

Агуулга

1	Монголын Математикийн 50-р Олимпиадын дүнгийн тайлан	2
2	ММО-50-ын III даваа	7
2.1	ММО-50, VII анги	7
2.2	ММО-50, VIII анги	12
2.3	ММО-50, IX анги	16
2.4	ММО-50, X анги	20
2.5	ММО-50, Шилжилтийн XI анги	24
2.6	ММО-50, XI анги	30
2.7	ММО-50, Бага ангийн багш	34
2.8	ММО-50, Дунд ангийн багш	37
3	ММО-50, IV даваа	42
3.1	ММО-50, VIII анги	42
3.2	ММО-50, IX анги	46
3.3	ММО-50, X анги	51
3.4	ММО-50, XI(12) анги	56
3.5	ММО-50, XI анги	61
3.6	ММО-50, Багын багш	67
3.7	ММО-50, Дундын багш	72
4	ОУ-ын математикийн 55-р олимпиад	82
4.1	ОУМО - 55, Сорил 1	82
4.2	ОУМО - 55 Сорил 2	84
4.3	ОУМО - 55 Сорил 3	86
4.4	ОУМО - 55 Сорил 4	89
5	ОУМО-55	91
6	"Төгс тоо" төвийн тухай	100

1 Монголын Математикийн 50-р Олимпиадын дүнгийн тайлан

Ц.Дандорж

- Эрхэм хүндэт математикч багш, сурагчид аа!
- ММО Хорооны гишүүдээ!
- Нэрт математикч Ц.Болдсүхийн нэрэмжит Монголын математикийн 50-р олимпиадыг зохион байгуулах хорооны дарга, УИХ-ын Тамгын Газрын зөвлөх Р.Хатанбаатар аа!
- МУГВ С.Цагааны нэрэмжит сангийн ерөнхийлөгч Ц.Болд оо!
- Нэрт математикч Ц.Болдсүх агсаны төрөл төрөгсөд, анд нөхөд өө!
- Нийслэлийн I сургуулийн захирал Б.Төгсжаргал аа!
- ММО 50-г ивээн тэтгэгч, эрхэм нөхөд өө!

Монголын Математикийн 50-р Олимпиад 2014 оны 5-р сарын 01-06-ны өдрүүдэд нийслэлийн 1-р сургууль дээр амжилттай явагдаж дүнгээ гаргаж байна. Энэ удаагийн олимпиадад 21 аймаг, нийслэл Улаанбаатар хотын нийт 22 багийн бага ангийн 37, дунд ангийн 49-н багш, 8-11-р ангийн 312 сурагчид оролцож нийт 398 хүн оюун ухаан авъяас чадвараа сорин уралдлаа.

Энэ удаагийн олимпиадыг зохион байгуулах, бэлтгэл ажлыг хангахад БШУЯ, нийслэл, Сүхбаатар дүүргийн боловсролын газар, 1-р сургуулийн захиргаа, тус сургуулийн багш сурган хүмүүжүүлэгчид ажилсаг бүтээлч хамт олон болон тус сургуулийн Математикийн ангийн үе үеийн төгсөгчид идэвхи санаачлага гарган ажилласанд баярлаж байгаагаа хэлэхэд таатай байна.

Математикч Ц.Болдсүхийн нэрэмжит Монголын Математикийн 50-р олимпиадын ивээн тэтгэж хүүхэд залуучуудын математик сэтгэлтээг хөгжүүлэхэд хувь нэмэрээ оруулж буй Нийслэлийн 1-р дунд сургууль, Петровис ХХК, Скайтел групп, G mobile ХХК, 1-р сургуулийн 1972 оны тооны 10 "а" ангийнхан, БНАГУ-д хамт сурч байсан оюутан, аспирантууд, З.Болд, Д.Борчулуун, Ц.Сарантуяа, (DAAD Club) Тоника ХХК, Медклиин ХХК, Ц.Болдсүхийн гэр бүл, хамаатнууд, Логарифм сургууль болон Проф. Г.Хүрлээ, Проф. Ц.Ганбат, Ж.Энхтөр, Г.Батдолгор, Н.Мандаа, Энержи Интернешл захирал Б.Мөнхөө, Батмэнд ХХК захирал Г.Оюун, Хас Секьюрити ХХК зэрэг хамт олон, хувь хүмүүст гүн талархалаа илэрхийлье !

Олимпиадад 8-р ангийн 91 сурагч оролцсоноос Нийслэлийн 1 сургуулийн сурагч Б.Төрбат 33 оноогоор 1-р байр эзэлж 8-р ангийн улсын аврага боллоо.

УБ хотын 11-р сургуулийн сурагч Н.Түвшинбилэг 26 оноогоор, Сант сургуулийн сурагч Х.Гүнболд 22,5 оноогоор 2-р байр, УБ хотын Олонлог сургуулийн сурагч Б.Долгормаа 21,5 оноо, УБ хотын Сант сургуулийн сурагч Ц.Ганхөлөг 21 оноо, Улаанбаатар хотын Сант сургуулийн сурагч Ц.Оргил 20 оноогоор 3-р байр эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоосноос гадна УБ хотын Сант сургуулийн сурагч У.Тэлмүүн, Олонлог сургуулийн сурагч М.Лханаажав нар шагналт 4-р байранд палгараад байна. Дээрх сурагчиддаа байр хүргэе.

Энэ удаагийн олимпиадын 9-р ангийн төрөлд Нийслэлийн 1-р сургуулийн сурагч Б.Төрхүү 31 оноогоор тэргүүн байр эзэлж 9-р ангийн улсын аварга боллоо.

УБ хотын 11-р сургуулийн сурагч Г.Амарсанаа 28,5 оноогоор, УБ хотын 11-р сургуулийн сурагч А.Оюун-Эрдэнэ 24 оноогоор 2-р байр, УБ хотын Сант сургуулийн сурагч Л.Оюунтөгс 23 оноогоор, УБ хотын Сант сургуулийн сурагч Б.Золбаяр 23 оноогоор, УБ хотын 11-р сургуулийн сурагч Г.Оргил 21 оноогоор 3-р байр эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоосноос гадна УБ хотын 1-р сургуулийн сурагч Б.Байрбат 20 оноогоор, УБ хотын 11-р сургуулийн О.Вулгантамир 19 оноогоор 4-р байр эзлэн тусгай шагналаар

шагнагдахаар боллоо. Дээрх сурагчиддаа халуун баяр хүргье!

10-р ангийн төрөлд 60 сурагч оролцсоноос Нийслэлийн 1-р сургуулийн сурагч С.Цэнд-Аюуш 35,5 оноогоор тэргүүн байр эзлэн 10-р ангийн улсын аварга боллоо.

УБ хотын Сант сургуулийн сурагч Б.Пүрэв 31 оноогоор, УБ хотын 1-р сургуулийн сурагч Б.Алтангэрэл 29 оноогоор 2-р байр, УБ хотын Сант Х:Цэрэнчимэг 24 оноогоор, Хөвсгөл аймгийн сургуулийн сурагч Ц.Энхбаатар 20 оноогоор, УБ хотын 11-р сургуулийн сурагч Г.Ананд 16 оноогоор 3-р байр эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоосноос гадна Нийслэлийн ШУТАС сургуулийн сурагч Н.Дэлгэрсүрэн 15 оноогоор, УБ хотын 11-р сургуулийн Э.Гантөгс 15 оноогоор шагналт 4-р байранд шалгарлаа. Амжилт гаргасан дээрх сурагчиддаа халуун баяр хүргье!

Улсын математикийн 50-р олимпиадын 12 жилийн сургалттай 11-р ангийн төрөлд 48 хүүхэд өрсөлдсөнөөс УБ хотын Орчлон сургуулийн сурагч О.Бодрол 35 оноогоор тэргүүн байр эзэлж энэ олимпиадын 12 жилийн сургалттай 11-р ангийн улсын аварга боллоо.

УБ хотын Олонлог сургуулийн сурагч Г.Баяржавхлан 29 оноогоор, 11-р сургуулийн сурагч Б.Эрдэнэбаяр 23,5 оноогоор 2-р байр, УБ хотын 11-р сургуулийн сурагч Б.Аминаа 19 оноо, Увс аймгийн сурагч Я.Баярцогт 15 оноогоор, Нийслэлийн 1-р сургуулийн сурагч Б.Эрдэнэ 11 оноогоор 3-р байр эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоосноос гадна УБ хотын 11-р сургуулийн сурагч Б.Билгүүн 9,5 оноогоор, Нийслэлийн 1-р сургуулийн А.Ананд 9 оноогоор, Хөвсгөл аймгийн сурагч Д.Оюунтөгс 9 оноогоор, Нийслэлийн 1-р сургуулийн сурагч Э.Бат-Эрдэнэ 9 оноогоор шагналт 4-р байранд шалгарлаа. Амжилт бүтээл арвин сурагчиддаа баяр хүргье!

Математикийн 50-р олимпиадын 11-р ангийн төрөлд 46 сурагч авьяас чадвараа сорьсноос УБ хотын Мон-Турк сургуулийн сурагч Ч.Золбоо 37,5 оноогоор 1-р байр эзэлж улсын математикийн 50-р олимпиадын 11-р ангийн аварга сурагч боллоо.

Улаанбаатар хотын 11-р сургуулийн сурагч Б.Батзориг 27,5 оноогоор, УБ хотын Орчлон сургуулийн сурагч Ш.Золбаяр 27,5

оноогоор 2-р байр УБ хотын Олонлог сургуулийн сурагч А.Сүхбат 23,5 оноогоор, УБ хотын Олонлог сургуулийн А.Сүмъяабат 22,5 оноогоор, УБ хотын Олонлог сургуулийн Б.Мөнх-Эрдэнэ 22,5 оноогоор 3-р байр эзэлж мөнгө, хүрэл хүртлээ. Мөн УБ хотын Орчлон сургуулийн сурагч М.Ананд 21 оноогоор, Монгол Туркын хамтарсан сургуулийн сурагч Д.Мөнх-Оргил 18 оноогоор, Хөвсгөл аймгийн Ч.Баянбат 14,5 оноогоор, Хөвсгөл аймгийн Л.Лхагважаргал 8,5 оноогоор шагналт 4-р байранд шалтараад байна. Амжилт гаргасан анхны сурагчиддаа баяр хүргье!

Улсын математикийн 50-р олимпиадад амжилттай оролцсон дээрх нэр бүхий сурагчид, олимпиадад сурагчиддаа амжилттай бэлтгэн оролцуулсан багш нарт Монголын нийт математикчдын нэрийн өмнөөс болон хувиасаа чин сэтгэлийн талархал илэрхийлье. Багш нарын математикийн олимпиадыг бага, дунд ангийн багш нар гэсэн 2 төрлөөр явууллаа.

Бага ангийн багш нарын олимпиадад 37-н багш оролцсоноос УБ хотын Орчлон сургуулийн бага ангийн багш О.Наранчимэг 21 оноогоор 1-р байр, Өмнөговь аймгийн Б.Энх-Амгалан 20,5 оноогоор 2-р байр, УБ хотын Орчлон сургуулийн бага ангийн багш Б.Жаргалсүрэн 20 оноогоор 3-р байр эзэлсэнээс гадна Хөвсгөл аймгийн Б.Гантулга 19,5 оноогоор, Говьсүмбэр аймгийн Ц.Нарангэрэ 19 оноогоор шагналт байранд шалгарлаа.

Дунд ангийн математикийн багш нарын ангилалд 49 багш оролцож УБ хотын Олонлог сургуулийн математикийн багш Б.Ганбилэг 28,5 оноогоор 1-р байр, УБ хотын 11-р сургуулийн математикийн багш Л.Буянтогтох 26 оноогоор 2-р байр, УБ хотын Олонлог сургуулийн математикийн багш Б.Ганбат 20 оноогоор 3-р байр эзэлж алт, мөнгө, хүрэл медалийн эзэд болцгоов. Мөн УБ хотын Эхлэл сургуулийн математикийн багш Ш.Доржсэмбэ 16 оноогоор шагналт 4-р байранд шалгарсан байна.

Багийн дүнгээр аймаг хотыг байр эзлүүлэхэд Н.Гэндэнсүрэн ахлагчтай Улаанбаатар баг дундаж оноо 18,03-аар 1-р байр, М.Ганболд ахлагчтай Хөвсгөл аймгийн баг 9,5 оноогоор II-р байр, Р.Одгэрэл ахлагчтай Увс аймгийн баг 7,2 дундаж оноогоор III байранд шалгарлаа.

2014 оны 07 сарын 03 наас 13 ны өдрүүдэд ӨАБНУ-д болох Олон улсын математикийн 55-р олимпиадын бэлтгэлд XI анги сурагч Ч.Золбоо, Д.Батдэлгэр, Ш.Золбаяр, А.Сүхбат, А.Сумъяабат, В.Мөнх-Эрдэнэ, О.Бодрол, Г. Баяржавхлац, В.Эрдэнэбаяр нарыг үүдэхээр ММОХороо шийдвэрлэлээ.

ОУМО-ын бэлтгэлд шалгаран үлдсэн та бүхэндээ амжит хүсч Монгол улсынхаа нэрийг дэлхийн тавцанд дуурсгах хүндтэй бөгөөд хариуцлагатай үйл хэргийн төлөө идэвхи чармайлт гарган сийн бэлтгэж амжилттай оролцохыг Монголын нийт ард түмэн, математикчдынхаа нэрийн өмнөөс даалгаж байна.

Дундын багш нарын 6-р бодлогыг онц гарамгай брдож өвгөн математикч багшийнхаа магнайг тэнийлгэсэн дархан аварга математикч "Олонлог"сургуулийн багш Бямбаагийн Баяржаргал таны математикийн авъяасыг үнэлэн хүндэлж байгаагийнхаа илэрхийлэл болгож ташыг 2015,2016,2017 оны Тайланд, Гонконг, Бразилийн ОУМО-уудаас дуртайгаа сонгож Монголын багийн орлогч удирдагчаар явах эрхээр шагнаж байгаагаа сонсгоход таатай байна.

Эрдэм оюун дэлгэрч Монголын математикчдын оюун ухаан улам хөгжин дэлгэрэх болтугай.

Алхаарал тавьсан та бүхэндээ баярлалаа.

2 ММО-50-ын III даваа

2.1 ММО-50, VII анги

Н.Аргилсан (МУВИС)

I өдрийн бодлого

A1.(Н.Аргилсан) $m \times n$ хэмжээст тэгш өнцөгт хүснэгт өгөгдөв. Хоёр тоглогч ээлжлэн хүснэгтийн нүдийг будах ба өөрийн ээлжин дээрээ 1 эсвэл хөрш 2 нүдийг будна /ерөнхий талтай 2 нүдийг хөрш гэнэ/. Ээлжиндээ будах нүдгүй болсон тоглогч хожигдох бол зөв тогловол аль тоглогч хожих вэ?

A2.(Н.Аргилсан) Ирмэгүүд нь бүхэл тоон урттай 3 куб өгөгдөв. Эдгээр кубуудийн бүтэн гадаргуун талбаруудын нийлбэр 564с бол тэдгээр кубуудийн эзэлхүүнүүдийн нийлбэрийн авч болох бүх утгуудыг ол.

A3.(Н.Дайвий-Од) Арван торхонд тус бүр 1л, 2л, 3л, 4л, 5л, 7л, 8л, 9л, 10л ус байв. Аливаа А торхноос В торхонд ус юүлэхдээ В торхонд хэдэн литр ус байна, түүнтэй тэнцүү усыг л хийхийг зөвшөөрдөг байв. Энэ үйлдлийг хийсээр сав тус бүрд 3л, 3л, 3л, 3л, 3л, 6л, 8л, 9л, 10л устай болгож чадах уу?

II өдрийн бодлого

B1.(Н.Дайвий-Од) Квадратыг хоёр ширхэг тэнцүү а) 2013-өнцөгтөд, б) 2014-өнцөгтөд хувааж болох уу?

B2.(Н.Аргилсан) N тооны дараалсан 2 цифрээс үүсэх 2 оронтой тоонууд бүгд ялгаатай анхны тоонууд байх хамгийн их N тоог ол. /Тухайлбал 23173 тооны дараалсан 2 цифрээс нь тогтох 23, 31, 17, 73 гэсэн тоонууд бүгд анхны тоонууд бөгөөд хоорондоо ялгаатай байна./

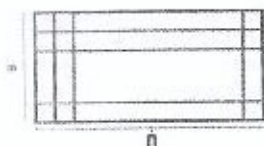
B3.(Т.Гансүх) Муур 4 хөл тус бүрдээ нэг нэг оймс, нэг гуталтай /бүгд ялгаатай/. Хөл бүрийнхээ оймсыг гутлынхаа өмнө өмссөн байхаар бүх хөлийнхөө оймс гутлыг хичсэн ялгаатай дарааллаар өмсөж болох вэ?

Бодолт:

A1. Тоглолтонд төвийн тэгш хэмийн хувиргалтыг ашиглана.

$m \times n$ тэгш өнцөгтийн төв нь  зангилааны цэг дээр, эсвэл  - нүд, эсвэл  хөрш нүдний төв гэсэн 3-н боломжит байрлалтай.

а) Хэрэв тэгш хэмийн төв нь



 байдаг бол I тоглогч яаж ч будсан II нь түүнтэй тэгш хэмтэй нүдийг будах замаар тоглоход II тоглогч үргэлж хожно.

б) Хэрэв тэгш хэмийн төв нь  бол I нь энэ нүдийг будах ба II -ын будсан нүдтэй тэгш хэмтэй нүдийг будах замаар I тоглогч үргэлж хожно.

в) Хэрэв тэгш хэмийн төв нь  байдаг бол I тоглогч энэ 2 нүдийг будаад (б) тохиолдолд адилаар тоглоход хожно.

A2. 3-н кубын ирмэгүүдийг a, b, c урттай гэе ($a, b, c \in \mathbb{N}$). Куб нь 6 талтай учир бүтэн гадаргуун талбай нь $6a^2$ байна. Үүнтэй адил нөгөө кубуудын хувьд $6b^2, 6c^2$ болно. Бодлогын нөхцлөөс $6(a^2 + b^2 + c^2) = 564$ буюу $a^2 + b^2 + c^2 = 94$ болно. Эндээс $1 \leq a \leq b \leq c < 10$ гэж эрэмбэлье. $a^2 \leq c^2, b^2 \leq c^2$ тул $3c^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 = 94 \Rightarrow c^2 \geq 31 \Rightarrow 6 \leq c < 10$ байна $\Rightarrow c = 6, 7, 8, 9$ утгуудын нэгийг авна.

I. $c = 9$ бол $a^2 + b^2 = 94 - 81 = 13 \Rightarrow a = 2, b = 3$ буюу $(a, b, c) = (2, 3, 9)$

II. $c = 8$ бол $a^2 + b^2 = 30 \Rightarrow \emptyset$

III. $c = 7$ бол $a^2 + b^2 = 94 - 49 = 45 \Rightarrow a = 3, b = 6$ буюу $(a, b, c) = (3, 6, 7)$

IV. $c = 6$ бол $a^2 + b^2 = 94 - 36 = 58$ ба $a^2 \leq b^2$ учир $2b^2 \geq a^2 + b^2 = 58$

$b^2 \geq 29$ буюу $b \geq 6$ болно. $b = c = 6$ үед $\emptyset$

Иймд $(a, b, c) = (2, 3, 9)(3, 6, 7)$ гэсэн 2 боломжтой. Эдгээр шийдүүдэд харгалзах эзлэхүүнүүдийн нийлбэрийн авч болох утгууд нь

$V_1 = a^3 + b^3 + c^3 = 2^3 + 3^3 + 9^3 = 8 + 27 + 729 = 35 + 729 = 764$

$V_2 = 3^3 + 6^3 + 7^3 = 27 + 216 + 343 = 243 + 343 = 586$ байна.

A3. Саван дахь усны тэгш сондгойг тооцвол дараах дөрвөн тохиолдолд хуваагдана.

Юүлэгдэж буй сав	Юүлж буй сав	Юүлэгдсэн сав	Юүлсэн сав
Тэгш	Тэгш	Тэгш	Тэгш
Тэгш	Сондгой	Сондгой	Тэгш
Сондгой	Тэгш	Сондгой	Тэгш
Сондгой	Сондгой	Тэгш	Тэгш

Эндээс харвал нийтдээ тэгш литр устай савны тоо дөөрөхгүй гэдэг нь батлагдаж байна. Гэтэл үйлдэл эхлэхэд 5 тэгш, 5 сондгой литр ус байсан бол төгсөхөд 3 тэгш, 7 сондгой литр ус байх хэрэгтэй болж байгаа нь ийм хувилбар үүсгэж болохгүйг харуулж байна.

B1. а) Болно. Квадратын аль нэг диагоналыг татаад түүнийгээ төвийн тэгш хэмтэй 2012 оройтой тахир шугамаар солино. Төвийн тэгш хэмтэй тахир шугамын талын тоо сондгой байх тул ийм тахир шугам зурах боломжтой. Ингэснээр квадрат тус бүртээ 2013 оройтой тэнцүү хоёр олон өнцөгтөд хуваагдаж байгаа юм.

б) Болно. Квадратын аль нэг дундаж шугамыг татаад түүнийгээ төвийн тэгш хэмтэй 2012 оройтой тахир шугамаар солино. Төвийн тэгш хэмтэй тахир шугамын талын тоо сондгой байх тул ийм тахир зурах боломжтой. Ингэснээр квадрат тус бүртээ 2014 оройтой тэнцүү хоёр олон өнцөгтөд хуваагдаж байгаа юм.

B2. 100-с бага 2 оронтой анхны тоонууд нь 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 73, 83, 89, 97 гэсэн тоонууд байна. 2 оронтой тоонууд нь 0, 2, 4, 5, 6, 8 -аар төгсөж болохгүй. Энэ тохиолдолд зохиомол тоонууд гарна. Иймд 2 дахь орон нь 0, 2, 4, 5, 6, 8 байж болохгүй. Иймд эдгээр цифрүүдээр эхэлсэн анхны тоонуудыг хасвал 11, 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79, 97 гэсэн тоонууд үлдэнэ. Иймд 2, 4, 6, 8 цифрүүдээр эхэлвэл олон оронтой байна. Дээрх тоонуудыг аль болох бүгдийг хамруулсан байдлаар олон оронтой тоог байгуулъя.

1-ээр эхэлсэн 4 тоо, 1-ээр төгссөн 3 тоо байна.

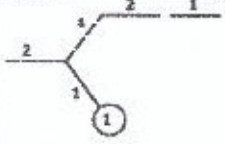
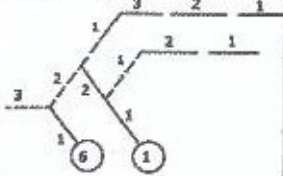
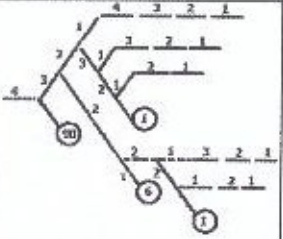
3-аар эхэлсэн 2 тоо, 3-аар төгссөн 2 тоо байна.

7-оор эхэлсэн 2 тоо, 7-оор төгссөн 3 тоо байна.

9-оор эхэлсэн 1 тоо, 9-оор төгссөн 1 тоо байна.

Эдгээрийг харгалзан үзэж нийлүүлбэл 61, 19, 97, 73, 37, 71, 13, 31, 11, 17, 79 буюу хамгийн их тоо нь $N = 619737131179$ гэсэн тоо байна.

В3. Бодолт 1. Мод зурах аргаар бодвол дараах зураглал гарна. Эхлээд 1,2,3 хөлний хувьд бодоод өмнөх бодсоноо дараагийн модондоо ашиглаж болно. (Оймсыг тасархай зураасаар, гутлыг кэрчимээр илэрхийлсэн болно.)

$n = 1$ үед		болох буюу $\sum = 1$
$n = 2$ үед		болох буюу $\sum = 6$
$n = 3$ үед		болох буюу $\sum = (3!)^2 + 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 1 + 3 \cdot 6 = 36 + 24 + 12 + 18 = 90$
$n = 4$ үед		болох буюу $\sum = (4!)^2 + 4! \cdot 3 \cdot 3! + 4! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 + 4! \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 3 \cdot 2^3 + 4! \cdot 6 + 4 \cdot 90 = 576 + 24(18 + 12 + 6 + 12 + 8 + 4 + 6) + 360 = 24 \cdot 66 + 936 = 1584 + 936 = 2520$

Бодолт 2. 4 оймс, 4 гутал нийт 8 зүйлийг $8!$ янзаар сэлгэж болно. Гутал өмсөхийн өмнө оймсоо өмссөн байх ёстой гэсэн учир гутал нь өмнө орсон сэлгэмэлүүд тоологдох ёсгүй гэсэн үг. a_i -гү-

тал, b_i -оймс гэвэл $,,,a_i,,,b_i,,,$ гэсэн сэлгэмэл $,,,b_i,,,a_i,,,$ сэлгэмэлтэй адил тоотой учир нэг хөлший оймс гутал бүрийн хувь нийт сэлгэмэлийг 2-д хуваах ёстой. Иймд бодлогын хариу нь $\frac{8!}{2^4} = 2520$

2.2 ММО-50, VIII анги

Н.Аргилсан (МУВИС)

I өдрийн бодлого

A1.(Т.Гансүх) 9×9 хүснэгтийн нүд бүрд 1-ээс 9 хүртэлх тоонуудыг байрлуулжээ. Багана бүрд тоо тус бүр нэг, нэг удаа бичигдсэн байсан ба хүснэгтийн аль нэг диагоналийн хувьд тоонууд өгш хэмтэй байрласан байв. Тэгвэл уг диагоналийн нүднүүдэд 1-ээс 9 хүртэлх бүх тоонууд бичигдсэн байна гэдгийг батал.

A2.(Н.Аргилсан) Нэгж радиустай тойргийн дотор болон тойрог дээр 180 цэг өгөгдөв. Тэгвэл хоорондын зай нь 1-ээс хэтрэхгүй байх ялгаатай хос цэгүүдийн тоо 2014-өөс их гэж батал.

A3.(Н.Аргилсан) $\frac{x^{200} - 1}{x - 1} = y^2$ тэгшитгэлийн бүх натурал тоон шийдийг ол.

II өдрийн бодлого

B1.(Ч.Гантөмөр) ABC адил хажуут гурвалжны $\angle B = 80^\circ$ болно. ABC гурвалжны дотор талд $\angle MAC = 30^\circ$ ба $\angle MCA = 10^\circ$ байхаар M цэг тэмдэглэв. Тэгвэл $\angle AMB$ өнцгийг ол.

B2.(Т.Гансүх) a, b, c тоонууд нь ялгаатай бодит тоонууд /сөрөг байж болно/ бол

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2 \geq 2$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

B3.(Ч.Гантөмөр) "00", "01", "10", "11" гэсэн хосуудыг 2-тын блок гэж нэрлэе. 1110101110000 ба 1000110011110 гэсэн 13 ширхэг 0 ба 1 -ээс тогтох дарааллуудын хувьд "00" блок 3 ширхэг, "01" блок 2 ширхэг, "10" блок 3 ширхэг, "11" блок 4 ширхэг байгааг харж болно. Тэгвэл "00" блок 3 ширхэг, "01" блок 2 ширхэг, "10" блок 3 ширхэг, "11" блок 4 ширхэг байх 13 ширхэг 0 ба 1-ээс тогтох ялгаатай дарааллуудын тоог ол.

Бодолт:

А1. Өгсөн нөхцөлөөс тоо бүр 9 удаа бичигдсэн гэдэг нь илэрхий. Мөн 1 диагоналийнхаа хувьд тэгш хэмтэй гэсэн тул диагональ дээр сондгой ширхэг л бичигдэх ёстой. 9 тоо бүр сондгой ширхэг байх ганц л боломжтой байна. Энэ нь тоо тус бүр яг нэг удаа бичигдсэн байх юм. Үүгээр батлагдав.

А2. Тойргийг 6 тэнцүү секторт хувааж, секторуудыг 1-6 хүртэл дугаарлая. i -р секторт n_i ширхэг цэг байдаг гэе. Тэгвэл $\sum n_i = 180$ болно. i -р секторт байгаа n_i цэгүүдийн аль ч 2 цэгийн хоорондох зай нь 1-ээс ихгүй. Зөвхөн сектор бүр дэх хосын тоог гаргая. i -р секторт n_i ширхэг цэг байгаа бөгөөд аль ч 2 цэгийн хувьд бодлогын нөхцлийг хангах учир хосын тоо $\frac{1}{2}n_i(n_i - 1)$ байна. Сектор бүрд байгаа эдгээр тоонуудын пийлбэрийг авч үзье. Нийт хосын тоог N гэвэл $N \geq \sum_{i=1}^6 \frac{1}{2}n_i(n_i - 1) = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^6 n_i^2 - \sum_{i=1}^6 n_i) = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^6 n_i^2 - 180)$ Кошийн тэнцэтгэл бишээр

$$\sum_{i=1}^6 n_i^2 \geq \frac{1}{6}(\sum n_i)^2 \text{ буюу}$$

$$N \geq \frac{1}{2}(\frac{1}{6}(\sum n_i)^2 - 180) = \frac{1}{2}(\frac{1}{6} \times 180^2 - 180) = 2610 > 2014.$$

А3. $x^{200} - 1 = (x^{100} - 1)(x^{100} + 1) = (x^{100} + 1)(x^{50} + 1)(x^{50} - 1)$ задарна.

$$(x^{100} + 1)(x^{50} + 1) \times \frac{x^{50} - 1}{x - 1} = y^2 \text{ болно.}$$

$$x^{100} + 1 = a, x^{50} + 1 = b, \frac{x^{50} - 1}{x - 1} = c \text{ гэе.}$$

Тэгвэл $a - 2 \vdots b$, $a - 2 \vdots c$, $b - 2 \vdots c \Rightarrow a, b, c$ -н хамгийн их ерөнхий хуваагч нь 1 эсвэл 2 байна. $abc = y^2$ учир a, b, c нь тус бүрдээ бүтэн кв байна, эсвэл abc нь бүтэн кв-г 2-оор үржүүлсэнтэй тэнцүү байна. $a = x^{100} + 1$, $b = x^{50} + 1$ нь бүтэн кв болохгүй. Иймд бүтэн кв-г 2-оор үржсэнтэй тэнцүү байна. $a = 2a_1^2$, $b = 2b_1^2$ гэе.

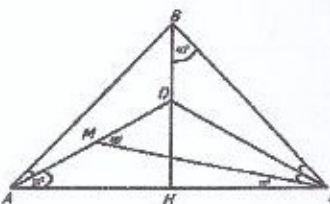
$4a_1^2b_1^2 = 4(x^{100} + 1)(x^{50} + 1) = 4x^{150} + 4x^{100} + 4x^{50} + 4 > (2x^{75} + x^{25})^2$ байх нь илэрхий $[(2x^{75} + x^{25})^2 = 4x^{150} + 4x^{100} + x^{50} \text{ учир}]$.

Нөгөө талаас $4a_1^2b_1^2 < (2x^{75} + x^{25} + 1)^2$ тэнцэтгэл биш биелэхийг шалгая.

$$\begin{aligned} (2x^{75} + x^{25} + 1)^2 &= 4x^{150} + x^{50} + 1 + 4x^{100} + 4x^{75} + 2x^{25} \\ (2x^{75} + x^{25} + 1)^2 - 4ab &= 4x^{150} + x^{50} + 1 + 4x^{100} + 4x^{75} + 2x^{25} - \\ &- 4x^{150} - 4x^{100} - 4x^{50} - 4 \\ &= 4x^{75} + 2x^{25} - 3x^{50} - 3 = 2x^{75} + 2x^{75} + 2x^{25} - 3(x^{50} + 1) \\ &= 2x^{75} + 2x^{25}(x^{50} + 1) - 3(x^{50} + 1) = 2x^{75} + (x^{50} + 1)(2x^{25} - 3) > 0 \end{aligned}$$

үгэн.

Иймд $(2x^{75} + x^{25})^2 < 4a_1^2b_1^2 < (2x^{75} + x^{25} + 1)^2$ байх боломжгүй учир бүхэл тоон шийд олддоггүй.



