \frac{n+1}{2}$  бүрийн хувьд  $\begin{cases} n \\ (1, n-1) \\ (2, n-2) \\ \vdots \\ (\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}) \end{cases}$

гэсэн  $\frac{n+1}{2}$  хосуудад хуваая ( $n$ -г дангаараа хос). Аль ч хосын нийлбэр нь  $n$  ба үүнээс  $d$  хосыг сонгоод 1 олонлог болох, ахиад  $d$  хосыг сонгож олонлог болгох... үйлдлийг сонирхоё.

Ингэхэд үүсэх боломжийн тоо нь давталттай сэлгэмэл буюу

$\frac{(\frac{n+1}{2})!}{d! \cdot d! \cdot \dots \cdot d! \cdot (\frac{n+1}{2d})!}$ . Учир нь бид  $\frac{n+1}{2}$ -оос эхлээд  $d$ -г сон-

гоно. Энэ нь  $C_{\frac{n+1}{2}}^d$ ; үлдсэн  $\frac{n+1}{2} - d$ -ээс  $d$ -г сонгоход  $C_{\frac{n+1}{2}-d}^d$ ...

сонгосноор

өөрөөр хэлбэл  $C_{\frac{n+1}{2}}^d \cdot C_{\frac{n+1}{2}-d}^d \cdot C_{\frac{n+1}{2}-2d}^d \cdot \dots \cdot C_d^d$  буюу

$= \frac{(\frac{n+1}{2})!}{d! \cdot (\frac{n+1}{2}-d)! \cdot d! \cdot (\frac{n+1}{2}-2d)! \cdot d! \cdot (\frac{n+1}{2}-3d)! \cdot \dots}$

$$= \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)!}{d! \cdot d! \cdot \dots \cdot d!}$$
 бөгөөд  $d$  ширхэг хосоос тогтох олонлогууд нь байраа сэлгэж  $\frac{n+1}{2d}$  олонлог байгаа тул  $\left(\frac{n+1}{2d}\right)!$  янзаар сэлгэнэ (сонгох (дараалал)). Өөрөөр хэлбэл
 
$$\frac{\frac{n+1}{2}}{d! \cdot d! \cdot \dots \cdot d! \cdot \left(\frac{n+1}{2d}\right)!} = P\left(\frac{n+1}{2}, d\right)$$
 нь  $d$  бүрийн хувьд олонлог байгуулагдах тул  $E_n \geq \sum_{d|\frac{n+1}{2}} P\left(\frac{n+1}{2}, d\right)$  батлагдав.

### 3.3 ОУМО-54, III-сорил

Ц.Батхүү

СЗ-1. (Вьетнам, 1986). Эхний гишүүнээр 1-ийг авч, дараа нь дараагийн 2 тэгш тоо болох 2, 4, дараа нь дараагийн 3 сондгой тоо болох 5, 7, 9, дараа нь дараагийн 4 тэгш тоо болох 10, 12, 14, 16, дараа нь дараагийн 5 сондгой тоо авах замаар үргэлжлүүлэн байгуулсан

1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 25, ...  $a_n$  эерэг бүхэл дарааллын  $n$ -р гишүүнийг ол.

СЗ-2. (Ц.Батхүү). Аливаа  $x, y, z$  бодит тоонуудын хувьд  $\sin x \cos y + \sin y \cos 2x + \sin z \cos 4x$  илэрхийллийн хамгийн их утгыг ол.

СЗ-3. (Ц.Батхүү) Зөвхөн 3, 4, 5, 6-ийн цифрүүдээр бичигддэг 66667-д хуваагддаг 10 оронтой тоонуудын тоог ол.

СЗ-1:  $A = \{a_n\}$ . өгөгдсөн дараалал,  $B = \{2n\}$ ,  
 $H = \{h_n = 2n - a_n\}$  болог. Тэгвэл  $a_n = 2n - h_n$  болох

ба  $H = \{h_n\}$  дарааллыг  $(1), (2, 2), (3, 3, 3), \dots, \underbrace{(k, k, \dots, k)}_{k\text{-ширхэг}}, \dots$

бүлэглэвэл  $h_n$  нь  $k$ -р бүлэгт багтдаг бол  $h_n = k$  болох нь тодорхой  $k$ -р бүлгийн өмнө  $1 + 2 + \dots + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2}$

гишүүн байх тул  $\frac{(k-1)k}{2} + 1 \leq n \leq \frac{k(k+1)}{2} + 1$  бол  $h_n = k$  байна.

$$\frac{(k-1)k}{2} + 1 \leq n \Rightarrow \frac{1 - \sqrt{8n-7}}{2} \leq k \leq \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2} \text{ ба}$$

$$n \leq \frac{k(k+1)}{2} + 1 \Rightarrow \frac{-1 - \sqrt{8n-7}}{2} > k \text{ ба}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{8n-7}}{2} < k. \text{ Эндээс } \frac{-1 + \sqrt{8n-7}}{2} < k \leq \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2}$$

$$\text{буюу } k \leq \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2} < k+1 \text{ тул } k = \left\lfloor \frac{-1 + \sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor \text{ болох}$$

$$\text{ба эндээс } a_n = 2n - \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor, n = 1, 2, \dots$$

$$\text{C3-2: } \sin x \cos y + \sin y \cos 2z \leq |\cos y| + |\sin y| \leq \sqrt{2} \text{ ба}$$

$$\sin z \cos 4x \leq 1 \text{ тул}$$

$$\sin x \cos y + \sin y \cos 2z + \sin z \cos 4x \leq 1 + \sqrt{2} \text{ ба одоо}$$

$$x = \frac{3\pi}{2}, y = \frac{5\pi}{4}, z = \frac{\pi}{2}, \text{ үед хамгийн их утгадаа хүрэхийг харахад хангалттай.}$$

