
ММО-8

Улсын математикийн 8-р олимпиад

1971–1972 хичээлийн жил

Энэ олимпиадын цуврал албан ёсоор хэвлэгдэж гараагүй тул бодлого, бодолтыг дараах номоос эмхэтгэн оруулав. Эх сурвалж: П. Энхболд, Ц. Дашдорж. Монголын Математикийн Олимпиад I. Ахлах ангиллын бодлогууд (1965–1985). Улаанбаатар, 2022. © “Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо” НҮТББ.

Бодлогууд

- 8.1.** Нэгж эзлэхүүнтэй шулуун дугуй цилиндрт бөмбөрцөг багтжээ. Энэ бөмбөрцгийг багтаасан хамгийн бага эзлэхүүнтэй конусын эзэлхүүнийг ол.
- 8.2.** $|a|, |b|, |c| \leq 1971$ бол $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ тэгшитгэл 1972-оос их модуль бүхий шийдтэй юу?
- 8.3.** $2^{2^n} + 1$ хэлбэрийн бүх натурал тоонууд хос хосоороо харилцан анхны гэдгийг батал.
- 8.4.** $\operatorname{tg} 37^\circ 30' = \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2$ болохыг батал.
- 8.5.** $x^2 - y^2 = k$ тэгшитгэл бүхэл тоон шийдтэй байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөлийг тогтоо.
- 8.6.** Цифрүүд нь үл буурах дараалал үүсгэсэн саяас бага тоо хэд байх вэ?

Бодолтууд

8.1. Цилиндрт бөмбөрцөг багтсан учир $h = 2r$ байна. Эндээс

$$V = \pi r^2 h = 2r^3 \pi = 1 \Rightarrow r^3 = \frac{1}{2\pi}$$

болно. Иймд конусын тэнхлэг огтлол нь r радиустай тойрог багтаасан адил хажуут гурвалжин байна.

Конусын суурийн радиус R , өндөр нь H гэе. Конусын суурийн өнцгийг α гэвэл

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{R}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{R}$$

тул

$$R = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \quad H = R \cdot \operatorname{tg} \alpha = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

болно. Иймд

$$V(\alpha) = \frac{1}{3} R^2 H \pi = \frac{\pi}{3} r^3 \cdot \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{6} \cdot \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

байна. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$ тул $c = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ гэвэл

$$V(c) = \frac{c^4}{3(c^2 - 1)} \Rightarrow V'(c) = \frac{4c^3(c^2 - 1) - c^4 \cdot 2c}{3(c^2 - 1)^2} = \frac{2c^5 - 4c^3}{3(c^2 - 1)} = 0 \Rightarrow c^2 = 2$$

үед хамгийн бага утга авна. Иймд

$$V_{\min} = \frac{2^2}{3(2 - 1)} = \frac{4}{3}$$

байна.

8.2. Өгсөн тэгшитгэлийн шийдүүд x_1, x_2, x_3 ба $|x_1| > 1972$ гэе (шийдүүд комплекс байж болно). Тэгвэл $|x_1 x_2 x_3| = |c| \leq 1971$ гэдгээс $|x_2 x_3| < 1$, мөн $|x_1 + x_2 + x_3| = |a| \leq 1971$ ба $|x_1| > 1972$ гэдгээс $|x_2 + x_3| > 1$ гэж гарна. Эндээс

$$1971 = 1972 - 1 < |x_1(x_2 + x_3)| - |x_1 x_2| \leq |x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3| \leq 1971$$

гэж зөрчилд хүрэв. Иймд бүх шийдийн модуль 1972-оос хэтрэхгүй.

8.3. $F_n = 2^{2^n} + 1$ гэе. Эхлээд

$$\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2$$

болохыг харуулъя. $n = 1$ үед $F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$, $F_1 - 2 = 2^{2^1} - 1 = 3$ тул $F_0 = F_1 - 2$ байна. n үед үнэн гээд $n + 1$ үед баталъя.

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^n F_k &= \left(\prod_{k=0}^{n-1} F_k \right) F_n = (F_n - 2) F_n \\ &= (2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1) = 2^{2^{n+1}} - 1 = F_{n+1} - 2 \end{aligned}$$

болж батлагдав. Иймд $m < n$ гэвэл

$$(F_m, F_n) = (F_m, -2) = 1$$

болж батлагдав.

8.4. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ томъёо ашиглан бодъё. $\operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ тул

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2 \operatorname{tg} 75^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 75^\circ} \iff \operatorname{tg}^2 75^\circ - 2\sqrt{3} \operatorname{tg} 75^\circ - 1 = 0$$

болно. Эндээс $\operatorname{tg} 75^\circ > 0$ болохыг тооцвол

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

болов. Давхар өнцгийн томъёог дахин ашиглавал

$$2 + \sqrt{3} = \frac{2 \operatorname{tg} 37^\circ 30'}{1 - \operatorname{tg}^2 37^\circ 30'} \iff (2 + \sqrt{3}) \operatorname{tg}^2 37^\circ 30' + 2 \operatorname{tg} 37^\circ 30' - (2 + \sqrt{3}) = 0$$

болох тул

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 37^\circ 30' &= \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot (2 + \sqrt{3})(-2 - \sqrt{3})}}{4 + 2\sqrt{3}} \\ &= \frac{-2 + \sqrt{32 + 16\sqrt{3}}}{4 + 2\sqrt{3}} = \frac{-1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{2 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{2} \cdot (1 + \sqrt{3})}{2 + \sqrt{3}} = (-1 + \sqrt{2} + \sqrt{6})(2 - \sqrt{3}) \\ &= -2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2} - \sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 3\sqrt{2} \\ &= \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

болов.

8.5. $(x - y)(x + y) = k = k_1 \cdot k_2$ гэж бичье. $x - y = k_1, x + y = k_2$ гэдгээс

$$x = \frac{k_1 + k_2}{2}, y = \frac{k_2 - k_1}{2}$$

болно. Эндээс k_1 ба k_2 эсвэл хоёул тэгш, эсвэл хоёул сондгой болно. Иймд k эсвэл 4-т хуваагддаг эсвэл сондгой болох ба эдгээр нь нөхцөл хангах нь илт.

8.6. Аливаа цифрүүдийг цор ганц аргаар үл буурах эрэмбээр жагсааж болно. Иймд бидний олох тоо

$$C_{(9)}^1 + C_{(9)}^2 + C_{(9)}^3 + C_{(9)}^4 + C_{(9)}^5 + C_{(9)}^6 = C_{(10)}^6 - 1 = C_{10+6-1}^6 - 1 = 5004$$

байна.