В1. $AM \cap BH = D$ болог. $\triangle MCD = \triangle BCD$ гэж батлая. $\angle BAD = \angle BCD = 20^\circ \Rightarrow \angle MCD = 20^\circ$ ба $\angle DMC = 40^\circ$ болно. Иймд $\triangle MCD$ ба $\triangle BCD$ тэнцүү $\Rightarrow \triangle MDB$ нь адил хажуут гурвалжин. $\angle BMC = 70^\circ \Rightarrow \angle BMD = 30^\circ$ болж $\angle AMB = 150^\circ$ болов.

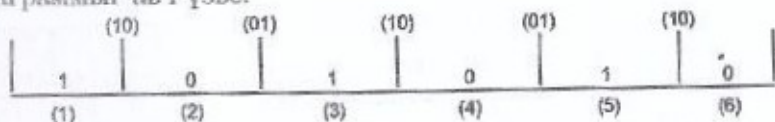
В2. $\frac{a+b}{a-b} = x, \frac{b+c}{b-c} = y, \frac{c+a}{b-c} = z$ гэвэл $(x+1)(y+1)(z+1) = (x-1)(y-1)(z-1)$ болохыг шууд шалгаж болно. Харин үүнийг илэрхийлж эмхэтгэвэл $xy + yz + zx = -1$.

Үүнийг ашиглавал $(x+y+z)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq -2(xy + yz + zx) \geq 2$ болсноор тэнцэтгэл биш батлагдав.

В3. Дараах 0 ба 1-ээс тогтсон 13 урттай 2 дарааллыг авч үзье.
1110101110000, 1000110011110

00,01,10,11 гэсэн 2 урттай дарааллуудыг блок гэнэ. Дээрх 2 дараалалд 00-блок 3 ширхэг, 01-блок 2 ширхэг, 10-блок 3 ширхэг, 11-блок 4 ширхэг байна. Тэгвэл ийм чанартай (00-3ш, 01-2ш, 10-3ш, 11-4ш байх) 13 урттай ялгаатай дарааллын тоог олъё. Яг 3 ширхэг 10 ба 2 ширхэг 01 гэсэн блок байхын тулд 13 урттай дараалал маань заавал 1-ээр эхэлж 0-оор төгсөх ёстой. Дараах

диаграммыг авч үзье.



(1),(3),(5) дугаартай хайрцагуудад зөвхөн 1-ийн цифр орох ба (2),(4),(6) дугаартай хайрцагуудад зөвхөн 0-ийн цифр орно.

00 блок 3 ширхэг, 11 блок 4 ширхэг байхын тулд

I. (2),(4),(6)-р хайрцагт 3 ширхэг 0-ийг нэмнэ. (Дурын байдлаар хувиарлаж)

II. (1),(3),(5)-р хайрцагт 4 ширхэг 1-ийг нэмнэ. (Дурын байдлаар хувиарлаж)

Ингэж 13 урттай 0 ба 1-ээс тогтох бодлогын нөхцөлийг хангах дараалал үүснэ. Ингээд I тохиолдолд 3 хайрцаганд 3 ижил зүйл байрлуулах боломжийн тоо $C_{3+3-1}^3 = C_5^3$ болно. Харин II тохиолдолд 3 хайрцаганд 4 ижил зүйл байрлуулах боломжийн тоо $C_{4+3-1}^4 = C_6^4$ болж өгөгдсөн нөхцөлийг хангах дарааллын тоо үржвэрийн дүрмээр $C_5^2 \cdot C_6^4 = \left(\frac{5 \cdot 4}{2}\right) \left(\frac{6 \cdot 5}{2}\right) = 150$ болов.

2.3 ММО-50, IX анги

Т.Гансүх (МУВИС)

I өдрийн бодлого

A1. (Ч.Гантөмөр) Дурын натурал тоо n ба аливаа бүхэл тоо n -ийн хувьд $|x| \leq \sqrt{n}$; $|y| \leq \sqrt{n}$ бөгөөд $x - y$ нь n -д хуваагдаж байх, нэгэн зэрэг тэгтэй тэнцүү биш x ба y бүхэл тоонууд олдоно гэж батал.

A2. (Л.Даваажаргал) ABC гурвалжны A өнцгөөс татсан медиан AB талтай 60° -ын өнцөг үүсгэх ба AB талаас 4 дахин богино. Тэгвэл $\angle BAC$ -г ол.

A3. (Т.Гансүх) Хэрвээ n натурал тооны хувьд $n + 1$ нь 24-д хуваагддаг бол n тооны бүх хуваагчдын нийлбэр нь 24-д хуваагдахыг батал.

II өдрийн бодлого

B1. (Т.Гансүх) a, b, c нь $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ байх бодит тоонууд бол

$$\frac{a^2}{1+2bc} + \frac{b^2}{1+2ca} + \frac{c^2}{1+2ab} \geq \frac{3}{5}$$

тэнцэтгэл бишийг батал.

B2. (Н.Дайвий-Од) Тэгш өнцөгт гурвалжныг 7 ширхэг хурц өнцөгт гурвалжинд хувааж болохыг батал.

B3. (Т.Гансүх) Гүдгэр 2014 өнцөгтийн оройнууд дээр оройтой аливаа гурвалжин болгон дор хаяж нэг тэмдэглэгдсэн цэг агуулсан байхаар гүдгэр 2014 өнцөгтийн дотор хамгийн багадаа хэдэн цэг тэмдэглэх вэ?

Бодолт:

A1. $[\sqrt{n}] = k$ болог. Ө.х. $k \leq \sqrt{n} < k + 1$.

$x, y \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$ үед $x - y$ хэлбэрийн тоонуудыг сонирхоё. Ийм хэлбэрийн тоо $(k + 1)^2 > n$ ширхэг байна. Эдгээр $(k + 1)^2$ ширхэг тоонууд дотор n -д хуваахад ижил үлдэгдэл өгдөг 2 тоо

заавал олдоно (Дирихлейн зарчмаар). Тэдгээр тоонууд нь $x_1 - uy_1$, $x_2 - uy_2$ болог. Тэгвэл энэ 2 тооны ялгавар нь n -д хуваагдана. Ө.х. $(x_1 - x_2) - u(y_1 - y_2) \equiv 0 \pmod{n}$.

Одоо $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$ гэж авбал $-\sqrt{n} \leq x; y \leq \sqrt{n}$ болно. (x_1, y_1) ба (x_2, y_2) хосууд ялгаатай учраас x, y нь нэгэн зэрэг тэг байж болохгүй.

A2. Хялбар бодлого тул бодолтыг орхив.

$$A3. n+1 \equiv 0 \pmod{24} \Rightarrow \begin{cases} n+1 \equiv 0 \pmod{3} \\ n+1 \equiv 0 \pmod{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \equiv -1 \pmod{3} \\ n \equiv -1 \pmod{8} \end{cases}$$

Ямар ч тооны квадрат нь 3-д хуваахад 0 эсвэл 1 үлдэгдэл өгдөг учраас n нь тооны квадрат болж чадахгүй. Иймд түүний бүх хуваагчдыг $d, \frac{n}{d}$ гэсэн ялгаатай хосуудад хувааж болно. Одоо $d + \frac{n}{d}$ нийлбэр 24-д хуваагдана гэдгийг харъя.

$d + \frac{n}{d} = \frac{d^2 + n}{d}$ ба $(d, 24) = 1$ тул $d^2 + n$ -г 24-д хуваагдана гэдгийг харахад хангалттай.

$n \equiv -1 \pmod{3}$ тул $d \not\equiv 0 \pmod{3}$ буюу $d \equiv \pm 1 \pmod{3}$ гэсэн үг.

Эндээс $d^2 + n \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$

Яг адилаар $n \equiv -1 \pmod{8}$ тул $d \not\equiv 0 \pmod{8}$ буюу $d \equiv \pm 1; \pm 3 \pmod{8}$ гэсэн үг. Иймд $d^2 + n \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{8}$. Үүгээр бодлого бодогдов.

B1. $1 + 2bc = (b+c)^2 + a^2 \geq 0$ учир $1 + 2xy \leq 1 + x^2 + y^2$ гэдгийг ашиглан дараах хувиргалтыг хийе.

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{1+2bc} + \frac{b^2}{1+2ca} + \frac{c^2}{1+2ab} &\geq \frac{a^2}{2-a^2} + \frac{b^2}{2-b^2} + \frac{c^2}{2-c^2} = \\ &= -3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2-a^2} + \frac{1}{2-b^2} + \frac{1}{2-c^2} \right) \end{aligned}$$

Иймд бодлого нь дараах тэнцэтгэл бишийг батлах бодлого руу шилжинэ.

$$\frac{1}{2-a^2} + \frac{1}{2-b^2} + \frac{1}{2-c^2} \geq \frac{9}{5}$$

Тэнцэтгэл бишийн зүүн гар талд Коши-Буняковскийн тэнцэтгэл бишийн мөрдлөгийг хэрэглэвэл

$$\sum_{cyc} \frac{1}{2-a^2} \geq \frac{9}{6-(a^2+b^2+c^2)} = \frac{9}{5}$$

болж батлагдав. Тэнцэтгэл биш нь $a = b = c = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ үед л тэнцэлдээ хүрнэ.

В2. Тэгш өнцөгт гурвалжны багтсан тойрог хурц өнцгийн биссектрисүүдтэй огтлолцох цэгүүдийг дайруулан уул тойрогт шүргэгч татахад гурвалжнаас 2 хурц /адил хажуут/ гурвалжин таслана. Харин үлдсэн 5 өнцөгтийн оройнуудыг багтсан тойргийн төвтэй холбоход үүсэх гурвалжнууд /5 гурвалжин / хурц өнцөгт гүдгийг төвөггүй баталж болно.

В3. Нэг оройгоос татсан диагоналиудаар 2012 үл огтлолцох гурвалжин үүсэх тул бидний олох тоог d гэвэл $d \geq 2012$ гэсэн үг. Одоо яг 2012 байх байгуулалтыг хийвэл бодлого бодогдоно. Олон өнцөгтийн орой бүрийн хувьд түүнээс гарсан диагоналиуд болон түүнтэй хөрш 2 оройг холбосон диагоналиар үүсэх 2012 гурвалжинг авч үзье. Тэдгээр гурвалжинг цагийн зүүний дагуу 1-с 2012 хүртэл дугаарлая. Олон өнцөгтийн оройнуудаа ч цагийн зүүний дагуу дугаарласан гэж үзье. Одоо дараах байдлаар цэгүүдээ тэмдэглэе. 1-р оройн хувьд түүний 1-р гурвалжин дотор, 2-р оройн хувьд түүний 2-р гурвалжин дотор гэх мэтчилэн 2012-р оройн хувьд 2012 дахь гурвалжинд нь тус бүр нэг нэг цэг тэмдэглэе. (2013, 2014 дэх оройнуулын хувьд цэг тэмдэглэгдэхгүй) Уг байгуулалтаар олон өнцөгтийн оройнууд дээр оройтой гурвалжин тус бүр 1 тэмдэглэгдсэн цэг агуулна гэдгийг одоо ерөнхий тохиолдолд харуулъя.

Гүдгэр 4 болон 5,6 өнцөгтийн хувьд уг байгуулалт бодлогын нөхцлийг ханган гэдгийг шууд шалгаж болно. $n \leq k$ үед уг байгуулалтаар байгуулж болдог гээ. $n = k+1$ үед хэрхэн байгуулахыг үзье. Бүх оройнуудаа дугаарлан 1-с $k+1$ дугаар өгье. $k+1$ -р оройг орхин бусад оройн хувьд өмнөх байгуулалтыг хийвэл таамаглал ёсоор бодлогын нөхцлийг хангана. Одоо $k+1$ -р оройноос эхлэн

шинэ дугаарлалтыг хийвэл өмнөх тэмдэглэгдсэн цэгүүд өөрчлөгдөх шаардлагагүй гэдэг нь шууд харагдана. $k + 1$ -р оройгоос татсан диагоналиудаар үүсэх гурвалжин тус бүрд тэмдэглэгдсэн цэг агуулагдана гэдгийг хялбар шалгаж болно. ($A_{k+1}A_iA_{i+1}$ гурвалжинд O_i цэг агуулагдана. Энд O_i нь i -р тэмдэглэгдсэн цэг)

I өдрийн бодлого

A1. (Н.Аргилсан) a_n дарааллын эхний n ширхэг гишүүний нийлбэрийг S_n гэе. Хэрэв $S_n + a_n = \frac{n-1}{n(n+1)}$ ($n = 1, 2, \dots$) нөхцөл биелдэг бол энэ дарааллын ерөнхий гишүүнийг ол.

A2. (Ч.Гантөмөр) ABC гурвалжны медиануудын огтлолцлын цэг G бөгөөд $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle BGC = 120^\circ$ бол ABC нь адил тэрт гурвалжин гэж батал.

A3. (Т.Гансүх) x, y, z нь $x + y + z = 1$ байх сөрөг биш бодит тоонууд бол

$$\frac{1}{1-xy} + \frac{1}{1-xz} + \frac{1}{1-zy} \leq \frac{27}{8}$$

гэнцэтгэл бишийг батал.

II өдрийн бодлого

B1. (Н.Аргилсан) $1, 2, 3, \dots$ натурал тоон олонлог хэд хэдэн арифметик прогрессуудад хуваагдав. Дор хаяж нэг прогрессийн эхний гишүүн ялгавартаа хуваагдахыг батал.

B2. (Н.Дайвий-Од) Тэгш өнцөгт гурвалжныг хамгийн дөөндөө хэдэн хурц өнцөгт гурвалжинд хувааж болох вэ?

B3. (Ч.Гантөмөр) p нь анхны тоо болог. $1 \leq i < j \leq p-1$ байх бүх боломжит (i, j) хосыг авч $(i-j)^2$ тоонуудыг олѐ. Эдгээр олсон бүх тоонуудын үржвэрийг T -ээр тэмдэглэе. /өөрөөр хэлбэл

$\prod_{1 \leq i < j \leq p-1} (i-j)^2$ / Тэгвэл T үржвэрийг p тоонд хуваахад гарах үлдэгдлийг ол.

Бодолт:

A1.

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} = \frac{n}{(n+1)(n+2)} - a_{n+1} - \frac{n-1}{n(n+1)} + a_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_{n+1} = \frac{(n+2)-2}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} + a_n =$$

$$= \frac{-2}{(n+1)(n+2)} + a_n + \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{1}{n(n+1)} \right) \text{ болно. } b_n =$$

$$a_n + \frac{1}{n(n+1)} \text{ гэвэл } b_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot b_1 \text{ болох тул } a_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

болж бодлого бодогдов.

А2. $a = BC, b = CA, c = AB, m = GB, n = GC$ болог. Тэгвэл косинусын теоремоос $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ бөгөөд медианы томъёоноос

$$m^2 = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{a^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \right) = \frac{1}{9} (3c^2 + (c-b)^2)$$

болно. Үүнтэй адилаар

$$n^2 = \frac{1}{9} (3b^2 + (b-c)^2)$$

Нөгөө талаас $S_{\triangle BAC} = 3 \cdot S_{\triangle BGC}$ ба $\angle BAC = 60^\circ, \angle BGC = 120^\circ$ гэдгээс $bc = 3m \cdot n$ байна. Эндээс $3bc = 9mn$ буюу $9b^2c^2 = 9m^2 \cdot 9n^2 = (3c^2 + (c-b)^2)(3b^2 + (b-c)^2)$ болно. Үүнийг хялбарчилбал $b = c$ болж $\triangle ABC$ нь зөв гурвалжин болох нь батлагдлаа.

А3. Тэнцэтгэл бишийг ерөнхий хуваарь өгөн хялбарчилбал

$$3 - 27x^2y^2z^2 + 19xyz(x+y+z) + 16(xy+yz+zx) \geq 0$$

гэсэн тэнцэтгэл биш үүснэ. Энд Шурын тэнцэтгэл биш хэрэглэн шууд бодож болох боловч үүнээс өөр бодолтын санааг энд дурдъя.

$x+y+z=1$ болохыг тооцон $xy=t$ гэсэн ордуулга хийвэл уг тэнцэтгэл биш t хувьсагчийн хувьд

$-27z^2t^2 - (19z+16)t + 3 + 16z - 16z^2 \geq 0$ гэсэн квадрат тэнцэтгэл биш үүснэ.

Квадрат функцийн чанар ба $0 \leq xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$ тэнцэтгэл бишийг тооцвол дээрх квадрат тэнцэтгэл биш дээр $xy = 0; x = y$ гэсэн 2 нөхцлийг л шалгахад хангалттай болно.

Эхний тохиолдолд $3+16z-16z^2 = 7-(4z-2)^2 \geq 0$ тул илэрхий.

Нөгөө тохиолдолд $z = 1 - 2x$ тул анхны тэнцэтгэл нь

$$\frac{3 - 19x + 27x^2 + 27x^3 - 54x^4}{8(1-x)^2 \cdot (1-x+2x^2)} \geq 0$$

болно. Энд $x \in [0; 1]$ гэдгийг тооцон үржигдэхүүнд задлах замаар батлахыг та нарт даалгавар болгон үлдээе.

B1. Тэдгээр дарааллын эхний гишүүдийг $a_1, a_2, \dots, a_n$, ялгавруудыг нь

$d_1, d_2, \dots, d_n$ гее. Тэгвэл өгсөн нөхцөл ёсоор $d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n$ тоо аль нэг арифметик прогрессд агуулагдана. Иймд $d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_k \cdot \dots \cdot d_n = a_k + m \cdot d_k$ тул a_k нь d_k -д хуваагдана. Үүгээр бодлого бодогдов.

B2. Аливаа тэгш өнцөгт гурвалжинг 7 хурц өнцөгт гурвалжинд хувааж болохыг харуулъя. Тэгш өнцөгт гурвалжны багтсан тойрог хурц өнцгийн биссектрисүүдтэй огтлолцох цэгүүдийг дайруулан уул тойрогт шүргэгч татахад гурвалжнаас 2 хурц /адил хажуут/ гурвалжин таслана. Харин үлдсэн 5 өнцөгтийн оройнуудыг багтсан тойргийн төвтэй холбоход үүсэх гурвалжнууд /5 гурвалжин / хурц өнцөгт гэдгийг төвөггүй баталж болно. Одоо ямар ч тэгш өнцөгт гурвалжинг 7-оос цөөн хурц өнцөгт гурвалжинд хувааж болохгүйг харуулъя. Тэгш өнцгийн оройгоос дор хаяж нэг хэрчим гарч уул өнцгийг хуваах нь зайлшгүй. Энэ хэрчим шууд гипотенуз дээр буувал түүгээр гурвалжин 2 гурвалжинд хуваагдах ба тэдгээрийн дотор дор хаяж нэг хурц өнцөгт биш гурвалжин байх нь манайд ашиггүй хувилбар болно. Иймд тэгш өнцгийн оройгоос гарсан хэрчим гурвалжны дотоод мужид аль нэг цэг дээр төгсөнө. Энэ цэгээс дор хаяж 5 хэрчим гарахгүй бол болохгүй. Учир нь 5-аас цөөн хэрчим гардаг бол тэдгээрийн хооронд дор хаяж нэг хурц биш өнцөг үүснэ. Тэгэхлээр шинээр үүссэн дотоод цэг дээр оройтой дор хаяж 5 гурвалжин байх нь гарцаагүй. Анхны гурвалжны хурц өнцгүүд ямар ч тохиолдолд эдгээр гурвалжны аль нэгийг нь өнцөг болж чадахгүй. Иймд дор хаяж 7

хурц өнцөгт гурвалжин үүснэ.

В3. (Сант сургуулийн 10-р ангийн сурагч Пүрэвийн бодолт):

$$\begin{aligned} & ((p-1)-k) \cdot \dots \cdot (k+1-k) \cdot ((p-1)-(p-k)) \cdot \dots \cdot ((p-k+1)-p-k) \equiv \\ & \equiv (p-k-1)! \cdot (-1) \cdot (p-k+1) \cdot (-1)(p-k+2) \cdot \dots \cdot (-1)(p-1) \equiv \\ & \equiv \frac{(p-1)!}{p-k} \cdot (-1)^{k-1} \pmod{p} \end{aligned}$$

Түүнчлэн

$$\begin{aligned} & ((p-1)-1) \cdot ((p-2)-1) \cdot \dots \cdot (2-1) \equiv (p-2)! \equiv \frac{(p-1)!}{p-1} \equiv \\ & \equiv (p-1)!(-1)^1 \equiv \frac{(p-1)!}{1} \cdot (-1)^{p-2} \pmod{p} \end{aligned}$$

$T = \prod_{1 \leq i < j \leq p-1} (i-j)^2$ үржвэрийг дээрх 2 адилтгалыг ашиглан хялбарчлах замаар

$$\begin{aligned} T &= \frac{(p-1)!^{p-1}}{(p-1)!} \cdot (-1)^{1+2+3+\dots+(p-2)} \equiv (p-1)!^{p-2} \cdot \\ & \cdot \frac{(p-2)(p-1)}{2} \cdot (-1)^{\frac{2}{2}} \pmod{p} \end{aligned}$$

гэж бичиж болно. Цааш нь Вильсоны теорем ашиглавал

$$T \equiv (-1)^{p-2} \cdot (-1)^{\frac{(p-2)(p-1)}{2}} = (-1)^{\frac{(p-2)(p+1)}{2}} \pmod{p}$$

болж бодлого бүрэн бодогдов.

2.5 ММО-50, Шилжилтийн XI анги

Д.Батнасан

I өдрийн бодлого

A1. ABC гурвалны талууд $a = BC, b = AC, c = AB$ ба талбай нь S бол

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2 \cdot S} \geq \frac{1}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{C}{2}}$$

тэнцэтгэл биш биелнэ гэж батал.

A2. a ба j натурал тоонууд, $a \geq 2$ болно. $a^j + 1 \mid a^n + j$ байх n натурал тоо олдож байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь $j = a^k, k \geq 0$ гэж батал.

A3. Адил хажуут $ABC (AB = AC)$ гурвалжны AB, AC талууд дээр харгалзан P, E цэгүүд $AD = BC = EC$ ба ADE гурвалжин адил хажуут байхаар олдог бол A өнцгийн авч болох бүх утгуудыг ол.

II өдрийн бодлого

B1. $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ монотон өсдөг функц, $f(0) = 0, f(1) = 1$ байг. Энэ функцийн графикийг, талууд нь Ox, Oy тэнхлэгүүдтэй параллель, талбай тус бүр нь $\frac{1}{n^2}$ байх n ширхэг тэгш өнцөгтүүдээр хучиж болохыг батал.

B2. Параллелограммын талбай нь диагоналийн квадратын хагастай тэнцүү бөгөөд түүний талын уртууд болон талбай нь рационал тоонууд бол энэ параллелограмм квадрат гэж батал.

B3. $a_k = k + \left[\frac{a}{k} \right], k = \overline{1, n}$ бол $a_1, a_2, \dots, a_n$ тоонуудын хамгийн бага нь $\lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor$ гэж батал.

Бодолт:

A1. $p = \frac{a+b+c}{2}$ -хагас периметр болог. Хагас өнцгийн томъёо ба Косинусын теоремоос

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{2}(\cos A + 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc}{2bc} \right) = \frac{p(p-a)}{bc} \text{ бол-}$$

но.

$$\text{Иймд } \frac{1}{\cos \frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{ab}{(p-a)}}; \frac{1}{\cos \frac{B}{2}} = \sqrt{\frac{ac}{p(p-b)}} \text{ ба } \frac{1}{\cos \frac{C}{2}} = \sqrt{\frac{ab}{p(p-a)}}$$

болно.

Героны томъёоноос

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{C}{2}} &= \sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}} + \sqrt{\frac{ac}{p(p-b)}} + \sqrt{\frac{ab}{p(p-a)}} \\ &= \frac{\sqrt{b(p-c)c(p-b)} + \sqrt{a(p-c)c(p-a)} + \sqrt{a(p-b)b(p-a)}}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \\ &= \frac{\sqrt{b(p-c)c(p-b)} + \sqrt{a(p-c)(p-a)} + \sqrt{a(p-b)b(p-a)}}{S} \text{ бол-} \end{aligned}$$

но.

$$\begin{aligned} \text{Нөгөө талаас } \sqrt{b(p-c)c(p-b)} &\leq \frac{b(p-c) + c(p-b)}{2} \text{ тул} \\ \frac{1}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{C}{2}} &\leq \frac{1}{2 \cdot S} \left(p(2a+2b+2c) - (2ab+2ac+2bc) \right) = \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2 \cdot S} \text{ болов.} \end{aligned}$$

Тэнцэлдээ $a = b = c$ үед хүрнэ.

A2. $\Leftrightarrow j = a^k, k \geq 0$ болог. $a^j + 1 \equiv 0 \pmod{a^j + 1}$ ба $j = a^k$ гэдгээс $a^{j+k} \equiv -j \pmod{a^j + 1}$ болно.

Иймд $n = j + k = a^k + k$ гэж авахад хангалттай.

$\Rightarrow a^n \equiv -j \pmod{a^j + 1}$ байх n олддог гэж саная. $n = qj + k, 0 \leq k < j$ байг. Тэгвэл $a^n = a^{qj+k} = a^{qj} a^k \equiv (-1)^q a^k \equiv \pm a^k \pmod{a^j + 1}$ болно. Иймд $j \equiv \mp a^k \pmod{a^j + 1}$ бөгөөд

Хэрэв $j \equiv a^k \pmod{a^j + 1}$ бол $1 \leq j, a^k \leq a^j \Rightarrow j = a^k$ болно.

Хэрэв $j \equiv -a^k \pmod{a^j + 1}$ бол $j = a^j - a^k + 1$ болж

$a^j = a \cdot a^{j-1} \geq 2a^{j-1} \geq a^k + a^{j-1} > a^k + j - 1$. Иймд $j < a^j - a^k + 1$ болов.

Эндээс $j = a^k$ байхаас өөр аргагүй.

A3. Гурван тохиолдол болж сална.

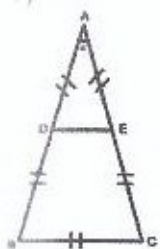
1) $AD = AE$ бол $\angle A = 2 \arctan\left(\frac{1}{4}\right)$.

2) $AE = DE$ бол $\angle A = 36^\circ$.

3) $AD = DE$ бол $\angle A = 20^\circ$.

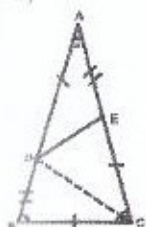
Тохиолдол бүрээр тооцолъё.

1)



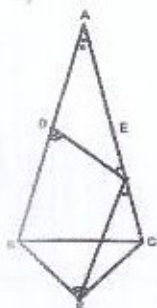
$AD = AE = EC = BC$ учраас ABC адил хажуут A нь хажуу тал сууриасаа 2 дахин их болж $\left(\tan \frac{x}{2}\right) = \frac{BC}{(2AC)} = \frac{1}{4}$

2)



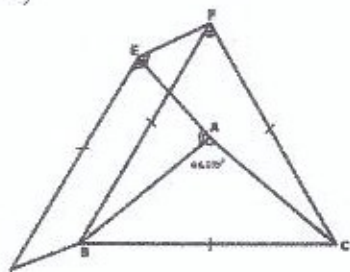
$BD = AB - AD = AC - EC = AE = ED$ ба $BC = EC$ учраас $\triangle BCD = \triangle ECD$ (гурван тал =). $\angle DEC$ нь адил хажуут $\triangle ADE$ -ны гадаад өнцөг учраас $\angle ACB = \angle ABC = \angle DEC = 2\alpha$. $ABC\triangle$ нь дотоод өнцгүүдийн нийлбэр $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ$, $\alpha = 36^\circ$.

3)



$BDE\triangle$ нь $BDEF \parallel$ грамм болгож гүйцээж зуръя. $\triangle BCF$ - г адил талт болохыг батлая. $\triangle CEF = \triangle CAB = \alpha$, $CA = AD = DE$ ба $ED = BD = AB - AD = AC - EC = AE$ гэсэн

илэрхий тэнцлүүдээс $\triangle CEF = \triangle DAE$ ба CEF адил хажуут $\triangle$ гэж мөрдөнө. Мөн $CF = CE = CB$, $\angle CFE = \angle CEF = \alpha$. Үүнээс гадна $BDEF \parallel$ грамм $BF = DE = CB$, $\angle CFE = \angle BDE = 2\alpha$ ба BDE нь $ADE \triangle$ -ны гадаад өнцөг болно. Иймд $BF = FC = CB$ ба $\angle BFC = 60^\circ = \angle BEF + \angle EFC = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$ эндээс $\alpha = 20^\circ$ 4)



$\angle BFC = \angle BEF + \angle EFC$ -г бичихдээ бид $ABC, FBC \triangle$ -нууд BC -ын хоёр талд орших ба FE нь $\angle BFC$ өнцгийн дотор байгааг тооцсон. Хэрэв F нь BC талын дээр байсан бол өмнөхтэй адил байдлаар $3x = \angle BEF + \angle EFC = 360^\circ - \angle BFC = 300^\circ$ эндээс $x = 100^\circ$ x нь суурийн өнцөг учраас боломжгүй.

В1. $x_1 \cdot f(x_1) = \frac{1}{n^2}$ байх x_1 -г бэхлээ. $(x_2 \cdot x_1)(f(x_2) - x_1) = \frac{1}{n^2}$ байх x_2 -г $(x_3 - x_2)(f(x_3) - f(x_1)) = \frac{1}{n^2}$ байх x_3 -г гэх мэтчилэн x_{n-1} -г бэхэлнэ. Монотон өсдөг функцийг хувьд $[f(x_1), f(x_2)]$ завсрын утгуудын аль нэгийг $f(x)$ шинээр утга олгон харгалзуулж дээрх дарааллыг байгуулж болно.

Одоо хамгийн сүүлд байгуулах тэгш өнцөгтийн талбай $\frac{1}{n^2}$ -ээс бага буюу $(1 - x_{n-1})(1 - f(x_{n-1})) \leq \frac{1}{n^2}$ (*) болохыг батлах шаардлагатай. Үүний дараа энэ тэгш өнцөгтөө $\frac{1}{n^2}$ болтол нь тэлж болно.

(*) -г батлахын тул нэг талаас

$$\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{f(x_1)} + \sqrt{x_2 - x_1} \sqrt{f(x_2) \cdot f(x_1)} + \dots + \sqrt{x_{n-1} \cdot x_{n-2}} \cdot \sqrt{f(x_{n-1}) - f(n-2)} + \sqrt{1 - x_{n+1}} \cdot \sqrt{1 - f(x_{n-1})} = \frac{n-1}{n^2} + \sqrt{1 - x_{n-1}} \cdot \sqrt{1 - f(x_{n-1})}.$$

Нөгөө талаас Шварцийн талбай

$$\sqrt{x_1} \sqrt{f(x_1)} + \dots \leq \sqrt{x_1 + (x_2 - x_1)} + \dots$$

$$+ \sqrt{f(x_1) + (f(x_2) - f(x_1))} + \dots = 1 \text{ болж}$$

$$(1 - f(x_{n-1}))(1 - x_{n-1}) \leq \frac{1}{n^2} \text{ болж батлагдав.}$$

В2. Өгөгдсөн параллелограммын нэг талын урт нь a нөгөө талын урт нь 1 ба бага өнцөг нь α гэж үзэж болно. Тэгвэл түүний талбай $S = a \sin \alpha$ бөгөөд диагоналиуд нь $\sqrt{a^2 \pm 2a \cos \alpha + 1}$ урттай байна.

