
ММО-6

Улсын математикийн 6-р олимпиад

1969–1970 хичээлийн жил

Энэ олимпиадын цуврал албан ёсоор хэвлэгдэж гараагүй тул бодлого, бодолтыг дараах номоос эмхэтгэн оруулав. Эх сурвалж: П. Энхболд, Ц. Дашдорж. Монголын Математикийн Олимпиад I. Ахлах ангиллын бодлогууд (1965–1985). Улаанбаатар, 2022. © “Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо” НҮТББ.

Бодлогууд

6.1. Шатрын тэмцээнд 10 тамирчин оролцжээ. Тэд бусадтайгаа зөвхөн нэг нэг өрөг тоглосон ба дүн гарахад ижил оноотой шатарчид байсангүй. Харин эхний хоёр байр эзэлсэн шатарчид нэг ч хожигдоогүй, III байр эзэлсэн шатарчин эхний хоёрын авсан онооны нийлбэрээс 10 оноо дутуу, IV байр эзэлсэн шатарчин сүүлчийн дөрвөн байр эзэлсэн шатарчдын авсан онооны нийлбэртэй тэнцүү оноо авсан бол VI, VII байр эзэлсэн шатарчдын хэн нь хожсон бэ? Сүүлийн 6 шатарчны авсан онооны нийлбэрийг ол. Энд хожсон тамирчин 1 оноо, хожигдсон тамирчин 0 оноо, тэнцсэн тамирчин 0.5 оноо авна.

6.2. $\sqrt{2+x-2\sqrt{x+1}} + \sqrt{17+x-8\sqrt{x+1}} = 3$ тэгшитгэлийн бүх бодит шийдийг ол.

6.3. $\frac{8}{3(\cos^2 x + 2 \cos x + 4)} - \frac{2}{\cos^2 x + 4 \cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{12 \cos^4 \frac{x}{2}} = 0$ тэгшитгэлийг бод.

6.4. Олимпиад зохион байгуулах хороо 11 гишүүнтэй бөгөөд олимпиадын материалыг нууцын авдарт хадгалдаг байв. Авдрыг ямар ч 5 гишүүн онгойлгож чадахгүй бөгөөд аль ч 6 гишүүн нь онгойлгодог байхын тулд авдар хэдэн цоожтой байх ёстой ба гишүүн бүрд хэдэн түлхүүр өгвөл зохих вэ?

6.5. m натурал тоо бол $x^2 + y^2 + 2xy - mx - my - m - 1 = 0$ тэгшитгэлийн бүхэл шийдүүдийн дотор m ширхэг натурал тоон шийд байхыг үзүүл.

6.6. Шулуун дугуй цилиндрийн дээд суурийн M цэгээс доод суурийн N цэг рүү буулгасан MN перпендикулярыг бэхлэв. Дээд суурийн тойргийн дурын цэгийг доод суурийн тойргийн цэгтэй холбогч хэрчмүүдийн дотроос MN хэрчмийг огтлогч бүх хэрчмүүдийн дундаж цэгүүдийн геометр байрыг ол.

Бодолтууд

6.1. k -р байр эзэлсэн шатарчныг A_k гэж, түүний авсан оноог x_k гэж тэмдэглэе. A_1, A_2 хожигдоогүй тул энэ хоёрын хоорондоо тоглосон өрөг нь тэнцсэн байх ёстой. Иймд $x_1 \leq 8.5$ ба $x_2 \leq 8$ байна. Одоо S_k -аар сүүлийн k байр эзэлсэн шатарчдын онооны нийлбэрийг тэмдэглэе. Сүүлийн 4 байр эзэлсэн тамирчдын хоорондоо тоглож авсан оноо $C_4^2 = 6$ тул $S_4 \geq C_4^2 = 6$ байна. Эндээс

$$6.5 = 8.5 + 8.0 - 10 \geq x_1 + x_2 - 10 = x_3 \geq x_4 + 0.5 = S_4 + 0.5 \geq 6.5$$

болох тул $x_1 = 8.5, x_2 = 8, x_3 = 6.5, x_4 = 6$ байна.

Цаашилбал, $S_4 = x_4 = 6$ нь сүүлийн 4 байр эзэлсэн шатарчид хоорондоо тоглосон оноотой тэнцүү тул эдгээр нь бусад шатарчдадаа бүгдэд нь хожигдсон. Иймд A_6 нь A_7 -г хожсон.

Нийт онооны нийлбэр нь $C_{10}^2 = 45$ тул сүүлийн 6 байр эзэлсэн шатарчдын онооны нийлбэр $45 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 45 - 29 = 16$ байна.