C3-3:  $A, B$  нь  $N$  гэсэн 10 оронтой тооны харгалзан эхний болон сүүлийн 5 оронгоор үүсэх тоонууд бол

$$66667|N \Leftrightarrow 66667|2B - A \text{ болохыг үзүүлъя. } 66667 \text{ нь сондгой тул } 66667|N \Leftrightarrow 66667|2N \text{ болох нь тодорхой.}$$

$$66667 \cdot 3 = 200001 = 2 \cdot 10^5 + 1 \text{ тул } 66667|2 \cdot 10^5 + 1$$

$$\text{ба эндээс } 66667|2A \cdot 10^5 + A. \text{ Одоо } 2N = 2A \cdot 10^5 + 2B \text{ тооноос } 2A \cdot 10^5 - A \text{ хасвал } 2B - A \text{ гарна. Өөрөөр хэлбэл}$$

$66667|N \Leftrightarrow 66667|2B - A$ . Иймд 3,4,5,6 цифрүүдээс тогтох  $66667|2B - A$  байх 5 оронтой  $A, B$  тоонуудын хосын тоог олоход хангалттай.  $B \geq 33333, A \leq 66666$  гэдгээс  $2B - A \geq 0$  болох ба  $A = 66666, B = 33333$  тохиолдолд энэ тэнцэтгэл биш тэнцэлдээ хүрнэ. Өөрөөр хэлбэл  $A = 66666, B = 33333$  нэг хос олдоно. Одоо

$2B - A > 0$  байх бидний тавьсан нөхцлийг хангах  $(A, B)$  хосуудын тоог олѳѳ.  $B \leq 66666, A \geq 33333$  гэдгээс

$2B - A \leq 99999 < 2 \cdot 66667$  болох тул  $2B - A = 66667$  болохоос өөршгүй  $A = \overline{a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}, B = \overline{b_4 b_3 b_2 b_1 b_0}$  гэвэл

$$2B - A = (2b_4 - a_4) \cdot 10^4 + (2b_3 - a_3) \cdot 10^3 + (2b_2 - a_2) \cdot 10^2 + (2b_1 - a_1) \cdot 10 + (2b_0 - a_0)$$

болох ба нөгөө талаас  $2b_i - a_i \geq 0, 2b_i - a_i \leq 9$  гэдгээс эдгээр нь  $2B - A = 66667$  тооны цифрүүд болох тул  $2b_0 - a_0 = 7, 2b_i - a_i = 6, i = 1, 4$ . Иймд  $a, b$  нь 3-аас 6 хүртэлх цифрүүд тохиолдолд 6 ба 7-ийн тоонууд  $2b - a$  хэлбэрт хэдэн хэлбэрээр тавигдахыг тооцоход хангалттай. Эндээс  $6 = 2 \cdot 5 - 4 = 2 \cdot 6 - 6, 7 = 2 \cdot 5 - 3 = 2 \cdot 6 - 5$  буюу 5 оронгийн аль ч орон нь ийм 2 боломжтой тул  $2^5 = 32$  хувилбар гарна. Иймд бидний олох тоо  $32 + 1 = 33$ .

### 3.4 ОУМО-54, IV-сориол

О.Төрбат

утгатай, дурын  $x, y$  бодит тоонуудын хувьд

$$f(f(x+y)) \geq f(f(y)) + y \cdot f(x)$$

тэнцэтгэл биш биелдэг байх бүх функцийг ол.

C4-2. Доорх 2 нөхцөлийг хангах бүх  $p, q, r$  анхны тоон гуравтыг ол.

а)  $p, q, r$ -арифметик прогресс үүсгэнэ.

б)  $p, q, r | 2^p + 2^q + 2^r$ .

C4-3.  $I$  нь  $ABC$   $\Delta$ -д багтсан тойргийн төв ба  $D$  нь  $BC$  хэрчим дээрх цэг байг.  $AD$  хэрчим  $\Delta BIC$ -г багтаасан тойргийг  $K$  цэгээр огтлоно.  $AI$  нь  $BC$ -г  $U$  цэгээр огтлох ба  $M$  нь  $ABC$ -г багтаасан тойргийн  $A$ -г үл агуулах  $BC$  нумын дундаж байг.  $AUD$ -г багтаасан тойрог  $ABC$ -г багтаасан тойргийг  $A$  ба  $X$  цэгүүдээр ( $A \neq X$ ) огтлох бол  $XKUM$  тойрогт багтсан 4-өнцөгт гэж батал ( $D \neq U$ ).