(Косинусийн теоромоос) өгсөн нөхцөлөөс

$$(1) \ 2a \sin \alpha = a^2 \pm 2a \cos \alpha + 1 \text{ бөгөөд } m = \sin \alpha \pm \cos \alpha \text{ гэвэл}$$

$$(2) \ a^2 - 2am + 1 = 0 \text{ болно.}$$

$$(2) \text{ тэгшитгэл бодит шийдтэй} \Leftrightarrow m^2 - 1 \geq 0 \text{ бөгөөд } m^2 - 1 = \pm \sin 2\alpha$$

$$\text{ба } \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ гэдгээс } m = \sin \alpha + \cos \alpha \text{ байх ёстой.}$$

$$\text{Иймд (3) } a = \sin \alpha + \cos \alpha \pm \sqrt{\sin 2\alpha} \text{ болно.}$$

$$a; S \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sin \alpha \in \mathbb{Q} \text{ ба (1), (3)-аас } \cos \alpha, \sqrt{\sin 2\alpha} \in \mathbb{Q} \text{ болно.}$$

$$\text{Эндээс } (\cos \alpha, \sin \alpha) = (\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}) \text{ байх } x \in \mathbb{Q} \text{ тоо олдох}$$

$$\text{болно. Энэ үед } \sqrt{\sin 2\alpha} = \frac{2}{1+x^2} \sqrt{x(1-x^2)} \text{ ба } x, \sqrt{\sin 2\alpha} \in \mathbb{Q}$$

$$\text{гэдгээс } x - x^3 = y^2 \text{ байх } y \in \mathbb{Q} \text{ тоо олдох болно. Энэ тэгшитгэл } (x, y) = (0, 0), (\pm 1, 0) \text{ гэсэн рационал шийдтэй. (өөр рационал шийдгүй.)}$$

$$\text{Иймд } \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ ба (1)-ээс } a = 1 \text{ болж өгөгдсөн параллелограмм нь квадрат болох нь батлагдана.}$$

$$\textbf{В3. } x + \frac{n}{x} \text{ функц нь } x = \sqrt{n} \text{ үед хамгийн бага утгаа авна. } [x +$$

$$\frac{n}{x}] \text{ функцийг хувьд ч үнэн. } x \text{ нь зөвхөн бүхэл тохиолд сонирхож байгаа учраас } x_1 = [\sqrt{n}], x_2 = [\sqrt{n}] + 1 \text{ утгуудын нь нэгд нь бага утгаа авна. Аль нь болохыг тодорхойлохын тулд}$$

$$j = [\sqrt{n}] \text{ гэвэл } n = j^2 + m, 0 \leq m \leq 2j \text{ болно. Функцийн } j \text{ цэг}$$

$$\text{дэх утга } 2j + [\frac{m}{j}], j + 1 \text{ цэг дэх утга } 2j + [\frac{(m+1)}{(j+1)}].$$

$$\text{Энэ хоёр утга } m < j \text{ үед хоёул } 0, j \leq m < 2j \text{ үед } 1.$$

$$\text{Гэвч } m = 2j \text{ үед эхнийх } 2, \text{ дараагийнх нь } 1 \text{ болно. Иймд хийж байгаа хамгийн бага утга } j^2 \leq n < j^2 + j \text{ үед } 2j, j^2 + j \leq n \leq j^2 + 2j$$

үед $2j + 1$ болж аль ч тохиолдолд $[\sqrt{4n + 1}]$ байна.

I өдрийн бодлого

A1. Төгсгөлгүй олон $n \in \mathbb{N}$ тооны хувьд $\left(a + \frac{1}{2}\right)^n + \left(b + \frac{1}{2}\right)^n$ тоо нь бүхэл байдаг (a, b) эерэг бүхэл тоон хос олдох уу?

A2. Дурын a, b, c эерэг бодит тоонуудын хувьд

$$\frac{b(b-c)}{a^2+ab+bc} + \frac{c(c-a)}{b^2+bc+ca} + \frac{a(a-b)}{c^2+ca+ab} \geq 0$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

A3. Хавтгай дээр O_1 төвтэй ω_1 , O_2 төвтэй ω_2 тойргууд өгөгджээ. O_1O_2 хэрчим ω_1 тойргийг A цэгээр, ω_2 тойргийг B цэгээр тус тус огтолно. EF нь 2 тойргийн гадаад ерөнхий шүргэгч бөгөөд E нь ω_1 тойрог дээр, F нь ω_2 тойрог дээр оршиж байв. A, B цэгүүдийг дайрсан ω тойрог, ω_1 тойргийг C , ω_2 тойргийг D цэгээр тус тус огтолно. (E, C цэгүүд O_1O_2 шулууны 2 өөр талд оршино). E, C, D, F цэгүүд 1 тойрог дээр оршихыг батал.

II өдрийн бодлого

B1. Γ тойрогт багтсан $ABCD$ 4 өнцөгт өгөгджээ. Γ тойргийн A цэг дээрх шүргэгч BC -г K цэгээр, Γ тойргийн B цэг дээрх шүргэгч AD -г M цэгээр тус тус огтолж байг. Хэрэв $AD = MA$ ба $BK = KC$ бол $ABCD$ дөрвөн өнцөгт нь трапец болохыг батал.

B2. Бодит тоон коэффициенттэй $f(x)$ олон гишүүнт өгөгджээ. Дараах нөхцөлүүдийг нэгэн зэрэг хангах $g(x), h(x)$ олон гишүүнтүүд олдохыг батал.

- (1) $g(x), h(x)$ -олон гишүүнтүүд нь бодит тоон коэффициенттэй.
- (2) Дурын x бодит тооны хувьд $f(x) = g(x) + h(x)$ байдаг.
- (3) $g(x), h(x)$ олон гишүүнтүүд нь бодит тоон завсарт эрс өсдөг байна.

B3. Шатрын тэмцээнд n шатарчин өрсөлджээ. Шатарчин бүр бусад шатарчидтай яг нэг нэг удаа тоглосон ба дурын хоёр A, B шатарчны хувьд A, B хоёуланд нь ялагдсан яг t ширхэг шатарчин байжээ. Тэгвэл $n = 4t + 3$ гэж батал.

Бодолт

А1. 1). $(2a+1)^n + (2b+1)^n \equiv 2^n$, ба $n = 2k$ гэе.
 $(2a+1)^{2k} + (2b+1)^{2k} \equiv (4a^2+4a+1)^k + (4b^2+4b+1)^k \equiv 1^k + 1^k \equiv 2$
 $(\text{mod } 4)$ гэдгээс $(2a+1)^n + (2b+1)^n \equiv 4$ $n \geq 2$ үед боломжгүй.
 2). n сондгой байг. $A = \{n \in \mathbb{N} | (2a+1)^n + (2b+1)^n / 2^n \in \mathbb{Z}\}$
 гэв. $n \in A$ байг.

$(2a+1)^n + (2b+1)^n = ((2a+1) + (2b+1)) \cdot$
 $\cdot ((2a+1)^{n-1} - (2a+1)^{n-2}(2b+1) + \dots + (2b+1)^{n-1}).$
 $2 \nmid (2a+1)^{n-1} - (2a+1)^{n-2}(2b+1) + \dots + (2b+1)^{n-1} \Rightarrow 2a+2b+2 \mid 2^n$
 a, b тогтмол тоо учир $\text{ord}_2(2a+2b+2) = m$, $n > m$ үед
 $2^n \nmid (2a+1)^n + (2b+1)^n \Rightarrow |A| \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1$ гэж гарна. Иймд
 бодлогын нөхцлийг хангах (a, b) хос байхгүй.

А2. Задлая. $\sum b(b-c)(b^2+bc+ca)(c^2+ca+ab) \geq 0$.

$$\begin{aligned} & \sum (b^2 - bc)(b^2c^2 + ab^2c + ab^3 + bc^3 + abc^2 + ab^2c + \\ & \quad + c^3 + a^2c^2 + a^2bc) = \\ & = \sum (b^4c^2 + ab^4 + ab^5 + b^3c^3 + ab^3c^2 + ab^4c + \\ & + ab^2c^3 + a^2b^2c^2 + a^2b^3c - b^3c^3 - ab^3c^2 - ab^4c - b^2c^4 - \\ & \quad - ab^2c^3 - ab^3c^2 - abc^4 - a^2bc^3 - a^2b^2c^2) = \\ & = \sum (a^4b^2 + a^5c + a^3bc^2 - a^4c^2 - 2a^3b^2c) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \sum (a^4b^2 + a^5c + a^3bc^2) \geq \sum (a^4c^2 + 2a^3b^2c). \\ & \quad \sum a^5c + \sum a^3c^3 \geq 2 \sum a^4c^2 \end{aligned}$$

(Кошийн т/б) $a = b = c$ үед тэнцэлдээ хүрнэ.

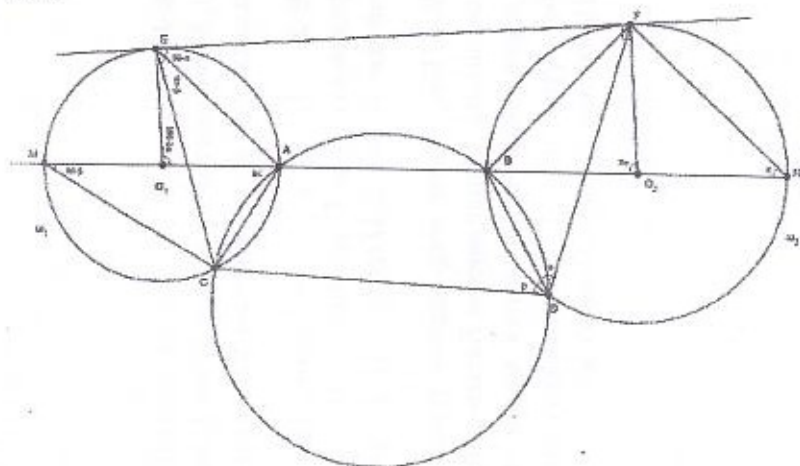
$$\sum (a^4b^2 + \frac{a^5c}{2} + a^3bc^2) \geq \sum (\frac{a^3b^3}{2} + 2a^3b^2c).$$

$\sum a^3bc^2 + \sum a^3b^3 \geq \sum 2a^3b^2c$ (Кошийн т/б) $a = b = c$ үед
 тэнцэлдээ хүрнэ.

$$\sum (a^4b^2 + \frac{a^5c}{2}) \geq \sum \frac{3}{2}a^3b^3 \Leftrightarrow$$

$$\sum (\underbrace{a^4b^2 + a^4b^2 + b^5a}_{\geq 3a^3b^3}) \geq \sum 3a^3b^3 \Rightarrow \text{батлагдав. } a = b = c$$

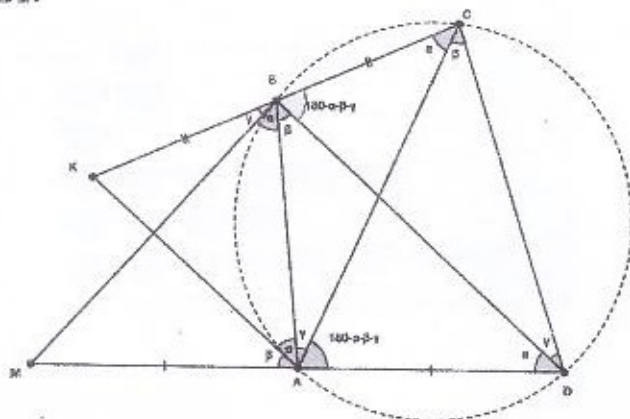
A3.



$\angle EO_1A = 180 - 2\alpha \Rightarrow \angle FEA = \frac{180 - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$ байна. Нөгөө талаас $\angle CAM = \beta$ ба $\angle MCA = 90^\circ$ тул $\angle AMC = 90^\circ - \beta \Rightarrow \angle CEA = 90^\circ - \beta$.

Иймд $\angle CEF + \angle CDF = 180^\circ - \alpha - \beta + \alpha + \beta = 180^\circ$ буюу $CEFD$ тойрогт багтав.

В1.



$$MA = AD = x$$

$$KB = BC = y \text{ ба } \frac{AB}{2} = \alpha \quad \frac{AD}{2} = \beta \quad \frac{BC}{2} = \gamma \text{ гэе.}$$

Шүргэгч огтлогчийн теоремоор

$$\begin{cases} MB^2 = MA \cdot MD = 2x^2 \\ KA^2 = KB \cdot KC = 2y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MB = \sqrt{2}x \\ KA = \sqrt{2}y \end{cases} \text{ болно.}$$

$$\angle DBC = 180^\circ - \angle BCD - \angle BDC = 180^\circ - \alpha - \beta - \gamma; \angle CAD = \frac{\angle C}{2} = \angle DBC = 180^\circ - \alpha - \beta - \gamma \text{ болно. } \angle MBK = 180^\circ - \angle MBD - \angle DBC = \gamma; \angle MAK = 180^\circ - \angle KAC - \angle CAD = \beta \text{ болно.}$$

$\triangle AKC$ -ны хувьд синусын теорем бичвэл

$$\frac{KC}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{AK}{\sin \alpha} \text{ буюу } \frac{2y}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{\sqrt{2}y}{\sin \alpha} \Rightarrow \sin(\alpha + \gamma) = \sqrt{2} \sin \alpha \text{ болно.}$$

$$\triangle MBD\text{-н хувьд синусын теорем бичвэл } \frac{MD}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{MB}{\sin \alpha}$$

$$\text{буюу } \frac{2x}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sqrt{2}x}{\sin \alpha} \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \sqrt{2} \sin \alpha \text{ болно.}$$

Иймд $\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{2} \sin \alpha = \sin(\alpha + \gamma)$ ба $\alpha + \beta < 180^\circ$, $\alpha + \gamma < 180^\circ$ тул $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, эсвэл $(\alpha + \beta) + (\alpha + \gamma) = 180^\circ$ болох ба эхний тохиолдолд $AB \parallel CD$; 2 дахь тохиолдолд $BC \parallel AD$ болно.

2.7 ММО-50, Бага ангийн багш

М.Итгэл (МУИС)

I өдрийн бодлого

A1. $(x^y)^z = 1024$ нөхцлийг хангах (x, y, z) эерэг бүхэл гурвал хэд байх вэ?

A2. Нэгж талтай $ABCD$ квадратын AD ба CD талын дундаж цэг нь харгалзан E ба F байв. AC диагональ нь BE ба BF хэрчмийг харгалзан M ба N цэгт огтолно. Тэгвэл $MNFDE$ таван өнцөгтийн талбайг ол.

A3. $\overline{abcde}$ нь 1,2,3,4,5-д хуваагддаг хамгийн бага таван оронтой тоог ол. Энд a, b, c, d, e нь бүгд ялгаатай цифрүүд.

II өдрийн бодлого

B1. $5a - ab = 9b^2$ тэгшитгэл бод. Энд a, b -ээрэг бүхэл тоо.

B2. a, b, c ялгаатай эерэг бүхэл тоо. Хэрэв a, b, c нь квадрат биш ба ab, ac, bc квадрат тоонууд байг. Тэгвэл $a+b+c$ нийлбэрийн боломжит хамгийн бага утгыг ол.

B3. Тус бүр нь 10 элементтэй 3 олонлог байв. Дурын хоёр олонлогийн нэгдэл 19 элементтэй. Тэгвэл энэ 3 олонлогийн нэгдэл хэдэн элементтэй вэ?

Бодолт:

A1. $(x^y)^z = 1024$ нөхцлийг хангах (x, y, z) эерэг бүхэл гурвал хэд байх вэ?

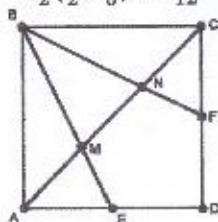
$x = 2^k$ хэлбэртэй байх нь ойлгомжтой. Иймд тэгшитгэл $(2^k)^{yz} = 1024$ буюу

$$k y z = 10 = 1 \cdot 1 \cdot 10 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \text{ хэлбэрт шилжинэ.}$$

Эндээс (x, y, z) гурвал нь $(2, 1, 10), (2, 10, 1), (1024, 1, 1), (1, 2, 5), (1, 5, 2), (4, 1, 5), (4, 5, 1), (32, 1, 2), (32, 2, 1)$ гэсэн 9 шийдтэй.

A2. $\triangle AME \sim \triangle CMB$ ба төсөөгийн коэффициент нь $\frac{1}{2}$ байна.

Иймд $\triangle AME$ гурвалжны өндөр нь $\frac{1}{3}$ юм. $S_{\triangle AME} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}) = \frac{1}{12}$



Адилхнаар $S_{\triangle CFN} = \frac{1}{12}$ болно. Мөн $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}$.
 $S_{MNEFDE} = S_{ABCD} - S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AME} - S_{\triangle CFN} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$.

Хариу: $\frac{1}{3}$

А3. Бүх таван оронтой тоо 1-д хуваагдах нь ойлгомжтой. Хэрэв тоо 2 ба 5 -д хуваагдаж байвал тэр тоо 0-ээр төгсөнө. Иймд $e = 0$ ба бусад цифрүүд нь 0-ээс ялгаатай байна гэсэн үг юм.

Бүх цифрүүд нь ялгаатай ба хамгийн бага таван оронтой тоо олох гэж байгаа билээ. Энэ нь $a \geq 1; b \geq 2; c \geq 3$ гэсэн үг юм. Тэгвэл уг тоог $\overline{123d0}$ хэлбэртэй хайя.

4-д хуваагдаж байхын тулд $\overline{d0}$ тоо 4-д хуваагдаж байх ёстой. Эндээс d нь тэгш тоо байна. 3-д хуваагдахын тулд $1+2+3+d+0 = (6+d):3$ байна. Дээрх нөхцлийг тооцвол $d = 6$ болно.

Хариу: 12360

В1. $5a - ab = 9b^2 \Rightarrow a(5 - b) = (3b)^2$ болно. Тэгшитгэлийн баруун тал нь эерэг тоо тул зүүн талаас $5 - b > 0 \Rightarrow b < 5$ болно. Иймд $b \in \{1, 2, 3, 4\}$ юм.

Хэрэв $b = 1$ бол $a(5 - 1) = (3)^2 = 9 \Rightarrow a = \frac{9}{4}$ болж шийд биш.

Хэрэв $b = 2$ бол $a(5 - 2) = (3 \cdot 2)^2 = 36 \Rightarrow a = 12$ болно.

Хэрэв $b = 3$ бол $a(5 - 3) = (3 \cdot 3)^2 = 81 \Rightarrow a = \frac{81}{2}$ болж шийд биш.

Хэрэв $b = 4$ бол $a(5 - 4) = (3 \cdot 4)^2 = 144 \Rightarrow a = 144$ болно.

Хариу: $a = 12, b = 2$ ба $a = 144, b = 4$ гэсэн 2 шийдтэй.

В2. $a = u \cdot n^2; b = s \cdot m^2; c = l \cdot k^2$ гэс. Эцд u, s, l - натурал тоонууд юм.

$ab = u \cdot s \cdot n^2 \cdot m^2$ - квадрат тоо тул $u \cdot s$ - квадрат хамгийн бага тоо байх ёстой тул $u = s$.

Үүнтэй адилаар бодоход $u = s = l$. Эндээс $a + b + c = u(n^2 + m^2 + k^2) \geq 2(1^2 + 2^2 + 3^2) = 28$.

Хариу: $a = 2; b = 8; c = 18$ үед $a + b + c = 28$ болно.

В3. Тус олонлогуудыг A, B, C гээ. Тэгвэл бодлогын нөхцөл ёсоор $|A| = |B| = |C| = 10, |A \cap B| = 19, |A \cap C| = 19, |B \cap C| = 19$ болно. Хоёр олонлогийн хувьд нэгтгэн зайлуулах зарчмаар $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 1$ юм. Ижилхнээр аль ч хоёр олонлогийн огтлолцол элементтэй. ө.х:

$|A \cap B| = 1, |A \cap C| = 1, |B \cap C| = 1$ болно. Эндээс $|A \cap B \cap C| \leq 1$ байх нь ээ.

Тэгвэл дараах хоёр тохиолдол байна. Үүнд:

А) $|A \cap B \cap C| = 0$ байх үед

Нэгтгэн зайлуулах зарчмаар

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A \cup B \cup C| = 10 + 10 + 10 - 1 - 1 - 1 + 0 = 27 \text{ байна.}$$

Б) $|A \cap B \cap C| = 1$ байх үед нэгтгэн зайлуулах зарчмаар

$$|A \cup B \cup C| = 10 + 10 + 10 - 1 - 1 - 1 + 1 = 28 \text{ байна.}$$

Хариу: 27 эсвэл 28 элементтэй.

2.8 ММО-50, Дунд ангийн багш

Ц.Дандорж (МУИС)

I өдрийн бодлого

A1. Дараах чанар бүхий $k \in \mathbb{N}$ тоо олдохыг үзүүл. өгсөн $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд $m|a^n + b^n + c^n - d^n - e^n - f^n$, $1 \leq n \leq k$ бол $\forall n \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд $m|a^n + b^n + c^n - d^n - e^n - f^n$.

A2. $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_i \geq 0$, $i = \overline{0, n}$ ба $x = 1$ үед $P(x) \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1$ бол $0 < x$ байх x бүрийн хувьд $P(x) \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1$ гэж батал.

A3. $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$, n -т нь дараах нөхцөлүүдийг хангана.

1) $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 50$

2) $\forall n$ -т $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{N}^n$ -ийн хувьд $mb_i = c_i^{a_i}$, $i = \overline{1, n}$ байх $m \in \mathbb{N}$ ба $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{N}^n$ оршин байдаг бол $n \leq 16$ гэж батал. $n = 16$ үед бодлогын нөхцөлүүдийг хангах ялгаатай n -т $(a_1, \dots, a_n)$ -үүдийн тоог ол.

II өдрийн бодлого

B1. $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ ба $y = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$ нь эерэг бодит тоо x, y -ийн 10-тын тооллолын бичлэгүүд байг. $x \in \mathbb{Q}$ ба $\forall n \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд $b_n = a_{2^n}$ бол $y \in \mathbb{Q}$ гэж батал.

B2. $P(x), Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $a_n = n! + n$ байг. $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{P(a_n)}{Q(a_n)} \in \mathbb{Z}$ бол $Q(n) \neq 0$ байх $n \in \mathbb{N}$ бүрийн хувьд $\frac{P(n)}{Q(n)} \in \mathbb{Z}$ гэж батал.

B3. Нэгэн цагаан толгой a, b, c гурван үсэгтэй. Энэ үсгүүдийн дурын дарааллыг үт гэдэг. 2-оос багагүй урттай зарим үгийг **хорио** гэдэг. Хорио агуулаагүй үгийг **сайн** үт гэе. Хорионы үгүүдийн урт нь бүгд ялгаатай бол l урттай сайн үгийн тоо 2^l -ээс багагүй гэж батал.

Бодолт.

A1. $S_n = a^n + b^n + c^n + d^n + e^n + f^n$, $n \geq 1$ гэж тэмдэглэе.

$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)(x-f)$ олон гишүүнтийг авч үзье.

$P(x) = x^6 + \sigma_1 x^5 + \sigma_2 x^4 + \sigma_3 x^3 + \sigma_4 x^2 + \sigma_5 x + \sigma_6$ болог. Энд $\sigma_6 = abcdef$.

$$\left. \begin{aligned} P(a) &= a^6 + \sigma_1 a^5 + \dots + \sigma_5 a + \sigma_6 = 0 \\ P(b) &= b^6 + \sigma_1 b^5 + \dots + \sigma_5 b + \sigma_6 = 0 \\ P(c) &= c^6 + \sigma_1 c^5 + \dots + \sigma_5 c + \sigma_6 = 0 \\ P(d) &= d^6 + \sigma_1 d^5 + \dots + \sigma_5 d + \sigma_6 = 0 \\ P(e) &= e^6 + \sigma_1 e^5 + \dots + \sigma_5 e + \sigma_6 = 0 \\ P(f) &= f^6 + \sigma_1 f^5 + \dots + \sigma_5 f + \sigma_6 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Тэнцэтгэлүүд гарах бөгөөд эхний гурвыг $+1$ -ээр, сүүлийн гурвыг -1 -ээр үржээд нэмбэл $S_6 + \sigma_1 S_5 + \sigma_2 S_4 + \sigma_3 S_3 + \sigma_4 S_2 + \sigma_5 S_1 = 0$ болно. Эндээс $m|S_i$, $1 \leq i \leq 5$ бол $m|S_6$ болно.

Одоо (1)-д $P(x) \cdot x^n$, $x = a, b, c, d, e, f$ бичвэл

$$S_{n+6} + \sigma_1 S_{n+5} + \sigma_2 S_{n+4} + \sigma_3 S_{n+3} + \sigma_4 S_{n+2} + \sigma_5 S_{n+1} + \sigma_6 S_n = 0$$

тэнцэтгэл гарна. Иймд хэрэв $m|S_{n+i}$, $0 \leq i \leq 5$ бол $m|S_{n+6}$ болно. Өөрөөр хэлбэл $k = 5$ байхад бодлогын нөхцөлийг хангаж байна.

$$\text{A2. } P(x) \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) \left(a_n \cdot \frac{1}{x^n} + a_{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{1}{x} + a_0 \right) \geq$$

$$\geq (a_n + a_{n-1} + \dots + a_0)^2 = P(1) \cdot P(1) \geq 1$$

болно. Тэнцэлдээ

$$\frac{a_n x^n}{a_n \cdot \frac{1}{x_n}} = \frac{a_{n-1} x^{n-1}}{a_{n-1} \cdot \frac{1}{x_{n-1}}} = \dots = \frac{a_1 x}{a_1 \cdot \frac{1}{x}} = \frac{a_0}{a_0} = 1 \Rightarrow x = 1$$

үед хүрнэ.

(II арга). Индукц ашиглаж болно.

A3. a_i -үүд харилцан анхны гэж батлая. $a_i = ud, a_j = vd$, $d > 1$ гээ. $b_i = 1, b_j = 2$ байг. 2)-оор $\exists m, c_i, c_j$, $m \cdot b_i = c_i^{a_i}$, $m b_j = c_j^{a_j}$,

$m = (c_i^u)^d$, $2m = (c_j^v)^d$, $2c_i^{ud} = c_j^{vd}$ -д 2-ын илтгэгчийг авч үзвэл зөрчилд хүргэнэ.

1, 2, ..., 50 тоонууд дунд 2, 3, ..., 43, 47 гэсэн 15 ширхэг анхны тоо байгаа. Хэрэв $n \geq 17$ бол $\exists a_i, a_j$ хувьд ижил анхны тоонд хуваагдах болно, ө.х. $(a_i, a_j) \neq 1$ гэсэн үг. Тиймээс $n \leq 16$ байна.

$n = 16$ байг. Одоо $\forall i \neq j$ хувьд $(a_i, a_j) = 1$ бол бодлогын нөхцөлийг хангах $m, (c_1, \dots, c_{16}) \in \mathbb{N}^{16}$ олдохыг баталъя. $A = a_1 a_2 \dots a_{16}$ ба $m = b_1^{\frac{A}{a_1} x} b_2^{\frac{A}{a_2} x} \dots b_{16}^{\frac{A}{a_{16}} x}$ гэвэл

$$mb_i = b_1^{\frac{A}{a_1} x} b_2^{\frac{A}{a_2} x} \dots b_i^{\frac{A}{a_i} x + 1} \dots b_{16}^{\frac{A}{a_{16}} x} \quad (*)$$

болно.

$$\begin{cases} \frac{A}{a_1} x + 1 \equiv 0(a_1) \\ \frac{A}{a_2} x + 1 \equiv 0(a_2) \\ \dots \\ \frac{A}{a_{16}} x + 1 \equiv 0(a_{16}) \end{cases}$$

системийн хувьд $\left(\frac{A}{a_i}, a_i\right) = 1$ байх учир үлдэгдлийн тухай хятадын теоремоор шийдгэй. Иймд (*)-оос $mb_i = c_i^{a_i}$ байх $c_i \in \mathbb{N}$ олдоно. $i = 1, 2, \dots, 16$.

Ямаг нэг a_j -ийн хувьд 2 анхны тоон хуваагчтай бол өмнөхтэй ижлээр харилцан анхны биш хос тоо олдоход хүрнэ. Иймд бүгд 1, 1 анхны тоон хуваагчтай. Энэ нөхцөлийг хангах тоонуудаас бичвэл

$\{2, 4, 8, 16, 32\}, \{3, 9, 27\}, \{5, 25\}, \{7, 49\}, \{11\}, \dots, \{43\}, \{47\}$ байна. Бидний олох ёстой тоо $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 60$ ширхэг байна.

B1. $x \in \mathbb{Q}$ тул $\exists T \in \mathbb{N}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ -ийн хувьд $a_{n+T} = a_n$, $\forall n \geq N$ байна. $a_n = a_{n+2T} = \dots = a_{n+kT}$, $\forall k$, $n \geq N$ болно. $b_n = a_{2^n} = a_{2^n + kT}$ тэнцэл биелэнэ. $T = 2^s \cdot T_0$, $(T_0, 2) = 1$ бичье. $k = 2^{n-s} \cdot m$ сонговол $b_n = a_{2^n} = a_{2^n(1+mT_0)}$ болно, $(\forall n \geq N)$

$$(T_0, 2) = 1 \text{ тул } 2^{\varphi(T_0)} \equiv 1(T_0) \Rightarrow \frac{2^{\varphi(T_0)} - 1}{T_0} \in \mathbb{N} \text{ учир}$$

$$m = \frac{2^{\varphi(T_0)} - 1}{T_0} \text{ гэж сонговол } b_n = a_{2^n(1 + \frac{2^{\varphi(T_0)} - 1}{T_0} \cdot T_0)} =$$

$= a_{2n+\varphi(T_0)} = b_{n+\varphi(T_0)}$ болж $\{b_n\}$ дараалал үетэй буюу $y \in \mathbb{Q}$ болно ($\forall n \geq N$ байгаа).

B2. $\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, $A(x), R(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $R(x) \equiv 0$ эсвэл

$\deg R < \deg Q$. $A(x) = \frac{B(x)}{b}$, $B(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $b \in \mathbb{N}$ гэж үзэж чадна.

$\exists x : R(x) \neq 0$ гэж үзье. Тэгвэл $\exists M > 0$, $\forall x : |x| > M \Rightarrow R(x) \neq 0$ байна.

$\forall k \in \mathbb{Z}$ -ийн хувьд эсвэл $A(k) = 0$ эсвэл $|A(k)| \geq \frac{1}{b}$. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{R(x)}{Q(x)} =$

$= 0$ учир $|k|$ хүрэлцэхүйц их бол $0 < |R(k)/Q(k)| < \frac{1}{b}$ байх тул

n хүрэлцэхүйц их бол $\frac{P(a_n)}{Q(a_n)}$ бүхэл тоо байж үл чадна. Иймд

$R(x) \equiv 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B(x)}{b}$ ($Q(x) \neq 0$ үед). $n \in \mathbb{Z}$ байг. $n \equiv a_k$.

$(\text{mod } b)$ байх $k \in \mathbb{Z}$ олдоно: $k \geq b$ бол $k! \equiv 0(b)$ байх тул $a_k =$
 $= k! + k \equiv n(b) \equiv k \equiv n(b)$ гэтэл $B(a_k)/b \in \mathbb{Z}$.

Эндээс $B(n) \equiv B(a_k) \equiv 0(b)$ буюу $\frac{P(n)}{Q(n)} \in \mathbb{Z}$.

B3. I нь хорионы үгүүдийн уртын олонлог ($I \subseteq \mathbb{N}$). a_l -ээр l урттай сайн үгийн тоог тэмдэглэе.

$a_1 = 3$ байна. $a_0 = 1$ гэж авъя. Ямар нэг хорионы үг агуулсан үгийг муу үг гээ.

Лемма 1. $a_l \geq 3a_{l-1} - \sum_{c_i \in I} a_{l-l_i}$ (*)

Баталгаа l урттай бүх сайн үгнүүд нь $l-1$ урттай сайн үгийн баруун талд a, b, c -ийн аль нэгийг нэмж бичихэд гарах үгнүүдийн олонлогт орно. Ингэж нэмж бичихэд гарах $3 \cdot a_{l-1}$ үгийн зарим нь l урттай муу үг ч байж болно. Одоо эдний (l урттай муу үг) тоог үнэлэе. Ингэж гарсан муу үгэнд хорионы үг зөвхөн түүний төгсгөлд л оршиж болно (сүүлчийн l_i үсэг нь хорионы үг, харин эхний $l-l_i$ үсэг нь сайн үг үүсгэж байх), ө.х. ийм муу үгийн тоо $a_{l-l_i} \cdot 1$ л байна (l_i урттай хорионы үг ганц). Лемма 1 батлагдав.

Лемма 2. $a_n \geq 2a_{n-1}$.

Баталгаа.

