
ММО-7

Улсын математикийн 7-р олимпиад

1970–1971 хичээлийн жил

Энэ олимпиадын цуврал албан ёсоор хэвлэгдэж гараагүй тул бодлого, бодолтыг дараах номоос эмхэтгэн оруулав. Эх сурвалж: П. Энхболд, Ц. Дашдорж. Монголын Математикийн Олимпиад I. Ахлах ангиллын бодлогууд (1965–1985). Улаанбаатар, 2022. © “Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо” НҮТББ.

Бодлогууд

7.1. $z = |\sin y|$ бол $\log_z(|x| - 1) < 0$ тэнцэтгэл бишийг хангах (x, y) хосуудын олонлогийг ол.

7.2. Ямар дөрвөн өнцөгтүүдийг шулуунаар огтлоход 2 төсөөтэй 4 өнцөгт үүсэх вэ?

7.3. ABC гурвалжны өнцгүүд нь $3 \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B = -1$ гэсэн хамааралтай бол $m_c = R$ болохыг батал. Энд m_c нь C оройгоос татсан медиан, R нь ABC гурвалжинг багтаасан тойргийн радиус.

7.4. Бөмбөрцгийн төвийг дайрсан боловч аль ч гурав нь нэг диаметрийг дайраагүй хавтгайнуудаар бөмбөрцгийн гадаргуу хэчнээн хэсэгт хуваагдах вэ?

7.5. $5, 13, 25, 41, 61, \dots$ дарааллын эхний n гишүүний нийлбэрийг ол.

7.6. Дараах тэгшитгэлийг бод.

$$(\sin x)^{\log_{a^1 \cdot 2} x^x + \log_{a^2 \cdot 3} x^x + \dots + \log_{a^{n \cdot (n+1)}} x^x} = \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right]^x$$

7.7. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 104$ тэгшитгэл хэчнээн натурал тоон шийдтэй вэ?

7.8. Гурвалжинг багтаасан тойргийн радиус R ба түүнд багтсан тойргийн радиус r бол $R \geq 2r$ болохыг батал.

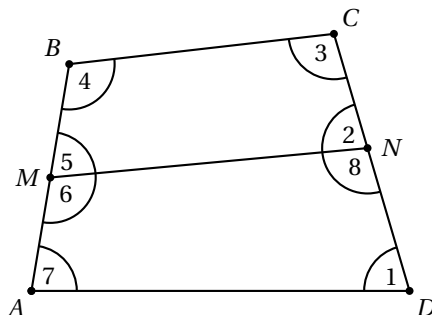
Бодолтууд

7.1. Тодорхойлогдох мужаа олбол $|x| > 1$ ба $0 < |\sin y| < 1$ буюу $y \neq \frac{\pi}{2}k$ ($k \in \mathbb{Z}$) болно. Одоо $\log_{|\sin y|}(|x| - 1) < 0 = \log_{|\sin y|} 1$ гэж бичвэл $0 < |\sin y| < 1$ тул $|x| - 1 > 1$ буюу $|x| > 2$ болно. Иймд манай тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог

$$\left\{ (x, y) \mid |x| > 2, y \neq \frac{\pi}{2}k (k \in \mathbb{Z}) \right\}$$

болно.

7.2. $AMND$ дөрвөн өнцөгт $BCNM$ -тэй төстэй байг.



- 1) $\angle 1 = \angle 2$ бол $MN \parallel AD$ учраас уг 2 дөрвөн өнцөгт хоёул трапец болно. Одоо ямар ч трапцийг суурьтай нь параллел шулуунаар ингэж хувааж болно гэж үзүүлье.

$BC = a, MN = x, AD = c$ байг.

$$\frac{BC}{MN} = \frac{a}{x} = \frac{x}{c} = \frac{MN}{AD}$$

гэдгээс $x = \sqrt{ac}$ болно. $BB_1 \parallel CD \parallel MM_1$ -ийг татъя. BB_1 ба MN -ийн огтлолыг E гээ. $\triangle BEM \sim \triangle MM_1A$ учир

$$\frac{BM}{MA} = \frac{ME}{AM_1} = \frac{\sqrt{ac} - a}{c - \sqrt{ac}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}$$

мөн $\frac{BC}{MN} = \frac{a}{\sqrt{ac}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}$ тул батлах зүйл батлагдав.