C4-1:

$$f(f(x+y)) \geq f(f(y)) + y \cdot f(x) \quad (1)$$

$$(x, y) \rightarrow (-x, x+y) \Rightarrow f(f(y)) \geq f(f(x+y)) + (x+y) \cdot f(-x). \quad (2)$$

Эдгээрийг нэмбэл

$$0 \geq xf(-x) + y(f(x) + f(-x)) \Rightarrow -f(x) = f(-x)$$

$$(x, y) \rightarrow (-x, -y) \Rightarrow yf(x) \leq -(f(f(x+y)) - f(f(y))) \Rightarrow$$

$$(1) \Rightarrow yf(x) \leq f(f(x+y)) - f(f(y)) \Rightarrow yf(x) \leq 0 \Rightarrow$$

$f(x) = 0$  ба энэ шийд болох нь шалгахад илт тул  $f(x) = 0$  гэсэн ганц л шийдтэй.

C4-2: Бүгд тэнцүү үед  $(2, 2, 2)$ ,  $(3, 3, 3)$ -аас өөр шийд байхгүй тодорхой.  $p + d = r, p + 2d = q, d > 0, p > 2$  байх нь ойлгомжтой.  $pqr | 1 + 2^d + 2^{2d} | 2^{3d} - 1$ .  $k_p, k_q, k_r$ -ууд нь харгалзан  $p, q, r$  тоонуудын 2 модулиарх эхэмбэ байг. Хэрэв  $k_p | d$  бол  $p | 2^d - 1$  тул  $(p | 2^{2d} + 2^d + 1), p = 3$ .  
 $q > p \geq 3, k_p \nmid d$  ба  $k_q | 3d, k_r \nmid d, k_r | 3d \Rightarrow 3 | k_r, k_q$   
 $\Rightarrow 3 | p - 1, 3 | q - 1 \Rightarrow 3 | p - q = d \Rightarrow |q = p + d \in \mathbb{P}$ -д зөрчил.  
 $k_p \nmid d, k_p | 3d, d = 3^l \cdot m, (m, 3) = 1$  байг.  $v_3(k_p) = \ell + 1$ .  
 $k_q, k_r$ -н хувьд мөн адил.  $3^{\ell+1} | p - 1, 3^{\ell+1} | q - 1 \Rightarrow 3^{\ell+1} | p - q = d$  зөрчил. Иймд  $(2, 2, 2), (3, 3, 3)$  гэсэн гурвалууд л нөхцөлийг хангана.

C4-3:  $B; I, C$ -үүд нь  $M$  төвтэй тйрог дээр орших нь хялбархан батлагдана.  $MD \cap (ABC) = X'$ .

$$\begin{aligned} \angle DUM &= \angle BUM = \angle UBA + \angle UAB = \angle ABC + \angle MAC \\ &= \angle ABM = \angle AX'M = \angle XX'M \Rightarrow AUDX' \end{aligned}$$

тойрогт багтана.  $\Rightarrow X' \equiv X$ .

$$\begin{aligned} \triangle MUC \sim MCA &\Rightarrow MU \cdot MA = MC^2 = MK^2 \\ &= MD \cdot MX \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \triangle MDK \sim MKX &\Rightarrow \angle XKM = \angle KDM \\ &= 180^\circ - \angle DAM - \angle DMA \\ &= 180^\circ - \angle DXU - \angle XMU = \angle XUM. \Rightarrow XKUM \end{aligned}$$

тойрогт багтана.

#### 4 Олон улсын Математикийн 54-р Олимпиадын дүнгийн тухай тайлан

Ц.Дашдорж, Ц.Батхүү

ОУМО-54, 2013.07.18-28нд Колумбын Сата-Мартад боллоо. Дэлхийн 97 орон оролцсоноос Хятад 208, Өмнөд Солонгос 204, Америк 190, Орос 187, Хойд Солонгос 184, Сингапур 182, Вьетнам 180, Тайван 176, Англи 171, Иран 168 оноогоор эхний 10 байрыг эзэлсэн бол Монгол 84 оноогоор 42-р байрыг эзлэв. Манай судагчдын амжилтыг үзүүлбэл:

1. Ч.Золбоо, Монгол-Туркийн сургууль, XI анги, 17 оноо, хүрэл медаль
2. А.Сүхбат, "Олонлог" сургууль, X анги, 17 оноо, хүрэл медаль
3. М.Ананд, "Орчлон" сургууль, XI анги, 21 оноо, хүрэл медаль
4. Шагдарын Золбоо, "Орчлон" сургууль, X анги, 8 оноо
5. Батсайханы Бат-Оргил УБ, I-сургууль, XI анги, 10 оноо
6. Г.Мөнхбаяр УБ, I-сургууль, XI анги, 11 оноо тус тус авлаа.

ОУМО-55, 2014.07.03-13нд Өмнөд Африкийн БНУлсын Кейптаун хотод болно.

**Бодлого1** Өгссөн  $k, n$  натурал тоонуудын хувьд

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$$

байх  $m_1, m_2, \dots, m_k$  натурал тоонууд (ялгаатай байх албагүй) оршихыг батал.

**Бодлого2** (Австраль). Аль ч гурав нь нэг шулуунд үл орших хавтгайн 4027 цэгийн 2013 нь улаан, 2014 нь хөхөөр будагдсан бол түүнийг **колумбийн цогц** гэе. Өгссөн колумбийн цогц ба хавтгайг хэдэн мужид хуваах шулуунуудын олонлогийн хувьд:

- ямар ч шулуун нь цогцын цэгийг дайраагүй
- хуваалтын муж бүр зөвхөн нэг өнгийн цэгүүдийг агуулдаг бол уг олонлогийг **сайн** гэе.