Индукцээр баталъя. $a_1 = 3 \geq 2 \cdot a_0 = 2$. $\forall k = \overline{2, n} : a_k \geq 2a_{k-1}$

гэж үзээд индукцийн шилжилтийг баталъя.

$$\forall k = 2, n : a_k \geq 2a_{k-1} \Rightarrow a_k \leq \frac{a_n}{2^{n-k}} \text{ гэж гарна. } (*) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow a_{n+1} \geq 3a_n - a_{n-1} - \dots - a_1 - 1 \geq \\ &\geq 3a_n - \frac{a_n}{2} - \frac{a_n}{2^2} - \frac{a_n}{2^3} - \dots - \frac{a_n}{2^{n-1}} - \frac{a_n}{2^n} = \\ &= a_n \left(3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{2^n} \right) \geq 2a_n \end{aligned}$$

болж Лемма 2 батлагдав.

Эцэст нь Лемма 1 ба Лемма 2-оос

$$a_{n+1} \geq 2a_n \geq 2^2 a_{n-1} \geq \dots \geq 2^n a_1 > 2^{n+1} \text{ болно.}$$

II арга (Б.Ганбилэг)

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\geq 3a_n - (a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 + 1) \geq \\ &\geq 3(3a_{n-1} - (a_{n-2} + a_{n-3} + \dots + a_1 + 1)) - (a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 + 1) = \\ &= 8a_{n-1} - 4 \cdot (a_{n-2} + a_{n-3} + \dots + a_1 + 1) \geq \dots \geq \alpha_k \cdot a_{n+1-k} - \\ &- \beta_k (a_{n-k} + \dots + a_1 + 1) \geq \\ &\geq \alpha_k (3a_{n-k} - (a_{n-k-1} + \dots + a_1 + 1)) - \beta_k (a_{n-k} + \dots + a_1 + 1) = \\ &= (3\alpha_k - \beta_k) a_{n-k} - (\alpha_k + \beta_k) (a_{n-k-1} + \dots + a_1 + 1) \text{ буураад гарч} \\ &\text{ирэх коэффициентийг тооцвол} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha_{k+1} = 3\alpha_k - \beta_k & \alpha_1 = 3 & \alpha_2 = 8 \\ \beta_{k+1} = \alpha_k + \beta_k & \beta_1 = 1 & \beta_2 = 4 \end{cases} \text{ болно}$$

$$\beta_k = 3\alpha_k - \alpha_{k+1} \Rightarrow 3\alpha_{k+1} - \alpha_{k+2} = \alpha_k + 3\alpha_k - \alpha_{k+1}$$

$$\alpha_{k+2} = 4\alpha_{k+1} - 4\alpha_k \text{ үүний ерөнхий гингүүний томъёог олбол}$$

$$\alpha_n = 2^{n-1} \cdot (n+2)$$

болно. Эндээс $\beta_n = 2^{n-1} \cdot n$ гэж гарна. $a_2 \geq 8$ гэж үзэж болно.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\geq a_{n-1} \cdot a_2 - \beta_{n-1} \cdot (a_1 + 1) \geq 2^{n-2} (n+1) \cdot 8 - 2^{n-2} (n-1) \cdot \\ &\cdot (3+1) = 2^{n+1} (n+1) - 2^n (n-1) = 2^n (n+3) \Rightarrow a_n \geq 2^{n-1} \cdot (n+2) \\ &\text{гэж өмнөх үр дүнг илүү сайжруулж болно.} \end{aligned}$$

3 ММО-50, IV даваа

3.1 ММО-50, VIII анги

Н.Аргилсан (МУВИС)

I өдрийн бодлого

A1 (М. Баасай) x, y, z дурын тоонууд бол $(x-y)^9 + (y-z)^9 + (z-x)^9$ ба $(x-y)(y-z)(z-x)$ тоонууд нэгэн ижил тэмдэгтэй гэж батал. (Өөрөөр хэлбэл хоёулаа эерэг эсвэл хоёулаа сөрөг байна)

A2 (Н. Аргилсан) ABC зөв гурвалжны AB тал дээр дурын M цэг авч AMN зөв гурвалжин байгуулав. BN шулуун AC шулуунтай D цэгт огтлолцоно. AN шулуун CM шулуунтай K цэгт огтлолцдог бол $\angle ADK$ -г ол.

A3 (Т. Гансүх) a, b, c бодит тоонуудын хувьд $a < b < c$ ба

$$a + b + c = 6, ab + bc + ca = 9$$

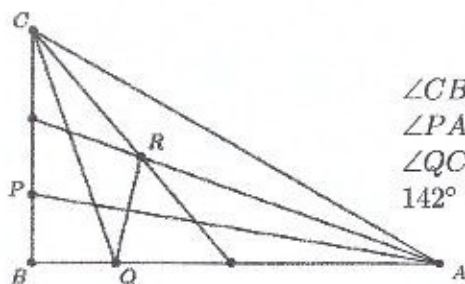
бол $a^2 + b^2 + c^2 - a - 4b - 7c + 15 \leq 0$ тэнцэтгэлбишийг батал.

II өдрийн бодлого

B1 (Н. Аргилсан) a, b, c бүхэл тоонууд ба $a < b < c$ бол $a^2 + b^2 - c^2 = n$ байх n тоог квадратлаг гэе. Тэгвэл 1-ээс багагүй, 2014-өөс хэтрэхгүй квадратлаг тоонуудын тоог ол.

B2 (Н. Аргилсан) $\{2, 3, \dots, 50\}$ олонлогийн сэлгэмлийг $(a_1, a_2, \dots, a_{49})$ гэе. $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_{49} = a_1 + a_2 + \dots + a_{49}$ гэж тэмдэглэвэл аль ч гишүүн нь 3-д хуваагдахгүй байх $S_1, S_2, \dots, S_{49}$ дараалал хичнээн байх вэ?

B3 (Ч. Гантөмөр)



$\angle CBA = 90^\circ, \angle BAP = \angle PAR = \angle RAC$ ба $\angle BCQ = \angle QCR = \angle RCA, \angle QRC = 142^\circ$ бол $\angle BAC$ -г ол.

Бодолт:

A1. $n > 1$ сондгой натурал тоо ба $a + b + c = 0$ байх a, b, c бодит тоонуудын хувьд abc ба $a^n + b^n + c^n$ тоонууд ижил тэмдэгтэй гэж баталж болно. (Тэгвэл $n = 9, a = x - y, b = y - z, c = z - x$ гэж авахад өгөгдсөн бодлого батлагдана)

Юуны өмнө дараах чанаруудыг дурдая. Үүнд:

Чанар (а). $x, y > 0, k > 1$ бол $x^k + y^k < (x + y)^k$

Чанар (б). $x, y < 0, k > 1$ ба k сондгой натурал тоо бол $x^k + y^k > (x + y)^k$ тэнцэтгэл биш биелэнэ. (Эдгээр чанарыг бие дааж батлахыг зөвлөө)

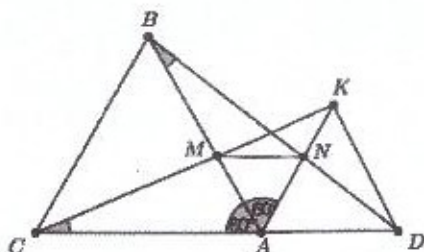
Эхлээд a, b, c -ийн аль нэг нь тэгтэй тэнцүү, тухайлбал $a = 0$ байсан бол $abc = 0$ ба $a + b + c = b + c = 0$ гэдгээс $b = -c$ ба $a^n + b^n + c^n = = (-c)^n + c^n = 0$ болж бодлогын дүгнэлт үнэн. Иймд бид $abc \neq 0$ байх тохиолдлыг сонирхоё.

Дараа нь $a \geq b \geq c$ гэж үзэж болно. $a + b + c = 0$ гэдгээс $a > 0$ ба $c < 0$ байх нь ойлгомжтой.

1) $b > 0$ болог. Тэгвэл $abc < 0$ ба $a^n + b^n + c^n < (a + b)^n + c^n = = (-c)^n + c^n = 0$ болов. (Чанар (а))

2) $b < 0$ болог. Тэгвэл $abc > 0$ ба $a^n + b^n + c^n > a^n + (b + c)^n = = a^n + (-a)^n = 0$ болж бодлого бүрэн бодогдов. (Чанар (б))

A2.



$\angle BAC = 60^\circ =$
 $\angle MAN \Rightarrow \angle NAD = 60^\circ.$
 $(\triangle ABC, \triangle MAN \text{ зөв}$
 учир).

$AC = AB, AM =$
 $AN, \angle CAM =$
 $\angle MAN = 60^\circ \Rightarrow$
 $\triangle CMA = \triangle BAN$ болох
 тул $\angle KCA = \angle DBA$
 болно.

Мөн $\angle KCA = \angle DBA, \angle CAK = \angle BAD = 120^\circ, AC = AB$ болох учир гурвалжны тэнцүүгийн шинжээр $\triangle CAK = \triangle BAD$ болно. Эндээс $AK = AD$ буюу $\angle KAD = 60^\circ$ тул $\triangle AKD$ нь зөв гурвалжин болж $\angle KDA = 60^\circ$ болно.

A3. Өгсөн нөхцлөөс $a < 2 < c$ байх нь илэрхий.

$0 = 9 - ab - ac - bc = 9 + a^2 - 2a(b+c) - (a-b)(a-c) = 9 + a^2 - 2a(6-a) - (a-b)(a-c) = 3(a-1)(a-3) - (a-b)(a-c)$ болно. Үүнтэй яг ижлээр $3(a-1)(a-3) - (a-b)(a-c) = 3(b-1)(b-3) + (b-a)(b-c) = 3(c-1)(c-3) - (c-a)(c-b) = 0$ болно.

$a < b < c$ гэдгээс $(a-b)(a-c) > 0$, $(b-c)(b-a) < 0$, $(c-a)(c-b) > 0$ тул $(a-1)(a-3) > 0$, $(b-1)(b-3) < 0$, $(c-1)(c-3) > 0$ гэсэн үг. Иймд $a < 1 < b < 3 < c$ гэж гарна. Эндээс $(1-a)(1-b) < 0$ гэдгийг ашиглавал $0 = 9 - ab - ac - bc = (c-1)(c-4) - (1-a)(1-b)$ гэдгээс $(c-1)(c-4) < 0$ тул $c < 4$ болно. Үүнтэй адилаар $(3-b)(3-c) < 0$ гэдгийг ашиглавал $0 = 9 - ab - ac - bc = a(a-3) - (3-b)(3-c)$ гэдгээс $a(a-3) < 0$ тул $a > 0$ болно. Иймд $0 < a < 1 < b < 3 < c < 4$ болох тул $a(1-a) + (b-1)(3-b) + (c-3)(4-c) \geq 0$ гэдгээс батлах тэнцэтгэлбиш гарна. Тэнцэтгэлбишийн тэнцэлдээ хүрэх нөхцөл байхгүй. (Бодлого дээр батлах тэнцэтгэлбишийн тэмдгийг эсрэгээр өгсөнд хүлцэл өчье.)

B1. $(3n)^2 + (4n)^2 = (5n)^2$ тэнцлийг санавал $(3n)^2 + (4n-1)^2 - (5n-1)^2 = 2n$ болон $(3n+2)^2 + (4n)^2 - (5n+1)^2 = 2n+3$ тэнцэтгэлүүдийг гарган авч болно.

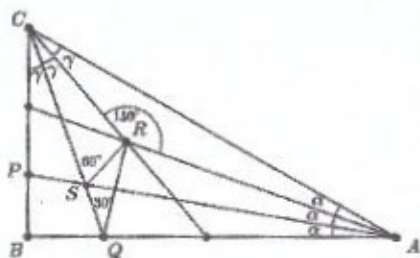
(а). Квадратлаг тоо нь сондгой байг. $(3n+2)^2 + (4n)^2 - (5n+1)^2 = 2n+3$ тэнцэтгэлийг авч үзье. $a = 3n+2$, $b = 4n$, $c = 5n+1$ гэе. $n \geq 3$ үед $a < b < c$ харьцаа биелнэ. Өөрөөр хэлбэл $m \geq 9$ байх сондгой тоо бүрийг $m = 2n+3 = a^2 + b^2 - c^2$ хэлбэрт дээрх байдлаар тавьж байна. Одоо 1,3,5,7-г тавьж болохыг харуулъя. $1 = 4^2 + 7^2 - 8^2$, $3 = 4^2 + 6^2 - 7^2$, $5 = 4^2 + 5^2 - 6^2$, $7 = 10^2 + 14^2 - 17^2$. Иймд бүх сондгой тоо нь квадратлаг тоо байна.

(б). Квадратлаг тоо нь тэгш байг. $(3n)^2 + (4n-1)^2 - (5n-1)^2 = 2n$ тэнцэтгэлийг авч үзье. $a = 3n$, $b = 4n-1$, $c = 5n-1$ гэе. $n \geq 2$ үед $a < b < c$ харьцаа биелэхийг хялбархан харж болно. $n = 1$ үед $2 = 5^2 + 11^2 - 12^2$ гэж бичиж болох тул бүх тэгш тоо нь квадратлаг тоо байна. Иймд дээрх 2 тохиолдлоос 1-2014 хүртэлх бүх тоо нь квадратлаг тоо болох нь харагдлаа.

B2. 3-д хуваагддаг тоонуудын олонлогийг A_0 , 3-д хуваахад 1 үлдэгдэл өгдөг тоонуудын олонлогийн A_1 , 3-д хуваахад 2 үлддэг

тоонуудын олонлогийг A_2 гээ. Тэгвэл $2, 3, \dots, 49 = \{A_0 \cup A_1 \cup A_2\}$ байна. A олонлогийн элементийн тоог $|A|$ гэж тэмдэглэвэл $|A_0| = 16, |A_1| = 16, |A_2| = 17$ байна. A_0 -ийн элементийг 0-ээр, A_1 -ийн элементийг 1-ээр, A_2 -ийн элементийг 2-оор тус тус тэмдэглэе. S_i нийлбэр дээр $3k$ хэлбэрийн тоог нэмэхэд 3-д өгөх үлдэгдэл нь S_i -тэй адил тул 49 байран дээр 1 ба 2 элементүүдийг 3-т хуваагдахгүй байхаар байрлуулахад үлдсэн зайн дээрээ 0-үүдээ байрлуулахад хангалттай. $16 + 17 = 33$ ширхэг тоог $2, 2, 1, 2, 1, \dots, 2, 1$ гэсэн ганц л дарааллаар байрлуулах боломжтой. $3 \nmid S_1$ тул эхний байранд 0 байрлахгүй. Иймд үлдсэн 48 байрнаас 0-үүдээ эхлээд байрлуулбал 48 байрнаас 16-г сонгох боломжийн тоо $\frac{48!}{32!16!}$ болохыг хялбархан харж болно. Мөн 3-т хуваагдах тоонууд нь хоорондоо байраа сэлгэхэд ялгаатай боломжууд үүсэх тул байраа сэлгэх боломжийн тоо $16!$ байна. Иймд үржих дүрэм ёсоор 3-т хуваагдах тоонуудыг байрлуулах боломжийн тоо $\frac{48!}{32!16!} \cdot 16! = \frac{48!}{32!}$ болно. $2, 2, 1, 2, 1, \dots, 2, 1$ дарааллаар мөн хоорондоо байр сэлгэж ялгаатай боломж үүсгэх нийт боломжийн тоо нь $16! \cdot 17!$ тул үржих дүрмээр бодлогын хариу нь: $\frac{48!}{32!} \cdot 16! \cdot 17!$

В3. (Өмнөговь аймаг, Цогтцэций сум 8а ангийн сурагч Э.Билэгжаргалын бодолт)



$\angle BAP = \angle PAR = \angle RAC = \alpha$ гээ. Эндээс $\angle BAC = 3\alpha$ болно. $\angle BCQ = \angle QCR = \angle RCA = \gamma$ гээ. Эндээс $\angle ACB = 3\gamma$ болно. $\angle ABC = 90^\circ \Rightarrow \angle ACB + \angle BAC = 90^\circ \Rightarrow \alpha + \gamma = 30^\circ$ болно.

$\triangle ACR : \angle ARC = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 150^\circ$, $CQ \cap AP = S$ гээ. Өөрөөр хэлбэл CQ ба AP хэрчмүүдийн огтлолцлын цэгийг S гээ.

$\triangle ACS : \angle ASC = 180^\circ - 2(\alpha + \gamma) = 120^\circ$, $\triangle ASC : AR, CR$ хэрчмүүд биссектрисс бол S цэгийг R цэгтэй холбоход SR хэрчим $\triangle ASC$ -ийн биссектрисс болно. R цэг нь биссектриссүүдийн

огтлолцлын цэг байна. Эндээс $\angle ASR = \angle CSR = 120^\circ : 2 = 60^\circ \Rightarrow \angle ASQ = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ, AS = AS, \angle SAR = \angle SAQ, \angle ASR = \angle ASQ \Rightarrow \triangle ASR = \triangle ASQ$ боллоо. $SQ = SR \Rightarrow \triangle SQR$ адил хажуут гурвалжин боллоо. Иймд суурийн өнцгүүд тэнцүү гэдгээс $\angle SQR = \angle SRQ = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ. \triangle CRQ : \gamma = 180^\circ - (142^\circ + 30^\circ) = 8^\circ \Rightarrow \alpha + \gamma = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 22^\circ. \angle BAC = 3\alpha = 66^\circ.$

3.2 ММО-50, IX анги

Т.Гансүх (МУВИС)

I өдрийн бодлого

A1 (Н. Аргилсан) $\frac{3}{2014}$ тоог $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}; p, q \in \mathbb{N}$ хэлбэрт хичээн янзаар бичиж болох вэ?

A2 (Т. Гансүх) $a, b, c \in [\frac{1}{3}; 3]$ байх тоонуудын хувьд

$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{7}{5}$ тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

A3 (Н. Аргилсан) Тойрогт багтсан $ABCD$ гүдгэр 4 өнцөгтийн диагоналиуд нь перпендикуляр бөгөөд E цэгт огтлолцоно. E -г дайрсан AD -д перпендикуляр шулуун BC талыг N цэгээр, E -г дайрсан BC -д перпендикуляр шулуун AD талыг M цэгээр огтолно. Хэрэв $2MN = AB + CD$ тэнцэтгэл биелдэг бол $ABCD$ нь квадрат болохыг батал.

II өдрийн бодлого

B1 (Т. Гансүх) Зарим натурал тоонууд 2 болон түүнээс олон дараалсан натурал тоонуудын нийлбэрт тавигддаг. Жишээ нь: $24=7+8+9; 51=25+26$ г.м. Тэгвэл ийм хэлбэрт тавигддаггүй 2014-өөс хэтрэхгүй бүх тоог ол.

B2 (Т. Гансүх) 3×3 хүснэгтийн нүд бүрийг улаан, хөх өнгийн аль нэгээр будаж болно. Уг хүснэгтийг 2×2 хэмжээтэй дан улаан

нүднээс тогтох квадрат агуулаагүй байхаар будах боломжийн тоог ол.

ВЗ (Ч. Гантөмөр) KLM гурвалжны $KM = 6$ ба LP медиан татав. P цэгээс KL , LM талуудад буусан перпендикулярин сууриуд P_1, P_2 бөгөөд $PP_1 : PP_2 = 1 : 2$ бол KLM гурвалжны талбай хамгийн их байхад LP медианы уртыг ол.

Бодолт:

$$A1. \frac{3}{2014} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \Rightarrow 3pq = 2014(p+q) = 2 \cdot 19 \cdot 53(p+q) \text{ болно.}$$

(1). $2 \cdot 19 \cdot 53 | p$ байг. $p = 2 \cdot 19 \cdot 53r$ гэе. Үүнийг орлуулбал $3rq = 2 \cdot 19 \cdot 53r + q \Rightarrow q = \frac{2 \cdot 19 \cdot 53r}{3r-1}$ байх ёстой. $q \in \mathbb{N}$ учир $3r-1 | 2 \cdot 19 \cdot 53r$, $(r, 3r-1) = 1 \Rightarrow 3r-1$ нь $2, 38, 53, 1007$ утгуудыг авна. Учир нь $3r-1$ хэлбэрт тавигддаг. Эндээс $3r-1 = 2 \Rightarrow r = 1$, $3r-1 = 38 \Rightarrow r = 13$, $3r-1 = 53 \Rightarrow r = 18$, $3r-1 = 1007 \Rightarrow r = 336$ гэж тус тус олдох ба (p, q) хосууд $(2014, 1007)$, $(26182, 689)$, $(36252, 684)$, $(676704, 672)$ байна.

(2). $2 \cdot 19 | p$, $53 \nmid p$ байг. $p = 2 \cdot 19 \cdot r$ байна. Үүнийг орлуулбал $3 \cdot 2 \cdot 19 \cdot rq = 2 \cdot 19 \cdot 53(2 \cdot 19r + q)$, $q = 53s$ гэвэл $s = \frac{2 \cdot 19r}{3r-53}$, $(r, 3r-53) = 1 \Rightarrow 3r-53 | 2 \cdot 19r \Rightarrow 3r-53 = 1 \Rightarrow r = 18$, $3r-53 = 19 \Rightarrow r = 24$ гэсэн 2 шийд байна. Эндээс $(p, q) = (912; 2544)$, $(684; 36752)$.

(3). $2 \cdot 53 | p$, $19 \nmid p$ байг. $\Rightarrow p = 2 \cdot 53r$ болох ба $q = 19s$ байг. $s = \frac{2 \cdot 53r}{3r-19} \in \mathbb{N}$.

$3r-19 | 2 \cdot 53r$ гэдгээс $3r-19 = 2 \Rightarrow r = 7$, $3r-19 = 53 \Rightarrow r = 24$.
 $r = 7$ үед $p = 2 \cdot 7 \cdot 53$, $q = 7 \cdot 19 \cdot 53 \Rightarrow (p, q) = (742; 7049)$.
 $r = 24$ үед $p = 2 \cdot 24 \cdot 53$, $q = 19 \cdot 48 \Rightarrow (p, q) = (2544; 912)$.

(4). $19 \cdot 53 | p$, $2 \nmid p$ байг. $p = 19 \cdot 53r$ болох ба $q = 2s$ бол $s = \frac{19 \cdot 53r}{3r-2}$. Иймд $3r-2 | 19 \cdot 53r \Rightarrow 3r-2 = 1 \Rightarrow r = 1$; $3r-2 = 19 \Rightarrow r = 7$ ба эндээс $\Rightarrow (p, q) = (1007, 2014)$; $(7049, 742)$.

$$\text{Эндээс } \frac{3}{2014} = \frac{1}{2014} + \frac{1}{1007} = \frac{1}{26182} + \frac{1}{689} = \frac{1}{676704} + \frac{1}{672} = \frac{1}{36252} + \frac{1}{684} = \frac{1}{912} + \frac{1}{2544} = \frac{1}{7049} + \frac{1}{742} \text{ гэсэн 6 шийдтэй.}$$

A2. Цикл тэнцэтгэл биш учраас $c = \max(a, b, c)$ гэж үзэж болно. $a, b, c \in [\frac{1}{3}; 3]$ гэдгээс $\frac{c}{9} \leq a \leq c$ гэж гарна. Өгөгдсөн тэнцэтгэл биш дээр $x = \frac{7}{5} - \frac{b}{b+c}$ гэж орлуулбал батлах тэнцэтгэл биш

$$(1-x)a^2 + ((2-x)c - xb)a + (1-x)bc \geq 0$$

гэсэн a хувьсагчийн хувьд квадрат тэнцэтгэл бишид шилжинэ.

Хэрэв $1-x \leq 0$ буюу $c \geq \frac{3b}{2}$ бол квадрат функц нь доошоо харсан

парабол болох учраас зөвхөн $a = \frac{c}{9}$; $a = c$ гэсэн утгуудад шалгахад хангалттай. Хэрэв $a = \frac{c}{9}$ бол

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = \frac{c}{9b+c} + \frac{b}{b+c} + \frac{9}{10} = \frac{7}{5} + \frac{(3b-c)^2}{2(9b+c)(b+c)} \geq \frac{7}{5} \text{ болно. Хэрэв}$$

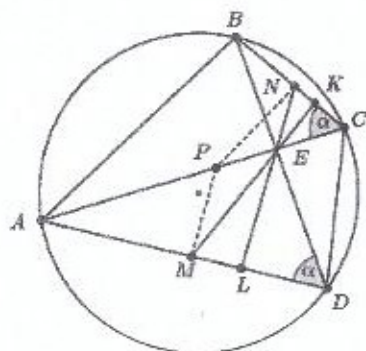
$a = c$ бол $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = \frac{c}{b+c} + \frac{b}{b+c} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ тул энэ тохиолдолд батлагдана. Нөгөө тохиолдолд буюу $1-x \geq 0$ буюу

$c \leq \frac{3b}{2}$ бол $(2-x)c - xb \geq (2-x)c - xc = 2(1-x)c \geq 0$ болно.

Иймд $(1-x)a^2 + ((2-x)c - xb)a + (1-x)bc \geq (1-x)(\frac{c}{9})^2 + ((2-x)c - xb)\frac{c}{9} + (1-x)bc \geq 0$ гэдгийг батлах ёстой болно. Гэтэл энэ

нь өмнөх тохиолдолдлын $a = \frac{c}{9}$ баталсантай адил тул бодлого бүрэн бодогдов. $(a, b, c) = (1, 3, \frac{1}{3}); (\frac{1}{3}, 1, 3); (3, \frac{1}{3}, 1)$; үед тэнцэлдээ хүрнэ.

A3.



$\angle BDA = \alpha$ гээ. Нэг нумд тулсан өнцгүүд тэнцүү учир $\angle BCA = \angle BDA = \alpha$ болно. $\angle KEC = 90^\circ - \alpha = \angle AEM \Rightarrow \angle MED = \alpha$ буюу EMD нь адил хажуут гурвалжин. Үүнтэй адилаар $AM = EM = MD$ болохыг харуулж болно. Өөрөөр хэлбэл M нь AD -ийн дундаж. Мөн өмнөхтэй адилаар N нь BC -ийн дундаж болохыг харж болно.

BD -ийн дундаж цэгийг P гээ. Эндээс NP нь $\triangle BCD$ -ы дундаж шугам болох тул $NP = \frac{1}{2}CD$. Үүнтэй адилаар $MP = \frac{1}{2}AB$ болно. $MN \leq NP + MP = \frac{1}{2}(CD + AB)$ тэнцэтгэл биш бислнэ. Хэрэв N, P, M цэгүүд нэг шулуун дээр орших бол тэнцэлдээ хүрэх буюу $MN = \frac{1}{2}(CD + AB)$ байна. Энэ үед $NP \parallel CD$ ба $MP \parallel AB$ гэдгээс $CD \parallel AB$. Өөрөөр хэлбэл тойрогт багтсан дөрвөн өнцөгтийн эсрэг талууд параллель учир энэ дөрвөн өнцөгт нь трапец болно.

В1. Эхлээд өгөгдсөн хэлбэртэй бичигддэг тоо нь $n = 2^k$ хэлбэртэй байж чадахгүйг харуулъя. $n = m + (m + 1) + \dots + (m + k) = \frac{(k + 1)(2m + k)}{2}$. Энд $k + 1$ болон $2m + k$ тоонууд нь тэгш сондгойгоороо ялгаатай тул нэг тоо нь 1-ээс их сондгой тоо байна. Энэ нь өгөгдсөн хэлбэртэй бичигддэг тоо нь $n = 2^k$ хэлбэртэй байж чадахгүйг харуулж байна. Одоо $n \neq 2^k$ үед уг тоо дараалсан натурал тоонуудын нийлбэрт ямагт тавигдахыг харуулъя. Тэгвэл n нь $n = 2^k l$ хэлбэртэй байх ба l нь 1-с их сондгой тоо. Хэрвээ

$MO = 2$) O цэг дээр төвтэй $R = 4$ радиустай тойрог болохыг хялбархан харж болно. (Жишээлбэл координатын арга ашиглаад). Иймд KLM гурвалжны талбай хамгийн их утгатай байх үед л L цэгийн геометр байр нь O цэгээс босгосон перпендикуляр шулуун дээр $OL' = 4$ байх L' цэг байх юм. (Зураг хар.) Энгийн тооцооллоор $L'P = \sqrt{41}$ болохыг харж болно.

3.3 ММО-50, X анги

Ч.Гантөмөр

I өдрийн бодлого

A1 (Г.Батнасан) Хавтгайд ялгаатай n цэг өгөгдөв. Эдгээр цэгүүдээс $\frac{\pi}{n}$ -с хэтрэхгүй өнцөг үүсгэх 3 цэг ямагт олддог гэж батал.

A2 (Т.Базар) $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн хувьд $\angle B = \angle C = 120^\circ$ ба $AB^2 + BC^2 + CD^2 = AD^2$ бол $ABCD$ дөрвөн өнцөгтөд тойрог багтааж болохыг батал.

A3 (У.Батзориг) $x_0 = a, x_1 = 2, x_n = 2x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} - x_{n-2} + 1$ бол $\forall n \in \mathbb{N}$ хувьд $2x_{3n} - 1$ тоо бүтэн квадрат байх бүх бүхэл a тоог ол.

II өдрийн бодлого

B1. (Т.Базар) $\{a_n\}_{n \geq 1}$ арифметик прогрессийн хувьд a_1^2, a_2^2, a_3^2 нь мөн өгөгдсөн прогрессийн гишүүд болдог бол энэ дарааллын бүх гишүүд бүхэл тоо гэж батал.

B2. (У.Батзориг) $a, b, c > 0$ бол

$$\frac{a^2(a^3 + b^3)}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^2(b^3 + c^3)}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^2(c^3 + a^3)}{c^2 + ca + a^2} \geq 2abc$$

тэнцэтгэлбиш биелнэ гэж батал.

B3. (Г.Мөнхбаяр) Тэнцүү R радиустай w_1, w_2 тойргууд 2 цэгт огтлолцоно. Эдгээр тойргийн төвүүдийг холбосон шулуун w_1 тойргийг A, C цэгт, w_2 тойргийг B, D цэгт огтлолно. (Энд B цэг

нь A, C цэгийн хооронд, C цэг нь B, D цэгийн хооронд оршино) w_1 тойргийг A цэгт, w_2 тойргийг D цэгт дотоод байдлаар шүргэх AD диаметртэй w_3 тойрог байгуулав. w_1 тойргийн C цэгт l_1 шулуун, w_2 тойргийн B цэгт l_2 шүргэгч шулуунуудыг тус тус татав. l_2 шулуун w_3 тойргийг K цэгт огтолно. K цэгээс w_1 тойрог руу татсан шүргэгч шулуунууд l_1 шулууныг P, Q цэгүүдээр огтлох бол PQ хэрчмийн уртыг ол.

Бодолт:

A1. (Бодолт 1.) Хэрэв эдгээр цэгүүдийн 3 нь нэг шулуун дээр оршдог бол бодлого илэрхий. (Эдгээр 3 цэг 0° -ийн өнцөг үүсгэнэ) Иймд бид өгөгдсөн n цэгийг ерөнхий байршилтай гэж үзэж болно. (ө.х аль ч 3 нь цэг нэг шулуун дээр оршихгүй) Ерөнхий байршилтай n цэгийн гүдгэр бүрхэлт нь n -с ихгүй оройтой гүдгэр олон өнцөгт байна. Иймд гүдгэр бүрхэлтийн ядаж нэг өнцөг нь $\frac{(n-2)\pi}{n}$ -ээс хэтрэхгүй. Бусад бүх цэгүүд энэ өнцөг дотор орших нь ойлгомжтой. Энэ өнцгийн оройгоос бусад цэгүүдийг дайрсан цафрагууд татъя. Ингэхэд уул өнцөг $n-2$ ширхэг өнцгүүдэд хуваагдана. Эдгээр $n-2$ өнцгүүдийн нийлбэр $\frac{(n-2)\pi}{n}$ -ээс ихгүй тул эдгээр өнцгүүд бүгд $\frac{\pi}{n}$ -ээс их байж таарахгүй. Иймд ядаж нэг өнцөг $\frac{\pi}{n}$ -ээс ихгүй болов. Уг өнцгийг үүсгэх 3 цэг бодлогын нөхцлийг хангана.

