
ММО-9

Улсын математикийн 9-р олимпиад

1972–1973 хичээлийн жил

Энэ олимпиадын цуврал албан ёсоор хэвлэгдэж гараагүй тул бодлого, бодолтыг дараах номоос эмхэтгэн оруулав. Эх сурвалж: П. Энхболд, Ц. Дашдорж. Монголын Математикийн Олимпиад I. Ахлах ангиллын бодлогууд (1965–1985). Улаанбаатар, 2022. © “Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо” НҮТББ.

Бодлогууд

9.1. Төгс тоо натурал тооны квадрат болж чадахгүйг батал. Энд өөрийн бүх жинхэнэ хуваагчдын нийлбэртэй тэнцүү тоог төгс тоо гэнэ. Жишээ: $6 = 1 + 2 + 3$ төгс тоо болно.

9.2. Шулуун дээр B нь A ба C -ийн хооронд орших цэгүүд өгөгдөв. Энэ шулууны 1 талд $|AB|$, $|BC|$, $|AC|$ -ээр диаметрээ хийсэн K_1 , K_2 , K хагас тойргуудыг татав. B цэгийг дайрсан AC -д перпендикуляр шулуун K тойргийг D цэгт огтолно. Тэгвэл K тойргийг D цэгт шүргэсэн ℓ_1 шүргэгч нь K_1 ба K_2 -ийн ерөнхий шүргэгч ℓ_2 -тэй параллел болохыг батал.

9.3. 8×8 квадратын 1 диагоналийн 2 үзүүр дээр орших 1×1 квадратуудыг салгаж авав. Үлдсэн хэсгийг 1×2 тэгш өнцөгтөөр бүрхэж болох уу?

9.4. Дурын бодит тоо x, y -ийн хувьд $P(x, y) > 0$ байх ба ямар ч эерэг бодит $\varepsilon > 0$ тоо авахад $P(x, y) < \varepsilon$ байхаар бодит тоо x, y олддог тийм бүхэл коэффициенттэй олон гишүүнт $P(x, y)$ олдох уу?

9.5. Тус бүр нь $2n$ -ээс ихгүй $n+1$ ширхэг натурал тоо $a_1, \dots, a_{n+1}$ өгчээ. Эдгээрийн аль нэг нь нөгөөгөө хуваана гэдгийг батал.

9.6. $a, b > 0$ гэе. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ гэсэн хоёр дарааллыг дараах рекуррент аргаар өгчээ. $a_1 = a$, $b_1 = b$ ба дурын $n \geq 1$ дугаарын хувьд:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}}$$

Тэгвэл дурын n -ийн хувьд $|b_{n+1} - a_{n+1}| \leq \frac{|b - a|}{2^n}$ болохыг батал.

Бодолтууд

9.1. $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ гэе. Хэрвээ n нь натурал тооны квадрат бол дурын i хувьд α_i тэгш байна. Эндээс n тооны хуваагчдын нийлбэр

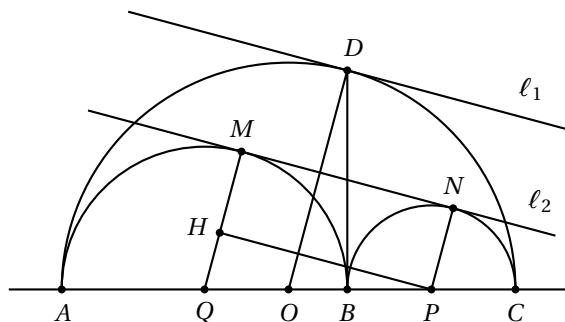
$$T(n) = \prod_{i=1}^s (1 + p_i + \dots + p_i^{\alpha_i}) \equiv 1 \not\equiv 2n \pmod{2}$$

болно. Учир нь $2 \mid \alpha_i$ үед

$$1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{\alpha_i} \equiv 1 \pmod{2}$$

юм. Иймд төгс тоо натурал тооны квадрат байх боломжгүй юм.

9.2.