4027 цэг бүхий ямарч колумбийн цогцын хувьд  $k$  шулуун бүхий сайн олонлог олддог байх  $k$ -ийн хамгийн бага утгыг ол.

**Бодлого3** (Украйн).  $ABC$  гурвалжны  $A$  оройн гадаад багтсан тойрог нь  $BC$  талыг  $A_1$  цэгт шүргэнэ.  $CA$  талын  $B_1$  цэг,  $AB$  талын  $C_1$  цэгүүд нь мөн адилаар  $B$  ба  $C$ -ийн гадаад багтсан тойргуудаар тодорхойлогдоно.  $A_1B_1C_1$  гурвалжныг багтаасан тойргийн төв нь  $ABC$  гурвалжныг багтаасан тойрог дээр оршдог бол  $ABC$  нь тэгш өнцөгт гурвалжин гэж батал ( $ABC$  гурвалжны  $A$  оройн гадаад багтсан тойрог гэдэг нь  $BC$  хэрчмийг шүргэдэг,  $AB$  талын

үргэлжлэлийг  $B$ -ээс цааш,  $AC$  талын үргэлжлэлийг  $C$ -ээс цааш шүргэдэг тойрог.  $B$  ба  $C$  оройн гадаад багтсан тойргууд мөн адил тодорхойлогдоно).

**Бодлого4** (Тайланд). Хурц өнцөгт  $ABC$  гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын цэг нь  $H$  байг.  $BC$  хэрчмийн  $B$  ба  $C$ -ээс ялгаатай дурын цэг нь  $W$  байг.  $ABC$  гурвалжны  $B$  ба  $C$  оройгоос татагдсан өндрүүдийн суурь нь  $M$  ба  $N$  байг.  $BWN$  гурвалжныг багтаасан тойрог  $\omega_1$  ба  $X$  нь  $WX$  нь  $\omega_1$ -ийн диаметр байх  $\omega_1$ -ийн цэг байг. Мөн адилаар  $CWM$  гурвалжныг багтаасан тойрог  $\omega_2$  ба  $Y$  нь  $WY$  нь  $\omega_2$ -ийн диаметр байх  $\omega_2$ -ийн цэг байг.  $X, Y$  ба  $H$  цэгүүд нэг шулуун дээр оршихыг батал.

**Бодлого5** (Болгар).  $\mathbb{Q}_{>0}$  нь бүх эерэг рациональ тоонуудын олонлог.  $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  функц нь дараах гурван нөхцлийг хангана:

- 1)  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$  бүрийн хувьд  $f(x)f(y) \geq f(xy)$  биелэнэ;
- 2)  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$  бүрийн хувьд  $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$  биелэнэ;
- 3)  $f(a) = a$  байх рациональ тоо  $a > 1$  оршино.

$x \in \mathbb{Q}_{>0}$  бүрийн хувьд  $f(x) = x$  гэж батал.

**Бодлого6** (Орос).  $n \geq 3$  бүхэл тоо байг. Тойрог ба түүнийг тэнцүү шулуунуудад хуваах  $n+1$  цэгүүдийг авъя. Тоо бүрийг яг нэг удаа ашиглан энэ цэгүүдийг  $0, 1, \dots, n$  тоонуудаар тэмдэглэх бүх аргыг авч үзье. Ямар нэг эргүүлэлтээр

давхцах хоёр аргыг адил гэж үзье.

$a + d = b + c$  байх дурын дөрвөн тэмдэглэгээ  $a < b < c < d$ -ийн хувьд  $a$  ба  $d$  тэмдэглэгээтэй цэгүүдийг холбосон хөвч,  $b$  ба  $c$  тэмдэглэгээтэй цэгүүдийг холбосон хөвчтэй огтлолцохгүй бол уг аргыг гоё гэнэ.  $M$  нь гоё аргын тоо байг.  $x + y \leq n$  ба  $\text{ХИЕХ}(x, y) = 1$  байх натурал тоонуудын эрэмбэлэгдсэн хосын тоог  $N$  гэвэл  $M = N + 1$  гэж батал.

**Бодлого1:**  $k$ -аар индукцэлье.  $k = 1$  үед илэрхий.  $k = j - 1$  үед батлагдсан гээд  $k = j$  үед баталъя.

а)  $n = 2t - 1, t \in \mathbb{N}$  байг.

$$1 + \frac{2^j - 1}{2t - 1} = \frac{2(t + 2^{j-1} - 1)}{2t} \cdot \frac{2t}{2t - 1} \\ = \left(1 + \frac{2^{j-1} - 1}{t}\right) \left(1 + \frac{1}{2t - 1}\right)$$

ба индукцэл үзэж буйгаар  $\exists m_1, \dots, m_{j-1}$ ,

$$1 + \frac{2^{j-1} - 1}{t} = \prod_{s=1}^{j-1} \left(1 + \frac{1}{m_s}\right) \text{ тул } m_j = 2t - 1 \text{ гэж авна.}$$

б)  $n = 2t, t \in \mathbb{N}$  байг.

$$1 + \frac{2^j - 1}{t} = \frac{2t + 2^j - 1}{2t + 2^j - 2} \cdot \frac{2t + 2^j - 2}{2t} \\ = \left(1 + \frac{1}{2t + 2^j - 2}\right) \left(1 + \frac{2^{j-1} - 1}{t}\right)$$

ба  $2t + 2^j - 2 > 0$  ба индукцээр

$$1 + \frac{2^{j-1} - 1}{t} = \prod_{s=1}^{j-1} \left(1 + \frac{1}{m_s}\right) \text{ байх тул } m_j = 2t + 2^j - 2$$

гэж авна.