(Бодолт 2.) (Хөвсгөл аймгийн математикийн багш Доржзов-дын бодолт)

Өмнөх бодолтын адил өгөгдсөн n цэгийг ерөнхий байршилтай гэж үзэж болно. Өгөгдсөн цэгүүдийн яг нэгийг дайрсан (уг цэгийг O гее), нэг талдаа $n-1$ ширхэг цэгтэй нөгөө талдаа огт цэггүй байх шулуун татаж болно. O цэгээс үлдсэн $n-1$ цэгүүд рүү цафрагууд татаж, цэгүүдээ цагын зүүний дагуу чиглэлд $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ гэж эрэмбэлье. $\angle A_i O A_{i+1} = \varphi_i, i = \overline{1, n-2}$ болов. Хэрэв φ_i өнцгүүд дотор $\frac{\pi}{n}$ -с хэтрэхгүй өнцөг байвал бодлого шууд бодогдоно. Иймд $\varphi_i > \frac{\pi}{n}, i = \overline{1, n-2}$ гэж үзье. Тэгвэл $\angle A_1 O A_{n-1} = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots +$

$\varphi_{n-2} > \frac{(n-2)\pi}{n}$ болох ба A_1OA_{n-1} гурвалжны хувьд
 $\angle A_1 + \angle A_1OA_{n-1} + \angle A_{n-1} = 180^\circ = \pi > \angle A_1 + \angle A_{n-1} + \frac{(n-2)\pi}{n} \Leftrightarrow \angle A_1 + \angle A_{n-1} < \frac{2\pi}{n}$ болж $\angle A_1$ ба $\angle A_{n-1}$ -ийн ядаж нэг нь $\frac{\pi}{n}$ -ээс бага болох нь батлагдана.

A2. $AB \cap CD = E$ болог. $\angle B = \angle C = 120^\circ \Rightarrow BCE$ гурвалжин адил талт болно. Түүний талыг x -ээр тэмдэглэе. ADE гурвалжны хувьд косинусын теорем бичвэл $(AB+x)^2 + (CD+x)^2 - (AB+x)(CD+x) = AD^2 \Leftrightarrow A \cdot x + CD \cdot x - AB \cdot CD = 0$ болно. Нөгөө талаас $(AB+CD-x)^2 = AB^2 + CD^2 + x^2 - 2(AB \cdot x + CD \cdot x - AB \cdot CD) = AB^2 + CD^2 + x^2 = AD^2$ болж $AB+CD = AD+x = AD+BC$ буюу $ABCD$ дөрвөн өнцөгт дотор тойрог багтана.

A3. $2x_n - 1 = 2(2x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} - x_{n-2} + 1) - 1 = (2x_{n-1} - 1)(2x_{n-2} - 1)$ тул $a_n = 2x_n - 1$ гэвэл $a_n = a_{n-1}a_{n-2}$ болно. Түүнчлэн $a_1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$, $a_0 = 2a - 1$ болох юм. Өгсөн нөхцлөөс $a_0 = 2a - 1$ тоо бүтэн квадрат байх ёстой. $a_0 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2a - 1$ тул $a = 2k^2 + 2k + 1$ болно. Одоо бид $\forall k \in \mathbb{Z} : a = 2k^2 + 2k + 1$ үед $\forall n \in \mathbb{N}$ авахад $2x_{3n} - 1$ нь бүтэн квадрат болохыг батлая. Бүр $\forall n \in \mathbb{N}$ хувьд a_{3n} нь бүтэн квадрат бөгөөд $\{a_n\}$ дарааллын бусад гишүүд нь $3s^2$, $s \in \mathbb{Z}$ хэлбэртэй гэдгийг индукцээр батлана. Индукцийн суурь илт үнэн. Хэрэв $a_{3n} = k^2$ ба $a_{3n+1} = 3m^2$ бол $a_{3n+2} = k^2 \cdot 3m^2 = 3(km)^2$; Хэрэв $a_{3n+1} = 3k^2$ ба $a_{3n+2} = 3m^2$ бол $a_{3n+3} = (3km)^2$; Хэрэв $a_{3n+2} = 3k^2$ ба $a_{3n+3} = m^2$ бол $a_{3n+4} = 3(km)^2$ болж индукцийн шилжилт батлагдснаар $a = 2k^2 + 2k + 1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ үед л $a_{3n} = 2x_{3n} - 1$ нь бүтэн квадрат болох нь батлагдав.

B1. $\{a_n\}_{n \geq 1}$ арифметик прогресс бодлогын нөхцлийг хангах бөгөөд ялгавар нь d болог.

$d = 0$ байсан бол $a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ эсвэл $a_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ болохыг шууд харж болно.

$d \neq 0$ болог. a_1^2, a_2^2, a_3^2 тоонууд өгөгдсөн прогрессийн гишүүд $\Leftrightarrow \exists m, n, k \in \mathbb{N}, a_1^2 = a_1 + md, a_2^2 = a_1 + nd = (a_1 + d)^2, a_3^2 = a_1 + kd = (a_1 + 2d)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + d = n - m \\ 4a_1 + 4d = k - m \end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{4n - 3m - k}{4}, d = \frac{m - 2n + k}{2} \in \mathbb{Q}$ болно.

Нөгөө талаас $a_1^2 = a_1 + md \Leftrightarrow a_1^2 + (2m-1)a_1 - m(d+2a_1) = 0$ гэдгээс a_1 нь $P(x) = x^2 + (2m-1)x - m(n-m) = 0$ гэсэн бүхэл коэффициенттэй квадрат 3 гишүүнтийн рационал шийд болно. $P(x) = 0$ тэгшитгэл рационал шийдтэй л бол тэр нь бүхэл тоо ($P(x)$ -ийн ахлах коэффициент 1-тэй тэнцүү) байх тул $a_1 \in \mathbb{Z}$ болов. $\Rightarrow d = n - m - 2a_1 \in \mathbb{Z}$ болж бодлого бодогдоно.

В2. Эхлээд $\forall x, y > 0$ хувьд $(*) \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{1}{3}$ гэж батлая.

$(*) \Leftrightarrow 3(x^2 - xy + y^2) \geq x^2 + xy + y^2 \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) - 4xy \geq 0 \Leftrightarrow 2(x-y)^2 \geq 0$ болж $(*)$ батлагддаг. Иймд

$$\frac{a^2(a^3 + b^3)}{a^2 + ab + b^2} = a^2(a+b) \frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{1}{3} a^2(a+b) \text{ болно.}$$

Адилаар $\frac{b^2(b^3 + c^3)}{b^2 + bc + c^2} \geq \frac{1}{3} b^2(b+c)$ ба $\frac{c^2(c^3 + a^3)}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{1}{3} c^2(c+a)$ болж

$$\begin{aligned} a^2(a^3 + b^3)a^2 + ab + b^2 + \frac{b^2(b^3 + c^3)}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^2(c^3 + a^3)}{c^2 + ca + a^2} &\geq \\ &\geq \frac{1}{3}(a^3 + b^3 + c^3) + \frac{1}{3}(a^2b + b^2c + c^2a) \geq \\ &\geq \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3} + \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt[3]{a^2b \cdot b^2c \cdot c^2a} = 2abc \end{aligned}$$

болж батлах зүйл гарна. Тэнцэлдээ $a = b = c$ байхад л хүрнэ.

В3. $AB = z$; $PQ = x$; $QC = y$ гээ. Пифагорын теорем бичвэл: $OE^2 = OB^2 + BE^2 \Rightarrow BE^2 = R^2 - (AB - AO)^2 = R^2 - (z - R)^2 = 2Rz - z^2$ (*). $AE^2 = BE^2 + AB^2 = 2zR - z^2 + z^2 = 2zR$ ((*) ёсоор) $\Rightarrow AE = \sqrt{2zR}$ (**):

AD диаметр $\Rightarrow \angle AKD = 90^\circ$, $\angle KBC = 90^\circ \Rightarrow KB^2 = AB \cdot BD = z \cdot 2R = 2zR \Rightarrow KB = AE = \sqrt{2zR}$ (3*) ((**) ёсоор).

3.4 ММО-50, XI(12) анги

Д.Батнасан (ШУТИС)

I өдрийн бодлого

A1 (У. Батзориг) a, b, c, d нь $a + b + c + d = 4$ байх эерэг тоонууд бол

$$\frac{(a+\sqrt{b})^2}{\sqrt{a^2-ab+b^2}} + \frac{(b+\sqrt{c})^2}{\sqrt{b^2-bc+c^2}} + \frac{(c+\sqrt{d})^2}{\sqrt{c^2-cd+d^2}} + \frac{(d+\sqrt{a})^2}{\sqrt{d^2-da+a^2}} \leq 16$$

гэнцэтгэл бишийг батал.

A2 (Д. Батнасан) $2^k 3^s$ (k, s -сөрөг биш бүхэл тоонууд) хэлбэрийн бүх тоог өсөх эрэмбээр нь $1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, \dots$ гэж бичиж $\{a_n\}$ дараалал үүсгэв. $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 + \frac{1}{10^{2014}}$ байх натурал тоо n төгсгөлгүй олон олдохыг батал.

A3 (Б. Батцэнгэл) ABC гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын цэг H байв. AC диаметртэй тойрог ABH гурвалжныг багтаасан тойрогтой A цэгээс ялгаатай K цэгт огтлолцоно. CK шулуун BH хэрчмийг огтлох цэгээрээ хагаслан хуваахыг батал.

II өдрийн бодлого

B1 (Д.Батнасан, А.Ганбат) Анги n сурагчидтай. Нэг өдөрт гурван сурагч жижүүрлэдэг. Энэ ангийн аль ч хоёр сурагч нэгээс олон удаа хамт жижүүрлэхгүй (хамт жижүүрлэхгүй байж болно). Хамгийн олон жижүүрлэх өдрийн тоог k гэвэл

$$\frac{n(n-3)}{6} \leq k \leq \frac{n(n-1)}{6}$$

байхыг батал.

B2 (Г.Баярмагнай) $p > 2$ анхны тоо бол $1^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + (p-1)^{k_{p-1}}$ нийлбэр p -д хуваагддаг байх $1, 2, \dots, p-1$ тоонуудын $k_1, k_2, \dots, k_{p-1}$ сэлгэмэл олдохыг батал.

B3 (У.Батзориг) ABC гурвалжны дотор M цэг сонгов. AM, BM, CM нь ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг харгалзан D, E, F

цэгт огтолно. BCM, CAM, ABM гурвалжнуудын багтаасан тойргийн төвүүдийг O_1, O_2, O_3 гэе. Тэгвэл DO_1, EO_2, FO_3 нэг цэгт огтлолцохыг батал.

Бодолт:

$$A1. (a + \sqrt{b})^2 = a^2 + 2a\sqrt{b} + b \leq a^2 + a(b+1) + b = (a+b)(a+1)$$

$$\text{болно. } \sqrt{a^2 - ab + b^2} \geq \sqrt{a^2 - \frac{a^2 + b^2}{2} + b^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$

$$\text{тул } \frac{(a + \sqrt{b})^2}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}} \geq \frac{(a+b)(a+1)}{\frac{a+b}{2}} = 2(a+1).$$

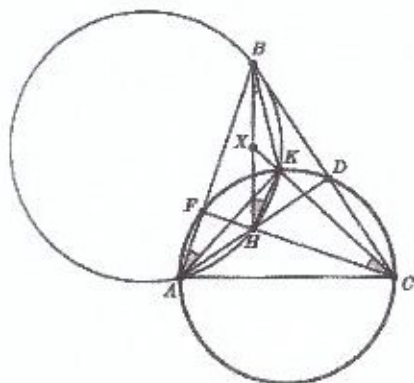
Иймд $\sum_{cyc} \frac{(a + \sqrt{b})^2}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}} \geq 2(a+1) + 2(b+1) + 2(c+1) + 2(d+1) = 16$ болж батлах тэнцэтгэл биш батлагдав. Тэнцэтгэл биш $a = b = c = d = 1$ үед л тэнцэлдээ хүрнэ.

A2. $(1 + \frac{1}{10^{2014}})^{10^{2014}} \geq 2$ байна. Дурын сөрөг биш бүхэл n -ийн хувьд $2^m \leq 3^n \leq 2^{m+1}$ байх сөрөг биш m олдоно. Ялгаатай n_1, n_2 утгуудад ялгаатай m_1, m_2 харгалзана. $2^m \leq 3^n \leq 2^{m+1} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{3^n}{2^m} \leq 2$ ба $\frac{3^n}{2^m}$ тоонууд $[1; 2]$ хэрчимд орох ба хоорондоо ялгаатай, төгсгөлгүй олон байна.

$\forall n \in \mathbb{Z}^+. [1; 2]$ хэрчмийг $[(1 + \frac{1}{10^{2014}})^k; (1 + \frac{1}{10^{2014}})^{k+1}]$, $k = 0, 10^{2014}$ хэрчмүүдийн нэгдэл бүрэн хучна. Дээрх $\frac{3^n}{2^m}$ тоонууд төгсгөлгүй олон тул ялгаатай $\frac{3^{n_1}}{2^{m_1}}, \frac{3^{n_2}}{2^{m_2}}$ тоонууд дирихлейн зарчмаар хуваалтын аль нэг хэрчимд хоёул орно. Тэр хэрчмийн дугаар s болог. Өөрөөр хэлбэл $(1 + \frac{1}{10^{2014}})^s \leq \frac{3^{n_1}}{2^{m_1}} < \frac{3^{n_2}}{2^{m_2}} \leq (1 + \frac{1}{10^{2014}})^{s+1}$. Эндээс $1 < \frac{3^{n_2}}{2^{m_2}} : \frac{3^{n_1}}{2^{m_1}} \leq 1 + \frac{1}{10^{2014}}$ ба $1 < \frac{3^{n_2} 2^{m_1}}{2^{m_2} 3^{n_1}} < 1 + \frac{1}{10^{2014}}$ болно. $a_{n+q} = 3^{n_2} 2^{m_1}, a_n = 3^{n_1} 2^{m_2}$ гэвэл $1 + \frac{1}{10^{2014}} > \frac{a_{n+q}}{a_n} \geq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ болж ядаж нэг олдох нь батлагдав. Ийм аргаар $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ -ээс бага $1 + \frac{1}{10^k}$ хэлбэрийн тооны хувьд дахин $1 + \frac{1}{10^k}$ -аас бага зэргэлдээ хоёрын

ноогдворыг байгуулна. Энэ мэтээр төгсгөлгүй олонлог үүсгэнэ.

А3.



Гурвалжны A, C оройгоос татсан өнд­рүүдийг AD, CF гэж үзвэл D, F цэгүүд AC диаметртэй тойрог дээр оршино. CK шулуун BH хэрчмийг огтлох цэгийг X гэж тэмдэглэе (Зураг). A, H, K, B цэгүүд нэг тойрог дээр орших тул $\angle KAH = \angle KBH$ байна.

A, K, F, C цэгүүд нэг тойрог дээр орших тул $\angle KAF = \angle KCF$ байна. Иймд $\angle KBX = \angle XCB$ буюу KBX, BCX гурвалжнууд төсөөтэй юм. Эндээс $\frac{KX}{BX} = \frac{BX}{CX}$ буюу $BX^2 = KX \cdot CX$ гэж гар­на. Нөгөө талаас A, H, K, B цэгүүд нэг тойрог дээр орших тул $\angle BAK = \angle BHK$ байна. A, D, K, C цэгүүд нэг тойрог дээр ор­ших тул $\angle KAD = \angle KCD$ байна. Иймд $\angle XHK = \angle XCH$ буюу XHK, XCH гурвалжнууд төсөөтэй юм. Эндээс $\frac{XK}{XH} = \frac{XH}{XC}$ буюу $XH^2 = XK \cdot XC$ гэж гарна. Тэгэхлээр $BX^2 = KX \cdot CX = XH^2$ буюу $BX = XH$ юм.

В1. Жижүүрт гарсан $\{a, b, c\}$ гуравт бүрээс аль нэг хоёрыг сон­гоё. Тухайлбал $\{a, b\}$ байг. (аль нь ч хамаагүй). Бодлогын нөхцөл ёсоор ялгаатай гуравтад ялгаатай хос харгалзах ёстой. $\{a, b\}$ хос $\{a, c\}, \{b, c\}$ хосуудыг гуравтынхаа өмнөөс бүрэн төлөөлнө. Нийт боломжит хос C_n^2 тул төлөөлөгч хосуудын тоо $\frac{1}{3}C_n^2$ -оос үл хэтрэнэ.

О.х $k \leq \frac{n(n-1)}{6}$. Бодлогын нөхцлийг хангадаг дор хаяж $\frac{n(n-3)}{6}$

тооны жижүүрлэх өдрүүдтэй хуваарь зохиовол $k \geq \frac{n(n-3)}{6}$ бо­лох нь батлагдана. Сурагчдаа $\{1, 2, \dots, n\}$ гэе. $n \mid a+b+c$ байх бүх $a < b < c$ гуравтууд бодлогын нөхцлийг хангах нь илт. a тоог n ян-

заар сонгоно. b -г дор хаяж $n-3$ янзаар сонгоно. ($a=b, b=c, a=c$ биелэх гурван нөхцөл хасаад).

Иймд $n|a+b+c, a < b < c$ чанартай гуравтыг ядаж $\frac{n(n-3)}{3!}$ янзаар сонгож болж байна.

(Тэмдэглэл: Энэ бодлогоос $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{6}$ гэж гарна. Ө.х $k \sim \frac{1}{6}n^2, n \rightarrow \infty$ асимптот үнэлгээ биелнэ.)

B2. $n^m + (p-n)^{m+\frac{p-1}{2}} \equiv 0 \pmod{p}$ ба $1 \leq n, m \leq \frac{p-1}{2}$ байх (n, m) хосыг "зохицсон" хос гэе.

$\frac{p-1}{2}$ сондгой үед $(n^n + (p-n)^{n+\frac{p-1}{2}})(n^{n+\frac{p-1}{2}} + (p-n)^n) \equiv 0 \pmod{p}$ байх тул (n, n) эсвэл $(n, n + \frac{p-1}{2})$ "зохицсон" хос болно. Иймд энэ тохиолдолд өгөгдсөн чанартай сэлгэмлийг хялбархан сонгож чадна.

$\frac{p-1}{2}$ тэгш байг. Хэрэв $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ (*) бол дурын сондгой m тооны хувьд $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$ (**) бол дурын тэгш m тооны хувьд (n, m) нь "зохицсон" болно. ММК1.8.13-аар (*) болон (**) жишлэгийг биелүүлэх $n(1 \leq n \leq \frac{p-1}{2})$ тоонуудын тоо тус бүрт $\frac{p-1}{4}$ ширхэг байна. Иймд (*) болон (**) оос хамааруулан $\frac{p-1}{2}$ ширхэг "зохицсон" хосыг сонгож чадна.

B3. DO_1 шулуун ABC гурвалжныг багтаасан тойрогтой огтлолцох хоёрдох цэгийг H гэе. (D -ээс ялгаатай). $CO_2 \cap EH = O'_2$ байг. $O_2 \equiv O'_2$ гэж батлая. $\angle MAC = \angle DAC = \varphi, \angle CBM = \angle CBe = \psi$ гэе. A, C, D, E цэгүүд нэг тойрог дээр орших тул $\angle O_1HE = \angle DHE = \angle DHC + \angle CHE = \angle DAC + \angle CBE = \varphi + \psi$ (*). $\angle MO_2C = 2\angle MAC = 2\varphi, \angle CO_1M = 2\angle CBM = 2\psi$ болохыг харахад төвөггүй. Мөн $O_2M = O_2C$ ба $O_1M = O_1C$ тул $\angle O_1O_2C = \frac{1}{2}\angle MO_2C = \varphi$ ба $\angle CO_1O_2 = \frac{1}{2}\angle CO_1M = \psi$ (**). Иймд $\angle O_1CO_2 =$

$180^\circ - \varphi - \psi$ (***). (*) ба (***)-аас $\angle O_1CO'_2 = \angle O_1CO_2 = 180^\circ - \varphi - \psi = \angle O_1HE = \angle O_1HO'_2$. Иймээс O_1, C, O'_2, H цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. (**) ёсоор $\angle O_1O'_2C = \angle O_1HC = \angle DHC = \angle DAC = \varphi = \angle O_1O_2C$. Иймд $O'_2 \equiv O_2$ болж EO_2 шулуун H цэгийг дайрна. Яг үүнтэй адилаар FO_3 шулуун H цэгийг дайрна гэдгийг батална.

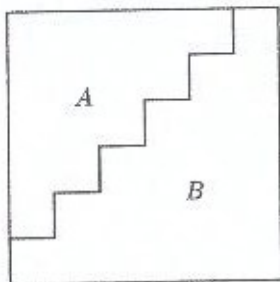
3.5 ММО-50, XI анги

Г.Баярмагнай (МУИС)

I өдрийн бодлого

A1 (Г. Батзаяа) ABC гурвалжны багтаасан ω тойргийн A оройг агуулаагүй BC нумын дундаж M цэг ба уг гурвалжинд багтсан тойргийн төв I цэгийг дайрсан γ тойрог татжээ. γ тойрог BC талыг D, E цэгүүдэд огтлох бөгөөд MD, ME шулуун нь ω тойргийг M цэгээс ялгаатай P, Q цэгт огтолдог бол бүх PQ шулуун нь γ тойргийн сонголтгоос үл хамаарах тогтмол нэг цэгийг дайрахыг батал.

A2 (Б. Батцэнгэл)



$n \times n$ хэмжээтэй шатрын хөлгийг зурагт үзүүлснээр шат хэлбэртэй A, B хоёр дүрсэд хуваажээ. (A дүрс нь $\frac{n(n-1)}{2}$ ширхэг нүдтэй, B дүрс нь $\frac{n(n+1)}{2}$ ширхэг нүдтэй). $0 \leq k \leq n-1$ байх ямар ч k тооны хувьд A дүрсэд k ширхэг тэрэг,

B дүрсэд $n-k$ ширхэг тэрэг хоорондоо идэлцэхгүйгээр байрлах боломжийн тоо нь A дүрсэд $n-k-1$ ширхэг тэрэг, B дүрсэд $k+1$ ширхэг тэрэг хоорондоо идэлцэхгүйгээр байрлах боломжийн тоотой ижил гэж батал.

A3 (Г. Баярмагнай) Бүхэл тоон гишүүдтэй, тогтмол биш a_n арифметик прогресс өгөгдөв. Дурын натурал n тооны хувьд $\frac{a_n^n + 1}{P(a_n)}$ ноогдвор бүхэл тоо байх бүхэл коэффициенттэй бүх $P(x)$ олон гишүүнтүүдийг ол.

II өдрийн бодлого

B1 (Г. Баярмагнай) $p > 2$ анхны тоо бол $1^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + (p-2)^{k_{p-2}} + (p-1)^{k_{p-1}}$ нийлбэр нь p -д хуваасдаг байхаар $1, 2, \dots, p-1$ тоонуудын $k_1, k_2, \dots, k_{p-1}$ сэлгэмэл олдохыг батал.

В2 (У. Батзориг) $x, y, z > 0$ ба $xyz = 1$ бол

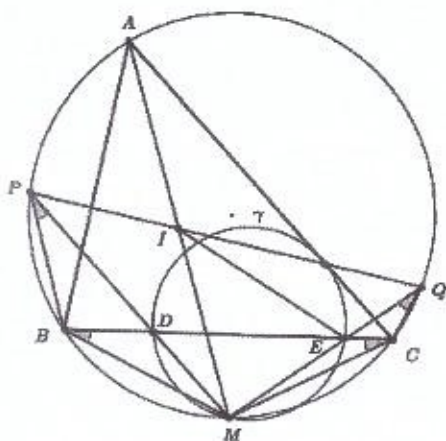
$$\frac{y^2}{x^5(xy+z^2)} + \frac{z^2}{y^5(yz+x^2)} + \frac{x^2}{z^5(zx+y^2)} \geq \frac{9}{2(x^2y+y^2z+z^2x)}$$

гэж батал.

В3 (Б. Батцэнгэл) ω тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн $\triangle ABD$ -ын B өнцгийн симмедиан ω -ыг P цэгт, $\triangle CBD$ -ын B өнцгийн симмедиан ω -ыг Q цэгт огтолдог байг. $CP \cap AB = X$, $AQ \cap BC = Y$ бол X, D, Y цэгүүд 1 шулуун дээр оршино гэж батал.

Бодолт:

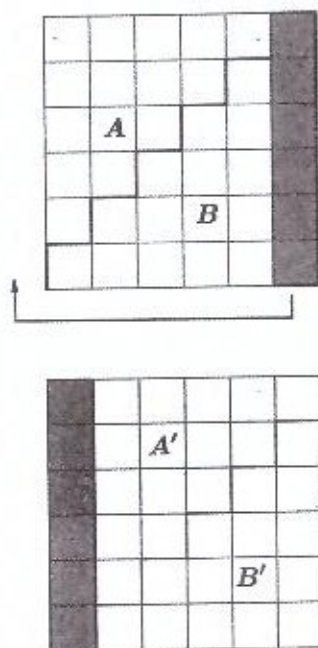
A1.



Бүх PQ шулуун I цэгийг дайрна гэж харуулья. Үүний тулд $\angle PIM + \angle QIM = 180^\circ$ гэж батлая. $MI = MB = MC$ байдаг (Үүнийг $\angle IBM = \angle BIM = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $\angle ICM = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ гэдгээс хялбархан харж болно). $\angle BPM = \angle BCM = \angle DBM$ тул

өнцөг-өнцөгийн шинжүүрээр $\triangle BPM \sim \triangle DBM$ буюу $\frac{PM}{BM} = \frac{BM}{DM}$ байна. Энд $BM = IM$ гэдгийг ашиглавал $\frac{PM}{IM} = \frac{IM}{DM}$ гэж гарна. $\triangle PMI, \triangle IMD$ гурвалжнууд ерөнхий $\angle PMI = \angle IMD$ өнцөгтэй тул өмнөх харицаанаас $\triangle PMI \sim \triangle IMD$ гэж гарна. Иймд $\angle PIM = \angle IDM$ юм. Үүнтэй нэгэн адилаар $\triangle CQM \sim \triangle ECM$ буюу $\frac{QM}{CM} = \frac{CM}{EM}$ бөгөөд $\triangle QMI \sim \triangle IME$ буюу $\angle QIM = \angle IEM$ гэж гарна. I, E, M, D цэгүүд γ тойрог дээр орших тул $\angle IDM + \angle IEM = 180^\circ$ бөгөөд үүгээр $\angle PIM + \angle QIM = 180^\circ$ болох нь батлагдав.

A2.



A дүрсэд k ширхэг тэрэг байдаг гэе. B дүрсийн сүүлчийн баганыг тэрэгтэй нь хамт хөлгийн зүүн талд байрлуулж A дүрсэд нэмж өгөх үйлдэл зохиоё. Энэ үйлдлээр үл идэлцэх тэрэгнүүд мөн үл идэлцэх хэвээр байна. A' дүрсэд A -ийн k ширхэг тэрэг, сүүлчийн баганы 1 тэрэгтэй нийлээд нийт $k+1$ тэрэг байна. Одоо A' дүрс нь B хэлбэртэй, B' дүрс A хэлбэртэй гэдгийг анхаарвал бид A дүрсэд k тэрэг байрласан боломж бүрт B дүрсэд $k+1$ тэрэг байрлуулсан боломжийг харгалзуулж болж байна. Энэ харгалзаа харилцан нэгэн утгатай гэдэг нь илэрхий юм.

A3. Бодлогын нөхцөлийг биелүүлэх олон гишүүнтийг тогтмол гэж батлая. Энэ үед хэрэв бүх a_n гишүүд сондгой бол $P(x) = \pm 1, \pm 2$, эсрэг тохиолдолд $P(x) = \pm 1$ болох нь хялбархан шалгагдана. Эсрэгээс нь тогтмол биш $P(x)$ олон гишүүнт олдоно гэж үзье. Хэрэв $P(a_0) = 0$ бол натурал тоо n бүрийн хувьд $a_n - a_0$ ялгавар n -д хуваагдах тул $P(a_n) \equiv 0 \pmod{n}$ байна. Өгсөн нөхцөлөөс $a_n^n + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ буюу $a_0^n + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ болж $n = 4$ үед зөрчил гарна. Иймээс $P(a_0) \neq 0$ бөгөөд $\{a_n\}$ нь тогтмол биш дараалал тул

$$(*) \quad |P(a_n)| \geq 2 \text{ ба } (n, P(a_0)) = 1$$

байх n дугаар төгсгөлгүй олон олдоно. Ийм чанартай ямар нэг n_0 дугаарыг сонгож $m = |P(a_{n_0})|$ гэж тэмдэглэвэл $(*)$ -ийн 2 дахь нөхцөлөөс $(m, n_0) = 1$ гэж мөрдөнө. Дурын натурал s тооны хувьд $P(a_{n_0+ms}) \equiv P(a_{n_0}) \equiv 0 \pmod{m}$ биелэх тул $a_{n_0+ms}^n + 1 \equiv 0$

$(\text{mod } m)$ байна. Иймд

$$(**) \quad a_{n_0}^{n_0+ms} + 1 \equiv 0 \pmod{m}.$$

Одоо s тоог $ms \equiv 1 \pmod{n_0}$ байхаар сонговол $a_{n_0}^{n_0} + 1 \equiv 0 \pmod{m}$ тул $(**)$ -оос $a_{n_0} \pm 1 \equiv 0 \pmod{m}$ гэж мөрдөнө. Иймд төгсгөлгүй олон n_0 дугаарын хувьд $|a_{n_0} \pm 1| \geq |P(a_{n_0})|$ тэнцэл биш биелэх бөгөөд $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x)/x = 1$ болно. Мөн $P(x) \neq x \pm c$ гэдгийг хялбархан шалгаж болох тул $P(x)$ нь тогтмол тоо байна.

В1. p -ийн анхны язгуур g -г бэхэлье.

Тэгвэл бодлого $\sum_{i=1}^{p-1} g^{ik_i} \equiv 0 \pmod{p}$ байх сэлгэмэл олдохыг үзүүлэхтэй адил. Одоо $k_i = \frac{p+1}{2} - i$ ба $k_{i+\frac{p-1}{2}} = p-i$ ($i = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$) байхаар сонговол $S = \sum_{i=1}^{p-1} g^{ik_i} = \sum_{i+j=\frac{p+1}{2}} (g^{ij} + g^{(p-i)(p-j)})$ болох

ба g -ийн сонголтоор $g^{p^2-p(i+j)} \equiv g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$ байх тул S нь p -д хуваагдана.

В2.

$$a_1 = \sqrt{\frac{y^2}{x^5(xy+z^2)}}, \quad b_1 = \sqrt{x(xy+z^2)}$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{z^2}{y^5(yz+x^2)}}, \quad b_2 = \sqrt{y(yz+x^2)}$$

$$a_3 = \sqrt{\frac{x^2}{z^5(zx+y^2)}}, \quad b_3 = \sqrt{z(zx+y^2)}$$

гэж сонгоод Коши-Буняковскийн тэнцэтгэл биш ашиглавал:

$$\left(\frac{y}{x^2} + \frac{z}{y^2} + \frac{x}{z^2}\right)^2 \leq \left(\frac{y^2}{x^5(xy+z^2)} + \frac{z^2}{y^5(yz+x^2)} + \frac{x^2}{z^5(zx+y^2)}\right)(x^2y + xz^2 + y^2z + yx^2 + z^2x + zy^2) \text{ болно.}$$

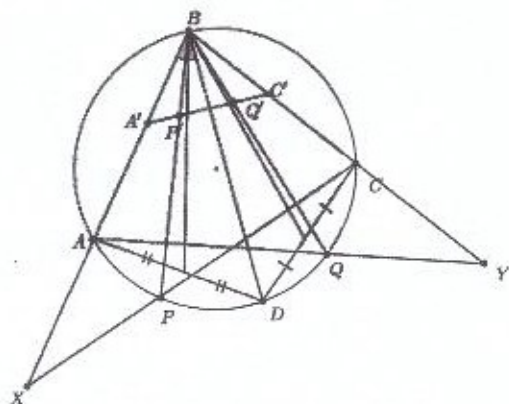
Эндээс

$$\left(\frac{y^2}{x^5(xy+z^2)} + \frac{z^2}{y^5(yz+x^2)} + \frac{x^2}{z^5(zx+y^2)}\right) \geq$$

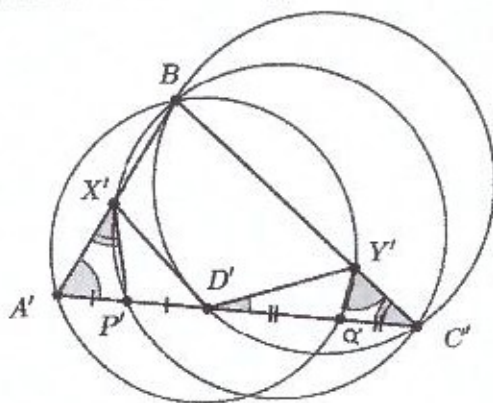
$$\geq \frac{\left(\frac{y}{x^2} + \frac{z}{y^2} + \frac{x}{z^2}\right)^2}{2(x^2y + y^2z + z^2x)} \stackrel{\text{Коши}}{\geq} \frac{9\left(\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2}{2(x^2y + y^2z + z^2x)} \stackrel{(xyz=1)}{=} \\ = \frac{9}{2(x^2y + y^2z + z^2x)} \text{ болж батлах тэнцэгтэл биш батлагдав.}$$

Тэнцэгтэл биш $x = y = z = 1$ үед тэнцэлдээ хүрнэ.