- 2) $\angle 1 = \angle 5$ бол $\angle 3 = \angle 6$ болох учир

$$\angle 1 + \angle 3 = \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$$

болж мөн $AD \parallel BC$ гэж гарах тул $ABCD$ трапец болно.

- 3) $\angle 1 = \angle 3$ бол $\angle 5 = \angle 6 = 90^\circ$ болно. Энэ үед $\angle 2 = \angle 8$ бол $\angle 5 + \angle 2 = 180^\circ$, $AB \parallel CD$ болж $ABCD$ нь мөн л трапец байна. Харин $\angle 2 = \angle 7$ бол $\angle 4 = \angle 8$,

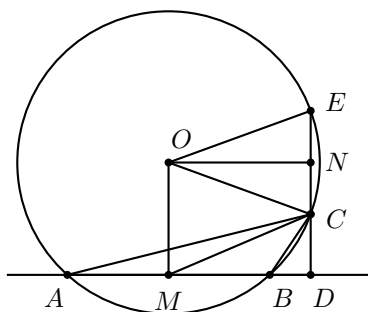
$$180^\circ = \angle 2 + \angle 8 = \angle 7 + \angle 8, \quad \angle 1 = 90^\circ = \angle 3$$

болох тул $BC \parallel AD$ буюу $ABCD$ мөн л трапец байна.

- 4) $\angle 1 = \angle 4$ бол $\angle 2 = \angle 6$ болох тул $AB \parallel CD$ байна. Иймд $ABCD$ нь мөн л трапец болов.

7.3. $\angle A, \angle B$ өнцгүүдийн аль нэг нь мохоо. Иймд $\angle B > 90^\circ$ гэж үзье. C цэгээс AB -д перпендикуляр буулгавал AB хэрчмийн үргэлжлэл дээр бууна. Түүний суурь D болог. Тэгвэл

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{CD}{AD}, \quad \operatorname{tg} \angle B = -\frac{CD}{BD}, \quad \operatorname{tg} \angle A \cdot \operatorname{tg} \angle B = -\frac{1}{3} \Rightarrow 3CD^2 = AD \cdot BD \quad (1)$$



Багтаасан тойрог ба CD -ийн огтлолцсон цэг нь E болог. Тэгвэл шүргэгч огтлогчийн теорем ёсоор

$$AD \cdot BD = DE \cdot DC$$

болох тул (1)-ээс

$$3CD^2 = CD \cdot DE \Rightarrow 2CD = CE$$

болно.

Багтаасан тойргийн төвөөс AB, CD -д перпендикуляр буулгаж суурийг нь M, N гэе. Тэгвэл $OM \parallel ED, MD \parallel ON$ гэдгээс $OM = ND, NC = NE = CD$ болох тул C нь ND хэрчмийн дундаж цэг болно. Иймд $\angle MDC = 90^\circ, \angle ONC = 90^\circ, MD = ON, NC = CD$ болох тул

$$R = OC = CM = m_c$$

болно. Бодлого бодогдов.

7.4. m хавтгай авч үзэхэд бөмбөрцгийн гадаргуу нь $F(m)$ хэсэгт хуваагддаг байг. m -р хавтгай ба бөмбөрцөг гадаргуугийн огтлолд үүсэх тойрог нь бусад хавтгай бүртэй 2 цэгээр огтлолцож, эдгээр цэгүүдээр $2(m-1)$ хэсэгт хуваагдана. Иймд

$$F(m) = 2(m-1) + F(m-1)$$

гэсэн рекуррент харьцаа биелэнэ. $F(1) = 2$ гэдгийг анхаарвал

$$F(m) = 2 + m(m-1)$$

7.5. $a_1 = 5, a_n = a_{n-1} + 4n, n \geq 2$ дараалал юм. Иймд

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k) + 4 \cdot (n-1) = 5 + 4 \sum_{k=1}^{n-1} k + 4n - 4 \\ &= 1 + 4n + 4 \cdot \frac{(n-1)n}{2} = 2n^2 + 2n + 1 \end{aligned}$$

болно. Иймд

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n (2k^2 + 2k + 1) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k + n \\ &= 2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= \frac{n\{(n+1)(2n+1) + 3(n+1) + 3\}}{3} \\ &= \frac{n(2n^2 + 6n + 7)}{3} \end{aligned}$$

байна.