**Бодлого2:**  $k \geq 2013$  байх жишээг харуулъя: 2013 улаан ба 2013 хөх цэгийг тойрог дээр сөөлжлүүлэн тэмдэглэж, мөн нэг хөх цэгийг хавтгайд тэмдэглэвэл тойрог 4026 цумд ху-

ваагдах ба нум бүрийн төгсгөл ялгаатай өнгөтэй. Хэрэв манай зорилго биелэгдсэн гэвэл нум бүрийг ямар нэг шулуун огтлох ёстой. Шулуун бүр тойргийн 2-оос илүүгүй цэгийг агуулах учир  $4026/2=2013$ -аас цөөнгүй шулуун татах хэрэгтэй. Иймд 2013 шулуун ашиглан зорилгодоо хүрч чадахыг батлах л үлдлээ. Адил өнгийн ямарч  $A, B$  цэгийг хоёр шулуун татах замаар бусдаас нь тусгаарлаж чадна. үүний тулд  $AB$ -ийн 2 талд түүнтэй  $\parallel$  боловч хангалттай ойр орших 2 шулууныг л авна.  $P$  нь өгсөн цэгүүдийн гүдгэр муж байг. 2 боломж байна.

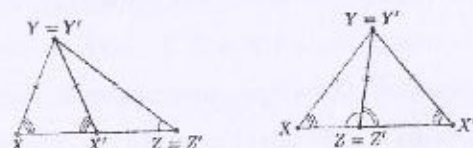
а)  $P$  нь  $A$  улаан оройтой байвал  $A$ -г бусад бүх цэгээс нь тусгаарлах шулуун татаж чадна. үлдэх 2012 улаан цэгийг 1006 хос болгож, хос бүрийг 2 шулуунаар бусад цэжгдээс нь тусгаарлаж чадна. Ийнхүү 2013 шулууныг ашиглалаа.

б)  $P$ -ийн бүх орой хөх бол  $A, B$  нь зэрэгцээ 2 орой байг. Энэ 2 цэгийг бусад бүх цэгээс нь  $AB$ -тэй  $\parallel$  шулуунуудаар тусгаарлаж чадна. Тэгвэл а)-ийн адилаар үлдэх 2012 хөх цэгийг 1006 хос болгож хос бүрийн бусад бүх цэгээс нь 2 шулуунаар тусгаарлаж чадна. Энд мөн л 2013 шулууныг ашиглалаа.

**Бодлого3:**  $ABC$  гурвалжныг багтаасан  $\Omega$  тойрог дээр орших  $A_1B_1C_1$  гурвалжныг багтаасан тойргийн төвийг  $Q$  гээ.  $Q$  нь  $A, B, C$  оройнуудын аль нэгтэй давхцдаг бол  $ABC$

тэгш өнцөгт болох нь илэрхий. Тухайлбал  $Q = B$  болог. Тэгвэл  $BC_1 = BA_1$  болох тул  $ABC$  гурвалжны хувьд  $BA = BC$  болно.

Мөн аливаа гурвалжны хувьд  $BC_1 = B_1C$  эндээс  $BB_1 =$



Зураг 1: 1-р тохиолдол      2-р тохиолдол

$BC_1 = B_1C$  ба яг үүнтэй адилаар  $BB_1 = B_1A$  болох тул  $B_1$  нь  $\Omega$  гурвалжны төв болж,  $ABC$  гурвалжны  $B$  орой тэгш өнцөг болно. Иймд  $Q \notin \{A, B, C\}$  болог. Энэ тохиолдолд юуны өмнө аливаа  $XYZ, X'Y'Z'$  гурвалжнуудын хувьд  $XY = X'Y', YZ = Y'Z'$  бол

- 1)  $XZ \neq X'Z'$  ба  $\angle YZX = \angle Y'Z'X'$  бол  $\angle ZXY + \angle Z'X'Y' = 180^\circ$
- 2)  $\angle YZX + \angle X'Z'Y' = 180^\circ$  бол  $\angle ZXY = \angle Y'X'Z'$  болохыг үзүүлье.

Аль ч тохиолдолд  $XYZ$  гурвалжныг  $Y = Y', Z = Z'$  байхаар хавтгай дээр зөөж болох ба  $YZ$  талын хувьд дээрх 2 гурвалжны аль нэгийг тэгш хэмтэй хувиргах замаар 1-р тохиолдолд  $X, X'$  цэгүүдийг  $YZ$  талын нэг талд, 2-р то-