В3.



$I_{\omega(B,1)}$ инверсээр A, D, C, P, Q, X, Y -ийн дүрүүдийг харгалзан $A', D', C', P', Q', X', Y'$ гэе. Тэгвэл A', P', D', Q', C' нэг шулуун дээр орших ба $A'P' = P'D', D'Q' = Q'C'$ болно. Учир нь: $\triangle BA'D' \sim \triangle BDA$ ба BP нь симмедиан.



$X' = \omega(BP'C') \cap A'B, Y' = \omega(A'Q'B) \cap BC'$ болох ба бид
 B, X', Y', D' нэг тойрог дээр оршино гэж батлахад хангалттай.
 $\angle X'A'P' = \angle Q'Y'C', \angle A'X'P' = \angle Q'C'Y' \Rightarrow \frac{A'P'}{P'X'} = \frac{Q'Y'}{Q'C'} \Rightarrow$
 $\frac{P'D'}{P'X'} = \frac{QY'}{D'Q'}$ ба $\angle X'P'D' = \angle D'Q'Y' \Rightarrow \triangle P'D'X' \sim \triangle Q'Y'D' \Rightarrow$
 $\angle X'D'P' + \angle Y'D'Q' = \angle X'P'A' = \angle X'BY' \Rightarrow \angle X'BY' + \angle X'D'Y' =$
 180° болж батлагдав.

3.6 ММО-50, Багын багш

М.Итгэл (МУИС)

I өдрийн бодлого

A1 (М. Итгэл) Шалгалтанд дөрвөн бодлого ирэв. Шалгуулагчид 1-р бодлогыг 98 хувь, 2-р бодлогыг 90 хувь, 3-р бодлогыг 85 хувь, 4-р бодлогыг 80 хувь тус тус боджээ. Тэгвэл бүх бодлогыг хамгийн багадаа, хамгийн ихдээ шалгуулагчдын хэдэн хувь нь бодсон бэ?

A2 (У. Батзориг) $n > 1, n \mid (6^n + 7^n)$ байх натурал тоо бол $13 \mid n$ гэж батал.

A3 (Б. Хоролдагва) Тойрог дээрх 148 цэгийг үл огтлолцох хэрчмүүдээр холбов (Өгсөн цэгүүдийг огтлолцлын цэг гэж үзэхгүй). Тэгвэл аль ч 2 нь холбогдоогүй 50 цэг олдохыг батал.

II өдрийн бодлого

B1 (Б. Сандагдорж) Периметр нь 50-тай тэнцүү, бүхэл тоон талуудтай мохоо өнцөгт гурвалжны тоо хэд вэ?

B2 (М. Итгэл) $(n + m + 1) \mid 2nm$ ба $(n + m - 1) \mid (n^2 + m^2 - 1)$ байх бүх натурал n, m тоог ол.

B3 (У. Батзориг) a, b, c, d, e нь 210 тооны хуваагчид (хоорондоо ялгаатай байх албагүй) бол $abcde > 44100$ нөхцлийг хангах эрэмбэлэгдсэн (a, b, c, d, e) тавтын тоог ол.

Бодолт:

A1. Энэ бодлогыг ерөнхий тохиолдолд бодох нэгэн лемм батлая. Лемм: $a_1 \leq A \leq a_2; b_1 \leq B \leq b_2$ бол

$$\max\{0, a_1 + b_1 - |\Omega|\} \leq |A \cap B| \leq \min\{a_2, b_2\}$$

байна. Энд Ω -эх олонлог. Баталгаа:

а) Эхлээд $|A \cap B| \leq \min\{|A|, |B|\}$ гэж батлая.

$$\begin{cases} |A \cap B| \leq |A| \\ |A \cap B| \leq |B| \end{cases} \Rightarrow |A \cap B| \leq \min\{|A|, |B|\} \text{ гэдэг нь харагдаж}$$

байна.

$A \subset B$ нөхцөлд тэнцэлдээ хүрэх нь ойлгомжтой.

б) $\max\{0, |A| + |B| - |\Omega|\} \leq |A \cap B|$ батлая.

Тэнцэтгэл бишийг $|A| + |B| - |\Omega| < 0$ байг. Энэ тохиолдолд $A \cap B = \emptyset$ байх боломжтой тул $|A \cap B| \geq 0$ байна. $|A| + |B| - |\Omega| \geq 0$ байг. Энэ тохиолдолд нэгтгэн зайлуулах зарчмаар $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \geq |A| + |B| - |\Omega|$ болж батлагдав.

Мөн тэнцэлдээ хүрэх нөхцөлийг хялбархан харж болно. Энэ леммийг бодлогондоо хэрэглэе.

$|A|, |B|, |C|, |D|$ харгалзан 1-р, 2-р, 3-р, 4-р бодлогыг бодсон шалгуулагчдын хувь гээ. Тэгвэл бидний олох зүйл нь $|A \cap B \cap C \cap D|$ ийн боломжит хамгийн бага утгыг олно гэсэн үг юм.

$$\begin{cases} 98\% \leq |A| \leq 98\% \\ 90\% \leq |B| \leq 90\% \end{cases} \quad \text{гэж бичвэл лемм ёсоор}$$

$$\max\{0, 98\% + 90\% - 100\%\} \leq |A \cap B| \leq \min\{98\%, 90\%\}$$

буюу $88\% \leq |A \cap B| \leq 90\%$. (I) болно.

$$\begin{cases} 85\% \leq |C| \leq 85\% \\ 80\% \leq |D| \leq 80\% \end{cases} \quad \text{гэж бичвэл лемм ёсоор}$$

$$\max\{0, 85\% + 80\% - 100\%\} \leq |C \cap D| \leq \min\{85\%, 80\%\}$$

буюу $65\% \leq |C \cap D| \leq 80\%$. (II) юм.

(I), (II) нөхцөлийг авч үзье. $\begin{cases} 88\% \leq |A \cap B| \leq 90\% \\ 65\% \leq |C \cap D| \leq 80\% \end{cases}$

болох ба дахин Лемм хэрэглэвэл

$$\max\{0, 88\% + 65\% - 100\%\} \leq |A \cap B \cap C \cap D| \leq \min\{90\%, 80\%\}$$

буюу $53\% \leq |A \cap B \cap C \cap D| \leq 80\%$ байна. Хариу: $53\% - 80\%$

А2. $6^n + 7^n$ сондгой тул n -сондгой тоо байна. p нь n -ийн хамгийн бага анхны тоон хуваагч байг. Тэгвэл $(p, 6) = 1$ гэж гарна. Иймд $px + 6y = 1$ байх $x, y \in \mathbb{Z}$ тоонууд олдоно. Иймд $6y \equiv 1 \pmod{p}$ (*) болно. $a \equiv 7y \pmod{p}$ байх a -г авч үзье. Тэгвэл $a^n + 1 \equiv (7y)^n + (6y)^n \pmod{p}$ ба $7^n + 6^n | (7y)^n + (6y)^n$ тул $a^n + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ болно. Эндээс $a^n \equiv -1 \pmod{p}$ болно. Мөн n -сондгой тул $(-a)^n \equiv 1 \pmod{p}$. Нөгөө талаас Фермагийн бага теоремоор $(-a)^{p-1} \equiv$

$1(p)$. Иймд $(-a)^{(n,p-1)} \equiv 1(p)$. Гэвч p нь n -ийн хамгийн бага анхны хуваагч тул $(n, p-1) = 1$. Иймд $-a \equiv 1(p)$. Эндээс $-7y \equiv 1(p)$ тул $-7 \cdot 6y \equiv 6(p) \Rightarrow -7 \equiv 6(p) \Rightarrow 13 \equiv 0(p)$ буюу $13|n$ гэж гарна.

A3. Тойрог дээр өгсөн n цэгийг аль ч 2 нь эдгээрээс ялгаатай цэгүүдээр огтлолцохгүй байхаар хэрчмээр холбоход үүсэх дүрсүүдийн олонлогийг F_n гэж тэмдэглэе. Хэрэв $f \in F_n$ бол өгсөн n цэгийг f дүрсийн оройнууд гэж нэрлэе. Эхлээд аливаа хэрчмийн төгсгөлүүд нь ялгаатай өнгөтэй байхаар $f \in F_n$ дүрсийн оройнуудыг 3 өнгөөр будаж болохыг n -ээр индукцлэн батлая. Мэдээж $n \leq 3$ бол ойлгомжтой. Иймд F_{n-1} олонлогийн аливаа дүрсийн холбогдсон оройнууд нь ялгаатай байхаар 3 өнгөөр будаж болдог гэж үзье. Хэрэв $f \in F_n$ бол 2-оос ихгүй хэрчим төгсгөлтэй ядаж 1 орой f -д олдохыг хялбархан харуулж болно. Тэгвэл энэ орой ба түүнд төгсгөлтэй хэрчмүүдийг арилгахад үүсэх дүрсийг f' гэж тэмдэглэвэл $f' \in F_{n-1}$ байна. Иймд индукцийн алхамаа f' дүрсийн оройнуудыг 3 өнгөөр будаж болох бөгөөд арилгасан оройд 2-оос ихгүй хэрчим төгсгөлтэй тул энэ оройг түүнтэй холбогдсон оройнуудаас ялгаатай өнгөөр будаж болно. Одоо хэрэв $f \in F_{148}$ бол дээр баталснаар f -н оройнуудыг гурван өнгөөр будаж болох бөгөөд ижил өнгийн 50 орой заавал олдоно. Эдгээр 50 оройн аль ч 2 нь хэрчмээр холбогдоогүй тул бодлого бодогдов.

B1. Гурвалжны талуудыг a, b, c гэвэл $a + b + c = 50$ болно. Талуудыг эрэмбэлэн $a \geq b \geq c$ гэвэл $50 = a + b + c \leq 3a \Rightarrow 17 \leq a$ бөгөөд гурвалжны тэнцэтгэл бишийг ашиглавал $50 = a + b + c > 2a \Rightarrow a < 25$ гэж гарна. $a \geq b \geq c$ талтай гурвалжин мохоо өнцөгт байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $a^2 > b^2 + c^2$. Иймд энэ нөхцөл биелэх (b, c) хосын хувьд $b - c \geq 2$ байвал $(b-1, c+1)$ хосын хувьд ч биелнэ (учир нь $(b-1)^2 + (c+1)^2 < b^2 + c^2$). Эндээс $a = 17, 18, \dots, 24$ хувьд (b, c) хосыг $2b \geq b + c = 50 - a$ гэдгээс $a \geq b \geq \frac{50-a}{2}$ нөхцөлийг хангахаар сонгож тэдгээрээр талаа хийсэн гурвалжнуудаас мохоо өнцөгтийг нь тоолно.

$a = 24$ үед $(b, c) = (24, 2); (23, 3); \dots; (13, 13)$ хосуудаас $(23, 3); (22, 4); \dots; (13, 13)$ гэсэн 11 хос бодлогын нөхцөлийг хангана.

$a = 23$ үед $(b, c) = (23, 4); (22, 5); \dots; (14, 13)$ хосуудаас $(22, 5); (21, 6); \dots; (14, 13)$ гэсэн 9 хос бодлогын нөхцөлийг хангана.

$a = 22$ үед $(b, c) = (22, 6); (21, 7); \dots; (14, 14)$ хосуудаас $(20, 8); (19, 9); \dots; (14, 14)$ гэсэн 7 хос бодлогын нөхцөлийг хангана.

$a = 21$ үед $(b, c) = (21, 8); (20, 9); \dots; (15, 14)$ хосуудаас $(17, 12); (16, 13); (15, 14)$ гэсэн 3 хос бодлогын нөхцөлийг хангана.

$a = 20$ үед $(b, c) = (20, 10); (19, 11); \dots; (15, 15)$ хосуудаас аль нь ч бодлогын нөхцөл хангахгүй.

$a = 19$ үед $(b, c) = (19, 12); (18, 13); (17, 14); (16, 15)$ хосуудаас аль нь ч бодлогын нөхцөл хангахгүй.

$a = 18$ үед $(b, c) = (18, 14); (17, 15); (16, 16)$ хосуудаас аль нь ч бодлогын нөхцөл хангахгүй.

$a = 17$ үед $(b, c) = (17, 16)$ байх бөгөөд уг гурвалжин хурц өнцөгт. Ийнхүү бодлогын нөхцөлийг хангах гурвалжны тоо 30 ширхэг байна.

В2. $n+m-1 | ((n+m-1)^2 + 2(n+m-1)) = (n^2+m^2-1) + 2nm$ ба бодлогын нөхцөл ёсоор $n+m-1 | (n^2+m^2-1)$ тул $n+m-1 | 2nm$ болно. $(n+m-1)$ ба $(n+m+1)$ нь 2-оос ялгаатай тул тэдний ХИЕХ нь 2-оос ихгүй байна. ХИЕХ нь 2 үед $\frac{1}{2}(n+m-1)(n+m+1) | 2nm$. Мөн ХИЕХ нь 1 үед $(n+m-1)(n+m+1) | 2nm$ байна. Эндээс аль ч тохиолдолд $2nm \neq 0$ ба $\frac{1}{2}(n+m-1)(n+m+1) \leq 2nm$ буюу $(n+m)^2 - 1 \leq 4nm \Rightarrow (n-m)^2 \leq 1$, n, m нь тэгш эрхтэй тул $n \geq m$ гэж үзэхэд харшлах зүйлгүй тул $n = m$ эсвэл $n = m + 1$ болно.

а) $n = m$ байг. Бодлогын эхний нөхцөл нь $2m+1 | 2m^2$ болно. Мөн $(2m+1, m) = 1$ ба $(2m+1, m) = 2$ тул дээрх нөхцөл шийдгүй.

б) $n = m + 1$ байг. Бодлогын хоёр нөхцөлд орлуулбал

$$\begin{cases} (n+m+1) | 2nm \\ (n+m-1) | n^2+m^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(m+1) | 2m(m+1) \\ 2m | 2m(m+1) \end{cases}$$

болж дурын натурал m -ийн хувьд биелнэ. Бид m, n нь тэгш хэмтэй гэдгийг тооцвол (m, n) нь дараалсан хоёр натурал тоон хос бүр бодлогын шийд болно.

В3. Эхлээд a, b, c, d, e, f нь 210-ын хуваагчид бөгөөд бүгд хоорондоо ялгаатай байх албагүй $abcdef > 210^3$ байх эрэмбэлэгдсэн (a, b, c, d, e, f) зургаатын тоог олъё. $abcdef > (210)^3 \Leftrightarrow \frac{210}{a} \cdot \frac{210}{b} \cdot$

$\frac{210}{c} \cdot \frac{210}{d} \cdot \frac{210}{e} \cdot \frac{210}{f} < 210^3$ тул үржвэр нь 210^3 -ээс их байх эрэмбэлэгдсэн зургаатын тоо нь үржвэр нь 210^3 -ээс бага байх эрэмбэлэгдсэн зургаатын тоотой тэнцүү байна. $abcdef = 210^3 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3$ байх зургаатын тоо $(C_6^3)^4$ тул нөхцөл хангах эрэмбэлэгдсэн зургаатын тоо $\frac{16^6 - (C_6^3)^4}{2}$ байна. Одоо анхны бодлогоо бодъё. Хэрэв $f = 210$ байвал $abcde > 210^2$ болох тул анхны бодлогын хариу $\frac{1}{6} \cdot \frac{16^6 - (C_6^3)^4}{2}$ болно.

3.7 ММО-50, Дундын багш

Э.Төрбат

I өдрийн бодлого

A1 (Э.Төрбат) B, D, E, F, C цэгүүд 1 шулуун дээр бичигдсэн дарааллаараа оршино. A нь дээрх шулуун дээр үл орших цэг байг. $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ -үүд нь харгалзан ABD, ADE, AEF, AFC гурвалжнуудад багтсан тойргууд байг. $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ -үүд нь харгалзан ABD, ADE, AEF, AFC гурвалжнуудын A оройд харгалзах гадаад багтсан тойргууд байг. Хэрэв $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ тойргууд нь BC -ээс ялгаатай ерөнхий шүргэгчтэй бол $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ тойргууд нь мөн BC -ээс ялгаатай ерөнхий шүргэгчтэй гэж батал.

A2 (Ч Сугардорж) 2014 ширхэг a , 2014² ширхэг b үсгүүдээр бичигдэх дараах 2 нөхцөлийг хангах үгийн тоог ол.

i.) Дурын $i \leq k \leq 2014 \cdot 2015$ тооны хувьд үгийн эхний k ширхэг үсгийг авахад b үсгийн тоо ямагт a үсгийн тооноос багагүй байдаг.

ii) Дурын $i \leq k \leq 2014 \cdot 2015$ Тооны хувьд үгийн төгсгөлийн k ширхэг үсгийг авахад b үсгийн тоо ямагт a үсгийн тооноос багагүй байдаг.

A3 (Б.Бат-Од) Дурын бүхэл a тооны хувьд $S_a = \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2} + \dots + \frac{a^{p-1}}{p-1}$. Тэгвэл n бүхэл тооны хувьд $S_{2n} + S_{2n-1} - 2S_n - S_2 = \frac{m}{k}$, (m, k -харилцан анхны тоонууд) бол m тоо нь p -д хуваагдана гэж батал.

II өдрийн бодлого

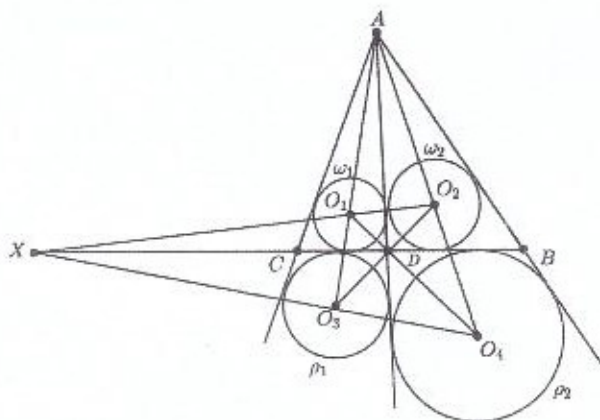
B1 (У.Батзориг) $2^{\varphi(n)} + 1 : m$ ба $2^{\varphi(m)} + 1 : n$ байдаг бүх (n, m) натурал тоон хосыг ол. (Эцд $\varphi(n)$ нь n -ээс хэтрэхгүй n -тэй харилцан анхны тоонуудын тоо.)

B2 (Б.Бат-Оргил) $f(m^3 + f(n)) = f(m)^3 + n$ нөхцөл $\forall m, n \in \mathbb{N}$ биеддэг байх бүх $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ функцыг ол.

В3 (Б.Хоролдагва) Паралель 2 төмөр замын нэг дээр нь n нөгөө дээр нь m өртөө байдаг. Энэ 2 замын дунд шинээр байгуулсан өртөөг бусад бүх өртөөтэй холбосон байв. Хэмнэлтийн бодлогоор зарим өртөөнүүдийн хоорондох замуудыг хааж нийт $n + m$ ширхэг өртөө хоорондын зам үлдээхдээ аль ч өртөөнөөс өөр аль ч өртөөнд очиж болдог байх төлөвлөлтийг хичнээн аргаар гүйцэтгэж болох вэ?

Бодолт:

A1. Бодолтондоо дараах леммийг батлан ашиглая.



Лемм: ABC гурвалжны BC тал дээр D цэг авав. ACD, ADB гурвалжнуудад багтсан тойргууд нь харгалзан $\omega_1(O_1, r_1), \omega_2(O_2, r_2)$, мөн энэ гурвалжнуудын гадаад багтсан тойргууд нь (BC талын дотоод цэгийг шүргэсэн) харгалзан $\rho_1(O_3, r_3), \rho_2(O_4, r_4)$ байг. Тэгвэл O_1O_2, O_3O_4, BC шулуунууд 1 цэгт огтлолцоно.

Баталгаа: $BC \cap O_3O_4 = X$ гээд $X \in O_1O_2$ гэж батлая. Нэг өнцөгт багтсан 2 тойргийн төвийг холбосон шулуун өнцгийн өнцгийн төвийг дайрах тул $A = (O_1O_3) \cap (O_2O_4), D = (O_1O_4) \cap (O_2O_3)$ байна. AO_1O_4 гурвалжин ба O_3O_2 огтлогчийн хувьд Менелайн теорем хэрэглэвэл: $1 = \frac{O_3O_1}{O_3A} \cdot \frac{DO_4}{DO_1} \cdot \frac{O_2A}{O_2O_4} = \frac{O_3A - O_1A}{O_3A}$.

$$\frac{DO_4}{DO_1} \cdot \frac{O_2A}{O_4A - O_2A} = \left(1 - \frac{O_1A}{O_3A}\right) \cdot \frac{DO_4}{DO_1} \cdot \left(\frac{1}{\frac{O_4A}{O_2A} - 1}\right) = \left(1 - \frac{r_1}{r_3}\right) \left(\frac{r_4}{r_4 - r_1}\right) = \frac{(r_3 - r_1)}{r_4 - r_2} \cdot \frac{r_4 r_2}{r_3 r_1} \text{ адилтгал биелнэ (*). Нөгөө}$$

талаас Менелайн урвуу теоремоор $X \in (O_1O_2)$ гэж батлах нь $\frac{XO_3}{XO_4} \cdot \frac{O_1A}{O_1O_3} \cdot \frac{O_2O_4}{O_2A} = 1$ гэж батлахтай тэнцүү чанартай. Цаашлаад

$$\frac{XO_3}{XO_4} = \frac{r_3}{r_4} \cdot \frac{O_1A}{O_1O_3} = \frac{O_1A}{O_3A - AO_1} = \frac{1}{\frac{O_3A}{O_1A} - 1} = \frac{1}{\frac{r_3}{r_1} - 1} = \frac{r_1}{r_3 - r_1},$$

$$\frac{O_2O_4}{O_2A} = \frac{AO_4 - AO_2}{O_2A} = \frac{AO_4}{AO_2} - 1 = \frac{r_4}{r_2} - 1 = \frac{r_4 - r_2}{r_2}$$

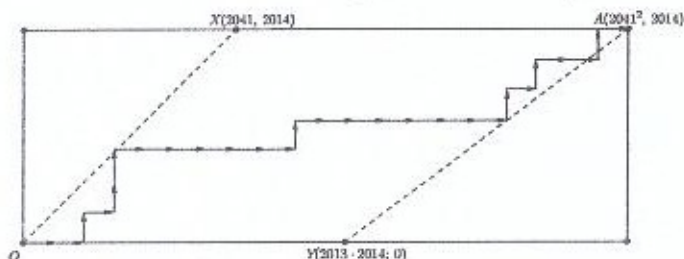
тул (*) ёсоор $\frac{XO_3}{XO_4} \cdot \frac{O_1A}{O_1O_3} \cdot \frac{O_2O_4}{O_2A} = \frac{r_3}{r_4} \cdot \frac{r_1}{r_3 - r_1} \cdot \frac{r_4 - r_2}{r_2} = 1$ болж $X \in O_1O_2$ болж O_1O_2, O_3O_4, BC шулуунууд ерөнхий цэгтэй нь батлагддаг. Лемм батлагддаг.

Одоо бодлогоо бодъё. $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ тойргуудын BC -с ялгаатай ерөнхий шүргэгчийг l гэе. $l \cap BC = X$ гэе. l, BC -ээр үүсгэгдэх өнцгийн биссектрис дээр $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ -үүдийн төвүүд орших тул энэ тойргын төвүүд ба X гэсэн 5 цэг 1 шулуун дээр оршино. Одоо леммээ ABE, ADF ,

AEC гурвалжнуудын хувьд дараалан хэрэглэвэл X ба $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ тойргуудын төвүүд гэсэн 5 цэг нэг шулуун дээр орших нь батлагдана. Энэ 5 цэгийг агуулах шулууны хувьд BC -г тэгш хэмээр хувиргахад гарах шулуун $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ тойргуудын шүргэх билээ. Бодлого бодогдов.

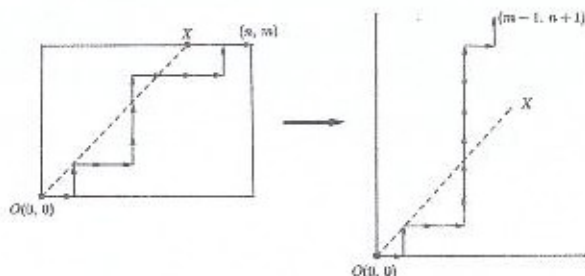
А2. (x, y) цэгээс $(x+1, y)$ цэгт шилжих үйлдлийг баруун шилжих үйлдэл, $(x, y+1)$ цэгт шилжих үйлдлийг дээш шилжих үйлдэл гэе. Тэгээд үг бүтээхдээ a үсгийг дээш шилжих үйлдэл, b үсгийг баруун тийш шилжих үйлдэл гэвэл бодлого маань $O(0, 0)$ цэгээс баруун ба дээш шилжих үйлдлээр OX, AY хэрчмүүдийг нэвтэрч гаралгүйгээр A цэгт ирэх замын тоог олох бодлоготой адил болно. Энд $X(2014, 2014), A(2014, 2014^2)$,

$Y(0, 2013 \cdot 2014)$ цэгүүд. Үндсэн бодолтондоо дараах леммийг ашиг-
лая.



Лемм: $n \geq m$ натурал тоонууд байг. Баруун болон дээш шил-
жих үйлдлүүдээр OX хэрчмийг нэвтлэн гарахгүй байх $(0, 0)$ цэ-
гээс (n, m) -д хүрэх замын тоо $C_{m+n}^m - C_{m+n}^{m-1}$ байна ($X(m, m)$ цэг).

Баталгаа: $(0, 0)$ цэгээс (n, m) хүрэх нийт замын тоо C_{m+n}^m . Одоо
 OX -г нэвтлэж гардаг замын тоог олоод хасъя. OX -г нэвт гардаг
ямар нэг зам авч үзье. Энэ замын OX -ээс дээш гарсан эхний $(\uparrow)$
ирмэгийг авъя. Энэ хүртэл k ширхэг баруун, $k + 1$ ширхэг дээш
үйлдэл хийсэн байсан. Үүнээс цаашихи баруун үйлдэл бүрийг дээш
үйлдлээр, дээш үйлдэл бүрийг баруун үйлдлээр солиход эцэст нь
 $(m - 1, n + 1)$ цэг дээр хүрэх шинэ зам үүснэ.



Үүнээс O цэгээс OX -г дайран гарч (n, m) -д хүрэх зам бүрд
 O цэгээс $(m - 1, n + 1)$ хүрэх нэг замыг харилцан нэг утгатай
харгалзуулж болох нь хялбар харагдана. Мөн O цэгээс $(m - 1, n + 1)$
хүрэх C_{m+n}^{m-1} зам байх тул бидний олох тоо $C_{m+n}^m - C_{m+n}^{m-1}$ болж
лемм батлагдав.

Бодолтоцдоо оръё. OX -г дайрч өнгөрөн A -д хүрэх замын тоог N , OY -г дайран A -д хүрэх замын тоог M , OX, OY -г аль алийг нь дайран A -д хүрэх замын тоог K ба O -оос A -д хүрэх нийт замын тоог S гэвэл бидний олох тоо $S = M + N + K$ байхыг үнэмшихэд төвөггүй. Лемм ёсоор $M = C_{2014+2015}^{2013}$. O -оос A -д хүрэх замыг A -вас O -д хүрэх зам гэж урвуулан итгэвэл $M = N$ болох нь илт. Леммийн баталгаатай адилаар OX, OY -г аль алийг нь дайрсан зам бүрт $(-1, 1)$ цэгээс $(2014^2+1, 2013)$ цэгт хүрэх нэг замыг харилцан нэг утгатай байхаар харгалзуулж боино. $(-1, 1) \rightarrow (2014^2+1, 2013)$ замын тоо

$$C_{2014^2+2+2012}^{2012} = C_{2014+2015}^{2012}$$

O -оос A хүрэх нийт замын тоо $C_{2014^2+2014}^{2014} = C_{2014+2015}^{2014}$ тул бидний олох тоо

$$C_{2014+2015}^{2014} - 2 \cdot C_{2014+2015}^{2013} + C_{2014+2015}^{2012}$$

А3. $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}$ рациональ тоонууд нь $q_1 \cdot q_2 \not\equiv 0 \pmod{p}$ ба $p_1 q_2 - p_2 q_1 \equiv 0 \pmod{p}$ бол $\frac{p_1}{q_1} \equiv \frac{p_2}{q_2} \pmod{p}$ гэж бичье. Тэгвэл $S_{2n} + S_{2n-1} - 2S_n - S_2 \equiv 0 \pmod{p}$ гэж батлахад болно.

Өгүүлбэр 1: $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ бол $\frac{1}{p} \cdot C_p^k \equiv \frac{(-1)^{k-1}}{k} \pmod{p}$ байна.

$$\begin{aligned} \text{Баталгаа: } \frac{1}{p} C_p^k &\equiv \frac{(p-1) \cdot (p-2) \cdot \dots \cdot (p-k+1)}{k!} \equiv \\ &\equiv \frac{(-1) \cdot (-2) \cdot \dots \cdot (-k+1)}{k!} \equiv \frac{(-1)^{k-1}}{k} \pmod{p}. \end{aligned}$$

Мөрдлөгөө:

$$S_a \equiv \frac{(a-1)^p - a^p + 1}{p} \pmod{p}$$

$$\begin{aligned} \bullet S_a &= - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-a)^k (-1)^{k-1}}{k} \equiv \sum_{k=1}^{p-1} (-a)^k \frac{1}{p} C_p^k \equiv - \\ &- \frac{1}{p} \left(-1 - (-a)^p + \sum_{k=0}^{p-1} (-a)^k C_p^k \right) \equiv \frac{(a-1)^p - a^p + 1}{p} \pmod{p} \quad \nabla \end{aligned}$$

Мөрдлөгөө ёсоор $S_{2n} + S_{2n-1} - 2S_n - S_2 \equiv \frac{1}{p}$.
 $\cdot \left((2n-1)^p - (2n)^p + 1 + (2n-2)^p - (2n-1)^p + 1 - \right.$
 $\left. - 2(n-1)^p + 2n^p - 2 - 1 + 2^p - 1 \right) \equiv -\frac{1}{p}(2^p - 2) \cdot \left((n^p - \right.$
 $\left. - n) - ((n-1)^p - (n-1)) \right) \pmod{p}$ ба энд Фермагийн бага теорем
 ёсоор $p|2^p-2$, $p|n^p-n$, $p|(n-1)^p-(n-1)$ тул $S_{2n} + S_{2n-1} - 2S_n - S_2 \equiv$
 $0 \pmod{p}$ болж батлагдав.

В1. Хариу: $(n, m) = (1, 1); (1, 3); (3, 1)$.

$n, m > 1$ байг. $\varphi(m) = 2^{m_0} \cdot m_1$, $\varphi(n) = 2^{n_0} \cdot n_1$ ($m_0, n_0 \geq 0$, m_1, n_1 -сондгой натурал тоонууд.) $m_0 \geq n_0$ байг. 2-ын n модулиарх илтгэгч нь k байг. Өөрөөр хэлбэл k нь $n|2^k - 1$ байх хамгийн бага тоо. $k = 2^{k_0} \cdot k_1$, (k_0 -сөрөг биш бүхэл тоо, k_1 -сондгой натурал тоо). n нь сондгой тооны хуваагч тул сондгой байна. Иймд Эйлерийн теоремоор $n|2^{\varphi(n)} - 1$, мөн илтгэгчийн чанар ёсоор $k|\varphi(n) \Rightarrow k_0 \neq n_0$ (1) байна. Мөн бодлогын нөхцөлөөс $n|(2^{\varphi(m)} - 1)(2^{\varphi(m)} + 1) = 2^{2\varphi(m)} - 1$ болох ба илтгэгчийн чанар ёсоор $k|2\varphi(m)$ байна. $n \nmid 2^{\varphi(m)} - 1$ тул $k \nmid \varphi(m)$ байна. $k|2\varphi(m)$ ба $k \nmid \varphi(m)$ гэдгээс $k_0 = m_0 + 1$ болно.