7.6. Хялбарчилбал

$$(\sin x)^{x(\log_{a^{1 \cdot 2}} x + \log_{a^{2 \cdot 3}} x + \cdots + \log_{a^{n \cdot (n+1)}} x)} = (\sin x)^x.$$

Иймд эсвэл $\sin x = 0$, эсвэл $\sin x = 1$, эсвэл $0 \neq \sin x \neq 1$ ба

$$\log_{a^{1 \cdot 2}} x + \log_{a^{2 \cdot 3}} x + \cdots + \log_{a^{n \cdot (n+1)}} x = 1$$

болно. Энд

$$\begin{aligned} 1 &= \log_{a^{1 \cdot 2}} x + \log_{a^{2 \cdot 3}} x + \cdots + \log_{a^{n \cdot (n+1)}} x \\ &= \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right) \cdot \log_a x \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \cdot \log_a x \\ &= \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \cdot \log_a x = \frac{n}{n+1} \cdot \log_a x. \end{aligned}$$

Эндээс $x = a^{\frac{n+1}{n}}$ болов. Тэгшитгэлийн шийдийн олонлог

$$\left\{ a^{\frac{n+1}{n}} \right\} \cup \left\{ \pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

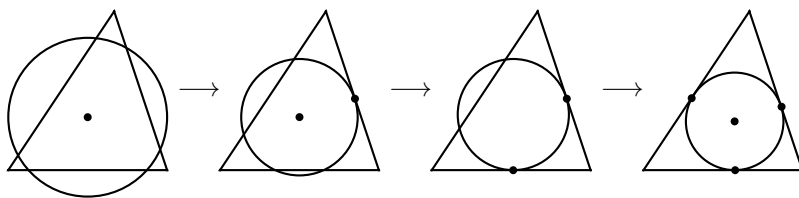
байна.

7.7. Хариу:

$$C_{(5)}^{104} = C_{5+104-1}^{104} = \frac{108!}{(108-104)! \cdot 104!} = \frac{105 \cdot 106 \cdot 107 \cdot 108}{4!} = 5359095$$

7.8. Гурвалжны хүндийн төв дээр төвтэй $k = -\frac{1}{2}$ коэффициенттэй гомотет авч үзье. ABC гурвалжны дүр $A_1B_1C_1$ нь талуудын дундаж цэгүүдэд оройтой гурвалжин бөгөөд багтаасан тойргийн радиус нь $\frac{R}{2}$ байна. ABC гурвалжинд багтсан тойргийн радиус нь ABC гурвалжны 3 тал дээр оройтой аливаа $A_1B_1C_1$ гурвалжныг багтаасан ω_1 тойргийн радиусаас хэтрэхгүй.

Учир нь ω_1 нь ABC гурвалжны талуудтай тус бүр 2 ерөнхий цэгтэй бол ω_1 тойргийн төв дээр төвтэй гомотетоор тойргийг багасгаж аль нэг талыг нь шүргүүлнэ. Дараагийн удаад уг шүргэлтийн цэг дээр төвтэй гомотетоор тойргоо багасгаж дахин өөр нэг талыг нь шүргүүлнэ. Үүний дараа уг шүргэсэн 2 талын ерөнхий орой дээр төвтэй гомотетоор тойргоо багасгаж ABC гурвалжинд багтсан тойрогт шилжүүлж болно.



Иймд $R \geq 2r$ болж батлагдав. Тэнцэлдээ хүрэх нөхцөл нь ABC гурвалжны медианууд биссектрисгүйгээ давхцах тул ABC зөв гурвалжин байна.