хиолдолд  $X, X'$  цэгүүдийг  $YZ$  талын 2 өөр талд оршихоор авч чадна. Аль ч тохиолдолд өгөгдсөн өнцгийн нөхцлөөр  $X, Z, X'$  цэгүүд нэг шулуун дээр оршино. Эхний тохиолдолд  $XZ \neq X'Z'$  тул, сүүлийн тохиолдолд  $X, X'$  цэгүүд  $YZ$  талын 2 өөр талд орших тул аль ч тохиолдолд  $X \neq X'$ . Иймд  $XX'Y$  гурвалжны хувьд  $YX = YX'$  болох ба эндээс 1), 2) зүйлүүд мөрдөнө. Одоо бид шаардлагатай тохиолдолд  $ABC$  гурвалжны оройнуудыг солин нэрлэх замаар  $Q$  нь  $\Omega$  тойргийн  $C$  цэгийг агуулахгүй  $AB$  нум дээр оршиж байхаар авч чадна. Нөгөө талаас  $QA = QB = QC$  буюу  $Q$  нь  $ABC$  гурвалжныг багтаасан тойргийн төв байх боломжгүй тул  $QC \neq QB$  гэж үзэхэд явцуурахгүй. Энэ үед өмнө баталсан өгүүлдбэрийн 1-р буюу эхний зүйл  $QB_1C$  ба  $QC_1B$  гурвалжнуудын хувьд биелэх тул  $QB_1 = QC_1, B_1C = C_1B$  ба  $\angle B_1CQ = \angle C_1BQ$  үед энэ 2 өнцөг  $\Omega$  тойргийн  $QA$  хөвчийн нэг талд орших тул

$$\angle CQB_1 + \angle BQC_1 = 180^\circ \quad (1)$$

Одоо  $QC = QA$  болохыг харъя. Эсэргээс нь  $QC \neq QA$  болго. Тэгвэл  $QA_1C$  ба  $QC_1A$  гурвалжнуудын хувьд өмнөх зүйлийг давтвал

$$\angle A_1QC + \angle C_1QA = 180^\circ \text{ үүнийг (1) дээр нэмбэл}$$

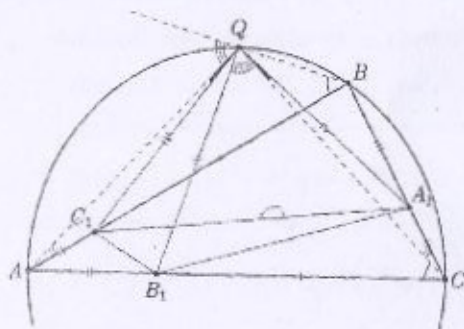
$$\angle A_1QB_1 + \angle BQA = 360^\circ \text{ болж зөрчилд хүрнэ.}$$

$\angle A_1QB_1, \angle BQA$  нь хоёулаа  $(0^\circ, 180^\circ)$  завсарт оршино. Иймд  $QC = QA$ . Эндээс  $QA_1C, QC_1A$  гурвалжнууд нь тэнцүү бо-

лэх тул

$$\angle A_1QC = \angle C_1QA. \quad (2)$$

Эцэст нь бидний өмнө баталсан өгүүлбэрийн сүүлийн буюу 2 дахь зүйлийг  $QA_1B$  ба  $QB_1A$  гурвалжнуудын хувьд хэрэглэж болно.



Зураг 2:

$QA_1 = QB_1$ ,  $A_1B = B_1A$  ба  $A, B$  цэгүүд  $\Omega$  тойргийн  $QC$  хөвчийн 2 өөр талд орших тул

$\angle A_1BQ + \angle QAB_1 = 180^\circ$  болно. Эндээс

$$\angle BQA_1 = \angle B_1QA \quad (3)$$

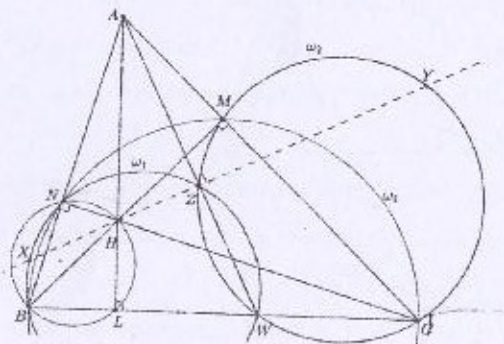
(1) ба (3) тэнцэтгэлүүдээс

$(\angle B_1QC + \angle B_1QA) + (\angle C_1QB - \angle BQA_1) = 180^\circ$  буюу  $\angle CQA + \angle A_1QC_1 = 180^\circ$ . Энд (2) тэнцэтгэлийг тооцвол  $2\angle CQA = 180^\circ$  буюу  $\angle CQA = 90^\circ$  ба  $Q$  нь  $ABC$  гурвалжныг багтаасан  $\Omega$  тойрог дээр орших тул  $ABC$  гурвалжны

$$\angle B = 90^\circ.$$

**Бодлого 4:**  $ABC$  гурвалжны  $A$  оройгоос буулгасан өндрийн суурь өнцөг,  $\omega_1$  ба  $\omega_2$  тойргуудын  $W$ -ээс ялгаатай огтлоцлын нэг цэг нь  $Z$  болог.  $X, Y, Z$  ба  $H$  цэгүүд нэг шулуун дээр оршихыг харуулъя.  $\angle BNC = \angle BMC = 90^\circ$  тул  $B, C, N$  ба  $M$  цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Энэ тойргийг  $\omega_3$  гээ.