K_1, K_2, K тойргуудын төвийг харгалзан Q, P, O үсгээр тэмдэглэе. M ба N нь ℓ_2 шүргэгчийн K_1 ба K_2 -тай шүргэлцсэн цэгүүд. $AQ = R > PC = r$ гэе. Тэгвэл $AO = R + r, OB = R - r$ ба

$$BD^2 = AB \cdot BC = 4Rr, \quad BD = 2\sqrt{Rr}$$

Нөгөө талаас P -ээс MQ -д PH перпендикулярыг буулгавал $HQ = R - r, PQ = R + r$ учраас

$$PH = \sqrt{PQ^2 - HQ^2} = 2\sqrt{Rr}$$

Ийнхүү $PH = BD, HQ = OB$ ба $\angle QHP = \angle OBD = 90^\circ$ учир $\triangle HPQ = \triangle OBD$. Тэгвэл $\angle HQP = \angle DOB, MQ \parallel OD$ тул $\ell_1 \parallel \ell_2$ байна.

9.3. Шатрын хөлгийн нэг диагоналийн 2 үзүүр дээр орших хоёр цэг нь ижил өнгийн нүд байна. Иймд үлдэх дүрсийн хар ба цагаан нүдний тоо 2-оор зөрөөтэй байна. Нөгөө талаас 1×2 тэгш өнцөгтөөр бүрхэж болдог дүрсийн хар ба цагаан нүдний тоо тэнцүү байх ёстой. Иймд үлдэх дүрсийг 1×2 тэгш өнцөгтөөр бүрхэх боломжгүй юм.

9.4. Олдоно гэж харуулъя.

$$P(x, y) = (y - x)^2 + (y^2 - x^2 - 1)$$

олон гишүүнт авч үзье.

Ямар ч бодит x, y -ийн хувьд $y - x = 0$ ба $y^2 - x^2 - 1 = 0$ нь нэгэн зэрэг биелэх боломжгүй тул $P(x, y) > 0$ байна.

Нөгөө талаас $P(x, \sqrt{x^2 + 1}) = (\sqrt{x^2 + 1} - x)^2$ нь $x \rightarrow +\infty$ үед 0 рүү тэмүүлнэ. Иймд ямар ч $0 < \varepsilon$ бодит тоог сонгож авах бүрд

$$P(x, \sqrt{x^2 + 1}) < \varepsilon$$

байхаар x тоо олдоно.

9.5. $i \in [n + 1]$ бүрийн хувьд a_i тоог $a_i = 2^{k_i} \cdot b_i$, b_i - сондгой натурал тоо байхаар цор ганц аргаар бичиж болно. Нөгөө талаас $2n$ -ээс хэтрэхгүй нийт n ширхэг сондгой натурал тоо байх тул Дирихлейн зарчмаар b_i тоонууд дотор хоёр ижил тоо бий. $b = b_\ell = b_k$ ба $\ell < k$ гэвэл

$$a_\ell = 2^\ell b, a_k = 2^k b \Rightarrow a_\ell \mid a_k$$

болж нэг нь нөгөөгөө хуваадаг хоёр тоо олдов.

9.6.

$$|b_n - a_n| \leq \frac{|b_{n-1} - a_{n-1}|}{2} \quad (1)$$

тэнцэтгэл бишийг баталъя.

$$\begin{aligned} |b_n - a_n| &= \left| \sqrt{\frac{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}{2}} - \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \right| \\ &= \sqrt{\frac{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}{2}} - \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \\ &\leq \max\{a_{n-1}, b_{n-1}\} - \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \\ &= \frac{|b_{n-1} - a_{n-1}|}{2} \end{aligned}$$

болж батлагдав.

Одоо батлах зүйлээ индукцээр баталъя. $n = 1, n = 2$ үед илэрхий. Хэрвээ

$$|b_{n-1} - a_{n-1}| \leq \frac{|b - a|}{2^{n-2}}$$

гэвэл

$$|b_n - a_n| \stackrel{(1)}{\leq} \frac{|b_{n-1} - a_{n-1}|}{2} \leq \frac{|b - a|}{2^{n-1}}$$

болж индукцийн шилжилт батлагдав.