(1)-ээс $n_0 \geq m_0 + 1$ болж $m_0 \leq n_0$ -д зөрчинө. $n_0 > m_0$ бол мөн адил зөрчил үүсэх тул $m = 1$ эсвэл $n = 1$ байна. $m = 1$ бол $n|3 \Rightarrow n = 3$ эсвэл $n = 1$ болох ба $(m, n) = (1, 1); (1, 3); (3, 1)$ аль аль нь шийд болно. $n = 1$ үед адилаар $(m, n) = (3, 1); (1, 1)$ шийдүүд гарах тул $(m, n) = (1, 1); (1, 3); (3, 1)$ үүд нь л бодлогын шийд болно.

В2. Уг нөхцлийг $P(m, n)$ орлуулга гээд, 2 тал дээр нь k^3 тоог нэмж 2 талаас нь f функц авбал:

$$\left. \begin{aligned} f(k^3 + f(m^3 + f(n))) &= f(k^3 + f(m)^3 + n) \\ P(k, m^3 + f(n)) &\Rightarrow f(k^3 + f(m^3 + f(n))) = f(k)^3 + m^3 + f(n) \end{aligned} \right\}$$

$\Rightarrow$

$$f(k^3 + f(m)^3 + n) = f(k)^3 + m^3 + f(n) \quad (*)$$

(*) - д $n = l^3$ гэвэл:

(*) - д $k = l$, $n = k^3$ гэвэл:

$$\left. \begin{aligned} f(k^3 + f(m)^3 + l^3) &= f(k)^3 + m^3 + f(l^3) \\ f(l^3 + f(m)^3 + k^3) &= f(l)^3 + m^3 + f(k^3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$f(k)^3 - f(k^3) = f(l)^3 - f(l^3) = \text{const} = c, c \in \mathbb{Z}(1).$$

(*) - д $k = f(s)$ гэвэл :

(*) - д $k = l, n = k^3$ гэвэл :

$$\left. \begin{aligned} f(f(s)^3 + f(m)^3 + n) &= f(f(s))^3 + m^3 + f(n) \\ f(f(m)^3 + f(s)^3 + n) &= f(f(m))^3 + s^3 + f(n) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$f(f(s))^3 - s^3 = f(f(m))^3 - m^3 = \text{const} = t, t \in \mathbb{Z}(2) \text{ гэс.}$$

Өөрөөр хэлбэл $f(f(m))^3 = m^3 + t$ ба хангалттай их m -ийн хувьд $m^3 + t$ нь бүтэн куб болж чадахгүй тул $t = 0$ байна. Ө.х $f(f(m))^3 = m^3$ буюу $f(f(m)) = m$ болно (*).

$$(2) - \text{ooc } f(f(m))^3 = m^3$$

$$(1) - \text{т } l = f(m) \Rightarrow f(f(m))^3 = f(f(m)^3) + c \left\} \Rightarrow$$

$$f(f(m)^3) = m^3 - c \text{ буюу } m = 1 \text{ гэвэл } 0 < f(f(1)^3) = 1 - c \Rightarrow c < 1 \text{ байна.}$$

$c = 0$ гэж баталъя. $c < 0$ үед

$$f(l)^3 - c = f(l^3)$$

$$P(l, -c) \Rightarrow f(l)^3 - c = f(l^3 + f(-c)) \left\} \Rightarrow f(l^3) = f(l^3 + f(-c)).$$

Нөгөө талаас $f(a) = f(b)$ үед

$$P(m, a) \Rightarrow f(m^3 + f(a)) = f(m)^3 + a$$

$$P(m, b) \Rightarrow f(m^3 + f(b)) = f(m)^3 + b$$

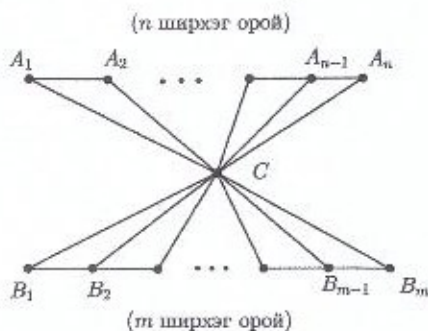
$$\left. \begin{aligned} P(m, a) &\Rightarrow f(m^3 + f(a)) = f(m)^3 + a \\ P(m, b) &\Rightarrow f(m^3 + f(b)) = f(m)^3 + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = b \text{ тул } f\text{-инъектив.}$$

ө.х. $f(l^3) = f(l^3 + f(-c)) \Rightarrow f(-c) = 0$ буюу зөрчил. $c = 0 \Rightarrow f(l^3) = f(1)^3 \Rightarrow f(1)(f(1)^2 - 1) = 0 \Rightarrow f(1) = 1$ болно.

$P(1, n) \Rightarrow f(1 + f(n)) = 1 + n$ болно. $f(n) = n$ гэж индукцлэж баталъя. $f(1) = 1$ үнэн. $f(n) = n$ үнэн бол $f(1 + f(n)) = f(n + 1) = n + 1$ болж батлагдав. $f(n) = n$ функц бодлогын нөхцөл хангана.

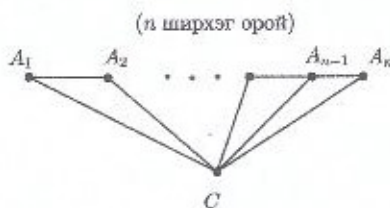
В3. I бодолт

(XI сургуулийн багш Л. Буянтогтохын бодолт)



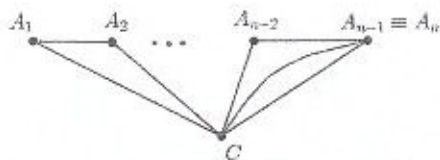
Зураг-1.

Бодох бодлого маань зураг 1-т үзүүлсэн графын суурь модны тоог олохтой ижил юм.



Зураг-2.

Хэрэв G графын суурь модны тоог олчихвол хангалттай. a_n ээр G графын суурь модны тоог тэмдэглэе. G графын $A_n A_{n-1}$ ирмэгийг e гэж тэмдэглэе. e ирмэгийг арилгаад A_n ба A_{n-1} оройг давхцуулсан графыг $G \cdot e$ граф гее.



Зураг-3.

G графын суурь моднууд e -г агуулсан e -г агуулаагүй гэж 2 хэсэгт хуваагдана. e -г агуулаагүй моднууд нь G -ээс e ирмэгийг

хассан графын моднууд байна. Энэ графын суурь модонд $A_n C$ ирмэг заавал орох учир G графын e -г агуулаагүй суурь модны тоо a_{n-1} байна. Харин e -г агуулсан модны хувьд $A_{n-1} C$ ба $A_n C$ ирмэгүүдийн ядаж нэг нь арилна. Иймд G -е графын суурь модны тоо нь e -г агуулаагүй G графын суурь модны тоо байна. $G \cdot e$ графын суурь модны тоо нь $A_{n-1} C$ арилсан үед a_{n-1} , мөн $A_n C$ арилсан үед a_{n-1} бөгөөд $A_{n-1} C$ ба $A_n C$ ирмэгүүд хоёул арилсан үеийн модны тоо 2 удаа нэмэгдсэн тул a_{n-2} -ийг хасч өгнө. Иймд $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$ рекуррент томъёо биелнэ. Энд $a_1 = 1$ ба $a_2 = 3$ болохыг хялбархан тооцож болно. Энэ дарааллыг бодвол $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$ гэж олдох тул бодлогын хариу нь $\frac{1}{5} \left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^m + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^m \right)$ болох юм.

II бодолт (Дархан аварга Б.Баяржаргалын онцгой шагнал хүртсэн бодолт)

Энд буй $2n-1$ ирмэгээс (зурал-2) бодлогын нөхцөлд тохируулан n ирмэгийг нь үлдээх боломжийн тоог u_n тэмдэглэе. $A_1, \dots, A_n$ станцууд тус бүр $d_1, d_2, \dots, d_e$ станцууд бүхий l хэсэгт хуваагдсан байг. Үлдэх график холбоост байхын тулд d_i хэсэг бүрээс C рүү 1 ирмэг гарах ёстой $(n-1-(l-1)+l=n)$ тул тийм боломжийн тоо $d_1 d_2 \dots d_e$ байна. Иймд $\mathbb{N}^e|_n := \{\vec{d} = (d_1, \dots, d_e) \in \mathbb{N}^e | d_1 + \dots + d_e = n\}$ гэвэл

$$u_n = \sum_{e=1}^n \sum_{\vec{d} \in \mathbb{N}|_n} d_1 \dots d_e$$

болно.

Одоо (u_n) дарааллын ердийн уламжлагч функц (еуф) ийг бодё. Натурал тоон дарааллын еуф $F(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n + \dots$ тул $U(x) := \sum_{k \geq 1} u_k x^k$ гэвэл

$$U(x) = \sum_{k \geq 1} (F(x))^k \quad (1) \text{ болохыг шалгаж болно.}$$

$$\frac{F(x)}{x} = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow F(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \Rightarrow F^k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{2k}} = \\
&= a_{k_1}x + a_{k_2}x^2 + \dots \text{ гээд} \\
&\frac{1}{(1-x)^{2k}} = \sum c_i x^i = (1-x)^{-2k} \text{ гэвэл} \\
&c_i = (-1)^i \binom{-2k}{i} = \frac{-2k \cdot (-2k-1) \dots (-2k-i+1)}{i!} \cdot (-1)^i = \binom{2k+i-1}{i}. \\
&F^k(x) = x^k \cdot \frac{1}{(1-x)^{2k}} = \sum c_i x^{i+k} = \sum_i a_{k_i} x^i = \\
&= \sum_i c_{i-k} x^i \Rightarrow \forall i, k, a_{k_i} = c_{i-k} = \binom{k+i-1}{i-k}. \\
&c_{i-\Gamma} \text{ мөн МК II, §12.3 (7)-аар бодсон ч болно.} \\
&u_n = \sum_{k=1}^n a_{k_n} = \sum_{k=1}^n \binom{k+n-1}{n-k}. \text{ Иймд олох тоо } u_n u_m \text{ болно.}
\end{aligned}$$

4 ОУ-ын математикийн 55-р олимпиад

4.1 ОУМО - 55, Сорил 1

C1-1 (Б. Ганбат) $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}$ бол $A^* = \{a_i + a_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ гэж тэмдэглэе (Энд A^* нь мульт-олонлог байна). Жишээ нь: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ бол $A^* = \{3, 4, 5, 5, 6, 7\}$ байна. Хэрэв $A \neq B$ ба $A^* = B^*$ бол $|A| = |B| = 2^k$ гэж батал.

C1-2 (Б. Ганбат) $a_1, a_2, \dots, a_{2014}$ нь эерэг бодит тоонууд ба эдгээрийн ядаж нэг нь бүхэл биш бол $(n; [a_1 n] + [a_2 n] + \dots + [a_{2014} n]) = 1$ байх натурал n төгсгөлгүй олон бий гэж батал.

C1-3 (Б. Ганбилэг) I цэгт төвтэй R радиустай γ тойргийг багтаасан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн дотор O цэгт ($I \neq O$) төвтэй r радиустай ω тойрог оршино. $\angle ABC, \angle BCD, \angle CDA, \angle DAB$ өнцгүүдэд багтах $\gamma_B, \gamma_C, \gamma_D, \gamma_A$ тойргууд нь ω тойргийг харгалзан B_1, C_1, D_1, A_1 цэгүүдээр шүргэнэ. Хэрэв γ_B, γ_C нь ω -г гадаад байдлаар, γ_D, γ_A нь ω -г дотоод байдлаар шүргэдэг бөгөөд $AA_1 \cap DD_1 = P, BB_1 \cap CC_1 = Q$ бол $\frac{IP + IQ}{PQ}$ харьцааг ол.

C1-4 (Б. Баяржаргал, Ч. Гантөмөр) Ямар ч эерэг бодит тоо l өгөгдөхөд дөрвөлжин шутамтай төгсгөлгүй цаасан дээр l урттай босоо савааг хөдөлгөн 2014-өөс олонгүй зангилаа цэгийг дайруулан хэвтээ байрлалд оруулж чадах уу?

Бодолт:

C1-1. $|A| = n, |B| = m$ гэвэл $|A^*| = C_n^2, |B^*| = C_m^2$ болох ба $A^* = B^*$ тул $C_n^2 = C_m^2 \Rightarrow n = m$ болно. $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}; B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ байг. $f(x) = x^{a_1} + x^{a_2} + \dots + x^{a_n}; g(x) = x^{b_1} + x^{b_2} + \dots + x^{b_n}$ олон гишүүнтүүдийг авч үзвэл $A^* = B^*$ гэдгээс $f(x)^2 - f(x^2) = g(x)^2 - g(x^2)$ гэж гарна. Мөн $f(1) = g(1) = n$ байна. $f(1) - g(1) = n - n = 0$ учраас $f(x) - g(x) = (x-1)^k h(x), k \geq 1, h(1) \neq 0$ байх $h(x)$ олон гишүүнт олдоно. $f(x) + g(x) = \frac{f(x)^2 - g(x)^2}{f(x) - g(x)} = \frac{f(x^2) - g(x^2)}{f(x) - g(x)} = \frac{(x^2-1)^k h(x^2)}{(x-1)^k h(x)}$ буюу $f(x) + g(x) = (x+1)^k \frac{h(x^2)}{h(x)}$

гэж гарах ба сүүлийн адилтгалд $x = 1$ гэж авбал $n = 2^{k-1}$ болж батлах зүйл батлагдав.

C1-2. Эсэргээс нь бид $\forall n \geq M$ хувьд $(n; [a_1n] + [a_2n] + \dots + [a_{2014}n]) \neq 1$ байх M олддог гэе. Тэгвэл $\forall p_n \geq M, p_n$ -анхны тооны хувьд $(p_n; [a_1n] + [a_2n] + \dots + [a_{2014}n]) \neq 1$ буюу $[a_1p_n] + [a_2p_n] + \dots + [a_{2014}p_n] = p_n x_n$ байх $x_n \in \mathbb{N}$ олдоно.

$$x_n = \frac{[a_1p_n] + [a_2p_n] + \dots + [a_{2014}p_n]}{p_n}$$

дараалал $n \rightarrow \infty$ үед $a_1 + a_2 + \dots + a_{2014}$ -рүү нийлэх нь илт ба $(x_n)_{n \geq N}$ -дараалал нь бүхэл тоон дараалал тул $\forall n \geq P : x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{2014}$ байх P олдоно. Энэ нь $\forall n \geq P : \{a_1p_n\} + \{a_2p_n\} + \dots + \{a_{2014}p_n\} = 0$ гэдэгтэй эквивалент тул $\forall n \geq P : a_i p_n, i = 1, 2, \dots, 2014$ -үүд бүгд бүхэл гэж гарах ба эндээс $a_i, i = 1, 2, \dots, 2014$ -үүд бүгд бүхэл гэж гарч зөрчил үүснэ.

C1-3. Бодлогын нөхцөл ёсоор $R > r$. А цэгт төвтэй k коэффициенттэй гомотетийг H_A^k гэж тэмдэглэе. $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c, \gamma_d$ тойргуудын радиус харгалзан r_a, r_b, r_c, r_d байг. $H_{B_1}^{-\frac{r_a}{r}}(\omega) = \gamma_b$ ба $H_B^{\frac{R}{r}}(\gamma_b) = \gamma \Rightarrow H_B^{\frac{R}{r}} \circ H_{B_1}^{-\frac{r_a}{r}}(\omega) = \gamma$. $H_Q^{-\frac{R}{r}} = H_B^{\frac{R}{r}} \circ H_{B_1}^{-\frac{r_a}{r}}$ гэвэл $Q' \in BB_1$. Үүнтэй адилаар $Q' \in CC_1$ буюу $Q' \equiv Q$ болно. $H_Q^{-\frac{R}{r}}(O) = I \Rightarrow QI = \frac{R}{r}QO$, $AA_1 \cap DD_1 = P$ нөхцөл нь өмнөхийн адилаар $H_P^{\frac{R}{r}}(\omega) = \gamma$. Эндээс $H_P^{\frac{R}{r}}(O) = I$ буюу $PI = \frac{R}{r}PO$ байна. I, Q, O, P цэгүүд нэг шулуун дээр энэ дарааллаараа оршино.

$$IP + IQ = \frac{R}{r}(PO + QO) = \frac{R}{r}QP \Rightarrow \frac{IP + IQ}{QP} = \frac{R}{r}.$$

$$\text{C1-4. } \forall k \in \mathbb{N}\text{-ын хувьд } \begin{cases} n \equiv p_0(p_0^2) \\ n+1 \equiv p_1(p_1^2) \\ \dots\dots\dots \\ n+k \equiv p_k(p_k^2) \end{cases} \quad \text{систем үлдэгдлийн}$$

тухай Хятадын теоремоор эсрэг бүхэл n шийдтэй. Энд $p_0, p_1, \dots, p_k$ нь $4t + 3$ хэлбэрийн ялгаатай анхны тоонууд. Тэгвэл $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | n \leq x^2 + y^2 \leq n + k\}$ -цагирагт нэг ч зангилааны цэг байх-

гүй. Эсэргээс нь $x^2 + y^2 = n + t, 0 \leq t \leq k, x, y \in \mathbb{Z}$ байдаг гэвэл $x^2 + y^2 \equiv p_t(p_t^2)$ буюу $x^2 + y^2 \equiv 0(p_t), x^2 + y^2 \not\equiv 0(p_t^2), p_t = 4l + 3$ болно. $x^2 \equiv -y^2(p_t) \Rightarrow x \equiv y \equiv 0(p_t)$ буюу $p_t^2 | x^2 + y^2$ болж зөрчил үүснэ.

$k > \frac{l^2}{2}$ гэж авахад $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | n \leq x^2 + y^2 \leq n + k\}$ -цагирагт l урттай саваа агуулагдах нь илт бөгөөд энэ цагираг дотроо l урттай саваагаа эргүүлэхэд нэг ч зангилааны цэг дайрахгүй.

4.2 ОУМО - 55 Сорил 2

C2-1 (Ч. Гантөмөр) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(0) = 0$ ба $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f(2x) \geq x + f(x) \text{ ба } f(3x) \leq 2x + f(x)$$

тэнцэтгэл биш биелж байх бүх тасралтгүй f функцийг ол.

C2-2 (В. Хоролдагва) G нь оройн зэргүүдийн олонлог нь $\{1, 2, \dots, k\}$ байх 2014 оройтой гурвалжин агуулаагүй граф бол k тооны хамгийн их утгыг ол.

C2-3 (Л. Буянтогтох) $0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ ба $k \in \mathbb{N}$ бол

$$\sqrt[k]{x_1^k + x_n^k - \frac{x_1^k + \dots + x_n^k}{n}} \geq x_1 + x_n - \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

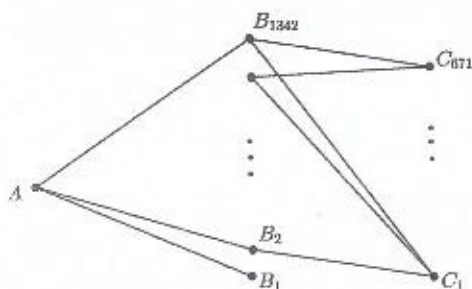
тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

Бодолт:

C2-1. $g(x) = f(x) - x, x \in \mathbb{R}$ гээ. Өгсөн нөхцөлөөс $f(2x) = g(2x) + 2x \geq g(x) + 2x \Leftrightarrow g(2x) \geq g(x)$ ба $f(3x) = g(3x) + 3x \leq g(x) + 3x \Leftrightarrow g(3x) \leq g(x)$ болно. Ө.х. $\forall x \in \mathbb{R}: g(3x) \leq g(x) \leq g(2x)$ болов. $\forall a > 0$ тоог авч үзье. $m = \min_{x \in [-a, a]} g(x)$ ба $M = \max_{x \in [-a, a]} g(x)$ болог. Вейеринграссын теоремоос $g(x_0) = M$ байх $x_0 \in [-a, a]$ цэг олдоно. $x_n = 3^{-n}x_0, n = 1, 2, \dots$ дараалал байгуулъя. $\forall x \in \mathbb{R}: g(3x) \leq g(x) \Rightarrow g(x_n) \leq g(x_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}$ болно $\Rightarrow g(x_n) \geq g(x_0) = M, \forall n \in \mathbb{N}$ бөгөөд $x_n \in [-a, a], \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow g(x_n) \leq M$ болж $\forall n \in \mathbb{N}: g(x_n) = M$ болно. $g(x)$ -тасралтгүй тул $\lim_{n \rightarrow \infty} (g(x_n)) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) =$

$g(0) = 0 = M \Rightarrow \forall x \in [-a, a] : g(x) \leq 0$ болов. Адилаар $g(2x) \geq g(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g(x) \geq 0, x \in [-a, a]$ гэж гарна. Иймд $\forall x \in [-a, a] : g(x) \equiv 0$ болов. Эндээс $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) \equiv 0$ буюу $f(x) = x$ болно.

C2-2. $k \geq 1343$ байг. Тэгвэл оройн зэрэг нь 1343 байх ямар нэг оройг A гэе. Харин оройн зэрэг нь 672-оос багагүй ямар нэг B оройг авч үзье. A, B 2 орой ирмэгээр холбогдсон байг. Тэгвэл үлдсэн 2012 оройны 1342 орой нь A -тай, 671 орой нь B -тэй ирмэгээр холбогдоно. A -ын хөршүүдийн олонлогыг $S(A)$ гэвэл $671 + 1342 > 2012$ байх тул $S(A) \cap S(B) \neq \emptyset \Rightarrow \Delta$ үүснэ $\Rightarrow A, B$ 2 орой хөрш биш $\Rightarrow 672, 673, \dots, 1342$ оройн зэрэгтэй дор хаяж 671 орой бий тул A дор хаяж 671 оройтой ирмэгээр холбогдохгүй. Нөгөө талаас A яг 1343 оройтой ирмэгээр холбогдох тул $671 + 1343 > 2013$ болж зөрчил үүснэ. Иймд $k < 1343$ байна. $k = 1342$ үед



A нь $B_1, B_2, \dots, B_{1342}$ -тэй, C_1 нь $B_2, B_3, \dots, B_{1342}$ -тэй, C_2 нь $B_3, B_4, \dots, B_{1342}$ -тэй C_{671} нь $B_{672}, B_{673}, \dots, B_{1342}$ -тэй ирмэгээр холбогдох гурвалжин үүсэхгүй. A -ын оройн зэрэг 1342, C_1 -ын оройн зэрэг 1342, C_2 -ын оройн зэрэг 1341, C_{671} -ын оройн зэрэг 672, B_1 -ын оройн зэрэг 1, B_2 -ын оройн зэрэг 2, B_{671} -ын оройн зэрэг 671 болно. Иймд k -ын хамгийн их утга 1342 байна.

C2-3. Илэрхийллийг дараах байдлаар хувиргаж k зэргийн дун-

даж ашиглавал

$$\begin{aligned} & \sqrt[k]{x_1^k + x_n^k - (x_1^k + \dots + x_n^k)/n} = \\ &= \sqrt[k]{((x_1^k + x_n^k - x_1^k) + (x_1^k + x_n^k - x_2^k) \dots + (x_1^k + x_n^k - x_n^k))/n} \\ &\geq \left(\sqrt[k]{x_1^k + x_n^k - x_1^k} + \sqrt[k]{x_1^k + x_n^k - x_2^k} \dots + \sqrt[k]{x_1^k + x_n^k - x_n^k} \right) / n \end{aligned}$$

болно. Мөн $x_1 + x_n - (x_1 + \dots + x_n)/n =$

$$= ((x_1 + x_n - x_1) + (x_1 + x_n - x_2) + \dots + (x_1 + x_n - x_n)) / n$$

тул $\sqrt[k]{x_1^k + x_n^k - x_i^k} \geq x_1 + x_n - x_i, \forall i = \overline{1, n}$ гэж батлахад хангалттай.

$$\begin{aligned} & \sqrt[k]{x_1^k + x_n^k - x_i^k} \geq x_1 + x_n - x_i \\ & \Leftrightarrow x_1^k + x_n^k - x_i^k \geq (x_1 + x_n - x_i)^k \\ & \Leftrightarrow x_1^k + x_n^k \geq x_i^k + (x_1 + x_n - x_i)^k \end{aligned}$$

энд $x_1 = a, x_i = a + x, x_n = a + x + y, x, y \geq 0$ орлуулга хийвэл

$$\begin{aligned} & a^k + (a + x + y)^k \geq (a + x)^k + (a + y)^k \\ & \Leftrightarrow 2a^k + \sum_{i=1}^k (x + y)^i a^{k-i} C_k^i \geq 2a^k + \sum_{i=1}^k (x^i + y^i) a^{k-i} C_k^i \\ & \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k ((x + y)^i - x^i - y^i) a^{k-i} C_k^i \geq 0 \end{aligned}$$

болж батлагдав. Тэнцэх нөхцөл нь $x = y = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n$ байна.

4.3 ОУМО - 55 Сорил 3

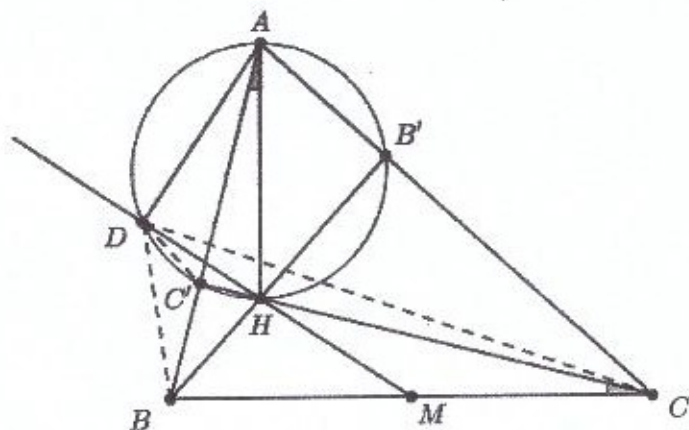
СЗ-1 (Б. Батцэнгэл) Хурц өнцөгт ABC гурвалжны BC талын дундаж цэг M бөгөөд гурвалжны өндрүүд H цэгт огтлолцно. A оройгоос HM шулуунд татсан перпендикулярын суурь D

бол DBH , DCH өнцгүүдийн биссектрисүүдийн огтлолцлын цэг нь HM шулуун дээр оршихыг батал.

СЗ-2 (Б. Баярмагнай) $I = \{1, 2, \dots, 2014\}$ олонлогийн сэлгэмэл $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2014})$ бүрийн хувьд $I_\sigma = \{|\sigma_i - i| : i \in I\}$ олонлог байгуулъя. $|I_\sigma|$ -ийн авч болох утгуудыг ол.

СЗ-3 (Б. Батцэнгэл) Элдэв талт ABC гурвалжны A оройгоос AM медиан, AL биссектрис татжээ. ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн B, C цэгүүдэд татсан шүргэгчүүд T цэгт огтлолцох бөгөөд AT шулуун энэ багтаасан тойргийг A цэгээс ялгаатай K цэгт огтлоно. AKL гурвалжныг багтаасан тойрог AM шулууныг A цэгээс ялгаатай P цэгт огтлоно. ABC гурвалжны ортотөв H бол $\angle APH = 90^\circ$ гэдгийг батал.

Бодолт:



BB', CC' өндөр болог. Тэгвэл AH диаметртай тойрог дээр D, B', C' цэгүүд оршино. $\angle C'DM = \angle C'DH = \angle C'AH = \angle C'CM$ тул D, C', M, C цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Иймд $\triangle C'HM \sim \triangle DHC \Rightarrow \frac{C'M}{CD} = \frac{HM}{HC} \Rightarrow \frac{CD}{CH} = \frac{C'M}{HM}$. Үүнтэй нэгэн адилаар $\frac{BD}{BH} = \frac{B'M}{HM}$ юм. Нэгэнт $C'M = B'M$ тул $\frac{CD}{CH} = \frac{BD}{BH}$ болов. BL нь $\angle BDH$ -ийн биссектрисс тул $\frac{BD}{DH} = \frac{BL}{LH}$, BL нь $\angle CDH$ -ийн

биссектрисс тул $\frac{CD}{CH} = \frac{CL'}{L'H} \Rightarrow L = L'$ болов.

СЗ-2. $\sigma = \{2014, 2013, \dots, 1008, 1, 1007, 1006, \dots, 2\}$ гэж авбал $|I_\sigma| = 2013$,

$\sigma = \{2013, 2012, \dots, 1008, 1007, 1, 1006, 1005, \dots, 2, 2014\}$ гэж авбал $|I_\sigma| = 2012$,

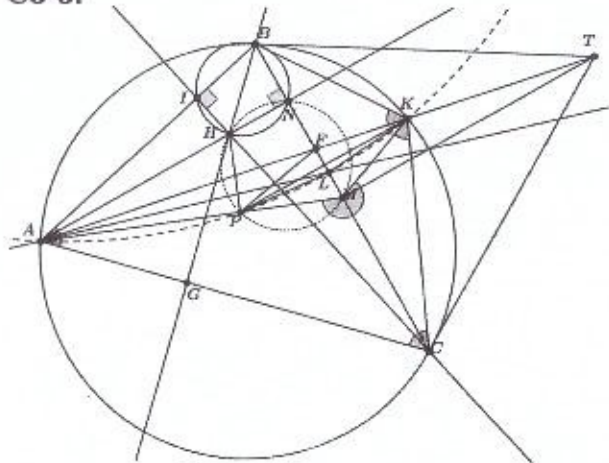
$\sigma = \{2k, 2k-1, \dots, k+1, 1, k, k-1, \dots, 2, 2k+1, 2k+2, \dots, 2014\}$ гэж авбал $|I_\sigma| = 2k-1, k = \overline{1, 1007}$

$\sigma = \{2k+1, 2k, \dots, k+2, 1, k+1, k, \dots, 2, 2k+2, 2k+3, \dots, 2014\}$ гэж авбал $|I_\sigma| = 2k, k = \overline{1, 1006}$

$\sigma = \{1, 2, \dots, 2014\}$ гэж авбал $|I_\sigma| = 1$ болно. Ө.х. $|I_\sigma|$ нь $1, 2, \dots, 2013$ гэсэн утгуудыг авч чадна. Одоо $|I_\sigma| \neq 2014$ гэж батлая. Хэрэв $|I_\sigma| = 2014$ бол $I_\sigma = \{0, 1, 2, \dots, 2013\}$ болно. $I_\sigma = \{|\sigma_i - i| : i \in I\}$ тул $\sum_{i \in I} (\sigma_i - i) = 0$ байна. Гэвч $\pm 0 \pm 1 \pm \dots \pm 2013$ -уудаас

0-тэй тэнцэх тоо гарахгүй. Учир нь эдгээр дотор $1, 3, \dots, 2013$ гэсэн 1007 ширхэг сондгой тоо бий. Эдгээр 1007 ширхэг тоог яаж ч нэмж хасахад сондгой тоо гарах ба сондгой тоон дээр тэгш тоо нэмж хасахад сондгой тоо гарна. Иймд $|I_\sigma| \neq 2014$ болж $|I_\sigma|$ нь $1, 2, \dots, 2013$ гэсэн утгуудыг л зөвхөн авч чадна.

СЗ-3.