Тэгвэл  $WZ$  нь  $\omega_1$  ба  $\omega_2$ -ийн,  $BN$  нь  $\omega_1$  ба  $\omega_3$ -ийн,  $CM$  нь  $\omega_2$



ба  $\omega_3$  тойруудын радикал тэнхлэгүүд (өсөгдсөн 2 тойргийн хувьд зэргүүд ( $d - p$  нь цэгээс тойргийн төв хүртлэх зай,  $R$ -нь  $\omega$  тойргийн радиус бол  $d^2 - R^2$  хэмжигдэхүүнийг  $P$  цэгийн  $\omega$  тойргийн хувь дахь зэрэг гэнэ) тэнцүү байх хавтгайн цэгүүдийн геометр байр) болох ба эндээс  $A = BN \cap CM$  нь дээрх 3 тойргийн радикал төв болох ба  $WZ$  нь  $A$  цэгийг дайрна.  $WX, WY$  нь бодлогын нөхцлөөр харгалзан  $\omega_1, \omega_2$  тойргийн диаметр тул  $\angle WZX = \angle WZY = 90^\circ$  буюу  $X, Y$

цэгүүд  $WZ$  шулуунд перпендикуляр  $Z$  цэгийг дайрсан шулуун дээр оршино. Нөгөө талаас  $BLHN$  дөрвөн өнцөгтийн эсрэг орших 2 өнцөг хоёулаа  $90^0$  тул уг 4 өнцөгт тойрогт багтах ба энд  $A$  цэгийн  $\omega_1$  тойргийн хувь дахь зэргийг тооцвол  $AL \cdot AN = AB \cdot AN = AW \cdot AZ$ .

$H$  цэг  $AW$  шулуун дээр оршдог бол  $H = Z$  болох нь шууд мөрдөх ба эсрэг тохиолдолд  $\frac{AZ}{AH} = \frac{AL}{AW}$  гэдгээс  $AHZ, AWL$  гурвалжнууд төстэй. Эндээс  $\angle HZA = \angle WLA = 90^0$  буюу  $H$  цэг мөн  $XYZ$  шулуун дээр оршино.

**Бодлогоо:** (1)-д  $x = 1, y = a$  гэвэл  $f(1) \geq 1$ .  $n$ -ээр индукцлэн (2)-оос

$$\forall x \in \mathbb{Q}_{>0} \text{ ба } \forall n \in \mathbb{N}, f(nx) \geq nf(x) \quad (3)$$

эндээс

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \geq nf(1) \geq n \quad (4)$$

(1)-ээс  $f(m/n)f(n) \geq f(m)$ , эндээс  $\forall q \in \mathbb{Q}_{>0}, f(q) > 0$ . (2)-оос  $f$  эрс өсөх нь гарна. Иймд

$$(4)\text{-өөс } \forall x \geq 1, f(x) \geq f([x]) \geq [x] > x - 1$$

(1)-ээс индукцээр  $f(x)^n \geq f(x^n)$  гэж гарах тул

$$f(x)^n \geq f(x^n) > x^n - 1 \Rightarrow$$

$$f(x) \geq \sqrt[n]{x^n - 1} > 1, \forall x > 1, n \in \mathbb{N}. \text{ Эндээс}$$

$$\forall x > 1, f(x) \geq x \quad (5)$$

болно:  $x > y > 1$  бол

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1}) > n(x - y) \text{ буюу}$$

$n$  их үед  $x^n - 1 > y^n$ .

Эндээс  $f(x) > y$ . (6)

Хэрэв  $x > f(x) > 1$  бол (6)-д  $y = f(x)$  гэж авахад  $f(x) > f(x)$  зөрчил гарна. Иймд (5) батлагдав. (1) ба (5)-аас  $a^n = f(a)^n \geq f(a^n) \geq a^n$  буюу  $f(a^n) = a^n$ .  $x > 1$  бол  $a^n - x > 1$  байх  $n \in \mathbb{N}$ -г авъя. (2) ба (5)-аас

$a^n = f(a^n) \geq f(x) + f(a^n - x) \geq x + (a^n - x) = a^n$  болох тул  $\forall x > 1$  бол  $f(x) = x$  (7)

боллоо.  $\forall x \in \mathbb{Q}^+$  ба  $\forall n \in \mathbb{N}$ , (1) ба (3)-аас

$nf(x) = f(n)f(x) \geq f(nx) \geq nf(x)$  буюу  $f(nx) = nf(x)$ .

$$\forall x \in \mathbb{Q}^+, \forall n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x) \quad (8)$$

$\mathbb{Q}^+ \ni x \leq 1$  бол  $\exists n, nx > 1$ . Иймд (7) ба (8)-аар

$nx = f(nx) = nf(x)$ ,  $x = f(x)$  болох ба үүгээр

$\forall x \in \mathbb{Q}^+, f(x) = x$  боллоо.

**Бодлого6:** (А.С.Головонов, М.А.Иванов нарын дэвшүүлсэн энэ бодлого 2013 оны Олон Улсын Математикийн хамгийн гоё, хамгийн хүнд бодлого нь болсон). Цагийн зүүний дагуу  $O$ -ийн хөрш  $m$  тоо байх тэмдэглэгээг  $m$ -тэмдэглэгээ гэж нэрлээд аливаа  $m \in [1, n]$  тооны хувьд яг  $\varphi(m)$  ( $m$ -тэй харилцан анхны, түүнээс хэтэрдэггүй эерэг бүхэл тоонуудын тоо) гоё тэмдэглэгээ оршин байхыг харуулбал билний бодох бодлого  $M = \sum_{m=1}^n \varphi(m)$  болохыг батлах болно. Үүнийг батлахын тулд арифметик гэж нэрлэх нэгэн тэмдэглэгээний аргыг зааж өгөн түүнийгээ гоё тэмдэглэгээ бо-