6.2. $x \geq -1$ мужид тэгшитгэлийн шийдийг эрэх хэрэгтэй. Энд

$$2 + x - 2\sqrt{x+1} = (\sqrt{x+1} - 1)^2 \quad \text{ба} \quad 17 + x - 8\sqrt{x+1} = (\sqrt{x+1} - 4)^2$$

тул тэгшитгэлээ

$$|\sqrt{x+1} - 1| + |\sqrt{x+1} - 4| = 3$$

гэж бичиж болно. Энд $y = \sqrt{x+1}$ гэж тэмдэглэвэл 1, y , 4 цэгүүдийн хувь дахь гурвалжны тэнцэтгэл бишээр

$$|y - 1| + |y - 4| \geq |4 - 1| = 3$$

байх ба $1 \leq y \leq 4$ үед тэнцэтгэл биелнэ. Иймд $0 \leq x \leq 15$ шийд болно.

6.3. $y = (\cos x + 1)^2 \geq 0$ гэж тэмдэглэвэл $\cos^2 x + 2 \cos x + 4 = (\cos x + 1)^2 + 3 = y + 3$, $\cos^2 x + 4 \cos^2 \frac{x}{2} = (\cos x + 1)^2 + 1 = y + 1$, $\cos^4 \frac{x}{2} = \frac{(\cos x + 1)^2}{4} = \frac{y}{4}$ тул тэгшитгэлээ

$$\frac{8}{3(y+3)} - \frac{2}{y+1} + \frac{1}{3y} = \frac{(y-1)^2}{y(y+1)(y+3)} = 0$$

гэж бичиж болно. Эндээс $y = 1$ буюу $\cos x + 1 = \pm 1$ гэдгээс $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ (k бүхэл) шийд болно.

6.4. 5 гишүүн авъя. Эдэнд ядаж нэг цоожных нь түлхүүр байхгүй байх ёстой ба харин үлдэх 6 гишүүн бүрд байх ёстой. Аль ч 5 гишүүнийг авахад ийм байдал ажиглагдах тул нийт цоожны тоо $C_{11}^5 = 462$. Цоож бүр 6 түлхүүртэй тул нийт $462 \cdot 6 = 2772$ түлхүүртэй ба нэг гишүүнд $2772 : 11 = 252$ түлхүүр бий.

6.5. Тэгшитгэлийг

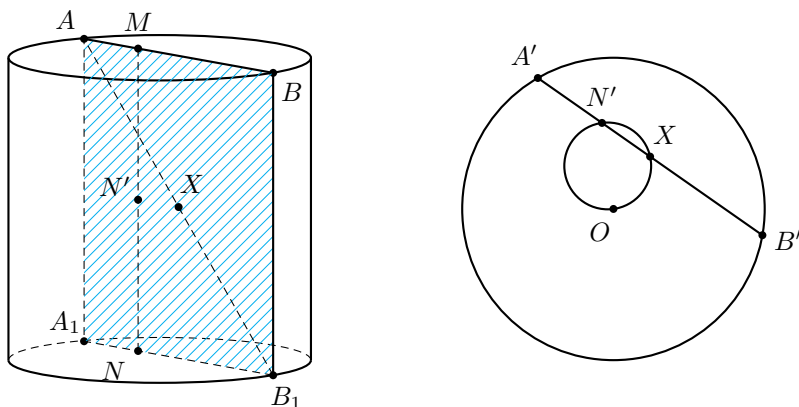
$$x^2 + y^2 + 2xy - mx - my - m - 1 = (x + y + 1)(x + y - 1 - m) = 0$$

гэж бичиж болох тул $x + y + 1 = 0$ эсвэл $x + y = m + 1$ байна. Иймд тэгшитгэл

$$(x, y) = (1, m), (2, m-1), \dots, (m, 1)$$

гэсэн m ширхэг натурал шийдтэй.

6.6. Цилиндрийн дээд суурийн тойрогт A цэг авбал A цэг ба MN -ийг дайрсан цор ганц хавтгай орших учир A цэгийг доод суурийн тойргийн цэгүүдтэй холбосон бүх хэрчмээс зөвхөн ганц нь MN хэрчимтэй огтлолцоно. Цилиндр ба AMN хавтгайн огтлол нь ABB_1A тэгш өнцөгт болно.



Одоо цилиндрт түүний байгуулагчдыг хагаслан хуваасан хавтгай татъя. Цилиндр ба хавтгайн огтлолд үүсэх тойргийн төв O цэг бөгөөд N цэгийн уг тойрог дээрх проекц нь N' гэвэл бидний олох геометр байр нь N' цэгийг дайрсан уг тойргийн бүх хөвчид (Жишээлбэл: $A'B'$) тойргийн төв O -оос буулгасан перпендикуляруудын суурийн цэгүүд болох бөгөөд энэ нь $N'O$ диаметртэй тойрог болно.