AF, FK нь $\triangle ABF, \triangle BKF$ -н симедиан болно. Эндээс $\angle CMK = \angle CMP$ болно. LK биссектрис ба $APLK$ тойрогт багтсан 4 өнцөгт гэдгээс $\triangle LPM = \triangle LKM$ ба иймд $PM = MK$. $\triangle MAC \sim$

$\triangle MCK$ тул $\frac{AM}{MC} = \frac{MC}{MK} \Rightarrow AM \cdot PM = AM \cdot MK = MC^2 = \frac{a^2}{4}$.
 Гэтэл $AM \cdot AP = AM^2 - AM \cdot PM = \frac{1}{4}(2c^2 + 2b^2 - a^2) - \frac{1}{4}a^2 =$
 $bc \cos \alpha$. $IHNВ$ тойрогт багтана гэдгээс $АН \cdot АN = AI \cdot АВ =$
 $cb \cos \alpha = AM \cdot PM$ болно. Эндээс $HNMP$ тойрогт багтах ба
 $\angle APM = 90^\circ \Rightarrow \angle HPM = \angle APN = 90^\circ$ болж батлагдав.

4.4 ОУМО - 55 Сорил 4

1. (Б. Ганбат) Бүх 55 оронтой тоог 4 элементтэй хэсгүүдэд, хэсэг бүр дэх 4 тооны 54 цифр нь давхцдаг ба үлдсэн 1 цифрүүд нь дараалсан 4 цифр байхаар хувааж болох уу? 2. (Б. Ганбилэг) I цэгт төвтэй R радиустай γ тойргийг багтаасан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн дотор O цэгт ($I \neq O$) төвтэй r радиустай ω тойрог орипино. $\angle ABC, \angle BCD, \angle CDA, \angle DAB$ өнцгүүдэд багтах $\gamma_B, \gamma_C, \gamma_D, \gamma_A$ тойргууд нь ω тойргийг харгалзан B_1, C_1, D_1, A_1 цэгүүдээр шүргэнэ. Хэрэв γ_B, γ_C нь ω -г гадаад байдлаар, γ_D, γ_A нь ω -г дотоод байдлаар шүргэдэг бөгөөд $AA_1 \cap DD_1 = P, BB_1 \cap CC_1 = Q$ бол $\frac{IP + IQ}{PQ}$ харьцааг ол. 3. (Б. Баяржаргал) $m > 2$ натурал тоо. $i \neq j$ үед $a_i \neq a_j(m)$ ба $(a_i, m) = 1, i = \overline{1, \varphi(m)}$ бол $a_1^{b_1} + a_2^{b_2} + \dots + a_{\varphi(m)}^{b_{\varphi(m)}}$ нийлбэр m -д хуваагддаг байх $a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(m)}$ тоонуудын $b_1, b_2, \dots, b_{\varphi(m)}$ сэлгэмэл олдохыг батал.

Бодолт

1. $S(a)$ -аар a тооны цифрүүдийн нийлбэрийг тэмдэглэе.

$$f(x) = \sum_{a=55 \text{ оронтой тоо}} x^{S(a)}$$

олон гишүүнтийг авч үзье.

Тэгвэл $f(x) = (x + x^2 + \dots + x^9) \cdot (1 + x + x^2 + \dots + x^9)^{54} = \frac{(x^{10} - x)(x^{10} - 1)^{54}}{(x - 1)^{55}}$ байна. Хэрэв бид бодлогын нөхцөл хангахаар бүх 55 оронтой тоог 4 элементтэй хэсгүүдэд хувааж болдог гэвэл нэгжийн дөрвөн зэргийн язгуур буюу $\varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ байх ε нь

$f(x)$ -ийн язгуур болно гэдгийг төвөггүй харж болно. Нөгөө талаас $f(\varepsilon) = \frac{(\varepsilon^{10} - \varepsilon)(\varepsilon^{10} - 1)^{54}}{(\varepsilon - 1)^{55}} \neq 0$ тул зөрчил.

2. Өгсөн нөхцөлөөс $R > r$ байна. A дээр төвтэй k коэффициенттэй гомотетийг H_A^k гэж тэмдэглэе. $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C, \gamma_D$ тойргуудын радиусыг харгалзан r_a, r_b, r_c, r_d гэе. Тэгвэл $H_{B_1}^{-\frac{r_b}{r}}(\omega) = \gamma_b$ ба $H_B^{\frac{R}{r}}(\gamma_b) = \gamma$ тул $H_{B_1}^{-\frac{r_b}{r}} \circ H_B^{\frac{R}{r}}(\omega) = \gamma$.

$H_{Q'}^{-\frac{R}{r}} = H_{B_1}^{-\frac{r_b}{r}} \circ H_B^{\frac{R}{r}}$ гэвэл эндээс $Q' \in BB_1$ болох ба үүнтэй адилаар $Q' \in CC_1$ байх тул эндээс $Q' \equiv Q$. Ө.х. $H_Q^{-\frac{R}{r}}(O) = I \implies QI = \frac{R}{r}QO$.

$AA_1 \cap DD_1 = P \implies H_P^{\frac{R}{r}}(\omega) = \gamma$. Эндээс $H_P^{\frac{R}{r}}(O) = I$ ба $PI = \frac{R}{r}PO$ болно. Эндээс бид I, Q, O, P цэгүүд нь шулуун дээр энэ дарааллаараа оршино гэж хэлж чадах тул $IP + IQ = \frac{R}{r}(PO + QO) = \frac{R}{r}QP \implies \frac{IP + IQ}{QP} = \frac{R}{r}$.

5 ОУМО-55

Олон Улсын Математикийн LV олимпиадад оролцсон тухай

Б. Баясгалан, Б. Ганбат

ОУМО-55 2014.07.03-13-нд Өмнөд Африкийн Бүгд Найрамдах Улсын Кэйптаун хотод болж өнгөрлөө. Дэлхийн 101 оролцсон энэ тэмцээнд Хятад-201, АНУ-193, Тайван-192, ОХУ-191, Япон-177, Украин-175, Өмнөд Солонгос-172, Сингапур-161, Канад-159, Вьетнам-157, Румын-156, Австрали-156, Нидерланд-155, Хойд Солонгос-154, Унгар-153, Герман-152, Турк-147, Израиль-143, Хонконг-143, Англи-142 оноогоор эхний 20 байранд орж, Монгол-102 оноогоор 44 байранд орлоо. Монгол улсыг төлөөлөн багийн ахлагч МУИС-ын математикийн профессор, МУГБ, доктор Ц.Дашдорж, дэд ахлагч Олонлог сэтгүүлийн эрхлэгч, доктор В.Баясгалан, гишүүн Д.Батзориг (XI сургууль, 12-р анги), Г.Баяржавхлан (Олонлог сургууль, 11-р анги), О.Бодрол (Орчлон сургууль, 11-р анги), Б.Мөнх-Эрдэнэ (Олонлог сургууль, 12-р анги), А.Сумъяабат (Олонлог сургууль, 12-р анги), А.Сүхбат (Олонлог сургууль, 12-р анги) нар, дэд ахлагчийн ажиглагч 1-р сургуулийн захирал, МУГБ Ц.Гүррагчаа, Скай Нэтворкс ХХК-ийн ерөнхий менежер, доктор Ц.Волдсүх нар оролцов.

Энэ удаагийн олимпиадад Монгол улс доорхи 2 бодлогыг дэвшүүлсэн бөгөөд зохиогчийн бодолт хэт хураангуй байсан дутагдал ажиглагдлаа.

MNG-1. Гүдгэр n өнцөгтийн бүх тал, диагоналийн k өнгөөр будав. Хэрэв уг n өнцөгтийн A оройд эхтэй, ижил өнгөтэй хэрчмийн тоо нь $\left[\frac{n-1}{k} \right]$ тооноос 1-ээс хэтрэхгүй зөрүүтэй бол A оройг k - орой гээ. Тэгвэл аливаа натурал n, k тоонуудын хувьд гүдгэр n өнцөгтийн орой бүр нь k - орой байх будалт олдохыг батал.

MNG-2. Натурал R тоо $4k+1$ хэлбэрийн n анхны тоон хуваагчтай байг. Тэгвэл R диаметртай тойрог дээр аль ч хоёрынх нь хоорондох зай бүхэл байх ялгаатай $2n+2$ цэг олдохыг батал.

Сонирхолтой нь уг дэвшигдсэн MNG-2 бодлогын ерөнхий тохиолдол 2014 оны 10-р сард шийдэгдэж Б.Баясгалан, Б. Баяржаргал, Б.Ганбилэг нарын хамтран туурвисан нэгэн сонирхолтой үр дүн бий болсныг тэмдэглэх хэрэгтэй.

Теорем (Бүтэл диаметртэй тойрог дээрх бүтэл зайтай цэгүүдийн тухай).

$D = D' \cdot p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k}$, D' нь $4s + 1$ хэлбэрийн анхны тооноос чөлөөт, $p_1, p_2, \dots, p_k$ нь ялгаатай $4t + 1$ хэлбэрийн анхны тоонууд ба $P(D) = (s_1 + 1) \cdot (s_2 + 1) \cdots (s_k + 1)$ байг. Тэгвэл D диаметртэй тойрог дээр өөр хоорондын зай нь бүхэл байх ялгаатай цэгийг хамгийн олондоо $2P(D)$ ширхэгийг байрлуулж болно.

Дээрхи теоремын дэлгэрэнгүйг

<https://archive.org/details/THE-NUMBER-OF-INTEGRAL-DISTANCE-POINTS-ON-A-CIRCLE-ENGLISH> линкнээс үзэж болно.

Олимпиадын 1, 4-р бодлогыг багийн гишүүд багаараа бүтэн бодсон юм. Зарим нэг нь л жижиг алдаа гаргаж бүтэн оноо авч чадаагүй. Г.Баяржавхлан 2-р бодлогын бодолт дээр тун уран санаа гаргасан боловч гүйцэтгэл дээр хайнга хандаж оноогоо гүйцэд авч чадаагүй ч зохиогчийнх нь бодолтоос өөр, илүү уран хандлага байсан тул 5 оноо авсан юм. А.Сүхбат 3-р бодлогыг идэвхитэй оролдож олон завсрын үр дүнд хүрсэн ч оноо хамгаалах хэмжээнд хүрч чадаагүй нь харамсалтай. Бусдаар бол манай гишүүд уралдаанд хариуцлагатай оролцож 5 хүрэл медаль, 1 тусгай байрын эзэд боллоо. Авсан оноог гишүүн бүрээр жагсаавал:

О. Бодрол (Орчлон сургууль, 11-р анги) -21 оноо (хүрэл медаль)
Б. Мөнх-Эрдэнэ (Олонлог сургууль, 12-р анги) -18 оноо (хүрэл медаль)

Д. Батзориг (ХI сургууль, 12-р анги)-17 оноо (хүрэл медаль)

Г. Баяржавхлан (Олонлог сургууль, 11-р анги) -16 оноо (хүрэл медаль)

А. Сумъяабат (Олонлог сургууль, 12-р анги) -16 оноо (хүрэл медаль)

А. Сүхбат (Олонлог сургууль, 12-р анги) 14 оноо (тусгай шагнал).

ОУМО-56 Тайландын Чианг-Маи хотод 2015.07.04-16-нд болно.

ОУ-1. $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$ нь натурал тоонуудын

төгсгөлгүй дараалал байг.

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}$$

байх цор ганц $n \geq 1$ олдоно гэж батал.

$$\text{Бодолт-1. } a_n < \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1} \iff$$

$$na_n - \sum_{i=1}^n a_i < a_0 \leq na_{n+1} - \sum_{i=1}^n a_i$$

байна. $b_n = na_n - \sum_{i=1}^n a_i$, $n \geq 1$ гэж тодорхойлъё. Тэгвэл $b_1 = 0$

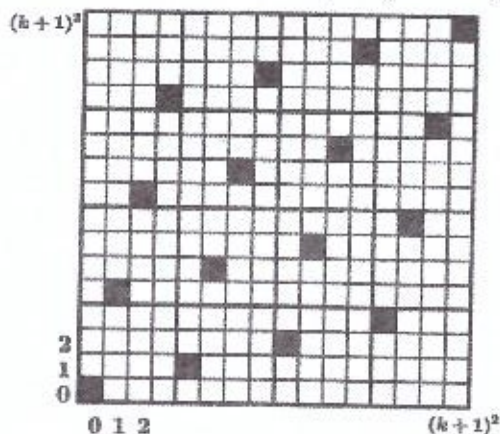
ба $b_{n+1} = (n+1)a_{n+1} - \sum_{i=1}^{n+1} a_i = na_{n+1} - \sum_{i=1}^n a_i$ болно. Мөн $\{b_n\}_{n \geq 1}$ дараалал өсөх нь илт. Үүгээр $b_n < a_0 \leq b_{n+1}$ байх $n \geq 1$ цор ганц олдох нь батлагдав.

ОУ-2. $2 \leq n$ бүхэл тоо байг. $n \times n$ шатрын хөлөг n^2 нэгж нүдэнд хуваагдсан байг. n тэрэг хөлөг дээр байрлахдаа хөлгийн аль ч мөр ба аль ч баганад яг нэг тэрэг байрлаж байвал уг байрлалыг тайван гее. n тэрэгний ямар ч тайван байрлалын хувьд ямар нэг $k \times k$ квадратын k^2 нүдний алинд нь ч тэрэг байхгүй байх натурал k -ийн хамгийн их утгыг ол.

Бодолт-2. $n = k^2 + r$, $0 < r \leq 2k + 1$ байг. Видний олох утга k гэж баталъя. Эхлээд ямар ч тайван байрлалаас тэрэг агуулаагүй $k \times k$ квадрат олдоно гэж баталъя. Эсэргээс нь аль ч $k \times k$ квадратад дор хаяж нэг тэрэг байдаг гэж үзье. $n \times n$ шатрын хөлгөө зүүн дээд булангаас нь эхлэн $k \times k$ квадратуудад хуваавал нийт ийм квадрат k^2 ширхэг байна. Эдгээр квадрат бүрт дор хаяж нэг тэрэг агуулагдах тул баруун доод булангийн $r \times r$ квадратад r ширхэг тэрэг байрлахад хүрэх ба зүүн дээд булангийн $k \times k$ квадратад 1 ширхэг л тэрэг байрлах болно. Хэрэв бид хуваалтаа баруун доод булангаас эхэлбэл зүүн дээд булангийн $r \times r$ квадратад r ширхэг тэрэг байрлах бөгөөд эндээс зүүн дээд булангийн $k \times k$ квадратад 1-ээс олон тэрэг байрлахад хүрч зөрчил үүснэ.

Одоо $n = k^2 + r$, $0 < r \leq 2k+1$ бол бодлогын нөхцөл хангах хамгийн их утга k гэж баталъя. Эхлээд $n = (k+1)^2$ үед k -г хамгийн их гэж баталъя. Үүний тулд аль ч $(k+1) \times (k+1)$ квадрат дотор тэрэг байдаг байх тайван байрлал олдоно гэж харуулахад хангалттай. $n \times n$ шатрын хөлгийн багана болон мөрүүдээ доороос дээш, баруунаас зүүн гэж дугаарлая. Доор өгөгдсөн дугаартай нүднүүдэд тэрэг байрлуулъя.

$(0, 0), (1, k+1), (2, 2k+2), \dots, (k, k^2+k)$
 $(k+1, 1), (k+2, k+2), (k+3, 2k+3) \dots (2k+1, k^2+k+1)$
 $\vdots$
 $(k^2+k, k), (k^2+k+1, 2k+1) \dots (k^2+2k, k^2+2k).$



Ө.х. $(i(k+1) + j, j(k+1) + i)$, $i, j = 0, 1, 2, \dots, k$ дугаартай нүднүүдэд тэрэг байрлуулахад энэ байрлал нь тайван бөгөөд аль ч $(k+1) \times (k+1)$ квадрат тэрэг агуулна. Учир нь $0 \leq t \leq (k+1)^2 - 1$ бүр $i(k+1) + j$ ($0 \leq i, j \leq k$) хэлбэрт цор ганц янзаар тавигдах тул мөр, багана бүрт яг нэг тэрэг байрлана. Одоо аль ч A гэсэн $(k+1) \times (k+1)$ квадрат тэрэг агуулна гэж харуулъя. A -ийн хамгийн доод мөрний дугаар $p(k+1) + q$, $0 \leq p, q \leq k$ байг (эцд $p(k+1) + q \leq (k+1)^2 - (k+1)$ байна). Ө.х. A -ийн мөрнүүдийн дугаар $p(k+1) + q, p(k+1) + q+1, \dots, p(k+1) + q+k$ байна. Бидний байрлуулсан ёсоор эдгээр мөрнүүдийн $q(k+1) + p, (q+1)(k+1) + p, \dots, k(k+1) + p$ дугаартай багануудад тэрэг байрлана. Энэ бага-

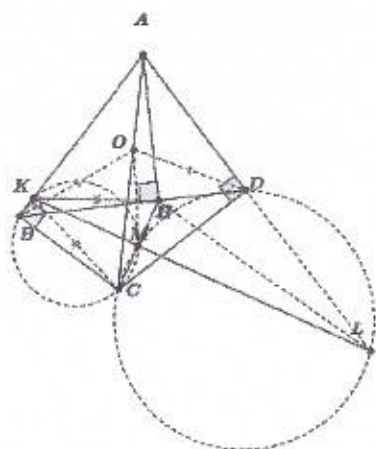
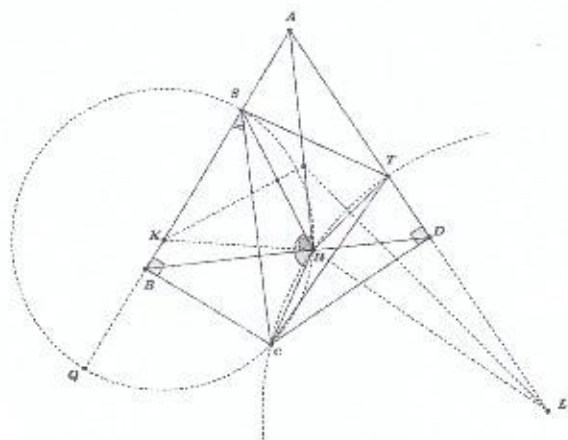
нуудын дугаарыг өсөх эрэмбээр бичвэл $p+1, (k+1)+(p+1), \dots, (q-1)(k+1)+(p+1), q(k+1)+p, (q+1)(k+1)+p, \dots, k(k+1)+p$ дараалал үүснэ. Энэ дарааллын эхний гишүүн нь хамгийн ихдээ k байх (хэрэв $p=k$ бол $q=0$ байх ёстой болж дарааллын эхний гишүүн $q(k+1)+p=k$ байна) ба сүүлийн гишүүн нь дор хаяж $k(k+1)$ байх ба аль ч дараалсан 2 гишүүний зөрүү хамгийн ихдээ $k+1$ байх тул A -ийн $k+1$ дараалсан багануудын дугааруудын аль нэг нь энэ дараалалд агуулагдах ба энэ нь A -д тэрэг агуулагдахыг харуулж байна.

Одоо $n < (k+1)^2$ үед аль ч $(k+1) \times (k+1)$ квадрат тэрэг агуулдаг тайван байрлал байгуулъя. Өмнөх байгуулалтын доод талын $(k+1)^2 - n$ мөр болон, баруун талын $(k+1)^2 - n$ багануудыг арилгавал бидэнд $n \times n$ хөлөг үлдэх ба энэ хөлгийн аль ч $(k+1) \times (k+1)$ квадрат тэрэг агуулах боловч зарим мөр багана хоосон байна. Тэгвэл тэрэггүй хоосон мөр ба хоосон баганы огтлолцолд тэрэг тавихад бодлогын нөхцөл хангах тайван байрлал болно.

ОУ-3. Гүдгэр дөрвөн өнцөгт $ABCD$ -д $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$. A цэгээс BD шулуунд буусан перпендикулярын суурийг H гээ. S ба T нь харгалзан AB ба AD хэрчмүүд дээр орших ба $\angle CHS = \angle CSB = 90^\circ$, $\angle THC = \angle DTC = 90^\circ$ байхаар сонгосон цэгүүд байг. BD шулуун $\triangle TSH$ -ийг багтаасан тойргийг шүргэнэ гэж батал.

Бодолт-3. C -г дайрсан SC -д перпендикуляр шулуун AB шулуунтай Q цэгт огтлолцдог гээ. Тэгвэл $\angle SQC = 90^\circ - \angle BSC = 180^\circ - \angle SHC$ болох тул эндээс C, H, S, Q цэгүүд нэг тойрог дээр орших ба энэ тойргийн диаметр SQ байна. Ө.х. $\triangle SHC$ -г багтаасан тойргийн төв K нь AB шулуун дээр оршино. Үүнтэй адилаар $\triangle CHT$ -г багтаасан тойргийн төв L нь AD шулуун дээр оршино.

BD шулуун $\triangle TSH$ -ийг багтаасан тойргийг шүргэнэ гэж батлахын тулд, HS -ийн дундажид босгосон перпендикуляр шулуун болон HT -ийн дундажид босгосон перпендикуляр шулуунууд $АН$ шулуун дээр огтлолцоно гэж батлахад хангалттай. HS -ийн дундажид босгосон перпендикуляр шулуун нь $\angle AKH$ -ийн биссектрис тэй давхцах ба HT -ийн дундажид босгосон перпендикуляр шулуун нь $\angle ALH$ -ийн биссектрис тэй давхцах тул гурвалжны биссектрисийн тухай теорем ёсоор $\frac{AK}{KH} = \frac{AL}{LH}$ гэж батлахад хан-



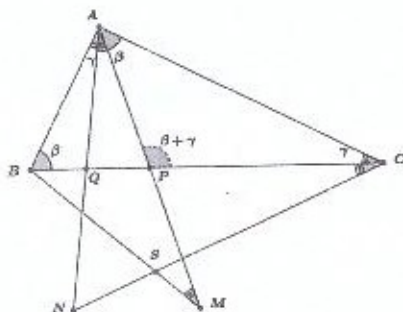
$KL \cap HC = M$ гэс. $KH = KC$, $LH = LC$ тул H ба C цэгүүд нь KL шулууны хувьд тэгш хэмтэй цэгүүд байна. Эндээс M нь HC -ийн дундаж байна. $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийг багтаасан тойргийн төвийг O гэс. Тэгвэл O нь AC -ийн дундаж цэг байна. Эндээс $OM \parallel AH$ гэж гарах тул $OM \perp BD$ байна. Нөгөө талаас $OB = OD$ байх тул OM нь BD -ийн дундажид босгосон перпендикуляр шулуун байх ба эндээс $BM = DM$ гэж гарна.

$CM \perp KL$ тул B, C, M, K цэгүүд нь KC диаметртэй тойрог дээр оршино. Адилаар L, C, M, D цэгүүд нь LC диаметртэй тойрог дээр оршино. Синусын теорем ёсоор $\frac{AK}{AL} = \frac{\sin \angle ALK}{\sin \angle AKL} =$

$$\frac{DM}{CL} \cdot \frac{CK}{BM} = \frac{CK}{CL} = \frac{KN}{LN} \text{ болж батлагдав.}$$

ОУ-4. Хурц өнцөгт $\triangle ABC$ -ийн BC тал дээр P, Q цэгүүдийг $\angle PAB = \angle BCA$, $\angle CAQ = \angle ABC$ байхаар сонгов. M ба N цэгүүдийг харгалзан AP ба AQ цацрагууд дээр P нь AM хэрчмийн дундаж цэг ба Q нь AN хэрчмийн дундаж цэг байхаар сонгов. BM ба CN шулуунууд $\triangle ABC$ -г багтаасан тойрог дээр огтлолцохыг батал.

Бодолт-4.



$BM \cap CN = S$, $\beta = \angle QAC = \angle CBA$ ба $\gamma = \angle PAB = \angle ACB$ гэе. Өмнөх тэнцэтгэлүүдээс $\triangle ABP \sim \triangle CAQ$ байна. Эндээс $\frac{BP}{PM} = \frac{BP}{PA} = \frac{AQ}{QC} = \frac{NQ}{QC}$ гэж гарна. Үүнчлэн $\angle BPM = \beta + \gamma = \angle CQN$ байх тул $\triangle BPM \sim \triangle NQC \Rightarrow \angle BMP = \angle NCQ$ гэж гарах тул $\triangle BPM \sim \triangle BSC$ байна. Эндээс $\angle CSB = \angle BPM = \beta + \gamma = 180^\circ - \angle BAC$ гэж гарч бодлого бодогдов.

ОУ-5. Кайптауны банк натурал тоо n бүрийн хувьд $\frac{1}{n}$ өртөгтэй мөнгөнүүд гаргав. Тийм мөнгөнүүдийн төгслөг цуглуулгад (адил өртөгтэй мөнгөнүүд байж болно) нийт өртөг нь $99 + \frac{1}{2}$ -ээс хэтрэхгүй байв. Тэгвэл энэ цуглуулгыг хэсэг бүр дэх мөнгөний нийт өртөг нь 1-ээс хэтрэхгүй байхаар 100-аас хэтрэхгүй хэсэгт

хувааж болохыг батал.

Бодолт-5. $n - \frac{1}{2}$ -ээс хэтрэхгүй өртөгтэй мөнгөнүүдийн цуглуулгыг хэсэг бүр дэх мөнгөний нийт өртөг нь 1-ээс хэтрэхгүй байхаар n -аас хэтрэхгүй хэсэгт хувааж болохыг баталъя. Эхлээд доорхи үйлдлүүдийг гүйцэтгэе.

(а). $\frac{1}{2m}$ өртөгтэй мөнгө 2 ширхэг байвал тэр 2 мөнгийг $\frac{1}{m}$ өртөгтэй 1 ширхэг мөнгө гэж үзэх (б). $\frac{1}{2m+1}$ өртөгтэй мөнгө $2m+1$ ширхэг байвал эдгээр мөнгөнүүдийг 1 өртөгтэй 1 ширхэг мөнгө гэж үзнэ.

Энэ 2 үйлдлийг гүйцэтгэж чадахгүй болтол хийе. Ингэхэд хэрэв 1 өртөгтэй мөнгөнүүд байдаг бол тэдгээр мөнгө тус бүрийг 1 хэсэг гэж үзэхэд индукцээр батлагдана. Иймд 1 өртөгтэй мөнгө байхгүй гээ. Үүний дараа $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$ гэсэн n ширхэг хайрцганд мөнгөнүүдээ хийе. B_0 хайрцганд $\frac{1}{2}$ өртөгтэй мөнгийг хийе ($\frac{1}{2}$ өртөгтэй мөнгө 1-ээс хэтрэхгүй ширхэг байна). $1 \leq m \leq n-1$ -ийн хувьд B_m хайрцганд $\frac{1}{2m+1}, \frac{1}{2m+2}$ өртөгтэй мөнгөнүүдийг хийе. B_m -д байгаа мөнгөнүүдийн нийт өртөг $\frac{2m}{2m+1} + \frac{1}{2m+2} < 1$ байна. Одоо өртөг нь $\frac{1}{2n+1}$ -ээс хэтрэхгүй үлдсэн мөнгөнүүдийг дээрхи хайрцагнууддаа аль ч хайрцаган дахь мөнгөнүүдийн нийт өртөг 1-ээс хэтрэхгүй байхаар хийе. Ингэж хийхэд бүх мөнгөнүүд хайрцагнуудад орж чадна. Эсрэгээс нь дор хаяж нэг мөнгө аль ч хайрцагт орж чадахгүй үлдсэн гэвэл хайрцаг бүр дэх мөнгөнүүдийн өртөг $1 - \frac{1}{2n+1}$ -ээс их болох ба нийт мөнгөнүүдийн өртөг $n(1 - \frac{1}{2n+1}) > n - \frac{1}{2}$ -ээс их болж зөрчил үүснэ. **ОУ-6.** Аль ч хоёр нь паралель биш ба аль ч гурав нь нэг цэг дээр үл огтлолцох n шулуун хавтгай дээр өгөгдөв. Энэ шулуунууд хавтгайг мужуудад хуваана, төгслөг талбайтай мужийг зааглагдсан гэс. Хангалттай их n бүрийн хувьд ямар ч зааглагдсан мужийн хүрээ нь бүхэлдээ хөх биш байхаар $\sqrt{n}$ -ээс багагүй шулууныг хөхөөр будах боломж-

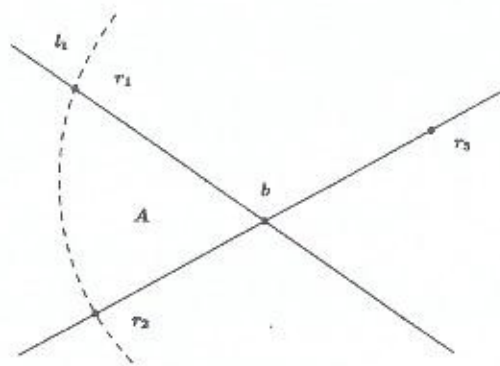
тойг үзүүл.

Бодолт-6. n шулуунуудаас бодлогын нөхцөл хангахаар хамгийн олондоо k ширхэгийг нь будаж чаддаг гэе. Өөрөөр хэлбэл үлдсэн $n - k$ шулуунуудаас алийг нь ч хөхөөр нэмж будахад бүх тал нь хөх зааглагдсан хэсэг үүснэ. Хөх шулуунуудын огтлолцлын цэгийг хөх цэг гэе. Хөх цэгийн тоо C_k^2 байна. Будагдаагүй шулуунуудыг улаан шулуунууд гэе. Улаан шулуун болон хөх шулууны огтлолцлыг улаан цэг гэе.

Дурын l улаан шулуун авч үзэхэд хүрээний яг нэг тал нь l -д агуулагддаг ба бусад талууд нь хөх өнгөтэй байх зааглагдсан A муж олноо (олддоггүй бол l -г хөхөөр будаж болоход хүрч зөрчил үүснэ). A -ийн оройнууд цагийн зүүний дагуу $r', r, b_1, \dots, b_k$ байг (энд $r', r \in l$ ба $b_1, b_2, \dots, b_k$ -үүд нь хөх оройнууд). Тэгвэл l шулуунд (r, b_1) хос цэгийг харгалзуулъя. Дурын r -улаан цэг ба b -хөх цэгийг авч үзэхэд (r, b) хосд харгалзсан шулуун хамгийн ихдээ нэг л байх боломжтой (r, b нь хамгийн ихдээ ганц л мужийн цагийн зүүний дагуу дараалсан 2 орой байх боломжтой).

Одоо дурын хөх цэгийг авч үзэхэд түүнд харгалзсан улаан шулуун хамгийн ихдээ 2 байна гэж батлачихвал эндээс $n - k \leq 2C_k^2$ буюу $n \leq k^2$ гэж гарч батлах зүйл батлагдана. Иймд үүнийг баталъя. Эсрэгээс нь l_1, l_2, l_3 улаан шулуунуудад ижил b хөх цэг харгалздаг байг. r_1, r_2, r_3 нь l_1, l_2, l_3 шулуунуудад харгалзсан хөх

цэгүүд нь байг.



b, r_i нь ямар нэг мужийн дараалсан 2 орой болох тул r_i нь (br_i) цацраг дээрхи b -д хамгийн ойр улаан цэг байх нь тодорхой. Иймд $(br_1), (br_2), (br_3)$ шулуунуудын аль нэг хоёр нь давхцана. $(br_2) = (br_3)$ гэж үзэхэд явцуурахгүй (ө.х. r_2, b, r_3 нэг шулуун дээр оршино). Одоо l_1 шулууны (r_1, b) -д харгалзах A мужийг авч үзье. Тэгвэл A мужийн цагийн зүүний дагуу дараалсан оройнууд r_1, b ба r_2, r_3 -ийн аль нэг байх болно (r_2 гэе). Тэгвэл $A = \triangle r_1 b r_2$ байх болно. Эндээс l_1 шулуун r_2 -г дайрах болно. Гэтэл r_2 -г l_2 дайрч байгаа ба мөн $(r_2 b r_3)$ -хөх шулуун дайрах тул 3-н шулуун нэг цэгт огтлолцох болж зөрчил үүсэв.

6 “Төгс тоо” төвийн тухай

ММОХорооны дэргэд математикийн багш нарын мэргэжил дээшлүүлэх ТЗ байгуулагдаж 13 жил үйл ажиллагаа явууллаа. Математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай ангид хичээл заах болон олимпиадад бэлтгэдэг багш нарыг бэлтгэх тус төвд тус бүр 90 цагийн I ба II шатны дамжаагаар Математикийн мэргэжлийн курс-1, 2 номыг судалж эзэмших юм. Нэг удаад 1 шатны дамжаанд 1 сурна.