лохыг мөн гэдрэгээ гоё тэмдэглэгээ бүр арифметик тэмдэглэгээ болохыг харахад хангалттай. Аливаа  $m \in \{1, 2, \dots, n\}$  тооны хувьд яг  $\varphi(m)$  ширхэг доорх аргаар байгуулагдах тэмдэглэгээг арифметик тэмдэглэгээ гэж нэрлэе. Бүлэг бүр дэх тоо нь өсөх эрэмбээр байрлахаар  $\{1, 2, \dots, n\}$  тоонуудыг  $c_i$  бүлэг бүр  $m$  модулиарх  $i$  тоонуудыг агуулж байхаар  $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$  гэсэн  $m$  бүлэгт хуваая. Дараа нь  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  аддитив цикл бүлгийн  $\varphi(m)$  ширхэг үүсгэгчдийн аль нэг, тухайлбал  $r$ -ийн хувьд  $c_0, c_r, \dots, c_{(m-1)r}$  бүлгүүдийг залган хэлхэх замаар  $S_{m,r}$  тэмдэглэгээг байгуулъя. Энэ тэмдэглэгээг арифметик тэмдэглэгээ гэнэ. Тухайлбал  $n = 12, m = 4$  тохиолдолд  $c_0 = \{0, 4, 8, 12\}, c_1 = \{1, 5, 9\}, c_2 = \{2, 6, 10\}, c_3 = \{3, 7, 11\}$  болох ба  $S_{4,1} = \{0, 4, 8, 12, 1, 5, 9, 2, 6, 10, 3, 7, 11\}, S_{4,3} = \{0, 4, 8, 12, 3, 7, 11, 2, 6, 10, 1, 5, 9\}$  гэсэн яг  $\varphi(4) = 2$  ширхэг арифметик 4-тэмдэглэгээ оршин байх жишээтэй. Одоо арифметик тэмдэглэгээ бүр гоё тэмдэглэгээ болохыг харъя.  $\text{ХИЕХ}(m, r) = 1$  ба  $1 \leq r \leq m \leq n$  байх  $m, r$  тоонуудын хувьд  $S_{m,r}$  арифметик тэмдэглэгээ бүр гоё тэмдэглэгээ болно. Гоё биш гэвэл  $a + c = b + d$  байх ялгаатай  $a, b, c, d \in [0, n]$  тоонуудыг  $S_{m,r}$  тэмдэглэгээ цагийн зүүний дагуу агуулах ба энэ тохиолдолд  $c_{ri}, c_{rj}, c_{rk}, c_{r\ell}$  бүлгүүдэд харгалзан харьяалагдах  $0 \leq i \leq j \leq k \leq \ell < m$  индексүүд олноо.  $a + c = b + d$  тэнцэтгэлийг  $m$  модульд хөрвүүлбэл  $\text{ХИЕХ}(m, r) = 1$  гэдгээс  $ri + rk = rj + r\ell$  буюу

$i + k = j + \ell$  болж  $i = j, k = \ell$  болохоос өөрцгүй, өөрөөр хэлбэл  $a < b, c < d$  болж,  $a + \ell = b + d$  гэдэгт харшилна. Гэдрэгээ аливаа гоё тэмдэглэгээ бүр арифметик тэмдэглэгээ болохыг харах нэлээд ярвигтай ба тэр нь  $O$ -ийн цагийн зүүний дагуух болон эсрэг хөршүүд нь харгалзан  $m$  ба  $x$  байх гоё тэмдэглэгээний хувьд  $\text{ХИЕХ}(m, x) = 1$  болохыг харахад тулгуурлана.

## "Төгс Тоо" төвийн тухай

ММОХорооны дэргэд математикийн багш нарын мэргэжил дээшлүүлэх  $T^3$  байгуулагдаж 12 жил үйл ажилгаагаа явууллаа. Математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангид хичээл заах болон олимпиадад бэлтгэдэг багш нарыг бэлтгэх тус төвд тус бүр 90 цагийн I ба II шатны дамжаагаар Математикийн мэргэжлийн курс-1, 2 номыг судалж эзэмших юм. Нэг удаад 1 шатны дамжаанд 1 сурна. Дунд ангийн багш нарын нэг дамжааны сургалтын төлбөр 150.000 төг.

Хичээл заах багш нар: Ц.Данцдорж, Санчир, Ганзориг, Гантөмөр, Ганбилэг, Еркехулан, Пүрэвсүрэн, Итгэл...

Мөн тус төвд бага ангийн багш нар 60 цагийн дамжаагаар дээрх чиглэлээр мэргэжил дээшлүүлж болно, төлбөр 120.000 төг.

Төлбөрийг тухайн аймаг, хотын Боловсролын төв, сургуулиудын дэмжлэгтэйгээр өөрсдөө хөөцөлдөж олно.

Голомт 1102101388, "Төгс тоо" төвийн дансаар мөнгөө хийж болно. Регистрийн дугаар нь 1014366. Хичээл нь 2014.06.20-07.04-нд хичээллэнэ (бага, дундын багш нар зэрэг хичээллэнэ. Бүртгэл 06.19-нд МУИС, III байр, 306 тоотод явагдана). Төгсөгчдөд сертификат олгоно.